

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
166	استمرار	2.5
185	مماسی خط	2.6
201	تفرق	3
201	تفاعل کا تفرق	3.1
223	قواعد تفرق	3.2
242	تبدیلی کی شرح	3.3
260	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
280	زنجیری قاعدہ	3.5
298	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
314	دیگر شرح تبدیلی	3.7

329	4	تفرق کا استعمال
329	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
344	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
360	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
360	4.3.1	پرکھ
372	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
395	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
422	4.6	بہترین بنانا
446	4.7	خط بندی اور تفرقات
467	4.8	ترکیب نیوٹن
479	5	تکمل
479	5.1	غیر قطعی تکملات
491	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
507	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
518	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
536	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
563	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
580	5.7	بنیادی مسئلہ
601	5.8	قطعی تکمل میں بدل
607	5.9	اعدادی تکمل
607	5.10	قاعدہ ذوزنقہ
627	6	تکمل کا استعمال
627	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
631	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
642	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
650	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
665	6.4	تکلی چھلے
678	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
689	6.6	سطح طواف کا رقبہ
701	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
713	6.7.1	وسطانی مرکز
718	6.8	کام
733	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
742	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
757	7	ماورائی تفاعل
757	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

776 . . . . . قدرتی لوگار تھم 7.2

794 . . . . . قوت نمائی تفاعل 7.3

799 ا ضمیمہ اول

801 ب ضمیمہ دوم



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 7

# ماورائی تفاعل

ریاضیات میں بہت سے تفاعل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔ غالباً سب سے زیادہ جانی پہچانی الٹ تفاعل کی جوڑی  $\ln x$  اور  $e^x$  ہے۔ موزوں وقفہ پر پابند تکنیکی تفاعل کے اہم الٹ پائے جاتے ہیں۔ اسی طرح لوگار تھمی اور قوت نمائی تفاعل کے دیگر الٹ جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ بذلولی تفاعل اور ان کے الٹ تفاعل کا استعمال آویزاں رسی، منتقلی حرکی توانائی، اور ہوا میں گرتے ہوئے جسم پر قوت رگڑ کے مسائل میں کام آتے ہیں۔ اس باب میں ان تمام تفاعل پر غور کیا جائے گا۔ ان مسئلوں کا بھی ذکر کیا جائے گا جنہیں یہ تفاعل حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

### 7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

اس حصہ میں ہم الٹ تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں اور ان کی کلیات، ترسیمات، اور الٹ جوڑیوں کے تفرق پر غور کرتے ہیں۔

#### ایک ایک تفاعل

تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو اپنی دائرہ کار کے ہر نقطہ کو اپنی سعت میں ایک قیمت مختص کرتا ہو۔ بعض تفاعل ایک ہی قیمت کو ایک سے زیادہ نقطوں کے لئے مختص کرتے ہیں۔ یوں  $-1$  کا مربع اور  $1$  کا مربع  $1$  ہے؛ اسی طرح  $\frac{\pi}{3}$  اور  $\frac{2\pi}{3}$  کا سائن  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ہے۔ اس کے برعکس دیگر تفاعل کسی ایک قیمت کو کبھی بھی دو بار مختص نہیں کرتے ہیں۔ مختلف اعداد کے جذر المربع اور جذر الکعب ہر صورت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔ ایسا تفاعل جس کے انفرادی نقطوں پر منفرد قیمت ہو کو ایک ایک تفاعل<sup>1</sup> کہتے ہیں۔

<sup>1</sup> one to one function

تعریف: دائرہ کار  $D$  پر تفاعل  $f(x)$  تب ایک ایک ہو گا جب  $x_1 \neq x_2$  کی صورت میں  $f(x_1) \neq f(x_2)$  ہو۔

□

مثال 7.1: چونکہ کسی بھی غیر منفی اعداد کے لئے  $x_1 \neq x_2$  کی صورت میں  $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$  ہے لہذا  $f(x) = \sqrt{x}$  غیر منفی اعداد کے کسی بھی دائرہ کار پر یہ ایک ایک تفاعل ہے۔

□

مثال 7.2: چونکہ  $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$  ہے لہذا وقفہ  $[0, \pi]$  پر  $g(x) = \sin x$  ایک ایک تفاعل نہیں ہے۔ اس کے برعکس چونکہ ربع اول میں تمام زاویوں کے سائن مختلف ہیں لہذا وقفہ  $[0, \frac{\pi}{2}]$  پر  $g(x) = \sin x$  ایک ایک تفاعل ہے۔

□

ایک ایک تفاعل  $y = f(x)$  کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے۔ اگر کسی تفاعل کی ترسیم کسی افقی لکیر کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہو تب یہ تفاعل  $y$  کی اس قیمت کو ایک سے زیادہ مرتبہ اختیار کرتا ہے لہذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہو گا (شکل 7.1)۔

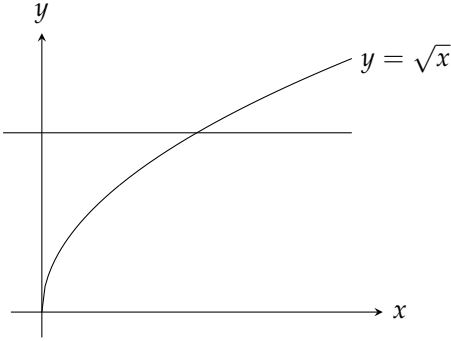
افقی لکیر کا پرکھ

کوئی بھی تفاعل  $y = f(x)$  صرف اور صرف اس صورت میں ایک ایک تفاعل ہو گا جب اس کی ترسیم ہر افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہو۔

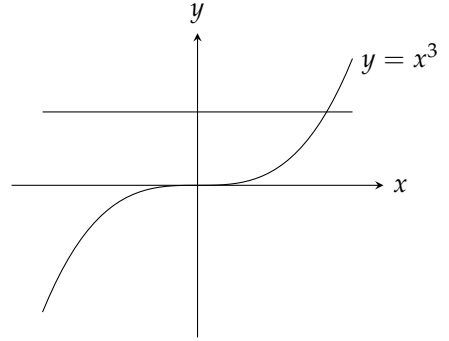
الٹ

چونکہ ایک ایک تفاعل کا ہر خارج انفرادی مداخل سے آتا ہے لہذا ایک ایک تفاعل کو الٹ کرتے ہوئے ہر خارج کو واپس اس مداخل پر بھیجا جا سکتا ہے جس سے یہ خارج حاصل ہوتا ہے (شکل 7.2)۔ ایک ایک تفاعل  $f$  کو الٹ کر کے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اس کو  $f$  کا الٹ<sup>2</sup> کہتے ہیں جس کو  $f^{-1}$  سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں  $f^{-1}$  میں  $-1$  کو طاقت نہ سمجھا جائے: یعنی  $f^{-1}(x)$  سے مراد  $\frac{1}{f(x)}$  نہیں ہے۔ ہم  $f^{-1}$  کو " $f$  کا الٹ" پڑھتے ہیں۔

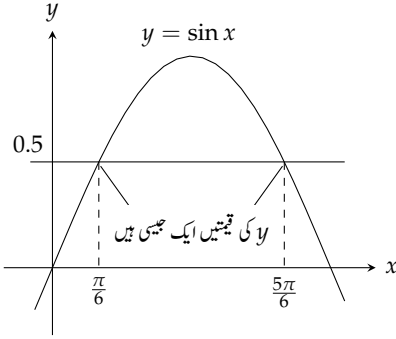
جیسا شکل 7.2 سے ظاہر ہے،  $f$  سے  $f^{-1}$  یا  $f^{-1}$  سے  $f$  حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی  $x$  کے لئے  $f(x)$  حاصل کر کے اس  $f(x)$  کا الٹ  $f^{-1}(f(x))$  حاصل کیا جاسکتا ہے جو  $x$  ہو گا۔ تفاعل  $f^{-1}(f(x))$  یا تفاعل  $f(f^{-1}(x))$  میں  $x$  پر کرنے سے واپس  $x$  ملتا ہے۔ ایسا تفاعل جو ہر عدد کو اسی عدد کے لئے مختص کرتا ہو شناختی تفاعل<sup>3</sup> کہلاتا ہے۔ یوں تفاعل  $f$  اور  $g$  کو ایک دوسرے کا الٹ تفاعل ہونے کے لئے پرکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$



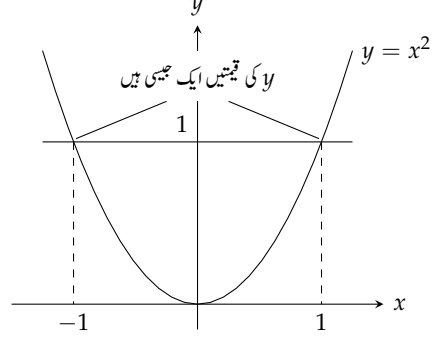
(ب) ایک ایک تفاعل۔



(ل) ایک ایک تفاعل۔

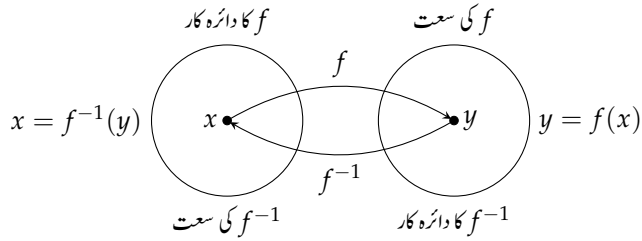


(د) غیر ایک ایک تفاعل۔



(ج) غیر ایک ایک تفاعل۔

شکل 7.1: ایک ایک تفاعل کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے جبکہ غیر ایک ایک تفاعل کی ترسیم، ایک یا ایک سے زیادہ افقی لکیروں کو ایک سے زیادہ بار قطع کرتی ہے۔



شکل 7.2: تفاعل  $f$  کا الٹ ہر خارج کو واپس اس مدخل پر بھیجتا ہے جہاں سے وہ آیا۔

$f$  اور  $g$  ایک دوسرے کے الٹ تفاعل ہوں گے ورنہ یہ ایک دوسرے کے الٹ تفاعل نہیں ہوں گے۔ اگر  $f$  اپنے دائرہ کار کا کعب لیتا ہو تب  $g$  اس صورت  $f$  کا الٹ ہوگا اگر  $g$  جذر کعب لیتا ہو ورنہ یہ  $f$  کا الٹ نہیں ہوگا۔

تفاعل  $f$  اور  $g$  ایک دوسرے کے الٹ صرف اور صرف اس صورت ہوں گے جب

$$f(g(x)) = x \quad \text{اور} \quad g(f(x)) = x$$

ہوں۔ ایسی صورت میں  $g = f^{-1}$  اور  $f = g^{-1}$  ہوں گے۔

ایک تفاعل کا الٹ صرف اور صرف اس صورت ہوگا جب یہ ایک ایک تفاعل ہو۔ یوں بڑھتے تفاعل کا الٹ تفاعل ہوگا اور گھٹتے تفاعل کا بھی الٹ تفاعل ہوگا۔ جن تفاعل کا تفرق مثبت ہو وہ اپنے دائرہ کار میں بڑھتے ہیں لہذا ان کا الٹ ہوگا (صفحہ 352 پر مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3)۔ اسی طرح جن تفاعل کا تفرق منفی ہو وہ اپنے دائرہ کار میں گھٹتے ہیں لہذا ان کا الٹ ہوگا۔

