

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامسٲٲ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیت
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تنگی اور کردی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولا کے حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوکت
1479		جوابات
1481	ا	ضمیمہ اول
1483	ب	ضمیمہ دوم
1485	ج	ضمیمہ تین
1487	د	ضمیمہ چار
1489	ه	ضمیمہ پانچ
1491	و	ضمیمہ چھ
1493	ز	ضمیمہ سات

1495

ح ضمیمہ آٹھ

1497

ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 12

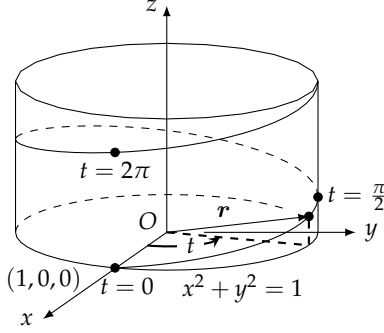
سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت

سرسری جائزہ جب کوئی جسم فضا میں حرکت کرتا ہو، مساوات $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ جو اس جسم کے محدود کو بطور وقت کا تفاعل دیتی ہیں، اس جسم کی راہ اور حرکت کی مقدار معلوم مساوات ہوں گی۔ سمتیہ علامت کی مدد سے ہم انہیں ایک مساوات $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں جو اس جسم کا مقام بطور وقت کا سمتی تفاعل دیتی ہے۔

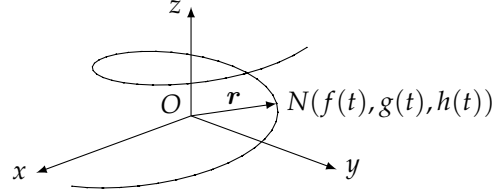
اس باب میں ہم احصاء استعمال کرتے ہوئے حرکت پذیر اجسام کی راہ، سمتی رفتار اور اسراع پر غور کریں گے۔ ہم گولہ، سیارہ اور مصنوعی سیارہ کی راہ اور حرکت کے عمومی سوالات کے جوابات جان سکتے گے۔ آخر حصہ میں ہم نیوٹن کے قوانین اور تجاذب کی مدد سے سیاروں کی مدار کے قوانین کیلبر دریافت کریں گے۔

12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

فضا میں متحرک ذرہ کی حرکت جاننے کی خاطر ہم مبدا سے اس ذرہ تک سمتیہ \mathbf{r} لے کر \mathbf{r} میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں (شکل 12.1)۔ اگر اس ذرہ کے محدود مقام وقت کے ساتھ دو بار قابل تفرق ہوں، تب \mathbf{r} بھی ایسا ہو گا، اور ہم کسی بھی لمحہ پر وقت کے لحاظ سے \mathbf{r} کے تفرق لے کر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور اسراع جان سکتے ہیں۔ اگر ہمیں اس ذرہ کی سمتیہ سمتی رفتار یا سمتیہ اسراع بطور وقت کے استمراری تفاعل معلوم ہو اور ہمیں ذرے کی ابتدائی مقام اور سمتیہ رفتار کے بارے میں معقول معلومات ہو، تب ہم مکمل کی مدد سے، وقت کا تفاعل \mathbf{r} جان سکتے ہیں۔



شکل 12.2: پیچدار منحنی $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ کا بالائی نصف حصہ



شکل 12.1: فضا میں متحرک ذرہ کا تعین کر سمتیہ $\mathbf{r} = \vec{ON}$ متغیر t کا تفعل ہو گا۔

تعریف

جب وقفہ I کے دوران ایک ذرہ فضا میں حرکت کرتا ہو، ہم اس ذرہ کے محدود جو وقت کے تفعل ہو گئے کی تعریف درج ذیل کرتے ہیں۔

$$(12.1) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I$$

نقاط $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ فضا میں وہ منحنی دیتے ہیں جنہیں ہم اس ذرے کی راہ¹ کہتے ہیں۔ مساوات 12.1 اس منحنی کی مقدار معلوم روچے ہے۔ مبداء ذرے کے مقام $N(f(t), g(t), h(t))$ تک لمحہ t پر سمتیہ

$$\mathbf{r}(t) = \vec{ON} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

اس ذرے کا تعین کر سمتیہ² ہے۔ تفعل f ، g اور h تعین کر سمتیہ کے اجزاء ہیں۔ ذرے کی راہ سے مراد وقفہ t کے دوران \mathbf{r} کی پیدا کردہ منحنی ہے۔

مساوات 12.1 سمتیہ \mathbf{r} کی تعریف وقفہ I پر حقیقی متغیر t کی صورت میں دیتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر دائرہ کار، سلسلہ D ، پر سمتیہ تفعل³ یا سمتیہ قیمت تفعل⁴ سے مراد وہ قاعدہ ہو گا جو D کے ہر رکن کو فضا میں ایک سمتیہ منحس کرتا ہو۔ موجودہ استعمال میں دائرہ کار حقیقی اعداد کے وقفوں پر مشتمل ہوں گے۔ بعد کے ایک باب میں دائرہ کار، مستوی یا فضا میں خطوں پر مشتمل ہوں گے جہاں ہم سمتی تفعل کو سمتی میدان کہیں گے۔

path¹
position vector²
vector function³
vector-valued function⁴

ہم حقیقی قیمت تفاعل کو غیر سمتی تفاعل⁵ کہتے ہیں تاکہ ان میں اور سمتی تفاعل میں فرق کرنا ممکن ہو۔ سمتیہ r کے اجزاء t کے غیر سمتی تفاعل ہیں۔ سمتی تفاعل کی تعریف اس کے ارکان تفاعل کی صورت میں دیتے وقت ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل کا دائرہ کار ہی ارکان کے دائرہ کار ہیں۔

مثال 12.1: بیچ دار تفاعل
تمام حقیقی متغیر t کے لئے سمتی تفاعل

$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$$

معین ہے اور r دائری نیکی $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد لپٹ کر چلتا ہے (شکل 12.2)۔ سمتی تفاعل r کے i اور j اجزاء جو r کے سر کے x اور y محدود ہیں دائری نیکی کی مساوات

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

کو مطمئن کرتے ہیں لہذا r اس نیکی پر پایا جاتا ہے۔ متغیر t بڑھنے k جزو بڑھتا ہے جس کی بنا منفی اوپر بلند ہوگی۔ نیکی کے گرد ایک دائرہ $t = 2\pi$ پر مکمل ہوگا۔ درج ذیل مساوات بیچ دار تفاعل کی مقدار معلوم مساوات ہے، جہاں وقفہ $-\infty \leq t \leq \infty$ ہے۔

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

□

حد اور استمرار

ہم سمتی قیمت تفاعل کے حد کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کے حد کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں $r = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ ایک سمتی تفاعل اور L ایک سمتیہ ہے۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایک ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام t کے لئے

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies |r(t) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جب t کی قیمت t_0 کے قریب تر ہو تب r کا حد L ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$$

□

اگر $L = L_1 i + L_2 j + L_3 k$ ہو تب $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$ ٹھیک اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = L_3$$

درج ذیل مساوات سمتی تفعل کا حد تلاش کرنے کی عملی ترکیب دیتی ہے۔

$$(12.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \right) i + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right) j + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \right) k$$

مثال 12.2: اگر $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} &= \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos t \right) i + \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t \right) j + \left(\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} t \right) k \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j + \frac{\pi}{4} k \end{aligned}$$

□

ہم سمتی تفعل کی استمرار کی تعریف حقیقی قیمت تفعل کی استمرار کی تعریف کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: اگر $r(t)$ کے دائرہ کار میں نقطہ t_0 ہے $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$ ہو تب $r(t)$ اس نقطہ پر استمرار⁷ ہو گا۔ اگر اپنے پورے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر $r(t)$ استمراری ہو تب یہ تفعل استمرار⁸ ہو گا۔

□

چونکہ حد کو اجزاء کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے لہذا سمتی تفعل کو استمرار کے لئے پرکھنے کی خاطر ہم اس کے اجزاء پر نظر ڈالتے ہیں۔

ایک نقطہ پر اراکض کے استمرار کا پرکھ

نقطہ t_0 پر سمتی تفعل $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ اس صورت استمراری ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h استمراری ہوں۔

مثال 12.3: (i) درج ذیل تفعل اس لئے استمراری ہے کہ $\cos t$ ، $\sin t$ اور t استمراری ہیں۔

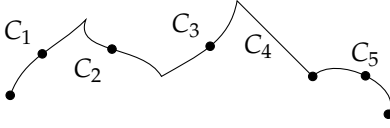
$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$$

(ب) درج ذیل تفعل ہر عدد صحیح پر عدم استمراری ہے۔

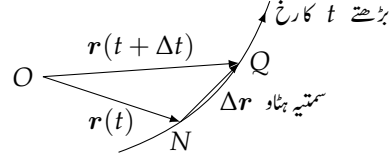
$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + |t|k$$

□

continuous at a point⁷
continuous⁸



شکل 12.4: پانچ ہموار منحنیات کو ساتھ ساتھ جوڑ کر ٹکڑوں میں ہموار منحنی حاصل کی گئی ہے۔



شکل 12.3: لمحات t اور $t + \Delta t$ کے بیچ ایک ذرے کا ہٹاؤ $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ ہو گا۔ نیا سمتی مجموعہ $\mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$ ، ذرے کا نیا مقام $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ دے گا۔

تفرقات اور حرکت

فرض کریں فضا میں ایک متحرک ذرہ جو ایک منحنی پر چل رہا ہو کا تعین کر سکتے ہیں $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ ہو جہاں f ، g اور h متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ایسی صورت میں لمحات t اور $t + \Delta t$ پر اس ذرے کے مقام میں فرق

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

ہو گا جس کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے (شکل 12.3)۔

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \\ &= [f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}] \\ &= [f(t + \Delta t) - f(t)]\mathbf{i} + [g(t + \Delta t) - g(t)]\mathbf{j} + [h(t + \Delta t) - h(t)]\mathbf{k} \end{aligned}$$

اب اگر Δt صفر کے قریب ہونے کی کوشش کرے تب تین اقدام بیک وقت ہوتے نظر آئیں گے۔ اول، منحنی پر چلتے ہوئے Q نقطہ N تک پہنچے گا۔ دوسرا، سیکنٹ خط NQ نقطہ N پر منحنی کے تحدیدی مماسی مقام پر پہنچے گا۔ تیسرا، حاصل تقسیم $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ درج ذیل حد تک پہنچے گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{k} \\ &= \left[\frac{df}{dt} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{dg}{dt} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{dh}{dt} \right] \mathbf{k} \end{aligned}$$

یوں ماضی کے تجربات ہمیں درج ذیل تعریف تک پہنچاتے ہیں۔

تعریف: نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h قابل تفرق ہوں۔ اس طرح اگر \mathbf{r} اپنے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب \mathbf{r} قابل تفرق ہو گا۔ کسی بھی نقطہ t پر جہاں \mathbf{r} قابل تفرق ہو، اس کا تفرق درج ذیل سمتی ہو گا۔

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt} \mathbf{i} + \frac{dg}{dt} \mathbf{j} + \frac{dh}{dt} \mathbf{k}$$

اگر $\frac{dr}{dt}$ استمراری اور کبھی بھی 0 نہ ہو، یعنی جب f ، g اور h کے استمراری پہلے تفرق پائے جاتے ہوں اور جو بیوقت 0 نہ ہوں، تب جس منحني پر r چلتا ہو وہ ہموار⁹ ہو گی۔

□

سمتیہ $\frac{dr}{dt}$ جب 0 سے مختلف ہو، یہ منحني کا مماسی سمتیہ ہو گا۔ نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ پر ایک منحني کے مماسی خط سے مراد وہ خط ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہو اور جو t_0 پر $\frac{dr}{dt}$ کے متوازی ہو۔ ہم ہموار منحني پر $\frac{dr}{dt} \neq 0$ کی شرط رکھ کر اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ ہر نقطہ پر منحني کا مماسی استمراری طور پر مڑے گا۔ ایک ہموار منحني پر سخت موڑ نہیں پایا جاتا ہے اور نا ہی اس پر کوئی کنگرہ پایا جاتا ہے۔

