احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

9.8 طاقتی تسلسل

اب چونکہ ہم لامتناہی تسلسل کا ارتکاز پرکھ سکتے ہیں لہٰذا ہم اب لامتناہی کثیر رکنی کا مطالعہ کر سکتے ہیں جن کا ذکر حصہ 9.3 کی شروع میں کیا گیا۔ تعریف کی رو سے ان کثیر رکنیوں کو کسی متغیر، مثلاً x، کے طاقتوں کا لامتناہی تسلسل لکھا جاتا ہے لہٰذا ہم ان کثیر رکنیوں کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔ کثیر رکنیوں کی طرح، طاقتی تسلسلوں کو جمع، منفی، ضرب، تفرق اور تکمل کر کے نئے طاقتی تسلسل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

طاقتی تسلسل اور ارتکاز

ہم باضابطہ تعریف سے ابتدا کرتے ہیں۔

تعریف: نقطہ $x = 0$ کے لحاظ سے طاقتی تسلسل[36] سے مراد درج ذیل صورت کا تسلسل ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{9.22}$$

نقطہ $x = a$ کے لحاظ سے طاقتی تسلسل سے مراد درج ذیل صورت کا تسلسل ہے

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{9.23}$$

جس میں مرکز[37] a اور عددی سر[38] c_0، c_1، c_2، $\ldots$، c_n، $\ldots$ مستقل ہیں۔

□

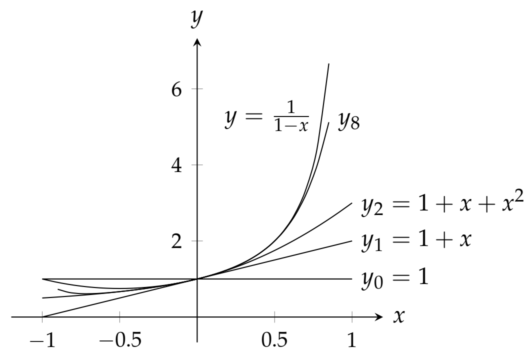
مساوات 9.23 میں $a = 0$ پر کرنے سے طاقتی تسلسل کی خصوصی روپ مساوات 9.22 حاصل ہوتی ہے۔

مثال 9.47: مساوات 9.22 میں تمام عددی سر 1 لینے سے درج ذیل ہندسی طاقتی تسلسل حاصل ہوتا ہے۔

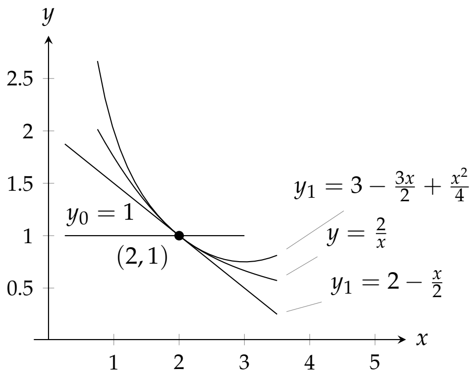
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

---

[36] power series
[37] center
[38] coefficients



شکل 9.23: تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ اور اس کی چار تخمینی کثیر رکنیاں (مثال 9.47)۔



شکل 9.24: تفاعل $f(x) = \frac{2}{x}$ اور اس کی ابتدائی تین تخمینی کثیر رکنیاں (مثال 9.48)۔

اس ہندسی تسلسل کا پہلا جزو 1 اور نسبت x ہے۔ یہ $|x| < 1$ کے لئے $\frac{1}{1-x}$ پر مرتکز ہے۔ اس حقیقت کا اظہار درج ذیل لکھ کر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{9.24}$$

□

اب تک مساوات 9.23 کو ہم دائیں ہاتھ تسلسل کے مجموعہ کا کلیہ استعمال کرتے آ رہے ہیں۔ ہم اب اپنی توجہ کا مرکز تبدیل کرتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ تسلسل کے جزوی مجموعات کو کثیر رکنیاں $P_n(x)$ تصور کرتے ہیں جو بائیں ہاتھ تفاعل کی تخمین دیتے ہیں۔ صفر کے قریب x کی قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء کا مجموعہ لے کر تفاعل کی اچھی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ہاں $x = -1$ یا $x = 1$ کے قریب ہمیں تفاعل کی اچھی تخمین حاصل کرنے کی خاطر تسلسل کے زیادہ اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا شکل 9.23 میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ اور اس کی تخمینی کثیر رکنیاں $y_n = P_n(x)$ دکھائی گئی ہیں۔

