

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
73	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
311	دیگر شرح تبدیلی	3.7

327	4	تفرق کا استعمال
327	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
342	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
358	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
358	4.3.1	پرکھ
370	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
393	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
420	4.6	بہترین بنانا
444	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
490	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
517	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
535	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
562	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
579	5.7	بنیادی مسئلہ
600	5.8	قطعی تکمل میں بدل
606	5.9	اعدادی تکمل
606	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیتال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ تکوینیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ تکوینیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
960	8.2 مکمل بالخصص	
963	ا ضمیمہ اول	
965	ب ضمیمہ دوم	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 8

تکمل کے طریقے

ہم نے دیکھا کہ چیزوں کی ناپ اور روزمرہ زندگی کے اعمال کی نمونہ کشی تکمل کو جنم دیتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ الٹ تفرق سے تکمل کو حل کیا جاسکتا ہے۔ کسی عمل کی نمونہ کشی میں زیادہ گہرائی تک جانے سے زیادہ پیچیدہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ اس طرح کے پیچیدہ تکمل کو کس طرح سادہ صورت دی جاسکتی ہے جن کے ساتھ کام کرنا آسان ہو۔ اس باب میں ہم انجانے تکمل سے جانے پہچانے تکمل کا حصول سیکھیں گے جنہیں جدول سے دیکھا جاسکتا ہے یا جس کو کمپیوٹر سے حل کیا جاسکتا ہے۔

8.1 تکمل کے بنیادی کلیات

ہم نے حصہ 5.1 میں دیکھا کہ غیر قطعی تکمل کو حل کرنے کے لئے اس کے الٹ تفرق کے ساتھ مستقل جمع کرنا ہو گا۔ جدول 8.1 میں ان تکمل کی بنیادی روپ درج کی گئی ہے جنہیں اب تک ہم حل کرتے آ رہے ہیں۔ زیادہ کمالات کا جدول کتاب کی آخر میں پیش کیا گیا ہے جس پر حصہ میں غور کیا جائے گا۔

جدول 8.1: تکمیل کے بنیادی کلیات

کلیہ	شمار
$\int du = u + C$	1
$\int k du = ku + C \quad (k \text{ عدد ہے})$	2
$\int (du + dv) = \int du + \int dv$	3
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	4
$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	5
$\int \sin u du = -\cos u + C$	6
$\int \cos u du = \sin u + C$	7
$\int \sec^2 u du = \tan u + C$	8
$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$	9
$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$	10
$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$	11
$\int \tan u du = -\ln \cos u + C = \ln \sec u + C$	12
$\int \cot u du = \ln \sin u + C = -\ln \csc u + C$	13
$\int e^u du = e^u + C$	14
$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$	15
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	16
$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$	17
$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left \frac{u}{a}\right + C$	18

الجبرائی طریقہ

ہمیں عموماً مکمل کو جانی پہچانی معیاری روپ میں لکھنا ہو گا۔

مثال 8.1: سادہ روپ حاصل کرنے کا بدل
مکمل $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} & u &= x^2 - 9x + 1 \\ &= \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C & \text{جدول 8.1 کا یہ 4 میں } n &= -1/2 \\ &= 2u^{1/2} + C \\ &= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C \end{aligned}$$

□

مثال 8.2: مکمل مربع
مکمل $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$ حل کریں۔

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہوئے زیر جذر کو لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned} 8x - x^2 &= -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} & a &= 4, u = (x-4) \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{جدول 8.1 کا یہ 16} \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C \end{aligned}$$

□

مثال 8.3: طاقت پھیلا کر تماشل کا استعمال
مکمل $\int (\sec x \tan x)^2 dx$ حل کریں۔

