احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

14.1 دوہرا تکملات

ہم xy مستوی میں محدود خطہ پر استمراری تفاعل $f(x, y)$ کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دو گنّا) تکمل اور باب 5 میں متعارف کردہ ایک گنّا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنّا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جا سکتی ہے۔

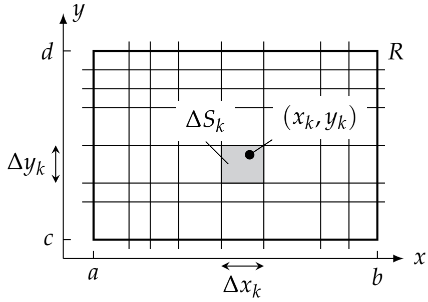
مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل $f(x, y)$ درج ذیل مستطیل خطہ R میں معین ہے۔

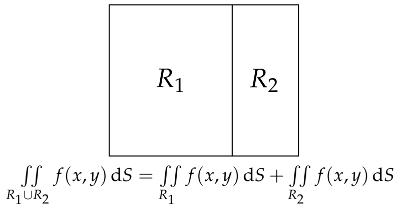
$$R: \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

ہم تصور میں R پر x اور y محور کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو R کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.1)۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ ΔS_k میں ایک نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ J_n لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k \tag{14.1}$$



شکل 14.1: خطہ R کو مستطیل جال چھوٹے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے رقبے $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ہوں گے۔



شکل 14.2: دوہرا تکملات بھی ایک گنا تکملات کی طرح مجموعیت دائرہ کار کی خاصیت رکھتے ہیں۔

اگر پورے R میں f استمراری ہو، تب، ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ Δx اور Δy دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے سے مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو R پر f کا **دوہرا تکمل**[1] کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \quad \text{یا} \quad \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جاتا ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \tag{14.2}$$

واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات $[a,b]$ اور $[c,d]$ کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات 14.2 میں حد کی قیمت، نا تو رقبات ΔS_k کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر ΔS_k میں نقطہ (x_k, y_k) کے مقام پر منحصر ہو گی۔ انفرادی مجموعات J_n کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کا حد آخر میں وہی ایک ہو گا۔استمراری f کے لئے اس حد کی وجودیت اور یکتائی کے ثبوت اعلٰی نصاب میں دیے جاتے ہیں۔دوہرا تکمل کی وجودیت کے لئے f کا استمرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

دوہرا تکملات کے خواص

ایک گنا تکملات کی طرح، دوہرا تکملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لئے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

ا. $\iint\limits_R kf(x,y)\,\mathrm{d}S = k\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

---

[1] double integral

ب. $$\iint\limits_R (f(x,y) \mp g(x,y))\,\mathrm{d}S = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \mp \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$$

ج. اگر R پر $f(x,y) \ge 0$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \ge 0$ ہو گا۔

د. اگر R پر $f(x,y) \ge g(x,y)$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \ge \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$ ہو گا۔

یہ خواص ایک گنّا تکملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ 5.6)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

ھ. $$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

جہاں ایک دوسرے کو نا ڈھانپنے والے مستطیل R_1 اور R_2 خطوں کا اشتراک R ہے (شکل 14.2)۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا تکملات بطور حجم

مثبت $f(x,y)$ کی صورت میں ہم مستطیل خطہ R پر f کے دوہرا تکمل کو ٹھوس منشور نما کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی نچلا سطح R اور بالائی سطح $z = f(x,y)$ ہو گی (شکل 14.3)۔ مجموعہ $J_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta S_k$ میں ہر رکن $f(x_k,y_k)\Delta S_k$ ایک انتصابی مستطیلی منشور نما کا حجم ہو گا جو بنیاد ΔS_k پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینی قیمت ہو گی۔ یوں مجموعہ J_n پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمین ہو گی۔ اس حجم کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{حجم} = \lim J_n = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \tag{14.3}$$

جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج، باب 6 میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔

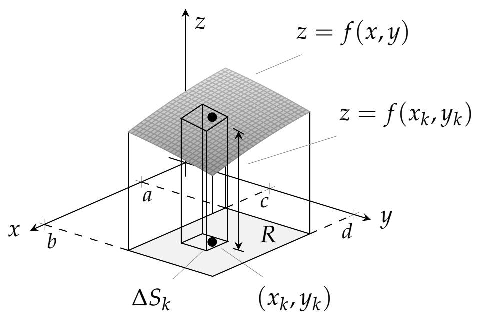
دوہرا تکمل کے حصول کا مسئلہ فوبنی

فرض کریں ہم مستوی xy میں مستطیل خطہ $R: 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 1$ پر مستوی $z = 4 - x - y$ کے نیچے حجم تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ 6.2 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور x کے عمودی ٹکیاں لیں (شکل 14.4) تب حجم

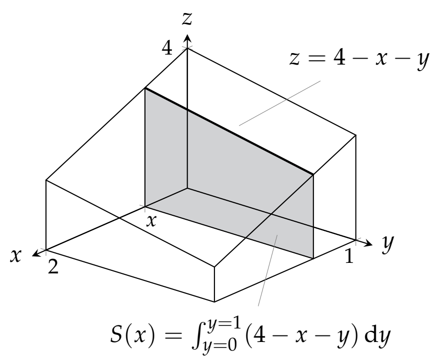
$$\int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.4}$$

ہو گا جہاں x پر رقبہ عمودی تراش $S(x)$ ہے۔ ہم x کی ہر قیمت کے لئے درج ذیل تکمل سے $S(x)$ معلوم کر سکتے ہیں

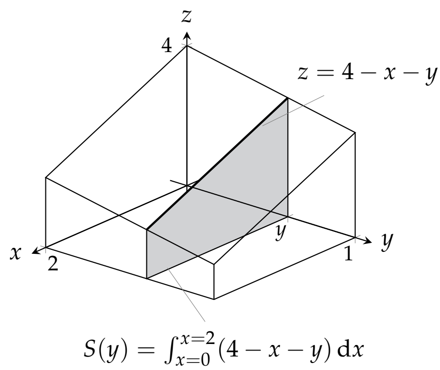
$$S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \tag{14.5}$$



شکل 14.3: ٹھوس جسم کو تخمینی طور پر متعدد مستطیل منشور نما سے ظاہر کرتے ہوئے ہم زیادہ عمومی منشور نما کے حجم کو بطور دوہرا تکمل تعین کر سکتے ہیں۔ یہاں منشور کا حجم R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمل ہو گا۔



شکل 14.4: رقبہ عمودی تراش $S(x)$ حاصل کرنے کے لئے ہم x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔



شکل 14.5: رقبہ عمودی تراش $S(y)$ حاصل کرنے کے لئے ہم y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

جو منحنی $z=4-x-y$ کے نیچے، x پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہو گا۔ رقبہ $S(x)$ کے حصول میں x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 14.3 اور مساوات 14.4 کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہو گا۔

(14.6)
$$\begin{aligned}
\text{حجم} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\frac{7}{2} - x \Big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5
\end{aligned}$$

اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ، جسے **بار بار تکمل**[2] کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے x کو مستقل ٹھہراتے ہوئے y کے لحاظ سے $4-x-y$ کا تکمل $y=0$ تا $y=1$ لیں اور اس کے بعد y کو مستقل ٹھہراتے ہوئے، x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $x=0$ تا $x=2$ لیں۔

اگر ہم محور y کے عمودی ٹکیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا (شکل 14.5)؟ ایسی صورت میں ایک علامتی عمودی تراش رقبہ، y کا تفاعل ہو گا:

$$S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4-x-y)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6-2y \tag{14.7}$$

یوں پورے جسم کا حجم

$$\text{حجم} = \int_{y=0}^{y=1} S(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1} (6-2y)\,\mathrm{d}y = \Big[6y - y^2 \Big]_0^1 = 5 \tag{14.8}$$

ہو گا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

ہم اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$\text{حجم} = \int_0^1 \int_0^2 (4-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

---

[2] repeated integral

لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے $4-x-y$ کا تکمل $x=0$ تا $x=2$ لیں۔ اس کے بعد x کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $y=0$ تا $y=1$ لیں۔ اس بار ہم بار بار تکمل کے حصول میں پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں جو مساوات 14.6 میں تکمل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ $R:0\leq x\leq 2,\,0\leq y\leq 1$ پر درج ذیل دوہرا تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint\limits_R (4-x-y)\,\mathrm{d}S$$

اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں تکمل اس دوہرا تکمل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا تکمل، کسی بھی ترتیب سے، بار بار تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (جناب فوبنی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

مسئلہ 14.1: **مسئلہ فوبینی (پہلا روپ)**
اگر مستطیل خطہ $R:a\leq x\leq b,\,c\leq y\leq d$ پر $f(x,y)$ استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

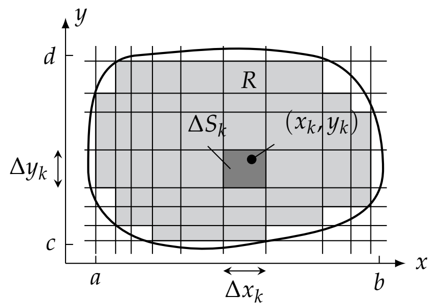
مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا تکمل کی قیمت بار بار تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں دوہرا تکمل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے لحاظ سے تکمل لے سکتے ہیں۔

مسئلہ فوبنی مزید کہتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بار بار تکمل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کار آمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم جلد ایک مثال میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم x محور یا y محور کے عمودی سطحیں لے کر ٹکیاں کاٹ سکتے ہیں۔

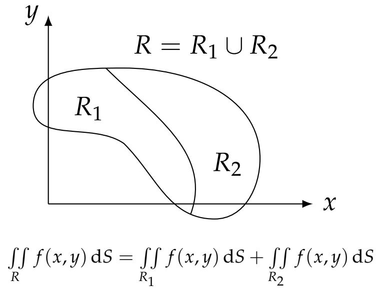
مثال 14.1: خطہ $R:0\leq x\leq 2,\,-1\leq y\leq 1$ میں $f(x,y)=1-6x^2y$ کے دوہرا تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: مسئلہ فوبنی کے تحت درج ذیل ہو گا:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S&=\int_{-1}^1\int_0^2(1-6x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\Big[x-2x^3y\Big]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1(2-16y)\,\mathrm{d}y=\Big[2y-8y^2\Big]_{-1}^1=4\end{aligned}$$



شکل 14.6: غیر مستطیل محدود خطہ کو مستطیل جال سے خانہ بند کیا گیا ہے۔



شکل 14.7: مستطیل خطہ کی مجموعیت کی خاصیت ان غیر مستطیل خطوں کے لئے بھی کارآمد ہے جن کی پوری سرحد استمراری منحنیات سے بنی ہو۔

تکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \Big[y-3x^2y^2\Big]_{y=-1}^{y=1}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2\Big[(1-3x^2)-(-1-3x^2)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2\,\mathrm{d}x = 4\end{aligned}$$

□

آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا تکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسما[3] میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

درکار دوہرا تکمل	میکسما احکامات
$\iint x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	integrate(integrate(x^2*y, x), y);
$\int_{-\pi/3}^{\pi/4}\int_0^1 x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	integrate(integrate($x*\cos(y), x, 0, 1$), $y, -\%pi/3, \%pi/4$);

محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات

محدود غیر مستطیل خطہ پر تفاعل $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی R پر مستطیل جال بچھاتے ہیں (شکل 14.6) لیکن جزوی مجموعہ میں صرف ان چھوٹے رقبوں $\Delta S=\Delta x\Delta y$ کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہیں۔ ہم

[3] wxMaxima

ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ ΔS_k میں کوئی نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