مثال 9.48: درج ذیل طاقتی تسلسل مساوات 9.23 کی طرح ہے جہاں $a = 2$ ، $c_0 = 1$ ، $c_1 = -\frac{1}{2}$ ، $c_2 = \frac{1}{4}$ ، $\cdots$ ، $c_n = (-1/2)^n$ ہیں۔

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \tag{9.25}$$

یہ ایک ہندسی تسلسل ہے جس کا ابتدائی جزو 1 اور نسبت $r = -\frac{x-2}{2}$ ہے۔ یہ تسلسل $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$ یعنی $0 < x < 4$ کے لئے مرکوز ہے۔ اس کا مجموعہ

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}$$

ہے لہٰذا

$$\frac{2}{x}=1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2+\cdots+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n(x-2)^n+\cdots,\quad 0<x<4$$

ہو گا۔ مساوات 9.25 کا تسلسل 2 کے قریب x کی قیمتوں کے لئے $f(x)=\frac{2}{x}$ کی کارآمد تخمینی کثیر رکنیاں پیدا کرتا ہے (شکل 9.24):

$$\begin{aligned}P_0(x)&=1\\ P_1(x)&=1-\frac{1}{2}(x-2)=2-\frac{x}{2}\\ P_2(x)&=1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2=3-\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{4}\end{aligned}$$

□

مثال 9.49: درج ذیل طاقتی تسلسل x کی کن قیمتوں کے لئے ارتکاز پذیر ہے؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad \text{(ا)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \qquad \text{(ب)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad \text{(ج)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n=1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots \qquad \text{(د)}$$

حل: تناسبی پرکھ کا اطلاق تسلسل $\sum|u_n|$ پر کریں جہاں زیر غور تسلسل n جزو u_n ہے۔ نتائج شکل 9.25 میں دکھائے گئے ہیں۔

ا. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n}{n+1}|x|\to|x|$
یہ تسلسل $|x|<1$ کے لئے مطلق مرتکز ہے۔ $|x|>1$ کے لئے چونکہ اس کا n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا لہٰذا تسلسل منفرج ہو گا جبکہ $x=1$ پر ہمیں بدلتا ہارمونی تسلسل $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ حاصل ہوتا ہے جو مرتکز ہے۔ $x=-1$ پر ہمیں ہارمونی تسلسل کا نفی $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots$ ملتا ہے جو منفرج ہے۔ یوں تسلسل (ا) وقفہ $-1<x\leq 1$ کے لئے مرتکز اور اس وقفہ کے باہر منفرج ہو گا۔

ب. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n-1}{2n+1}x^2\to x^2$
$x^2<1$ کے لئے تسلسل مطلق مرتکز ہے۔ چونکہ $x^2>1$ پر n واں جزو صفر پر مرکوز نہیں ہے لہٰذا تسلسل منفرج ہو گا۔

شکل 9.25: وقفہ ارتکاز برائے مثال 9.49

$x = 1$ پر تسلسل $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ دیتا ہے جو مسئلہ بدلتا تسلسل کے تحت مرتکز ہو گا۔ $x = -1$ پر بھی بدلتا تسلسل ملتا ہے جو ارتکاز کے شرائط کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ مرتکز ہو گا۔ نقطہ $x = 1$ پر تسلسل کی قیمت نقطہ $x = -1$ پر تسلسل کی قیمت کا منفی ہے۔ تسلسل (ب) وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر مرتکز جب کہ اس کے باہر منفرج ہو گا۔

ج. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$
تسلسل تمام x کے لئے مطلق مرتکز ہے۔

د. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$
ماسوائے $x = 0$ تسلسل x کی تمام قیمتوں کے لئے منفرج ہو گا۔

□

ہم نے مثال 9.49 میں تسلسل کو ارتکاز یا انفراج کے لئے پرکھنا دیکھا۔

طاقتی تسلسل کا پرکھ برائے ارتکاز

قدم ا: تناسبی پرکھ (یا n واں جذر پرکھ) استعمال کرتے ہوئے وہ وقفہ تلاش کریں جس پر تسلسل مطلق مرتکز ہو۔ عموماً یہ وقفہ کھلا وقفہ ہو گا:

$$a - R < x < a + R \quad \text{یعنی} \quad |x - a| < R$$

قدم ب: اگر مطلق ارتکاز کا وقفہ متناہی ہو تب ہر آخری نقطہ پر ارتکاز یا انفراج کے لئے تسلسل کو پرکھیں (جیسا مثال 9.49-ا اور ب میں کیا گیا)۔ آپ تقابلی پرکھ، تکملی پرکھ یا بدلتا تسلسل پرکھ استعمال کر سکتے ہیں۔

