احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفر. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

Vii																										,	يباچ	,
ix																						4	یبادٍ	، کا د	ناب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	•
1																							٠	لمومات	، مع	ابتدائی	1	L
1																		خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																										1.2		
32																							Ĺ	تفاعل		1.3		
54																					غلى	انمذ	م کی	ترسيم		1.4		
74																					بل	نفاء	انی اِنی	بنكوني		1.5		
95																								/		حدود ا	2)
95																										2.1		
113															٠.		عد	قواه	کے	ئے ۔	_,	پ کر	لاثر	פנ "		2.2		
126																										2.3		
146																										2.4		
165																							ار	استمر		2.5		
184	١.																					Į	ی ز	مماسح		2.6		
199)																									تفرق	3	Ł
199)																				ت ,	تف	K,	تفاعل		3.1	-	
221																					رں	, زق	ی ہ ِ تفر	عا ر قواعد		3.2		
240																										3.3		
257																										3.4		
277																										3.5		
294																										3.6		
310) .																			ىلى	تبد	ح .	شرر	د گیر		3.7		

عـــنوان

 325 340 340 341 340 341 352 363 364 374 385 386 387 391 44 391 45 46 47 46 47 48 51 52 53 54 55 55 56 57 57 58 58 59 605 605 605 70 7		تفرق کا استعال	4
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 57 30 30<td></td><td></td><td></td>			
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 57 30 30<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td>	اوسط قیمت	4.2 متله	
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 57 30 30<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
 391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر	356	3.1	
418 بیترین بنان 4.6 442 خط بخد کی اور تنو تات 47 خط بخد کی اور تر تات 47 خط بخد کی اور ریانسان نموند کئی 5 477 کسی محلت 5.1 489 کسی محلت 5.2 505 تعلق محلوات، ابتدائی قیت سخلے، اور ریانسانی نموند کئی 5.3 505 تعلی محلی برایم ترکیب بدل نر نیج ترکیب بدل نرتجی تات و تعلق محلیات 5.6 534 نمارن مجموع اور افعلی محلیات 5.5 551 نمارن محبوع اور اوسط قیت سخل 5.7 599 نماری محلی 5.8 605 نماری محلی 5.9 605 نماری محلی 5.10 625 تعلی می بدل 6.2 626 محلی و است محلی اور تح کلیات و الا مرحد 627 کسی اس است محلی اور تح کلیات و الا مرحد 628 کسی اس	اور y'' کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442 غط بدی کا اور تو تات 465 خیر توشی کلداد 477 4.8 477 5.1 477 5.1 489 5.1 5.2 تقری ساوات، ابتدائی تیب سنت، اور ریافسیاتی موند شی 5.3 5.2 5.5 کلی بدر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بیر بید ترایی بیر بیر بید بیر بید بیر بید بیر بیر بیر بید بیر			
465 ریب نیوش 4.8 477 کل کا 477 خیر تطبی محملات 5.1 489 خیر تطبی محملات 5.2 5.2 تفری سیدان آبید آئی قیت سلخ، اور ریاضیاتی تموند گشی 5.3 5.3 کل 5.3 5.4 اعداده بذریعہ شامی آبید آئی قیت سلخ، اور ادسط قیت سلخ 5.5 ریمان تجوی عواد رفطی محملات 5.6 نصوصیات، وتب، اور ادسط قیت سلخ 5.7 نیادی سیل 5.8 قطبی محمل میں بدل 6.5 اعدادی محمل 6.5 اعدادی محمل 6.5 اعدادی محمل 6.6 محمل محمل الله الله الله الله الله الله الله ال			
477 گل قریق الطاق الله 5.1 489 قریق ساوات، ابتدائی آیت سئط، اور ریاضیاتی موند ششی 5.2 505 تغیلی سرایید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.3 516 تغیلی شریعید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.4 54 اندازه بذر اید شای گموید 5.5 561 تغیادی مسئلد 5.6 578 تغیادی مسئلد 5.7 599 تغیادی مسئلد 5.8 605 تغیادی مسئلد 5.9 605 تغیادی مسئل 5.9 605 تغیادی مسئل 6.1 625 تغیادی مسئل 6.1 629 تغیادی وزاند 6.2 640 مینان کارتج کی کات والا سرحد 6.2 648 کغیال کات کر جم کی حال ال سرح الحال المراح و المراح المراح و الحال المراح و المراح المراح و الحال المراح و المراح المراح و المراح المراح و المراح المراح و المراح و المراح المراح و			
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت التی محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 562 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 599 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمیل 5.9 605 بخیری محمیل 5.0 605 بخیری محمیل 6.1 625 بخیری محمیل 6.1 626 بخیری محمیل 6.2 627 بخیری محمیل 6.3 628 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.5 6.6 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.6 6.7 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.7 71 بادی کشور استمال اور قوت بیالی افتراد کر محمیل استمال اور قوت بیالی انتخال الحمیلی استمال 6.8 740	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت التی محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 562 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 599 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمیل 5.9 605 بخیری محمیل 5.0 605 بخیری محمیل 6.1 625 بخیری محمیل 6.1 626 بخیری محمیل 6.2 627 بخیری محمیل 6.3 628 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.5 6.6 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.6 6.7 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.7 71 بادی کشور استمال اور قوت بیالی افتراد کر محمیل استمال اور قوت بیالی انتخال الحمیلی استمال 6.8 740	477	کیل .	5
