

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذورنقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیتال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ تکوینیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ تکوینیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 تکمل کے طریقے	
943	8.1 تکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 تکمل بالخصص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 تکوینیاتی بدل	
1001	8.5 جدول تکمل اور کمپیوٹر	

1017	ا ضمیمہ اول	
1019	ب ضمیمہ دوم	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

8.5 جدول تکمیل اور کمپیوٹر

جیسا آپ جانتے ہیں تکمیل کے بنیادی طریقے بدل اور تکمیل بالخصص ہیں۔ ان طریقوں سے ہم انجانے تکمیل کو جانے پہچانے تکمیل میں بدلتے ہیں جس کو ہم حل کرنا جانتے ہیں یا جس کو جدول سے دیکھا جاسکتا ہے۔ ان جدول میں تکمیل کہاں سے آتے ہیں؟ جدول میں تکمیل بھی بدل یا تکمیل بالخصص سے حاصل کیے گئے ہوتے ہیں۔ ہم ان تمام کو خود حاصل کر سکتے ہیں لیکن جدول کی موجودگی ہمیں بار بار ایک ہی طرز کے تکمیل حاصل کرنے سے چھٹکارا فراہم کرتے ہیں۔ جب کوئی تکمیل جدول میں پایا جاتا ہو یا الجبرا، تکنیات، بدل اور احصاء کی استعمال سے اس کو جدول میں درج کسی تکمیل کی صورت میں لانا ممکن ہو، تب ہم تکمیل کا حل جدول سے پڑھ سکتے ہیں۔ اس حصہ کی مثالوں اور سوالات میں جدول میں درج کلیات کو اخذ کرنا اور ان کا استعمال سکھایا جائے گا۔ یہاں استعمال پر زور دیا جائے گا۔ کتاب کے آخر میں کلیات کو مستقل a, b, c, m, n وغیرہ کی صورت میں لکھ گیا ہے۔ یہ مستقل عموماً حقیقی اعداد ہوں گے جو غیر عدد صحیح ہو سکتے ہیں۔ جہاں ان مستقل پر شرائط مسلط ہو، وہاں اس کا ذکر کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر کلیہ 5 میں $n \neq -1$ ہونا ضروری ہے جبکہ کلیہ 11 میں $n \neq -2$ ہونا ضروری ہے۔

ان کلیات میں مستقل وہ قیمت اختیار نہیں کر سکتے ہیں جن کی بنا صفر سے تقسیم کرنا پڑے یا منفی اعداد کا جھٹ جذر لینا پڑے۔ مثال کے طور پر کلیہ 8 میں $a \neq 0$ ہو گا جبکہ کلیہ 13 -الف صرف اس صورت قابل استعمال ہو گا جب b منفی ہو۔

بہت سارے غیر قطعی تکمیل کو کمپیوٹر کی مدد سے بھی حل کیا جاسکتا ہے جہاں تکمیل کو کسی خاص صورت میں لکھنے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ کمپیوٹر الجبرا پر اس حصہ کے آخر میں غور کیا جائے گا۔

جدول کی مدد سے تکمیل

مثال 8.30: تکمیل $\int x(2x+5)^{-1} dx$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 8 استعمال کرتے ہیں (ناکہ کلیہ 7 جہاں $n \neq -1$ ہونا ضروری ہے۔)

$$\int x(ax+b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|ax+b| + C$$

یوں $a = 2$ اور $b = 5$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int x(2x+5)^{-1} dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \ln|2x+5| + C$$

□

مثال 8.31: تکمیل $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 13 -ب استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C \quad \text{اگر } b > 0$$

یوں $a = 2$ اور $b = 4$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}} &= \frac{1}{\sqrt{4}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{4}}{\sqrt{2x+4} + \sqrt{4}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+4} - 2}{\sqrt{2x+4} + 2} \right| + C \end{aligned}$$

□ کلیہ 13 -الف یہاں قابل استعمال نہیں ہو گا چونکہ اس میں $b < 0$ ضروری ہے، البتہ اگلی مثال میں یہ کارآمد ہو گا۔

مثال 8.32: مکمل $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 13 -الف استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$

یوں $a = 2$ اور $b = 4$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

□

مثال 8.33: مکمل $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 15 سے شروع کرتے ہیں۔

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

یوں $a = 2$ اور $b = -4$ لیتے ہوئے

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2 \cdot 4} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} + C$$

ماتا ہے۔ اب ہم کلیہ 13 -الف استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ تکمیل حل کرتے ہیں (مثال 8.32 سے رجوع کریں):

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

□

مثال 8.34: تکمیل $\int x \sin^{-1} x \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 99 استعمال کرتے ہیں۔

$$\int x^n \sin^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-a^2 x^2}}, \quad n \neq -1$$

یوں $n = 1$ اور $a = 1$ لے کر

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ہو گا۔ دائیں ہاتھ تکمیل جدول میں کلیہ 33 ہے:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

اب $a = 1$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

یوں مجموعی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int x \sin^{-1} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right) + C' \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C' \end{aligned}$$

□

کلیات تخفیف

دہراتے ہوئے مکمل بالخصوص میں درج ذیل صورت کے کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں جنہیں کلیات تخفیف⁸ کہتے ہیں۔

$$(8.21) \quad \int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

$$(8.22) \quad \int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$$

$$(8.23) \quad \int \sin^n x \cos^m x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} \, dx + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} x \cos^m x \, dx, \quad (n \neq -m)$$

کلیات تخفیف کسی تفاعل کے طاقت کے مکمل کو اسی طرز کے مکمل جس میں تفاعل کی طاقت کم ہو سے تبدیل کرتا ہے۔ طاقت کی تخفیف کی بنا انہیں کلیات تخفیف کہتے ہیں۔ کلیات تخفیف بار بار استعمال کرتے ہوئے آخر کار مکمل میں تفاعل کی طاقت اتنی کم ہو جاتی ہے کہ مکمل با آسانی حل ہوتا ہے۔

مثال 8.35: مکمل $\int \tan^5 x \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم $n = 5$ لیتے ہوئے کلیہ 1 استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x \, dx$$

ہم $n = 3$ لیتے ہوئے کلیہ 1 دوبارہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

یوں مکمل نتیجہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$$

□

کلیات تخفیف کو مکمل بالخصوص سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 8.36: کلیات تخفیف کا حصول
کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

حل: ہم مکمل بالخصوص کے کلیہ

$$\int u dv = uv - \int v du$$

میں

$$u = (\ln x)^n, \quad du = n(\ln x)^{n-1} \frac{dx}{x}, \quad dv = dx, \quad v = x$$

لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

□

بعض اوقات دو کلیات تخفیف کا استعمال ضروری ہو گا۔

مثال 8.37: مکمل $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ حل کریں۔

حل الف: ہم کلیہ 3 میں $n = 2$ اور $m = 3$ لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{2+3} + \frac{1}{2+3} \int \sin^0 x \cos^3 x dx \\ &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5} \int \cos^3 x dx \end{aligned}$$

ہم باقی مکمل کو کلیہ 61 سے حل کر سکتے ہیں۔

$$\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx$$

یوں $n = 3$ اور $a = 1$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \int \cos x dx \\ &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ مجموعی نتیجہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C \right) \\ &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{\cos^2 x \sin x}{15} + \frac{2}{15} \sin x + C'\end{aligned}$$

حل ب: مساوات 8.23 جدول میں کلیہ 68 ہے، مگر ہم کلیہ 69 بھی استعمال کر سکتے ہیں جس میں $a = 1$ لیتے ہوئے

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^n x \cos^{m-2} x \, dx$$

لکھا جائے گا۔ اب $n = 2$ اور $m = 3$ لیتے ہوئے درج ذیل مآتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5} \int \sin^2 x \cos x \, dx \\ &= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{\sin^3 x}{3} \right) + C \\ &= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15} \sin^3 x + C\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ کلیہ 69 زیادہ جلدی نتیجہ فراہم کرتا ہے۔ عموماً قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے کہ کونسا کلیہ زیادہ جلدی نتیجہ دیگا گا۔ اس پر وقت ضائع نہ کریں۔ جو بھی کلیہ قابل استعمال نظر آئے، اس کو فوراً استعمال کریں۔

آپ نے یہ بھی دیکھا ہو گا کہ کلیہ 68 اور کلیہ 69 کے نتائج مختلف نظر آتے ہیں۔ تکنیکی مکمل میں عموماً ایسا ہی ہو گا۔ آپ فکر نہ کریں □ چونکہ ایسے نتائج درحقیقت بالکل ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔

غیر بنیادی مکمل

وہ الٹ تفرق جنہیں بنیادی تفاعل (وہ تفاعل جن پر اب تک غور کیا گیا) کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو غیر بنیادی⁹ مکمل کہلاتے ہیں۔ غیر بنیادی مکمل کا حل لامتناہی سلسلہ یا اعدادی تراکیب سے حاصل ہو گا۔ اعدادی تراکیب سے حل ہونے والے مکمل میں تفاعل خلل

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

اور درج ذیل قسم کے تکمیل شامل ہیں جو انجینئری اور طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔

$$\int \sin x^2 dx, \quad \int \sqrt{1+x^4} dx$$

ان کے علاوہ

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int e^{(e^x)} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int \ln(\ln x) dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \quad 0 < k < 1$$

بھی غیر بنیادی تکمیل ہیں جو بظاہر سادہ نظر آتے ہیں۔ انہیں حل کرنے کی کوشش کر کے دیکھیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ مختلف بنیادی تفاعل کو کسی طرح بھی آپس میں جوڑ کر غیر بنیادی تکمیل کا حل نہیں لکھا جاسکتا ہے۔ وہ تکمیل جن میں بدل پر کر کے غیر بنیادی تکمیل میں تبدیل کرنا ممکن ہو کے لئے بھی یہی کچھ درست ہو گا۔ چونکہ یہ تمام مشکل استمراری ہیں لہذا ان کا الٹ تفرق ضرور پایا جائے گا، لیکن یہ الٹ تفرق غیر بنیادی ہوں گے۔

اس باب میں آپ کو کہیں پر بھی غیر بنیادی تکمیل حل کرنے کو نہیں کہا جائے گا البتہ حقیقی دنیا میں آپ کو ان سے واسطہ ضرور پڑے گا۔

سوالات

جدول تکمیل کا استعمال

کتاب کے آخر میں دیا گیا جدول تکمیل استعمال کرتے ہوئے سوال 1 تا سوال 38 حل کریں۔

سوال 1: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

سوال 2: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

سوال 3: $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-2}}$

سوال 4: $\int \frac{x dx}{(2x+3)^{3/2}}$

سوال 5: $\int x\sqrt{2x-3} dx$

سوال 6: $\int x(7x+5)^{3/2} dx$

سوال 7: $\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2} dx$

سوال 8: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-9}}$

سوال 9: $\int x\sqrt{4x-x^2} dx$

سوال 10: $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x} dx$

سوال 11: $\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$

سوال 12: $\int \frac{dx}{x\sqrt{7-x^2}}$

سوال 13: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$

سوال 14: $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$

سوال 15: $\int \sqrt{25-p^2} dx$

سوال 16: $\int q^2\sqrt{25-q^2} dx$

سوال 17: $\int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr$

سوال 18: $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-2}}$

سوال 19: $\int \frac{d\theta}{5+4\sin 2\theta}$

سوال 20: $\int \frac{d\theta}{4+5\sin 2\theta}$

سوال 21: $\int e^{2t} \cos 3t dt$

سوال 22: $\int e^{-3t} \sin 4t dt$

سوال 23: $\int x \cos^{-1} x dx$

سوال 24: $\int x \sin^{-1} x dx$

$$\int \frac{ds}{(9-s^2)^2} \quad \text{سوال 25:}$$

$$\int \frac{d\theta}{(2-\theta^2)^2} \quad \text{سوال 26:}$$

$$\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2} dx \quad \text{سوال 27:}$$

$$\int \frac{\sqrt{9x-4}}{x^2} dx \quad \text{سوال 28:}$$

$$\int \frac{\sqrt{3t-4}}{t} dt \quad \text{سوال 29:}$$

$$\int \frac{\sqrt{3t+9}}{t} dt \quad \text{سوال 30:}$$

$$\int x^2 \tan^{-1} x dx \quad \text{سوال 31:}$$

$$\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx \quad \text{سوال 32:}$$

$$\int \sin 3x \cos 2x dx \quad \text{سوال 33:}$$

$$\int \sin 2x \cos 3x dx \quad \text{سوال 34:}$$

$$\int 8 \sin 4t \sin \frac{t}{2} dt \quad \text{سوال 35:}$$

$$\int \sin \frac{t}{3} \sin \frac{t}{6} dt \quad \text{سوال 36:}$$

$$\int \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{4} d\theta \quad \text{سوال 37:}$$

$$\int \cos \frac{\theta}{2} \cos 7\theta d\theta \quad \text{سوال 38:}$$

بدل اور جدول

سوال 39 تا سوال 52 میں بدل استعمال کر کے ایسا تکمیل حاصل کریں جو جدول میں پایا جاتا ہو۔ اس نئے تکمیل کو جدول کی مدد سے حل کریں۔

$$\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2} dx \quad \text{سوال 39:}$$

$$\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2} dx \quad \text{سوال 40:}$$

سوال 41: $\int \sin^{-1} \sqrt{x} \, dx$

سوال 42: $\int \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

سوال 43: $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$

سوال 44: $\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} \, dx$

سوال 45: $\int \cot t \sqrt{1 - \sin^2 t} \, dt, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 46: $\int \frac{dt}{\tan t \sqrt{4 - \sin^2 t}}$

سوال 47: $\int \frac{dy}{y \sqrt{3 + (\ln y)^2}}$

سوال 48: $\int \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{5 + \sin^2 \theta}}$

سوال 49: $\int \frac{3 \, dr}{\sqrt{9r^2 - 1}}$

سوال 50: $\int \frac{3 \, dy}{\sqrt{1 + 9y^2}}$

سوال 51: $\int \cos^{-1} \sqrt{x} \, dx$

سوال 52: $\int \tan^{-1} \sqrt{y} \, dy$

کلیات تخفیف کا استعمال
سوال 53 تا سوال 72 کو کلیات تخفیف کی مدد سے حل کریں۔

سوال 53: $\int \sin^5 2x \, dx$

سوال 54: $\int \sin^5 \frac{\theta}{2} \, d\theta$

سوال 55: $\int 8 \cos^4 2\pi t \, dt$

سوال 56: $\int 3 \cos^5 3y \, dy$

سوال 57: $\int \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta \, d\theta$

سوال 58: $\int 9 \sin^3 \theta \cos^{3/2} \theta \, d\theta$

سوال 59: $\int 2 \sin^2 t \sec^4 t \, dt$

سوال 60: $\int \csc^2 y \cos^5 y \, dy$

سوال 61: $\int 4 \tan^3 2x \, dx$

سوال 62: $\int \tan^4(x/2) \, dx$

سوال 63: $\int 8 \cot^4 t \, dt$

سوال 64: $\int 4 \cot^3 2t \, dt$

سوال 65: $\int 2 \sec^3 \pi x \, dx$

سوال 66: $\int \frac{1}{2} \csc^3 \frac{x}{2} \, dx$

سوال 67: $\int 3 \sec^4 3x \, dx$

سوال 68: $\csc^4 \frac{\theta}{3} \, d\theta$

سوال 69: $\int \csc^5 x \, dx$

سوال 70: $\int \sec^5 x \, dx$

سوال 71: $\int 16x^3 (\ln x)^2 \, dx$

سوال 72: $\int (\ln x)^3 \, dx$

قوت نما ضرب x کے طاقت
سوال 73 تا سوال 80 کو جدول کے کلیات 103 تا 106 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 73: $\int x e^{3x} dx$

سوال 74: $\int x e^{-2x} dx$

سوال 75: $\int x^3 e^{x/2} dx$

سوال 76: $\int x^2 e^{\pi x} dx$

سوال 77: $\int x^2 2^x dx$

سوال 78: $\int x^2 2^{-x} dx$

سوال 79: $\int x \pi^x dx$

سوال 80: $\int x 2^{\sqrt{2}x} dx$

بدل اور کلیات تخفیف
سوال 81 تا سوال 86 میں بدل (مکنہ تکنیکی) کے بعد کلیات تخفیف استعمال کرتے ہوئے مکمل حل کریں۔

سوال 81: $\int e^t \sec^3(e^t - 1) dt$

سوال 82: $\int \frac{\csc^3 \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta$

سوال 83: $\int_0^1 2\sqrt{x^2 + 1} dx$

سوال 84: $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1-y^2)^{5/2}}$

سوال 85: $\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r} dr$

سوال 86: $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2+1)^{7/2}}$

ہڈلولی تفاعل
سوال 87 تا سوال 92 کو جدول مکمل کی مدد سے حل کریں۔

سوال 87: $\int \frac{1}{8} \sinh^5 3x dx$

$$\int \frac{\cosh^4 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{سوال 88:}$$

$$\int x^6 \cosh 3x dx \quad \text{سوال 89:}$$

$$\int x \sinh 5x dx \quad \text{سوال 90:}$$

$$\int \operatorname{sech}^7 x \tanh x dx \quad \text{سوال 91:}$$

$$\int \operatorname{csch}^3 2x \coth 2x dx \quad \text{سوال 92:}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 93 تا سوال 100 میں کتاب کے آخر میں جدول تکمیل کے کلیات اخذ کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 93: بدل $u = ax + b$ پر کرتے ہوئے کلیہ 9 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمیل حل کریں۔

$$\int \frac{x}{(ax + b)^2} dx$$

سوال 94: تکنیکیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 17 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمیل حل کریں۔

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

سوال 95: تکنیکیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 29 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمیل حل کریں۔

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

سوال 96: تکنیکیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 46 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمیل حل کریں۔

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

سوال 97: درج ذیل کو تکمیل بالخصوص کی مدد سے حل کرتے ہوئے کلیہ 80 اخذ کریں۔

$$\int x^n \sin ax dx$$

سوال 98: تکنیکی تبدیلی پر کرتے ہوئے کلیہ 110 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل مکمل حل کریں۔

$$\int x^n (\ln ax)^m dx$$

سوال 99: تکنیکی تبدیلی پر کرتے ہوئے کلیہ 99 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل مکمل حل کریں۔

$$\int x^n \sin^{-1} ax dx$$

سوال 100: تکنیکی تبدیلی پر کرتے ہوئے کلیہ 101 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل مکمل حل کریں۔

$$\int x^n \tan^{-1} ax dx$$

سوال 101: منحنی $y = \sqrt{x^2 + 20}$ کے محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 102: منحنی $y = x^2, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 103: ربع اول میں لکیر $x = 3$ اور منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ایک خطہ گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

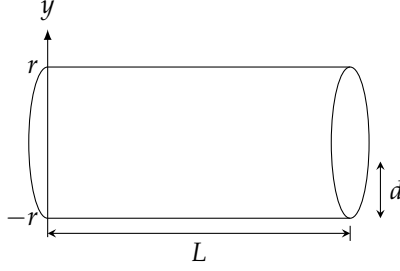
سوال 104: ربع اول میں لکیر $x = 3$ اور منحنی $y = \frac{36}{2x+3}$ کے بیچ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس خطے کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 105: محور x کے گرد منحنی $y = x^2, -1 \leq x \leq 1$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جدول مکمل اور سیکولیٹر کی مدد سے اس کا رقبہ 2 اعشاریہ درستی تک تلاش کریں۔

سوال 106: ایک افقی دائری حوض کا رداس r سنٹی میٹر اور لمبائی L سنٹی میٹر ہے۔ اس میں تیل کی گہرائی d سنٹی میٹر ہے (شکل 8.15)۔ (دیکھیں کہ تیل کا حجم درج ذیل ہے۔

$$H = 2L \int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

(ب) اس مکمل کو حل کریں۔



شکل 8.15: تیل کا حوض (سوال 106)

سوال 107: کسی بھی a اور b کے لئے $\int_a^b \sqrt{x-x^2} dx$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 108: کسی بھی a اور b کے لئے $\int_a^b x\sqrt{x-x^2} dx$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال
کمپیوٹر میں الجبرا کے کئی پروگرام پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک پروگرام میکسما¹⁰ کہلاتا ہے جو نہایت طاقتور پروگرام ہے۔ متغیر x کے تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمیل حاصل کرنے کے لئے میکسما میں $integrate(f, x)$ لکھنا ہو گا۔ اسی طرح a تا b قطعی تکمیل کے لئے $integrate(f, x, a, b)$ لکھنا ہو گا۔ میکسما یا الجبرا کے کسی دوسرے پروگرام کو سیکھ کے اس کی مدد سوال 109 اور سوال 110 کو حل کریں۔

سوال 109:

- ا. $\int x \ln x dx$
ب. $\int x^2 \ln x dx$
ج. $\int x^3 \ln x dx$
د. آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ تکمیل
د. تکمیل $\int x^n \ln x dx, n \geq 1$
کا کلیہ کیا ہو گا؟ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔
گوئی کریں۔ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

سوال 110:

د. آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ مکمل $\int \frac{\ln x}{x^n} dx, n \geq 2$ کا
 کالیہ کیا ہو گا؟ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق
 کریں۔ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

$$ا. \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$ب. \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$ج. \int \frac{\ln x}{x^4} dx$$

سوال 111: (i) درج ذیل مکمل کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں، جہاں n اختیاری مستقل ہے۔

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

کیا آپ کا کمپیوٹر پروگرام اس کو حل کر پاتا ہے؟ (ب) اختیاری مستقل $n = 1, 2, 3, 5, 7$ لیتے ہوئے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ نتائج
 کی پیچیدگی پر تبصرہ کریں۔ (ج) اب $x = \frac{\pi}{2} - u$ پر کر کے نئے اور پرانے مکمل کا مجموعہ لیں۔ اب درج ذیل مکمل کی قیمت کیا ہے؟

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ معمولی سی ریاضیاتی عمل سے مکمل کتنا آسان ہو سکتا ہے۔

8.6 غیر مناسب مکمل

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