قدم ج: اگر مطلق ارتکاز کا وقفہ $a - R < x < a + R$ ہو تب $|x - a| > R$ کے لئے تسلسل منفرج ہو گا (تسلسل یہاں مشروط مرتکز بھی نہیں ہو گا) چونکہ x کی ان قیمتوں کے لئے n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا ہے۔

□

مسئلہ 9.12: طاقتی تسلسل کا مسئلہ ارتکاز
اگر $x = c \neq 0$ کے لئے تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ مرتکز ہو تب $|x| < |c|$ کے لئے یہ مطلق مرتکز ہو گا۔ اگر $x = d$ کے لئے تسلسل منفرج ہو تب $|x| > |d|$ کے لئے یہ منفرج ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ مرتکز ہے۔ تب $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ ہو گا۔ یوں ایسا عدد N پایا جائے گا کہ تمام $n \geq N$ کے لئے $|a_n c^n| < 1$ ہو گا، یعنی:

$$|a_n| < \frac{1}{|c^n|} \qquad n \geq N \tag{9.26}$$

اب ایسا x لیں کہ $|x| < |c|$ ہو اور درج ذیل پر غور کریں۔

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_{N-1}\, x^{N-1}\right| + \left|a_N\, x^N\right| + \left|a_{N+1}\, x^{N+1}\right| + \cdots$$

جزو $\left|a_N\, x^N\right|$ سے قبل متناہی تعداد کے اجزاء پائے جاتے ہیں اور ان کا مجموعہ متناہی ہے۔ مساوات 9.26 کی بنا جزو $\left|a_N\, x^N\right|$ اور اس کے بعد تمام اجزاء درج ذیل سے کم ہوں گے۔

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+2} + \cdots \tag{9.27}$$

اب مساوات 9.27 ہندسی تسلسل ہے جس کا نسبت $r = \left|\frac{x}{c}\right|$ ہے جو $|x| < |c|$ کی بنا 1 سے کم ہے۔ یوں مساوات 9.27 کا تسلسل مرتکز ہے لہٰذا اصل تسلسل مطلق مرتکز ہو گا۔ یوں مسئلے کا پہلا حصہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلے کا دوسرا حصہ مسئلے کے پہلے حصہ سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر $x = d$ کے لئے تسلسل منفرج اور x_0 پر تسلسل مرتکز ہو جہاں $|x_0| > |d|$ ہے تب ہم مسئلے کے پہلے حصے میں $c = x_0$ لے کر فیصلہ کر سکتے ہیں کہ d پر تسلسل مطلق مرتکز ہو گا، لیکن ایک ہی وقت میں تسلسل مرتکز اور منفرج دونوں نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں اگر تسلسل d پر منفرج ہو تب تمام $|x| > |d|$ کے لئے یہ منفرج ہو گا۔

□

علامتیت سادہ رکھنے کی خاطر مسئلہ 9.12 میں تسلسل $\sum a_n x^n$ کے ارتکاز کی بات کی گئی۔ تسلسل $\sum a_n (x-a)^n$ کے ارتکاز کی بات کرتے ہوئے ہم $x - a$ کی جگہ x' پر کر کے نتیجہ کو تسلسل $\sum a_n (x')^n$ پر لاگو کر سکتے ہیں۔

ارتکاز کا رداس اور وقفہ

اب تک دیکھے گئے مثالوں اور مذکورہ بالا مسئلے کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ طاقتی تسلسل کا رویہ درج ذیل میں سے ایک ہو گا۔

تسلسل $\sum c_n(x-a)^n$ کے ممکنہ رویے

ا. ایک ایسا مثبت عدد R پایا جاتا ہے کہ $|x-a|>R$ کے لئے تسلسل منفرج جبکہ $|x-a|<R$ کے لئے مطلق مرتکز ہے۔ ہر ایک آخری نقطہ $x=a-R$ اور $x=a+R$ پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔

ب. ہر x پر تسلسل مطلق مرتکز ہے ($R=\infty$)۔

ج. تسلسل $x=a$ کے لئے مرتکز جبکہ باقی تمام x کے لئے منفرج ہے ($R=0$)۔

پہلی صورت میں ارتکاز کے نقطوں کا سلسلہ متناہی وقفہ ہے جس کو وقفہ ارتکاز[39] کہتے ہیں۔ ہم مذکورہ بالا مثالوں سے جانتے ہیں کہ وقفہ ارتکاز کھلا، نصف کھلا، یا بند ہو سکتا ہے اور یہ دیے گئے تسلسل پر منحصر ہو گا۔ وقفہ ارتکاز جس قسم کا بھی ہو، R کو تسلسل کا رداس ارتکاز[40] کہیں گے اور تسلسل کے ان نقطوں کا سلسلہ، جن کے لئے تسلسل مرتکز ہو، کا کم سے کم بالائی حد بندی $a+R$ ہو گا۔ اس وقفہ کی اندرونی ہر نقطہ پر ارتکاز مطلق ہو گا۔ اگر x کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے ایک تسلسل مطلق مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں اس تسلسل کا رداس ارتکاز لامتناہی ہے۔ اگر یہ صرف $x=a$ کے لئے مرتکز ہو تب اس کا رداس ارتکاز صفر ہو گا۔

جزو در جزو تفرق

اعلیٰ احصاء کا یک مسئلہ کہتا ہے کہ وقفہ ارتکاز کے اندر ہر نقطہ پر طاقتی تسلسل کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 9.13: مسئلہ جزو در جزو تفرق
وقفہ $a-R<x<a+R$ پر مرتکز تسلسل $\sum c_n(x-a)^n$ درج ذیل تفاعل f دیتا کرتا ہے، جہاں $R>0$ ہے۔

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \qquad\qquad a-R<x<a+R$$

---

[39] interval of convergence
[40] radius of convergence

وقفہ ارتکاز کے اندر ایسے تفاعل کا ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ ان تفرق کو حاصل کرنے کے لئے ہم اصل تسلسل کا جزو در جزو تفرق

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

لیتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے ہر اندرونی نقطہ کے لئے یہ تفرق تسلسل مرتکز ہوں گے۔

انتباہ: ضروری نہیں کہ جزو در جزو تفرق دیگر تسلسل کے لئے بھی قابل استعمال ہو۔ مثال کے طور پر تکونیاتی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$ تمام x کے لئے مرتکز ہے۔ البتہ اس کا جزو در جزو تفرق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ ہے جو تمام x کے لئے منفرج ہے۔

مثال 9.50: درج ذیل تفاعل $f(x)$ کے تفرق $f'(x)$ اور $f''(x)$ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad -1 < x < 1 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

□

جزو در جزو تکمل

اعلیٰ احصاء کا دوسرا مسئلہ کہتا ہے کہ پورے وقفہ ارتکاز کے اندر طاقتی تسلسل کا جزو در جزو تکمل لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 9.14: مسئلہ جزو در جزو تکمل
فرض کریں $(R > 0)$ $a - R < x < a + R$ میں

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

مرتکز ہو تب $a - R < x < a + R$ میں

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

مرتکز ہو گا اور $a - R < x < a + R$ میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال 9.51: وقفہ $-1 \le x \le 1$ میں $\tan^{-1} x$ کا تسلسل
درج ذیل تفاعل پہچانیں۔

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad -1 \le x \le 1$$

حل: ہم اصل تسلسل کا جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad -1 \le x \le 1$$

یہ ہندسی تسلسل ہے جس کا پہلا جزو 1 اور نسبت $-x^2$ ہے لہٰذا

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

ہو گا۔ ہم اب $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$$

چونکہ $x = 0$ پر $f(x)$ کا تسلسل صفر ہے للذا $C = 0$ ہو گا۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1} x \qquad -1 < x < 1 \tag{9.28}$$

□

ہم دیکھیں گے کہ $x = \mp 1$ کے لئے بھی یہ تسلسل $\tan^{-1} x$ پر مرکوز ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مثال 9.51 میں اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے دونوں آخری نقطوں کے لئے اصل تسلسل مرتکز ہے، البتہ مسئلہ 9.13 صرف اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کی اندرون میں تفرقی تسلسل کے ارتکاز کی ضمانت دیتا ہے۔

مثال 9.52: وقفہ $-1 < x < 1$ کے لئے $\ln(1+x)$ کا تسلسل
کھلا وقفہ $-1 < t < 1$ کے لئے تسلسل

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

مرکوز ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \Big]_0^x \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad\qquad -1 < x < 1
\end{aligned}$$

□

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ $x = 1$ پر تسلسل عدد $\ln 2$ کو مرکوز ہے مگر مسئلہ اس کی ضمانت نہیں دیتا ہے۔

فنیات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم