احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 15

سمتی میدان میں تکمل

ایک جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقناطیسیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاو پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

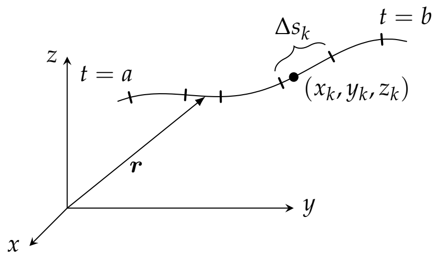
15.1 لکیری تکمل

جب فضا میں تفاعل $f(x,y,z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگا۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ f کا **لکیری تکمل**[1] کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، لکیری تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

لکیری تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان تکملات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاو کا حساب کرتے ہیں۔

---

[1] line integral



شکل 15.1: منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کو $t = a$ اور $t = b$ کے بیچ قوسچوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہے۔

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \ a \le t \le b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کی، متناہی تعداد کی قوسچوں میں، خانہ بندی کرتے ہیں (شکل 15.1)۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہو گی۔ ہم ہر قوسچہ پر ایک نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k \tag{15.1}$$

اگر f استمراری ہو اور g ، h ، اور k کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات 15.1 کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a **تا** b **اس قوس پر** f **کا تکمل** کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس تکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{"}C \text{ پر } f \text{ کا تکمل"} \tag{15.2}$$

ہموار منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \le t \le b$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ ہموار ہو ($\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہو اور کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہ ہو) تب ہم $\mathrm{d}s$ کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $\mathrm{d}s = \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \qquad t_0 = a \text{ حصہ 12.3 کی مساوات 12.20 میں }$$

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے تکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right| \mathrm{d}t$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

لکیری تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تفاعل f کا تکمل لینے کے لئے

ا. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t \tag{15.3}$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل C کی لمبائی دیگا۔

مثال 15.1: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک قطع پر $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ تکمل کریں (شکل 15.2)۔

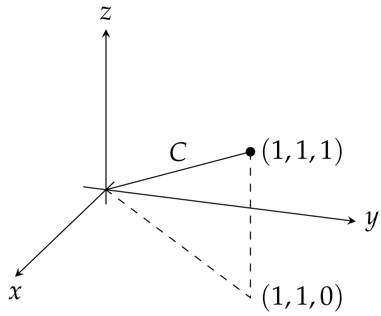
حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

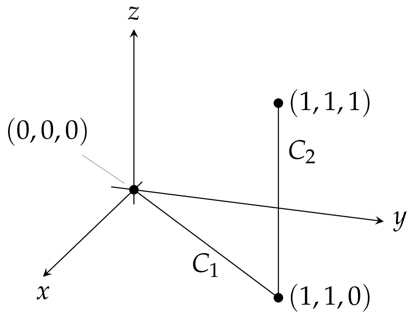
جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t && \text{مساوات } 15.3\\
&= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\Big[t^2 - t^3\Big]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

□



شکل 15.2: تکمل کی راہ (مثال 15.1)۔



شکل 15.3: تکمل کی راہ (مثال 15.2)۔

15.1.1 جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1 ، C_2 ، $\cdots$ ، C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکملات کا مجموعہ ہو گا:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s \tag{15.4}$$

مثال 15.2: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ C_1 اور C_2 پر چل کر پہنچا جاتا ہے (شکل 15.3)۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم C_1 اور C_2 کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1
\end{aligned}$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_{C_1\cup C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s && \text{مساوات 15.4}\\
&= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 (t-3t^2+0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-3+t)(1)\,\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{2}\Big[\frac{t^2}{2} - t^3\Big]_0^1 + \Big[\frac{t^2}{2} - 2t\Big]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

یہاں مثال 15.1 اور مثال 15.2 کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا تکمل لینے کے لئے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ تکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔سوم، مثال 15.1 میں C اور مثال 15.2 میں $C_1 \cup C_2$ پر تکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تکملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے تکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

کمیت: $$M = \iiint_D \delta(x, y, z)\,\mathrm{d}H$$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\delta\,\mathrm{d}s$$

مرکز کمیت کے محدد:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2)\delta\,\mathrm{d}s & I_y &= \int_C (x^2 + z^2)\delta\,\mathrm{d}s \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2)\delta\,\mathrm{d}s & I_L &= \int_C r^2\delta\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

جہاں لکیر L سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

لکیر L کے لحاظ سے رداس دوار: $$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

مثال 15.3: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پایا جاتا ہے (شکل 15.4)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس اسپرنگ کی کثافت مستقل تفاعل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کمیت اور مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکلی کی بنا اس کا مرکز کمیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $\left|\boldsymbol{v}(t)\right|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{v}(t)\right| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
&= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}
\end{aligned}$$

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\text{پیچدار}} \delta\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2)\delta\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)(\sqrt{17})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}} = 1
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔ □

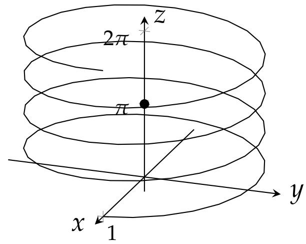
مثال 15.4: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے (شکل 15.5)۔ محراب کے نقطہ (x, y, z) پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کمیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

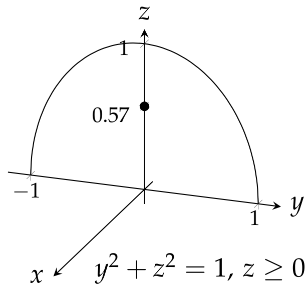
$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \pi$$

لکھتے ہوئے $\bar{z}$ دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

$$\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$



شکل 15.4: اسپرنگ برائے مثال 15.3



شکل 15.5: محراب کا مرکز کمیت (مثال 15.4)۔

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_C \delta \, \mathrm{d}s = \int_C (2 - z) \, \mathrm{d}s = \int_0^{\pi} (2 - \sin t) \, \mathrm{d}t = 2\pi - 2 \\
M_{xy} &= \int_0^C z\delta \, \mathrm{d}s = \int_C z(2 - z) \, \mathrm{d}s = \int_0^{\pi} (\sin t)(2 - \sin t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} (2 \sin t - \sin^2 t) \, \mathrm{d}t = \frac{8 - \pi}{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
\end{aligned}
$$

یوں مرکز کمیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔ □

سوالات

سمتی مساوات کی ترسیمات

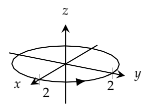
سوال 1 تا سوال 8 میں دی گئی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل 15.6 تا شکل 15.13 میں تلاش کریں۔ سوال 1: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1 - t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 2: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$

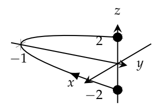
سوال 3: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 4: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}, \quad -1 \leq t \leq 1$

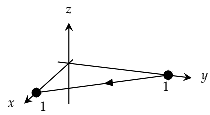
سوال 5: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$