حل: ہم مکمل کو پھیلاتے ہیں۔

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x$$

ہمیں ہاتھ پہلے دو اجزاء کا مکمل ہم جانتے ہیں البتہ $\tan^2 x$ کا کچھ کرنا ہو گا۔ ہم درج ذیل تماشل کے ذریعہ اس کو جانی پہچانی روپ میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \implies \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int (\sec x + \tan x)^2 dx &= \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \sec^2 x - 1) dx \\ &= 2 \int \sec^2 x dx + 2 \int \sec x \tan x dx - \int 1 dx \\ &= 2 \tan x + 2 \sec x - x + C \end{aligned}$$

□

مثال 8.4: جذر سے چھٹکارا
مکمل $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x} dx$ حل کریں۔

حل: ہم تماشل

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \implies 1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$$

میں $\theta = 2x$ پر کر کے

$$1 + \cos 4x = 2 \cos^2 2x$$

لکھتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں تیسرے قدم پر وقفہ $[0, \frac{\pi}{4}]$ پر $\cos 2x \geq 0$ کی بنا $|\cos 2x| = \cos 2x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x} \, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2} \sqrt{\cos^2 2x} \, dx \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} |\cos 2x| \, dx \quad \sqrt{u^2} = |u| \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \\
 &= \sqrt{2} \left. \frac{\sin 2x}{2} \right|_0^{\pi/4} \\
 &= \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

□

مثال 8.5: غیر مناسب کسر کی مناسب کسر میں تبدیلی
مکمل $\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} \, dx$ حل کریں۔

حل: مکمل غیر مناسب کسر (نسب نما کی طاقت، شمار کنندہ کی طاقت سے زیادہ یا اس کے برابر ہے) ہے۔ اس کا مکمل لینے سے پہلے ہم پہلے تقسیم کر کے حاصل تقسیم اور باقی حاصل کرتے ہیں جو مناسب کسر ہو گا:

$$\frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \frac{6}{3x + 2}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} \, dx = \int \left(x - 3 + \frac{6}{3x + 2} \right) \, dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|3x + 2| + C$$

□

یہ ضروری نہیں ہے کہ غیر مناسب کسر کو بذریعہ تقسیم مناسب کسر میں تبدیل کرنے سے ہمیں ایسا مکمل حاصل ہو جسے ہم سیدھا مکمل کر سکیں۔ ایسی صورت پر حصہ میں غور کیا جائے گا۔

مثال 8.6: ایک کسر کی علیحدگی
مکمل $\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم متکامل کو دو علیحدہ کسر لکھتے ہیں۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

بائیں ہاتھ پہلے نئے تکامل میں ہم $u = 1 - x^2$ ، $du = -2x dx$ اور $x dx = -\frac{1}{2} du$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 3 \int \frac{(-1/2) du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2} \int u^{-1/2} du \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1 \end{aligned}$$

دوسرا نیا تکامل معیاری روپ میں ہے لہذا

$$2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \sin^{-1} x + C_2$$

ہو گا۔ یوں پورا تکامل درج ذیل ہو گا جہاں $C_1 + C_2 = C$ لکھا گیا ہے۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -3\sqrt{1-x^2} + 2 \sin^{-1} x + C$$

□

مثال 8.7: اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب

تکامل $\int \sec x dx$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int (\sec x)(1) dx \\ &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{du}{u} \quad u = \tan x + \sec x \\ &= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

جدول 8.2: سینٹ اور کوسینٹ کے کلیات تکمیل

کلیہ	شمار
$\int \sec u \, du = \ln \sec u + \tan u + C$	1
$\int \csc u \, du = -\ln \csc u + \cot u + C$	2

□

ہم مثال 8.7 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے سینٹ اور ٹینجٹ کی جگہ کوسینٹ اور کوسینٹ لیتے ہوئے کوسینٹ کے تکمیل کا کلیہ معلوم کر سکتے ہیں (سوال 95)۔

