

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیتال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
875	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصوص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نکتہ بنائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1041	9 لائنائی تسلسل	
1041	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	

1047	ا ضمیمہ اول	
1049	ب ضمیمہ دوم	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

لا متناہی تسلسل

اس باب میں ہم ایک حیران کن کلیہ اخذ کرتے ہیں جس کی مدد سے بہت سارے تفاعل کو "لا متناہی کثیر رکنی" کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا اور ساتھ ہی کثیر رکنی کے ارکان حذف کر کے کثیر رکنی کو متناہی بنانے سے پیدا خلل بھی جان پائیں گے۔ ان تسلسل کو طاقی تسلسل کہتے ہیں۔ قابل تفرق تفاعل کو تخمینی طور پر کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں مدد دینے کے علاوہ طاقی تسلسل دیگر مواقع پر بھی کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ غیر بنیادی مکمل کی قیمت کے حصول کے علاوہ حراری توانائی کی منتقلی، ارتعاش، کیمیائی نفوذ اور ترسیل اشارات کے تفرقی مساوات کے حل میں یہ موثر کردار ادا کرتے ہیں۔ آپ یہاں وہ ان تفاعل کے بارے میں سیکھ پائیں گے جو سائن اور انجینئری میں بہت زیادہ استعمال ہوتے ہیں۔

9.1 اعداد کی ترتیب کی حد

غیر رسمی طور پر ترتیب سے مراد مرتب چیزوں کا سلسلہ ہے۔ اس باب میں ہمیں اعداد کی ترتیب سے غرض ہو گا۔ ترکیب نیوٹن سے حاصل اعداد کی ترتیب $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ یا (ہلکے دن کوچ کے) بر فانی روٹی کے کثیر الاضلاع کی ترتیب $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ہم دیکھ چکے ہیں۔ ان ترتیبوں کی حد پائی جاتی ہے، البتہ بہت سارے اہم ترتیبوں کے حد نہیں پائے جاتے ہیں۔

تعریف اور علامتیت

ہم 3 کے ہر عدد صحیح مضرب کو ایک مقام مختص کر کے ایک فہرست بنا سکتے ہیں:

دائرہ کار	1	2	3	...	n	...
سعت	3	6	9		3n	

پہلا عدد 3، دوسرا 6، تیسرا 9، وغیرہ، وغیرہ ہیں۔ مختص کرنے کا عمل ایک تقاضا ہے جو n ویں مقام کو $3n$ مختص کرتا ہے۔ ترتیب کی بناوٹ کا بنیادی تصور یہی ہے۔ ایک تقاضا ہمیں بتاتا ہے کہ کس مقام پر کونسا عدد ہو گا۔

تعریف: ایک تقاضا جس کا دائرہ کار کسی عدد صحیح n_0 کے برابر یا اس سے بڑے عدد صحیح پر مشتمل اعداد کا سلسلہ ہو لامتناہی ترتیب¹ (یا ترتیب²) کہلاتا ہے۔

□

عموماً $n_0 = 1$ ہوتا ہے اور ترتیب کا دائرہ کار مثبت اعداد صحیح پر مشتمل ہو گا۔ البتہ بعض اوقات ہم تسلسل کو کسی دوسرے عدد صحیح سے شروع کرنا چاہتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن میں ہم $n_0 = 0$ لیتے ہیں۔ اگر ہم n اصطلاح پر مشتمل کثیر الاصطلاح کی ترتیب کی بات کریں تب ہم $n_0 = 3$ منتخب کرنا چاہیں گے۔

ترتیب کی تعریف کسی بھی تقاضا کی طرح کی جاتی ہے، مثلاً:

$$a(n) = \sqrt{n}, \quad a(n) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{n-1}{n}$$

یہ ظاہر کرنے کی خاطر کہ دائرہ کار عدد صحیح ہے، ہم حرف n استعمال کرتے ہیں تاکہ دیگر غیر تابع متغیر کے لئے مستعمل حروف x ، y ، z ، t ، وغیرہ مذکورہ بالا کی طرح تعریفی قاعدہ میں کلیات عموماً مثبت عدد صحیح سے زیادہ بڑے دائرہ کار کے لئے درست ہوتے ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے یہ بعض اوقات سود مند ثابت ہوتا ہے۔

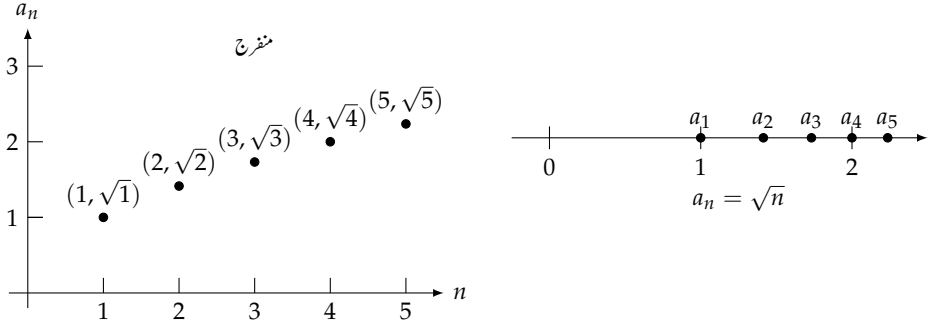
عدد $a(n)$ ترتیب کا n واں جزو یا اشاریہ n والا جزو ہو گا۔ اگر $a(n) = \frac{n-1}{n}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{array}{ccccccc} & n \text{ واں جزو} & \text{تیسرا جزو} & \text{دوسرا جزو} & \text{پہلا جزو} & & \\ \hline a(1) = 0 & a(2) = \frac{1}{2} & a(3) = \frac{2}{3} & \cdots & a(n) = \frac{n-1}{n} & & \end{array}$$

اشاریہ علامت استعمال کرتے ہوئے ہم $a(n)$ کو a_n لکھتے ہیں۔ اشاریہ علامتی روپ میں یہی ترتیب درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\begin{array}{ccccccc} & n \text{ واں جزو} & \text{تیسرا جزو} & \text{دوسرا جزو} & \text{پہلا جزو} & & \\ \hline a_1 = 0 & a_2 = \frac{1}{2} & a_3 = \frac{2}{3} & \cdots & a_n = \frac{n-1}{n} & & \end{array}$$

ترتیب پر تبصرہ کرتے ہوئے ہم عموماً n ویں جزو کے کلیہ کے ساتھ ساتھ چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں۔



شکل 9.1: جزو a_n آخر کار ہر عدد صحیح سے بڑھتا ہے لہذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرد ہے۔

مثال 9.1:

جس ترتیب کا تعریفی کلیہ درج ذیل ہو اس کے لئے ہم درج ذیل لکھتے ہیں

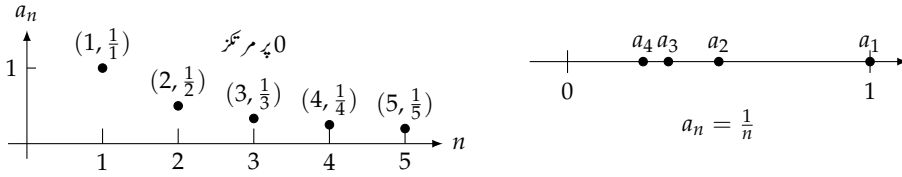
$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{n}, \dots$	$a_n = \sqrt{n}$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$	$a_n = \frac{1}{n}$
$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots$	$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$
$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$
$0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right), \dots$	$a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right)$
$3, 3, 3, \dots, 3, \dots$	$a_n = 3$

