احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

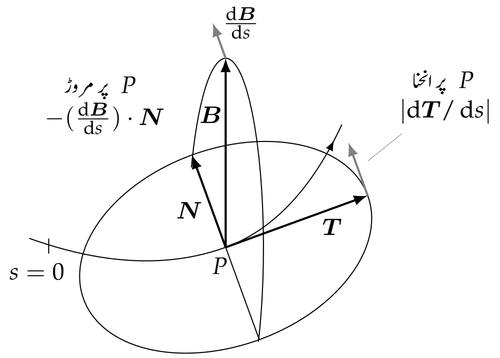
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

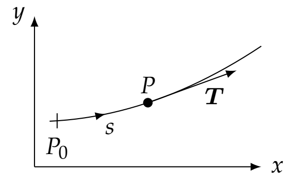
میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 12.16: ہر متحرک جسم کے ساتھ ایک TNB چھوکٹ سفر کرتا ہے جو اس کی راہ کا کردار بیان کرتا ہے۔



شکل 12.17: بڑھتی لمبائی قوس کے رخ چلتے ہوئے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہے۔نقطہ P پر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ کی قیمت کو P پر منحنی کی انحنا کہتے ہیں۔

12.4 انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ

اس حصہ میں ہم تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات پر مبنی ایسا چھوکٹ متعارف کرتے ہیں جو فضا میں منحنی پر جسم کے ساتھ ساتھ چلتا ہو (شکل 12.16)۔ اس چھوکٹ کے تین سمتیات ہیں۔ پہلا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔ دوسرا $\boldsymbol{N}$ ہے جو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ اکائی سمتیہ ہے۔ تیسرا اکائی سمتیہ $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے۔ یہ سمتیات اور ان کے تفرقات اگر معلوم ہوں، فضا میں سواری کی سمت بندی اور اس کی راہ میں موڑ اور بل کے بارے میں مفید معلومات مہیا کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}\right|$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ کتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہے؛ اسی لئے اس کو سواری کی راہ کی **انحنا**[16] کہتے ہیں۔ عدد $-(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\,\mathrm{d}s)\cdot\boldsymbol{N}$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ مستوی حرکت سے کتنی باہر مڑتی ہے یا بل کھاتی ہے؛ اس کو سواری کی راہ کی **مروڑ**[17] کہتے ہیں۔ دوبارہ شکل 12.16 پر نظر ڈالیں۔ اگر قوسی راہ پر ایک ریل گاڑی، P، اوپر چڑھ رہی ہو تب فی اکائی فاصلہ اس کی سر بتی جتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہو، یہ اس کی انحنا ہو گی۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی سے ریل گاڑی کا انجن جس شرح سے باہر نکلتا ہو، یہ اس کی مروڑ ہو گی۔

مستوی منحنی کی انحنا

جیسے جیسے ایک ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے، منحنی کے مڑنے سے $\boldsymbol{T}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ بھی مڑتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{T}$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی اور راہ پر چلتے ہوئے صرف اس کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔ منحنی پر چلتے ہوئے اکائی فاصلہ پر $\boldsymbol{T}$ کی شرح تبدیلی کو انحنا کہتے ہیں (شکل 12.17)۔ انحنا کو روایتی طور پر یونانی حرف κ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

---

[16] curvature
[17] torsion

تعریف : ایک ہموار منحنی جس کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہو، کا تفاعل انحنا درج ذیل ہو گا۔

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

□

اگر $\lvert \mathrm{d}\boldsymbol{T} / \mathrm{d}s \rvert$ بڑی قیمت ہو تب نقطہ P سے گزرتے ہوئے ذرہ بہت تیزی سے مڑے گا اور P پر انحنا زیادہ ہو گی۔ اگر $\lvert \mathrm{d}\boldsymbol{T} / \mathrm{d}s \rvert$ صفر کے قریب ہو تب $\boldsymbol{T}$ کا رخ آہستہ تبدیل ہو گا اور P پر انحنا کم ہو گی۔ اس تعریف کو پرکھتے ہوئے ہم درج ذیل دو مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ سیدھے خط اور دائروں کی انحنا مستقل ہو گی۔

مثال 12.18: سیدھے لکیر کی انحنا صفر ہو گی

سیدھے لکیر پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کے اجزاء مستقل ہوں گے۔ یوں $\lvert \mathrm{d}\boldsymbol{T} / \mathrm{d}s \rvert = \lvert \mathbf{0} \rvert = 0$ ہو گا (شکل 12.18)۔ □