### الٹ کی تلاش

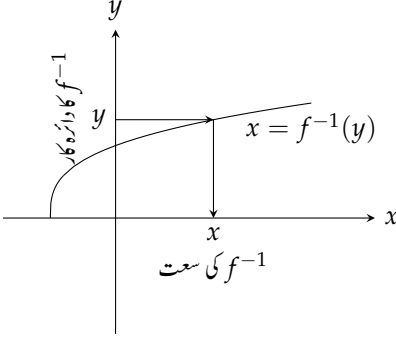
تفاعل کے الٹ کی ترسیم کا تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ فرض کریں ایک تفاعل کی ترسیم شکل کی طرح بڑھتا ہو، یعنی یہ بائیں سے دائیں اوپر اٹھتی ہو۔ کسی بھی  $x$  کے لئے ترسیم سے قیمت پڑھنے کے لئے ہم محور  $x$  پر نقطہ  $x$  سے شروع ہو کر محور  $y$  کے متوازی چل کر ترسیم تک پہنچتے ہیں اور یہاں سے محور  $x$  کے متوازی چل کر محور  $y$  تک پہنچ کر تفاعل کی قیمت  $y$  پڑھتے ہیں۔ ہم اس عمل کو الٹ کرتے ہوئے  $y$  سے شروع کرتے ہوئے  $x$  پڑھ سکتے ہیں۔

تفاعل  $f$  کی ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم  $f^{-1}$  کی ترسیم میں مداخلت خارج جوڑیوں کا کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ اس ترسیم کو عمومی طرز پر دکھانے کی خاطر ہمیں ان جوڑیوں کا  $45^\circ$  کی کثیر  $y = x$  میں عکس لینا ہوگا اور ساتھ ہی حرف  $x$  اور حرف  $y$  کا ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کرنا ہوگا۔ یوں غیر تابع متغیر، جس کو اب  $x$  کہتے ہیں، افقی محور پر دکھایا جائے گا اور تابع متغیر، جس کو اب  $y$  کہتے ہیں، کو انتہائی محور پر دکھایا جائے گا۔ تفاعل  $f(c)$  اور  $f^{-1}(x)$  کی ترسیمات کثیر  $y = x$  کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

شکل 7.3 میں  $f^{-1}$  کو متغیر  $x$  کا تفاعل لکھنا دکھانا گیا ہے جس کو درج ذیل بیان کیا جاسکتا ہے۔

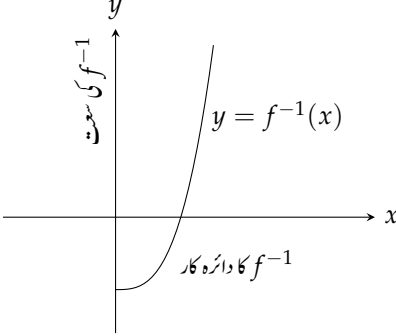
ا. مساوات  $y = f(x)$  کو  $x$  کے لئے حل کریں۔ یوں  $x$  کو  $y$  کی صورت میں لکھا جائے گا۔

ب. جزو-ا میں حاصل مساوات میں  $x$  اور  $y$  کا آپس میں تبادلہ کریں۔ یوں حاصل کثیر  $y = f^{-1}(x)$  ہوگا۔

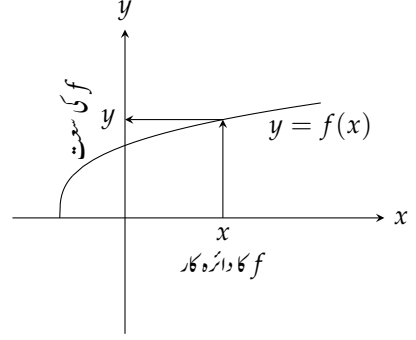


(ب)

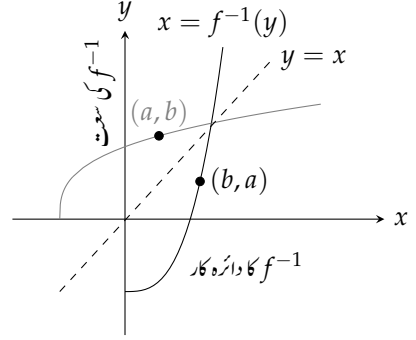
تفاعل  $f$  کی ترسیم کو  $f^{-1}$  کی ترسیم تصور کیا جاسکتا ہے۔ وہ  $x$  جو  $y$  دیتا ہو کو تلاش کرنے کی خاطر، ہم  $y$  سے افقی رخ ترسیم تک اور پھر انتصابی رخ محور  $x$  تک پہنچ کر درکار  $x$  پڑھتے ہیں۔  $f$  کا دائرہ کار  $f^{-1}$  کی سعت ہو گی جبکہ  $f$  کی سعت  $f^{-1}$  کا دائرہ کار ہو گا۔



(د) آخر میں ہم حرف  $x$  اور حرف  $y$  کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ یوں متغیر  $x$  کے تفاعل  $f^{-1}$  کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔



(ی) نقطہ  $x$  پر  $f$  کی قیمت جاننے کے لئے ہم  $x$  سے انتصابی رخ چلتے ہوئے ترسیم تک پہنچ کر افقی سمت محور  $y$  تک پہنچ کر درکار قیمت پڑھتے ہیں۔



(ج) تفاعل  $f^{-1}$  کو ترسیم کرنے کی خاطر ہم  $f$  کا کثیر  $y = x$  میں عکس لیتے ہیں۔

شکل 7.3: تفاعل  $f$  کے الٹ  $f^{-1}$  کی ترسیم۔

مثال 7.3: تفاعل  $y = \frac{x}{2} + 1$  کا الٹ حاصل کریں جہاں غیر تابع متغیر  $x$  ہو۔

حل: قدم 1:  $x$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

$$2y = x + 2$$

$$x = 2y - 2$$

قدم 2: حاصل مساوات میں  $x$  اور  $y$  کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = 2x - 2$$

یوں تفاعل  $f(x) = \frac{x}{2} + 1$  کا الٹ تفاعل  $f^{-1}(x) = 2x - 2$  ہو گا۔

اس کی تصدیق کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ آیا دونوں مرکب تفاعل شناختی تفاعل دیتے ہیں:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

□

مثال 7.4: تفاعل  $y = x^2, x \geq 0$  کا الٹ تلاش کریں جہاں غیر تابع متغیر  $x$  ہو۔

حل: قدم 1: دیے گئے مساوات کو حل کر کے  $x$  کو  $y$  کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$x \geq 0 \text{ کی بنا پر } |x| = x \text{ ہو گا}$$

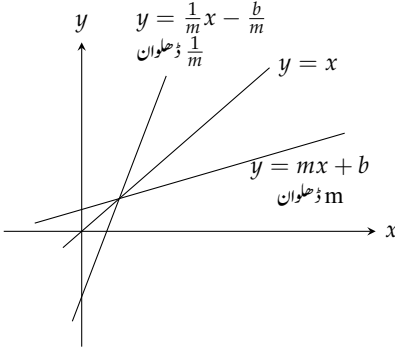
قدم 2: جزو 1 میں حاصل نتیجہ میں  $x$  اور  $y$  کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = \sqrt{x}$$

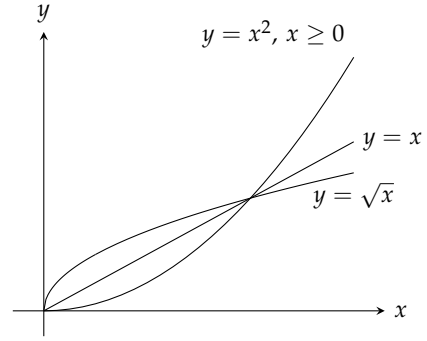
یوں تفاعل  $y = x^2, x \geq 0$  کا الٹ  $y = \sqrt{x}$  ہو گا (شکل 7.4)۔

یہاں دھیان رہے کہ پابند تفاعل  $y = \sqrt{x}, x \geq 0$  ایک ایک تفاعل ہے لہذا اس کا الٹ پایا جاتا ہے جبکہ تفاعل  $y = x^2$  ایک غیر پابند تفاعل ہے جو ایک ایک تفاعل نہیں ہے لہذا اس کا الٹ نہیں پایا جاتا ہے۔

□



شکل 7.5: کلیئر  $y = x$  میں متعکس غیر انتظامی کلیئروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعمک متناسب ہوتے ہیں۔



شکل 7.4: تفاعل  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = x^2, x \geq 0$  ایک دوسرے کے الٹ ہیں (مثال 7.4)۔

کمپیوٹر کا استعمال  
تفاعل  $y = f(x)$  کا الٹ تفاعل نہایت آسانی سے درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے ترسیم کیا جاسکتا ہے۔

$$x(t) = f(t), \quad y(t) = t$$

آپ تفاعل اور تفاعل کے الٹ کو ساتھ ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں:

$$x_1(t) = t, \quad y_1(t) = f(t)$$

تفاعل

$$x_2(t) = f(t), \quad y_2(t) = t$$

تفاعل کا الٹ

اس سے بھی زیادہ بہتر ہوگا کہ تفاعل، تفاعل کا الٹ اور شناختی تفاعل  $y = x$  کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں جہاں شناختی تفاعل درج ذیل ہوگا۔

$$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = t$$

شناختی تفاعل

تفاعل  $y = \frac{x^5}{x^2+1}$  اور  $y = x + \cos x$  کے ساتھ ان کے الٹ تفاعل اور شناختی تفاعل ایک ساتھ ترسیم کر کے دیکھیں۔ ترسیم میں  $x$  اور  $y$  محور کے اکائی فاصلے برابر نظر آنے چاہیے تاکہ کلیئر  $y = x$  کے لحاظ سے تفاعل اور اس کا الٹ تشاکلی نظر آسکیں۔

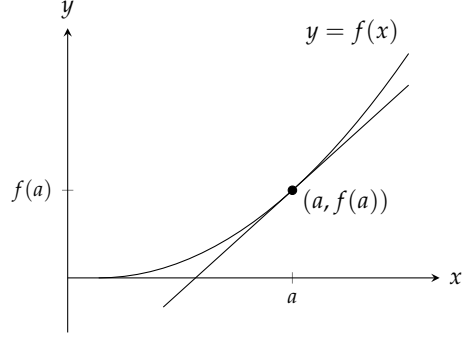
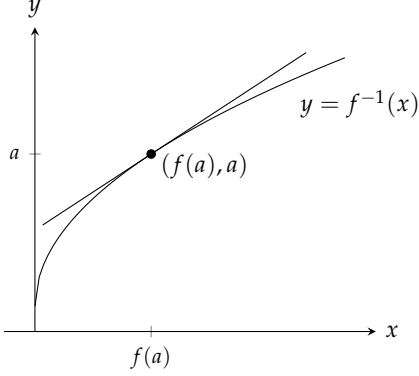
قابل تفرق تفاعل کے الٹ کے تفرق

تفاعل  $f(x) = \frac{x}{2} + 1$  اور اس کے الٹ  $f^{-1}(x) = 2x - 2$  (مثال 7.3) کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2$$