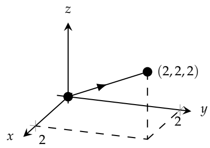
شکل 15.6



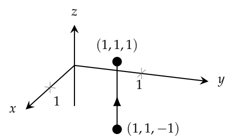
شکل 15.7



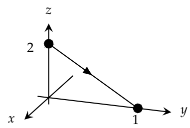
شکل 15.8



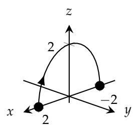
شکل 15.9



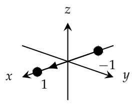
شکل 15.10



شکل 15.11



شکل 15.12



شکل 15.13

سوال 6: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$

سوال 7: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 1$

سوال 8: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

فضائی منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 9: تکمل $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0,1,0)$ تا $(1,0,0)$ خط مستقیم $x=t$ ، $y=(1-t)$ ، $z=0$ ہے۔

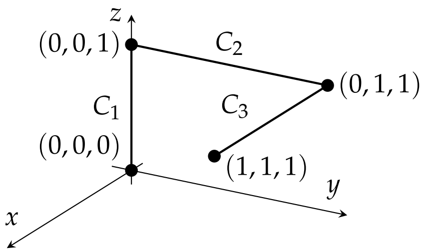
سوال 10: تکمل $\int_C (x-y+z-2)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0,1,1)$ تا $(1,0,1)$ خط مستقیم $x=t$ ، $y=(1-t)$ ، $z=1$ ہے۔

سوال 11: تکمل $\int_C (xy+y+z)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 2t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\, 0 \le t \le 1$ پر حاصل کریں۔

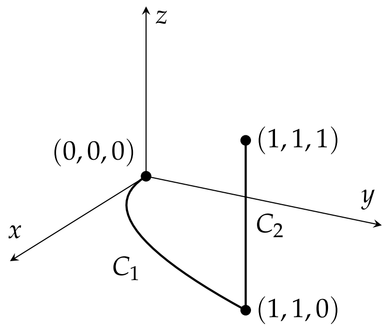
سوال 12: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\boldsymbol{i} + 4\sin t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\, -2\pi \le t \le 2\pi$ پر تکمل $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 13: تفاعل $f(x,y,z) = x+y+z$ کا تکمل $(1,2,3)$ تا $(0,-1,1)$ خط مستقیم قطع پر تلاش کریں۔

سوال 14: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\, 1 \le t \le \infty$ پر تلاش کریں۔



شکل 15.15: ٹکڑوں میں خطی راہ برائے سوال 16



شکل 15.14: راہ برائے تکمل (سوال 15)

سوال 15: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل 15.14)۔

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

سوال 16: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل 15.15)۔

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

سوال 17: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 < a \le t \le b$ پر تلاش کریں۔

سوال 18: تفاعل $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+z^2}$ کا تکمل درج ذیل دائری راہ پر تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

مسطح منحنیات پر لکیری تکملات

سوال 19 تا سوال 22 میں f کا تکمل دی گئی منحنی پر تلاش کریں۔

سوال 19: $f(x,y)=\frac{x^3}{y},\quad C:\ y=\frac{x^2}{2},\quad 0\le x\le 2$

سوال 20: $(1,\frac{1}{2})$ سے $(0,0)$ تک $f(x,y)=\frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}},\quad C:\ y=\frac{x^2}{2},$

سوال 21: ربع اول میں $(2,0)$ سے $(0,2)$ تک $f(x,y)=x+y,\quad C:\ x^2+y^2=4,$

سوال 22: ربع اول میں $(0,2)$ سے $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ تک $f(x,y)=x^2-y,\quad C:\ x^2+y^2=4,$

کمیت اور معیار اثر

سوال 23: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta=\frac{3}{2}t$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t)=(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 24: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta(x,y,z)=15\sqrt{y+2}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t)=(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},\ -1\le t\le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کر کے اس پر مرکز کمیت دکھائیں۔

سوال 25: منحنی $\boldsymbol{r}(t)=\sqrt{2}t\boldsymbol{j}+(4-t^2)\boldsymbol{k}\, 0\le t\le 1$ کے ساتھ ساتھ ایک پتلی تار پائی جانے والی تار کی کثافت (ا) $\delta=3t$، (ب) $\delta=1$ ہے۔اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 26: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta=3\sqrt{5+t}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 27: مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر مستقل کثافت δ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 28: مستوی yz میں لکیری قطع $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{j}+(2-2t)\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 1$ پر مستقل کثافت کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 29: مستقل کثافت δ کی ایک پتلی تار پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ (ا) I_z اور R_z تلاش کریں۔ (ب) فرض کریں مستقل کثافت δ کی ایک دوسری پتلی تار، جس کی لمبائی دگنی ہے ($0\le t\le 4\pi$)، اسی منحنی $\boldsymbol{r}(t)$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ بغیر حل کیے بتلائیں کہ آیا اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار پہلی تار سے مختلف ہوں گے؟ اب انہیں حل کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 30: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + (\frac{2\sqrt{2}}{3})t^{3/2}\boldsymbol{k},\, 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ اس کی $\bar{z}$ ، I_z اور R_z تلاش کریں۔

سوال 31: مثال 15.4 کی محراب کے لئے I_z اور R_z تلاش کریں۔

سوال 32: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{1}{t+1}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k},\, 0 \le t \le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 33 تا سوال 36 میں کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام سے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کے لئے $\mathrm{d}s = \left|\boldsymbol{v}(t)\right| \mathrm{d}t$ دریافت کریں۔

ب. متکمل $f(g(t), h(t), k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|$ کو مقدار معلوم t کا تفاعل لکھیں۔

ج. تکمل $\int_C f \,\mathrm{d}s$ کی قیمت مساوات 15.3 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 33: $f(x,y,z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y}; \quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2$

سوال 34: $f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}; \quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}t^2\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2$

سوال 35: $f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2; \ \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 36: $f(x,y,z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}; \ \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + t^{5/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

15.2 سمتی میدان، کام، دائری بہاو، اور بہاو

ان طبعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر تکملات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر تکملات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لئے درکار کام اس طرح کے تکملات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات عبور کرتا ہوا سیال کے بہاو کی شرح بھی لکیری تکملات سے حاصل کی جاتی ہے۔

سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر **سمتی میدان**[2] سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ سہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

استمراری جزوی تفاعل M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x, y) = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کا سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کی ہمراہ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل 15.16 تا شکل 15.20 میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے ناکہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب 12) کے لئے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبدا پر رکھا جاتا ہے جبکہ اس کا سر سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

میدان ڈھلوان

تعریف: قابل تفرق تفاعل $f(x, y, z)$ کے **میدان ڈھلوان**[3] سے مراد سمتیات ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

کا میدان ہے۔

□

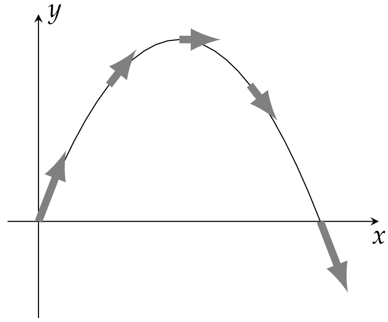
مثال 15.5: تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