ایک منحني جو متناہی تعداد کی ہموار منحنیات (بغیر خالی فاصلہ چھوڑے، ساتھ ساتھ) ملا کر حاصل کی گئی ہو **مکدود** میں ہموار¹⁰ کہلاتی ہے (شکل 12.4)۔

شکل 12.4 پر ایک بار دوبارہ نظر ڈالیں۔ ہم نے اس شکل کو مثبت Δt کے لئے بنایا لہذا Δr آگے چلنے کی طرف اشارہ کرے گا۔ سمتیہ $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ (جسے دکھایا نہیں گیا ہے اور) جس کا وہی رخ ہے جو Δr کا ہے بھی آگے کی رخ اشارہ کرے گا۔ اگر Δt منفی ہوتا تب Δr چلنے کے مخالف رخ اشارہ کرے گا البتہ حاصل تقسیم $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ جو Δr کا منفی غیر سمتی مضرب ہے اب بھی چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ ہم نے دیکھا کہ $\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرتا ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ سمتیہ $\frac{dr}{dt}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ چلنے کی رخ دیتا ہے اور اس کی شرح، وقت کے لحاظ سے مقام کی تبدیلی دیتا ہے۔ ایک ہموار منحني کے لئے سمتی رفتار کبھی بھی صفر نہیں ہو گا؛ یہ ذرہ نا کبھی رکتا ہے اور نا ہی یہ واپسی اختیار کرتا ہے۔

تعریف: اگر فضا میں ہموار منحني پر چلتے ہوئے ذرے کا تعین گر سمتیہ r ہو تب

$$v(t) = \frac{dr}{dt}$$

اس ذرے کی **سمتی رفتار**¹¹ ہو گی جو اس منحني کو مماسی ہو گی۔ کسی بھی لمحہ t پر، v کا رخ چلنے کا رخ ہو گا، v کی مقدار اس ذرے کی رفتار ہو گی، اور تفرق $\frac{dv}{dt} = a$ ، جب پایا جاتا ہو، اس ذرے کی **اسراع**¹² ہو گی۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

ا. مقام کا تفرق، سمتی رفتار ہو گا: $v = \frac{dr}{dt}$

ب. سمتی رفتار کی مقدار، ذرے کی رفتار ہو گی: $|v|$ رفتار

smooth⁹
piecewise smooth¹⁰
velocity¹¹
acceleration¹²

ج. سمتی رفتار کا تفرق، اسراع ہو گا: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$

د. لمحہ t پر چلنے کا رخ سمتیہ $\frac{v}{|v|}$ دیگا۔

□

ہم متحرک ذرے کی سمتی رفتار کو اس کی رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھ سکتے ہیں۔

$$(\text{رخ})(\text{رفتار}) = |v| \left(\frac{v}{|v|} \right) = \text{سمتی رفتار}$$

مثال 12.4: لمحہ t پر ایک متحرک جسم کا مقام سمتیہ

$$r(t) = (3 \cos t)i + (3 \sin t)j + t^2k$$

دیتا ہے۔ اس جسم کی رفتار اور رخ لمحہ $t = 2$ پر معلوم کریں۔ کس لمحہ پر (اگر کبھی ایسا ہو بھی) اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع آپس میں عمودی ہوں گے؟

حل:

$$r(t) = (3 \cos t)i + (3 \sin t)j + t^2k$$

$$v = \frac{dr}{dt} = -(3 \sin t)i + (3 \cos t)j + 2tk$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = -(3 \cos t)i - (3 \sin t)j + 2k$$

لمحہ $t = 2$ پر اس جسم کی رفتار اور رخ درج ذیل ہیں۔

$$|v(2)| = \sqrt{(-3 \sin 2)^2 + (-3 \cos 2)^2 + (4)^2} = 5 \quad \text{رفتار}$$

$$\frac{v(2)}{|v(2)|} = -\left(\frac{3}{5} \sin 2\right)i + \left(\frac{3}{5} \cos 2\right)j + \frac{4}{5}k \quad \text{رخ}$$

جس لمحہ پر v اور a ایک دوسرے کے عمودی ہوں اس لمحہ پر $v \cdot a = 0$ ہو گا۔ یوں

$$v \cdot a = 9 \sin t \cos t - 9 \cos t \sin t + 4t = 4t = 0$$

□

سے $t = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لمحہ پر سمتی رفتار اور اسراع ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

قواعد تفرقات

چونکہ سمتی تفاعل کے تفرقات جزو در جزو حاصل کرنا ممکن ہے لہذا سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی نوعیت غیر سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی طرح ہوگی۔

سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد

قاعدہ مستقل تفاعل: $\frac{d}{dt} C = 0$ جہاں C ایک مستقل سمتیہ ہے۔

اگر u اور v متغیر t کے قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں اور f متغیر t کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

قاعدہ غیر سمتی مضرب: $\frac{d}{dt}(cu) = c \frac{du}{dt}$ جہاں c مستقل عدد ہے۔

$$\frac{d}{dt}(fu) = \frac{df}{dt}u + f \frac{du}{dt}$$

قاعدہ مجموعہ: $\frac{d}{dt}(u + v) = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$

قاعدہ فرق: $\frac{d}{dt}(u - v) = \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt}$

قاعدہ ضرب نقطہ: $\frac{d}{dt}(u \cdot v) = \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt}$

قاعدہ ضرب صلیبی: $\frac{d}{dt}(u \times v) = \frac{du}{dt} \times v + u \times \frac{dv}{dt}$

قاعدہ زنجیر: $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds}$ جہاں r متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور t متغیر s کا قابل تفرق تفرق ہے۔

صلیبی ضرب میں سمتیات کی ترتیب نہایت اہم ہے۔ یوں اگر بائیں ہاتھ u کے بعد v آئے، تب دائیں ہاتھ بھی u کے بعد v ہو گا۔ ایسا نہ کرنے سے قیمت کی علامت تبدیل ہوگی۔

ہم قاعدہ ضرب اور زنجیری قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ باقی ثبوت آپ کو مشق میں پیش کرنے ہوں گے۔

ثبوت: قاعدہ ضرب نقطہ
درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$u = u_1(t)i + u_2(t)j + u_3(t)k$$

$$v = v_1(t)i + v_2(t)j + v_3(t)k$$

تب درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= \underbrace{u'_1v_1 + u'_2v_2 + u'_3v_3}_{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}} + \underbrace{u_1v'_1 + u_2v'_2 + u_3v'_3}_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'}\end{aligned}$$

□

ثبوت: قاعدہ ضرب صلیبی
ہم غیر سمتی تفاعل کے قاعدہ ضرب کی طرح اس کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کی رو سے

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)}{h}$$

ہوگا۔ ہم شمار کنندہ کے ساتھ $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h)$ جمع اور منفی کرتے ہیں تاکہ درج بالا کو ایسی حاصل تقسیمات کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جن میں \mathbf{u} اور \mathbf{v} کے تفرقات پائے جاتے ہوں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h} \times \mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t) \times \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{v}(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{u}(t) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h}\end{aligned}$$

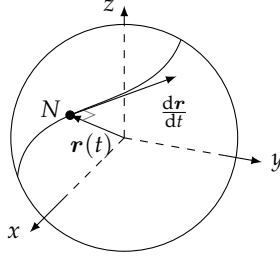
آخری لکیر پر دونوں مساوات اس لئے ٹھیک ہیں کہ دو سمتیات کے سمتی ضرب کا حد، ان کے حدود کا سمتی ضرب ہوتا ہے۔ چونکہ t پر \mathbf{v} قابل تفرق لہذا استمراری ہے، اس لئے جیسے جیسے h کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے ویسے ویسے $\mathbf{v}(t+h)$ کی قیمت $\mathbf{v}(t)$ تک پہنچتی ہے۔ ان دو حاصل تقسیم کی قیمتیں t پر $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ اور $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ تک پہنچتی ہیں۔ مختصراً درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

□

ثبوت: زنجیری قاعدہ

فرض کریں $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے اور t از خود کسی متغیر s کا قابل



شکل 12.5: اگر ایک ذرہ ایک کرہ پر یوں حرکت کرتا ہو کہ اس کی مقام r وقت کا قابل تفرق تفاعل ہو، تب $r \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right) = 0$ ہو گا۔

تفرق غیر سمتی تفاعل ہے۔ تب f ، g اور h متغیر s کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور حقیقی قیمت تفاعل کے زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{df}{ds}i + \frac{dg}{ds}j + \frac{dh}{ds}k \\ &= \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds}i + \frac{dg}{dt} \frac{dt}{ds}j + \frac{dh}{dt} \frac{dt}{ds}k \\ &= \left(\frac{df}{dt}i + \frac{dg}{dt}j + \frac{dh}{dt}k \right) \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} \end{aligned}$$

□

مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل

ایک کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر جو جسم حرکت کرتا ہو، اس جسم کے تعین گر سمتیہ کی لمبائی اس کرہ کے رداس جتنی ہو گی (شکل 12.5)۔ اس کا سمتی رفتار سمتیہ $\frac{dr}{dt}$ ، جو حرکت کی راہ کو مماسی ہو گا، اس کرہ کو مماسی لہذا r کو قائمہ ہو گا۔ مستقل لمبائی والے قابل تفرق سمتی تفاعل کے لئے ہر بار ایسا ہی ہو گا۔ ایسا سمتیہ اور اس کا پہلا تفرق ایک دوسرے کو عمودی ہوں گے۔ لمبائی مستقل ہونے کی بدولت، سمتیہ میں تبدیلی درحقیقت سمتیہ کے رخ میں تبدیلی ہو گی اور رخ کی یہ تبدیلی سمتی تفاعل کے ساتھ زاویہ قائمہ پر ہو گی۔

اگر u متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہو اور اس کی لمبائی اٹل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$(12.3) \quad u \cdot \frac{du}{dt} = 0$$

□

یہ دیکھنے کی خاطر کہ مساوات 12.3 کیوں درست ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل u متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $|u|$ ایک مستقل قیمت ہے۔ یوں $u \cdot u = |u|^2$ ایک مستقل ہو گا اور ہم اس مساوات کی دونوں اطراف کا تفرق لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u \cdot u) &= \frac{d}{dt}(\text{مستقل}) = 0 \\ \frac{du}{dt} \cdot u + u \cdot \frac{du}{dt} &= 0 & \text{قاعدہ ضرب نقطہ میں } v = u \text{ لیتے ہوئے} \\ 2u \cdot \frac{du}{dt} &= 0 & \text{ضرب نقطہ قابل تبادل ہے} \\ u \cdot \frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

مثال 12.5: دکھائیں کہ درج ذیل سمتیہ کی لمبائی مستقل ہے اور اس سمتیہ کا تفرق اور u آپس میں عمودی ہیں۔

$$u(t) = (\sin t)i + (\cos t)j + \sqrt{3}k$$

حل:

$$\begin{aligned} u(t) &= (\sin t)i + (\cos t)j + \sqrt{3}k \\ |u(t)| &= \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\ \frac{du}{dt} &= (\cos t)i - (\sin t)j \\ u \cdot \frac{du}{dt} &= \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0 \end{aligned}$$

□

سمتی تفاعل کے کمالات

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $\frac{dR}{dt} = r$ ہو تب قابل تفرق سمتی تفاعل $R(t)$ ، وقفہ I پر سمتی تفاعل $r(t)$ کا الٹ تفرق ہو گا۔ اگر I پر r کا الٹ تفرق R ہو تب، ایک وقت میں ایک جزو کے ساتھ کام کرتے ہوئے، یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ I پر r کے الٹ تفرق کی صورت $R + C$ ہو گی جہاں C کوئی مستقل سمتیہ ہو گا۔ وقفہ I پر r کے الٹ تفرقات کا سلسلہ I پر r کا غیر قطعہ متکمل¹³ ہو گا۔