اس مجموعہ میں اور مستطیل خطے پر مجموعہ (مساوات 14.1) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام ΔS_k مل کر خطہ R کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے ہیں۔البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو، J_n میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور R کا زیادہ سے زیادہ حصہ J_n میں شامل ہو گا۔ اگر f استمراری ہو اور R کی سرحد، متغیر x کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل اور (یا) متغیر y کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کی ترسیمات، ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر مختارانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ J_n کا حد موجود ہو گا۔ ہم اس حد کو R پر f کا **دوہرا تکمل** کہتے ہیں:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum f(x,y_k)\Delta S_k$$

یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

غیر مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کے دوہرا تکملات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی ہے کہ اگر R کو ایسے دو خطوں R_1 اور R_2 میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہوں (مثال کے لئے شکل 14.7 دیکھیں) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

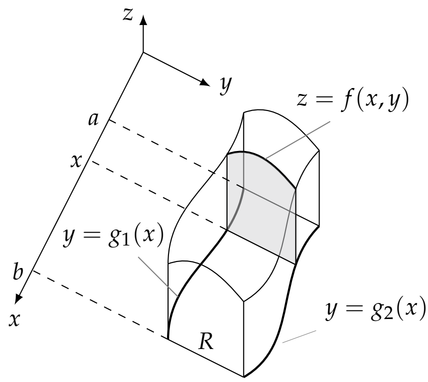
ہم R پر استمراری اور مثبت f کی صورت میں R اور $z = f(x,y)$ کے بیچ ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کرتے ہیں۔

اگر شکل 14.8 میں مستوی xy میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کی "بالائی" حد $y = g_2(x)$ ، "زیریں" حد $y = g_1(x)$ ، اور اطراف کے حدود خط $x = a$ اور خط $x = b$ ہوں تب ہم حجم H کو ٹکیوں کی ترکیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے رقبہ عمودی تراش تلاش کرتے ہیں

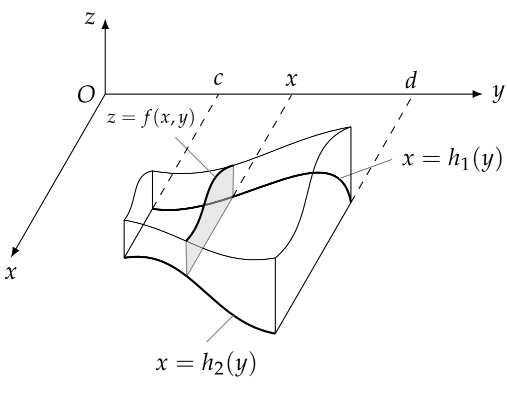
$$S(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

اور اس کے بعد $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیتے ہوئے بار بار تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{14.9}$$



شکل 14.8: سایہ دار انتصابی ٹکیہ کا رقبہ $S(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کرنے کے لئے ہم $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیں گے۔



شکل 14.9: سایہ دار ٹکیہ کا رقبہ $S(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ ہے۔
ٹھوس جسم کا حجم $\int_c^d S(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔

اسی طرح اگر شکل 14.9 میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کے حدود $x = h_2(y)$ ، $x = h_1(y)$ اور خط $y = c$ اور $y = d$ ہوں تب ٹکیوں کی ترکیب سے بار بار تکمل سے حجم تلاش کیا جا سکتا ہے:

$$H = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{14.10}$$

ہم نے دیکھا کہ مساوات 14.9 اور مساوات 14.9، جو R پر f کے دوہرا تکمل ہیں، دونوں حجم دیتے ہیں۔ اس کی وجہ مسئلہ فوبینی کی درج ذیل زیادہ مضبوط صورت ہے۔

مسئلہ 14.2: **مسئلہ فوبینی (مضبوط روپ)**
فرض کریں خطہ R پر f استمراری ہے۔

ا. اگر R کو $a \le x \le b$ ، $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[a, b]$ پر g_1 اور g_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x, y) \, \mathrm{d}S = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

ب. اگر R کو $c \le y \le d$ ، $h_1(y) \le y \le h_2(y)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[c, d]$ پر h_1 اور h_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

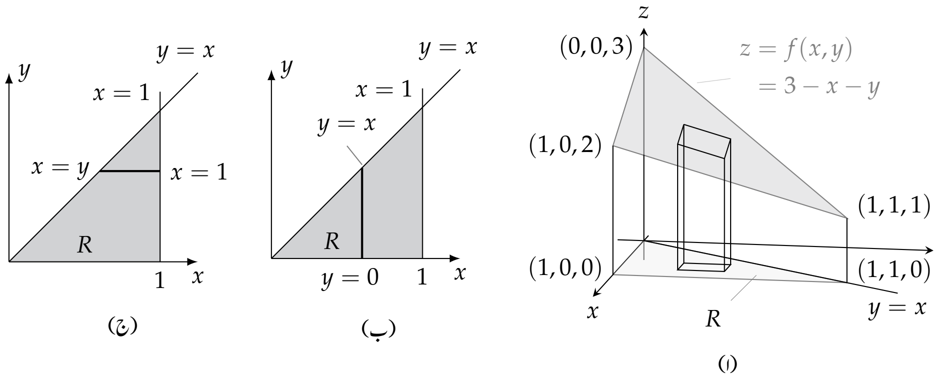
$$\iint\limits_R f(x, y) \, \mathrm{d}S = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

مثال 14.2: ایک منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں ایک مثلث ہو، جس کے اضلاع محور x ، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ ہوں اور جس کا راس درج ذیل مستوی میں پایا جاتا ہو، کا حجم تلاش کریں۔

$$z = f(x, y) = 3 - x - y$$

حل: ہم دیکھتے ہیں (شکل 14.10-ا) کہ 0 اور 1 تک کسی بھی x کے لئے y کی قیمت $y = 0$ تا $y = x$ ہو گی (شکل 14.10-ب)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1 \end{aligned}$$



شکل 14.10: منشور کا حجم (مثال 14.2)

تکملات کی ترتیب الٹ کرنے سے درج ذیل ہو گا (شکل 14.10-ج)۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1
\end{aligned}$$

دونوں تکملات کے جواب ایک جیسے ہیں۔ہمیں یہی توقع تھی۔ □

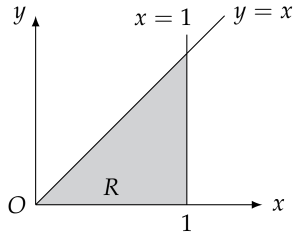
اگرچہ مسئلہ فوبنی ہمیں یقین دھیانی کرتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت بار بار تکمل میں کسی بھی ترتیب سے تکملات لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے، حقیقت میں ایک تکمل کا حصول دوسرے سے آسان ہو سکتا ہے۔ اگلی مثال میں آپ ایسی صورت حال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.3: مستوی xy میں محور x، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}S$$

حل: تکمل کا خطہ شکل 14.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لیں تب

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(y\frac{\sin x}{x}\right]_{y=0}^{y=x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(1) + 1 \approx 0.46
\end{aligned}$$



شکل 14.11: تکمل کا دائرہ کار برائے مثال 14.3

ہو گا۔ اگر ہم تکمل لینے کی ترتیب الٹ کریں تب

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

ہو گا اور چونکہ $\int ((\sin x) / x) \, \mathrm{d}x$ کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہیں۔

قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں کہ کس ترتیب سے تکمل لینے سے ہمیں آسانی ہو گی لہٰذا اس پر زیادہ مت سوچیں اور کسی ایک ترتیب سے حل کرنے کی کوشش کریں اور اگر مشکلات پیش آئیں تب تکمل کی ترتیب الٹ کر کے دوبارہ کوشش کریں۔ □

تکمل کی حدوں کی تلاش

دوہرا تکمل کی قیمت کے حصول میں سب سے مشکل کام تکمل کی حدیں تلاش کرنا ہو سکتا ہے۔ خوش قسمتی سے ایک اچھا طریقہ کار موجود ہے جس پر ہم چل سکتے ہیں۔

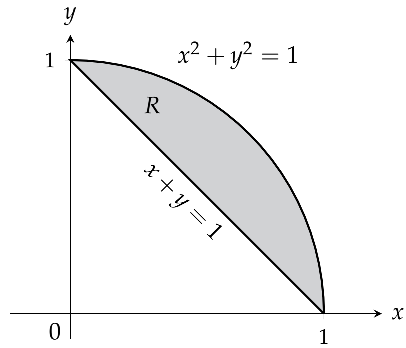
تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار

(ا) خطہ R پر $\iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لینے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

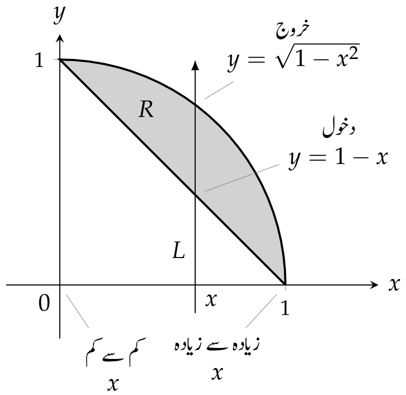
1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.12-ا)۔

2. تکمل کی y حدیں: بڑھتی y رخ خطہ R سے گزرتا ہوا انتصابی خط L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی y حدیں ہوں گی (شکل 14.12-ب)۔

3. تکمل کی x حدیں: متغیر x کی وہ قیمتیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام انتصابی لکیریں شامل ہوں (شکل 14.12-ب)۔ یہ قیمتیں تکمل کی x حدیں ہوں گی۔



(ا) تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں۔



(ب) خطہ R میں جس نقاط پر انتصابی لکیر داخل اور خارج ہوتی ہے، ان کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے y حد ہوں گے۔ تمام انتصابی لکیروں کو شامل کرنے والے x حدود کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے x حد ہوں گے۔

شکل 14.12: تکمل کے حدوں کی تلاش۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

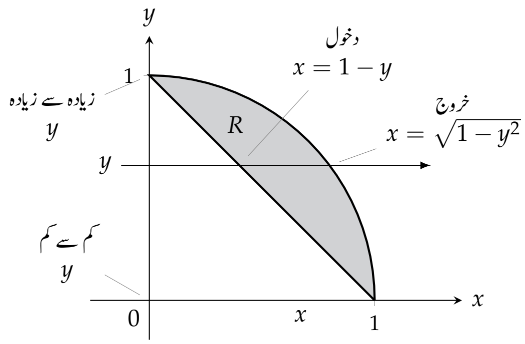
(ب) اسی دوہرا تکمل کو بطور بار بار تکمل حل کرتے ہوئے، ترتیب الٹ کرنے سے، انتصابی لکیروں کی بجائے افقی لکیریں استعمال کریں (شکل 14.13)۔ تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

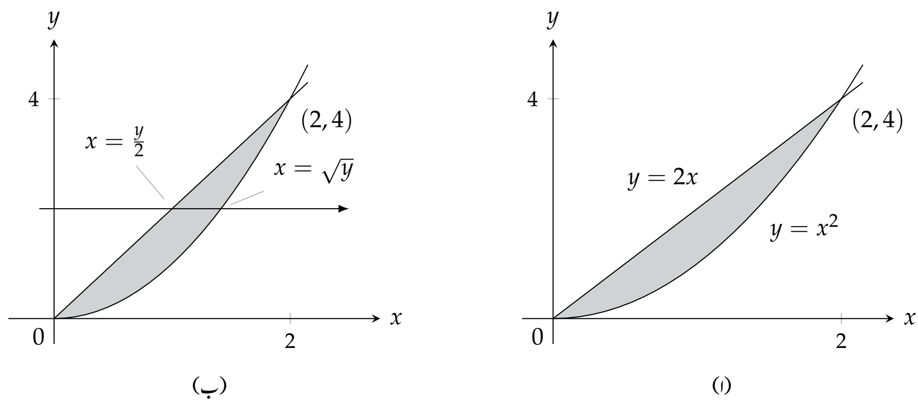
مثال 14.4: درج ذیل تکمل کے خطہ تکمل کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے اس کا مساوی تکمل لکھیں۔

