

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ
531	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
556	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	ا	ضمیمہ اول
573	ب	ضمیمہ دوم



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## بغیر ریمان مکمل والے تفاعل

غیر استمراری تفاعل، ماسوائے چند، ناقابل مکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا  $[0, 1]$  پر کوئی ریمان مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ناطق} \\ 0, & \text{غیر ناطق} \end{cases}$$

وقفہ  $[0, 1]$  کے کسی بھی خانہ بندی  $P$  کے لئے بالائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

$$H = \sum k_H \Delta x_k = \sum 1 \cdot \Delta x_k = \sum \Delta x_k = 1,$$

$$L = \sum k_L \Delta x_k = \sum 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

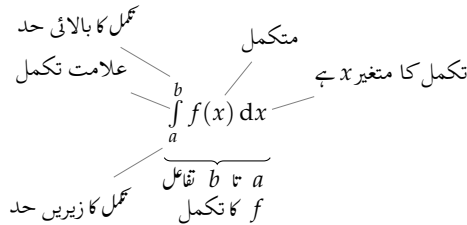
وقفہ  $[0, 1]$  پر  $f$  کے مکمل کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ  $\|P\| \rightarrow 0$  سے  $H$  اور  $L$  کی ایک جیسی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} L = 0, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} H = 1$$

یوں  $[0, 1]$  پر  $f$  کا مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔ مستقل مضرب  $k f$  کا بھی مکمل نہیں پایا جاتا ہے ماسوائے جب  $k$  صفر ہو۔

## اصطلاحات

علامت  $\int_a^b f(x) dx$  کے ساتھ بہت ساری اصطلاح وابستہ ہیں۔ یوں  $\int$  کو علامت تکمیل کہتے ہیں،  $a$  مکمل کا زیریں حد جبکہ  $b$  مکمل کا بالائی حد ہے،  $f$  متکمل ہے،  $x$  مکمل کا متغیر ہے، جبکہ  $\int_a^b f(x) dx$  سے مراد  $a$  تا  $b$  تفاعل  $f$  کا تکمیل ہے۔ مکمل حل کرنے سے مراد مکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔





کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی کھل کی قیمت متغیر کی علامت پر۔ یوں کھل میں غیر تابع متغیر کو  $x$  کی بجائے  $u$  یا  $t$  سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x) dx \text{ کی بجائے } \int_a^b f(u) du \text{ یا } \int_a^b f(t) dt \text{ لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں کھل سے مراد ریماں مجموعہ ہے لہذا غیر تابع متغیر کا کھل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا اور تینوں کھل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ اسی لیے کھل کے متغیر کو نقلی متغیر<sup>29</sup> کہتے ہیں۔

مثال 5.31: درج ذیل ریماں مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو کھل کی صورت میں لکھیں جہاں  $P$  وقفہ  $[-1, 3]$  کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k$$

حل: نقطہ  $c_k$  پر تفاعل  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$  کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ  $[-1, 3]$  کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں  $-1$  تا  $3$  تفاعل  $f$  کا کھل درکار ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k = \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx$$

□

### مستقل تفاعل

ہمیں مسئلہ 5.1 قطعی کھل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں ایک دوسرا مسئلہ زیر استعمال ہو گا۔ مستقل تفاعل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  ایک مستقل تفاعل  $f(x) = c$  ہو تب  $c_k$  کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k && f(c_k) \text{ ہر نقطہ پر } c \text{ کے برابر ہے} \\ &= c \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب} \\ &= c(b - a) && \sum_{k=1}^n \Delta x_k \text{ وقفہ } [a, b] \text{ کی لمبائی } b - a \text{ ہے} \end{aligned}$$

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت  $c(b - a)$  کے برابر ہے لہذا مکمل کی قیمت بھی یہی ہوگی۔ یوں درج ذیل درست ہوگا۔

وقفہ  $[a, b]$  جس پر تفاعل  $f(x)$  کی قیمت مستقل  $c$  ہے کا مکمل درج ذیل ہوگا۔

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b - a)$$

مثال 5.32:

$$ا. \int_{-1}^4 3 dx = 3(4 - (-1)) = (3)(5) = 15$$

$$ب. \int_{-1}^4 (-3) dx = -3(4 - (-1)) = (-3)(5) = -15$$

□

غیر منفی تفاعل کے ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال 5.22 میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ  $[0, 3]$  پر گولا کی تفاعل رفتار

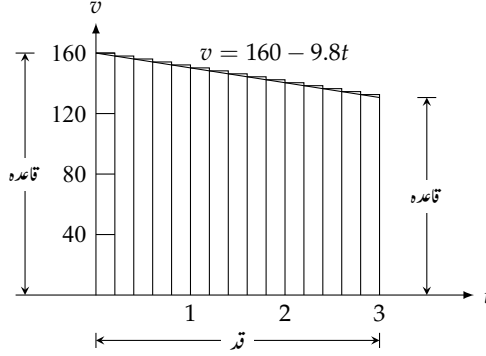
$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے رییمان مجموعے تھے۔ شکل 5.34 میں  $t$  محور اور تفاعل  $v = 160 - 9.8t$  کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس ذوزنقہ رقبہ کا قد 3، زیریں قاعدہ 160 اور بالائی قاعدہ 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہے، اتنا اصل رقبہ پر مستطیل بہتر بیٹھتے ہیں۔ ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$رقبہ = \text{قد} \cdot \frac{\text{زیریں قاعدہ} + \text{بالائی قاعدہ}}{2} = 3 \cdot \frac{130.6 + 160}{2} = 435.9$$

آپ کو یاد ہو گا کہ مثال 5.22 میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ ہم مکمل کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں:

$$\int_0^3 (160 - 9.8t) dt = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$



شکل 5.34: وقفہ  $[0, 3]$  پر سمتی رفتار تفاعل  $v = 160 - 9.8t$  کے ریمان رقبہ کے لئے مستطیل۔