شکل 7.6: الٹ تفاعل کے مطابقتی نقطوں پر ڈھلوان ایک دوسرے کا بالکس متناسب  $\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{f(a)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_a}$  ہو گا۔

یہ تفرقات ایک دوسرے کے بالکس متناسب ہیں۔ تفاعل  $f$  کی ترسیم کثیر  $y = \frac{x}{2} + 1$  اور  $f^{-1}$  کی ترسیم کثیر  $y = 2x - 2$  ہے۔ ان کثیروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالکس متناسب ہیں (شکل 7.5)۔

یہ نتیجہ کسی مخصوص تفاعل کے لئے نہیں ہے۔ کثیر  $y = x$  میں کسی بھی غیر افقی یا غیر انتظامی کثیر کے عکس کا ڈھلوان اس کثیر کے ڈھلوان کے بالکس متناسب ہو گا۔ یوں اگر دیے گئے کثیر کا ڈھلوان  $m \neq 0$  (شکل 7.5) ہو تب منعکس کثیر کا ڈھلوان  $\frac{1}{m}$  ہو گا۔

تفاعل اور اس کے الٹ کے ڈھلوانوں کا بالکس متناسب تعلق دیگر تفاعل کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ اگر نقطہ  $(a, f(a))$  پر  $y = f(x)$  کا ڈھلوان  $f'(a) \neq 0$  ہو تب مطابقتی نقطہ  $(f(a), a)$  پر  $y = f^{-1}(x)$  کا ڈھلوان  $\frac{1}{f'(a)}$  ہو گا (شکل 7.6)۔ یوں نقطہ  $(a, f(a))$  پر  $f^{-1}$  کا تفرق، نقطہ  $a$  پر  $f$  کے تفرق کا بالکس متناسب ہو گا۔ یہ تعلق اس صورت درست ہو گا جب  $f$  درج ذیل مسئلہ میں پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط اعلیٰ احصاء سے حاصل ہوتے ہیں۔

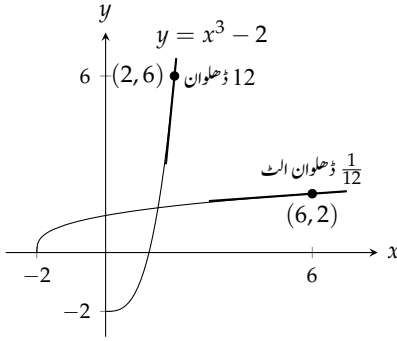
مسئلہ 7.1: الٹ تفاعل کے تفرق کا قاعدہ

اگر وقفہ  $I$  کے ہر نقطہ پر  $f$  قابل تفرق ہو اور  $I$  پر  $\frac{df}{dx}$  کبھی بھی صفر نہ ہو، تب وقفہ  $f(I)$  کے ہر نقطہ پر  $f^{-1}$  قابل تفرق ہو گا۔ کسی ایک مخصوص نقطہ  $f(a)$  پر  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کا تفرق نقطہ  $a$  پر تفرق  $\frac{df}{dx}$  کا بالکس متناسب ہو گا:

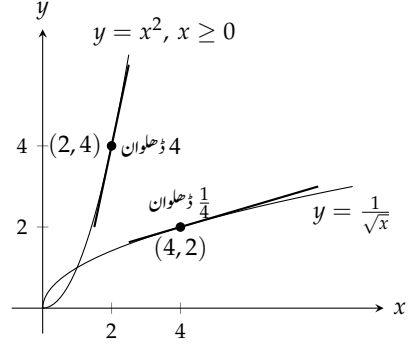
$$(7.1) \quad \left( \frac{df^{-1}}{dx} \right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left( \frac{df}{dx} \right)_{x=a}}$$

اس کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(7.2) \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$



شکل 7.8: نقطہ  $x = 2$  پر  $f(x) = x^3 - 2$  کا تفرق ہمیں نقطہ  $x = 6$  پر  $f^{-1}$  کا تفرق دیتا ہے (مثال 7.6)۔



شکل 7.7: نقطہ  $(4, 2)$  پر  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  کا تفرق ہمیں نقطہ  $(2, 4)$  پر  $f(x) = x^2$  کا تفرق کا بالکس متناسب ہوگا (مثال 7.5)۔

مثال 7.5: تقابل  $f(x) = x^2, x \geq 0$  اور اس کے الٹ  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \quad \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

نقطہ  $(4, 2)$  کلیر  $y = x$  کی دوسری طرف نقطہ  $(2, 4)$  کا عکس ہے (شکل 7.7)۔ ان نقطوں پر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= 2x = 2(2) = 4 && \text{نقطہ } (2, 4) \text{ پر} \\ \frac{df^{-1}}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{df/dx} && \text{نقطہ } (4, 2) \text{ پر} \end{aligned}$$

□

بعض اوقات  $f^{-1}$  کا کلیہ نہ جانتے ہوئے بھی مساوات 7.1 کی مدد سے  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کی مخصوص قیمتیں تلاش کی جاسکتی ہیں۔

مثال 7.6: مان لیں  $f(x) = x^3 - 2$  ہے۔  $f^{-1}(x)$  کا کلیہ دریافت کیے بغیر نقطہ  $x = 6 = f(2)$  پر  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کی قیمت تلاش کریں۔

حل: (شکل 7.8)

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=2} = 3x^2 \Big|_{x=2} = 12$$

$$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12}$$

مساوات 7.1

□

مسئلہ 7.1 کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $x = a$  پر  $y = f(x)$  قابل تفرق ہو اور ہم  $x$  کی قیمت میں معمولی تبدیلی  $dx$  لائیں تب  $y$  میں مطابقتی تبدیلی تخمیناً

$$dy = f'(a) dx$$

ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ  $y$  کی تبدیلی،  $x$  کی تبدیلی کے تقریباً  $f'(a)$  گنا ہوگی اور  $x$  کی تبدیلی،  $y$  کی تبدیلی کے تقریباً  $\frac{1}{f'(a)}$  گنا ہوگی۔

### سوالات

ایک ایک تفاعل کی نشاندہی سوال 1 تا سوال 6 میں تفاعل کے ترسیم دیے گئے ہیں۔ ان میں ایک ایک تفاعل کی نشاندہی کریں۔

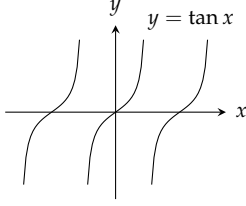
سوال 1: ترسیم شکل 7.9 میں دی گئی ہے۔  
جواب: ایک ایک

سوال 2: ترسیم شکل 7.10 میں دی گئی ہے۔

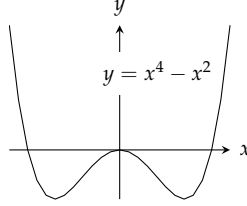
سوال 3: ترسیم شکل 7.11 میں دی گئی ہے۔  
جواب: غیر ایک ایک

سوال 4: ترسیم شکل 7.12 میں دی گئی ہے۔

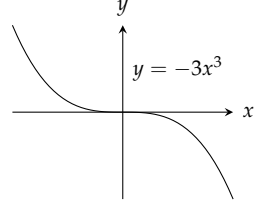
سوال 5: ترسیم شکل 7.13 میں دی گئی ہے۔  
جواب: ایک ایک



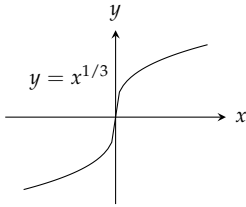
شکل 7.11: ترسیم سوال 3



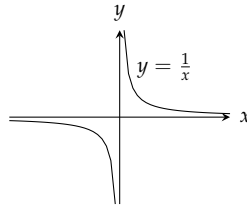
شکل 7.10: ترسیم سوال 2



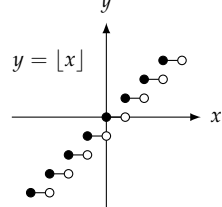
شکل 7.9: ترسیم سوال 1



شکل 7.14: ترسیم سوال 6



شکل 7.13: ترسیم سوال 5



شکل 7.12: ترسیم سوال 4

سوال 6: ترسیم شکل 7.14 میں دی گئی ہے۔

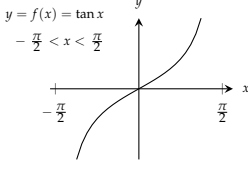
الٹ تفاعل کی ترسیم  
سوال 7 تا سوال 10 میں  $y = f(x)$  کی ترسیم دی گئی ہے۔ اس کو نقل کر کے لکیر  $y = x$  بھی بنائیں۔ لکیر  $y = x$  کے لحاظ سے تفاعلی استعمال کرتے ہوئے  $y = f^{-1}(x)$  ترسیم کریں۔ ( $f^{-1}$  کا کلیہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔)  $f^{-1}$  کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔

سوال 7: تفاعل کی ترسیم شکل 7.15 میں دی گئی ہے۔  
جواب: دائرہ کار  $(0, 1]$ ، سعت  $[0, \infty)$ ، شکل 7.19

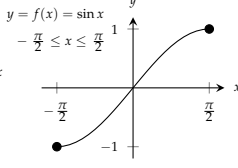
سوال 8: تفاعل کی ترسیم شکل 7.16 میں دی گئی ہے۔

سوال 9: تفاعل کی ترسیم شکل 7.17 میں دی گئی ہے۔  
جواب: دائرہ کار  $[-1, 1]$ ، سعت  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ، شکل 7.20

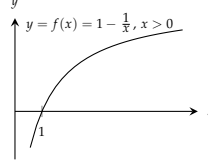
سوال 10: تفاعل کی ترسیم شکل 7.18 میں دی گئی ہے۔



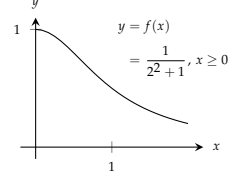
شکل 7.18: ترسیم سوال 10



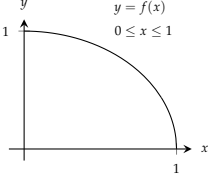
شکل 7.17: ترسیم سوال 9



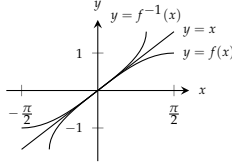
شکل 7.16: ترسیم سوال 8



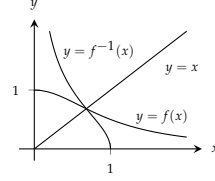
شکل 7.15: ترسیم سوال 7



شکل 7.21: ترسیم جواب 11



شکل 7.20: ترسیم جواب 9



شکل 7.19: ترسیم جواب 7

سوال 11: (i) تفاعل  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟ (ب) دکھائیں کہ  $f$  اپنا ہی الٹ ہے۔ (یاد رہے کہ  $x \geq 0$  کی صورت میں  $\sqrt{x^2} = x$  ہوتا ہے۔)  
جواب: کثیر  $y = x$  کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ شکل 7.21

سوال 12: (i) تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x}$  ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟ (ب) دکھائیں کہ  $f$  اپنا ہی الٹ ہے۔

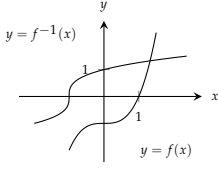
الٹ تفاعل کے کلیات

سوال 13 تا سوال 18 میں تفاعل  $y = f(x)$  کا کلیہ دیا گیا ہے۔  $f$  اور  $f^{-1}$  کی ترسیمات بھی دکھائی گئی ہیں۔  $f^{-1}$  کا کلیہ تلاش کریں۔