تکمیل کو بنیادی کلیہ کی روپ میں لکھنے کا طریقہ

مثال	طریقہ
$\frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx = \frac{du}{u}$	سادہ روپ بذریعہ بدل
$\sqrt{8x-x^2} dx = \sqrt{16-(x-4)^2}$	تکمیل مربع
$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x$ $= \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + (\sec^2 x - 1)$ $= 2 \sec^2 x + 2 \sec x \tan x - 1$	تکوینیاتی تماش
$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2} \cos 2x $	جذر سے چھٹکارا
$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x-3 + \frac{6}{3x+2}$	غیر مناسب سے مناسب کسر کا حصول
$\frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$	کسر کی علیحدگی
$\sec x = \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ $= \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}$	اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب

سوالات

بنیادی بدل

سوال 1 تا سوال 36 میں بدل کی استعمال سے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 1: $\int \frac{16x dx}{\sqrt{8x^2+1}}$
 جواب: $2\sqrt{8x^2+1} + C$

سوال 2: $\int \frac{3 \cos x dx}{\sqrt{1+3 \sin x}}$

سوال 3: $\int 3\sqrt{\sin v} \cos v dv$
 جواب: $2(\sin v)^{3/2} + C$

سوال 4: $\int \cot^3 y \csc^2 y dy$

سوال 5: $\int_0^1 \frac{16x dx}{8x^2+2}$
 جواب: $\ln 5$

سوال 6: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\tan z} dz$

سوال 7: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
 جواب: $2 \ln(\sqrt{x}+1) + C$

سوال 8: $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

سوال 9: $\int \cot(3-7x) dx$
 جواب: $-\frac{1}{7} \ln|\sin(3-7x)| + C$

سوال 10: $\int \csc(\pi x - 1) dx$

سوال 11: $\int e^\theta \csc(e^\theta + 1) d\theta$
 جواب: $-\ln|\csc(e^\theta + 1) + \cot(e^\theta + 1)| + C$

سوال 12: $\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x} dx$

سوال 13: $\int \sec \frac{t}{3} dt$
 جواب: $3 \ln \left| \sec \frac{t}{3} + \tan \frac{t}{3} \right| + C$

سوال 14: $\int x \sec(x^2 - 5) dx$

سوال 15: $\int \csc(s - \pi) ds$
 جواب: $-\ln |\csc(s - \pi) + \cot(s - \pi)| + C$

سوال 16: $\int \frac{1}{\theta^2} \csc \frac{1}{\theta} d\theta$

سوال 17: $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2xe^{x^2} dx$
 جواب: 1

سوال 18: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(y) e^{\cos y} dy$

سوال 19: $\int e^{\tan v} \sec^2 v dv$
 جواب: $e^{\tan v} + C$

سوال 20: $\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$

سوال 21: $\int 3^{x+1} dx$
 جواب: $\frac{e^{x+1}}{\ln 3} + C$

سوال 22: $\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx$

سوال 23: $\int \frac{2^{\sqrt{w}}}{2\sqrt{w}} dw$
 جواب: $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2} + C$

سوال 24: $\int 10^{2\theta} d\theta$

سوال 25: $\int \frac{9 du}{1+9u^2}$
 جواب: $3 \tan^{-1} 3u + C$

سوال 26: $\int \frac{4 dx}{1+(2x+1)^2}$

سوال 27: $\int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ جواب: $\frac{\pi}{18}$

سوال 28: $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

سوال 29: $\int \frac{2s ds}{\sqrt{1-s^4}}$ جواب: $\sin^{-1} s^2 + C$

سوال 30: $\int \frac{2dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

سوال 31: $\int \frac{6dx}{x\sqrt{25x^2-1}}$ جواب: $6 \sec^{-1}|5x| + C$

سوال 32: $\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-9}}$

سوال 33: $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ جواب: $\tan^{-1} e^x + C$

سوال 34: $\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}$

سوال 35: $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{dx}{x \cos(\ln x)}$ جواب: $\ln(2 + \sqrt{3})$

سوال 36: $\int \frac{\ln x dx}{x+4x \ln^2 x}$

تکمیل مربع

سوال 37 تا سوال 42 میں مربع مکمل کر کے اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے مکمل حل کریں۔