ہم مکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں  $x$  محور اور استمراری غیر منفی تفاعل  $y = f(x)$  کے بیچ رقبہ کا کلیہ معلوم ہو تب ہم مکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے مکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  پر  $f(x) \geq 0$  استمراری ہے۔ تفاعل  $f$  کے ترسیم اور  $x$  محور کے بیچ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

□

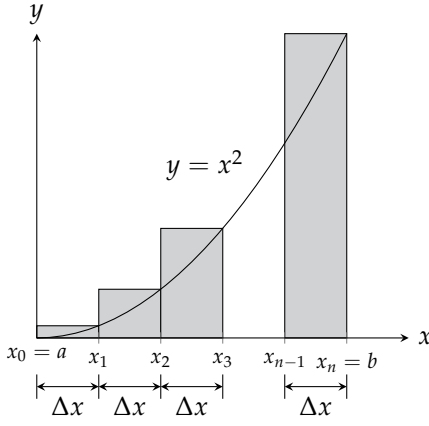
ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لئے پیش کیا۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لئے بھی کارآمد ہو گا؟ اس کا جواب ہے، "جی ہاں"، البتہ یہ ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

مثال 5.33: رقبہ استعمال کرتے ہوئے مکمل کی قیمت کا تلاش  
درج ذیل مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

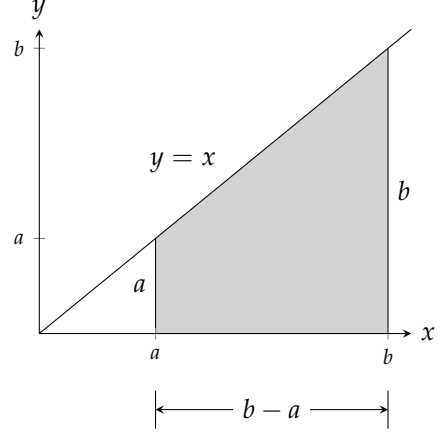
$$\int_a^b x dx, \quad 0 < a < b$$

حل: ہم خط  $a < x < b$  کے لئے  $y = x$  ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل 5.35)۔ مکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش کرتے ہیں۔

$$\int_a^b x dx = (b - a) \cdot \frac{a + b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$



شکل 5.36: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال 5.34)



شکل 5.35: خطہ برائے مثال 5.33

یوں  $a = 1$  اور  $b = \sqrt{5}$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_1^{\sqrt{5}} x \, dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

□

دھیان رہے کہ  $x$  کا الٹ تفرق  $\frac{x^2}{2}$  ہے جو مکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔

مثال 5.34: قطعی مکمل سے رقبے کا حصول  
قطع مکانی  $y = x^2$  اور  $x$  محور کے بیچ وقفہ  $[0, b]$  پر رقبہ تلاش کریں (شکل 5.36)۔

حل: ہم مکمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تقابل کو ترسیم کر کے وقفہ  $[0, b]$  کو  $n$  یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی  $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$  ہو گی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x, \quad x_n = n\Delta x = b$$

ہم جس طرح چاہیں  $c_k$  نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو  $c_k$  منتخب کرتے ہیں۔ یوں  $c_1 = x_1$  ،  $c_2 = x_2$  ، وغیرہ ہو گا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$f(c_1)\Delta x = f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x = (1^2)(\Delta x)^3$$

$$f(c_2)\Delta x = f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2\Delta x = (2^2)(\Delta x)^3$$

⋮

$$f(c_n)\Delta x = f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2\Delta x = (n^2)(\Delta x)^3$$

ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 (\Delta x)^3 \\
 &= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^n k^2 && (\Delta x)^3 \text{ مستقل ہے} \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{مساوات 5.13 میں } \Delta x = \frac{b}{n} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

اب قطعی تکمل کی تعریف

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

استعمال کرتے ہوئے  $x = 0$  تا  $x = b$  قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n && \text{یہاں } \|P\| \rightarrow 0 \text{ سے مراد } n \rightarrow \infty \text{ ہے} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{b^3}{3}
 \end{aligned}$$

یوں  $b = 1$  اور  $b = 1.5$  کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{1.5} x^2 dx = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

□

یہاں بھی دھیان رہے کہ  $x^2$  کا الٹ تغرق  $\frac{x^3}{3}$  ہے۔

## سوالات

سگما روپ  
سوال 1 تا سوال 6 میں مجموعہ کو سگما روپ میں لکھنے کے بعد اس کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1:  $\sum_{k=1}^2 \frac{6k}{k+1}$

سوال 2:  $\sum_{k=1}^3 \frac{k-1}{k}$

سوال 3:  $\sum_{k=1}^4 \cos k\pi$

سوال 4:  $\sum_{k=1}^5 \sin k\pi$

سوال 5:  $\sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

سوال 6:  $\sum_{k=1}^4 (-1)^k \cos k\pi$

سوال 7: درج ذیل میں سے کونسی  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$  کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا.  $\sum_{k=1}^6 2^{k-1}$       ب.  $\sum_{k=0}^5 2^k$       ج.  $\sum_{k=-1}^4 2^{k+1}$

سوال 8: درج ذیل میں سے کونسی  $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$  کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا.  $\sum_{k=1}^6 (-2)^{k-1}$       ب.  $\sum_{k=0}^5 (-1)^k 2^k$       ج.  $\sum_{k=-2}^3 (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

سوال 9: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

$$\sum_{k=-1}^1 \frac{(-1)^k}{k+2} \quad \text{ج۔}$$

$$\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{k+1} \quad \text{ب۔}$$

$$\sum_{k=2}^4 \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \quad \text{ا۔}$$

سوال 10: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

$$\sum_{k=-3}^{-1} k^2 \quad \text{ج۔}$$

$$\sum_{k=-1}^3 (k+1)^2 \quad \text{ب۔}$$

$$\sum_{k=1}^4 (k-1)^2 \quad \text{ا۔}$$

سوال 11 تا 16 میں دیے مجموعوں کو گناروپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلہ کی زیریں حد پر منحصر ہو گا۔

$$\text{سوال 11: } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\text{سوال 12: } 1 + 4 + 9 + 16$$

$$\text{سوال 13: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\text{سوال 14: } 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$\text{سوال 15: } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\text{سوال 16: } -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$$

متناہی مجموعہ کی قیمت

سوال 17: فرض کریں کہ  $\sum_{k=1}^n a_k = -5$  اور  $\sum_{k=1}^n b_k = 6$  ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\sum_{k=1}^n (b_k - 2a_k) \quad \text{د۔}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \quad \text{ج۔}$$

$$\sum_{k=1}^n 3a_k \quad \text{ا۔}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \quad \text{د۔}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{6} \quad \text{ب۔}$$

سوال 18: فرض کریں کہ  $\sum_{k=1}^n a_k = 0$  اور  $\sum_{k=1}^n b_k = 1$  ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^n 8a_k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^n 250b_k \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^n (a_k + 1) \quad \text{د. } \sum_{k=1}^n (b_k - 1)$$

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے الجبرائی فقرہوں کی قیمتوں کو صفحہ 533 پر دیے گئے متنہائی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات 5.13 میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال 19:

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^{10} k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^{10} k^2 \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^{10} k^3$$

سوال 20:

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^{13} k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^{13} k^2 \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^{13} k^3$$

$$\text{سوال 21: } \sum_{k=1}^7 (-2k)$$

$$\text{سوال 22: } \sum_{k=1}^5 \frac{\pi k}{15}$$

$$\text{سوال 23: } \sum_{k=1}^6 (3 - k^2)$$

$$\text{سوال 24: } \sum_{k=1}^6 (k^2 - 5)$$

$$\text{سوال 25: } \sum_{k=1}^5 k(3k + 5)$$

$$\text{سوال 26: } \sum_{k=1}^7 k(2k + 1)$$

$$\text{سوال 27: } \sum_{k=1}^5 \frac{k^3}{225} + \left( \sum_{k=1}^5 k \right)^3$$



$$\text{سوال 28: } \left( \sum_{k=1}^7 k \right)^2 - \sum_{k=1}^7 \frac{k^3}{4}$$

ریمان مجموعوں کے لئے مستطیلیں  
سوال 29 تا سوال 32 میں تقابل  $f(x)$  کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کی ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ  $\sum_{k=1}^4 f(c_k) \Delta x_k$  کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں  $k$  ویں ذیلی وقفہ کا (I) بائیں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ  $c_k$  ہے۔ (ہائیں، دائیں اور وسطی نقطوں کے لئے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

$$\text{سوال 29: } f(x) = x^2 - 1, \quad [0, 2]$$

$$\text{سوال 30: } f(x) = -x^2, \quad [0, 1]$$

$$\text{سوال 31: } f(x) = \sin x, \quad [-\pi, \pi]$$

$$\text{سوال 32: } f(x) = \sin x + 1, \quad [-\pi, \pi]$$

$$\text{سوال 33: خانہ بندی } P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\} \text{ کا معیار تلاش کریں۔}$$

$$\text{سوال 34: خانہ بندی } P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\} \text{ کا معیار تلاش کریں۔}$$

حد کا بطور تکمیل اظہار  
سوال 35 تا سوال 42 میں دیے گئے حد کو بطور قطعی تکمیل ظاہر کریں۔

$$\text{سوال 35: } \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k \text{ جہاں } [0, 2] \text{ کی خانہ بندی } P \text{ ہے۔}$$

$$\text{سوال 36: } \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2c_k^3 \Delta x_k \text{ جہاں } [-1, 0] \text{ کی خانہ بندی } P \text{ ہے۔}$$

$$\text{سوال 37: } \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k \text{ جہاں } [-7, 5] \text{ کی خانہ بندی } P \text{ ہے۔}$$

$$\text{سوال 38: } \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \Delta x_k \text{ جہاں } [1, 4] \text{ کی خانہ بندی } P \text{ ہے۔}$$

$$\text{سوال 39: } \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k \text{ جہاں } [2, 3] \text{ کی خانہ بندی } P \text{ ہے۔}$$

سوال 40:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$  جہاں  $[0, 1]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 41:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\sec c_k) \Delta x_k$  جہاں  $[-\pi/4, 0]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 42:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\tan c_k) \Delta x_k$  جہاں  $[0, \pi/4]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

مستقل تفاعل  
سوال 43 تا سوال 48 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-2}^1 5 \, dx \quad \text{سوال 43}$$

$$\int_3^7 (-20) \, dx \quad \text{سوال 44}$$

$$\int_0^3 (-160) \, dt \quad \text{سوال 45}$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2} \, d\theta \quad \text{سوال 46}$$

$$\int_{-2.1}^{3.4} 0.5 \, ds \quad \text{سوال 47}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2} \, dr \quad \text{سوال 48}$$

رقبہ سے مکمل کی قیمت کا حصول  
سوال 49 تا سوال 56 میں مکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبہ سے مکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_{-2}^4 \left( \frac{x}{2} + 3 \right) \, dx \quad \text{سوال 49}$$

$$\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4) \, dx \quad \text{سوال 50}$$

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx \quad \text{سوال 51}$$

$$\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2} \, dx \quad \text{سوال 52}$$

سوال 53:  $\int_{-2}^1 |x| dx$

سوال 54:  $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

سوال 55:  $\int_{-1}^1 (2 - |x|) dx$

سوال 56:  $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^2}) dx$

سوال 57 تا سوال 60 میں کھل کی قیمت کو رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال 57:  $\int_0^b x dx, \quad b > 0$

سوال 58:  $\int_0^b 4x dx, \quad b > 0$

سوال 59:  $\int_a^b 2s ds, \quad 0 < a < b$

سوال 60:  $\int_a^b 3t dt, \quad 0 < a < b$

قیمت کی تلاش

سوال 61 تا سوال 72 میں دیے کھل کی قیمت کو مثال 5.33 اور مثال 5.34 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 61:  $\int_1^{\sqrt{2}} x dx$