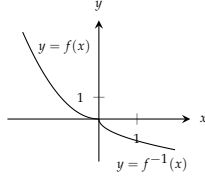
سوال 13:  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $x \geq 0$  ترسیم شکل 7.22 میں دی گئی ہے۔  
جواب:  $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 14:  $f(x) = x^2$ ,  $x \leq 0$  ترسیم شکل 7.23 میں دی گئی ہے۔

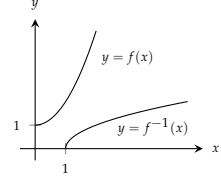
سوال 15:  $f(x) = x^3 - 1$  ترسیم شکل 7.24 میں دی گئی ہے۔  
جواب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$



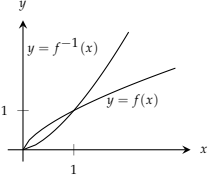
شکل 7.24: ترسیم سوال 15



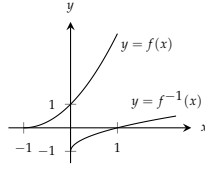
شکل 7.23: ترسیم سوال 14



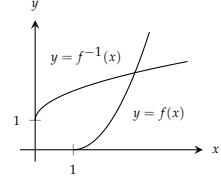
شکل 7.22: ترسیم سوال 13



شکل 7.27: ترسیم سوال 18



شکل 7.26: ترسیم سوال 17



شکل 7.25: ترسیم سوال 16

سوال 16:  $f(x) = x^2 - 2x + 1, x \geq 1$  ترسیم شکل 7.25 میں دی گئی ہے۔

سوال 17:  $f(x) = (x+1)^2, x \geq -1$  ترسیم شکل 7.26 میں دی گئی ہے۔  
جواب:  $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

سوال 18:  $f(x) = x^{2/3}, x \geq 0$  ترسیم شکل 7.27 میں دی گئی ہے۔

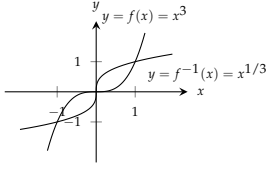
سوال 19 تا سوال 24 میں تقابل  $y = f(x)$  کا کلیہ دیا گیا ہے۔  $f^{-1}$  دریافت کریں اور اس کے دائرہ کار اور سمت کی نشاندہی کریں۔ تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ  $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$  ہے۔

سوال 19:  $f(x) = x^5$   
جواب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$  دائرہ کار  $-\infty < x < \infty$ ، سمت  $-\infty < y < \infty$

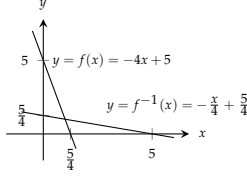
سوال 20:  $f(x) = x^4, x \geq 0$

سوال 21:  $f(x) = x^3 + 1$   
جواب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$  دائرہ کار  $-\infty < x < \infty$ ، سمت  $-\infty < y < \infty$

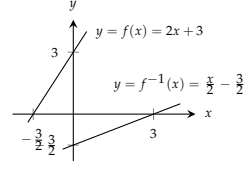
سوال 22:  $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$



شکل 7.30: ترسیم جواب 29



شکل 7.29: ترسیم جواب 27



شکل 7.28: ترسیم جواب 25

سوال 23:  $f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$   
جواب:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$ ، سعت

سوال 24:  $f(x) = \frac{1}{x^3}, x \neq 0$

الٹ تفاعل کے تفرق  
سوال 25 تا سوال 28 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا.  $f^{-1}(x)$  تلاش کریں۔

ب.  $f$  اور  $f^{-1}$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج. نقطہ  $x = a$  پر  $\frac{df}{dx}$  اور نقطہ  $x = f(a)$  پر  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کی قیمت حاصل کریں۔ تصدیق کریں کہ ان نقطوں پر  $\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)}$  ہو گا۔

سوال 25:  $f(x) = 2x + 3, a = -1$   
جواب: (ا)  $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ ، (ب) شکل 7.28، (ج)  $2, \frac{1}{2}$

سوال 26:  $f(x) = \frac{x}{5} + 7, a = -1$

سوال 27:  $f(x) = 5 - 4x, a = \frac{1}{2}$   
جواب: (ا)  $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$ ، (ب) شکل 7.29، (ج)  $-4, -\frac{1}{4}$

سوال 28:  $f(x) = 2x^2, x \geq 0, a = 5$

سوال 29:

1. دکھائیں کہ  $f(x) = x^3$  اور  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

2.  $f$  اور  $g$  ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع  $(1, 1)$  اور  $(-1, -1)$  نظر آئیں۔ آپ کو کیر  $y = x$  میں تشاکلی نظر آنی چاہیے۔

3. نقاط  $(1, 1)$  اور  $(-1, -1)$  پر  $f$  اور  $g$  کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

4. مبداء پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

جواب: (ب) شکل 7.30، (ج)  $(1, 1)$  پر  $f$  کی ڈھلوان 3 ہے؛  $(1, 1)$  پر  $g$  کی ڈھلوان  $\frac{1}{3}$  ہے؛  $-1, -1$  پر  $f$  کی ڈھلوان 3 اور  $(-1, -1)$  پر  $g$  کی ڈھلوان  $\frac{1}{3}$  ہے۔ (د)  $x = 0$  پر  $y = x^3$  کا مماس  $y = 0$  ہے؛  $x = 0$  پر  $y = \sqrt[3]{x}$  کا مماس  $x = 0$  ہے۔

سوال 30:

1. دکھائیں کہ  $h(x) = \frac{x^3}{4}$  اور  $k(x) = (4x)^{1/3}$  ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

2.  $h$  اور  $k$  ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع  $(2, 2)$  اور  $(-2, -2)$  نظر آئیں۔ آپ کو کیر  $y = x$  میں تشاکلی نظر آنی چاہیے۔

3. نقاط  $(2, 2)$  اور  $(-2, -2)$  پر  $h$  اور  $k$  کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

4. مبداء پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال 31: مان لیں  $x \geq 2$ ،  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$  ہے۔ نقطہ  $f(3) = -1 = x$  پر  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کی قیمت تلاش کریں۔  
جواب:  $\frac{1}{9}$

سوال 32: مان لیں  $x > 2$ ،  $f(x) = x^2 - 4x - 5$  ہے۔ نقطہ  $f(5) = 0 = x$  پر  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 33: فرض کریں قابل تفرق تفاعل  $y = f(x)$  کا الٹ پایا جاتا ہے اور  $f$  کی ترسیم نقطہ  $(2, 4)$  سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان  $\frac{1}{3}$  ہے۔ نقطہ  $x = 4$  پر  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کی قیمت تلاش کریں۔  
جواب: 3

سوال 34: فرض کریں قابل تفرق تفاعل  $y = g(x)$  کا الٹ پایا جاتا ہے اور  $g$  کی ترسیم مبداء سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان 2 ہے۔ مبداء پر  $g^{-1}$  کی ترسیم کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 35:



ا. تفاعل  $f(x) = mx$  کا الٹ تلاش کریں جہاں  $m$  غیر صفر مستقل ہے۔

ب. تفاعل  $y = f(x)$  کی ترسیم مبدا سے گزرتی کلیر ہے جس کی ڈھلوان  $m$  غیر صفر ہے۔ اس تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

جواب: (i)  $f^{-1}(x) = \frac{x}{m}$ ، (ب)  $f^{-1}$  کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے اور اس کی ڈھلوان  $\frac{1}{m}$  ہے۔

سوال 36: دکھائیں کہ  $f(x) = mx + b$ ، جہاں  $m$  اور  $b$  مستقل ہیں اور  $m \neq 0$  ہے، کا الٹ ایک کلیر ہے جس کی ڈھلوان  $\frac{1}{m}$  ہے اور جو محور  $y$  کو  $-\frac{b}{m}$  پر قطع کرتی ہے۔

سوال 37:

ا. تفاعل  $f(x) = x + 1$  کا الٹ تلاش کریں۔  $f$  اور اس کا الٹ ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کلیر  $y = x$  کو بھی شامل کریں۔

ب. تفاعل  $f(x) = x + b$  کا الٹ تلاش کریں جہاں  $b$  مستقل ہے۔  $f^{-1}$  کی ترسیم کا  $f$  کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

ج. کلیر  $y = x$  کے متوازی تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہوگا؟

جواب: (i)  $f^{-1}(x) = x - 1$ ، (ب)  $f^{-1}(x) = x - b$ ،  $f^{-1}$  کی ترسیم  $f$  کی ترسیم کے متوازی ہے۔  $f^{-1}$  اور  $f$  کی ترسیمات کلیر  $y = x$  کے مخالف اطراف پر اور اس کلیر سے برابر فاصلہ پر ہیں۔ (ج) ترسیمات ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے اور کلیر  $y = x$  کے مخالف اطراف اور برابر فاصلہ پر ہوں گے۔

سوال 38:

ا. تفاعل  $f(x) = -x + 1$  کا الٹ معلوم کریں۔ کلیر  $y = -x + 1$  اور کلیر  $y = x$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان کلیروں کے بیچ زاویہ کتنا ہے۔

ب. تفاعل  $f(x) = -x + b$  کا الٹ معلوم کریں جہاں  $b$  مستقل ہے۔ کلیر  $y = -x + b$  اور کلیر  $y = x$  کے مابین زاویہ کتنا ہے؟

ج. کلیر  $y = x$  کے عمودی تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

بڑھتا ہوا اور گھٹتا ہوا تفاعل  
سوال 39: اگر وقفہ  $I$  میں کسی دو نقطوں  $x_1$  اور  $x_2$  پر

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

ہو تب  $I$  پر تفاعل  $f(x)$  بڑھتا ہوگا (حصہ 4.2)۔ اسی طرح درج ذیل صورت میں  $I$  پر  $f(x)$  گھٹتا ہوگا۔

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$$

دکھائیں کہ بڑھتے تفاعل اور گھٹتے تفاعل ایک ایک تفاعل ہیں یعنی دکھائیں کہ  $I$  میں کسی بھی دو نقطوں  $x_1$  اور  $x_2$  کے لئے  $x_2 \neq x_1$  سے مراد  $f(x_2) \neq f(x_1)$  ہوگا۔

سوال 40 تا 44 میں سوال 39 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دیے تفاعل کا اپنے وقفہ پر الٹ پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے  $\frac{df^{-1}}{dx}$  کا کلیہ تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{6} \quad \text{سوال 40}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 27x^3 \quad \text{سوال 41} \\ \frac{df^{-1}}{dx} &= \frac{1}{9}x^{-2/3} \quad \text{جواب: بڑھتا، لہذا ایک ایک؛} \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 - 8x^3 \quad \text{سوال 42}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - x)^3 \quad \text{سوال 43} \\ \frac{df^{-1}}{dx} &= -\frac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{جواب: گھٹتا، لہذا ایک ایک؛} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^{5/3} \quad \text{سوال 44}$$