489 ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی 505 تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3 516 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.4 534 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور اسط قیت سئلہ 5.5 56 خصوصیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 5.7 578 نیادی سئلہ 5.8 578 نیادی سئلہ 5.8 580 قطعی محمل شیل بدل 5.8 605 اعدادی محمل 5.0 605 محمل اللہ 5.0 605 محمل کی اس بدل 6.5 605 محمل کی اس بدل 6.5 625 کی کی طاق مرتب 6.1 640 محمل ہوں کے تجم کی طاق مرتب 6.2 648 کی طاق میں ہوں تجم کی طاق میں ہوں تجم کی طاق میں ہوں ہوں ہوں ہوں ہوں ہوں ہوں ہوں ہوں ہو		•	5
505 کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق 5.3 516 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.4 54 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.5 55 ریمان تجویم اور قطعی تحملیت 5.6 56 محمل کا سرا برا اور اصطفی تحمل میں بدل 5.8 605 نظمی تحمل میں بدل 5.9 605 اعدادی تحمل کا استعمال 6.1 625 محمل کا استعمال 6.1 626 محمل کا استعمال 6.1 640 مستحدی تحمل میں اور چھلا 6.2 648 محمل کا سرا ہو تے کلیات والا سرحد 6.3 663 اجسام طواف کے تجم۔ قرص اور چھلا 6.3 665 محمدی متحدیات کی لمبائیاں 6.5 670 معیاد اثر اور مرکز کہتے 6.7 671 معیاد اثر اور مرکز کہتے 6.7 671 فضل مرکز کہتے 6.8 731 بادی قش اور دیگر نمونی استعمال 6.9 740 افرائی قاعل 7 755 اعدال فی استعمال اللہ اور مرکز کہتے اللہ اور مرکز کہتے اللہ اور مرکز کہتے اللہ اللہ اللہ اللہ اللہ اللہ اللہ الل	ر با		
516 اندازه بذرایید تثانای مجموعها 534 5.5 5.6 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.7 5.8 5.8 5.8 5.8 5.8 5.9 5.9 5.0 605 606 605 606			
534 ريمان مجموع اور قطعي تحمالت 5.5 561 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.6 578 خمادی سئله 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 6.9 605 6.0 5.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.1 605 6.1 6.1 625 6.1 6.1 629 6.1 6.1 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 640 6.4 6.5 641 6.4 6.5 642 6.4 6.5 643 6.5 6.6 644 6.5 6.6 655 6.6 6.6 6.6 669 6.6 6.6 6.6 660 6.6 6.6 6.6 6.6 660 6.6 6.6 6.6 6.6 6.6 6.6 <td></td> <td></td> <td></td>			
561 فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل 5.6 578 5.7 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 5.9 605 5.0 5.10 625 605 6.1 626 6.2 6.1 627 6.1 6.2 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 663 6.4 6.5 664 6.5 6.5 665 6.6 6.6 6.6 670 6.2 6.4 687 6.3 6.4 688 6.5 6.6 689 6.6 6.7 710 6.8 6.8 731 6.8 6.9 740 6.10 6.5 755 7 10 6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578 بنیادی سئلد 5.7 5,10 5.8 5.8 5.8 5.8 6.0 5.8 6.0 5.9 5.9 6.0 5.9 6.0 5.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.1 6.2 6.2 6.2 6.1 6.2 6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599 قطع کمل میں برل 5.8 605 5.9 605 5.9 605 5.10 625 5.10 625 6.1 629 6.1 640 7 6.2 6.2 6.3 6.2 6.4 6.3 6.5 6.4 6.6 6.5 6.6 6.9 6.7 6.7 7 6.7 7 6.8 7 6.9 6.0 6.0 6.1 6.9 6.9 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و	^ت کمل میں بدل	5.8 قطعی	
 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 625 تاعدہ ذوزنقہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا 6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 میار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 میار اثر اور مرکز کمیت 6.9 وسطانی مرکز 6.7 میار اثر اور قوت سیال اور قوت سیال 6.10 میادرائی تفاعل 			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اتا والا سرحد 6.2 6.1.1 640 تدبل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 6.3 648 شار الحد ہے جم کی سمانی ہے۔ 6.3 جرم سور سے الحد ہے۔ 6.4 6.6 6.6 مستوی متخدیات کی لمبائیاں 6.6 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.0 فشار سیال اور قوت سیال 740 ماورائی تفاعل			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اتا والا سرحد 6.2 6.1.1 640 تدبل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 6.3 648 شار الحد ہے جم کی سمانی ہے۔ 6.3 جرم سور سے الحد ہے۔ 6.4 6.6 6.6 مستوی متخدیات کی لمبائیاں 6.6 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.0 فشار سیال اور قوت سیال 740 ماورائی تفاعل		کا ب	_
629 تدريل ہوتے کليات والا سرحد 640 6.2 640 6.2 6.3 6.4 6.4 6.5 6.5 6.6 6.6 6.6 6.7 6.6 6.8 6.7 711 6.8 731 6.8 740 6.0 755 6.0	0_0		6
640 گیاں کاٹ کر قجم کی طاش 648 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 6.4 676 شوی متحدیات کی لمبائیاں 687 6.6 689 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 67 6.71 711 0.71 68 6.71 716 وسطانی مرکز 6.8 مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال 740 مادرائی نقاعل			
648 اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا 6.3 663 شکلی چھلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 688 7.1 6.8 731 6.8 7 740 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 755 ماورائی نقاعل 7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663 بکی چیلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 711 6.7 7 711 6.8 7 710 6.8 7 731 10 6.0 740 6.10 6.10 755 10 6.10 7) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 687 6.5 688 6.6 699 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 6.7 6.7.1 70 6.8 731 8 740 6.10 755 ماورائی تفاعل	•		
687 شطح طواف کا رقبہ 699 6.7 711 6.7 711 6.7.1 716 9 6.8 731 700 6.10 701 6.10 702 6.10 703 6.10 704 6.10 705 6.10 706 6.10 707 6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