سوال 62:  $\int_{0.5}^{2.5} x dx$

سوال 63:  $\int_{\pi}^{2\pi} \theta d\theta$

سوال 64:  $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r dr$

سوال 65:  $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 dx$

سوال 66:  $\int_0^{0.3} s^2 ds$

سوال 67:  $\int_0^{1/2} t^2 dt$

سوال 68:  $\int_0^{\pi/2} \theta^2 d\theta$

سوال 69:  $\int_0^{2a} x dx$

سوال 70:  $\int_a^{\sqrt{3}a} x dx$

سوال 71:  $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 dx$

سوال 72:  $\int_0^{3b} x^2 dx$

رقبے کی تلاش  
سوال 73 تا سوال 76 میں وقفہ  $[0, b]$  پر  $x$  محور اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ قطعی مکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 73:  $y = 3x^2$

سوال 74:  $y = \pi x^2$

سوال 75:  $y = 2x$

سوال 76:  $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں  
سوال 77: درج ذیل مکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ کرنے کی خاطر درکار  $a$  اور  $b$  تلاش کریں۔ (اشارہ: مکمل کہاں مثبت ہے؟)

$$\int_a^b (x - x^2) dx$$

سوال 78: درج ذیل مکمل کی قیمت کم سے کم کرنے کی خاطر درکار  $a$  اور  $b$  تلاش کریں۔

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) dx$$

سوال 79: بڑھتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے  
(i) فرض کریں کہ جیسے جیسے  $x$  وقفہ  $[a, b]$  پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل  $f(x)$  کی ترمیم بتدریج اوپر اٹھتی ہے۔ فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  کی  $n$  عدد ذیلی وقفوں میں خانہ بندی  $P$  ہے جہاں ایک خانے کی لمبائی  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  ہے۔ شکل کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس خانہ بندی پر  $f$  کے بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق کو ترتیبی طور پر مستطیل  $R$  سے ظاہر کیا جا

سکتا ہے جس کی جسامت  $[f(b) - f(a)]$  ضرب  $\Delta x$  ہے۔ (اشارہ: فرق  $H - L$  ان رقبوں کا مجموعہ ہے جن کے وتر  $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$  اس ترسیم پر پائے جاتے ہیں۔ انہیں افقی مستطیل  $R$  پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔)

(ب) فرض کریں ذیلی وقفوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں بلکہ خانہ بندی  $[a, b]$  پر مختلف ذیلی وقفوں کی لمبائی  $\Delta x_k$  مختلف ہے۔ اگر  $\Delta x_H$  خانہ بندی  $P$  کا معیار ہو تب دکھائیں کہ

$$H - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_H$$

ہو گا لہذا  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (H - L) = 0$  ہو گا۔

سوال 80: گھٹتے تقاض کے بالائی اور زیریں مجموعے

(i) فرض کریں کہ جیسے جیسے  $x$  وقفہ  $[a, b]$  پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تقاض  $f(x)$  کی ترسیم بتدریج نیچے گرتی ہے۔ سوال 79 کی طرح اس کا خاکہ بنائیں۔ فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے جہاں تمام خانوں کی لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہیں۔ سوال 79 کی طرح فرق  $H - L$  تلاش کریں۔

(ب) فرض کریں کہ خانوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہے بلکہ ہر  $\Delta x_k$  مختلف ہے۔ دکھائیں کہ سوال 79 کی عدم مساوات

$$H - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_H$$

اب بھی کارآمد ہے لہذا  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (H - L) = 0$  ہو گا۔

سوال 81: مکمل  $\int_0^b x^2 dx, b > 0$  کی قیمت مثال 5.34 کی طرز پر حاصل کریں البتہ اب ہر خانے کا بائیں سر نقطہ قیمت استعمال کریں۔

سوال 82: دکھائیں کہ مجموعہ

$$S_n = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right]$$

درحقیقت  $\int_0^1 x dx$  کا تخمینہ رقبہ دیتا ہے۔ یوں حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ  $[0, 1]$  کا یکساں  $n$  ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کا بائیں سر نقطہ قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبہ کا مجموعہ لکھیں۔)

سوال 83: درج ذیل

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

کو

$$S_n = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right]$$

روپ میں لکھیں جس کو  $\int_0^1 x^2 dx$  کی تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ  $[0, 1]$  کو  $n$  برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں اور ہر خانے کے بائیں سرنقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیں۔)

سوال 84: درج ذیل کلیہ استعمال

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \dots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos(m+1/2)h}{2 \sin(h/2)}$$

کرتے ہوئے  $y = \sin x$  کے نیچے  $x = 0$  تا  $x = \pi/2$  رقبہ درج ذیل دو اقدام سے تلاش کریں۔

ا. وقفہ  $[0, \pi/2]$  کو  $n$  برابر لمبائیوں کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مطابقتی بالائی مجموعہ  $H$  تلاش کریں۔

ب.  $n \rightarrow \infty$  اور  $\Delta x = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$  کرتے ہوئے  $H$  کا حد تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 85 تا سوال 90 میں دیے گئے نکل پر مرکوز ریمان مجموعوں کے ساتھ منسلک مستطیلوں کو کمپیوٹر پر بنائیں۔ ذیلی وقفوں کی تعداد  $n = 4, 10, 20, 50$  لیں اور ان کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر لیں۔

سوال 85:  $\int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$

سوال 86:  $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$

سوال 87:  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0$

سوال 88:  $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx = 1$

سوال 89:  $\int_{-1}^1 |x| dx = 1$

سوال 90:  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$

سوال 91: (ا) مجموعہ  $S_n$  جس کو سوال 82 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ (ب) سوال 83 میں دیے گئے  $S_n$  کے لئے دوبارہ حل کریں۔

سوال 92: مجموعہ  $\sin h + \sin 2h + \dots + \sin mh$  جسے سوال 84 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر کی مدد سے  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔

سوال 93: بائیں نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مثال 5.23 کے مجموعہ کی سگما علامتی روپ درج ذیل ہے۔

$$S_4 = \sum_{k=1}^4 4[9 - (-2 + (k-1))^2]$$

ا. سنگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطہ مجموعہ  $S_8$  اور  $S_{25}$  لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب  $\frac{4}{8}$  اور  $\frac{4}{25}$  ہوگی۔