نظریہ اور استعمال

سوال 45: اگر  $f(x)$  ایک ایک ہو تب  $g(x) = -f(x)$  کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 46: اگر ایک ایک اور غیر صفر ہو تب  $h(x) = \frac{1}{f(x)}$  کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 47: فرض کریں کہ  $g$  کی سعت،  $f$  کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہے لہذا مرکب تفاعل  $f \circ g$  معین ہے۔ اگر  $f$  اور  $g$  ایک ایک ہوں تب  $f \circ g$  کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر مرکب تفاعل  $f \circ g$  ایک ایک ہو تب کیا  $g$  لازماً ایک ایک ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  پر  $f(x)$  مثبت، استمراری اور بڑھتا تھاقل ہے۔ ترمیم کی تاویل کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} dx = bf(b) - af(a)$$

سوال 50: مستقل  $a, b, c$  اور  $d$  پر مسلط وہ شرائط تلاش کریں جو ناطق تھاقل

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

کا الٹ ممکن بناتے ہیں۔

سوال 51: اگر ہم  $f^{-1}(x)$  کی جگہ  $g(x)$  لکھیں تب مساوات 7.1 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \implies g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

اس میں  $a$  کی جگہ  $x$  پر کرنے سے

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

ملتا ہے جو زنجیری قاعدہ یاد دلاتی ہے۔ یقیناً درج بالا اور زنجیری قاعدے کے بیچ تعلق پایا جاتا ہے۔

فرض کریں  $f$  اور  $g$  قابل تفرق اور ایک دوسرے کے الٹ ہیں لہذا  $(f \circ g)(x) = x$  ہو گا۔ زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے دونوں اطراف کا  $x$  کے لحاظ سے تفرق لے کر  $(f \circ g)'(x)$  کو  $f$  اور  $g$  کے تفرق کی صورت میں لکھ کر دیکھیں کیا حاصل ہوتا ہے؟ (مسئلہ 7.1 کو دیکھنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔)

سوال 52: ترکیب چھلا اور ترکیب خول کی مساوات فرض کریں وقفہ  $a \leq x \leq b$  پر  $f$  قابل تفرق ہے جہاں  $a > 0$  ہے اور  $f$  کا قابل تفرق الٹ  $f^{-1}$  پایا جاتا ہے۔ تھاقل  $f$ ، لکیر  $x = a$  اور لکیر  $y = f(b)$  کے بیچ خطہ کو محور  $y$  کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ترکیب چھلا اور ترکیب خول اس جسم کے حجم کے کلیات ایک جیسا نتیجہ دیتی ہیں:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \left( (f^{-1}(y))^2 - a^2 \right) dy = \int_a^b 2\pi x (f(b) - f(x)) dx$$

اس مساوات کو ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل متعارف کریں۔

$$C(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi \left( (f^{-1}(y))^2 - a^2 \right) dy$$

$$K(t) = \int_a^t 2\pi x (f(t) - f(x)) dx$$

اس کے بعد دکھائیں کہ  $[a, b]$  کے کسی نقطہ پر  $C(t)$  اور  $K(t)$  کی قیمتیں ایک جیسی ہیں اور  $[a, b]$  پر ان کے تفرق بھی ایک جیسے ہیں۔ صفحہ 506 پر سوال 56 کے نتیجہ کے مطابق  $[a, b]$  میں تمام  $t$  کے لئے  $C(t) = K(t)$  ہو گا۔ بالخصوص  $C(b) = K(b)$  ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 53 تا سوال 60 میں آپ چند تفاعل اور ان کے الٹ پر غور کریں گے۔ اس کے علاوہ دیے گئے نقطہ پر ان کے تفرق اور خطی تخمینہ تفاعل غور کریں گے۔ ان سوالات میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ پر تفاعل  $y = f(x)$  اور اس کا تفرق ترسیم کریں۔ بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ اس وقفہ پر  $f$  ایک ایک ہے۔

ب. مساوات  $y = f(x)$  کو  $x$  کے لئے حل کر کے حاصل الٹ تفاعل کو  $g$  سے ظاہر کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ  $(x_0, f(x_0))$  پر  $f$  کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

د. لکیر  $y = x$  کے دوسری جانب تشاکلی نقطہ  $(f(x_0), x_0)$  پر  $g$  کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے اس مماسی لکیر کی ڈھلوان معلوم کریں۔

ه. تفاعل  $f$ ،  $g$ ، لکیر  $y = x$ ، دونوں مماسی خط اور نقطہ  $(x_0, f(x_0))$  اور  $(f(x_0), x_0)$  کو جوڑنے والا سیدھا خط ترسیم کریں۔ آپ کو جو تشاکلی نظر آتی ہے اس پر تبصرہ کریں؟

$$\text{سوال 53: } y = \sqrt{3x-2}, \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 4, \quad x_0 = 3$$

$$\text{سوال 54: } y = \frac{3x+2}{2x-11}, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{سوال 55: } y = \frac{4x}{x^2+1}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{سوال 56: } y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{سوال 57: } y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \leq x \leq 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$$

$$\text{سوال 58: } y = 2 - x - x^3, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{سوال 59: } y = e^x, \quad -3 \leq x \leq 5, \quad x_0 = 1$$

$$\text{سوال 60: } y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$$

سوال 61 اور سوال 62 میں درج بالا تمام اقدام بروئے کار لاتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر خفی تفاعل تفاعل کو حل کر کے  $y = f(x)$  اور  $x = f^{-1}(y)$  حاصل کریں۔

$$\text{سوال 61: } y^{1/3} - 1 = (x+2)^3, \quad -5 \leq x \leq 5, \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{سوال 62: } \cos y = x^{1/5}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

## 7.2 قدرتی لوگار تھم

علم حساب اور سائنس میں اہم ترین تفاعل اور الٹ کی جوڑی قدرتی لوگار تھم  $\ln x$  اور قوت نما تفاعل  $x^x$  کی جوڑی ہے۔ تفاعل  $e^x$  کی وضاحت  $\ln x$  سے ہوتی ہے لہذا ہم پہلے  $\ln x$  متعارف کرتے ہیں۔ لوگار تھم نے پہلے علم حساب میں بہتری پیدا کی۔ لوگار تھم کی خوبیوں نے سترھویں صدی میں آفاقی میکانیات کا حساب اور ساحل سے دور راہ تلاش کرنا ممکن بنایا۔ اگرچہ آج کل پیچیدہ حساب کمپیوٹر کی مدد سے کیا جاتا ہے، بہر حال لوگار تھم کی خوبیاں آج بھی اتنی ہی اہمیت رکھتی ہیں۔

## قدرتی لوگار تھمی تفاعل

مثبت عدد  $x$  کے قدرتی لوگار تھم کو  $\ln x$  لکھا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل مکمل دیتا ہے۔

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0 \quad \text{قدرتی لوگار تھمی تفاعل کی تعریف}$$

اگر  $x > 1$  ہو تب  $t = 1$  سے  $t = x$  تک منحنی  $y = \frac{1}{t}$  کے نیچے رقبہ  $\ln x$  ہو گا (شکل 7.31)۔ اگر  $0 < x < 1$  ہو تب  $x$  سے  $1$  تک منحنی  $y = \frac{1}{t}$  کے نیچے رقبہ کا منفی  $\ln x$  ہو گا۔ قدرتی لوگار تھمی تفاعل وقفہ  $x \leq 0$  کے لئے غیر معین ہے۔ لوگار تھمی تفاعل کی تعریف سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0 \quad \text{بالائی اور زیریں حد ایک جیسے ہیں}$$

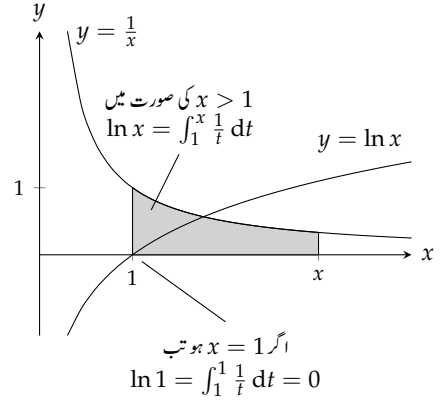
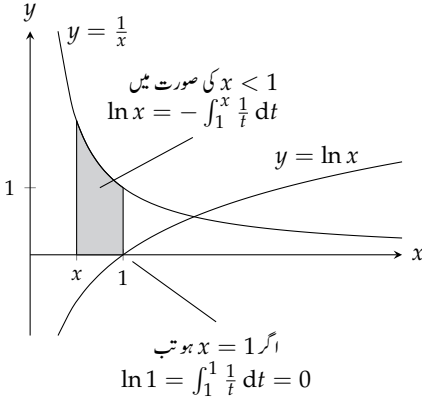
دھیان رہے کہ ہم شکل 7.31 میں  $y = \frac{1}{x}$  ترسیم کرتے ہیں لیکن مکمل میں  $y = \frac{1}{t}$  استعمال کرتے ہیں۔ ہر متغیر کو  $x$  لکھنے سے

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

لکھا جائے گا جہاں  $x$  کے دو مختلف معنی ہیں۔ اسی لئے ہم مکمل میں متغیر کو تبدیل کرتے ہوئے  $t$  لکھتے ہیں۔

$x$  کی مختلف قیمتوں کے لئے تین اعشاریہ درست قدرتی لوگار تھمی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$x$	0	0.05	0.5	1	2	3	4	10
$\ln x$	غیر معین	-3.00	-0.69	0	0.69	1.10	1.39	2.30



شکل 7.31: تقابل  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  اور قدرتی لوگار تھمی تقابل  $y = \ln x$  کا تعلق۔ قدرتی لوگار تھمی تقابل  $x > 1$  کے لئے مثبت اور  $x < 1$  کے لئے منفی ہے۔

### قدرتی لوگار تھمی تقابل کا تفرق

احصاء کے بنیادی مسئلہ کے جزو اول (مسئلہ 5.3) سے

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا  $x$  کی ہر مثبت قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

اگر  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تقابل ہو اور  $u$  کی قیمتیں مثبت ہوں، تاکہ  $\ln u$  معین ہو، تب تقابل  $y = \ln u$  پر زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

کی اطلاق سے

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{du} \ln u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

میتا ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(7.3) \quad \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \quad u > 0$$

مثال 7.7:

$$\frac{d}{dx} \ln 2x = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} (2x) = \frac{1}{2x} (2) = \frac{1}{x}$$

□

آپ نے مثال 7.7 میں دیکھا کہ تفاعل  $y = \ln 2x$  کا تفرق وہی ہے جو تفاعل  $y = \ln x$  کا ہے۔ درحقیقت کسی بھی تفاعل  $y = \ln ax$  کے لئے درست ہے جہاں  $a$  کوئی عدد ہے:

$$(7.4) \quad \frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx} (ax) = \frac{1}{ax} (a) = \frac{1}{x}$$

مثال 7.8: اگر مساوات 7.3 میں  $u = x^2 + 3$  پر کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

□

### خواص لوگار تھم

کمپیوٹر کی ایجاد سے پہلے علم حساب میں سب سے زیادہ بہتری لوگار تھم کے سر ہے<sup>4</sup>۔ لوگار تھم کی وہ خوبیاں جن کی بدولت حساب میں بہتری پیدا ہوئی جدول 7.1 میں دی گئی ہیں۔ ان خواص کی بنا پر ثابت اعداد کے ضرب کی جگہ جمع اور مثبت اعداد کی تقسیم کی جگہ تفریق استعمال ہونے لگا۔ اس کے علاوہ طاقت کی جگہ ضرب استعمال کیا جانے لگا۔ وقتی طور پر ہم جزو د میں طاقت  $n$  کو ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔ اس کی وضاحت جزو د کے ثبوت کے دوران ہو گی۔