سوال 37: $\int_1^2 \frac{8dx}{x^2-2x+2}$ جواب: 2π

سوال 38: $\int_2^4 \frac{2dx}{x^2-6x+10}$

سوال 39: $\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$ جواب: $\sin^{-1}(t-2) + C$

8.1. مکمل کے بنیادی کلیات

سوال 40: $\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta - \theta^2}}$

سوال 41: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

جواب: جب $|x+1| > 1$ تب $\sec^{-1}|x+1| + C$

سوال 42: $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

تکوینیاتی تماثل

سوال 43 تا سوال 46 میں تکوینیاتی تماثل اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے مکمل حل کریں۔

سوال 43: $\int (\sec x + \cot x)^2 dx$

جواب: $\tan x - 2 \ln|\csc x + \cot x| - \cot x - x + C$

سوال 44: $\int (\csc x - \tan x)^2 dx$

سوال 45: $\int \csc x \sin 3x dx$

جواب: $x + \sin 2x + C$

سوال 46: $\int (\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x) dx$

غیر مناسب کسر

سوال 47 تا سوال 52 میں غیر مناسب کسر سے مناسب کسر کے حصول اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے مکمل حل کریں۔

سوال 47: $\int \frac{x}{x+1} dx$

جواب: $x - \ln|x+1| + C$

سوال 48: $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

سوال 49: $\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2x^3}{x^2-1} dx$

جواب: $7 + \ln 8$

سوال 50: $\int_{-1}^3 \frac{4x^2-7}{2x+3} dx$

سوال 51: $\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4} dt$

جواب: $2t^2 - t + 2 \tan^{-1}(\frac{t}{2}) + C$

$$\int \frac{2\theta^3 - 7\theta^2 + 7\theta}{2\theta - 5} d\theta \quad \text{سوال 52:}$$

کسر کی علیحدگی

سوال 53 تا سوال 56 میں کسر علیحدہ کر کے بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے مکمل حل کریں۔

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{سوال 53:}$$

$$\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}} dx \quad \text{سوال 54:}$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx \quad \text{سوال 55:}$$

$$\sqrt{2} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2} dx \quad \text{سوال 56:}$$

اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب

سوال 57 تا سوال 62 میں اکائی کی ایک روپ سے ضرب اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے مکمل حل کریں۔

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx \quad \text{سوال 57:}$$

$$\tan x - \sec x + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{1}{1+\cos x} dx \quad \text{سوال 58:}$$

$$\int \frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta \quad \text{سوال 59:}$$

$$\ln|1 + \sin \theta| + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{1}{\csc \theta + \cot \theta} d\theta \quad \text{سوال 60:}$$

$$\int \frac{1}{1-\sec x} dx \quad \text{سوال 61:}$$

$$\cot x + x + \csc x + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{1}{1-\csc x} dx \quad \text{سوال 62:}$$

جذر سے چھٹکارا

سوال 63 تا سوال 70 میں جذر سے چھٹکارے کے بعد مکمل حل کریں۔

سوال 63: $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} dx$ جواب: 4

سوال 64: $\int_0^\pi \sqrt{1-\cos 2x} dx$

سوال 65: $\int_{\pi/2}^\pi \sqrt{1+\cos 2t} dt$ جواب: $\sqrt{2}$

سوال 66: $\int_{-\pi}^0 \sqrt{1+\cos t} dt$

سوال 67: $\int_{-\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2 \theta} d\theta$ جواب: 2

سوال 68: $\int_{\pi/2}^\pi \sqrt{1-\sin^2 \theta} d\theta$

سوال 69: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 y} dy$ جواب: $\ln|\sqrt{2}+1| - \ln|\sqrt{2}-1|$

سوال 70: $\int_{-\pi/4}^0 \sqrt{\sec^2 y - 1} dy$

مختلف قسم کے تکمیل
سوال 71 تا سوال 82 میں کوئی بھی موزوں طریقہ استعمال کرتے ہوئے مکمل حل کریں۔

سوال 71: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\csc x - \cot x)^2 dx$ جواب: $4 - \frac{\pi}{2}$

سوال 72: $\int_0^{\pi/4} (\sec x + 4 \cos x)^2 dx$

سوال 73: $\int \cos \theta \csc(\sin \theta) d\theta$ جواب: $-\ln|\csc(\sin \theta) + \cot(\sin \theta)| + C$

سوال 74: $\int (1 + \frac{1}{x}) \cot(x + \ln x) dx$

سوال 75: $\int (\csc x - \sec x)(\sin x + \cos x) dx$ جواب: $\ln|\sin x| + \ln|\cos x| + C$

سوال 76: $\int (\csc x + \sec x)(\tan x + \cot x) dx$

سوال 77: $\int \frac{6 dy}{\sqrt{y}(1+y)}$

جواب: $12 \tan^{-1}(\sqrt{y}) + C$

سوال 78: $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

سوال 79: $\int \frac{7 dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$

جواب: $\sec^{-1}\left|\frac{x-1}{7}\right| + C$

سوال 80: $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

سوال 81: $\int \sec^2 t \tan(\tan t) dt$

جواب: $\ln|\sec(\tan t)| + C$

سوال 82: $\int \frac{\tan \theta}{2 \sec \theta + 1}$

تکونیاتی طاقت

سوال 83:

ا. حل کریں: $\int \cos^3 \theta d\theta$ (اشارہ: $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$)

ب. حل کریں: $\int \cos^5 \theta d\theta$

ج. بغیر حل کیے بتائیں کہ آپ $\int \cos^9 \theta d\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

جواب: (ا) $\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta + C$ (ب) $\sin \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta + \frac{1}{5} \sin^5 \theta + C$

(ج) $\int \cos^9 \theta d\theta = \int \cos^8 \theta (\cos \theta) d\theta = \int (1 - \sin^2 \theta)^4 (\cos \theta) d\theta$

سوال 84:

ا. حل کریں: $\int \sin^3 \theta d\theta$ (اشارہ: $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$)

ب. حل کریں: $\int \sin^5 \theta d\theta$

ج. حل کریں: $\int \sin^7 \theta d\theta$

د. بغیر حل کیے بتائیں آپ $\int \sin^{13} \theta d\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

سوال 85:

ا. $\int \tan^3 \theta d\theta$ کو $\int \tan \theta d\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔ (اشارہ: $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$)

ب. $\int \tan^5 \theta d\theta$ کو $\int \tan^3 \theta d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \tan^7 \theta d\theta$ کو $\int \tan^5 \theta d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \tan^{2k+1} \theta d\theta$ کو $\int \tan^{2k-1} \theta d\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

جواب:

$$\int \tan^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta - \int \tan \theta d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + \ln|\cos \theta| + C$$

$$\int \tan^5 \theta d\theta = \frac{1}{4} \tan^4 \theta d\theta - \int \tan^3 \theta d\theta$$

$$\int \tan^7 \theta d\theta = \frac{1}{6} \tan^6 \theta - \int \tan^5 \theta d\theta$$

$$\int \tan^{2k+1} \theta d\theta = \frac{1}{2k} \tan^{2k} \theta - \int \tan^{2k-1} \theta d\theta$$

سوال 86:

ا. $\int \cot^3 \theta d\theta$ کو $\int \cot \theta d\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔ (اشارہ: $\cot^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$)

ب. $\int \cot^5 \theta d\theta$ کو $\int \cot^3 \theta d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \cot^7 \theta d\theta$ کو $\int \cot^5 \theta d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \cot^{2k+1} \theta d\theta$ کو $\int \cot^{2k-1} \theta d\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

نظریہ اور استعمال

سوال 87: بالائی جانب $y = 2 \cos x$ اور زیریں جانب $y = \sec x$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ میں گھیرے ہوئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $2\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})$

سوال 88: ایک تکونی خطے کا بالائی سرحد $y = \csc x$ ، نچلا سرحد $y = \sin x$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ اور بائیں سرحد $x = \frac{\pi}{6}$ ہیں۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 89: محور x کے گرد سوال 87 کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: π^2

سوال 90: محور x کے گرد سوال 88 کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 91: منحنی $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ کی لمبائی معلوم کریں۔
جواب: $\ln(2 + \sqrt{3})$

سوال 92: منحنی $y = \ln(\sec x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

سوال 93: محور x ، قوس $y = \sec x$ ، لکیر $x = -\frac{\pi}{4}$ اور $x = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2}+3)}$

سوال 94: محور x ، قوس $y = \csc x$ ، لکیر $x = \frac{\pi}{6}$ اور $x = \frac{5\pi}{6}$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 95: تفاعل $\csc x$ کا مکمل سیکنٹ اور ٹینجینٹ کی جگہ کو سیکنٹ اور کوٹینجینٹ استعمال کرتے ہوئے مثال 8.7 کی طرز پر درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

سوال 96: دکھائیں کہ مکمل

$$\int ((x^2 - 1)(x + 1))^{-2/3} \, dx$$

کو درج ذیل تمام طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$u = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k \quad \text{ج}$$

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad \text{د}$$

$$u = \frac{1}{x+1} \quad \text{ا}$$

$$u = \cos^{-1} x \quad \text{ب}$$

$$u = \tan^{-1} x \quad \text{پ}$$

$$u = \cosh^{-1} x \quad \text{د}$$

$$u = \tan^{-1} \sqrt{x} \quad \text{ج}$$

جہاں جزو-ز میں $k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1$ ہو سکتا ہے۔

8.2 تکمیل بالخصص

تکمیل بالخصص کی ترکیب سے تکمیل

$$(8.1) \quad \int f(x)g(x) dx$$

جس میں f بار بار قابل تفرق اور g بار بار قابل تکمیل ہو کو کی سادہ روپ حاصل کی جاسکتی ہے۔ درج ذیل تکمیل

$$\int xe^x dx$$

اس قسم کا ایک تکمیل ہے جہاں $f(x) = x$ دو بار تفرق کے بعد صفر ہو جاتا ہے جبکہ $g(x) = e^x$ کا تکمیل بار بار لیا جاسکتا ہے۔ تکمیل بالخصص کی ترکیب درج ذیل قسم کے تکمیل پر بھی قابل اطلاق ہے

$$\int e^x \sin x dx$$

جس میں ہر دو بار تفرق اور ہر دو بار تکمیل کے بعد وہی f اور g دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔

اس حصہ میں تکمیل بالخصص پر غور کیا جائے گا اور اس کا استعمال سکھایا جائے گا۔

تکمیل بالخصص کا کلیہ

تکمیل بالخصص¹ کا کلیہ قاعدہ ضرب

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

سے حاصل ہوتا ہے جس کو تفریقی روپ

$$d(uv) = u dv + v du$$

یا

$$u dv = d(uv) - v du$$

integration by parts¹

میں لکھ کر مکمل لینے سے درج ذیل کلیہ اخذ ہوتا ہے۔

$$(8.2) \quad \int u \, dv = uv - \int v \, du \quad \text{کلیہ مکمل بالخصص}$$

مکمل بالخصص کا کلیہ ایک مکمل، $\int u \, dv$ ، کو دوسرے مکمل، $\int v \, du$ ، کی صورت میں بیان ہے۔ u اور v کی صحیح انتخاب سے دوسرا مکمل حل کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ یہی اس کلیہ کی اہمیت اسی حقیقت کی بنا ہے۔ جب ہمیں کسی مکمل کو حل کرنے میں ناکامی ہو، ہم اس کو دوسرے مکمل میں تبدیل کرتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ ہم اس کو حل کر پائیں گے۔

قطعاً مکمل کے لئے اس کا مساوی کلیہ درج ذیل ہے۔

$$(8.3) \quad \int_{v_1}^{v_2} u \, dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v \, du$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