حل: تفاعل f کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان $\boldsymbol{F} = \nabla f = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ ہے۔ □

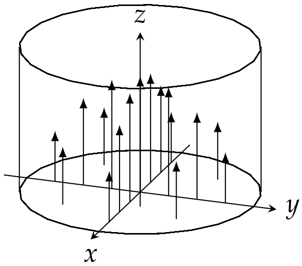
ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، ریاضیات، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

---

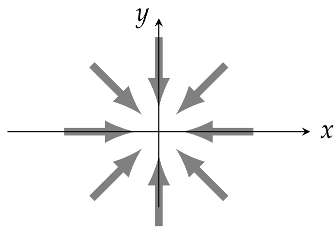
[2] vector field
[3] gradient field



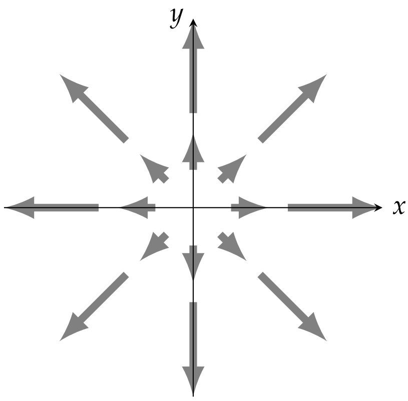
شکل 15.16: گول انداز کے سمتی رفتاری سمتیات $\boldsymbol{v}(t)$ سمتی میدان دیتے ہیں۔



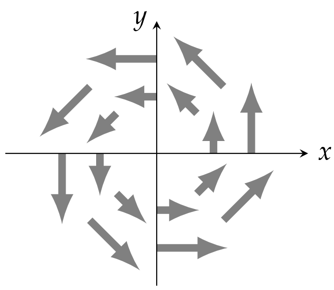
شکل 15.17: لمبی نالی میں سیال کی حرکت۔ سمتیات $\boldsymbol{v} = (a^2 - \rho^2)\boldsymbol{k}$ کی دم مستوی xy میں اور سر قطع مکافی $z = a^2 - \rho^2$ پر پائے جاتے ہیں۔



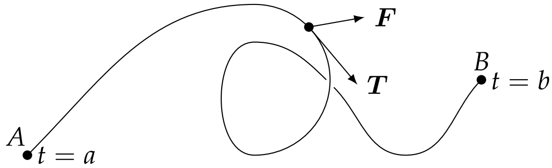
شکل 15.18: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -\frac{GM(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ میں سمتیات۔



شکل 15.19: مستوی میں مختلف نقاط پر رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ جہاں تیر دار لکیر کی دم اس نقطہ پر رکھی جاتی ہے جہاں کا سمتیہ درکار ہو۔



شکل 15.20: اکائی سمتیات $\boldsymbol{F} = \frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کا چکری میدان۔



شکل 15.21: ہموار راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر A سے B تک استمراری قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام $t = a$ تا $t = b$ راہ کی ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل ہو گا۔

فضا میں منحنی کی ہمراہ قوت کا کیا ہوا کام

فرض کریں فضا کے ایک خطہ میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقناطیسی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطہ میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \leq t \leq b$$

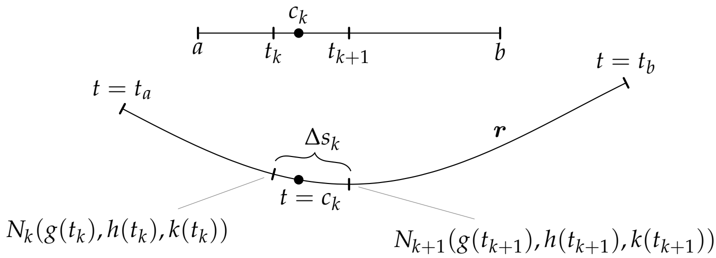
ایسی صورت میں منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ ، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو، کے تکمل کو a تا b $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام کہتے ہیں (شکل 15.21)۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر a تا b قوت $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ کا کیا ہوا کام W درج ذیل ہو گا۔

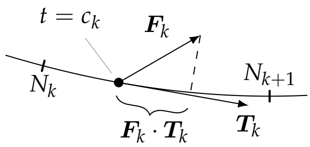
$$W = \int_{t=1}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}s \tag{15.5}$$

□

مثبت محور x رخ مقدار $F(x)$ کی استمراری قوت کے کام کا کلیہ $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ حصہ 6.8 میں اخذ کیا گیا۔ مساوات 15.5 کے حصول کے دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطع پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطع کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینی مجموعات کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لئے کہ تحدیدی تکمل کی قیمت کیا ہو گی، ہم قطع $[a,b] =$ کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطع $[t_k, t_{k+1}]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ قطع I کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کا سر نقطہ N_k پر ہو گا اور ذیلی قطع N_kN_{k+1} کی لمبائی Δs_k ہو گی (شکل 15.22)۔ اگر منحنی پر $t = c_k$ کے مطابقتی نقطہ پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت $\boldsymbol{F}_k$ اور منحنی کا مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}_k$ ہو تب $t = c_k$ پر $\boldsymbol{T}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو $\boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k$ ہو گا (شکل 15.23)۔ منحنی کے قطع N_kN_{k+1} کی ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔



شکل 15.22: مقدار معلوم وقفہ $a \leq t \leq b$ کی ہر خانہ بندی منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کی خانہ بندی پیدا کرتی ہے۔



شکل 15.23: گزشتہ شکل کے قطع N_kN_{k+1} کو بڑا کر کے $t = c_k$ کے مطابقتی نقطہ پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور قوت سمتیہ $\boldsymbol{F}$ دکھائے گئے ہیں۔

$$\big(\text{حرکت کے رخ قوت کا جزو}\big) \times \big(\text{طے فاصلہ}\big) = \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

منحنی کی ہمراہ $t = a$ تا $t = b$ کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

جیسا جیسا $[a, b]$ کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری تکمل کو پہنچتا ہے۔

$$\int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \,\mathrm{d}s$$

اس تکمل سے حاصل عدد کی علامت، t بڑھانے سے حاصل پر چلنے کے، رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے $\boldsymbol{T}$ کا رخ الٹ ہو گا جس کی بنا $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ اور تکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

علامتیت اور قیمت کا حصول

تکمل کام (مساوات 15.5) کو لکھنے کے چھ طریقے درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s && \text{تعریف}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} && \text{مختصر تفریقی روپ}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && \text{پھیلا کر } \mathrm{d}t \text{ شامل کیا گیا ہے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \Big(M\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+N\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}t && \text{مقدار معلوم } t \text{ اور سمتی رفتار } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \text{ اجاگر کیے گئے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \Big(M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}t && \text{جزوی تفاعل اجاگر کیے گئے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z && \mathrm{d}t \text{ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کی گئی}
\end{aligned}
\tag{15.6}
$$