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل: تکمل کا خطہ، عدم مساوات $x^2 \le y \le 2x$ اور $0 \le x \le 2$ دیتے ہیں۔ یوں اس خطہ کی حدیں، خط $x = 0$ ، خط $x = 2$ اور منحنیات $y = x^2$ اور $y = 2x$ ہوں گی (شکل 14.14-ا)۔



شکل 14.13: بار بار تکمل میں ترتیب الٹ کرنے سے R پر افقی لکیریں کھینچی جائیں گی۔



شکل 14.14: دو منحنیات کے بیچ خطہ (مثال 14.4)

تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے ہم اس خطہ پر افقی لکیریں کھینچتے ہیں۔ یہ لکیریں اس خطہ میں $x = \frac{y}{2}$ پر داخلی ہوتی ہیں اور $x = \sqrt{y}$ پر اس سے خارج ہوتی ہیں۔ ان تمام افقی لکیریں کو شامل کرنے کے لئے ہمیں $y = 0$ سے $y = 4$ تک لینا ہو گا (شکل 14.14-ب)۔ یوں متبادل تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

ان دونوں تکملات کے جواب 8 ہے۔ $\square$

سوالات

تکمل کے خطہ کی تلاش اور دوہرا تکملات

سوال 1 تا سوال 10 میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 2: $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y - 2xy) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 3: $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x+y+1) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

سوال 4: $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

سوال 5: $\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 6: $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 7: $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

سوال 8: $\int_1^2 \int_y^{y^2} \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

سوال 9: $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

سوال 10: $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 11 تا سوال 16 میں f کو دیے ہوئے خطہ پر تکمل کریں۔

سوال 11: ربع اول میں لکیر $y = x$ ، $y = 2x$ ، $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ خطہ پر تفاعل $f(x,y) = \frac{x}{y}$ کا تکمل۔

سوال 12: چکور $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ پر تفاعل $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ کا تکمل۔

سوال 13: مثلث خطہ جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں میں تفاعل $f(x,y) = x^2 + y^2$ کا تکمل۔

سوال 14: مستطیل $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$ پر تفاعل $f(x,y) = y \cos xy$ کا تکمل۔

سوال 15: مستوی uv کے ربع اول میں لکیر $u + v = 1$ کے نیچے تفاعل $f(u,v) = v - \sqrt{u}$ کا تکمل۔

سوال 16: مستوی st کے ربع اول میں منحنی $s = \ln t$ کے اوپر جانب $t = 1$ سے $t = 2$ تک تفاعل $f(s,t) = e^s \ln t$ کا تکمل۔

سوال 17 تا سوال 20 میں تکملات دیے گئے ہیں۔ ان تکملات کے خطوں کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 17: $\int_{-2}^{0} \int_{v}^{-v} 2 \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}v$ مستوی pv

سوال 18: $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s$ مستوی st

سوال 19: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{0}^{\sec t} 3 \cos t \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t$ مستوی tu

سوال 20: $\int_{0}^{3} \int_{-2}^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$ مستوی uv

تکمل کی الٹ ترتیب

سوال 21 تا سوال 30 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر معادل الٹ ترتیب کا تکمل لکھیں۔

سوال 21: $\int_{0}^{1} \int_{2}^{4-2x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 22: $\int_{0}^{2} \int_{y-2}^{0} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 23: $\int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 24: $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 25: $\int_0^1 \int_1^{e^x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 26: $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 27: $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 28: $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 29: $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 30: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

دوہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 31 تا سوال 40 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی ترتیب تعین کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 31: $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 32: $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 33: $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 34: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 35: $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 36: $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^{1} e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 37: $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 38: $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{y^4+1}$

سوال 39: $\iint\limits_R (y-2x^2)\,\mathrm{d}S$ جہاں R چکور $|x|+|y|=1$ کا اندرونی خطہ ہے۔

سوال 40: $\iint\limits_R xy\,\mathrm{d}S$ جہاں لکیر $y=x$ ، $y=2x$ اور $x+y=2$ کے بیچ خطہ R ہے۔

سطح $z=f(x,y)$ کے نیچے حجم

سوال 41: مستوی xy میں لکیر $y=x$ ، $x=0$ اور $x+y=2$ کے بیچ مثلث کے اور قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ کے نیچے خطہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 42: ایک ٹھوس جسم اوپر سے بیلن $z=x^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں لکیر $y=x$ اور قطع مکافی $y=2-x^2$ کے بیچ مثلث خطہ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 43: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ مستوی xy میں لکیر $y=3x$ اور قطع مکافی $y=4-x^2$ کے بیچ خطہ ہے جبکہ اس کا بالائی سر مستوی $z=x+4$ پر مشتمل ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 44: ثُمن اول میں محددی مستویات، بیلن $x^2+y^2=4$ اور مستوی $z+y=3$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 45: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x=3$ اور قطع مکافی بیلن $z=4-y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 46: ثُمن اول سے سطح $z=4-x^2-y$ ایک ٹھوس جسم کاٹتی ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 47: ثُمن اول سے بیلن $z=12-3y^2$ اور مستوی $x+y=2$ ایک پچر کاٹتے ہیں۔ اس پچر کا حجم تلاش کریں۔

سوال 48: چکور ستون $|x|+|y|\le 1$ سے مستویات $z=0$ اور $3x+z=3$ جس ٹھوس جسم کو کاٹتے ہیں اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 49: ایک ٹھوس جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x=2$ اور $x=1$ ، اطراف سے بیلن $y=\mp\frac{1}{x}$ ، اوپر سے مستوی $z=x+1$ اور نیچے سے مستوی $z=0$ میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 50: ایک جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = \pm\frac{\pi}{3}$ ، اطراف سے بیلن $y = \mp \sec x$ ، اوپر سے بیلن $z = 1 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

غیر محدود خطوں پر تکملات

سوال 51 تا سوال 54 میں غیر مناسب تکملات کو بار بار تکمل تصور کرتے ہوئے ان کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 51: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 52: $\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 53: $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 54: $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

دوہرا تکملات کی تخمین

سوال 55 اور سوال 56 میں تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کے خطہ R کو انتصابی خط $x = a$ اور افقی خط $y = c$ خانہ بند کرتی ہیں۔ ہر ذیلی مستطیل میں دکھائے گئے (x_k, y_k) لیتے ہوئے درج ذیل تخمین استعمال کر کے دوہرا تکملات کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \approx \sum_{k=1}^n f(x_k,y_k)\Delta S_k$$

سوال 55: تفاعل $f(x,y) = x + y$ اور خطہ R ، جو نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ اور محور x کے بیچ ہے۔ خانہ بندی $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ اور $y = 0, 1/2, 1$ لیں۔ نقطہ (x_k, y_k) کو k واں خانے کا نچلا بایاں کونا لیں بشرطیکہ یہ مستطیل R کے اندر پایا جاتا ہو۔

سوال 56: تفاعل $f(x,y) = x + 2y$ ہے جبکہ اور دائرہ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ کا اندرونی خطہ R ہے۔ خانہ بندی $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ اور $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ لیں۔ بشرطیکہ k واں مستطیل R میں پایا جاتا ہو، k ویں مستطیل کے وسطانی مرکز کو (x_k, y_k) لیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 57: قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ کو شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے چھوٹے ٹکڑے پر $f(x,y) = \sqrt{4-x^2}$ کا تکمل لیں۔

سوال 58: لا متناہی مستطیل $2 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq 2$ پر $f(x,y) = \frac{1}{(x^2-x)(y-1)^{2/3}}$ کا تکمل لیں۔

سوال 59: ایک ٹھوس (غیر دائری) قائمہ بیلن کا قاعدہ xy مستوی ہے جبکہ اس کی بالائی سرحد قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ ہے۔ اس بیلن کا حجم

$$H = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہے۔ خطہ R کا خاکہ بنائیں اور بیلن کے حجم کو، تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے، ایک بار بار تکمل کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔

سوال 60: درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کو ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔)

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x)\,\mathrm{d}x$$

سوال 61: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 62: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 63: کیا استمراری تفاعل $f(x,y)$ کا مستوی xy میں مستطیل خطہ پر تکمل کی ترتیب بدلتے ہوئے مختلف نتائج کا حصول ٹھیک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ بتائیں۔

سوال 64: ایک مثلث جس کے راس $(0,1)$ ، $(2,0)$ اور $(1,2)$ ہوں پر استمراری تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت درکار ہے۔ آپ یہ قیمت کیسے حاصل کریں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 65: درج ذیل تعلق کو ثابت کریں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

سوال 66: درج ذیل غیر مناسب تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 67 تا سوال 70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے اعدادی تراکیب سے دوہرا تکملات کی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال 67: $\int_1^3 \int_1^x \frac{1}{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 68: $\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 69: $\int_0^1 \int_0^1 \tan^{-1} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 70: $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت

اس حصہ میں دوہرا تکملات استعمال کرتے ہوئے مستوی میں محدود خطوں کے رقبات اور ان خطوں پر باریک چادروں کی کمیت، معیار اثر، مرکز کمیت، اور **حرکت دواری**[4] کے رداس معلوم کرنا دکھایا جائے گا۔ ان کا حساب باب 6 کے حساب کی طرح ہو گا لیکن اب ہم زیادہ قسم کے اشکال کے لئے حساب کر پائیں گے۔

---

[4] gyration

مستوی میں محدود خطوں کے رقبات

گزشتہ حصہ میں خطہ R پر دوہرا تکمل کی تعریف میں $f(x, y) = 1$ لینے سے جزوی مجموعات کی تخفیف شدہ صورت

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \tag{14.11}$$

حاصل ہو گی۔ یہ تخمینی طور پر R کا رقبہ ہو گا۔ جوں جوں شکل 14.15 میں Δx اور Δy صفر کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں توں توں R کے زیادہ سے زیادہ حصہ کو تمام ΔS_k مل کر کو ڈھانپتے ہیں، اور ہم R کی رقبہ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\text{رقبہ} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{14.12}$$

تعریف: بند محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{14.13}$$

□

اس باب کے دیگر تعریفات کی طرح، رقبے کی یک متغیری تعریف کے لحاظ سے، جو ہم پہلے پیش کر چکے ہیں، موجودہ تعریف زیادہ اقسام کے خطوں پر قابل اطلاق ہو گی، لیکن، جن خطوں پر دونوں تعریفات قابل اطلاق ہوں، وہاں موجودہ تعریف گزشتہ تعریف کے عین موافق ہو گی۔

مساوات 14.13 میں دی گئی تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم R پر $f(x, y) = 1$ لیتے ہیں۔

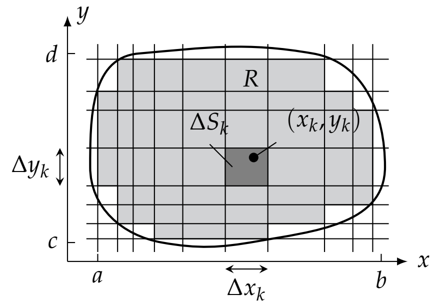
مثال 14.5: ربع اول میں $y = x$ اور $y = x^2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ (شکل 14.16) بنا کر رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