عـــنوان

قدرتی لوگار تھم	7.2	
قوت نمائی تفاعل	7.3	
807 $\log_a x$ let a^x	7.4	
	7.5	
قاعده گھوپیٹال کی میں میں میں میں میں ہوتی ہوتی ہوتی ہے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔	7.6	
اضافی شرح نمو	7.7	
7.7.1 ترقیمی اور شانکی علاش		
الث تكونياتى تفاعل	7.8	
الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9	
ہذالولی تفاعل	7.10	
يك رتبي تفرقی مساوات	7.11	
يوگر كى اعداد كى تركيب؛ ميدان ڈھلوان	7.12	
المريق 43	ا تکمل کے	8
ر تمکن کے بنیادی کلیات	8.1	
تكمل بالحصص		
964	0.2	
974	8.3	
كونياتى بدلُ	8.4	
حبدول کمل اور کمپیوٹر	8.5	
	8.6	
, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	0.0	
ىلىل 1043	! لا مت ناہی ^{تت}	9
اعداد کی ترتیب کی حد	9.1	
ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	9.2	
لامتناي تسلسل	9.3	
غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پر کھ	9.4	
یر غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پر کھ	9.5	
یر منفی اجزاء کے شکسل کا تنابی اور جذری پر کھ	9.6	
بیر کی ابراء کے سطح ما بی اور جدری چرھی ۔		
بدليا مشكل، على اور مشروط ارتفاز	9.7 9.8	
	9.8	
پیر اور مقلان مسلس کا از تکاز؛ خلل کے اندازے	9.9 9.10	
یر من کار نظر: کس کے انداز کے	9.10	
طاق سی کے استعمال	9.11	
ھے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد	ا مخروطی ج	0
ے میں مدیر کا ہوتے ہی گئی۔ مخروطی چھے اور دو قدری مساواتیں	10.1	•
ر می تعداد می از در معنون کا جماعت بندی	10.2	

1246	
1271	ا مضميمه اول
1273	ب ضميمه دوم

ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

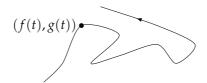
امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر. ئي

2011 كتوبر _2011



شکل 10.53: مستوی xy میں ضروری نہیں کہ ذرے کی راہ x یا y کا تفاعل ہو۔

10.4 مستوى منحنيات كے مقدار معلوم روپ كاحصول

y جب ایک ذرہ شکل 10.53 میں دکھائی گئی راہ پر چلتا ہو، ہم اس کی حرکت کو کار تیسی کلیے کی صورت میں لکھنے کی تو تع نہیں کر سکتے ہیں جو کو وقت کو بلا واسطہ x کی صورت میں پیش کرتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم ذرے کی راہ کے ہر محدد کو وقت x کا نفاعل کھھ کر اس راہ کو ایک جوڑی مساوات y=g(t) ، x=f(x) کا نفاعل کھھ کر اس راہ کو ایک جوڑی مساوات ہر کھے یہ ساوات زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔ پر ذرے کا مقام دیتے ہیں لہذا حرکت پر خور کے لئے یہ مساوات زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔

تعریف: اگر $t \geq 1$ ایک وقفہ پر x اور y استمراری تفاعل

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

ہوں تب نقاط (x,y)=(f(t),g(t)) کا سلسلہ، جن کی تعریف مذکورہ بالا مساوات پیش کرتی ہیں، محدوی مستوی ہیں ایک منحنی ہو گی۔ ان مساوات کو اس منحنی کی مقدار معلوم مساوات (x,y)=(f(t),g(t)) مقدار معلوم وقفہ (x,y)=(x,y) معلوم وقفہ (x,y)=(x,y) بند وقفہ (x,y)=(x,y) مقدار معلوم وقفہ بیان کرنا ہے۔ مساوات اور مقدار معلوم وقفہ بیان کرنا ہے۔

بہت سارے مواقع پر 💈 وقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دیگر مواقع پر یہ کسی اور متغیر مثلاً زاویہ (اگلی مثال) کو ظاہر کر سکتا ہے۔

مثال 10.13: وائره $y^2+y^2=1$ درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفه

 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

parametric equations²²

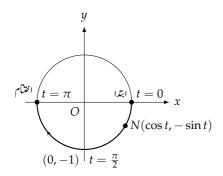
parameter²³

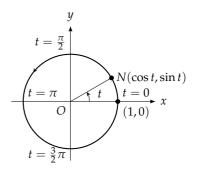
parameter interval²⁴

initial point²⁵

terminal point²⁶

parametrization²⁷





شکل 10.55: گھڑی کے رخ حرکت (مثال 10.14)

شکل 10.54: گھڑی کے الٹ رخ حرکت (مثال 10.13)

بڑھتے t کے لئے واکرہ $x^2+y^2=1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک ذرہ کا مقام N(x,y) ظاہر کرتے ہیں (شکل 10.54)۔

چونکہ ہر t کے لئے

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

ہوتا ہے للذا ہم جانتے ہیں کہ یہ ذرہ اس دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ ہم جانا چاہتے ہیں کہ دائرے کے کتنے حصہ پر ذرہ حرکت کرتا ہے۔

ON يہ جانے کے لئے $n ext{ } t ext{ } t$

مثال 10.14: نصف دائره درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفه

$$x = \cos t$$
, $y = -\sin t$, $0 \le t \le \pi$

ایک ذرے کا مقام دیتے ہیں جو t کو t ہے بڑھا کہ π کرنے سے بڑھانے سے گھڑی کے رخ دائرہ t پر حرکت کرتا ہے (شکل 10.55)۔