<sup>4</sup> اسکاچچی ریاضی دان جان نیپرس نے سو لویس صدی میں لوگار تھم ایجاد کیا۔ انہوں نے اپنی زندگی کے آخری میں برس لوگار تھمی جدول مکمل کرنے میں صرف کیے

جدول 7.1: خواص قدرتی لوگار تھم

کسی بھی اعداد $a > 0$ اور $x > 0$ کے لئے۔		
$\ln ax = \ln a + \ln x$	قاعدہ ضرب	الف
$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$	قاعدہ حاصل تقسیم	ب
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$	قاعدہ بالکس متناسب	ج
$\ln x^n = n \ln x$	قاعدہ طاقت	د

مثال 7.9:

$$\begin{aligned}
 \ln 6 &= \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 && \text{ضرب} \\
 \ln 4 - \ln 5 &= \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8 && \text{حاصل تقسیم} \\
 \ln \frac{1}{8} &= -\ln 8 && \text{بالکس متناسب} \\
 &= -\ln 2^3 = -3 \ln 2 && \text{طاقت}
 \end{aligned}$$

□

مثال 7.10:

$$\begin{aligned}
 \ln 4 + \ln \sin x &= \ln(4 \sin x) && \text{ضرب} \\
 \ln \frac{x+1}{2x-3} &= \ln(x+1) - \ln(2x-3) && \text{حاصل تقسیم} \\
 \ln \sec x &= \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x && \text{بالکس متناسب} \\
 \ln \sqrt[3]{x+1} &= \ln(x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln(x+1) && \text{طاقت}
 \end{aligned}$$

□

ثبوت: برائے  $\ln ax = \ln a + \ln x$ 

اس کا دلیل عجیب اور عمدہ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $\ln ax$  کا تفرق اور  $\ln x$  کا تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں (مساوات 7.4)۔ مسئلہ اوسط قیمت کے ضمنی نتیجہ دوم (صفحہ 4.2) کہتا ہے کہ ان تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا:

$$(7.5) \quad \ln ax = \ln x + C \quad \text{مستقل } C$$



اب صرف یہ دکھانا باقی ہے کہ  $C$  اور  $\ln a$  ایک دوسرے کے برابر ہیں۔

مساوات 7.5  $x$  کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے درست ہے لہذا یہ  $x = 1$  کے لئے بھی درست ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\ln(a \cdot 1) = \ln 1 + C$$

$$\ln a = 0 + C$$

$$C = \ln a$$

$$\ln 1 = 0$$

ترتیب دی گئی ہے

مساوات 7.5 میں  $C = \ln a$  پر کرنے سے ہمیں درکار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

(7.6)

$$\ln ax = \ln a + \ln x$$

□

ثبوت: برائے  $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$  ہم مساوات 7.6 کو دو بار استعمال کر کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 7.6 میں  $a$  کی جگہ  $\frac{1}{x}$  پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} + \ln x &= \ln \left( \frac{1}{x} \cdot x \right) \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے لہذا

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

ہو گا۔ مساوات 7.6 میں  $x$  کی جگہ  $\frac{1}{x}$  پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{a}{x} &= \ln \left( a \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{x} \\ &= \ln a - \ln x \end{aligned}$$

ملتا ہے۔

□

ثبوت: برائے  $\ln x^n = n \ln x$  جہاں  $n$  ناطق ہے تمام مثبت  $x$  قیمتوں کے لئے درج ذیل ہو گا۔ (درج ذیل میں یاد رہے کہ ہم نے طاقی قاعدہ صرف ناطق اعداد کے لئے ثابت کیا ہے۔)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x^n &= \frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} (x^n) & \text{مساوات 7.3 میں } u = x^n \\ &= \frac{1}{x^n} n x^{n-1} & \text{یہاں } n \text{ کا ناطق ہونا ضروری ہے} \\ &= n \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} (n \ln x) \end{aligned}$$

چونکہ  $\ln x^n$  اور  $n \ln x$  کے تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا

$$\ln x^n = n \ln x + C \quad C \text{ مستقل}$$

ہو گا جس میں  $x = 1$  پر کرنے سے  $C = 0$  ملتا ہے۔

□

اگرچہ ہم نے غیر ناطق  $n$  کے لئے قاعدہ  $\ln x^n = n \ln x$  ثابت نہیں کیا ہے، یہ قاعدہ غیر ناطق اعداد کے لئے بھی درست ہے لہذا اس کو بغیر فقر استعمال کریں۔

$\ln x$  کی ترسیم اور سعت

چونکہ  $x > 0$  کے لئے  $\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$  ہے لہذا  $\ln x$  متغیر  $x$  کا بڑھتا تفاعل ہے۔ اس کا دور تبی تفرق،  $-\frac{1}{x^2}$ ، منفی ہے لہذا  $\ln x$  کی ترسیم نیچے مقرر ہے۔

اعدادی تراکیب سے  $\ln 2$  کی قیمت تقریباً 0.69 حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2}$$

اور

$$\ln 2^{-n} = -n \ln 2 < -n \left( \frac{1}{2} \right) = -\frac{n}{2}$$

ہوں گے۔ ان سے درج ذیل اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$\ln x$  کا دائرہ کار مثبت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے جبکہ  $\ln x$  کی سعت پوری حقیقی کثیر ہے۔

## لوگار تھمی تفرق

حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور طاقت پر مبنی مثبت تفاعل کا تفرق لینے سے پہلے تفاعل کا لوگار تھم لینا سودمند ثابت ہوتا ہے۔ لوگار تھم لینے ہوئے ہم جدول 7.1 کے قواعد استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں جس کا تفرق نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل کو لوگار تھمی تفرق<sup>5</sup> کہتے ہیں۔

مثال 7.11: تفاعل  $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}$ ,  $x > 1$  کے لئے تلاش کریں۔

حل: ہم دونوں اطراف کا قدرتی لوگار تھم لے کر جدول 7.1 کے قواعد سے سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \\ &= \ln \left( (x^2+1)(x+3)^{1/2} \right) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\ &= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(x+3) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ طاقت}\end{aligned}$$

اب ہم دونوں اطراف کا  $x$  کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔ (ہائیں ہاتھ مساوات 7.3 استعمال کرتے ہیں۔)

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

اس کو  $\frac{dy}{dx}$  کے لئے حل کرتے ہیں:

$$\frac{dy}{dx} = y \left( \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1} \right)$$

آخر میں ہم  $y$  کی قیمت پر کرتے ہیں:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \left( \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1} \right)$$

□

تفاعل  $y = f(x) > 0$  کا لوگار تھمی تفرق

کسی بھی تفاعل کا لوگار تھمی تفرق درج ذیل اقدام سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \ln f(x) && \text{دونوں اطراف لوگار تھم لیں} \\
 \frac{d}{dx} \ln y &= \frac{d}{dx} (\ln f(x)) && \text{دونوں اطراف تفرق لیں} \\
 \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (\ln f(x)) && \text{بائیں ہاتھ مساوات 7.3} \\
 \frac{dy}{dx} &= y \frac{d}{dx} (\ln f(x)) && \text{کے لئے حل کریں} \\
 \frac{dy}{dx} &= f(x) \frac{d}{dx} (\ln f(x)) && y = f(x) \text{ پر کریں}
 \end{aligned}$$

تکمل  $\int \frac{du}{u}$

مساوات 7.3 سے تکمل کا کلیہ

$$(7.7) \quad \int \frac{1}{u} du = \ln u + C \quad \text{C مستقل}$$

ماتا ہے جہاں  $u$  مثبت قابل تفرق تفاعل ہے۔ منفی  $u$  کی صورت میں کیا ہو گا؟ اگر  $u$  منفی ہو تب  $-u$  مثبت ہو گا لہذا

$$\begin{aligned}
 (7.8) \quad \int \frac{1}{u} du &= \int \frac{1}{(-u)} d(-u) \\
 &= \ln(-u) + C \quad \text{مساوات 7.7 میں } u \text{ کی جگہ } -u
 \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.7 اور مساوات 7.8 میں دائیں ہاتھ کو  $\ln|x| + C$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں دونوں مساوات کو

$$(7.9) \quad \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

میں ضم کیا جاسکتا ہے جہاں  $u$  غیر صفر قابل تفرق تفاعل ہے۔

ہم درج ذیل جانتے ہیں

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

اور  $n = -1$  کے لئے مساوات 7.9 کی طرف دیکھ سکتے ہیں۔

مساوات 7.9 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

جہاں  $f(x)$  قابل تفرق تفاعل ہے جس کی علامت پورے دائرہ کار پر تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

مثال 7.12:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2x}{x^2-5} dx &= \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{-5}^{-1} & u = x^2 - 5 \\ &= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5 \end{aligned}$$

□

مثال 7.13:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4 \cos \theta}{3 + 2 \sin \theta} d\theta &= \int_1^5 \frac{2}{u} du & u = 3 + 2 \sin \theta \\ &= 2 \ln|u| \Big|_1^5 \\ &= 2 \ln|5| - 2 \ln|1| = 2 \ln 5 \end{aligned}$$

□

$\tan x$  اور  $\cot x$  کے مکمل

ہمیں مساوات 7.9 کی مدد سے  $\tan x$  اور  $\cot x$  کا مکمل لے سکتے ہیں۔ ٹینجینٹ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u} & u = \cos x \\ &= - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C & \text{مساوات 7.9} \\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C & \text{قاعدہ بالعکس متناسب} \\ &= \ln|\sec x| + C \end{aligned}$$

کو ٹینجنٹ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{du}{u} & u &= \sin x \\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C\end{aligned}$$

اس طرح درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \tan u \, du &= -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C \\ \int \cot u \, du &= \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc x| + C\end{aligned}$$

مثال 7.14:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, dx &= \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \tan u \, du & u &= 2x \\ &= \frac{1}{2} \ln|\sec u| \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2\end{aligned}$$

□

## سوالات

لوگار تھم کے خواص

سوال 1: مندرجہ ذیل کو  $\ln 2$  اور  $\ln 3$  کی صورت میں لکھیں۔

ا.  $\ln 0.75$       ج.  $\ln(1/2)$       د.  $\ln 3\sqrt{2}$

ب.  $\ln(4/9)$       د.  $\ln \sqrt[3]{9}$       د.  $\ln \sqrt{13.5}$

جواب: (ا)  $\ln 3 - 2 \ln 2$ ، (ب)  $2(\ln 2 - \ln 3)$ ، (ج)  $-\ln 2$ ، (د)  $\frac{2}{3} \ln 3$ ، (ه)  $\ln 3 + \frac{1}{2} \ln 2$ ، (و)  $\frac{1}{2}(3 \ln 3 - \ln 2)$

سوال 2: مندرجہ ذیل کو  $\ln 5$  اور  $\ln 7$  کی صورت میں لکھیں۔

$$\begin{array}{lll} \ln 0.056 \quad \text{د.} & \ln 7\sqrt{7} \quad \text{ج.} & \ln(1/125) \quad \text{ا.} \\ \frac{\ln 35 + \ln(1/7)}{\ln 25} \quad \text{د.} & \ln 1225 \quad \text{د.} & \ln 9.8 \quad \text{ب.} \end{array}$$

سوال 3 اور سوال 4 میں خواص لوگار تھم کی مدد سے دیے گئے ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

سوال 3:

$$\frac{1}{2} \ln(4t^4) - \ln 2 \quad \text{ج.} \quad \ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right) \quad \text{ب.} \quad \ln \sin \theta - \ln\left(\frac{\sin \theta}{5}\right) \quad \text{ا.}$$

$$\text{جواب: (ا) } \ln 5, \text{ (ب) } \ln(x-3), \text{ (ج) } \ln(t^2)$$

سوال 4:

$$\begin{array}{ll} 3 \ln \sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t+1) \quad \text{ج.} & \ln \sec \theta + \ln \cos \theta \quad \text{ا.} \\ \ln(8x+4) - 2 \ln 2 \quad \text{ب.} & \end{array}$$

لوگار تھم کے تفرق

سوال 5 تا سوال 36 میں  $x$ ،  $t$  یا  $\theta$  کے لحاظ سے  $y$  کا تفرق لیں۔

$$\text{سوال 5: } y = \ln 3x \quad \text{جواب: } \frac{1}{x}$$

$$\text{سوال 6: } y = \ln kx, \quad k \text{ مستقل}$$

$$\text{سوال 7: } y = \ln(t^2) \quad \text{جواب: } \frac{2}{t}$$

$$\text{سوال 8: } y = \ln(t^{3/2})$$

$$\text{سوال 9: } y = \ln \frac{3}{x} \quad \text{جواب: } -\frac{1}{x}$$

$$\text{سوال 10: } y = \ln \frac{10}{x}$$

سوال 11:  $y = \ln(\theta + 1)$   
 جواب:  $\frac{1}{\theta+1}$

سوال 12:  $y = \ln(2\theta + 2)$

سوال 13:  $y = \ln x^3$   
 جواب:  $\frac{3}{x}$

سوال 14:  $y = (\ln x)^3$

سوال 15:  $y = t(\ln t)^2$   
 جواب:  $2 \ln t + (\ln t)^2$

سوال 16:  $y = t\sqrt{\ln t}$

سوال 17:  $y = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16}$   
 جواب:  $x^3 \ln x$

سوال 18:  $y = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$

سوال 19:  $y = \frac{\ln t}{t}$   
 جواب:  $\frac{1 - \ln t}{t^2}$

سوال 20:  $y = \frac{1 + \ln t}{t}$

سوال 21:  $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$   
 جواب:  $\frac{1}{x(1 + \ln x)^2}$

سوال 22:  $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$

سوال 23:  $y = \ln(\ln x)$   
 جواب:  $\frac{1}{x \ln x}$

سوال 24:  $y = \ln(\ln(\ln x))$

سوال 25:  $y = \theta(\sin(\ln \theta)) + \cos(\ln \theta)$   
 جواب:  $2 \cos(\ln \theta)$



سوال 26:  $y = \ln(\sec \theta + \tan \theta)$

سوال 27:  $y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$   
جواب:  $-\frac{3x+2}{2x(x+1)}$

سوال 28:  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

سوال 29:  $y = \frac{1+\ln t}{1-\ln t}$   
جواب:  $\frac{2}{t(1-\ln t)^2}$

سوال 30:  $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$

سوال 31:  $y = \ln(\sec(\ln \theta))$   
جواب:  $\frac{\tan(\ln \theta)}{\theta}$

سوال 32:  $y = \ln \left( \frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{1+2\ln \theta} \right)$

سوال 33:  $y = \ln \left( \frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}} \right)$   
جواب:  $\frac{10x}{x^2+1} + \frac{1}{2(1-x)}$

سوال 34:  $y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$

سوال 35:  $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln \sqrt{t} dt$   
جواب:  $2x \ln|x| - x \ln \frac{|x|}{\sqrt{2}}$

سوال 36:  $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t dt$

لوگاریتمی تفرق

سوال 37 تا سوال 50 میں لوگاریتمی تفرق استعمال کرتے ہوئے  $y$  کا دیے گئے غیر قابو متغیر کے لحاظ سے تفرق لیں۔

سوال 37:  $y = \sqrt{x(x+1)}$   
جواب:  $\frac{1}{2} \sqrt{x(x+1)} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$

$$y = \sqrt{(x^2 + 1)(x - 1)^2} \quad \text{سوال 38}$$

$$y = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \quad \text{سوال 39}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{t(t+1)^{3/2}}} \quad \text{جواب:}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{t(t+1)}} \quad \text{سوال 40}$$

$$y = \sqrt{\theta + 3} \sin \theta \quad \text{سوال 41}$$

$$\sqrt{\theta + 3} (\sin \theta) \left( \frac{1}{2(\theta + 3)} + \cot \theta \right) \quad \text{جواب:}$$

$$y = (\tan \theta) \sqrt{2\theta + 1} \quad \text{سوال 42}$$

$$y = t(t+1)(t+2) \quad \text{سوال 43}$$

$$t(t+1)(t+2) \left[ \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} \right] = 3t^2 + 6t + 2 \quad \text{جواب:}$$

$$y = \frac{1}{t(t+1)(t+2)} \quad \text{سوال 44}$$

$$y = \frac{\theta + 5}{\theta \cos \theta} \quad \text{سوال 45}$$

$$\frac{\theta + 5}{\theta \cos \theta} \left[ \frac{1}{\theta + 5} - \frac{1}{\theta} + \tan \theta \right] \quad \text{جواب:}$$

$$y = \frac{\theta \sin \theta}{\sqrt{\sec \theta}} \quad \text{سوال 46}$$

$$y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}} \quad \text{سوال 47}$$

$$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}} \left[ \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{3(x+1)} \right] \quad \text{جواب:}$$

$$y = \sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}} \quad \text{سوال 48}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}} \quad \text{سوال 49}$$

$$\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} \right) \quad \text{جواب:}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}} \quad \text{سوال 50}$$

تکمل

سوال 51 تا سوال 68 میں مکمل حل کریں۔

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x} \quad \text{سوال 51}$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{جواب}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{3dx}{3x-2} \quad \text{سوال 52}$$

$$\int \frac{2y dy}{y^2-25} \quad \text{سوال 53}$$

$$\ln|y^2-25| + C \quad \text{جواب}$$

$$\int \frac{8r dr}{4r^2-5} \quad \text{سوال 54}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2-\cos t} dt \quad \text{سوال 55}$$

$$\ln 3 \quad \text{جواب}$$

$$\int_0^{\pi/3} \frac{4\sin\theta}{1-4\cos\theta} d\theta \quad \text{سوال 56}$$

$$\int_1^2 \frac{2\ln x}{x} dx \quad \text{سوال 57}$$

$$(\ln 2)^2 \quad \text{جواب}$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{سوال 58}$$

$$\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad \text{سوال 59}$$

$$\frac{1}{\ln 4} \quad \text{جواب}$$

$$\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}} \quad \text{سوال 60}$$

$$\int \frac{3\sec^2 t}{6+3\tan t} dt \quad \text{سوال 61}$$

$$\ln|6+3\tan t| + C \quad \text{جواب}$$

$$\int \frac{\sec y \tan y}{2+\sec y} dy \quad \text{سوال 62}$$

$$\int_0^{\pi/2} \tan \frac{x}{2} dx \quad \text{سوال 63}$$

$$\ln 2 \quad \text{جواب}$$

سوال 64:  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t \, dt$

سوال 65:  $\int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cot \frac{\theta}{3} \, d\theta$   
جواب:  $\ln 27$

سوال 66:  $\int_0^{\pi/12} 6 \tan 3x \, dx$

سوال 67:  $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+2x}}$   
جواب:  $\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

سوال 68:  $\int \frac{\sec x \, dx}{\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)}}$

نظریہ اور استعمال

سوال 69: درج ذیل کے مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا.  $\ln(\cos x)$ ,  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$  ب.  $\cos(\ln x)$ ,  $[\frac{1}{2}, 2]$

جواب: (i)  $x = 0$  پر بلند تر 0 اور  $x = \frac{\pi}{3}$  پر کم تر  $-\ln 2$ ؛ (ب)  $x = 1$  پر بلند تر 1 اور  $x = \frac{1}{2}$  پر کم تر  $\cos(\ln 2)$

سوال 70: (i) ثابت کریں کہ  $x > 1$  کے لئے  $f(x) = x - \ln x$  بڑھتا ہے۔ (ب)  $x > 1$  کی صورت میں جزو-استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ  $\ln x < x$  ہو گا۔

سوال 71: منحنی  $y = \ln x$  اور  $y = \ln 2x$  کے تقاطع  $x = 1$  و  $x = 5$  رقبہ تلاش کریں۔  
جواب:  $\ln 16$

سوال 72: منحنی  $y = \tan x$  اور محور  $x$  کے تقاطع  $x = -\frac{\pi}{4}$  و  $x = \frac{\pi}{3}$  رقبہ تلاش کریں۔

سوال 73: ربع اول میں محدودی لکیروں، منحنی  $x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}$  اور لکیر  $y = 3$  کے تقاطع کو محور  $y$  کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔  
جواب:  $4\pi \ln 4$

سوال 74: منحنی  $y = \sqrt{\cot x}$  اور محور  $x$  پر  $x = \frac{\pi}{6}$  و  $x = \frac{\pi}{2}$  کے تقاطع کو محور  $x$  کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 75: منحنی  $y = \frac{1}{x^2}$  اور محور  $x$  پر  $x = \frac{1}{2}$  تا  $x = 2$  کے قع خطہ کو محور  $y$  کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔  
جواب:  $\pi \ln 16$

سوال 76: منحنی  $y = \frac{9x}{\sqrt{x^3+9}}$  اور محور  $x$  پر  $x = 0$  تا  $x = 3$  کے قع خطہ کو صفحہ 673 پر سوال 6 میں محور  $y$  کے گرد گھما کر  $36\pi$  حجم کا جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر اس خطہ کو محور  $x$  کے گرد گھمایا کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب اس جسم کا حجم کتنا ہو گا؟

سوال 77: درج ذیل منحنیات کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \frac{x^2}{8} - \ln x, \quad 4 \leq x \leq 8 \quad \text{ا.} \quad \text{ب. } x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2 \ln\left(\frac{y}{4}\right), \quad 4 \leq y \leq 12$$

جواب: (ا)  $6 + \ln 2$ ، (ب)  $8 + \ln 9$

سوال 78: ایک منحنی کی  $x = 1$  تا  $x = 2$  لمبائی درج ذیل ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

سوال 79: (ا) منحنی  $y = \frac{1}{x}$  اور محور  $x$  پر  $x = 1$  تا  $x = 2$  کے قع خطے کا وسطانی مرکز دو اعشاریہ درستی تک تلاش کریں۔ (ب) خطے کا خاکہ بنا کر وسطانی مرکز دکھائیں۔  
جواب: (ا)  $\bar{x} \approx 1.44, \bar{y} \approx 0.36$

سوال 80: (ا) ایک پتلی چادر جس کی کثافت مستقل ہے منحنی  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  اور محور  $x$  پر  $x = 1$  تا  $x = 16$  کے قع پایا جاتا ہے۔ اس چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (ب) اگر چادر کی کثافت  $\delta(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$  ہو تب اس کی کمیت کا مرکز کیا ہو گا؟

سوال 81 اور سوال 82 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل کو حل کریں۔

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3 \quad \text{سوال 81}$$

$$y = x + \ln|x| + 2 \quad \text{جواب}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad \text{سوال 82}$$

سوال 83: نقطہ  $x = 0$  پر  $\ln(1+x)$  کی خط بندی کی خاطر  $x = 1$  کے قریب  $x$  کی تخمین کی بجائے ہم  $x = 0$  کے قریب  $\ln(1+x)$  کی تخمین لیتے ہیں۔ اس طرح نسبتاً سادہ کلیہ حاصل ہوتا ہے۔ (ا) نقطہ  $x = 0$  کے قریب

$\ln(1+x) \approx x$  کی خط بندی کریں۔ (ب) وقفہ  $[0, 0.1]$  پر  $\ln(1+x)$  کی بجائے  $x$  استعمال کرنے سے پیدا غلطی کو 5 اعشاریہ تک تلاش کریں۔ (ج) منحنی  $y = \ln(1+x)$  اور  $y = x$  کو ایک ساتھ وقفہ  $[0, 0.5]$  پر ترسیم کریں۔ کس نقطہ پر خط بندی بہتر سے بہتر ہے؟ خراب سے خراب ہے؟ ترسیم سے زیادہ سے زیادہ غلطی پڑھ کر تلاش کریں۔  
جواب: (ب) 0.00469

سوال 84: اگرچہ لوگار تھمی تقابل کی خط بندی سے چھوٹے وقفہ پر بہترین نتائج حاصل ہوتے ہیں، قاعدہ سمسن کسی مخصوص  $\ln x$  کی زیادہ بہتر قیمت دیتا ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر  $\ln(1.2)$  اور  $\ln(0.8)$  کی 5 اعشاریہ قیمتیں بالترتیب 0.18232 اور -0.22314 ہیں۔ ان قیمتوں کو پہلے کلیہ  $\ln(1+x) \approx x$  اور بعد میں  $n = 2$  لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ (نتائج حیرت کن حد تک درست ہیں!)

سوال 85:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln x}$  کی قیمت تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔  
جواب: 2

سوال 86: کیا ہر نقطہ پر  $y = \ln 3x$  اور  $y = \ln 3x$  کے تفرق برابر ہو سکتے ہیں۔ (تفرق لے کر دیکھیں۔) تقابل  $y = \ln kx$  جہاں  $k$  مثبت مستقل ہے کے لئے کیا کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 87: تقابل  $\ln x$ ،  $\ln 2x$ ،  $\ln 4x$ ،  $\ln 8x$  اور  $\ln 16x$  کو  $0 < x \leq 10$  کے لئے ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟ وجہ بیان کریں۔

سوال 88: تقابل  $y = \ln|\sin x|$  کو ترسیم کر کے کمپیوٹر کے شیشہ پر  $0 \leq x \leq 22$  اور  $-2 \leq y \leq 0$  کے رینج نتائج دیکھیں۔ آپ کو کیا نظر آتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔ ترسیم کو الٹا کرنے کے لئے تقابل میں کیا تبدیلی کرنی ہوگی؟

سوال 89: (i) تقابل  $y = \sin x$  اور  $y = \ln(a + \sin x)$  کو  $a = 2, 4, 8, 20, 50$  کے لئے ایک ساتھ  $0 \leq x \leq 23$  پر ترسیم کریں۔ (ب)  $a$  کی قیمت بڑھنے سے ترسیمات افقی صورت کیوں اختیار کرتے ہیں؟ (اشارہ۔  $a$  کے لحاظ سے  $|y'|$  کی بالائی حد تلاش کریں۔)

سوال 90: کیا  $y = \sqrt{x} - \ln x$  کا نقطہ تعریف پایا جاتا ہے؟ اس کا جواب (i) ترسیم اور (ب) احصاء سے دیں۔

## 7.3 قوت نمائی تفاعل

اگر وقت کے لحاظ سے کسی مقدار  $y$  میں تبدیلی اس کی موجودہ قیمت  $y$  کے راست متناسب ہو تب یہ مقدار ایسا تفاعل ہو گا جو درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{مستقل } k$$

اگر لحد  $t = 0$  پر  $y = y_0$  ہو تب یہ قوت نمائی تفاعل  $y = y_0 e^{kt}$  ہو گا۔ اس حصہ میں قوت نمائی تفاعل کی تعریف (یہ  $\ln x$  کا الٹ ہے) پیش کی جائے گی اور ان خواص پر غور کیا جائے گا جن کی بدولت قوت نمائی تفاعل ریاضیات اور استعمال میں کثرت سے پایا جاتا ہے۔

$\ln x$  کا الٹ اور عدد  $e$

تفاعل  $\ln x$  متغیر  $x$  کا بڑھتا تفاعل ہے۔  $\ln x$  کا دائرہ کار  $(0, \infty)$  اور سعت  $(-\infty, \infty)$  ہے جبکہ اس کا الٹ  $\ln^{-1} x$  ہے جس کا دائرہ کار  $(-\infty, \infty)$  اور سعت  $(0, \infty)$  ہے۔ کیر  $y = x$  میں  $\ln x$  کا عکس تفاعل  $\ln^{-1} x$  کی ترسیم دیتی ہے۔ آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل  $\ln^{-1} x$  کے لئے

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln^{-1} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln^{-1} x = 0$$

ہو گا۔ عدد  $\ln^{-1} 1$  کو حرف  $e$  سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 7.32)۔

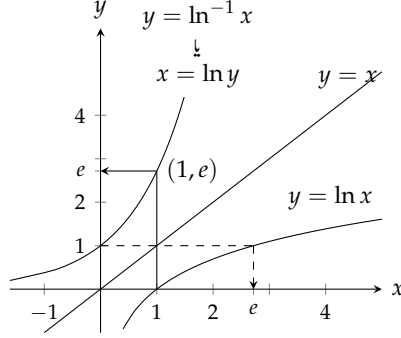
$$e = \ln^{-1} 1 \quad \text{تعریف}$$

اگرچہ  $e$  ناطق عدد نہیں ہے، ہم باب میں دیکھیں گے کہ درج ذیل کلیہ سے، کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے، ہم جتنے اعشاریہ تک اس کی قیمت چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

15 اعشاریہ تک  $e$  کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045$$



شکل 7.32: تفاعل  $y \ln x$  اور تفاعل  $y = \ln^{-1} x$ ۔ عدد  $e$  سے مراد  $\ln^{-1} 1$  ہے۔

تفاعل  $y = e^x$

کسی بھی مثبت عدد کی طرح ہم عدد  $e$  کو  $x$  کی ناطق طاقت تک بڑھا سکتا ہیں:

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

چونکہ  $e$  مثبت ہے لہذا  $e^x$  بھی مثبت ہو گا اور یوں  $e^x$  کا لوگار تھم بھی پایا جائے گا:

$$(7.10) \quad \ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x$$

چونکہ  $\ln x$  ایک ایک ہے اور  $\ln(\ln^{-1} x) = x$  ہے لہذا مساوات 7.10 کے تحت

$$(7.11) \quad e^x = \ln^{-1} x \quad \text{ناطق } x$$

ہو گا۔ مساوات 7.11 کی مدد سے  $e^x$  کی تعریف کو وسعت دے کر غیر ناطق  $x$  کو بھی شامل کیا جاسکتا ہے۔  $x$  کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل  $\ln^{-1} x$  معین ہے لہذا ہم اس کو استعمال کرتے ہوئے  $e^x$  کو ان نقطوں پر بھی قیمت مختص کر سکتے ہیں جہاں پہلے  $e^x$  کی کوئی قیمت نہیں پائی جاتی تھی۔ اس طرح قوت نمائی تفاعل کی عالمگیر تعریف درج ذیل ہو گی۔

تعریف  $e^x$

$$e^x = \ln^{-1} x, \quad \text{ہر حقیقی عدد } x \text{ کے لئے}$$



ایسی مساواتیں جن میں  $\ln x$  اور  $e^x$  موجود ہوں

چونکہ  $\ln x$  اور  $e^x$  ایک دوسرے کے الٹ ہیں لہذا ان کی الٹ مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$(7.12) \quad e^{\ln x} = x \quad \text{تمام } x > 0$$

$$(7.13) \quad \ln(e^x) = x, \quad \text{تمام } x$$

ہو گا۔ اگلی مثال کے کچھ حصوں کو کیلکولیٹر سے حل کریں۔

مثال 7.15:

$$ا. \ln e^2 = 2 \quad .د. e^{\ln 2} = 2$$

$$ب. \ln e^{-1} = -1 \quad .و. e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$$

$$ج. \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \quad ز. e^{3 \ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8 \quad \text{ایک طریقہ}$$

$$د. \ln e^{\sin x} = \sin x \quad ح. e^{3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8 \quad \text{دوسرا طریقہ}$$

□

مثال 7.16: مساوات  $\ln y = 3t + 5$  میں  $y$  تلاش کریں۔

حل: دونوں اطراف کا قوت نما لیتے ہیں:

$$e^{\ln y} = e^{3t+5}$$

$$y = e^{3t+5}$$

مساوات 7.12

□

مثال 7.17: اگر  $e^{2k} = 10$  تب  $k$  کتنا ہو گا؟

حل: دونوں اطراف کا قدرتی لوگار تھم لیتے ہیں:

$$e^{2k} = 10$$

$$\ln e^{2k} = \ln 10$$

$$2k = \ln 10$$

$$k = \frac{1}{2} \ln 10$$

مساوات 7.13

□

جدول 7.2: قواعد برائے  $e^x$  کے قوت نما

تمام اعداد $x_1$ اور $x_2$ کے لئے	
$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$	ا
$e^{-1} = \frac{1}{e^x}$	ب
$\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$	ج
$(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$	د

قواعد قوت نما

اگرچہ  $e^x$  کی تعریف  $\ln^{-1} x$  پر منحصر ہے، یہ الجبرا کے قواعد (جدول 7.2) برائے قوت نما کو مطمئن کرتا ہے۔

ثبوت: برائے قاعدہ۔ اگر ذیل ذیل

$$y_1 = e^{x_1}, \quad y_2 = e^{x_2}$$

ہوں تب مساوات کے دونوں اطراف کے لوگار تھم لیتے ہوئے

$$x_1 = \ln y_1$$

$$x_2 = \ln y_2$$

ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$x_1 + x_2 = \ln y_1 + \ln y_2$$

$$= \ln y_1 y_2$$

$$e^{x_1+x_2} = e^{\ln y_1 y_2}$$

$$= y_1 y_2$$

$$= e^{x_1} e^{x_2}$$

قاعدہ ضرب

قوت نما

$$e^{\ln u} = u$$

□

قاعدہ-د کا ثبوت بھی اس سے ملتا جلتا ہے۔ قواعد-ب اور ج کو قاعدہ-ا سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.18:

$$e^{x+\ln 2} = e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x$$

قاعدہ-ا

$$e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

قاعدہ-ب

$$\frac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$$

قاعدہ-ج

$$(e^3)^x = e^{3x} = (e^x)^3$$

قاعدہ-د

□

 $e^x$  کا تفرق اور مکمل

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