مساوات 15.6 کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔

تکمل کام کی قیمت کا حصول

تکمل کام کی قیمت حاصل کرنے کے اقدام درج ذیل ہیں۔

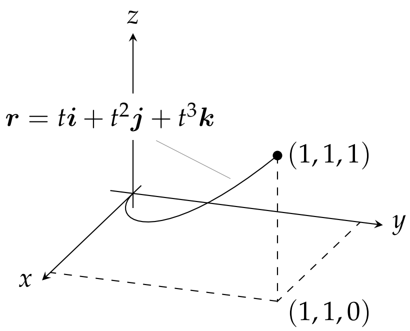
1. منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت مقدار معلوم t کے تفاعل کی روپ میں لکھیں۔

2. تفرق $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

3. $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب لیں۔

4. $t=a$ سے $t=b$ تک تکمل کریں۔

مثال 15.6: منحنی $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 1$ کی ہمراہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک $\boldsymbol{F}=(y-x^2)\boldsymbol{i}+(z-y^2)\boldsymbol{j}+(x-z^2)\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں (شکل 15.24)۔



شکل 15.24: منحنی برائے مثال 15.6

حل:
پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت کا حصول۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k} \\ &= (\underbrace{t^2 - t^2}_{0})\boldsymbol{i} + (t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= [(t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}] \cdot (\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = 0$ تا $t = 1$ تکمل۔

$$\begin{aligned}\text{کام} = W &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}\end{aligned}$$

□

تکمل ہمراہ بہاو اور دائری بہاو

فرض کریں $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ میدان قوت کی بجائے فضا کے ایک خطہ (مثلاً پانی سے چلنے والے جنریٹر کا چرخی خانہ یا سمندری طاس) میں بہتا ہوا سیال کے سمتی رفتاری میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسی صورت میں منحنی کی ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل، منحنی کی ہمراہ سیال کا بہاو دے گا۔

تعریف: استمراری سمتی رفتاری میدان کے دائرہ کار میں ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ پر a سے b تک $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل، $t = a$ سے $t = b$ تک منحنی کا ہمراہ بہاو دے گا:

$$\text{ہمراہ بہاو} = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s \tag{15.7}$$

اس تکمل کو **تکمل ہمراہ بہاو**[4] کہتے ہیں۔ بند منحنی کی صورت میں اس بہاو کو منحنی کے گرد منحنی کی ہمراہ **دائری بہاو**[5] کہتے ہیں۔

□

تکمل ہمراہ بہاو کی قیمت بھی تکمل کام کی قیمت کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 15.7: ایک سیال کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ ہے۔ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ اس کی ہمراہ بہاو تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}$$

حل:
پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{k}$$

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1)\\ &= -\sin t\cos t + t\cos t + \sin t\end{aligned}$$

---

[4] flow integral
[5] circulation

چوتھا قدم: $t=a$ تا $t-b$ تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{بہاو} &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(-\sin t\cos t + t\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big[\frac{\cos^2 t}{2} + \sin t\Big]_0^{\pi/2} = \Big(0+\frac{\pi}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{2}+0\Big) = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

مثال 15.8: میدان $\boldsymbol{F}=(x-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$ کا دائرہ $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j},\ 0\le t\le 2\pi$ کی ہمراہ دائرہ کے گرد دائری بہاو تلاش کریں۔

حل:

1. دائرہ پر $\boldsymbol{F}=(x-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}=(\cos t-\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}$ ہو گا۔

2. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(-\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}$

3. $\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\sin t\cos t+\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}$

4. دائری بہاو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{دائری بہاو} &= \int_0^{2\pi}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(1-\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big[t-\frac{\sin^2 t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

□

مستوی منحنی کو عبور کرتا ہوا بہاو

مستوی xy میں ہموار بند منحنی C میں محیط خطہ سے سیال کے اخراج و دخول کی شرح C پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمودی اکائی سمتیہ کے رخ رفتاری میدان کے غیر سمتی جزو) کے لکیری تکمل سے حاصل ہو گی۔ اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاو (یا **نفاذ**) کہتے ہیں۔ برقی یا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں بھی اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا بہاو یا نفاذ کہیں گے اگرچہ ان میں کوئی بہتا ہوا سیال نہیں پایا جاتا ہے۔

تعریف: استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ کار میں ہموار مسطح بند منحنی C جس کا بیرونی رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہو کی صورت میں C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا **بہاو**[6] درج ذیل تکمل دے گا۔

$$\text{کا بہاو } \boldsymbol{F} \text{ عبور کرتا ہوا } C=\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{15.8}$$

□

منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاو (نفاذ) اور دائری بہاو میں فرق سے واقف ہونا ضروری ہے۔ منحنی C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کے بہاو سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمود کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ بند منحنی C کے گرد $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاو سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ (منحنی کے اکائی مماس کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ منحنی عبور کرتا ہوا بہاو سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل جبکہ دائری بہاو سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کا تکمل ہے۔ روز مرہ زندگی میں منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاو یعنی نفاذ کو مختصراً **بہاو** کہا جاتا ہے۔

مساوات 15.8 کے تکمل کی قیمت معلوم کرنے کی خاطر ہم مقدار معلوم روپ

$$x=g(t),\quad y=h(t),\quad a\le t\le b$$

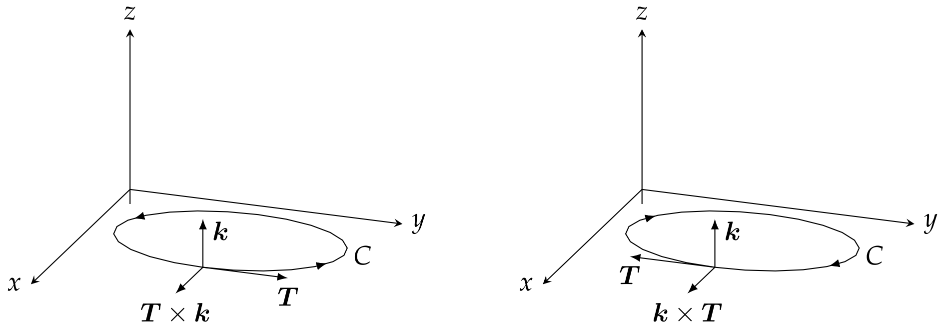
سے ابتدا کرتے ہیں۔یوں t کی قیمت a سے b تک بڑھانے سے منحنی پر ایک سر سے دوسرے سر تک ٹھیک ایک بار چلا جائے گا۔ منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور کارتیسی محددی نظام کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{k}$ کا سمتی ضرب منحنی کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دے گا۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایسے دو سمتی ضرب $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}$ پائے جاتے ہیں۔ان میں کونسا بیرونی اکائی سمتیہ دے گا؟ مقدار معلوم t بڑھانے سے C پر چلنے کے رخ پر اس کا جواب منحصر ہو گا۔ اگر منحنی پر حرکت گھڑی وار ہو تب $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا جبکہ خلاف گھڑی حرکت کی صورت میں $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا (شکل 15.25)۔ عموماً خلاف گھڑی حرکت کے لئے کلیات اخذ کیے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ ہو گا۔اگرچہ مساوات 15.8 میں دیے گئے تکمل کی قیمت منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر نہیں ہے، ہم خلاف گھڑی حرکت تصور کرتے ہوئے مساوات 15.8 کو حل کرنے کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔

ارکان کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}=\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}\Big)\times\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

---

[6] flux



(ا) گھڑی وار حرکت کے لئے $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ باہر رخ ہو گا۔

(ب) خلاف گھڑی حرکت کے لئے $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ باہر رخ ہو گا۔

شکل 15.25: ہموار منحنی C، جو بڑھتے t کی صورت میں مستوی xy میں خلاف گھڑی حرکت کرتی ہو، کا باہر رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ ہو گا۔

اگر $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ ہو تب

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = M(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

لہٰذا

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_C \left(M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x \tag{15.9}$$

یاد رہے کہ C پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے بند تکمل $\oint$ کی قیمت حاصل کی جائے گی۔ اس تکمل کے حصول کی خاطر ہم M ، $\mathrm{d}y$ ، N اور $\mathrm{d}x$ کو مقدار معلوم t کی روپ میں لکھ کر $t = a$ تا $t = b$ تکمل لیتے ہیں۔ ہمیں بہاو (نفاذ) تلاش کرنے کے لئے $\boldsymbol{n}$ یا $\mathrm{d}s$ جاننے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ منحنی C پر خلاف گھڑی ٹھیک ایک بار چلتے ہوئے کوئی بھی ہموار مقدار معلوم روپ $x = g(t)$ ، $y = h(t)$ ، جہاں $a \le t \le b$ ہو، استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال 15.9: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو پار کرتا ہوا $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا بہاو (نفاذ) تلاش کریں۔

حل: مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ دائرے پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے لہٰذا مساوات 15.9 حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} M &= x - y = \cos t - \sin t, &\qquad \mathrm{d}y &= \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t \\ N &= x = \cos t, &\qquad \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}&= \int_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t\cos t + \cos t\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big]_0^{2\pi} = \pi\end{aligned} \tag{15.9}$$

دائرہ کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاو π ہے۔چونکہ نتیجہ مثبت ہے لہٰذا دائرے سے کل بہاو کا رخ باہر کو ہو گا۔ دائرے میں دخول کی صورت میں نتیجہ منفی ہوتا۔ □

سوالات

سمتی میدان اور میدان ڈھلوان

سوال 1 تا سوال 4 میں تفاعل کے میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال 2: $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

سوال 3: $g(x,y,z) = e^z - \ln\sqrt{x^2+y^2}$

سوال 4: $g(x,y,z) = xy + yz + xz$

سوال 5: مستوی میں سمتی میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $\boldsymbol{F}$ کی مقدار مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے مربع کا بالعکس متناسب ہو اور $\boldsymbol{F}$ کا رخ مبدا کے رخ ہو۔(یہ میدان مبدا پر غیر معین ہے۔)

سوال 6: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $(0,0)$ پر $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ ہو جبکہ کسی دوسرے نقطہ (a,b) پر $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{a^2+b^2}$ اور دائرہ $x^2+y^2 = a^2+b^2$ کو میدان گھڑی وار مماسی ہو۔

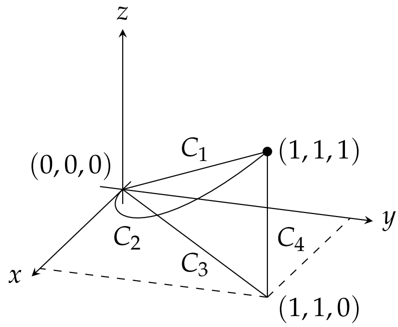
کام

سوال 7 تا سوال 12 میں $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام درج ذیل راہوں پر تلاش کریں (شکل 15.26)۔

ا. سیدھی لکیر $C_1:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ب. قوسی راہ $C_2:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ج. راہ $C_3 \cup C_4$ جو $(0,0,0)$ تا $(1,1,0)$ اور $(1,1,0)$ تا $(1,1,1)$ خطی قطعات پر مشتمل ہے۔



شکل 15.26

سوال 7: $\boldsymbol{F} = 3y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

سوال 8: $\boldsymbol{F} = \frac{1}{1+x^2}\boldsymbol{j}$

سوال 9: $\boldsymbol{F} = \sqrt{z}\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \sqrt{y}\boldsymbol{k}$

سوال 10: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$

سوال 11: $\boldsymbol{F} = (3x^2 - 3x)\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 12: $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$

سوال 13 تا سوال 16 میں بڑھتے t رخ $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

سوال 13: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

سوال 14: $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k},$
$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال 15: $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال 16: $\boldsymbol{F} = 6z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + 12x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

لکیری تکمل اور مستوی میں سمتی میدان

سوال 17: نقطہ $(-1,1)$ سے $(2,4)$ تک منحنی $y = x^2$ پر $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 18: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں پر $\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت خلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 19: نقطہ $(4,2)$ سے $(1,-1)$ تک منحنی $x = y^2$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 20: نقطہ $(1,0)$ سے $(0,1)$ تک اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 21: نقطہ $(1,1)$ سے $(2,3)$ تک سیدھی لکیر پر قوت $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال 22: تفاعل $f(x,y) = (x+y)^2$ کی ڈھلوان کا کام دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ پر خلاف گھڑی نقطہ $(2,0)$ سے چلتے ہوئے ایک چکر کے لئے تلاش کریں۔

سوال 23: میدان $\boldsymbol{F}_1 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{F}_2 = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاو درج ذیل منحنیات کی ہمراہ تلاش کریں اور ان منحنیات کو عبور کرتا ہوا بہاو تلاش کریں۔

ا. دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

ب. ترخیم $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال 24: دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ کو عبور کرتا ہوا بہاو درج ذیل میدان کے لئے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{F}_1 = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{F}_2 = 2x\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$$

سوال 25 تا سوال 28 میں نصف دائری قوس $\boldsymbol{r}_1(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le \pi$ اور قطع $\boldsymbol{r}_2(t) = t\boldsymbol{i},\ -a \le t \le a$ پر مشتمل نصف دائری راہ کی ہمراہ بہاو اور اس کو عبور کرتا ہوا بہاو، میدان $\boldsymbol{F}$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 25: $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$

سوال 26: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$

سوال 27: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال 28: $\boldsymbol{F} = -y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$

سوال 29: سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ کے بہاو کے تکمل کی قیمت درج ذیل راہ کی ہمراہ مستوی xy میں نقطہ $(1,0)$ سے $(-1,0)$ تک تلاش کریں۔

ا. دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کا بالائی نصف حصہ۔

ب. نقطہ $(1,0)$ تا $(-1,0)$ لکیری قطع۔

ج. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,-1)$ اور اس کے بعد $(0,-1)$ سے $(-1,0)$ تک لکیری قطع۔

سوال 30: ایک مثلث، جس کے راس $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(-1,0)$ ہیں، سے خارجی بہاو سوال 29 کے میدان کے لئے تلاش کریں۔

مستوی میں میدان کی تلاش اور خاکہ

سوال 31: چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال 32: رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال 33: (ا) مستوی xy میں میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جس کی قیمت نقطہ $(a,b) \neq (0,0)$ پر $\sqrt{a^2+b^2}$ ، رخ خلاف گھڑی اور دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 34: (ا) مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(a,b) \neq (0,0)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو، اس کی مطلق قیمت اکائی ہو اور اس کا رخ گھڑی وار ہو۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

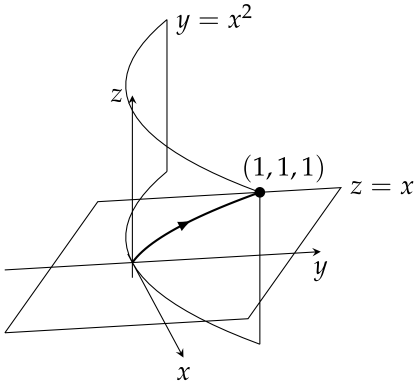
سوال 35: مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور اس کی مطلق قیمت اکائی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

سوال 36: مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور $|\boldsymbol{F}|$ کی قیمت (ا) مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے برابر ہو، (ب) مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

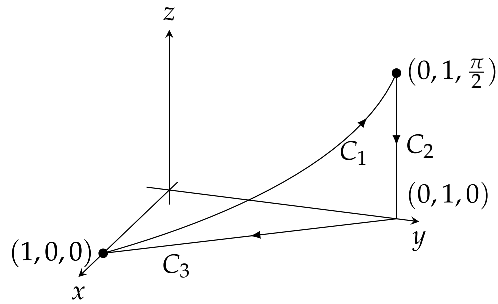
فضا میں راہ کے ہمراہ تکمل بہاو

سوال 37 تا سوال 40 میں فضا کے کسی خطہ میں سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F}$ سیال کے بہاو کو ظاہر کرتا ہے۔ دی گئی منحنی کی ہمراہ بہاو، بڑھتے t کے رخ تلاش کریں۔

سوال 37: $\boldsymbol{F} = -4xy\boldsymbol{i} + 8y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$



شکل 15.28



شکل 15.27

سوال 38: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$, $0 \le t \le 1$

سوال 39: $\boldsymbol{F} = (x-z)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{k}$, $0 \le t \le \pi$

سوال 40: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$,
$\boldsymbol{r}(t) = (-2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

سوال 41: بڑھتے t رخ چلتے ہوئے درج ذیل تین عدد بند راہ پر $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاو تلاش کریں (شکل 15.27)۔

$$\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}\\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{j} + \tfrac{\pi}{2}(1-t)\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le 1\\
C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j}, && 0 \le t \le 1
\end{aligned}$$

سوال 42: مستوی $2x + 3y - z = 0$ اور بیلن $x^2 + y^2 = 12$ ایک دوسرے کو ترخیم C پر قطع کرتے ہیں۔ بغیر کوئی تکمل حل کیے دکھائیں کہ میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا C پر دونوں رخ چلتے ہوئے دائری بہاو صفر کے برابر ہے۔

سوال 43: فضا میں ایک سیال کے بہاو کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$ ہے۔ بیلن $y = x^2$ اور مستوی $z = x$ کی تقاطع لکیر کی ہمراہ نقطہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک بہاو تلاش کریں (شکل 15.28)۔ (اشارہ: $t = x$ کو مقدار معلوم لیں۔)

سوال 44: میدان $\boldsymbol{F} = \nabla(xy^2z^3)$ کا بہاو درج ذیل کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. اوپر سے دیکھ کر گھڑی وار ایک بار چکر لگاتے ہوئے سوال 42 میں دی گئی C کی ہمراہ۔

ب. نقطہ $(1,1,1)$ تا $(2,1,-1)$ لکیری قطع کی ہمراہ۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: فرض کریں $a \le t \le b$ کے لئے $f(t)$ قابل تفرق اور مثبت ہے۔ مزید $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$ ہے جبکہ راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j},\ a \le t \le b$ کو C ظاہر کرتی ہے۔ کیا محور t، لکیر $t = a$ ، $t = b$ اور ترسیم f کے بیچ رقبہ اور تکمل کام $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کا ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 46: ایک ذرہ نقطہ $(a, f(a))$ سے $(b, f(b))$ تک ہموار منحنی $y = f(x)$ پر حرکت کرتا ہے۔ محرک قوت ہر نقطہ پر مبدا سے دوری کے رخ ہے جبکہ اس کی مطلق قیمت مستقل k ہے۔ دکھائیں کہ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = k\Big[\sqrt{b^2 + (f(b))^2} - \sqrt{a^2 + (f(a))^2}\Big]$$

کمپیوٹر کا استعمال سوال 47 تا سوال 52 میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے دی گئی راہ پر قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کے لئے $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ تلاش کریں۔

ب. راہ کی ہمراہ قوت $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ج. تکمل $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 47: $\boldsymbol{F} = xy^6\boldsymbol{i} + 3x(xy^5 + 2)\boldsymbol{j};\ \boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال 48: $\boldsymbol{F} = \frac{3}{1+x^2}\boldsymbol{i} + \frac{2}{1+y^2}aj;\ \boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le \pi$

سوال 49: $\boldsymbol{F} = (y + yz\cos xyz)\boldsymbol{i} + (x^2 + xz\cos xyz)\boldsymbol{j} + (z + xy\cos xyz)\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i} + 3\sin t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال 50: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + ze^x\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = -t\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 4$

سوال 51: $\boldsymbol{F} = (2y + \sin x)\boldsymbol{i} + (z^2 + \frac{1}{3}\cos y)\boldsymbol{j} + x^4\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j} + \sin 2t\boldsymbol{k},\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال 52: $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + (2\sin^2 t - 1)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

15.3 راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کمیت یا بار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے نا کہ منتقلی کی راہ پر۔اس حصہ میں تکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں تکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ D پر معین میدان $\boldsymbol{F}$ ایک ذرہ کو D میں نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتا ہے۔ عموماً تکمل کام $\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہو گی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں تکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر D میں تمام A اور B کے لئے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ D میں $\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ راہ سے آزاد ہے اور D پر $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ D پر $\boldsymbol{F}$ کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ D میں ہر دو نقطوں A اور B کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر تکمل کام $\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت ایک جیسی ہے۔ تب تکمل $\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ خطہ D میں **راہ سے آزاد**[7] ہو گا اور میدان $\boldsymbol{F}$ خطہ D پر **بقائی**[8] ہو گا۔

□

عملی زندگی میں عموماً میدان $\boldsymbol{F}$ صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب D پر $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں f ایک غیر سمتی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل f کو $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر D پر میدان $\boldsymbol{F}$ معین ہو اور $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں f خطہ D پر ایک غیر سمتی تفاعل ہو تب f کو $\boldsymbol{F}$ کا **مخفی قوہ تفاعل**[9] کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل f جاننے کے بعد $\boldsymbol{F}$ کی دائرہ کار میں تمام تکملات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A) \tag{15.10}$$

[7] path independent
[8] conservative
[9] potential function

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق f' کی طرح ∇f کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لئے فرض کریں تب مساوات 15.10 کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