چونکہ نہ کورہ بالا مقدار معلوم مساوات سے حاصل محدد دائرہ کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں المذابید ذرہ دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ یہ جانے t=0 کے لئے کہ دائرے کے کتنے جھے پر ذرہ حرکت کرتا ہے، ہم t=0 کا t=0 کرتے ہوئے ذرہ کے مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ لمجہ کو t=0

x یہ نہ کورہ بالا مساوات سے x کی قیمت گھٹی ہے جو ذرے کا ابتدائی مقام ہے۔ البتہ اب x بڑھانے سے کی قیمت گھٹی ہے جبکہ x کی قیمت منفی ہو کر x اس کی قیمت منفی ہو کر x ہو گئی کہ x کے البتدا ذرہ میں رہتا ہے۔ پول ذرہ دائرے کے نجلے نصف محے پر سخر کرتا ہے۔ سے میں رہتا ہے۔ یول ذرہ دائرے کے نجلے نصف محے پر سخر کرتا ہے۔

مثال 10.15: نصف قطع مكافى

مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام N(x,y) درج ذیل مقدار مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x = \sqrt{t}$$
, $y = t$, $t \ge 0$

اس ذرے کی راہ کو پیجان کر اس کو بیان کریں۔

طل: ہم مساوات $x=\sqrt{t}$ اور y=t ہوئے راہ کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اگر ہماری قسمت انچھی ہو، y=t الیما کرنے ہے کوئی جانی پیچانی مساوات حاصل ہو سکتی ہے۔

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ ذرے کے مقام کے محدد مساوات $y=x^2$ کو مطمئن کرتے ہیں المذا ذرہ قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ یہ کہنا غلط ہو گا کہ یہ ذرہ پورے قطع مکانی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔ یہ ذرہ حقیقت میں نصف قطع مکانی پر حرکت کرتا ہے۔ ذرے کے مقام کا x محدد کبھی بھی منفی نہیں ہوتا ہے۔ لحہ t=0 پر ذرہ t=0 سے شروع کرتے ہوئے t بڑھنے سے رکع اول میں رہ کر اوپر بڑھتا جاتا ہے (شکل 10.56)۔

مثال 10.16: مكمل قطع مكانى راه

مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام N(x,y) درج ذیل مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x = t$$
, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$

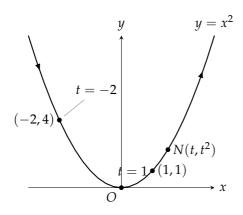
اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

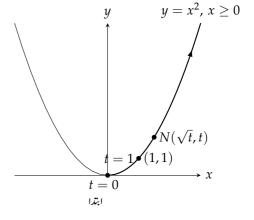
صل: تم ماوات x=t اور $y=t^2$ ی خارج کر کے x اور y کے تھ مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = (t)^2 = x^2$$

 $y=x^2$ زرے کا مقام مساوات $y=x^2$ کو مطمئن کرتی ہے المذا ذرہ قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ اب مثال 10.15 کے برعکس ذرہ مکمل قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ جیسے جیسے t کی قیت ∞ سے بڑھ کر ∞ پہنچتی ہے، ذرہ یا بگی سے نیچ آتے ہوئے مبدا ہے گزر کر اوپر دائیں حرکت کرتا ہے (شکل 10.57)۔





شكل 10.57: مكمل قطع مكانى راه (مثال 10.16)

شكل 10.56: نصف قطع مكانى راه (مثال 10.15)

جیبا ہم نے مثال 10.16 میں دیکھا، کسی بھی منحنی y=f(x) کی مقدار معلوم روپ x=t, y=f(t) ہو گی۔ یہ اتنی سادہ صورت ہے کہ اس کو ہم حقیقت میں استعمال نہیں کرتے ہیں لیکن اس سے نظریہ با آسانی سمجھ آتا ہے۔

مثال 10.17: ایک ذرے کا مقام لحمہ t پر N(x,y) درج ذیل دیتے ہیں۔

$$x = a \cos t$$
, $y = b \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

اس ذرے کی حرکت کو بیان کریں۔

طل: ہم مساوات $t=rac{y}{a}$ اور $t=\sin t=rac{y}{b}$ اور $t=\sin t$

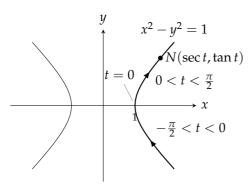
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

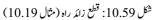
زرے کا مقام صاوات تر تحیم t=0 پر ذرے کے مقام کے خوب کو مطمئن کرتا ہے البذا یہ ذرہ تر تحیم پر حرکت کرتا ہے۔ لحمہ t=0 پر ذرے کے مقام کے محدد