مثال 12.19: رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی

ہم دائرہ کی مقدار معلوم مساوات

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

میں $\theta = \frac{s}{a}$ پر کر کے اس کی لمبائی قوس s کے لحاظ سے مقدار معلوم روپ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.19)۔

$$\boldsymbol{r} = (a\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (a\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

یوں

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

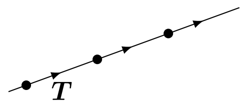
اور

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = (-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} - (\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

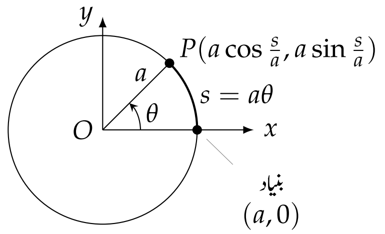
ہوں گے۔ اس طرح کسی بھی کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \qquad \text{ہو گا } |a| = a \text{ کی بنا } a > 0
\end{aligned}$$

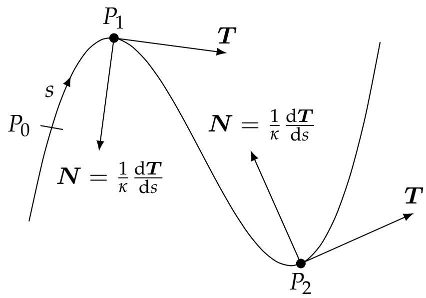
□



شکل 12.18: سیدھے لکیر پر $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کی انحنا $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ صفر ہو گی۔



شکل 12.19: دائرہ برائے مثال 12.19



شکل 12.20: منحنی کا عمودی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ ہر وقت اس رخ ہوتا ہے جس رخ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ ہے۔

صدر اکائی عمودی سمتیہ

چونکہ $\boldsymbol{T}$ کی لمبائی اکائی ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ اور $\boldsymbol{T}$ آپس میں عمودی ہوں گے (حصہ 12.1)۔ یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کو لمبائی κ سے تقسیم کرنے سے ایسا اکائی سمتیہ حاصل ہو گا جو $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا (شکل 12.20)۔

تعریف: جس نقطہ پر $\kappa \neq 0$ ہو وہاں مستوی میں منحنی کا صدر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$$

□

موڑ پر سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ اس جانب ہو گا جس جانب منحنی مڑتی ہو۔ یوں اگر بڑھتے فاصلہ کے رخ منہ کرتے ہوئے، اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے رخ مڑے تب سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ دائیں ہو گا اور اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے مخالف رخ مڑتی ہو تب اس کا رخ بائیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں صدر عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ منحنی کے مقعر رخ ہو گا (شکل 12.20)۔ جس نقطہ پر $\kappa = 0$ ہو، وہاں کے بارے میں سوالات میں غور کیا گیا ہے۔

تعریف کی رو سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کی لمبائی قوس، مثبت $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کے لئے ہو گی لہٰذا $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|} \\
&= \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s)}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t||\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s|} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}
\end{aligned} \tag{12.25}$$

اس طرح ہم κ اور s حاصل کیے بغیر $\boldsymbol{N}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 12.20: درج ذیل دائری حرکت کے لئے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j}$$

حل: ہم پہلے $\boldsymbol{T}$ دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -(2\sin 2t)\boldsymbol{i} + (2\cos 2t)\boldsymbol{j}, \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2, \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \\
&= -(\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\cos 2t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

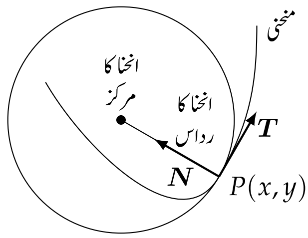
یوں

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= -(2\cos 2t)\boldsymbol{i} - (2\sin 2t)\boldsymbol{j}, \\
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| &= \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2
\end{aligned}$$

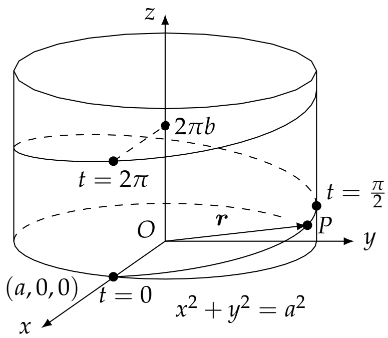
اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \\
&= -(\cos 2t)\boldsymbol{i} - (\sin 2t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