کا مطابقتی سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً، D پر بقائی $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں D میں ہر بند راہ پر تکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات 15.10 اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل منحنی، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **ٹکڑوں میں ہموار**[10] ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ 12.1 کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرقات پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد $\boldsymbol{F} = \nabla f$ کی صورت میں مخفی قوہ تفاعل f کے مدغم تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کے خواص پر غور کے دوران آفشاں انگیز ثابت ہو گا۔

ہم فضا میں D کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں D میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ D **تعلق (دار)**[11] خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جا سکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

بقائی میدان میں لکیری تکملات

بقائی میدان میں لکیری تکملات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اس نتیجہ کے تحت تکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ 15.1: ***لکیری تکملات کا بنیادی مسئلہ***

1. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ D میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے اجزاء استمراری ہیں۔ تب صرف اور صرف اس صورت جب D میں تمام نقاط A اور B کے لئے تکمل $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت، D کے اندر رہتے ہوئے A اور B کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل f موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\boldsymbol{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

---

[10] piecewise smooth
[11] connected

2. اگر تکمل کی قیمت A اور B کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: کہ $\boldsymbol{F} = \nabla f$ سے مراد تکمل کی قیمت کا راہ سے آزاد ہونا ہے

فرض کریں D میں A اور B دو نقطے ہیں اور D میں A سے B تک ہموار راہ درج ذیل ہے۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

منحنی کی ہمراہ t کے لحاظ سے C قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} && \text{زنجیری قاعدہ}\\
&= \nabla f \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right) = \nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{15.11}\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && \text{مساوات 15.11}\\
&= f(g(t), h(t), k(t))\Big]_a^b = f(B) - f(A)\end{aligned}$$

اس طرح تکمل کام کی قیمت A اور B پر f کی قیمتوں پر منحصر ہو گی نا کہ ان کے بیچ راہ پر۔ یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔

□

مثال 15.10: نقاط $(-1, 3, 9)$ اور $(1, 6, -4)$ کے بیچ ہموار منحنی C پر چلتے ہوئے درج ذیل بقائی میدان کا کم تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k} = \nabla(xyz)$$

حل: $f(x, y, z) = xyz$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} && \boldsymbol{F} = \nabla f\\
&= f(B) - f(A) && \text{مسئلہ 15.1 کا جزو دوم}\\
&= xyz\big|_{(1,6,-4)} - xyz\big|_{(-1,3,9)}\\
&= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9)\\
&= -24 + 27 = 3\end{aligned}$$

شکل 15.29: دو نقطوں کے بیچ دو راہ میں سے ایک راہ کا رخ تبدیل کرتے ہوئے بند راہ حاصل کی جا سکتی ہے۔

شکل 15.30: بند راہ پر نقاط A اور B کی صورت میں ایک طرف راہ کا رخ تبدیل کر کے نقاط کے بیچ دو راہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

□

مسئلہ 15.2: درج ذیل فقرے معادل ہیں۔

ا. خطہ D میں ہر بند راہ پر $\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ ہے۔

ب. خطہ D پر میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

ثبوت: جزو-ا
ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ D میں کسی بھی دو نقاط A اور B کے بیچ کسی بھی دو راہوں C_1 اور C_2 پر $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کے تکملات کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ ہم شکل 15.29 میں C_2 کا رخ الٹ کر کے B سے A تک راہ کو $-C_2$ لکھتے ہیں۔ راہ C_1 اور راہ $-C_2$ مل کر بند راہ C دیتے ہیں۔ اب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{-C_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

یوں C_1 اور C_2 پر تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔

□

ثبوت : جزو-ب
ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ ہر بند راہ C پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کا تکمل صفر ہے۔ ہم C پر کسی دو نقطوں A اور B کا انتخاب کر کے C کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں: نقطہ A سے B تک ٹکڑے کو C_1 اور نقطہ B سے A تک ٹکڑے کو C_2 لیتے ہوئے خلاف گھڑی تکمل درج ذیل ہو گا (شکل 15.30)۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_B^A \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

□

مسئلہ 15.1 اور مسئلہ 15.2 کے نتائج کو یکجا کرتے ہیں۔

$$D \text{ پر } \boldsymbol{F} = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad D \text{ پر } \boldsymbol{F} \text{ بقائی ہے} \quad \Leftrightarrow \quad D \text{ میں کسی بھی بند راہ پر } \oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

یہ جانتے ہوئے کہ بقائی میدان میں لکیری تکملات کا حل کتنا آسان ہے، دو سوالات پیدا ہوتے ہیں:

1. ہمیں کیسے جان سکتے ہیں کہ میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے؟
2. بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کا مطابقتی مخفی قوہ تفاعل f کیسے دریافت کیا جا سکتا ہے (جہاں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو گا)۔

بقائی میدان کا مخفی قوہ تفاعل کا حصول

بقائی میدان کا پرکھ درج ذیل ہے۔

بقائی میدان کا اجزائی پرکھ

میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ جس کے اجزائی تفاعل کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{15.12}$$

□

ثبوت پرکھ: ہم دکھاتے ہیں کہ بقائی $\boldsymbol{F}$ کے لئے مساوات 15.12 ہر صورت مطمئن ہو گا۔ایسا مخفی قوہ تفاعل f پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} && \text{استمراری ہونے کی بدولت مدغم جزوی تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z}
\end{aligned}$$

مساوات 15.12 کے باقی دو اجزاء بھی اسی طرح ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

ثبوت کا دوسرا حصہ، جس سے مراد لیا جا سکتا ہے کہ مساوات 15.12 کہتی ہے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہو گا، مسئلہ سٹوکس کا نتیجہ ہے۔

□

یہ جانتے ہوئے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے، ہم عموماً مخفی قوہ تفاعل f دریافت کرنا چاہیں گے جو مساوات $\nabla f = \boldsymbol{F}$ یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$$

کو f کے لئے حل کرنے سے حاصل ہو گا۔ ہم درج ذیل تین مساوات کا تکمل لے کر ایسا کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

مثال 15.11: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y + yz)\boldsymbol{i} + (xz - e^x \sin y)\boldsymbol{j} + (xy + z)\boldsymbol{k}$ بقائی ہے اور اس کا مخفی قوہ تفاعل f تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ کا اطلاق

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یہ مساوات مل کر ہمیں بتاتے ہیں کہ ایسا f پایا جاتا ہے جو $\nabla f = \boldsymbol{F}$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ہم درج ذیل مساواتوں کے تکملات سے f کو تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{15.13}$$

ہم بائیں سے شروع کرتے ہوئے y اور z کو مستقل تصور کر کے پہلی مساوات کا تکمل x کے لحاظ سے لیتے ہیں:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z) \tag{15.14}$$

ہم نے تکمل کے مستقل کو $g(y, z)$ لکھا ہے چونکہ اس کی قیمت y اور z کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