ب. سنگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطہ مجموعہ  $S_n$  لکھیں جو  $n$  خانوں پر مشتمل ہے اور جہاں ہر خانے کی لمبائی  $\frac{4}{n}$  ہے۔

ج. حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 94: بائیں سر نقطہ قیمت مجموعہ برائے مثال 5.24 درج ذیل ہے۔

$$S_8 = \sum_{k=1}^8 \pi [16 - (-1 + (k-1))^2]$$

ا. بائیں سر نقطہ مجموعہ  $S_{16}$  اور  $S_{80}$  کو سنگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{10}$  ہوگی۔

ب. بائیں سر نقطہ مجموعہ  $S_n$  کو سنگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی  $\frac{8}{n}$  اور خانوں کی تعداد  $n$  ہوگی۔

ج. حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہوگا؟

## 5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ

اس حصہ میں مکمل کے قواعد اور رقبہ کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ اوسط قیمت پر دوبارہ غور کیا جائے گا۔

### قطعی مکمل کے خواص

ہم عموماً قطعی مکملوں کا مجموعہ اور فرق حاصل کرنا چاہتے ہیں یا مکمل کو مستقل سے ضرب دینا چاہتے ہیں یا ان کا موازنہ دیگر قطعی مکمل کے ساتھ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ایسا درج ذیل قواعد کے تحت کرتے ہیں۔

قواعد برائے قطعی تکمل

$$1. \text{ صفر: } \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{تعریف})$$

2. مکمل کی ترتیب:  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  (تعریف)

3. مستقل مضرب:  $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ( $k$  کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے)  
 $(k = -1) \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

4. مجموعہ اور فرق:  $\int_a^b (f(x) \mp g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \mp \int_a^b g(x) dx$

5. جمع پذیری:  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

6. کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات: اگر وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت  $f_H$  اور کم سے کم قیمت  $f_L$  ہو تب درج ذیل ہو گا:

$$f_L \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f_H \cdot (b - a)$$

7. غلبہ: اگر  $[a, b]$  پر  $f(x) \geq g(x)$  ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

اگر  $[a, b]$  پر  $f(x) \geq 0$  ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

ماسوائے پہلے دو قواعد کے تمام کو قطعی مکمل کی تعریف بذریعہ رییمان مجموعہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ ان قواعد کے ثبوت نہایت آسان ہوں گے۔ چونکہ رییمان مجموعہ یہ خواص رکھتا ہے لہذا آپ سوچتے ہوں گے کہ مجموعہ کا حد بھی یہی خواص رکھتا ہو گا۔ حقیقت میں ثبوت پیش کرتے ہوئے ذیلی وقفوں کے معیار کے  $\epsilon - \delta$  کے پیچیدہ دلائل درکار ہوں گے۔ یقیناً ان قواعد کے ثبوت اتنے آسان نہیں ہیں۔ ہم صرف دو قواعد کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ باقی قواعد کے ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پائے جاتے ہیں۔

دھیان رہے کہ قاعدہ 1 درحقیقت ایک تعریف ہے۔ ہم چاہیں گے کہ صفر لمبائی کے تمام مکمل کی قیمت صفر ہو۔ پہلا قاعدہ قطعی مکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے  $a = b$  کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 2 بھی تعریف ہے جو قطعی مکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے  $b < a$  کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 3 اور قاعدہ 4 حد اور غیر قطعی مکمل کے مماثل قواعد کی طرح ہیں۔ دو تفاعل کے مکمل جانتے ہوئے ہم ان کے تمام مستقل مضرب، مجموعہ اور فرق کے مکمل جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ 3 اور 4 کو بار بار استعمال کرتے ہوئے



اختیاری قابل مکمل تفاعل کے کسی بھی متناہی خطی میل کا جزو در جزو مکمل حاصل کر سکتے ہیں۔ کسی بھی مستقل  $c_1, \dots, c_n$  جن کی علامتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں، اور وقفہ  $[a, b]$  پر قابل مکمل تفاعل  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx$$

جس کا ثبوت، جو ریاضی مانوڈ سے حاصل کیا جاسکتا ہے، کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

شکل میں ثبت تفاعل کے لئے قاعدہ 5 دکھایا گیا ہے اگرچہ یہ قاعدہ کسی بھی تفاعل کے لئے درست ہے۔

ثبوت: قاعدہ 3

قاعدہ 3 کے تحت تفاعل ضرب  $k$  کا مکمل تفاعل کا مکمل ضرب  $k$  ہو گا۔ یہ درج ذیل کی بنا پر درست ہے۔

$$\begin{aligned} \int_a^b k f(x) dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

□

ثبوت: قاعدہ 6

قاعدہ 6 کہتا ہے کہ  $[a, b]$  پر مکمل کی قیمت کبھی بھی  $f$  کی کم سے کم قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے کم نہیں ہو گی اور نا ہی یہ کبھی  $f$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے زیادہ ہو گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ  $[a, b]$  کی کسی بھی خانہ بندی اور  $c_k$  کی کسی بھی انتخاب

کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 f_L \cdot (b - a) &= f_L \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n f_L \cdot \Delta x_k \\
 &\leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \\
 &\leq f_H \cdot \Delta x_k \\
 &= f_H \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\
 &= f_H \cdot (b - a)
 \end{aligned}$$

مختصراً وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  کے تمام رییمان مجموعے درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$f_L \cdot (b - a) \leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \leq f_H \cdot (b - a)$$

لہذا ان کا حد، یعنی مکمل، بھی اس شرط کو مطمئن کرتا ہو گا۔

□

مثال 5.35: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 5, \quad \int_1^4 f(x) dx = -2, \quad \int_{-1}^1 h(x) dx = 7$$

درج ذیل ہوں گا۔

1.

$$\int_4^1 = - \int_1^4 f(x) dx = -(-2) = 2 \quad \text{قاعدہ 2}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)] dx &= 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 h(x) dx \\
 &= 2(5) + 3(7) = 31 \quad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}
 \end{aligned}$$