¹³indefinite integral

تعریف: متغیر t کے لحاظ سے r کا غیر قطعی مکمل، r کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ ہوگا، جس کو $\int r(t) dt$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر r کا الٹ تفرق R ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int r(t) dt = R(t) + C \quad \text{C مستقل سمتیہ ہے}$$

□

غیر قطعی کمالات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے۔

مثال 12.6:

$$\begin{aligned} \int ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) dt &= \left(\int \cos t dt \right) \mathbf{i} + \left(\int dt \right) \mathbf{j} - \left(\int 2t dt \right) \mathbf{k} \\ &= (\sin t + C_1)\mathbf{i} + (t + C_2)\mathbf{j} - (t^2 + C_3)\mathbf{k} \\ &= (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k} + C \quad C = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} - C_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

□

غیر سمتی تفاعل کے مکمل کی طرح یہاں بھی، درمیانے دو قدم کے بغیر، آپ بائیں ہاتھ سے سیدھا نتیجہ لکھ سکتے ہیں۔

سمتی تفاعل کے قطعی مکمل کی تعریف اس کے اجزاء کی صورت میں کی جاتی ہے۔

تعریف: اگر وقفہ $[a, b]$ پر $r(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ کے اجزاء قابل تفرق ہوں تب اس وقفہ پر r بھی قابل تفرق ہوگا اور a تا b سمتی تفاعل r کا قطعی مکمل درج ذیل ہوگا۔

$$\int_a^b r(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \mathbf{k}$$

□

قطعی کمالات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے۔

مثال 12.7:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) dt &= \left(\int_0^\pi \cos t dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^\pi dt \right) \mathbf{j} - \left(\int_0^\pi 2t dt \right) \mathbf{k} \\ &= [\sin t]_0^\pi \mathbf{i} + [t]_0^\pi \mathbf{j} - [t^2]_0^\pi \\ &= [0 - 0]\mathbf{i} + [\pi - 0]\mathbf{j} - [\pi^2 - 0^2]\mathbf{k} \\ &= \pi\mathbf{j} - \pi^2\mathbf{k} \end{aligned}$$

□

مثال 12.8: ذرے کے ابتدائی مقام اور ابتدائی سمتی رفتار سے اس کے مقام کا حصول فضا میں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا سمتی رفتار

$$\frac{dr}{dt} = (\cos t)i - (\sin t)j + k$$

ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس ذرے کا مقام $r = 2i + k$ ہو تب لمحہ t پر اس کا مقام کیا ہو گا؟

حل: ہمیں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرنا ہو گا۔

$$\frac{dr}{dt} = (\cos t)i - (\sin t)j + k$$

تفرقی مساوات

$$r(0) = 2i + k$$

ابتدائی معلومات

دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے مکمل لے کر

$$r(t) = (\sin t)i + (\cos t)j + tk + C$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل کا مستقل C معلوم کرتے ہیں۔

$$(\sin 0)i + (\cos 0)j + (0)k + C = 2i + k \quad r(0) = 2i + k$$

$$j + C = 2i + k$$

$$C = 2i - j + k$$

وقت t کے لحاظ سے ذرے کا مقام درج ذیل ہو گا۔

$$r(t) = (\sin t + 2)i + (\cos t - 1)j + (t + 1)k$$

حاصل نتیجہ کو پرکھنے کی خاطر ہم اس سے

$$\frac{dr}{dt} = (\cos t + 0)i + (-\sin t - 0)j + (1 + 0)k$$

$$= (\cos t)i - (\sin t)j + k$$

اور

$$\begin{aligned} r(0) &= (\sin 0 + 2)i + (\cos 0 - 1)j + (0 + 1)k \\ &= 2i + k \end{aligned}$$

□

حاصل کرتے ہیں۔

سوالات

مستوی xy میں حرکت

سوال 1 تا سوال 4 میں مستوی xy میں لمحہ t پر ایک ذرے کا مقام $r(t)$ ہے۔ اس ذرے کی راہ کی ترسیم کے x اور y محدود کی مساواتیں تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع سمتیات دریافت کریں۔

سوال 1: $r(t) = (t+1)i + (t^2-1)j, \quad t = 1$

سوال 2: $r(t) = (t^2+1)i + (2t-1)j, \quad t = \frac{1}{2}$

سوال 3: $r(t) = e^t i + \frac{2}{9}e^{2t} j, \quad t = \ln 3$

سوال 4: $r(t) = (\cos 2t)i + (3 \sin 2t)j, \quad t = 0$

سوال 5 تا سوال 8 میں مستوی xy میں مختلف منحنيات پر حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا تعین کر سکتے دیا گیا ہے۔ دیے گئے لحاظ پر اس ذرے کے سمتی رفتار اور اسراع کے سمتیات دریافت کریں۔ ان سمتیات کو ممحی پر ترسیم کریں۔

سوال 5: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر حرکت
 $r(t) = (\sin t)i + (\cos t)j, \quad t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

سوال 6: دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ پر حرکت
 $r(t) = (4 \cos \frac{t}{2})i + (4 \sin \frac{t}{2})j, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال 7: تمدید $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ پر حرکت
 $r(t) = (t - \sin t)i + (1 - \cos t)j, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال 8: قطعہ $y = x^2 + 1$ پر حرکت
 $r(t) = ti + (t^2 + 1)j, \quad t = -1, 0, 1$

فضا میں سمتی رفتار اور اسراع

سوال 9 تا سوال 14 میں لمحہ t پر ایک ذرے کا تعین کر سکتے $r(t)$ ہے۔ اس ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔ دئے گئے لمحہ پر اس کی رفتار اور رخ کی قیمت تلاش کریں۔ اس لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار کو رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال 9: $r(t) = (t+1)i + (t^2-1)j + 2tk, \quad t = 1$

$$\mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{t^2}{3}\mathbf{k}, \quad t = 1 \quad \text{سوال 10:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad t = \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 11:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (\sec t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + \frac{4}{3}t\mathbf{k}, \quad t = \frac{\pi}{6} \quad \text{سوال 12:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (2 \ln(t+1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t = 1 \quad \text{سوال 13:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2 \cos 3t)\mathbf{j} + (2 \sin 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0 \quad \text{سوال 14:}$$

سوال 15 تا سوال 18 میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین کر سمیت $\mathbf{r}(t)$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی سمتی رفتار اور اسراع کے پچھ زاویہ تلاش کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (3t+1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \quad \text{سوال 15:}$$

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\mathbf{j} \quad \text{سوال 16:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2+1))\mathbf{i} + (\tan^{-1}t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2+1}\mathbf{k} \quad \text{سوال 17:}$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k} \quad \text{سوال 18:}$$

سوال 19 اور سوال 20 میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین کر سمیت $\mathbf{r}(t)$ ہے۔ دیے گئے وقفہ میں وہ لمحہ یا لمحات تلاش کریں جن پر سمتی رفتار سمیت اور اسراع سمیت ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{سوال 19:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}, \quad t \geq 0 \quad \text{سوال 20:}$$

سمتی قیمتے تفاعل کا تکمل

سوال 21 تا سوال 26 میں تکمل حاصل کریں۔

$$\int_0^1 [t^3\mathbf{i} + 7t\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}] dt \quad \text{سوال 21:}$$

$$\int_1^2 \left[(6 - 6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\mathbf{j} + \frac{4}{t^2}\mathbf{k} \right] dt \quad \text{سوال 22:}$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\mathbf{i} + (1 + \cos t)\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}] dt \quad \text{سوال 23:}$$

$$\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2 \sin t \cos t)\mathbf{k}] dt \quad \text{سوال 24:}$$

$$\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k} \right] dt \quad \text{سوال 25:}$$

$$\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\mathbf{k} \right] dt \quad \text{سوال 26:}$$

سمتی تفاعل کے ابتدائی قیمت مسائل
سوال 27 تا سوال 32 میں t کے سمتی تفاعل r کے ابتدائی قیمت مسائل دیے گئے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 27:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k} & \text{تفرقی مساوات} \\ r(0) &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} & \text{ابتدائی شرط} \end{aligned}$$

سوال 28:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (180t)\mathbf{i} + (180t - 16t^2)\mathbf{j} & \text{تفرقی مساوات} \\ r(0) &= 100\mathbf{j} & \text{ابتدائی شرط} \end{aligned}$$

سوال 29:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \frac{1}{t+1}\mathbf{k} & \text{تفرقی مساوات} \\ r(0) &= \mathbf{k} & \text{ابتدائی شرط} \end{aligned}$$

سوال 30:

$$\frac{dr}{dt} = (t^3 + 4t)i + tj + 2t^2k \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$r(0) = i + j \quad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 31:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -32k \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$r(0) = 100k \quad \text{ابتدائی شرائط}$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = 8i + 8j$$

سوال 32:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -(i + j + k) \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$r(0) = 10i + 10j + 10k \quad \text{ابتدائی شرائط}$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

ہموار مختاریات کے مماسی خط

ہموار مختاری $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ کا $t = t_0$ پر مماسی خط نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ سے گزرتا ہے اور، t_0 پر اس مختاری کے سمتی رفتار سمتیہ $v(t_0)$ ، کا متوازی ہوتا ہے (متن میں بتایا گیا)۔ سوال 33 تا سوال 36 میں $t = t_0$ پر دیے گئے مختاری کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

$$r(t) = (\sin t)i + (t^2 - \cos t)j + e^t k, \quad t_0 = 0 \quad \text{سوال 33}$$

$$r(t) = (2 \sin t)i + (2 \cos t)j + 5t k, \quad t_0 = 4\pi \quad \text{سوال 34}$$

$$r(t) = (a \sin t)i + (a \cos t)j + bt k, \quad t_0 = 2\pi \quad \text{سوال 35}$$

$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + (\sin 2t)k, \quad t_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 36}$$

دائرہ راہ پر حرکت

سوال 37: اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر ایک ذرہ کے حرکت کو (i) تا $(د)$ میں دی گئی مساوات ظاہر کرتی ہیں۔ اگرچہ (i) تا $(د)$ میں ذرے کا راہ ایک ہے، ان راہ پر اس کا حرکتی رویہ مختلف ہے۔ ہر راہ پر درج ذیل کے جوابات دیں۔

1. کیا ذرے کی رفتار مستقل ہے؟ اگر ایسا ہو، تب اس کی رفتار کتنی ہے؟
2. کیا ذرے کا سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع آپس میں ہر جگہ عمودی ہیں؟
3. کیا یہ ذرہ اکائی دائرے پر گھڑی کے رخ یا اس کے مخالف رخ گھومتا ہے؟
4. کیا ذرہ نقطہ $(1, 0)$ سے ابتدا کرتا ہے؟

$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j, \quad t \geq 0 \quad \text{ا.}$$

$$r(t) = \cos(2t)i + \sin(2t)j, \quad t \geq 0 \quad \text{ب.}$$

$$r(t) = \cos(t - \pi/2)i + \sin(t - \pi/2)j, \quad t \geq 0 \quad \text{ج.}$$

$$r(t) = (\cos t)i - (\sin t)j, \quad t \geq 0 \quad \text{د.}$$

$$r(t) = \cos(t^2)i + \sin(t^2)j, \quad t \geq 0 \quad \text{ه.}$$

سوال 38: دکھائیں کہ درج ذیل ابتدائی قیمت سمتی قیمت تفاعل، مستوی $x + y - 2z = 2$ میں رداس 1 کے دائرہ پر حرکت کو ظاہر کرتا ہے جہاں دائرے کا مرکز $(2, 2, 1)$ ہے۔

$$r(t) = (2i + 2j + k) + \cos t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j \right) + \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right)$$