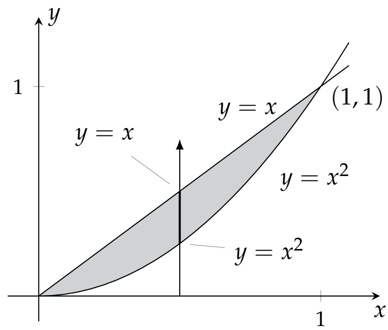
$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

□

مثال 14.6: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = x + 2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔



شکل 14.15: ایک خطہ کے رقبے کی تلاش میں پہلا قدم خطے کی اندرون کی خانہ بندی ہے۔



شکل 14.16: قطع مکافی اور لکیر کے بیچ رقبہ (مثال 14.5)۔

حل: اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب ہمیں اس خطہ کو R_1 اور R_2 میں تقسیم کر کے درج ذیل دو علیحدہ علیحدہ تکملات کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ا)۔

$$S = \iint\limits_{R_1} \mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} \mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس کے برعکس تکمل کی ترتیب الٹ کرنے سے صرف ایک تکمل

$$S = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ب)۔ ہم اسی سے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

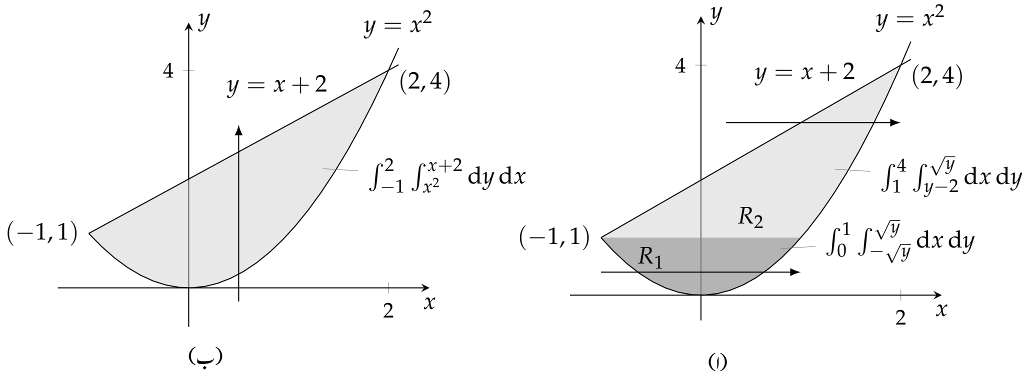
$$S = \int_{-1}^{2} \Big[y\Big]_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

□

اوسط قیمت

بند وقفہ پر قابل تکمل واحد متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس وقفہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم لمبائی وقفہ ہو گی۔ بند اور محدود خطہ پر، جس کا رقبہ قابل ناپ ہو، معین قابل تکمل دو متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس خطہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم خطہ کا رقبہ ہو گی۔ اگر خطہ R اور تفاعل f ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\text{پر } R \text{ کی اوسط قیمت } f = \frac{1}{R \text{ کا رقبہ}} \iint\limits_R f\,\mathrm{d}S \tag{14.14}$$



شکل 14.17: (ا) اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب رقبے کے حصول کے لئے دو تکملات کا مجموعہ درکار ہو گا۔ (ب) البتہ پہلے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے صرف ایک تکمل سے حاصل ہو گا۔

اگر خطہ R پر باریک (پتلی) چادر کی کثافت رقبہ f ہو تب R پر f کے دوہرا تکمل کو R کے رقبہ سے تقسیم کرنے سے اس چادر کی اوسط کثافت حاصل ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی رقبہ ہو گی۔ اگر نقطہ (x, y) سے مقررہ نقطہ N تک فاصلہ $f(x, y)$ ہو تب R پر f کی اوسط قیمت، N سے R کے نقاط کا اوسط فاصلہ ہو گا۔

مثال 14.7: مستطیل $R: 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$ پر $f(x, y) = x \cos xy$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: خطہ R پر f کا تکمل

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1} x\cos xy\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\Big[\sin xy\Big]_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^{\pi}(\sin x - 0)\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} 1 + 1 = 2$$

ہو گا جبکہ مستطیل R کا رقبہ π ہے۔یوں R پر f کی اوسط قیمت $\frac{2}{\pi}$ ہو گی۔ □

مراکز کمیت کے معیار اثر اول اور دوم

باریک چادروں کی کمیت اور معیار اثر تلاش کرنے کے لئے ہم باب 6 کے کلیات کی طرح کلیات استعمال کرتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ دوہرا تکمل کی بنا اب ہم زیادہ اشکال اور کثافتی تفاعل کو عمل میں لا سکتے ہیں۔ جدول میں ان کلیات درج ذیل ہیں۔

مستوی xy میں باریک چادر کی کمیت، معیار اثر اول[5]، معیار اثر دوم[6] اور رداس دوار[7] کے کلیات

کثافت: $\delta(x,y)$

کمیت: $M = \iint \delta(x,y)\,\mathrm{d}S$

معیار اثر اول: $M_x = \iint y\delta(x,y)\,\mathrm{d}S, \quad M_y = \iint x\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$

مرکز کمیت: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر):

$$I_x = \iint y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$$ بلحاظ محور x

$$I_y = \int x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$$ بلحاظ محور y

$$I_L = \iint r^2(x,y)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S,$$ (جہاں L سے (x,y) کا فاصلہ $r(x,y)$ ہے) بلحاظ خط L

$$I_0 = \int (x^2+y^2)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S = I_x + I_y$$ (قطبی معیار اثر) بلحاظ مبدا

رداس دوار:

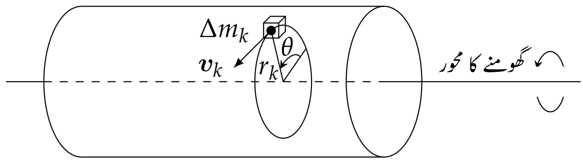
$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$ بلحاظ محور x

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$$ بلحاظ محور y

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$ بلحاظ مبدا

---

[5] first moment
[6] second moment
[7] radius of gyration



شکل 14.18: گھومتے ہوئے دھرے میں ذخیرہ توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو متعدد چھوٹے کمیتوں میں تقسیم کر کے ہر تمام چھوٹے کمیتوں کی حرکی توانائی کا مجموعہ لیتے ہیں۔

ان کلیات کا استعمال مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے گا۔

معیار اثر اول M_x اور M_y اور معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر) I_x اور I_y میں ریاضیاتی فرق یہ ہے کہ معیار اثر دور "بیرم کے بازوؤں" کے فاصلوں، x اور y، کا مربع لیتا ہے۔

معیار اثر I_0 کو **قطبی معیار اثر**[8] بھی کہتے ہیں۔ کمیتی کثافت $\delta(x,y)$ (کمیت فی اکائی رقبہ) ضرب x^2+y^2، جو نمائندہ نقطہ (x,y) سے مبدا تک فاصلہ ہے، کا تکمل قطبی معیار اثر کہلاتا ہے۔ چونکہ $I_0 = I_x + I_y$ ہے لہٰذا ان میں سے کسی دو کے حصول کے بعد تیسرے کو اس تعلق سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ (معیار اثر I_0 بعض اوقات I_z لکھا جاتا اور بلحاظ محور z معیار اثر کہلاتا ہے۔ تب تماثل $I_z = I_x + I_y$ **مسئلہ عمودی محور**[9] کہلاتا ہے۔)

رداس دوار R_x کی تعریف درج ذیل مساوات ہے۔

$$I_x = MR_x^2$$

رداس دوار ہمیں بتاتا ہے کہ محور x کتنا دور پوری چادر کی کمیت مجمد کرتے ہوئے وہی I_x حاصل ہو گا۔ رداس دوار استعمال کرتے ہوئے ہم معیار اثر کو کمیت اور لمبائی کی صورت میں لکھ پاتے ہیں۔ رداس R_y اور R_0 کی تعریفات بھی اسی طرح ہیں:

$$I_y = MR_y^2, \quad I_0 = MR_0^2$$

ہم ان تعریفی مساوات کے جذر سے R_x، R_y اور R_0 کے کلیات لکھتے ہیں۔

ہمیں معیار اثر میں کیا دلچسپی ہے؟ ایک جسم کا پہلا معیار ا اثر ہمیں ثقلی میدان میں اس جسم کے توازن اور مختلف محوروں کے لحاظ سے اس کی قوت مروڑ کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ اب اگر یہ جسم گھومتا ہوا دھرا ہو تب ہمیں اس میں ذخیرہ توانائی جاننے میں زیادہ دلچسپی ہو گی تا کہ ہم جان سکیں کہ اس کو روکنے کے لئے یا اس کو کسی خاص زاویاتی رفتار تک پہنچانے میں کتنی توانائی درکار ہو گی۔ایسی صورت میں معیار اثر دوم استعمال ہو گا۔

---

[8] polar moment
[9] Perpendicular Axis Theorem

اس دھرا کو متعدد چھوٹی کمیتوں Δm_k میں تقسیم کریں اور گھومنے کے محور سے k ویں کمیتی ٹکڑے کے فاصلہ کو r_k سے ظاہر کریں (شکل 14.18)۔ اگر دھرا کی زاویاتی سمتی رفتار $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ریڈیئن فی سیکنڈ ہو، تب اس ٹکڑے کا کمیتی مرکز اپنے مدار میں خطی رفتار

$$v_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_k\theta) = r_k\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_k\omega$$

سے حرکت کرے گا۔اس ٹکڑے کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k(r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\Delta m_k \tag{14.15}$$

ہو گی۔دھرا کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\sum\frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\Delta m_k \tag{14.16}$$

ہو گی۔دھرا کو زیادہ سے زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے اس مجموعہ کی قیمت ایک حد تک پہنچتی ہے جسے تکمل

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \int\frac{1}{2}\omega^2 r^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2\int r^2\,\mathrm{d}m \tag{14.17}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ جزو

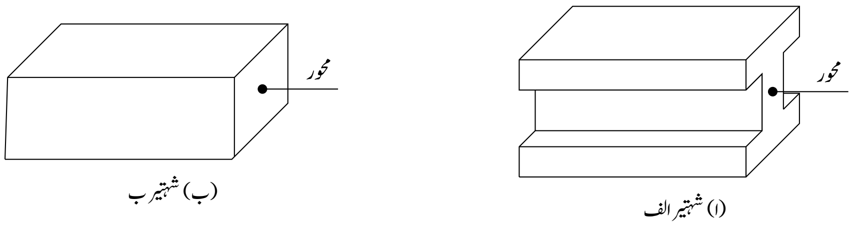
$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m \tag{14.18}$$

درحقیقت گھومنے کے محور کے لحاظ سے دھرے کا جمودی معیار اثر ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{14.19}$$

ایک دھرا، جس کا جمودی معیار اثر I ہو، کو ω زاویاتی سمتی رفتار تک پہنچانے کے لئے $\frac{1}{2}I\omega^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس رفتار پر چلتے ہوئے دھرا کو روکنے کے لئے ہمیں دھرا سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ کمیت m کی گاڑی کو سمتی رفتار v تک پہنچانے کے لئے اس کو $\frac{1}{2}mv^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس کو روکنے کے لئے اس گاڑی سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ دھرے کا جمودی معیار اثر گاڑی کی کمیت کا مماثل ہے۔ گاڑی کی رفتار تیز یا کم کرنے کو گاڑی کی کمیت مشکل بناتی ہے۔اسی طرح دھرے کی زاویاتی رفتار تیز یا کم کرنے کو دھرے کا جمودی معیار اثر مشکل بناتا ہے۔ جمودی معیار اثر کمیت کے علاوہ کمیت کی تقسیم کا بھی حساب رکھتا ہے۔