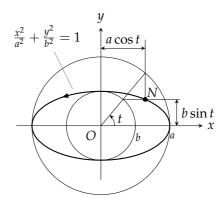
$$x = a\cos(0) = a, \quad y = b\sin(0) = 0$$

t ہوں گے البذا یہ ابتدائی نقطہ (a,0) سے حرکت شروع کرتا ہے۔ t بڑھانے سے ذرہ اوپر اور بائیں گھڑی کے الٹ رخ حرکت کرتا ہے۔ t یہ واپس نقطہ t واپس نقطہ t یہ واپس نقطہ t یہ واپس نقطہ t یہ واپس نقطہ t یہ واپس نقطہ کر رک جاتا ہے (شکل t 20.58)۔

مثال 10.18: ورج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ، جو مثال 10.17 میں b=a پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں، $x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad 0\leq t\leq 2\pi$







شكل 10.58: ترخيمي راه (مثال 10.17)

دائرہ
$$x^2 + y^2 = a^2$$
 کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 10.19: ایک ذرے کا مقام کھ t پر درج ذیل مقدار معلوم مساوات دیتے ہیں۔

$$x = \sec t$$
, $y = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

حل: هم درج ذیل مساوات

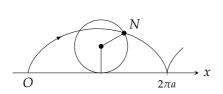
$$\sec t = x$$
, $\tan t = y$

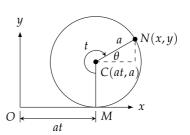
ے خارج کر کے کار تیبی میادات حاصل کرتے ہیں۔ اییا مماثل t=1 sec 2 t - tan 2 t=1

$$\sec^2 t - \tan^2 t = x^2 - y^2 = 1$$

چونکہ ذرے کے مقام کے محدد (x,y) مساوات $y^2-y^2=1$ کو مطمئن کرتے ہیں لہذا یہ ذرہ قطع زائد پر حرکت کرتا ہے۔ متغیر

 $cvcloid^{28}$





شکل 10.60: پہیے کے محیط پر نقطے کا مقام اور متدیر۔

t علی جم x محور کو وہ لکیر لیتے ہیں جس پر پہیا چل رہا ہے اور لمحہ t=0 پر نقطہ N کو مبدا پر لیتے ہیں۔ ہم زاویہ t کو مقدار معلوم لیتے ہیں جو پہیا گھومنے کا زاویہ ہے اور اس کو ریڈ بین میں نایا جاتا ہے۔ شکل t=0.60 میں پہیے کو کچھ دیر بعد دکھایا گیا ہے جہاں اس کا قاعدہ، مبدا ہے فاصلہ پر ہے۔ پہیے کا مرکز t=0.60 میر ہوگا اور t=0.60 میرد درج ذیل ہوں گے۔

$$x = at + a\cos\theta$$
, $y = a + a\sin\theta$

زاوبہ θ کو t کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے ہم شکل سے

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

لكھ سكتے ہيں۔ يوں

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \quad \sin \theta = \sin \left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

ہوں گے۔در کار مساوات

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

ہیں جنہیں عموماً

(10.28)
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

کلھا جاتا ہے۔شکل 10.60 میں اس متدیر کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔

كمتر وقتی منحنی اور يکسال وقتی منحنی

اگر ہم شکل 10.60 کی متدیر کو الٹ کریں، مساوات 10.28 اس پر بھی لاگو ہو گا۔ حاصل منحیٰ کے دو اہم خواص ہیں۔ پہلی خاصیت مبدا O اور پہلی قوس میں سب سے گہرا نقطہ B سے تعلق رکھتا ہے۔ ایک بلا رگڑ گیند جس پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہو، ان دو نقطوں کو جوڑنے والی تمام منحنیات میں سب سے جلداں متدیر پر چلتے ہوئے O سے B پنچتا ہے۔ یوں اس متدیر کو کمتر وقتی منحنی کہتے ہیں۔ اس کی دوسری فاصیت سے ہے کہ اگر گیند کو O کی بجائے کسی دوسرے نقطہ سے چلئے دیا جائے یہ گیند B تک پہنچتے ہوئے اتنا ہی وقت لے گا جو یہ B تک پہنچتے ہوئے لیتا ہے۔ یوں اس کو یکساں وقتی منحنی بھی کہتے ہیں۔

کیا O اور B کے ﷺ اس کے علاوہ بھی کوئی کمتر وقت کی منحنی پائی جاتی ہے؟ ہم اس کو بطور ریاضیاتی پیش کر سکتے ہیں: ابتدا میں چو نکہ گیند کی رفتار صفر ہے للذا اس کی حرکی توانائی صفر ہو گی۔ مبدا (0,0) سے کسی بھی نقطہ (x,y) تک گیند کو پہنچانے کی خاطر mgy کام تقلی کشش کو کرنا ہو گا اور یہ توانائی لازماً حرکی توانائی میں تبدیلی کے برابر ہو گی، یعنی:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

یوں (x,y) پر پہنچ کر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2gy}$$

ہو گی جس کو

$$rac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}$$
 گیند کی راہ پر چلتے ہوئے ds تفرقی فاصلہ ہے ds

جی کھھا جا سکتا ہے۔ کسی مجھی مخصوص راہ y=f(x) پر y=f(x) تک چلتے ہوئے درکار وقت T_f درج ذیل ہو گ

(10.29)
$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx$$

اں وقت (تمل کی قیت) کو کونی منحیٰ y=f(x) کمتر کرتی ہے؟

پہلی نظر میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسا O سے B تک سیدھی کئیر (جویقیناً کمتر فاصلہ ہے) پر گیند کمتر وقت میں O سے B تک پنچے گا کئین کیا انسبتاً کمبی کا انسبتاً کمبی کا انسبتاً کمبی کا انسبتاً کمبی کا کہ انسبتاً کمبی کیا ہوتا ہے۔ میں ممکن ہے کہ شروع میں گیند کو سیدھا نیچے گرنے دینے سے جلد زیادہ رفتار حاصل کیا جا سکتا ہے جس کی بنا نسبتاً کمبی راہ بھی کم قوت میں طے کی جا سکتا ہو۔ حقیقت میں یمی درست جواب ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے (ثبوت کو پیش نہیں کیا جائے گا) کہ O سے B تک متدیر O اور B کے چھ واحد کمتر وقتی منحنی ہے۔

اگرچہ متدیر کو O اور B کے 👸 واحد کم وقتی منحیٰ ثابت کرنااس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا، ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ متدیر یکساں

وقتی منحیٰ ہے۔ متدیر کے لئے مساوات 10.29 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$T_{x=0} = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{2gy}}$$

$$= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(1 - \cos t)}} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}} \, \mathrm{d}t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

$$i \, dx = a(1 - \cos t) \, dt$$

$$i \, dy = a\sin t \, dt$$

$$\mathcal{L} \cup \mathcal{R} \quad y = a(1 - \cos t)$$

یوں بے رگڑ گیند کو متدیر پر چلتے ہوئے O سے B تک پہنچنے کے لئے $\pi\sqrt{rac{a}{g}}$ وقت درکار ہو گا۔

فرض کریں ہم O کی بجائے متدیر پر نقطہ (x_0,y_0) سے گیند کو چلنے دیں جس کی مطابقتی مقدار معلوم قیت $t_0>0$ ہے۔ متدیر پر اس کے بعد کسی نقطہ (x,y) پر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}$$
 $(y = (1 - \cos t))$

ہو گی۔ یوں (x_0,y_0) سے B تک پہنچنے کے لئے درکار وقت درج زیل ہو گا۔

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}} \, dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}} \, dt$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{(2\cos^2 \frac{t_0}{2} - 1) - (2\cos^2 \frac{t}{2} - 1)}} \, dt$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{t}{2} \, dt}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t = t_0}^{t = \pi} \frac{-2 \, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad [u = \cos(t/2), c = \cos(t_0/2)]$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1} \frac{u}{c} \right]_{t = t_0}^{t = \pi}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1} \frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)} \right]_{t_0}^{\pi}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} (-\sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

یہ ٹھیک اتنا ہی وقت ہے جو گیند کو O سے B تک چنچنے ہوئے درکار ہوتا ہے۔ نقطہ B تک جنچنے کے لئے درکار وقت پر ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ بول شکل میں A ، O اور C سے ابتدا کرتے ہوئے تینوں گیند B تک ایک جتنے وقت میں پنچین گے۔

معياري مقدار معلوم روپ

$$x^{2} + y^{2} = a^{2}$$

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

رداس
$$a$$
 کے دائرہ کا پیدا کردہ مشدیر $x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t)$

ضمیمه ا ضمیمه اول

ضمیمه به وم