خط مستقیم پر حرکت

سوال 39: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1, 2, 3)$ پر واقع ہے۔ یہ خط مستقیم پر حرکت کرتا ہوا نقطہ $(4, 1, 4)$ پہنچتا ہے۔ اس کا رفتار $(1, 2, 3)$ پر 2 اور اس کی اسراع مستقل $3i - j + k$ ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $r(t)$ دریافت کریں۔

سوال 40: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1, -1, 2)$ پر پایا جاتا ہے اور اس کا رفتار 2 ہے۔ یہ نقطہ $(3, 0, 3)$ کی طرف یکساں اسراع $2i + j + k$ سے بڑھتا ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $r(t)$ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 41: ایک ذرہ قطع مکانی $y^2 = 2x$ کے بالائی حصہ پر بائیں سے دائیں رخ، 5 اکائیاں فی سیکنڈ کے مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ اس ذرہ کی سمتی رفتار اس لمحہ پر تلاش کریں جب یہ نقطہ $(2, 2)$ سے گزرتا ہے۔

سوال 42: ایک ذرہ مستوی xy میں ایک تدویر پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t اس کا تعین گر سمتیہ

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$$

ہوتا ہے۔ $|\mathbf{r}|$ اور $|\mathbf{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (اشارہ: پہلے $|\mathbf{v}|^2$ اور $|\mathbf{a}|^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں اور بعد میں جذر لیں۔)

سوال 43: ایک ذرہ مستوی yz میں ترخیم $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{j} + (2 \sin t)\mathbf{k}$$

ہوتا ہے۔ $|\mathbf{r}|$ اور $|\mathbf{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (بالائی سوال میں اشارہ دیکھیں۔)

سوال 44: مصنوعی سیارہ کا دائری مدار

ایک مصنوعی سیارہ جس کی کمیت m ہے ایک جسم جس کی کمیت M ہے کے گرد دائری مدار پر مستقل رفتار v سے طواف کرتا ہے۔ دائری مدار کا رداس r_0 ہے۔ اس مصنوعی سیارہ کے مدار کا دوری عرصہ T (ایک چکر کے لئے درکار وقت) درج ذیل اقدام کے ذریعہ تلاش کریں۔

ا. کمیت M کے جسم کو مبدا پر اور لمحہ $t = 0$ پر مصنوعی سیارہ کو محور x پر رکھیں۔ حرکت کو گھڑی کے رخ تصور کریں (شکل دیکھیں)۔ لمحہ t پر سیارہ کا تعین گر سمتیہ $\mathbf{r}(t)$ لیں۔ دکھائیں کہ $\theta = \frac{vt}{r_0}$ ہو گا لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{r}(t) = (r_0 \cos \frac{vt}{r_0})\mathbf{i} + (r_0 \sin \frac{vt}{r_0})\mathbf{j}$$

ب. سیارے کی اسراع معلوم کریں۔

ج. نیوٹن کے قانون تجاذب کے تحت سیارہ پر قوت درج ذیل ہو گی جہاں G تجاذب کا عالمگیر مستقل ہے۔

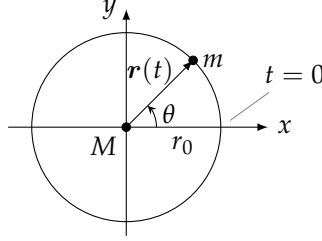
$$\mathbf{F} = \left(-\frac{GMm}{r_0^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r_0}$$

نیوٹن کے دوسرے قانون سے $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ہو گا جس سے $v^2 = \frac{GM}{r_0}$ حاصل کریں۔

د. دکھائیں کہ $T = 2\pi r_0 / v$ مساوات $vT = 2\pi r_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ج۔ جزو۔ ج اور جزو۔ د سے درج ذیل حاصل کریں جو دوری عرصہ کا مربع ہے۔

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0^3$$



سوال 45: فرض کریں v متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔ دکھائیں کہ اگر $v \cdot \frac{dv}{dt} = 0$ ہو تب $|v|$ ایک مستقل ہو گا۔

سوال 46: غیر سمتی سہ ضرب کا تفرق

ا. دکھائیں کہ اگر u ، v اور w قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(12.4) \quad \frac{d}{dt}(u \cdot v \times w) = \frac{du}{dt} \cdot v \times w + u \cdot \frac{dv}{dt} \times w + u \cdot v \times \frac{dw}{dt}$$

ب. دکھائیں مساوات 12.4 درج ذیل کا معادل ہے۔

$$(12.5) \quad \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} & \frac{du_2}{dt} & \frac{du_3}{dt} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{dw_1}{dt} & \frac{dw_2}{dt} & \frac{dw_3}{dt} \end{vmatrix}$$

مساوات 12.5 کہتی ہے 3 ضرب 3 قابل تفرق مقطع کا تفرق ان تین مقطع کا مجموعہ ہو گا جو ایک وقت میں ایک صف کا تفرق لے کر حاصل کیے گئے ہوں۔ اس نتیجہ کو بلند رتبی مقطع تک وسعت دی جاسکتی ہے۔

سوال 47: فرض کریں $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ ہو جہاں f ، g اور h قابل تین رتبی تفرق ہوں۔ مساوات 12.4 یا مساوات 12.5 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$(12.6) \quad \frac{d}{dt} \left(r \cdot \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = r \cdot \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^3 r}{dt^3} \right)$$

(اشارہ: بائیں ہاتھ تفرق لے کر ان سمتیات کی نشاندہی کریں جن کے حاصل ضرب صفر ہو۔)

سوال 48: قاعدہ مستقل تفاعل
دکھائیں کہ اگر u ایک ایسا سمتی تفاعل ہو جس کی قیمت مستقل C ہو تب $\frac{du}{dt} = 0$ ہو گا۔

سوال 49: قواعد غیر سمتی ضرب

ا. دکھائیں اگر u متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c کوئی حقیقی عدد ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d(cu)}{dt} = c \frac{du}{dt}$$

ب. ثابت کریں کہ اگر t کا u قابل تفرق تفاعل ہو اور t کا f قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dt}(fu) = \frac{df}{dt}u + f \frac{du}{dt}$$

سوال 50: قواعد مجموعہ اور فرق
ثابت کریں کہ اگر u اور v متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u+v) &= \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \\ \frac{d}{dt}(u-v) &= \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

سوال 51: ایک نقطہ پر استمرار کا پچھ اجزاء
دکھائیں کہ سمتی تفاعل r جس کو قاعدہ $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ بیان کرتا ہو نقطہ t_0 پر تب استمراری ہو گا جب f ، g اور h اس نقطہ پر استمراری ہوں۔

سوال 52: سمتی تفاعل کا صلیبی ضرب کے حد
فرض کریں $r_1(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ ، $r_2(t) = g_1(t)i + g_2(t)j + g_3(t)k$ ،
 $\lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t) = A$ اور $\lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t) = B$ ہیں۔ صلیبی ضرب کا کلیہ مقطع اور غیر سمتی تفاعل کے لئے قاعدہ حد حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (r_1(t) \times r_2(t)) = A \times B$$

سوال 53: قابل تفرق سمتی تفاعل استمراری ہوتے ہیں۔
دکھائیں کہ اگر $t = t_0$ پر $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ قابل تفرق ہو تب t_0 پر یہ استمراری بھی ہو گا۔

سوال 54: قابل مکمل سمتی تفاعل کے درج ذیل خواص کی تصدیق کریں۔

ا. قاعدہ مستقل غیر سمتی مضرب:

$$\int_a^b k \mathbf{r}(t) dt = k \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \quad k \text{ کوئی مستقل ہے}$$

نئی کا قاعدہ $k = -1$ لے کر حاصل ہو گا:

$$\int_a^b (-\mathbf{r}(t)) dt = - \int_a^b \mathbf{r}(t) dt$$

ب. قواعد مجموعہ اور فرق:

$$\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \mp \mathbf{r}_2(t)) dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t) dt \mp \int_a^b \mathbf{r}_2(t) dt$$

ج. قاعدہ مستقل سمتیہ مضرب:

$$\int_a^b C \cdot \mathbf{r}(t) dt = C \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \quad C \text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

اور

$$\int_a^b C \times \mathbf{r}(t) dt = C \times \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \quad C \text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

سوال 55: غیر سمتی اور سمتی تعامل کے حاصل ضرب
فرض کریں وقفہ $a \leq t \leq b$ پر غیر سمتی تعامل $u(t)$ اور سمتی تعامل $\mathbf{r}(t)$ معین ہیں۔

ا. دکھائیں کہ $[a, b]$ پر ur تب استمراری ہو گا جب $[a, b]$ پر u اور \mathbf{r} استمراری ہوں۔

ب. اگر غیر سمتی تعامل u اور سمتی تعامل \mathbf{r} دونوں $[a, b]$ پر قابل تفرق ہوں تب دکھائیں کہ $[a, b]$ پر ur قابل تفرق ہو گا اور مزید درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\frac{d}{dt}(ur) = u \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \frac{du}{dt}$$

سوال 56: سمتی تعامل کے الٹ تفرقات

ا. غیر سمتی تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 2 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر وقفہ I پر دو سمتی تفاعل $R_1(t)$ اور $R_2(t)$ کے تفرقات متماثل ہوں تب پورے I پر ان تفاعل میں صرف ایک مستقل سمتی قیمت کا فرق ہو گا۔

ب. جزو-1 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر I پر $r(t)$ کا الٹ تفرق $R(t)$ ہو تب I پر r کا ہر الٹ تفرق $R(t) + C$ کے برابر ہو گا جہاں C کوئی مستقل سمتیہ ہو گا۔

سوال 57: احصاء کا بنیادی مسئلہ
احصاء کا بنیادی مسئلہ برائے حقیقی متغیر کا غیر سمتی تفاعل، حقیقی متغیر کے سمتی تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہو گا۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر غیر سمتی تفاعل کے لئے اس مسئلہ کو استعمال کر کے پہلے دکھائیں کہ اگر $a \leq t \leq b$ پر سمتی تفاعل $r(t)$ استمراری ہو تب $[a, b]$ پر ہر نقطہ t کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dt} \int_a^t r(\tau) d\tau = r(t)$$

اس کے بعد سوال 56 کے جزو-ب کا نتیجہ استعمال کر کے دکھائیں کہ اگر $[a, b]$ پر $r(t)$ کا R کوئی الٹ تفرق ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b r(t) dt = R(b) - R(a)$$

کمپیوٹر کا استعمال

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال 58 تا سوال 61 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تعین کر سمتیہ r کی فضائی راہ کی منحنی ترسیم کریں۔

ب. سمتی رفتار سمتیہ $\frac{dr}{dt}$ کے اجزاء تلاش کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ t_0 پر سمتی رفتار $\frac{dr}{dt}$ کی قیمت معلوم کر کے نقطہ $r(t_0)$ پر مماسی خط کی مساوات تلاش کریں۔

د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور خط مماس ترسیم کریں۔

باب 12. سمتی قیمت تف عمل اور فن مسی حرکت

سوال 58: $r(t) = (\sin t - t \cos t)i + (\cos t + t \sin t)j + t^2k, \quad 0 \leq t \leq 6\pi, t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال 59: $r(t) = \sqrt{2}ti + e^tj + e^{-t}k, \quad -2 \leq t \leq 3, t_0 = 1$

سوال 60: $r(t) = (\sin 2t)i + (\ln(1+t))j + tk, \quad 0 \leq t \leq 4\pi, t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 61: $r(t) = (\ln(t^2 + 2))i + (\tan^{-1} 3t)j + \sqrt{t^2 + 1}k, \quad -3 \leq t \leq 5, t_0 = 3$

سوال 62 اور سوال 63 میں آپ a اور b کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے پیچ دار منحنی

$$r(t) = (\cos at)i + (\sin at)j + btk$$

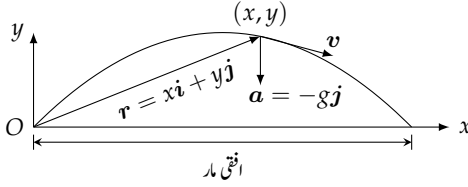
کے رویہ پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر کو استعمال کریں۔