بوجھ بردار افقی دھاتی شہتیر کے جھکاو کو بھی جمودی معیار اثر تعین کرتا ہے۔ شہتیر کا اکڑا پن I ضرب ایک مستقل ہوتا ہے، جہاں شہتیر کے افقی محور کے لحاظ سے عمودی تراش کا قطبی معیار اثر I ہے۔ جمودی معیار اثر I کی قیمت جتنی زیادہ ہو، شہتیر اتنا زیادہ اکڑ ہو گا اور اتنا کم جھکے گا۔



شکل 14.19: دونوں شہتیر کا رقبہ عمودی تراش ایک جیسا ہے لیکن شہتیر الف کا جمودی معیار اثر زیادہ ہے لہٰذا شہتیر الف زیادہ اکڑ ہو گا۔

یہی وجہ ہے کہ ہم شکل 14.19-ا میں دکھایا گیا شہتیر استعمال کرتے ہیں نا کہ ایسے شہتیر جن کا عمودی تراش چکور ہو (شکل 14.19-ب)۔ شہتیر کے بالائی اور زیریں لگر زیادہ تر کمیت کو افقی محور سے دور رکھتے ہوئے I کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

جمودی معیار اثر کو سمجھنے کے لئے ایک تجربہ کریں۔ ایک قلم کے دونوں سروں کے ساتھ سکے چپکا کر قلم کو انگلیوں میں تیزی سے آگے پیچھے گھمائیں۔ گھومنے کا رخ تبدیل کرتے وقت آپ کو جو مزاحمت محسوس ہوتی ہے وہ جمودی معیار اثر کی بنا ہے۔ اب ان سکوں کو قلم کے سروں سے دور اور آپس میں قریب کریں۔ قلم اور سکوں کی کمیت تبدیل نہیں ہوئی ہے البتہ اس نظام کا جمودی معیار اثر کم ہو ہے۔ اب آپ دیکھیں گے کہ انہیں آگے پیچھے گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

آپ کہہ سکتے ہیں کہ معیار اثر اول کا تعلق توازن سے ہے جبکہ معیار اثر دوم کا تعلق گھومنے سے ہے۔

مثال 14.8: محور x، لکیر $x = 1$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ تکونی چادر پائی جاتی ہے۔ نقطہ (x, y) پر اس چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ ہے۔ اس چادر کی کمیت، پہلا معیار اثر، مرکز کمیت، جمودی معیار اثر اور محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دوار تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ بنا کر (شکل 14.20) اس پر اتنی معلومات درج کرتے ہیں کہ تکمل کے حد جان سکیں۔

چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y\right]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (24x^2 + 12x)\,\mathrm{d}x = \left[8x^3 + 6x^2\right]_0^1 = 14
\end{aligned}
$$

محور x کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2\right]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[7x^4 + 4x^3\right]_0^1 = 11
\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 10$$

مرکز کمیت کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3\right]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[8x^5 + 4x^4\right]_0^1 = 12
\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

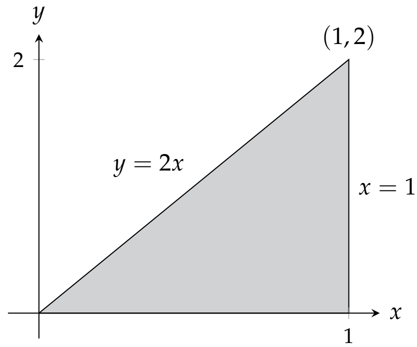
$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{39}{5}$$

ہم I_x اور I_y کی قیمتوں سے I_0 کی قیمت کلیہ $I_0 = I_x + I_y$ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

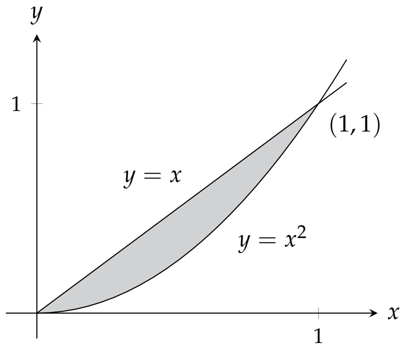
$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}$$

تین رداس دوار درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
R_x &= \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \\
R_y &= \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{39}{70}} \\
R_0 &= \sqrt{\frac{I_0}{M}} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{99}{70}}
\end{aligned}$$



شکل 14.20: خطہ برائے مثال 14.8



شکل 14.21: خطہ برائے مثال 14.9

□

جیومیٹریائی اشکال کے وسطانی مراکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں شمار کنندہ اور نسب نما میں موجود کثافت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے نقطہ نظر سے δ کی قیمت 1 ہو سکتی ہے۔ یوں مستقل δ کی صورت میں مرکز کمیت کا دارومدار جسم کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا ناکہ جسم کے مادہ پر۔ ایسی صورت میں مرکز کمیت عموماً شکل کا **وسطانی مرکز**[10] پکارا جاتا ہے۔ وسطانی مرکز کی تلاش میں ہم $\delta = 1$ لے کر، پہلے کی طرح، معیار اثر اول کو کمیت سے تقسیم کرتے ہوئے $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کرتے ہیں۔

مثال 14.9: ربع اول میں اوپر سے لکیر $y = x$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ ایک خطہ کو محدود کرتے ہیں۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم خطے کا خاکہ بنا کر تکمل کے حد جانتے ہیں (شکل 14.21)۔ اس کے بعد $\delta = 1$ لے کر آگے بڑھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6} \\
M_x &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\Big) \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big]_0^1 = \frac{1}{15} \\
M_y &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

centroid[10]

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم وسطانی مرکز کے محدد دریافت کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = 2, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

نقطہ $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$ اس خطے کا وسطانی مرکز ہو گا۔ $\square$

سوالات

رقبہ بذریعہ دوہرا تکمل

سوال 1 تا سوال 8 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر اس خطے کے رقبہ کو بطور دوہرا بار بار تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 1: محددی محور اور لکیر $x + y = 2$

سوال 2: لکیر $x = 0$ ، $y = 2x$ اور $y = 4$

سوال 3: قطع مکافی $x = -y^2$ اور لکیر $y = x + 2$

سوال 4: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $y = -x$

سوال 5: منحنی $y = e^x$ اور لکیر $y = 0$ ، $x = 0$ اور $x = \ln 2$

سوال 6: ربع اول میں منحنیات $y = \ln x$ ، $y = 2\ln x$ اور لکیر $x = e$

سوال 7: قطع مکافی $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$

سوال 8: قطع مکافی $x = y^2 - 1$ اور $x = 2y^2 - 2$

سوال 9 تا سوال 14 میں مستوی xy میں خطوں کے رقبات کو تکمل یا تکملات کے مجموعوں کی کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔ ان خطوں کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر ان کی مساواتیں لکھیں اور ان نقطوں کی نشاندہی کریں جہاں منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے بعد ان خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 9: $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 10: $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 11: $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 12: $\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 13: $\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14: $\int_0^2 \int_{x^2-4}^{0} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

اوسط قیمت

سوال 15: تفاعل $f(x,y) = \sin(x+y)$ کی اوسط قیمت درج ذیل خطوں پر تلاش کریں۔

ا. مستطیل $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$

ب. مستطیل $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi/2$

سوال 16: کیا چکور $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ یا ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ میں $f(x,y) = xy$ کی اوسط قیمت زیادہ ہو گی؟ ان دونوں خطوں میں اوسط کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 17: چکور $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$ میں قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 18: چکور $\ln 2 \le x \le 2\ln 2,\ \ln 2 \le y \le 2\ln 2$ میں $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

مستقل کثافت

سوال 19: ربع اول میں قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $x = 0$ ، $y = x$ کے بیچ ایک باریک چادر جس کی کثافت $\delta = 3$ ہو پائی جاتی ہے۔اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 20: ربع اول میں محددی محور اور لکیر $x = 3$ اور $y = 3$ کے بیچ مستقل کثافت کی باریک مستطیل چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 21: ربع اول میں محور x ، قطع مکافی $y^2 = 2x$ اور لکیر $x + y = 4$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 22: ربع اول سے لکیر $x + y = 3$ ایک تکونی خطہ کاٹتی ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 23: محور x اور منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 24: ربع اول میں قطع مکافی $y=6x-x^2$ اور لکیر $y=x$ کے بیچ خطے کا رقبہ $\frac{125}{6}$ ہے۔ اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 25: ربع اول سے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ ایک خطہ کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 26: دائرہ $x^2+y^2=4$ کے بیچ کثافت $\delta=1$ کی باریک چادر کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کی I_y اور I_0 دریافت کریں۔

سوال 27: محور x اور قوس $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 28: محور x اور منحنی $y=\frac{\sin^2 x}{x^2}$ کے بیچ وقفہ $\pi\le x\le 2\pi$ پر کثافت $\delta=1$ کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 29: لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز
ربع دوم میں محددی محور اور منحنی $y=e^x$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (کمیت اور معیار اثر کے کلیات میں آپ کو غیر مناسب تکملات استعمال کرنے ہوں گے۔)

سوال 30: لامتناہی چادر کا پہلا معیار اثر
ربع اول میں منحنی $y=e^{-x^2/2}$ کے نیچے کثافت $\delta=1$ کے لامتناہی جسامت کی چادر کا محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 31: قطع مکافی $x=y-y^2$ اور لکیر $x+y=0$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x,y)=x+y$ ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 32: ترخیم $x^2+4y^2=12$ سے قطع مکافی $x=4y^2$ جس چھوٹے حصہ کو کاٹتا ہے، اس کی کثافت $\delta(x,y)=5x$ ہے۔ اس کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 33: محور y اور لکیر $y=x$ اور $y=2-x$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x,y)=6x+3y+3$ ہے۔ اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 34: منحنیات $x=y^2$ اور $x=2y-y^2$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x,y)=y+1$ ہے۔ اس کی کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 35: ربع اول سے خطوط $x = 6$ اور $y = 1$ ایک مستطیل باریک چادر کاٹتے ہیں جس کی کثافت $\delta(x, y) = x + y + 1$ ہے۔ اس کی مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 36: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 37: قطع مکافی $y = x^2$ ، محور x اور لکیر $x = \mp 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 7y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 38: خطوط $x = 0$ ، $x = 20$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1 + x/20$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 39: لکیر $y = x$ ، $y = -x$ اور $y = 1$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔ اس کا قطبی جمودی معیار اثر اور رداس دوار بھی تلاش کریں۔

سوال 40: کثافت $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ لیتے ہوئے سوال 39 کو دوبارہ حل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 41: مستوی xy میں جراثیم کی تعدادی کثافت $f(x, y) = \frac{10000e^y}{1+|x|/2}$ ہے جہاں x اور y کی ناپ سنٹی میٹر میں ہے۔ مستطیل $-5 \le x \le 5,\ -2 \le y \le 0$ میں جراثیم کی کل تعداد تلاش کریں۔

سوال 42: سطح زمین پر کثافت آبادی $f(x, y) = 100(y + 1)$ ہے جہاں x اور y کلومیٹر میں ہیں۔ منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ کل آبادی کتنی ہو گی؟

سوال 43: مستقل کثافت کا ایک برتن مستوی xy میں خطہ $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le a(1 - x^2)$ پر واقع ہے۔ یہ برتن 45° تک ٹیڑھا کرنے تک واپس اپنی جگہ پر آن گرتا ہے۔ مستقل a کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 44: جمودی معیار اثر کم سے کم کرنا
ربع اول میں کثافت $\delta(x, y) = 1$ کی چادر لکیر $x = 4$ اور $y = 2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ لکیر $y = a$ کے لحاظ سے اس چادر کی جمودی معیار اثر I_a درج ذیل ہے۔