.3

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 + (-2) = 3 \quad \text{قاعدہ 5}$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں درج ذیل تین عمومی نکلات کا حصول سیکھا۔

$$(5.16) \quad \int_a^b c dx = c(b-a) \quad (\text{مستقل } c)$$

$$(5.17) \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad (0 < a < b)$$

$$(5.18) \quad \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \quad (b < 0)$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتائج کو وسعت دی جاسکتی ہے۔

$$\text{مثال 5.36:} \quad \text{قیمت تلاش کریں:} \quad \int_0^2 \left( \frac{t^2}{4} - 7t + 5 \right) dt$$

حل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left( \frac{t^2}{4} - 7t + 5 \right) dt &= \frac{1}{4} \int_0^2 t^2 dt - 7 \int_0^2 t dt + \int_0^2 5 dt \quad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{2^3}{3} \right) - 7 \left( \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 5(2-0) \quad \text{مساوات 5.16 تا مساوات 5.18} \\ &= \frac{2}{3} - 14 + 10 = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

□

$$\text{مثال 5.37:} \quad \text{قیمت تلاش کریں:} \quad \int_2^3 x^2 dx$$

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx &= \int_0^3 x^2 dx && \text{قاعدہ 5} \\
\int_2^3 x^2 dx &= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^2 x^2 dx && \text{درج بالا حل کریں} \\
&= \frac{3^2}{3} - \frac{2^2}{3} && \text{مساوات 5.18} \\
&= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

□

ہم  $\int_2^3 x^2 dx$  کے حل پر مزید غور حصہ میں کریں گے۔

قطعی تکمیل کا کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات (کمتر بلند تر عدم مساوات، قاعدہ 6) کہتا ہے کہ  $\int_a^b f dx$  کا  $f_L \cdot (b - a)$  کم سے کم حد ہے جبکہ  $f_H \cdot (b - a)$  زیادہ سے زیادہ حد ہے۔

مثال 5.38: دکھائیں کہ  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

حل: وقفہ  $[0, 1]$  پر  $\sqrt{1 + \cos x}$  کی زیادہ سے زیادہ (بلند تر) قیمت  $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$  ہے لہذا

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx &\leq \sqrt{1 + \cos x} \text{ بلند تر} \cdot (1 - 0) && \text{قاعدہ 6} \\
&\leq \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

تکمیل کی قیمت  $\sqrt{2}$  سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے لہذا تکمیل 2 نہیں ہو سکتا ہے۔

مثال 5.39: عدم مساوات  $\cos x \geq (1 - x^2/2)$  تمام  $x$  کے لئے درست ہے۔ تکمیل  $\int_0^1 \cos x dx$  کی کم سے کم (کمتر) قیمت تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos x dx &\geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx && \text{قاعدہ 7} \\
&\geq \int_0^1 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx && \text{قاعدہ 3، 4} \\
&\geq 1 \cdot (1 - 0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1)^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83
\end{aligned}$$

□

تکمیل کی قیمت کم از کم  $\frac{5}{6}$  کے برابر ہے۔

## تکمل اور کل رقبہ

اگر وقفہ  $[a, b]$  پر  $y = f(x)$  قابل تکمل تفاعل ہو جس کی قیمتیں مثبت بھی اور منفی بھی ہوں تب  $[a, b]$  پر  $f$  کا ریمان مجموعہ  $x$  محور کے بالائی جانب مستطیلوں کا مثبت رقبوں اور  $x$  محور کے نیچے جانب مستطیلوں کا منفی رقبوں کا مجموعہ ہو گا۔ چونکہ مثبت اور منفی مقداریں ایک دوسرے کو کاٹی ہیں لہذا اس مجموعے کی تحدیدی قیمت تفاعل اور  $x$  محور کے نیچے کل رقبہ سے کم ہو گی۔ تکمل کی قیمت محور سے اوپر جانب رقبہ منفی محور سے نیچے جانب رقبہ کے برابر ہو گی۔

اس کا مطلب ہے کہ رقبہ کو تکمل سے حاصل کرتے ہوئے دھیان رکھنا ہو گا۔

مثال 5.40: وقفہ  $0 \leq x \leq 3$  پر منحنی  $y = 4 - x^2$  اور  $x$  محور کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

حل:  $x$  پر وقفہ  $[0, 3]$  کو منحنی دو خانوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ایک خانے میں  $f(x) = 4 - x^2$  کی قیمت مثبت اور دوسرے خانے میں منفی ہے۔ منحنی اور  $x$  محور کے نیچے رقبہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان خانوں پر تکمل لے کر جوابات کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔

وقفہ  $[0, 2]$  پر تکمل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4 - x^2) dx &= \int_0^2 4 dx - \int_0^2 x^2 dx \\ &= 4(2 - 0) - \frac{(2)^3}{3} \quad \text{مساوات 5.16 اور مساوات 5.18} \\ &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

وقفہ  $[2, 3]$  پر تکمل:

$$\begin{aligned} \int_2^3 (4 - x^2) dx &= \int_2^3 4 dx - \int_2^3 x^2 dx \\ &= 4(3 - 2) - \left( \frac{(3)^2}{3} - \frac{(2)^2}{3} \right) \quad \text{مساوات 5.16 اور مثال 5.37} \\ &= 4 - \frac{19}{3} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

□

کل رقبہ  $\frac{16}{3} + \left| -\frac{7}{3} \right| = \frac{23}{3}$  ہو گا۔

## اختیاری استمراری تفاعل کی اوسط قیمت

ہم نے مثال 5.25 میں غیر منفی استمراری تفاعل کی اوسط قیمت پر تبصرہ کیا۔ ہم اب  $f$  کا غیر منفی ہونے کی شرط کو ختم کرتے ہوئے تفاعل کی اوسط قیمت کی تعریف پیش کرنے کے قابل ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر استمراری تفاعل کم از کم ایک بار اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔

ہم دوبارہ ریاضیات سے اوسط قیمت کا تصور لیتے ہیں جہاں  $n$  اعداد کی انفرادی قیمتوں کے مجموعہ کو  $n$  سے تقسیم کرنے سے اعداد کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔ بند وقفہ  $[a, b]$  پر استمراری تفاعل  $f$  کے لئے لامتناہی تعداد کے اعداد کو لینا ہو گا لیکن ہم یکساں وقفوں پر تفاعل سے نمونہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم  $[a, b]$  کو برابر لمبائیوں کے  $n$  ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  ہوگی۔ ہم ہر ذیلی وقفے پر  $f$  کی قیمت نقطہ  $c_k$  پر حاصل کرتے ہیں۔ ان  $n$  نمونوں کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} \frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(c_k) && \text{مجموعہ کی سنگماروپ} \\ &= \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x}_{f \text{ کا ریمان مجموعہ } [a, b]} \end{aligned}$$

یوں نمونی قیمتوں کی اوسط قیمت ہر صورت  $[a, b]$  پر  $f$  کا ریمان مجموعہ ضرب  $\frac{1}{b-a}$  ہوگی۔ ہم جیسے جیسے نمونہ کی جسامت (تعداد) بڑھاتے جائیں اور خانہ بندی کے معیار کو صفر کے قریب تر کریں، یہ اوسط قیمت  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  تک پہنچے گی۔ اس نتیجہ سے ہمیں درج ذیل تعریف ملتی ہے۔

تعریف: اگر  $[a, b]$  پر  $f$  قابل مکمل تفاعل ہو تب  $[a, b]$  پر  $f$  کی اوسط قیمت<sup>30</sup> درج ذیل ہوگی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

مثال 5.41: وقفہ  $[0, 3]$  پر  $f(x) = 4 - x^2$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ کیا دیے گئے وقفے میں کسی نقطے پر  $f$  کی قیمت اس اوسط جتنی ہوگی؟

حل:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\
 &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 (4-x^2) dx = \frac{1}{3} \left( \int_0^3 4 dx - \int_0^3 x^2 dx \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left( 4(3-0) - \frac{(3)^3}{3} \right) = \frac{1}{3} (12-9) = 1
 \end{aligned}$$

وقفہ  $[0, 3]$  پر  $f$  کی اوسط قیمت 1 ہے۔ تقابل کی قیمت یہی تب ہوگی جب  $4 - x^2 = 1$  ہوگا جس سے  $x = \pm\sqrt{3}$  ملتے ہیں۔ چونکہ ان دو نقطوں میں سے صرف  $x = \sqrt{3}$  وقفہ  $[0, 3]$  پر پایا جاتا ہے لہذا دیے گئے وقفے میں  $x = \sqrt{3}$  پر  $f$  کی قیمت اوسط قیمت 1 کے برابر ہوگی۔  $\square$

### اوسط قیمت مسئلہ برائے قطعی کمالات

بند وقفہ پر استمراری تقابل کی قیمت، بند وقفہ پر کم از کم ایک بار، تقابل کی اوسط قیمت کے برابر ہوگی۔ اس فقرے کو قطعی کمالات کا اوسط قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ 5.2: مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی کمالات  
اگر  $[a, b]$  پر  $f$  قابل عمل ہو تب  $[a, b]$  میں کسی نقطہ  $c$  پر درج ذیل ہوگا۔

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ہم نے مثال 5.41 میں  $f$  کو حاصل اوسط قیمت کے برابر پر کرتے ہوئے  $x$  کی وہ قیمت تلاش کی جہاں تقابل اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔ البتہ اس سے یہ حقیقت ثابت نہیں ہوتی ہے کہ ایسا نقطہ موجود ہونا لازمی ہے۔ اس سے صرف اتنا ثابت ہوتا ہے کہ مثال 5.41 میں ایسا نقطہ موجود تھا۔ مسئلہ 5.2 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں زیادہ عمومی دلیل درکار ہوگی۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.2

اگر ہم قاعدہ 6 میں (کمتر بلند تر قاعدہ) دونوں اطراف کو  $(b-a)$  سے تقسیم کریں تب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f_L \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f_H$$

چونکہ  $f$  استمراری ہے لہذا استمراری تقابل کے مسئلہ 2.9 کے تحت تقابل  $f_L$  اور  $f_H$  کے بیچ تمام قیمتیں اختیار کرے گا۔ اس طرح  $f$  ہر صورت وقفہ  $[a, b]$  میں کسی نقطہ  $c$  پر  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  قیمت بھی اختیار کرے گا۔

□

تقابل کا استمراری ہونا یہاں ضروری ہے۔ غیر استمراری تقابل اپنی اوسط قیمت کے اوپر سے گزر سکتا ہے۔

ہم مسئلہ 5.2 سے مزید کیا جان سکتے ہیں؟ ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5.42: اگر  $[a, b]$  پر  $f$  قابل مکمل ہو جہاں  $a \neq b$  ہے اور اگر

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

ہو تب  $[a, b]$  میں کم از کم ایک بار  $f(x) = 0$  ہو گا۔

حل: وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

□

مسئلہ 5.2 کے تحت  $[a, b]$  میں کسی نقطہ  $c$  پر  $f$  یہی اوسط قیمت اختیار کرے گا۔

## سوالات

معلوم خواص اور قیمتوں سے دیگر تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال 1: فرض کریں  $f$  اور  $g$  استمراری ہیں اور درج ذیل تملات دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^2 f(x) dx = -4, \quad \int_1^5 f(x) dx = 6, \quad \int_1^5 g(x) dx = 8$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔



$$\begin{aligned} \text{ا. } \int_2^2 g(x) dx & \quad \text{ج. } \int_1^2 3f(x) dx & \quad \text{د. } \int_1^5 [f(x) - g(x)] dx \\ \text{ب. } \int_5^1 g(x) dx & \quad \text{د. } \int_2^5 f(x) dx & \quad \text{و. } \int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