□

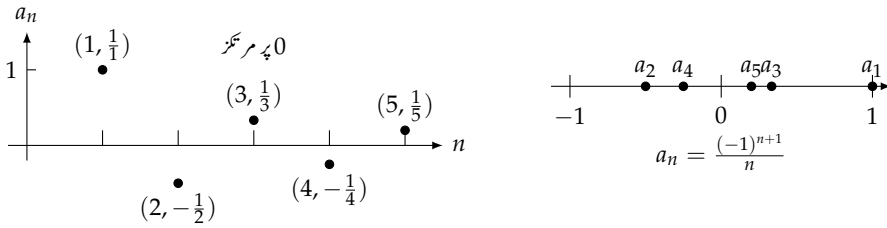
ان تمام ترتیبوں کو دو مختلف انداز میں شکل 9.1 تا شکل 9.6 میں دکھایا گیا ہے۔

علامت

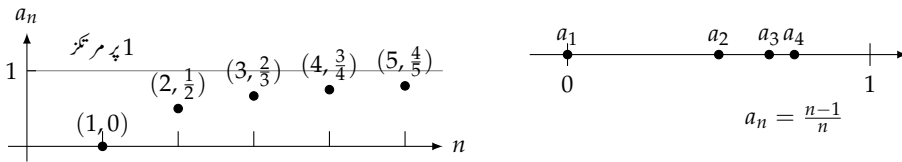
جس ترتیب کا n واں جزو a_n ہو اس ترتیب کو ہم $\{a_n\}$ سے ظاہر کرتے ہیں جو ترتیب a اشاریہ n پڑھا جاتا ہے۔ مثال 9.1 میں دوسری ترتیب $\{\frac{1}{n}\}$ ہے جو ترتیب ایک بڑے تین پڑھا جاتا ہے۔ آخری ترتیب $\{3\}$ ہے جو مستقل ترتیب 3 کہلائے گی۔



شکل 9.2: $a_n = \frac{1}{n}$ ، جیسے جیسے n بڑھنے سے گھٹتے ہوئے 0 کے قریب پہنچتے ہیں لہذا ترتیب $\{a_n\}$ صفر کو مرکز ہے۔

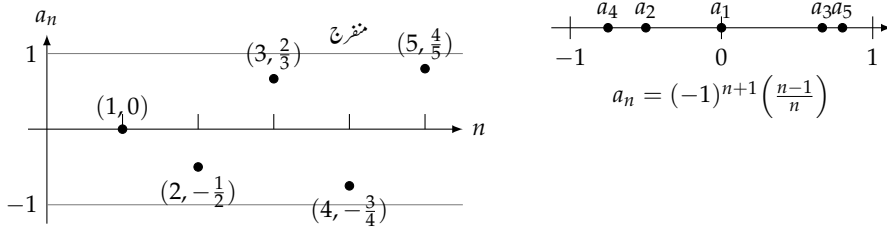


شکل 9.3: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ کی علامت ہر مرتبہ تبدیل ہوتی ہے لیکن اس کی قیمت 0 پر مرکز ہے۔

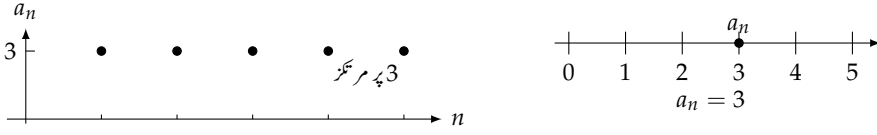


شکل 9.4: جیسے جیسے n بڑھتا ہے $a_n = \frac{n-1}{n}$ بتدریج 1 تک پہنچتا ہے لہذا ترتیب $\{a_n\}$ مرکز ہے 1 پر۔

3 -



شکل 9.5: $a_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{n-1}{n} \right]$ کی علامت ہر قدم پر تبدیل ہوتی ہے۔ مثبت اجزاء 1 کو پہنچتے ہیں جبکہ منفی اجزاء -1 کو پہنچتے ہیں لہذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرج ہے۔



شکل 9.6: مستقل اعداد $a_n = 3$ کی قیمت 3 ہی رہتی ہے لہذا ترتیب $\{a_n\}$ کی قیمت 3 پر مرکب ہے۔

ارتکاز اور انفراج

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