سوال 62: وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $b = 1$ اور $a = 1, 2, 4, 6$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتائیں کہ a کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

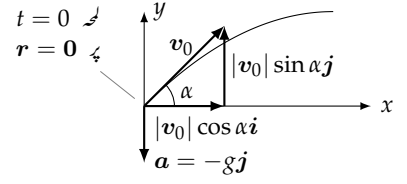
سوال 63: وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $a = 1$ اور $b = 1/4, 1/2, 2, 4$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتائیں کہ b کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

12.2 گولا کے حرکت کی نمونہ کشی

ایک گولا چلانے سے پہلے ہم جانتا چاہیں گے کہ آیا وہ حدف کو مار سکے گا (کیا حدف تک پہنچے گا)؟ یہ گولا کس بلندی تک پہنچے گا (کیا یہ پہاڑی کو پار کر پائے گا)؟ اور یہ حدف پر کتنی دیر میں پہنچے گا (نتائج کب حاصل ہوں گے)؟ یہ تمام معلومات گولے کی ابتدائی سمتیہ رفتار سے نیوٹن کے دوسرے قانون کی مدد سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔



(ب) کچھ دیر بعد لمحہ t پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔



(i) لمحہ $t = 0$ پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

شکل 12.6: گولہ کی مثالی پرواز۔

گولہ کی حرکت کی مقدار معلوم مثالی مساوات

حرکت گولہ کی مثالی مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ ایک ذرہ کی مانند مستوی میں حرکت کرتا ہے اور اس پر صرف مستقل قوت کشش سیدھا نیچے رخ عمل کرتی ہے۔ حقیقت میں یہ مفروضے درست نہیں ہیں۔ زمین گھومنے کی بنا گولے کے نیچے زمین حرکت میں ہوتی ہے، ہوائی رگڑ جو گولے کی رفتار اور بلندی پر منحصر ہے گولہ پر عمل کرتی ہے، اور قوت کشش ایک مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت گولہ کی بلندی پر منحصر ہے۔ اگرچہ ان تمام کے اثرات کو بھی دیکھنا ہوگا، ہم یہاں انہیں نظر انداز کرتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی سمتیہ رفتار v_0 کے ساتھ مبدا سے گولہ ربع اول میں مارا جاتا ہے (شکل 12.6)۔ اگر افقی زمین کے ساتھ v_0 کا زاویہ α ہو تب

$$(12.7) \quad v_0 = (|v_0| \cos \alpha)i + (|v_0| \sin \alpha)j$$

ہوگا۔ اس میں $|v_0|$ کو سادہ علامت v_0 سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.8) \quad v_0 = (v_0 \cos \alpha)i + (v_0 \sin \alpha)j$$

گولہ کا ابتدائی مقام درج ذیل ہے۔

$$(12.9) \quad r_0 = 0i + 0j = 0$$

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے حرکت کے تحت کمیت ضرب اسراع یعنی $m \frac{d^2 r}{dt^2}$ عامل قوت کے برابر ہوگا جہاں لمحہ t پر گولے کا تئین گر سمتیہ $r(t)$ ہے۔ اگر صرف قوت کشش $-mgj$ عمل کرتی ہو تب

$$(12.10) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -gj \quad \text{یا} \quad m \frac{d^2 r}{dt^2} = -mgj$$

ہوگا۔ ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے متغیر t کا تفاعل r حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -gj$$

اتفرقی مساوات

$$r = r_0, \quad \frac{dr}{dt} = v_0 \quad \text{پہلے} \quad t = 0$$

ابتدائی معلومات

پہلا مکمل

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

دیگا۔ دوسرا مکمل

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0$$

دیگا۔ ہم مساوات 12.8 اور مساوات 12.9 سے \mathbf{v}_0 اور \mathbf{r}_0 کی قیمتیں پر کر کے

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \underbrace{(v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)t\mathbf{j}}_{v_0t} + \mathbf{0}$$

یعنی

$$(12.11) \quad \mathbf{r} = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right)\mathbf{j}$$

حاصل کرتے ہیں۔

مساوات 12.11 گولے کی مثالی حرکت کی سمتی مساوات ہے۔ زاویہ α گولا چلانے کا زاویہ ہے جبکہ v_0 اس کی ابتدائی رفتار ہے۔ مساوات 12.11 درج ذیل دو غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے۔

$$(12.12) \quad x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

انہیں گولا کی مثالی پرواز کی مقدار معلوم مساوات کہتے ہیں۔ اگر وقت کو سیکنڈوں میں اور فاصلہ کو میٹروں میں ناپا جائے تب $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ہو گا اور مساوات 12.12 میں x اور y میٹر میں ہوں گے۔

مثال 12.9: افقی میدان میں مبداء سے ایک گولا 500 m s^{-1} کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر داغا جاتا ہے۔ یہ گولا 10 سیکنڈ بعد کہاں ہو گا؟

حل: ہم $v_0 = 500$ ، $\alpha = 60$ ، $g = 9.8$ لیتے ہوئے مساوات 12.12 استعمال کر کے لمحہ $t = 10$ پر گولے کا مقام معلوم کرتے ہیں۔

$$x = (v_0 \cos \alpha)t = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 2500 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} y &= (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10)^2 \\ &= 2500\sqrt{3} - 490 \\ &\approx 3840 \text{ m} \end{aligned}$$

□

گولا چلانے کے دس سینکڑ بعد 3840 میٹر کی بلندی پر حدف کی طرف 2500 میٹر دور ہو گا۔

بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار

ہم مساوات 12.12 سے مثالی گولا کی پرواز کے بارے میں عموماً سوالات کے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

گولا اپنی بلند ترین مقام پر اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی رفتار کا انتہائی حصہ صفر ہو:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{یعنی} \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt = 0$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$(12.13) \quad y_{\text{بلند}} = (v_0 \sin \alpha) \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

افقی میدان میں داغے گئے گولا کی پرواز کا دورانیہ جاننے کی خاطر ہم مساوات 12.12 میں $y = 0$ پر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt \right) = 0$$

$$(12.14) \quad t = 0, \quad t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

چونکہ $t = 0$ وہ لمحہ ہے جب گولا داغا گیا لہذا $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ وہ لمحہ ہو گا جب گولا واپس زمین پر گرتا ہے۔

گولے کی مار R جاننے کی خاطر ہم مبداء سے گولا گرنے کے مقام تک فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ ہم $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ پر x تلاش کرتے ہیں۔

$$x = (v_0 \cos \alpha)t$$

$$R = (v_0 \cos \alpha) \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

$$(12.15) \quad = \frac{v_0^2}{g} (2 \sin \alpha \cos \alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $\sin 2\alpha = 1$ یعنی $\alpha = 45^\circ$ پر حاصل ہو گا۔

مثال 12.10: افقی میدان میں مبداء سے ایک گولا 500 m s^{-1} کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر چلایا جاتا ہے۔ گولا کی زیادہ سے زیادہ بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار تلاش کریں (مثال 12.9)۔

حل:

$$y_{\text{بلندتر}} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} \quad \text{زیادہ سے زیادہ بلندی (مساوات 12.13)}$$

$$= \frac{(500 \sin 60^\circ)^2}{2(9.8)} \approx 9566 \text{ m}$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{دورانیہ پرواز (مساوات 12.14)}$$

$$= \frac{2(500) \sin 60^\circ}{9.8} \approx 88 \text{ s}$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \text{فاصلہ مار (مساوات 12.15)}$$

$$= \frac{(500)^2 \sin 120^\circ}{9.8} \approx 22092 \text{ m}$$

□

گولا کی مثالی پرواز قطع مکانی ہوگی

ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثالی پرواز، قطع مکانی راہ اپناتی ہے۔ مساوات 12.12 کی ایک جزو سے $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ حاصل کر کے دوسرے جزو میں پر کرتے ہوئے

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x$$

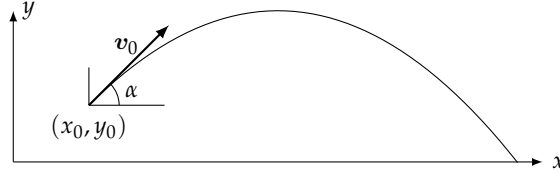
حاصل ہوتا ہے جس کی روپ $y = ax^2 + bx$ ہے جو ایک قطع مکانی کو ظاہر کرتی ہے۔

نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانا

مبدأ کی بجائے نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانے سے مساوات 12.12 کی جگہ درج ذیل مساوات حاصل ہوں گی (شکل 12.7)۔

$$(12.16) \quad x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

مثال 12.11: ایک نشانہ باز 2 m بلندی سے 30 m دور درخت پر 20 m بلندی پر لگائی گئی نشانہ کو تیر کا نشانہ بتاتا ہے۔ تیر نشانہ پر عین اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ ہو۔ (ا) ابتدائی رفتار v_0 اور زاویہ α کی صورت میں زیادہ سے زیادہ بلندی بلندتر y لکھیں۔ (ب) اگر $y_{\text{بلندتر}} = 20 \text{ m}$ ہو تب جزو-ا کے نتیجے سے $v_0 \sin \alpha$ معلوم کریں۔ (ج) تیر 30 m افقی فاصلہ طے کر کے درخت تک پہنچتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $v_0 \cos \alpha$ کی قیمت معلوم کریں۔ (د) تیر کا ابتدائی زاویہ تلاش کریں۔



شکل 12.7: نقطہ (x_0, y_0) سے ابتدائی سمتی رفتار v_0 کے ساتھ مارے گئے گولہ کی راہ۔

حل: (i) ہم نشانہ باز کو مبداء پر تصور کرتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $x_0 = 0$ اور $y_0 = 2$ ہو گا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{مساوات 12.16}$$

$$= 2 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad y_0 = 2$$

ہم $\frac{dy}{dt} = 0$ سے وہ لمحہ t تلاش کرتے ہیں جب تیر زیادہ سے زیادہ بلندی پر ہو گا:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلند تر}} = 2 + (v_0 \sin \alpha) \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = 2 + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

(ب) ہم مساوات 12.16 میں $g = 9.8$ اور $y_{\text{بلند تر}} = 20$ پر کر کے جزو-ا سے

$$20 = 2 + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2(9.8)}$$

یعنی

$$v_0 \sin \alpha = \sqrt{(18)(19.6)}$$

(ج) ہم جزو-ا میں حاصل زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت t اور افقی فاصلہ $x = 30 \text{ m}$ مساوات 12.16 میں پر کرتے ہیں۔

$$x = x_0(\cos \alpha)t$$

$$30 = 0 + (v_0 \cos \alpha)t$$

$$= (v_0 \cos \alpha) \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

مساوات 12.16

$$x = 30, x_0 = 0$$

$$t = (v_0 \sin \alpha)/g$$

اس مساوات کو $v_0 \cos \alpha$ کے حل کر کے اس میں جزو-ب کا نتیجہ پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0 \cos \alpha = \frac{30g}{v_0 \sin \alpha}$$

(د) ہم جزو-ب اور جزو-ج سے

$$\tan \alpha = \frac{(18)(19.6)}{(30)(9.8)} \approx 0.876$$

یعنی

$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.876) = 50.2^\circ$$

□

حاصل کرتے ہیں۔

سوالات

درج ذیل سوالات میں گولا کی حرکت کو مثالی تصور کیا جائے۔ تمام زاویات افقی میدان سے ناپے جائیں گے۔ جہاں اس کے برعکس ذکر نہ کیا گیا ہو، گولا کو مبداء سے افقی میدان میں چلایا جاتا ہے۔

سوال 1: ایک گولا 60° زاویہ پر 840 m s^{-1} رفتار سے داغا جاتا ہے۔ یہ حدف کے رخ کتنی دیر میں 21 km فاصلہ طے کرے گا؟