□



شکل 12.21: نقطہ $P(x,y)$ پر دائرہ انخنا منحنی کے اندرونی رخ ہو گا۔



شکل 12.22: ثبت a ، b کے لئے $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}$

انخنا کا دائرہ اور انخنا کا رداس

مستوی منحنی پر نقطہ P جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، **دائرہ انخنا**[18] سے مراد اس مستوی میں وہ دائرہ ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

ا. نقطہ P پر یہ منحنی کا مماسی ہو (منحنی کا مماسی خط ہی اس کا مماسی خط ہے)؛

ب. نقطہ P پر اس کی انخنا اور منحنی کی انخنا ایک دوسرے کے برابر ہوں؛

ج. یہ منحنی کے اندرونی یعنی مقعر رخ پایا جائے (شکل 12.21)۔

نقطہ P پر منحنی کے **رداس انخنا**[19] سے مراد اس نقطہ پر دائرہ انخنا کا رداس ہے، جو مثال 12.19 کے مطابق درج ذیل ہو گا۔

$$\text{رداس انخنا} = \rho = \frac{1}{\kappa} \tag{12.26}$$

رداس انخنا جاننے کے لئے ہم κ معلوم کر کے اس کا بالعکس تناسب لیتے ہیں۔ نقطہ P پر **مرکز انخنا**[20] سے مراد یہاں کے دائرہ انخنا کا مرکز ہو گا۔

---

[18] circle of curvature
[19] radius of curvature
[20] center of curvature

فضائی منحنیات کی انحنا اور عمودی سمتیات

مستوی منحنیات کی طرح فضا میں ہموار منحنی کے لئے مقدار معلوم لمبائی قوس s ، مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ دیتا ہے۔ ہم اب بھی انحنا سے مراد

$$\kappa = \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} \right| \tag{12.27}$$

لیتے ہیں۔ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا اور ہم صدر اکائی عمودی سمتیہ سے مراد درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \tag{12.28}$$

مثال 12.21: درج ذیل پیچ دار منحنی کی انحنا دریافت کریں (شکل 12.22)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\, a^2 + b^2 \neq 0$$

حل: ہم سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}]
\end{aligned}$$

اب زنجیری قاعدہ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}[-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}]
\end{aligned}$$

زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}| \implies \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} \right| \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\left|-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}\right| \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{12.29}$$

ہم مساوات 12.29 سے دیکھتے ہیں کہ مستقل a کے لئے b بڑھانے سے انحنا کم ہوتی ہے۔ مستقل b کے لئے a کم کرنے سے بھی انحنا آخر کار انحنا کم کرتی ہے۔ ایک اسپرنگ کھینچنے سے سیدھا ہوتا ہے۔

اگر $b = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی ایک دائرہ ہو گا جس کا رداس a اور انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی۔ اگر $a = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی، محور z پر سیدھا خط ہو گا اور اس کی انحنا 0 ہو گی۔ □

مثال 12.22: گزشتہ مثال میں منحنی کے لئے $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}] && \text{12.21 مثال}\\
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} && \text{12.28 مساوات}\\
&= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}]\\
&= -(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

□

مروڑ اور سہ عمودی سمتیہ

فضا میں منحنی کا **سہ عمودی سمتیہ**[21] $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے جو $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ دونوں کو عمودی ہو گا (شکل 12.23)۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر دایاں ہاتھ، متحرک، سمتی چھوکٹ دیتے ہیں جو فضا میں سواری کی حرکت پر غور میں مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

سمتیات $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کا رویہ کیسا ہو گا؟ حاصل صلیبی ضرب کے قاعدہ تفرق سے

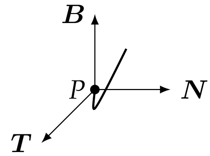
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

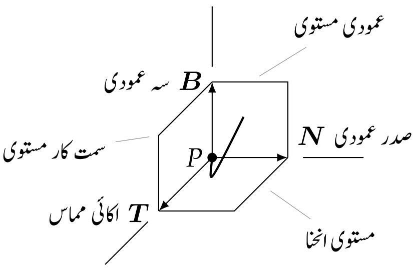
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} \tag{12.30}$$

---

[21] binormal vector



شکل 12.23: سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ (اسی ترتیب میں) فضا میں آپس میں عمودی اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چھوکٹ دیتے ہیں۔



