

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
447	ضمیمہ دوم	1

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

حصہ خطی تخمین اور تفرقات بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی خطی صورتوں²⁰ پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات dx اور dy متعارف کرتے ہیں جو $\frac{dy}{dx}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیمائش میں خلل اور حساسیت کو dy سے ظاہر کریں گے۔

خطی تخمین

آپ شکل 4.126 میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔ نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔

شکل 4.127 کی علامت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ہے۔ یوں مماس تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جاسکتا ہے۔

تعریف:

اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

$$(4.15) \quad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

نقطہ a پر f کی خطی صورت²¹ ہوگی۔ f کی درج ذیل تخمین L

$$f(x) \approx L(x)$$

نقطہ a پر تفاعل f کی معیاری خطی تخمین²² ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا وسط²³ ہے۔

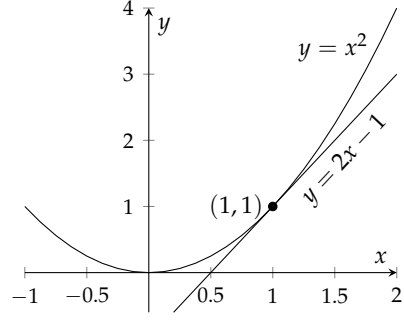
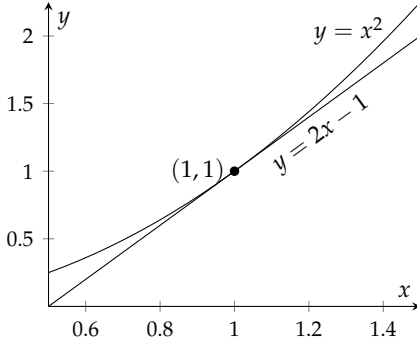
□

linearizations²⁰

linearization²¹

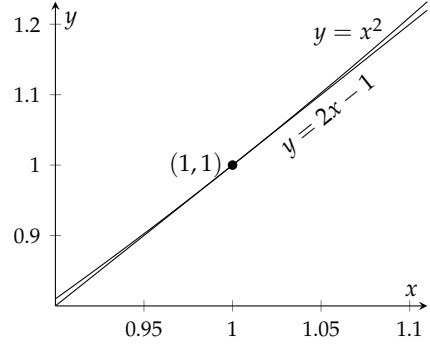
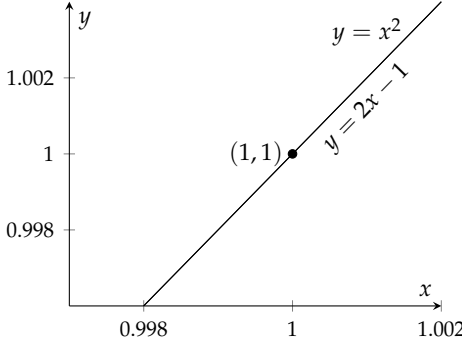
standard linear approximation²²

center²³



(ب) نقطہ (1, 1) کے نزدیک ممّتی اور مماس قریب قریب ہیں

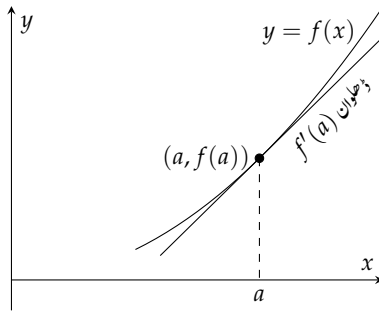
(ا) ممّتی اور اس کا نقطہ (1, 1) پر مماس



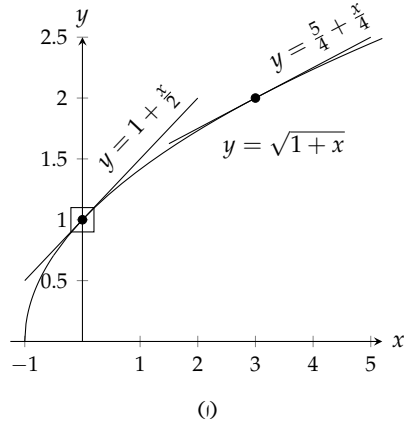
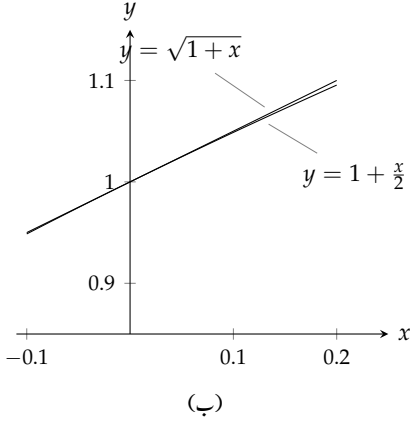
(د) دکھائے گئے وقفے پر ممّتی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور ممّتی بہت قریب ہیں

شکل 4.126: قابل تفرق ممّتی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینہ طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جاسکتا ہے



شکل 4.127: نقطہ a پر قائل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ہو گا



شکل 4.128: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کا خطی تخمینہ

مثال 4.40: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خطی صورت تلاش کریں۔
حل: ہم $a = 0$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہذا

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

شکل 4.128-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔ اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔ □

تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل 4.128-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$$

2 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$$

3 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$$

5 اعشاریہ درست

وسط سے دور خطی تخمینہ میں خلل نا قابل نظر انداز ہو گا۔ یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔ آپ کو $x = 3$ پر نیا خطی تخمینہ حاصل کرنا ہو گا۔

مثال 4.41: $x = 3$ پر تفاعل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کا خطی تخمینہ حاصل کریں۔
حل: ہم $a = 3$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

ہے لہذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

ہو گا (شکل 4.128)۔ اس خطی تخمینہ سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے 0.00061 ہٹ کر ہے۔

اگر ہم مثال 4.40 میں حاصل خطی تخمینہ استعمال کریں تب

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

□

حاصل ہو گا جس میں % 25 خلل پایا جاتا ہے۔

مثال 4.42: جذر اور طاق کے لئے اہم ترین خطی تخمینہ درج ذیل ہے۔

$$(4.16) \quad (1+x)^k \approx 1+kx \quad k \text{ کوئی عدد ہے؛ } x \approx 0$$

□

$x = 0$ کے نزدیک یہ قابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔

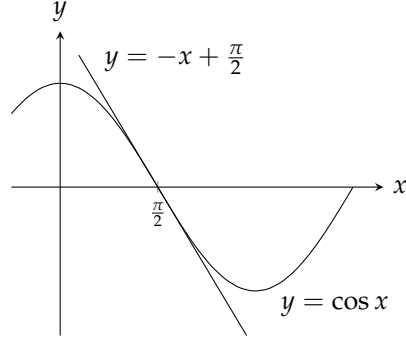
مساوات 4.16 سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1+x \quad k = -1$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \quad k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} \quad k = -\frac{1}{2}$$



شکل 4.129: کو سائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خطی تخمین

دیگر اہم خطی تخمین درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

مثال 4.43: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کا خطی تخمین حاصل کریں۔
حل: درج ذیل

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

لیتے ہوئے خطی تخمین درج ذیل ہو گا (شکل 4.129)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -x + \frac{\pi}{2}$$

□

تفرقات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