سوال 2: فرض کریں  $f$  اور  $f$  استمراری ہیں اور درج ذیل دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^9 f(x) dx, \quad \int_7^9 f(x) dx, \quad \int_7^9 h(x) dx = 4$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \int_1^9 -2f(x) dx & \quad \text{ج. } \int_7^9 [2f(x) - 3h(x)] dx & \quad \text{د. } \int_1^7 f(x) dx \\ \text{ب. } \int_7^9 [f(x) + h(x)] dx & \quad \text{د. } \int_9^1 f(x) dx & \quad \text{و. } \int_9^7 [h(x) - f(x)] dx \end{aligned}$$

سوال 3: فرض کریں  $\int_1^2 f(x) dx = 5$  دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \int_1^2 f(u) du & \quad \text{ج. } \int_2^1 f(t) dt \\ \text{ب. } \int_1^2 \sqrt{3}f(z) dz & \quad \text{د. } \int_1^2 [-f(x)] dx \end{aligned}$$

سوال 4: فرض کریں  $\int_{-3}^0 g(t) dt = \sqrt{2}$  دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \int_0^{-3} g(t) dt & \quad \text{ب. } \int_{-3}^0 g(u) du & \quad \text{ج. } \int_{-3}^0 [-g(x)] dx & \quad \text{د. } \int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}} dr \end{aligned}$$

سوال 5: فرض کریں  $f$  استمراری ہے جبکہ  $\int_0^3 f(z) dz = 3$  اور  $\int_0^4 f(z) dz = 7$  دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \int_3^4 f(z) dz \quad \text{ب. } \int_4^3 f(t) dt$$

سوال 6: فرض کریں  $h$  استمراری ہے جبکہ  $\int_{-1}^1 h(r) dr = 0$  اور  $\int_{-1}^3 h(r) dr = 6$  دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا.  $\int_1^3 h(r) dr$       ب.  $-\int_3^1 h(u) du$

سوال 7 تا سوال 18 میں دیے نکتہ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7:  $\int_3^1 7 dx$

سوال 8:  $\int_0^{-2} \sqrt{2} dx$

سوال 9:  $\int_0^2 5x dx$

سوال 10:  $\int_3^5 \frac{x}{8} dx$

سوال 11:  $\int_0^2 (2t - 3) dt$

سوال 12:  $\int_0^{\sqrt{2}} (t - \sqrt{2}) dt$

سوال 13:  $\int_2^1 (1 + \frac{z}{2}) dz$

سوال 14:  $\int_3^0 (2z - 3) dz$

سوال 15:  $\int_1^2 3u^2 du$

سوال 16:  $\int_{1/2}^1 24u^2 du$

سوال 17:  $\int_0^2 (3x^2 + x - 5) dx$

سوال 18:  $\int_1^0 (3x^2 + x - 5) dx$

رقبہ سوال 19 تا سوال 22 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 19:

سوال 20:

سوال 21:

سوال 22:

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد (i) دیے وقفے پر تفاعل مکمل کریں، اور (ب) تفاعل اور  $x$  محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

$$y = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3] \quad \text{سوال 23}$$

$$y = -x^2 + 5x - 4, \quad [0, 2] \quad \text{سوال 24}$$

$$y = 2x - x^2, \quad [0, 3] \quad \text{سوال 25}$$

$$y = x^2 - 4x, \quad [0, 5] \quad \text{سوال 26}$$

اوسط قیمت

سوال 27 تا سوال 34 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اس وقفے پر تفاعل کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ دیے گئے وقفہ پر کس نقطہ یا نقطوں پر تفاعل کی قیمت اس کی اوسط قیمت کے برابر ہوگی؟

$$f(x) = x^2 - 1, \quad [0, \sqrt{3}] \quad \text{سوال 27}$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{2}, \quad [0, 3] \quad \text{سوال 28}$$

$$f(x) = -3x^2 - 1, \quad [0, 1] \quad \text{سوال 29}$$

$$f(x) = 3x^2 - 3, \quad [0, 1] \quad \text{سوال 30}$$

$$f(t) = (t - 1)^2, \quad [0, 3] \quad \text{سوال 31}$$

$$f(t) = t^2 - t, \quad [-2, 1] \quad \text{سوال 32}$$

$$g(x) = |x| - 1, \quad [-1, 3](\text{ج}), \quad [1, 3](\text{ب}), \quad [0, 3](\text{ا}) \quad \text{سوال 33}$$

$$h(x) = -|x|, \quad [-1, 1](\text{ج}), \quad [0, 1](\text{ب}), \quad [-1, 0](\text{ا}) \quad \text{سوال 34}$$

سوال 35 تا سوال 38 دیے گئے وقفہ پر تفاعل کی اوسط قیمت (بغیر مکمل) تلاش کریں۔

سوال 35:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & -4 \leq x \leq -1 \\ -x + 2, & -1 < x \leq 2 \end{cases} \quad [-4, 2]$$

سوال 36: وقفہ  $[-1, 1]$  پر تفاعل  $f(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$  دیا گیا ہے۔سوال 37: وقفہ  $[0, 2\pi]$  پر تفاعل  $f(t) = \sin t$  دیا گیا ہے۔سوال 38: وقفہ  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  پر تفاعل  $f(\theta) = \tan \theta$  دیا گیا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔  

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

سوال 40: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کا بہتر اندازہ حاصل کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

سوال 41: دکھائیں کہ  $\int_0^1 \sin(x^2) dx$  کی قیمت کسی صورت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔سوال 42: دکھائیں کہ  $\int_0^1 \sqrt{x+8} dx$  کی قیمت  $2\sqrt{2}$  اور 3 کے بیچ پائی جاتی ہے۔

سوال 43: فرض کریں  $f$  استمراری ہے اور  $\int_1^2 f(x) dx = 4$  دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ  $[1, 2]$  پر کم از کم ایک بار  $f(x) = 4$  ہو گا۔

سوال 44: فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  اور  $g$  استمراری ہیں جہاں  $a \neq b$  ہے۔ مزید  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = 0$  دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ  $[a, b]$  میں کم از کم ایک بار  $f(x) = g(x)$  ہو گا۔



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