شکل 12.24: سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ کے پیدا تین مستوی کے نام۔

چونکہ حاصل صلیبی ضرب دونوں اجزاء کو عمودی ہوتا ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا۔

چونکہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ (جس کی لمبائی مستقل ہے) کو بھی عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{T}$ کے مستوی کو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ عمودی ہو گا۔دوسرے لفظوں میں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کے متوازی ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا مستقل مضرب ہو گا۔اس حقیقت کو علامتی طور پر

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{N}$$

لکھا جاتا ہے جہاں منفی کی علامت روایتی ہے۔ غیر سمتی τ ، منحنی پر مروڑ کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N} = -\tau\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N} = -\tau(1) = -\tau$$

کی بنا درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}$$

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے۔تب ہموار منحنی کا تفاعل **مروڑ**[22] درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}$$

□

انحنا κ کے برعکس جو کبھی منفی نہیں ہو سکتا ہے، مروڑ τ مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

منحنیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر تین مستوی دیتے ہیں (شکل 12.24)۔ منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر عمودی مستوی کی مڑنے کی شرح کو انحنا $\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$ تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر $\boldsymbol{T}$ کے لحاظ سے سطح منحنی انحنا کی مڑنے کی شرح کو مروڑ $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ منحنی میں بل کی پیمائش اس منحنی کی مروڑ ہو گی۔

[22] torsion

اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء

قوت کشش، بریک یا انجن کی طاقت کی بنا کسی جسم کی اسراع کے مماسی جزو میں ہم عموماً دلچسپی رکھتے ہیں جو اس قوت کی بنا پیدا ہوتی ہے۔ہم زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے لئے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھ کر دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big(\kappa\boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2\boldsymbol{N}
\end{aligned}$$

اس کو

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{T} \tag{12.31}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اسراع کا غیر سمتی مماسی جزو a_T اور غیر سمتی عمودی جزو a_N درج ذیل ہوں گے۔

$$a_T = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|, \qquad a_N = \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2 = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \tag{12.32}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 12.31 میں $\boldsymbol{B}$ نہیں پایا جاتا ہے۔ایک راہ جس پر ایک جسم چل رہا ہو جتنا بھی گھومتا ہو، اس پر اسراع ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کی عمودی پائی جائے گی۔یہ مساوات ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ کتنی اسراع حرکت کے مماسی رخ $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ اور کتنی اسراع حرکت کے عمودی رخ $\kappa(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2$ ہو گی۔

ہم مساوات 12.32 سے کیا معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ تعریف کی رو سے، اسراع $\boldsymbol{a}$ سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی تبدیلی کی شرح ہو گی اور حرکت کے دوران سمتی رفتار کا رخ اور اس کی مقدار (لمبائی) تبدیل ہو گی۔ اسراع کا مماسی جزو a_T سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی کی شرح تبدیلی دیتا ہے (یعنی رفتار میں تبدیلی)۔ عمودی جزو a_N ہمیں $\boldsymbol{v}$ کے رخ کی تبدیلی کی شرح دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ a_N انحنا ضرب رفتار کا مربع ہو گا۔اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ جب گاڑی تیز رفتار (زیادہ $|\boldsymbol{v}|$) سے چلتے ہوئے زیادہ جلدی مڑے (بڑی κ) تب ہمیں کیوں سیدھا بیٹھنے میں مشکل پیش آتی ہے۔ گاڑی کی رفتار دگنی کرنے سے آپ اسی انحنا کے لئے چار گنّا زیادہ عمودی اسراع محسوس کریں گے۔

اگر ایک جسم مستقل رفتار سے چل رہی ہو تب $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ صفر ہو گا اور تمام اسراع $\boldsymbol{N}$ کے رخ، دائرے کے مرکز کے رخ ہو گا۔اگر ایک جسم کی رفتار بڑھ یا گھٹ رہی ہو تب $\boldsymbol{a}$ کا غیر صفر مماسی جزو ہو گا۔

اسراع کا عمودی جزو a_N معلوم کرنے کی خاطر ہم عموماً کلیہ $a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$ استعمال کرتے ہیں جو a_N کے لئے مساوات $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_T^2 + a_N^2$ حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم بغیر κ معلوم کیے، a_N معلوم کر سکتے ہیں۔

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \tag{12.33}$$

جوابات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ﮬ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