سوال 2: ایک توپ کی زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار 24.5 km ہے۔ اس کے نالی میں گولے کی رفتار معلوم کریں۔

سوال 3: ایک گولا 45° زاویہ پر 500 m s^{-1} رفتار سے داغا جاتا ہے۔ (i) اس کا فاصلہ مار کتنا ہو گا؟ (ب) افقی رخ 5 km فاصلہ پر گولا کتنا بلند ہو گا؟ (ج) یہ گولا کتنی بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 4: ایک گیند 10 m کی بلندی سے 30° زاویہ اور 10 m s^{-1} کی رفتار سے پھینکی جاتی ہے۔ یہ گیند کب اور کتنے فاصلہ پر زمین کو مس کرے گی؟

سوال 5: ایک کھلاڑی 7 kg کا گولا 2 m بلندی سے 45° زاویہ پر 13.4 m s^{-1} رفتار سے پھینکتا ہے۔ یہ گیند کتنی دیر بعد اور کتنے فاصلہ پر زمین پر گرے گی؟

سوال 6: اگر سوال 5 میں گیند 40° پر پھینکی جاتی تب یہ نسبتاً زیادہ دور گرتی۔ فاصلہ میں اضافہ کتنا ہو گا؟

سوال 7: ایک گیند کو 45° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ 10 m فاصلہ پر گرتا ہے۔ اس کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔ کن دو زاویات پر پھینکنے سے اس گیند کا فاصلہ مار 6 m ہو گا؟

سوال 8: ٹیلی ویژن کے ٹیوب میں ایک الیکٹران $5 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ رفتار سے 40 cm دور ٹیلی ویژن کے شیشہ کے رخ افقی سمت خارج ہوتا ہے۔ یہ الیکٹران شیشہ پر ٹکرنے سے پہلے کتنا نیچے گرتا ہے؟

سوال 9: تجربہ گاہ میں گالف گیند کو پرکھنے کے دوران 100 واچے 14° کی گیند کو 160 km h^{-1} رفتار پر چلتے ہوئے لاٹھ سے مار کر 9° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند 227 m دور گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

سوال 10: ایک تماش گاہ میں ایک مسخرہ کو انسانی توپ سے 25 m s^{-1} رفتار سے داغا جاتا ہے۔ توقع کی جاتی ہے کہ یہ 60 m دور نرم گدی پر جا گرے گا۔ یہ تماش گاہ ایک بڑے کمرہ میں منعقد ہوتا ہے جس کی چھت 23 m بلند ہے۔ کیا مسخرہ کو یوں داغا جاسکتا ہے کہ یہ چھت کو نہ لگے؟ اگر ایسا ممکن ہو تب توپ کا زاویہ کتنا ہونا چاہیے؟

سوال 11: ایک گالف گیند زمین سے 30° پر 35 m s^{-1} سے روانہ ہوتا ہے۔ کیا یہ 45 m میٹر دور 15.2 m اونچی درخت کو پار کر پائے گا؟

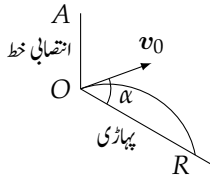
سوال 12: ایک گیند کو 15 m کی گہرائی سے 45° پر 40 m s^{-1} کی رفتار سے اچھال کر میدان میں پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند کتنا افقی فاصلہ طے کر کے زمین پر گرے گا؟

سوال 13: ایک گیند کو 2.5 m اونچائی سے 40° زاویہ سے نیچے میدان میں پھینکا جاتے ہے۔ یہ ٹھیک 65 m دور جا گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

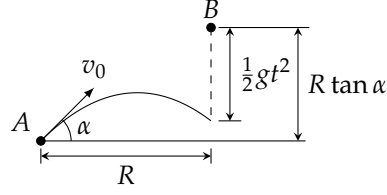
سوال 14: کرکٹ کا کھلاڑی گیند کو 50 cm اونچائی سے 30° زاویہ پر مارتا ہے۔ یہ گیند 90 m دور 12 m اونچی دیوار کو پار کرتی ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال 15: دکھائیں کہ زاویہ α اور زاویہ $90 - \alpha$ پر دانے گئے گولوں کا فاصلہ مار ایک دوسرے کے برابر ہے۔ (اگر ہوائی رگڑ کو شامل کیا جائے تب ایسا نہیں ہو گا۔)

سوال 16: ایک گولہ کی ابتدائی رفتار 400 m s^{-1} ہے۔ اس کا نشانہ 16 km دور ایک مورچا ہے۔ گولے کی ابتدائی دو ایسے زاویات تلاش کریں جن پر یہ نشانہ کو مار پائے گا۔



شکل 12.9: پہاڑی سے گیند پھینکا جاتا ہے (سوال 24)



شکل 12.8: دو گیند (سوال 23)

سوال 17: دکھائیں کہ ابتدائی زاویہ تبدیل کیے بغیر ایک گولا کی ابتدائی رفتار دگنی کرنے سے اس کا فاصلہ مار 4 گنا ہو گا۔ گولے کی زیادہ سے زیادہ اونچائی اور فاصلہ مار دگنی کرنے کے لئے اس کی ابتدائی رفتار کتنے فی صد بڑھانی ہو گی؟

سوال 18: دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت کے نصف وقت میں گولا اس اونچائی کے $\frac{3}{4}$ تک پہنچ پاتا ہے۔

سوال 19: ابتدائی قیت مسئلہ

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j} \quad t = 0$$

تفرقی مساوات

ابتدائی معلومات

کو مستوی میں سمتیہ \mathbf{r} کے لئے حل کرتے ہوئے مساوات 12.16 حاصل کریں۔

سوال 20: ابتدائی زاویہ $\alpha = 50.2^\circ$ لیتے ہوئے مثال 12.11 میں تیر کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال 21: مثال 12.11 میں تیر کب نشانہ سے 2 m کے افقی فاصلہ پر ہو گا؟ اس لمحہ یہ کتنا بلند ہو گا؟

سوال 22: ایک گیند کو 5 m کی بلندی سے سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ یہ کتنی دیر بعد زمین پر گرے گا؟

سوال 23: گیند A کو α زاویہ پر v_0 ابتدائی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ اسی لمحہ R افقی فاصلہ دور $R \tan \alpha$ اونچائی سے گیند B کو گرنے دیا جاتا ہے (شکل 12.8)۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں گیند کسی بھی v_0 کے لئے ایک دوسرے کو ٹکراتے ہیں۔ کیا یہ اتفاق ہے یا ایسا لازم ہے؟ جواب پیش کریں۔

سوال 24: ایک گیند کو پہاڑی سے نیچے پھینکا جاتا ہے (شکل 12.9)۔ (i) دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی سمتی رفتار، زاویہ AOR کو نصف میں قطع کرتا ہو۔ (ب) اگر گیند کو پہاڑی پر اوپر پھینکا جائے تب زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی زاویہ کیا ہونا چاہیے؟

سوال 25: مبدأ سے لمحہ $t = 0$ پر v_0 سمتی رفتار سے ایک مثالی گولا کو دانغا جاتا ہے۔ قوت کشش کی بنا اس گولا کی نیچے رخ اسراع $a = -gk$ ہوگی۔ لمحہ پر گولے کی سمتی رفتار اور مقام تلاش کریں۔

سوال 26: رفتار کی راست تناسب ہوائی مزاحمت ایک گولا جس کی کمیت m اور ابتدائی رفتار v_0 کو رفتار کی راست تناسب ہوائی مزاحمت کا سامنا ہے۔ گولے پر کل قوت $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{j} - k \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

دکھائیں کہ اس کا پہلا مکمل درج ذیل دے گا۔

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{k}{m} \mathbf{r} = v_0 - gt\mathbf{j}$$

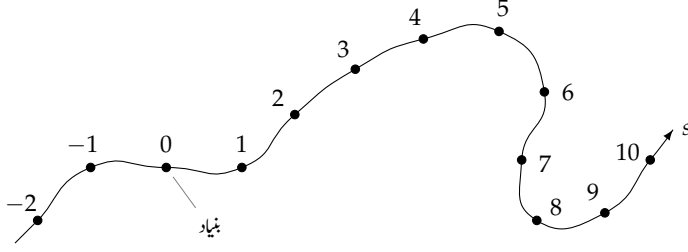
اس مساوات کو حل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{(k/m)t}$ سے ضرب دیں۔ بائیں ہاتھ اب ایک تفاعل کا تفرق ہو گا لہذا دونوں اطراف قابل مکمل ہوں گے۔ اب دوسرا مکمل لیں۔ تفاعل $e^{(k/m)t}$ کو اس تفرقی مساوات کا جزو مکمل کہتے ہیں۔

سوال 27: ایک گولا کو زمین سے α زاویہ پر v_0 رفتار سے دانغا جاتا ہے۔ زاویہ α کو متغیر اور v_0 کو مستقل تصور کریں۔ ہر $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ کے لئے ہمیں قطع مکانی راہ ملی ہے۔ دکھائیں کہ مستوی میں زیادہ سے زیادہ اونچائی کے تمام نقطے درج ذیل ترتیم پر پائے جاتے ہیں جہاں $x \geq 0$ ہے۔

$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$

12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T

قابل تفرق منحنیات جن کا پہلا اور دوسرا استمراری تفرق پایا جاتا ہو خلاء میں حرکت کو ظاہر کرنے کے لئے اہم ہیں۔ ان پر تفصیلاً غور کیا گیا ہے۔ اس حصہ میں اور اگلے حصہ میں ہم ان کے چند ایسے خدوخال پر غور کریں گے جن کے بنا ایسے منحنیات کی اہم ہیں۔



شکل 12.10: ہموار منحنی پر بنیادی نقطہ سے فاصلہ کو پیمانہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

منحنی پر لمبائی قوس

ہموار فضائی منحنیات کی ایک خاص خاصیت یہ ہے کہ ان کی لمبائی قابل ناپ ہوتی ہے۔ یوں ہم منحنی پر کسی نقطہ کو بنیاد تصور کرتے ہوئے، بنیاد سے کسی بھی نقطہ N تک منحنی پر فاصلہ s سے نقطہ N کی نشاندہی کر سکتے ہیں (شکل 12.10)۔ یہ محدودی مستوی پر مبدا سے نقطہ کا فاصلہ دینے کے مترادف ہے۔ متحرک جسم کی سمتی رفتار اور اسراع پر غور کے لئے وقت ایک فطری متغیر ہے جبکہ s منحنی کی صورت پر غور کرنے کے لئے ایک فطری متغیر ہے۔ فضا میں حرکت پر غور کے دوران ان دونوں متغیرات کی ضرورت پیش آتی ہے۔

فضا میں ہموار منحنی پر فاصلہ ناپنے کی خاطر ہم مستوی میں منحنی کے کلیہ میں جزو z شامل کرتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$, $a \leq t \leq b$ جس پر $t = a$ و $t = b$ صرف ایک بار چلا جاتا ہو، کی لمبائی درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2} dt \\ (12.17) \quad &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

□

مستوی منحنیات کی طرح، ہم فضا میں منحنی کی لمبائی معلوم کرتے ہوئے منحنی کی کوئی بھی مقدار معلوم مساوات، جو دیے گئے شرائط کو پورا کرتے ہوں، استعمال کر سکتے ہیں۔ اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 12.17 میں جذب، سمتی رفتار سمتیہ $\frac{dr}{dt}$ کی لمبائی $|v|$ ہے۔ یوں لمبائی قوس کا کلیہ مختصراً

$$(12.18) \quad L = \int_a^b |v| dt$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 12.12: درج ذیل پیچ دار منحنی کے ایک پھر کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

حل: پیچ دار منحنی $t = 0$ سے $t = 2\pi$ تک ایک پھر مکمل کرتی ہے۔ اس حصہ کی لمبائی

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |\mathbf{v}| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

□ ہو گی جو مستوی xy میں اس دائرہ کے لمبائی کا $\sqrt{2}$ گنا ہے جس پر پیچ دار منحنی کھڑی ہے۔