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 \, dy \, dx$$

مستقل a کی وہ قیمت تلاش کریں جو I_a کو کم سے کم کرتا ہو۔

سوال 45: مستوی xy میں لکیر $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 46: ایک پتلی چھڑی کی مستقل خطی کثافت δ گرام فی سنٹی میٹر اور لمبائی L ہے۔ اس کا رداس دوار دیے گئے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

ا. چھڑی کے محور کو عمودی اور اس کی مرکز کمیت سے گزرتے ہوا خط۔

ب. چھڑی کے ایک سر پر چھڑی کے محور کو عمودی خط۔

سوال 47: مستوی xy میں مستقل کثافت δ کی چادر منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔

ا. ایسا δ دریافت کریں کہ چادر کی کمیت سوال 34 کے چادر کی کمیت کے برابر ہو۔

ب. جزو-ا میں حاصل δ کی قیمت کا اس خطہ پر $\delta(x, y) = y + 1$ کی اوسط قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 48: دائرہ $x^2 + (y-1)^2 = 1$ کی کثافت مستقل ہے۔ محوروں کے لحاظ سے اس کے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

مسئلہ متوازی محور

مستوی xy میں ایک خطہ پر کمیت m کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہے۔ خط $L_{c,m}$ کے متوازی h اکائیاں دور خط L پایا جاتا ہے۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر $I_{c,m}$ اور I_L درج ذیل کلیہ کو مطمئن کریں گے۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{14.20}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک جمودی معیار اثر سے دوسرا با آسانی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

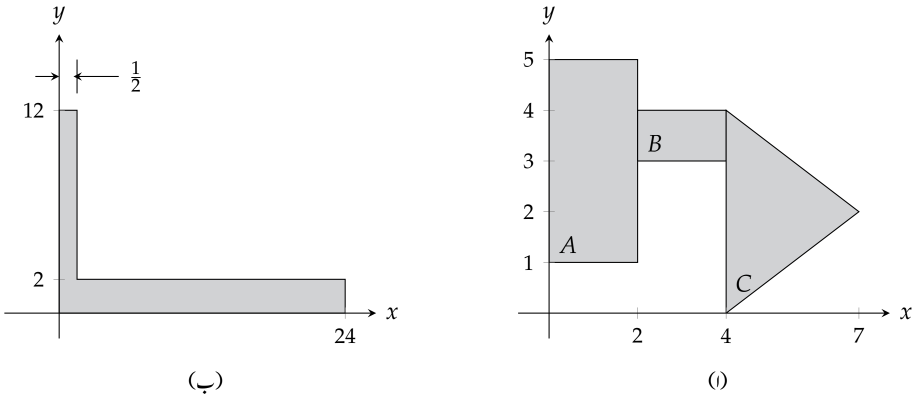
سوال 49: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت
(ا) دکھائیں کہ باریک چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی خط کے لحاظ سے چادر کا جمودی معیار اثر صفر ہو گا۔ (اشارہ: مرکز کمیت کو مبدا پر رکھیں اور خط کو محور y پر رکھیں۔ کلیہ $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ کیا دیگا؟) (ب) جزو-ا کے نتیجہ سے مسئلہ متوازی محور اخذ کریں۔(اشارہ: خط $L_{c,m}$ کو محور y اور L کو $x = h$ پر رکھ کر I_L کے تکمل کو دو حصوں میں لکھیں۔)

سوال 50: (ا) مسئلہ متوازی محور استعمال کرتے ہوئے مثال 14.8 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے اس مثال میں چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی افقی اور انتصابی خطوط کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ (ب) جزو-ا کے نتائج استعمال کرتے ہوئے خطوط $x = 1$ اور $y = 2$ کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

کلیہ پاپس

جناب پاپس نے حصہ 6.10 کا مسئلہ پاپس بیان کیا۔ اس کے علاوہ وہ جانتے تھے کہ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے دو مستوی خطوں کا وسطانی مرکز ان خطوں کے وسطانی مراکز سے گزرتے ہوئے خط پر پایا جاتا ہے۔ مستوی xy میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو باریک چادر P_1 اور P_2 فرض کریں، جن کی کمیت بالترتیب m_1 اور m_2 ہو۔ مبدا سے بالترتیب ان چادروں کے مراکز کمیت تک سمتیات $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ لیں۔ اب اشتراک $P_1 \cup P_2$ کا مرکز کمیت درج ذیل سمتیہ دیگا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{14.21}$$



شکل 14.22: اشکال برائے سوال 53 اور سوال 54

مساوات 14.21 کو **کلیہ پاپس**[11] کہتے ہیں۔ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو سے زیادہ (لیکن متناہی تعداد کی) چادروں کے لئے درج ذیل کلیہ ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{14.22}$$

یہ کلیہ بالخصوص وہاں فائدہ مند ہو گا جہاں غیر منظم شکل و صورت کی چادر کے حصوں کے وسطانی مراکز ہم جیومیٹری سے علیحدہ علیحدہ طور پر جانتے ہوں اور جہاں ہر حصہ از خود مستقل کثافت کا ہو۔ ہم اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے پوری چادر کا وسطانی مرکز معلوم کر سکتے ہیں۔

سوال 51: کلیہ پاپس (مساوات 14.21) اخذ کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں ان خطوں کو تقسیم کر کے ان کے مراکز کمیت $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ کی نشاندہی کریں۔ محددی محور کے لحاظ سے $P_1 \cup P_2$ کے معیار اثر کیا ہوں گے؟)

سوال 52: ریاضی (الکراجی) ماخوذ اور مساوات 14.21 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی عدد صحیح $n > 2$ کے لئے مساوات 14.22 مطمئن ہو گا۔

سوال 53: فرض کریں A ، B اور C تین اشکال ہیں (شکل 14.22-ا)۔ کلیہ پاپس کی مدد سے درج ذیل کے وسطانی مراکز دریافت کریں۔

ا. $A \cup B$
ب. $A \cup C$
ج. $B \cup C$
د. $A \cup B \cup C$

سوال 54: وسطانی مرکز دریافت کریں (شکل 14.22-ب)۔

[11] Pappus's formula

سوال 55: ایک مساوی الساقین مثلث T کا قاعدہ $2a$ اور قد h ہے۔اس کا قاعدہ، رداس a کے نصف دائرہ D کے قطر پر پایا جاتا ہے۔ مثلث دائرہ کے باہر ہے۔ $T \cup D$ کا وسطانی مرکز (ا) T اور D کی مشترک سرحد پر (ب) T کے اندر ہونے کے لئے a اور h کا تعلق دریافت کریں۔

سوال 56: ایک مساوی الساقین مثلث T جس کا قد h ہے کا قاعدہ چکور Q کا ایک ضلع ہے۔ چکور کے ضلع کی لمبائی s ہے۔ (چکور اور مثلث ایک دوسرے کو نہیں ڈھانپتے ہیں۔) $T \cup Q$ کا وسطانی مرکز مثلث کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر h کا s کے ساتھ کیا تعلق گا؟ اپنے جواب کا موازنہ سوال 55 کے جواب کے ساتھ کریں۔

14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ

بعض اوقات تکمل کو قطبی روپ میں تبدیل کرنے سے اس کا حل آسان ہو جاتا ہے۔اس حصہ میں یہ تبدیلی دکھائی جائے گی اور ان تکملات کی قیمت کا حصول دکھایا جائے گا جن کے سرحد قطبی روپ میں دیے گئے ہوں۔

قطبی روپ میں تکملات

مستوی xy میں دوہرا تکمل کا ذکر کرتے ہوئے ہم نے خطہ R کو مستطیلی ٹکڑوں میں اس طرح کاٹا کہ مستطیل کے اضلاع محددی محوروں کے متوازی ہوں۔اس طرح ان مستطیلوں کے اضلاع مستقل x اور یا مستقل y لکھے جا سکتے ہیں۔ کارتیسی محدد میں مستطیل قدرتی صورت ہے۔ قطبی محددی نظام میں "قطبی مستطیل" قدرتی صورت ہے جس کے اضلاع مستقل r اور مستقل θ لکھے جا سکتے ہیں۔

فرض کریں تفاعل $f(r, \theta)$ خطہ R پر معین ہے جس کے سرحد شعاع $\theta = \alpha$ اور $\theta = \beta$ اور استمراری منحنیات $r = g_1(\theta)$ اور $r = g_2(\theta)$ ہیں۔مزید α اور β کے بیچ ہر قیمت کے لئے $0 \le g_1(\theta) \le g_2(\theta) \le a$ ہے۔ یوں R پنکھا نما خطہ Q میں، جس کو عدم مساوات $0 \le r \le a, \; \alpha \le \theta \le \beta$ ظاہر کرتی ہیں، پایا جائے گا۔

ہم Q پر دائری قوسین اور شعاعوں کا جال بچھاتے ہیں۔ یہ قوسین ان دائروں سے کاٹے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے اور جن کے رداس Δr ، $2\Delta r$ ، $\cdots$ ، $m\Delta r$ ہیں جہاں $\Delta r = \frac{a}{m}$ ہے۔ان شعاع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{m'}$ ہے۔

$$\theta = \alpha, \; \theta = \alpha + \Delta\theta, \; \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \cdots, \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$$

یہ شعاع اور قوسین Q کو "قطبی مستطیلوں" میں تقسیم کرتے ہیں۔

ہم ان قطبی مستطیلوں کو 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں جو مکمل طور پر R کے اندر پائے جاتے ہوں اور ان کے رقبوں کو ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ شمار کرنے کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ ہم ΔS_k رقبے کی قطبی مستطیل کے مرکز کو

(r_k, θ_k) سے ظاہر کرتے ہیں۔ قطبی مستطیل کے مرکز سے مراد وہ نقطہ ہے جو دونوں دائری قوسین کی اوسط رداس کے قوس اور اس شعاع پر پایا جاتا ہو جو دونوں قوسین کو درمیان سے کاٹتی ہو۔ ہم اب درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r,\theta)\Delta S_n \tag{14.23}$$

اگر پورے R پر f استمراری ہو، تب جال کے خانے چھوٹے سے چھوٹے کر کے Δr اور $\Delta\theta$ کو صفر تک پہنچانے سے یہ مجموعہ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد R پر f کا دوہرا تکمل کہلاتا ہے جس کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$$

اس حد کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر ہمیں مجموعہ J_n یوں لکھنا ہو گا کہ ΔS_k کی قیمت Δr اور $\Delta\theta$ کی روپ میں ہو۔ رقبہ ΔS_k کی اندرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k - \frac{\Delta r}{2}$ جبکہ اس کی بیرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k + \frac{\Delta r}{2}$ ہے۔ ان قوسین سے مبدا تک دائری تکونی خطوں کے رقبے

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta \quad \text{اندرونی تکونی رقبہ}\\ &\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta \quad \text{بیرونی تکونی رقبہ} \end{aligned} \tag{14.24}$$

ہوں گے۔ یوں درج ہو گا۔

$$\begin{aligned} \Delta S_k &= \text{اندرونی تکونی رقبہ} - \text{بیرونی تکونی رقبہ}\\ &= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k\Delta r_k\Delta\theta \end{aligned}$$

اس نتیجہ کو مساوات 14.23 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k) r_k\Delta r\Delta\theta \tag{14.25}$$

مسئلہ فوبنی کی ایک صورت کہتی ہے کہ اس مجموعہ کی حد r اور θ کے لحاظ سے درج ذیل بار بار تکمل دیگا۔

$$\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.26}$$

تکمل کی حدیں

کار تیسی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنے کی ترکیب قطبی محدد میں بھی کار آمد ہے۔

قطبی محدد میں تکمل حاصل کرنے کا طریقہ

قطبی محدد میں خطہ R پر $\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے پہلے r کے لحاظ سے اور بعد میں θ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے بڑھتی ہوئی r کے رخ خطہ R سے گزرتا ہوا شعاع L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی r حدیں ہوں گے۔ ان کی قیمتیں عموماً θ پر منحصر ہو گی۔

3. تکمل کی θ حدیں: وہ θ حدیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام شعاعیں شامل ہوں۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

مثال 14.10: دائرہ $r=1$ کے باہر اور قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر خطہ میں $f(r,\theta)$ کے تکمل کی حدیں تلاش کریں۔

حل:

1. خاکہ: ہم خطے کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر نام و نشان لکھتے ہیں۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی علامتی شعاع خطہ R میں $r=1$ کے مقام پر داخل اور $r=1+\cos\theta$ کے مقام پر خارج ہو گی۔

3. تکمل کی θ حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی وہ شعاعیں جو R سے گزرتی ہوں، $\theta=-\frac{\pi}{2}$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ میں پائی جاتی ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

□

اگر $f(r,\theta)$ ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب R پر f کا تکمل R کا رقبہ ہو گا۔

قطبی محددمیں رقبہ

قطبی محددی مستوی میں بند اور محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint\limits_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.27}$$

جیسا آپ توقع کرتے ہوں گے یہ کلیہ، پہلے دیے گئے کلیات کے عین مطابق ہے۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

مثال 14.11: دو چشمہ $r^2 = 4\cos 2\theta$ میں گھیرا ہوا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم دو چشمہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ ربع اول میں دو چشمہ کے رقبہ کو 4 سے ضرب دے کر پورا رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
S &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 4
\end{aligned}$$

□

کارتیسی تکملات کی قطبی تکملات میں تبدیلی

کارتیسی تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کو قطبی تکمل میں دو قدموں میں تبدیل کیا جاتا ہے:

1. کارتیسی تکمل میں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھیں۔
2. خطہ R کی سرحد کی قطبی حدیں مہیا کریں۔

یوں کارتیسی تکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تکمل کے خطہ کو قطبی محدد میں G سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.28}$$

یہ باب 5 میں ترکیب بدل کی طرح ہے البتہ یہاں ایک کی بجائے دو متغیرات ہیں۔دھیان رہے کہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ نہیں بلکہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ پر کیا جاتا ہے۔اس کی وجہ آگے پیش کی جائے گی۔

مثال 14.12: ربع اول میں دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ایک چوتھائی میں کثافت $\delta(x,y)=1$ کی باریک چادر کی مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: ہم چادر کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں۔کارتیسی محدد میں اس خطہ کا قطبی معیار اثر سے مراد درج ذیل تکمل ہے۔

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ہم y کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\int_0^1\left(x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\right)\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں جس کا حل، جدول کی مدد کے بغیر، مشکل ہے۔

اس تکمل کو قطبی تکمل میں تبدیل کرنے سے حالات بہتر ہوتے ہیں۔ہم $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1(r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔قطبی محدد میں تکمل اتنا آسان کیوں ہوا۔ایک وجہ یہ ہے کہ x^2+y^2 سادہ صورت r^2 اختیار کرتا ہے۔دوسری وجہ یہ کہ تکمل کی حدیں اب مستقل ہیں۔ □

مثال 14.13: محور x اور منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ کے بیچ نصف دائری خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل: کارتیسی محدد میں یہ تکمل غیر بنیادی ہے اور $e^{x^2+y^2}$ کا x یا y کے لحاظ سے تکمل، سیدھا طریقے سے، حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے باوجود یہ تکمل اور اس طرح کے دیگر تکملات ریاضیات میں اہمیت رکھتے ہیں اور ان کا حل ضروری ہے۔ قطبی محدد یہاں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

آپ نے دیکھا کہ e^{r^2} کے تکمل میں ہمیں $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کا r درکار تھا جس کے بغیر ہم تکمل حاصل نہیں کر سکتے تھے۔ □

سوالات

قطبی تکملات کی قیمت کی تلاش

سوال 1 تا سوال 16 میں دیے گئے تکملات کو قطبی روپ میں تبدیل کر کے حل کریں۔

سوال 1: $\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 2: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 3: $\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 4: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 5: $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 6: $\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 7: $\int_0^{6}\int_0^{y}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 8: $\int_0^{2}\int_0^{x}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 9: $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 10: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 11: $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 12: $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 13: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14: $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 15: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 16: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

قطبی محدد میں رقبات کی تلاش

سوال 17: ربع اول سے منحنی $r = 2(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ جس خطہ کو کاٹتی ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 18: قلب نما $r = 1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 19: گلاب $r = 12\cos 3\theta$ کے ایک پتے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 20: مثبت محور x اور پیچ دار $r = \frac{4\theta}{3},\ 0 \le \theta \le 2\pi$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ اس خطہ کی صورت گھونگا کے خول سے ملتی جلتی ہے۔

سوال 21: ربع اول میں قلب نما $r = 1+\sin\theta$ جس خطہ کو کاٹتا ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 22: قلب نما $r = 1+\cos\theta$ اور $r = 1-\cos\theta$ کے مشترکہ خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

کمیت اور معیار اثر

سوال 23: مستقل کثافت $\delta(x, y) = 3$ کی باریک چادر جس کی زیریں سرحد محور x اور بالائی سرحد قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ ہے، کا محور x کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔

سوال 24: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے اندر باریک دائرہ قرص کی کثافت $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے۔ اس قرص کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 25: دائرہ $r = 3$ کے باہر اور دائرہ $r = 6\sin\theta$ کے اندر چادر کی کثافت $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r}$ ہے۔ اس چادر کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 26: قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر باریک چادر کی کثافت $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 27: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 28: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کے اندر باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

اوسط قیمتیں

سوال 29: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کے اوپر نصف کرہ $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 30: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کے اوپر (ایک) مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 31: قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ میں مبدا سے نقطہ $N(x, y)$ کا اوسط فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 32: قرص $x^2 + y^2 \le a$ میں نقطہ $N(x, y)$ کا سرحدی نقطہ $A(1, 0)$ سے فاصلے کے مربع کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 33: خطہ $1 \le x^2 + y^2 \le e$ پر $f(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کے تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 34: خطہ $1 \le x^2+y^2 \le e^2$ پر $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ کا تکمل حل کریں۔

سوال 35: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r=1$ کے باہر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی مستوی $z=x$ میں پائی جاتی ہے۔ اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 36: دو چشمہ $r^2=2\cos 2\theta$ کے اندر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی کرہ $z=\sqrt{2-r^2}$ کی سطح کو مس کرتی ہے۔اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 37: (ا) غیر مناسب تکمل $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے حل کا درست طریقہ یہ ہے کہ پہلے اس کا مربع لیں:

$$I^2=\Big(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس تکمل کو قطبی روپ میں لکھ کر حل کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (حصہ 8.6 کا سوال 92 جاری)۔

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{erf}(x)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t$$

سوال 38: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 39: قرص $x^2+y^2\le\frac{3}{4}$ پر تفاعل $f(x,y)=1/(1-x^2-y^2)$ کا تکمل حل کریں۔ کیا قرص $x^2+y^2\le 1$ پر $f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 40: قطبی محدد میں دوہرا تکمل استعمال کرتے ہوئے قطبی منحنی $r=f(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta$ اور مبدا کے بیچ پنکھا نما خطہ کے رقبہ کا درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$$

سوال 41: رداس a کے دائرہ میں N_0 ایک نقطہ ہے اور N_0 سے دائرہ کے مرکز تک فاصلہ h ہے۔ کسی بھی اختیاری نقطہ N سے N_0 تک فاصلہ کو d سے ظاہر کریں۔ دائرہ میں محیط خطہ پر d^2 کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: دائرے کے مرکز کو مبدا پر اور N_0 کو محور x پر رکھ کر اپنے لئے آسانی پیدا کریں۔)

سوال 42: فرض کریں ایک قطبی خطے کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

(ا) اس تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں۔ (ب) پاپس کے ایک مسئلہ اور حصہ 6.10 میں سوال 23 میں وسطانی مرکز کی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 43 تا سوال 46 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کارتیسی تکملات کو قطبی تکملات میں تبدیل کر کے ان قطبی تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ کو درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

ا. کارتیسی تکمل کے خطہ کا خاکہ مستوی xy پر بنائیں۔

ب. جزو-ا میں خطہ کی ہر سرحد کی کارتیسی مساوات کو r اور θ کے لئے حل کرتے ان کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

ج. جزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تکمل کے خطہ کے خاکہ کو قطبی $r\theta$ مستوی میں بنائیں۔

د. متکمل کو کارتیسی سے قطبی روپ میں تبدیل کریں۔ جزو-ج کے خاکہ سے تکمل کی حدیں معلوم کر کے قطبی تکمل کی قیمت کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 43: $\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 44: $\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

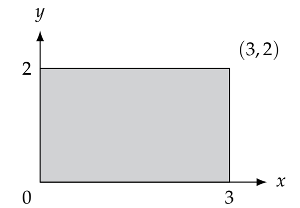
سوال 45: $\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 46: $\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

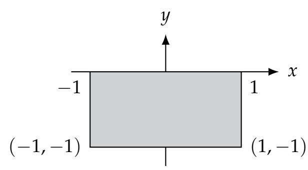
جوابات

حصہ 14.1 صفحہ 1677

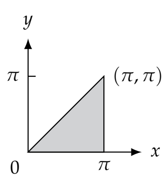
1) 16



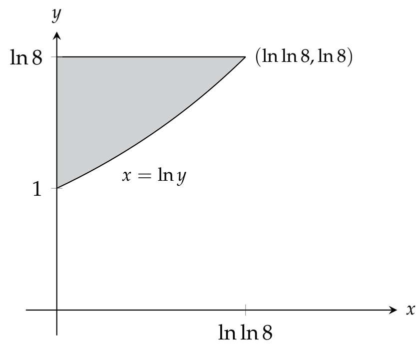
3) 1



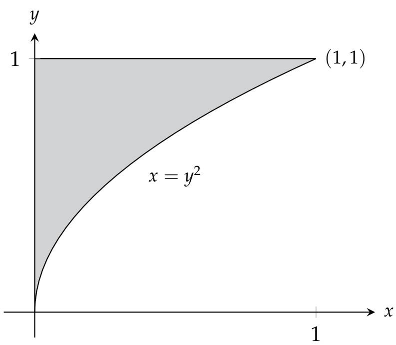
5) $\frac{\pi^2}{2} + 2$



7) $8\ln 8 - 16 + e$



9) $e - 2$

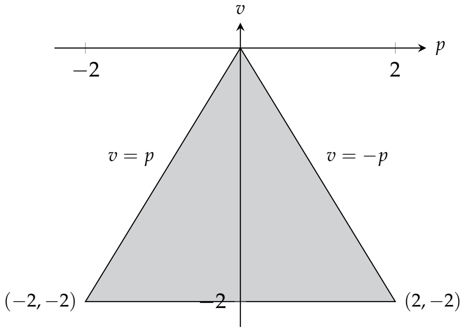


11) $\frac{3}{2}\ln 2$

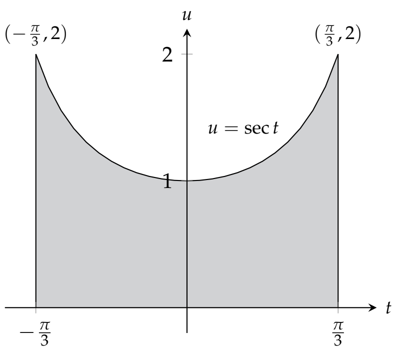
13) $\frac{1}{6}$

15) $-\frac{1}{10}$

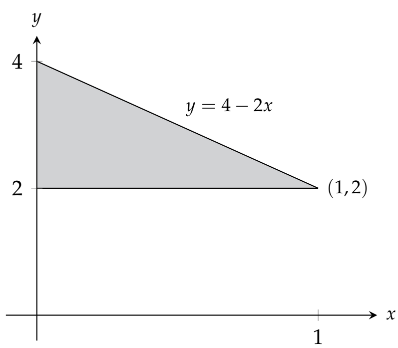
(17 8



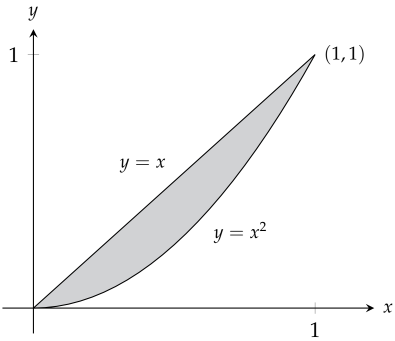
(19 2π



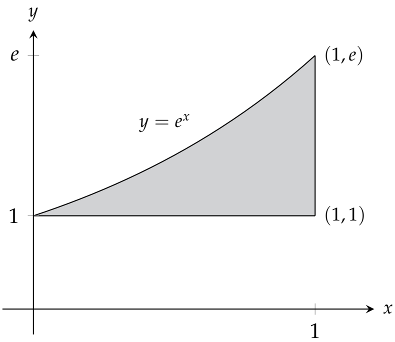
(21 $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$