اگر ہم ہموار منحنی C ، جس کی مقدار معلوم مساوات کا متغیر t ہو، پر نقطہ N_0 کو بنیادی نقطہ تصور کریں تب t کی ہر قیمت C پر ایک نقطہ $N(t) = (x(t), y(t), z(t))$ اور سمتیہ بند فاصلہ

$$(12.19) \quad s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau$$

دے گی جو N_0 سے C پر چلتے ہوئے ناپا جائے گا۔ اگر $t > t_0$ ہو تب $N(t)$ سے $N(t_0)$ تک فاصلہ $s(t)$ ہو گا۔ اگر $t < t_0$ ہو تب $s(t)$ ، فاصلہ کے نفی کا برابر ہو گا۔ کی ہر ایک قیمت پر ایک نقطہ تعین کرتی ہے لہذا یوں s کے لحاظ سے C کی مقدار معلوم روپ حاصل ہوتی ہے۔ ہم کو منحنی کا مقدار معلوم لمبائی قوس کہتے ہیں جس کی قیمت بڑھتے t کے رخ بڑھتی ہے۔

بنیاد $N(t_0)$ لیتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس

$$(12.20) \quad s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau$$

مثال 12.13: اگر $t_0 = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

پر t_0 سے t تک چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau && \text{مساوات 12.20} \\ &= \int_0^t \sqrt{2} d\tau && \text{مساوات 12.12 کی قیمتیں} \\ &= \sqrt{2}t \end{aligned}$$

□

یوں $s(2\pi) = 2\pi\sqrt{2}$ ، $s(-2\pi) = -2\pi\sqrt{2}$ ، وغیرہ، ہوں گے۔

مثال 12.14: ایک کثیر پر لمبائی

دکھائیں اگر $u = u_1i + u_2j + u_3k$ اکائی سمتیہ ہو، تب کثیر

$$r(t) = (x_0 + tu_1)i + (y_0 + tu_2)j + (z_0 + tu_3)k$$

پر، نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ جہاں $t = 0$ ہوگا، سے سمت بند لمبائی از خود t کے برابر ہوگی۔
حل:

$$v = \frac{d}{dt}(x_0 + tu_1)i + \frac{d}{dt}(y_0 + tu_2)j + \frac{d}{dt}(z_0 + tu_3)k = u_1i + u_2j + u_3k$$

سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$s(t) = \int_0^t |v| d\tau = \int_0^t |u| d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t$$

□

ہموار منحنی پر رفتار

چونکہ مساوات 12.20 میں جذر کے اندر تفرقات استمراری (ہموار منحنی) ہیں احصاء کے بنیادی مسئلہ کے تحت s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہوگا اور یہ تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$(12.21) \quad \frac{ds}{dt} = |v(t)|$$

جیسا ہم توقع کریں گے، کسی بھی راہ پر ایک ذرے کی رفتار v کی مقدار ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ اگرچہ s تعین کرنے میں بنیادی نقطہ $N(t_0)$ کا کردار پایا جاتا ہے، $N(t_0)$ کا مساوات 12.21 میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ پر چلتے ہوئے جس رفتار سے ایک ذرہ فاصلہ طے کرتا ہے، اس کا بنیادی نقطہ کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

ساتھ ہی اس بات کو ذہن نشین کریں کہ چونکہ تعریف کی رو سے ہموار منحنی کے لئے $|v|$ غیر صفر ہے لہذا $\frac{ds}{dt} > 0$ ہوگا۔ ہم ایک بار دوبارہ دیکھتے ہیں کہ s متغیر t کا بڑھتا تفاعل ہے۔

اکائی مماسی سمتیہ T

چونکہ زیر بحث منحنيات کے لئے $\frac{ds}{dt} > 0$ ہے لہذا s ایک ایک مطابقت رکھتا ہے اور اس کا الٹ پایا جائے گا جو t کو بطور s کا قابل تفرق تفاعل دے گا (حصہ 7.1)۔ اس الٹ کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$(12.22) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|v|}$$

یوں r متغیر s کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کے تفرق کو زنجیری قاعدہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

$$(12.23) \quad \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} = v \frac{1}{|v|} = \frac{v}{|v|}$$

مساوات 12.23 کہتی ہے کہ ایک اکائی سمتیہ ہے جو v کے رخ ہے۔ ہم $\frac{dr}{ds}$ کو r کی منحنی راہ کا اکائی مماسی سمتیہ کہتے ہیں اور اس کو T سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل $r(t)$ کا اکائی مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(12.24) \quad T = \frac{dr}{ds} = \frac{dr/dt}{ds/dt} = \frac{v}{|v|}$$

□

جہاں بھی v متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو وہاں اکائی مماسی سمتیہ T بھی t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، فضا میں اجسام کی حرکت پر غور میں مستعمل، متحرک حوالہ چھوڑنے¹⁵، کے تین اکائی سمتیات میں سے ایک اکائی سمتیہ T ہے۔

مثال 12.15: درج ذیل بیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$r(t) = (\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j \quad t > 0$$

حل:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = (-\sin t + \sin t + t \cos t)i + (\cos t - \cos t + t \sin t)j \\ &= (t \cos t)i + (t \sin t)j \end{aligned}$$

$$|v| = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = \sqrt{t^2} = t \quad \text{ہے } |t| = t \text{ کی بنا } t > 0$$

$$T = \frac{v}{|v|} = \frac{v}{t} = (\cos t)i + (\sin t)j$$

□

مثال 12.16: اکائی دائرہ

$$\mathbf{v} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

کے گرد گھڑی کے مخالف رخ حرکت

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

□

کا اکائی مماسی سمتیہ $\mathbf{T} = \mathbf{v}$ ہے۔

سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔ وقفہ پر منحنی کی لمبائی بھی دریافت کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{5}t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \text{سوال 1:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (6 \sin 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \text{سوال 2:}$$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 8 \quad \text{سوال 3:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (2+t)\mathbf{i} - (t+1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 3 \quad \text{سوال 4:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \quad \text{سوال 5:}$$

$$\mathbf{r}(t) = 6t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} - 3t^3\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 2 \quad \text{سوال 6:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \text{سوال 7:}$$

$$\mathbf{r}(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j}, \quad \sqrt{2} \leq t \leq 2 \quad \text{سوال 8:}$$

سوال 9: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 26π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (5 \sin t)\mathbf{i} + (5 \cos t)\mathbf{j} + 12t\mathbf{k}$$

سوال 10: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے مخالف رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 13π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$r(t) = (12 \sin t)i - (12 \cos t)j + 5tk$$

سوال 11 تا سوال 14 میں $t = 0$ سے دور کسی نقطہ پر مقدار معلوم لمبائی توس درج ذیل کھل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$s = \int_0^t |v(\tau)| d\tau \quad \text{مسادات 12.19}$$

اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$r(t) = (4 \cos t)i + (4 \sin t)j + 3tk, \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \quad \text{سوال 11}$$

$$r(t) = (\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \quad \text{سوال 12}$$

$$r(t) = (e^t \cos t)i + (e^t \sin t)j + e^t k, \quad -\ln 4 \leq t \leq 0 \quad \text{سوال 13}$$

$$r(t) = (1 + 2t)i + (1 + 3t)j + (6 - 6t)k, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad \text{سوال 14}$$

سوال 15: نقطہ $(0, 0, 1)$ سے $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$r(t) = (\sqrt{2}t)i + (\sqrt{2}t)j + (1 - t^2)k$$

سوال 16: ہم نے مثال 12.12 میں پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی $2\pi\sqrt{2}$ تلاش کی۔ ایک مربع جس کا ضلع 2π ہو کے وتر کی لمبائی بھی یہی ہو گی۔ دکھائیں کہ جس نکلی پر پیچ دار منحنی کا ایک چکر لپٹا گیا ہے، اس کو انتصابی کاٹ کر سیدھا کرنے سے یہی مربع حاصل ہو گا۔

سوال 17:

ا. دکھائیں کہ $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + (1 - \cos t)k$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ایک ترخیم ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ r قائمہ دائری نکلی اور ایک مستوی کا مقطع ہے۔ ان قائمہ دائری نکلی اور مستوی کی مساواتیں تلاش کریں۔

ب. نکلی پر ترخیم کا خاکہ کھینچیں اور اس پر نقاط $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر اکائی مماسی سمتیات بنائیں۔

ج. دکھائیں کہ سمتیہ اسراع ہر صورت مستوی کو متوازی ہو گا (مستوی کے عمودی سمتیہ کو قائمہ ہو گا)۔ یوں اگر آپ اسراع کو ترخیم کے ساتھ جڑا دکھائیں تب یہ ترخیم کے مستوی میں پایا جائے گا۔ نقاط $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر سمتیات اسراع کو خاکہ میں شامل کریں۔

د. ترخیم کی لمبائی کا مکمل لکھیں۔ اس مکمل کی قیمت تلاش کرنے کی کوشش نہ کریں چونکہ یہ ایک غیر بنیادی مکمل ہے۔

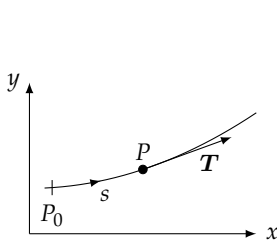
ه. اعدادی ترکیبات سے ترخیم کی لمبائی دو اعشاریہ درست معلوم کریں۔

سوال 18: لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے۔
یہ دکھانے کی خاطر کہ لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے، ہم بیچ دار منحنی کے ایک پیکر کی لمبائی درج ذیل (مختلف) مقدار معلوم مساواتیں استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

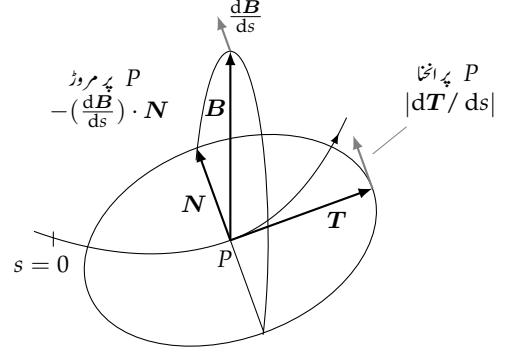
$$r(t) = (\cos 4t)i + (\sin 4t)j + 4tk, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ا.}$$

$$r(t) = (\cos(t/2))i + (\sin(t/2))j + (t/2)k, \quad 0 \leq t \leq 4\pi \quad \text{ب.}$$

$$r(t) = (\cos t)i - (\sin t)j - tk, \quad -2\pi \leq t \leq 0 \quad \text{ج.}$$



شکل 12.12: بڑھتی لمبائی قوس کے رخ چلتے ہوئے اکائی مماسی سمتیہ T مڑتا ہے۔ نقطہ P پر $|dT/ds|$ کی قیمت کو P پر منحنی کی انحناء کہتے ہیں۔



شکل 12.11: ہر متحرک جسم کے ساتھ ایک TNB چھوٹ سفر کرتا ہے جو اس کی راہ کا کردار بیان کرتا ہے۔

12.4 انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ

اس حصہ میں ہم تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات پر مبنی ایسا چھوٹ متعارف کرتے ہیں جو فضا میں منحنی پر جسم کے ساتھ ساتھ چلتا ہو (شکل 12.11)۔ اس چھوٹ کے تین سمتیات ہیں۔ پہلا اکائی مماسی سمتیہ T ہے۔ دوسرا N ہے جو $\frac{dR}{ds}$ کے رخ اکائی سمتیہ ہے۔ تیسرا اکائی سمتیہ $B = T \times N$ ہے۔ یہ سمتیات اور ان کے تفرقات اگر معلوم ہوں، فضا میں سواری کی سمت بندی اور اس کی راہ میں موڑ اور بل کے بارے میں مفید معلومات مہیا کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\left| \frac{dR}{ds} \right|$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ کتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہے؛ اسی لئے اس کو سواری کی راہ کی انحناء¹⁶ کہتے ہیں۔ عدد $-(dB/ds) \cdot N$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ مستوی حرکت سے کتنی باہر مڑتی ہے یا بل کھاتی ہے؛ اس کو سواری کی راہ کی مروڑ¹⁷ کہتے ہیں۔ دوبارہ شکل 12.11 پر نظر ڈالیں۔ اگر قوسی راہ پر ایک ریل گاڑی، P ، اوپر چڑھ رہی ہو تب فی اکائی فاصلہ اس کی سر بتی جتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہو، یہ اس کی انحناء ہوگی۔ سمتیات T اور N کے مستوی سے ریل گاڑی کا انجن جس شرح سے باہر نکلتا ہو، یہ اس کی مروڑ ہوگی۔