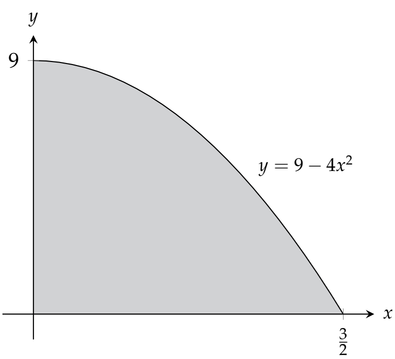
(23 $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$



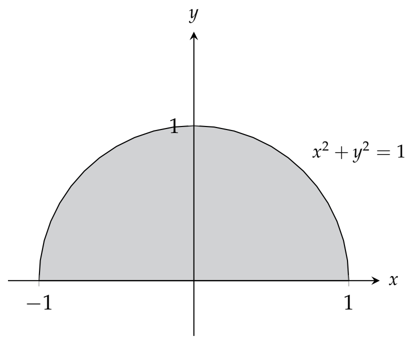
(25 $\int_1^e \int_{\ln y}^{1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$



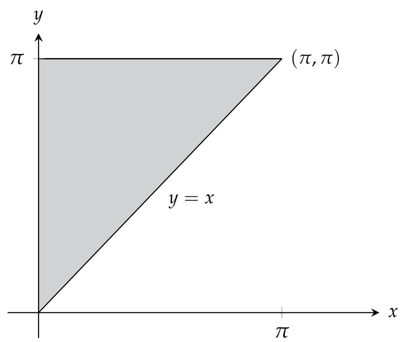
(27 $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$



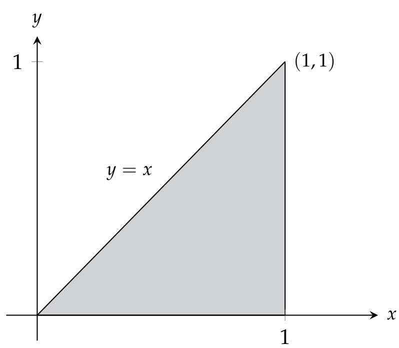
(29 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$



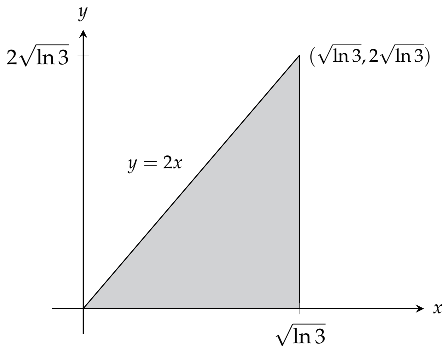
31) 2



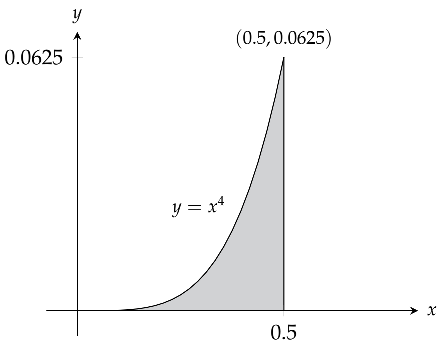
33) $\frac{e-2}{2}$



35) 2



37) $\frac{1}{80\pi}$



39) $-\frac{2}{3}$

41) $\frac{4}{3}$

43) $\frac{625}{12}$

45) 16

47) 20

49) $2(1+\ln 2)$

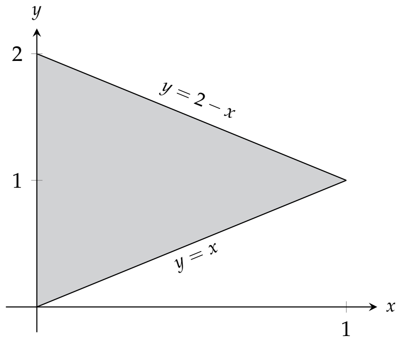
51) 1

53) π^2

55) $-\frac{1}{4}$

57) $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

59) $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

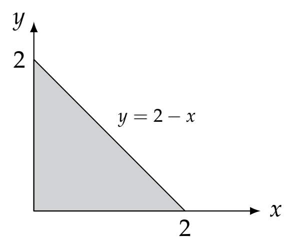


67) 0.603

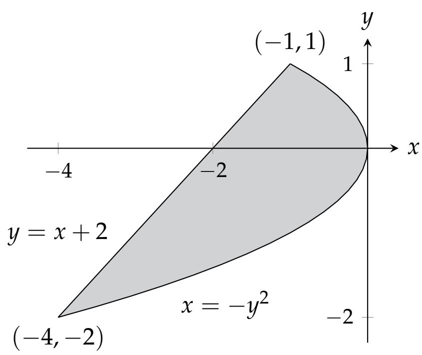
69) 0.233

حصہ 14.2 صفحہ 1693

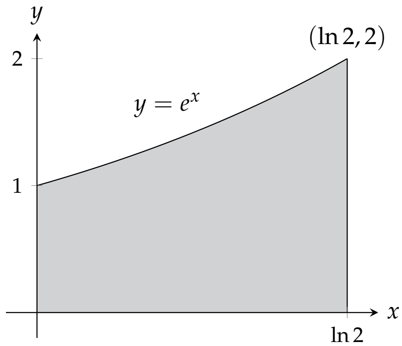
1) $\int_0^2 \int_0^{2-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2,\ \int_0^2 \int_0^{2-y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2$



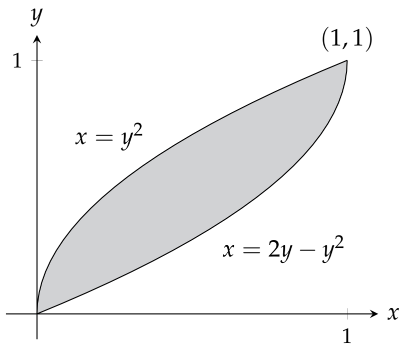
3) $\int_{-2}^{1} \int_{y-2}^{-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{9}{2}$



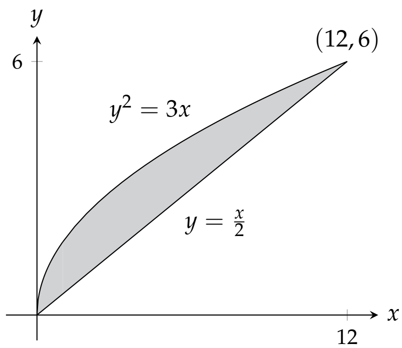
5) $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$



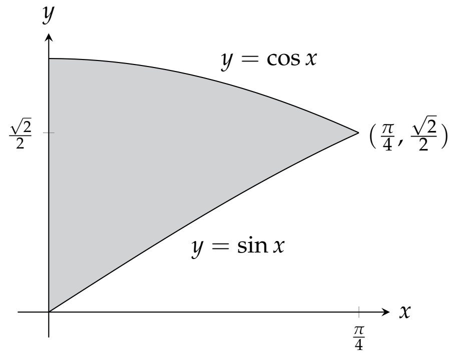
7) $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$



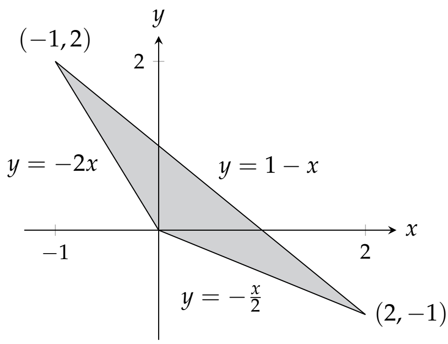
9) 12



11) $\sqrt{2} - 1$



13) $\frac{3}{2}$



15) (ا) 0، (ب) $\frac{4}{\pi^2}$

17) $\frac{8}{3}$

19) $\bar{x} = \frac{5}{14},\ \bar{y} = \frac{38}{35}$

21) $\bar{x} = \frac{64}{35},\ \bar{y} = \frac{5}{7}$

23) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{4}{3\pi}$

25) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$

27) $\bar{x} = \frac{\pi}{2},\ \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

29) $\bar{x} = -1,\ \bar{y} = \frac{1}{4}$

31) $I_x = \frac{64}{105},\ R_x = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$

33) $\bar{x} = \frac{3}{8},\ \bar{y} = \frac{17}{16}$

35) $\bar{x} = \frac{11}{3},\ \bar{y} = \frac{14}{27},\ I_y = 432,\ R_y = 4$

37) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{13}{31},\ I_y = \frac{7}{5},\ R_y = \sqrt{\frac{21}{31}}$

39) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{7}{10},\ I_x = \frac{9}{10},\ I_y = \frac{3}{10}$، $I_0 = \frac{6}{5},\ R_x = \frac{3\sqrt{6}}{10},\ R_y = \frac{3\sqrt{2}}{10},\ R_0 = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

41) $40\,000(1 - e^{-2})\ln(\frac{7}{2}) \approx 43\,329$

43) $0 < a \le \frac{5}{2}$

45) $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$

47) (ا) $\frac{3}{2}$، (ب) ایک جیسے ہیں۔

53) (ا) $(\frac{7}{5}, \frac{31}{10})$، (ب) $(\frac{19}{7}, \frac{18}{7})$، (ج) $(\frac{9}{2}, \frac{19}{8})$، (د) $(\frac{11}{4}, \frac{43}{16})$

55) مشترک سرحد پر ہونے کے لئے $h = a\sqrt{2}$، مثلث کے اندر ہونے کے لئے $h > a\sqrt{2}$

حصہ 14.3 صفحہ 1704

1) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{\pi}{8}$

5) πa^2

7) 36

9) $(1 - \ln 2)\pi$

11) $(2\ln 2 - 1)(\pi/2)$

13) $\frac{\pi}{2} + 1$

15) $\pi(\ln(4) - 1)$

17) $2(\pi - 1)$

19) 12π

21) $\frac{3\pi}{8} + 1$

23) 4

25) $6\sqrt{3} - 2\pi$

27) $\bar{x} = \frac{5}{6},\ \bar{y} = 0$

29) $\frac{2a}{3}$

31) $\frac{2a}{3}$

33) 2π

35) $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$

37) (ا) $\sqrt{\pi/2}$، (ب) 1

39) $\pi \ln 4$ نہیں

41) $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