مستوی منحنی کی انحناء

جیسے جیسے ایک ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے، منحنی کے مڑنے سے $T = \frac{dr}{ds}$ بھی مڑتا ہے۔ چونکہ T اکائی سمتیہ ہے لہذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی اور راہ پر چلتے ہوئے صرف اس کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔ منحنی پر چلتے ہوئے اکائی فاصلہ پر T کی شرح تبدیلی کو انحناء کہتے ہیں (شکل 12.12)۔ انحناء کو روایتی طور پر یونانی حرف κ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

curvature¹⁶
torsion¹⁷

تعریف: ایک ہموار منحنی جس کا اکائی مماسی سمتیہ T ہو، کا تفاعل انحناء درج ذیل ہو گا۔

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

□

اگر $|dT/ds|$ بڑی قیمت ہو تب نقطہ P سے گزرتے ہوئے ذرہ بہت تیزی سے مڑے گا اور P پر انحناء زیادہ ہوگی۔ اگر $|dT/ds|$ صفر کے قریب ہو تب T کا رخ آہستہ تبدیل ہو گا اور P پر انحناء کم ہوگی۔ اس تعریف کو پرکھتے ہوئے ہم درج ذیل دو مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ سیدھے خط اور دائروں کی انحناء مستقل ہوگی۔

مثال 12.17: سیدھے لکیر کی انحناء صفر ہوگی

سیدھے لکیر پر اکائی مماسی سمتیہ T کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہذا اس کے اجزاء مستقل ہوں گے۔ یوں $|dT/ds| = |0| = 0$ ہو گا (شکل 12.13)۔

□

مثال 12.18: رداس a کے دائرے کی انحناء $\frac{1}{a}$ ہوگی
ہم دائرہ کی مقدار معلوم مساوات

$$r(\theta) = (a \cos \theta)i + (a \sin \theta)j$$

میں $\theta = \frac{s}{a}$ پر کر کے اس کی لمبائی قوس s کے لحاظ سے مقدار معلوم روپ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.14)۔

$$r = (a \cos \frac{s}{a})i + (a \sin \frac{s}{a})j$$

یوں

$$T = \frac{dr}{ds} = (-\sin \frac{s}{a})i + (\cos \frac{s}{a})j$$

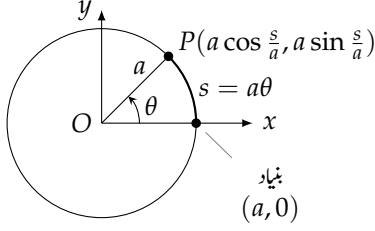
اور

$$\frac{dT}{ds} = (-\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a})i - (\frac{1}{a} \sin \frac{s}{a})j$$

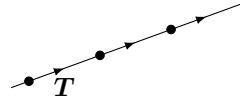
ہوں گے۔ اس طرح کسی بھی کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \kappa &= \left| \frac{dT}{ds} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{s}{a} + \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{s}{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \quad \text{اگر } a > 0 \text{ کی بنا } |a| = a \text{ ہو گا} \end{aligned}$$

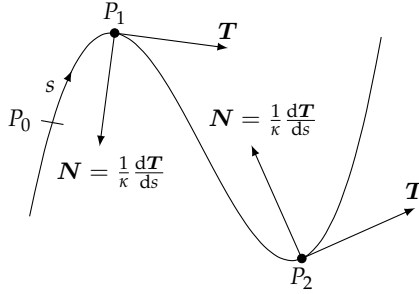
□



شکل 12.14: دائرہ برائے مثال 12.18



شکل 12.13: سیدھے لکیر پر T کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے
لہذا اس کی انحناء $|dT/ds|$ صفر ہوگی۔



شکل 12.15: منحنی کا عمودی سمتیہ $\frac{dT}{ds}$ ہر وقت اس رخ ہوتا ہے جس رخ T مڑتا ہو۔ سمتیہ N کا رخ سمتیہ $\frac{dT}{ds}$ کا رخ ہے۔

صدر اکائی عمودی سمتیہ

چونکہ T کی لمبائی اکائی ہے لہذا $\frac{dT}{ds}$ اور T آپس میں عمودی ہوں گے (حصہ 12.1)۔ یوں $\frac{dT}{ds}$ کو لمبائی κ سے تقسیم کرنے سے ایسا اکائی سمتیہ حاصل ہو گا جو T کو عمودی ہو گا (شکل 12.15)۔

تعریف: جس نقطہ پر $\kappa \neq 0$ ہو وہاں مستوی میں منحنی کا صدر اکائی سمتیہ N درج ذیل ہو گا۔

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds}$$

□

موڑ پر سمتیہ $\frac{dT}{ds}$ کا رخ اس جانب ہو گا جس جانب منحنی مڑتی ہو۔ یوں اگر بڑھتے فاصلہ کے رخ منہ کرتے ہوئے، اگر T گھڑی کے رخ مڑے تب سمتیہ $\frac{dT}{ds}$ کا رخ دائیں ہو گا اور اگر T گھڑی کے مخالف رخ مڑتی ہو تب اس کا رخ بائیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں صدر عمودی سمتیہ N منحنی کے مقعر رخ ہو گا (شکل 12.15)۔ جس نقطہ پر $\kappa = 0$ ہو، وہاں کے بارے میں سوالات میں غور کیا گیا ہے۔

تعریف کی رو سے منحنی $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ کی لمبائی قوس، مثبت $\frac{ds}{dt}$ کے لئے ہو گی لہذا $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} N &= \frac{dT/ds}{|dT/ds|} \\ &= \frac{(dT/dt)(dt/ds)}{|dT/dt||dt/ds|} \\ (12.25) \quad &= \frac{dT/dt}{|dT/dt|} \end{aligned}$$

اس طرح ہم κ اور s حاصل کیے بغیر N حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 12.19:

□

جوابات

صفحہ 1447 12.1

$$\mathbf{v} = (-2 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}; \mathbf{a} =$$

$$(-2 \cos t)\mathbf{i} - (3 \sin t)\mathbf{j}; \dot{r} = 2\sqrt{5};$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}; \mathbf{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \mathbf{a} =$$

$$\frac{-2}{(t+1)^2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}; \dot{r} = \sqrt{6}; \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} +$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}; \mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} +$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$t = 0, \pi, 2\pi$$

$$\frac{1}{4}\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$$

$$\frac{\pi+2\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$(\ln 4)\mathbf{i} + (\ln 4)\mathbf{j} + (\ln 2)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{-t^2}{2} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} +$$

$$\left(\frac{-t^2}{2} + 3\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\mathbf{i} + (-e^{-t} +$$

$$1)\mathbf{j} + (\ln(t+1) + 1)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(t) = 8t\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (-16t^2 + 100)\mathbf{k}$$

$$x = t, y = -1, z = 1 + t$$

$$x = at, y = a, z = 2\pi b + bt$$

$$(37) \quad (1) \text{ مستقل رفتار } 1; (2) \text{ جی ہاں } (3) \text{ گھڑی کے مخالف رخ}$$

$$(4) \text{ جی ہاں}$$

$$(38) \quad (1) \text{ مستقل رفتار } 2; (2) \text{ جی ہاں } (3) \text{ گھڑی کے مخالف}$$

$$\text{رخ } (4) \text{ جی ہاں}$$

$$(39) \quad (1) \text{ مستقل رفتار } 1; (2) \text{ جی ہاں } (3) \text{ گھڑی کے مخالف رخ}$$

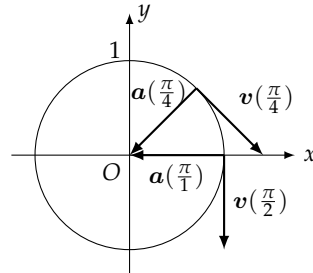
$$(4) \text{ یہ } (1, 0) \text{ کی بجائے } (0, -1) \text{ سے ابتدا کرتا ہے}$$

$$y = x^2 - 2x, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{a} = 2\mathbf{j} \quad (1)$$

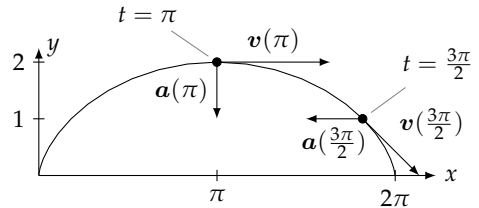
$$y = \frac{2}{9}x^2, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \quad (3)$$

$$t = \frac{\pi}{4} : \mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}, \mathbf{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} -$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}; t = \frac{\pi}{2} : \mathbf{v} = -\mathbf{j}, \mathbf{a} = -\mathbf{i}$$



$$t = \pi : \mathbf{v} = 2\mathbf{i}, \mathbf{a} = -\mathbf{j}; t = \frac{3\pi}{2} : \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{a} = -\mathbf{i}$$



$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \mathbf{a} = 2\mathbf{j}; \dot{r} = 3; \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{3}\mathbf{i} +$$

$$\frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}; \mathbf{v}(1) = 3\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$$

- (1) مستقل رفتار 1 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے رخ (4) 141 % (17)
- جی ہاں (1) متغیر رفتار (2) نہیں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی 19.92 m 1.789 سیکنڈ (21)
- (1) متغیر رفتار (2) نہیں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی $v(t) = -gt\mathbf{k} + v_0$, $r(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + v_0t$ (25)
- (39) $r(t) = (\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1)\mathbf{i} - (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2)\mathbf{j} + (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}})(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (i + 2j + 3k)$
- حصہ 12.3 صفحہ 1472
- (1) $T = (-\frac{2}{3}\sin t)\mathbf{i} + (\frac{2}{3}\cos t)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k}$, 3π (17)
- (41) $v(t) = 2\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j}$
- (43) زیادہ سے زیادہ $|v| = 3$ کم سے کم $|v| = 2$ زیادہ سے زیادہ $|a| = 3$ کم سے کم $|a| = 2$
- (3) $T = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}$, $\frac{52}{3}$ (21)
- (5) $T = -\cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$, $\frac{3}{2}$ (25)
- (7) $T = (\frac{\cos t - t \sin t}{t+1})\mathbf{i} + (\frac{\sin t + t \cos t}{t+1})\mathbf{j} + (\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1})\mathbf{k}$, $\frac{\pi^2}{2} + \pi$ (29)
- (9) $(0, 5, 24\pi)$ (33)
- (11) $s(t) = 5t$, $L = \frac{5\pi}{2}$ (37)
- (13) $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}$, $L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (41)
- (15) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ (45)
- (17) $x + z = 1$ اور $x^2 + y^2 = 1$ تک (49)
- (1) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt$, $L \approx 7.64$ (53)
- (3) (i) 72.2 s, (ب) 25 510 m, (ج) 4020 m (57)
- (5) $t \approx 2.1257s$, $x \approx 20.14m$ (61)
- (7) $v_0 = 9.9ms^{-1}$, $\alpha = 18.4^\circ$, $\alpha = 71.6^\circ$ (65)
- (9) $174kmh^{-1}$ (69)
- (11) گیند درخت کے پتوں کو چھوتا ہوا اسے پار کر پائے گا۔ (73)
- (13) $24.87ms^{-1}$ (77)

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