یوں $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ہو گا لہٰذا g کی قیمت صرف z پر منحصر ہو گی۔اس طرح مساوات 15.14 درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial z}$ معلوم کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial z}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$\begin{aligned} xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} &= xy + z \\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} &= z \quad \text{یعنی} \end{aligned}$$

متغیر z کے ساتھ تکمل لیتے ہیں:

$$h(z) == \frac{z^2}{2} + C$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

یوں مستقل C کی لا متناہی ممکنہ منفرد قیمتیں منتخب کر کے $\boldsymbol{F}$ کے لا متناہی تعداد کے مخفی قوہ تفاعل حاصل ہوں گے۔ □

مثال 15.12: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (2x-3)\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (\cos z)\boldsymbol{k}$ غیر بقائی ہے۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ استعمال کر کے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{F}$ غیر بقائی ہو گا۔ پرکھ کے باقی اجزاء کو دیکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔ □

قطعی تفرقی روپ

جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، تکمل کام اور تکمل دائری بہاو کا اظہار "تفرقی" روپ

$$\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$$

میں کرنا زیادہ مناسب ثابت ہوتا ہے (حصہ 15.2)۔ جہاں $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$ تفاعل f کا تفریقی روپ ہو وہاں ان تکملات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے۔ چونکہ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= f(B) - f(A) \qquad \text{مسئلہ 15.1}\end{aligned}$$

یوں واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

تعریف: روپ $M(x,y,z)\,\mathrm{d}x + N(x,y,z)\,\mathrm{d}y + P(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ کو **تفرقی روپ**[12] کہتے ہیں۔ فضا میں دائرہ کار D پر تفرقی روپ اس صورت قطعی تفرقی ہو گا جب پورے D میں کسی غیر سمتی تفاعل f درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

[12] differential form

□

دھیان رہے کہ D میں $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$ کی صورت میں D پر f کا میدان ڈھلوان $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{F}=\nabla f$ ہو تب روپ $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$ قطعی تفرقی ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{F}$ کے بقائی ہونا کا پرکھ ہی اس روپ کے قطعی تفرقی ہونے کا پرکھ ہو گا۔

قطعی تفرقی پرکھ برائے $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$
تفرقی روپ $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$ صرف اور صرف درج ذیل صورت قطعی تفرقی ہو گا۔

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z},\quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \text{اور}\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y} \tag{15.15}$$

یہ اس بات کا معادل ہے کہ میدان $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ بقائی ہے۔

□

مثال 15.13: دکھائیں کہ $y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے اور درج ذیل تکمل کی قیمت قطع $(1,1,1)$ تا $(2,3,-1)$ پر حاصل کریں۔

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}z$$

حل: ہم $M=y$ ، $N=x$ اور $P=4$ لے کر مساوات 15.15 میں دیا گیا پرکھ بروئے کار لاتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial z},\quad \frac{\partial M}{\partial z}=0=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1=\frac{\partial M}{\partial y}$$

ان مساوات کے تحت $y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے لہٰذا

$$y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$$

ہو گا جہاں f کوئی غیر سمتی تفاعل ہے اور تکمل کی قیمت $f(2,3,-1)-f(1,1,1)$ ہو گی۔

ہم درج ذیل مساوات کے تکملات لیتے ہوئے تفاعل f تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=4 \tag{15.16}$$

بائیں ہاتھ سے پہلی مساوات کا تکمل درج ذیل دے گا۔

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z) \tag{15.17}$$

اس کا y تفرق لے کر دوسری مساوات کے برابر ٹھہراتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{یعنی}$$

یہاں g صرف متغیر z پر منحصر ہے لہٰذا مساوات 15.17 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$f(x, y, z) = xy + h(z) \tag{15.18}$$

مساوات 15.16 کی تیسرے جزو کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{\partial h}{\partial z} = 4$$
$$h(z) = 4z + C \quad \text{یعنی}$$

یوں

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C$$

ہو گا اور تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3$$

□

سوالات

بقائی میدان کی پرکھ

سوال 1 تا سوال 6 میں کون سے میدان بقائی اور کون سے غیر بقائی ہیں؟

سوال 1: $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$

سوال 2: $\boldsymbol{F} = (y \sin z)\boldsymbol{i} + (x \sin z)\boldsymbol{j} + (xy \cos z)\boldsymbol{k}$

سوال 3: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$

سوال 4: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال 5: $\boldsymbol{F} = (y + z + \boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$

سوال 6: $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y)\boldsymbol{i} - (e^x \sin y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

مخفی قوہ تفاعل کی تلاش

سوال 7 تا سوال 12 میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل f تلاش کریں۔

سوال 7: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

سوال 8: $\boldsymbol{F} = (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$

سوال 9: $\boldsymbol{F} = e^{y+2z}(\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k})$

سوال 10: $\boldsymbol{F} = (y \sin z)\boldsymbol{i} + (x \sin z)\boldsymbol{j} + (xy \cos z)\boldsymbol{k}$

سوال 11: $\boldsymbol{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\boldsymbol{i} + \Big(\sec^2(x + y) + \frac{y}{y^2+z^2}\Big)\boldsymbol{j} + \frac{z}{y^2+z^2}\boldsymbol{k}$

سوال 12: $\boldsymbol{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}\boldsymbol{i} + \Big(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\Big)\boldsymbol{k}$

لکیری تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال 13 تا سوال 22 میں دکھائیں کہ متکمل قطعی تفرق ہے۔اس کے بعد لکیری تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 13: $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z$

سوال 14: $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$

سوال 15: $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - z^2)\,\mathrm{d}y - 2yz\,\mathrm{d}z$

سوال 16: $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y - \frac{4}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

سوال 17: $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x\,\mathrm{d}x + \cos y \sin x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

سوال 18: $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

سوال 19: $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,\mathrm{d}x + \frac{z^2}{y}\,\mathrm{d}y + 2z\ln y\,\mathrm{d}z$

سوال 20: $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y - yz)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}z$

سوال 21: $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{\mathrm{d}x}{y} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z$

سوال 22: $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$

سوال 23: نقطہ $(1,1,1)$ سے $(2,3,-1)$ تک قطع کی مقدار معلوم مساواتیں دریافت کر کے اس پر میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ کی لکیری تکمل

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$$

کی قیمت تلاش کریں۔چونکہ $\boldsymbol{F}$ بقائی میدان ہے لہٰذا تکمل کی قیمت راہ سے بے نیاز ہو گی۔ درج ذیل لکیری تکمل مثال 15.13

سوال 24: نقطہ $(0,0,0)$ سے $(0,3,4)$ تک قطع C کی ہمراہ درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}z$$

نظریہ، عملی استعمال اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال 25 اور سوال 26 میں تکمل کی قیمت راہ A تا B پر منحصر نہیں ہے۔

سوال 25: $\int_A^B z^2\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2xz\,\mathrm{d}z$

سوال 26: $\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

سوال 27 اور سوال 28 میں $\boldsymbol{F}$ کو ∇f روپ میں لکھیں۔

سوال 27: $\boldsymbol{F} = \frac{2x}{y}\boldsymbol{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)\boldsymbol{j}$

سوال 28: $\boldsymbol{F} = (e^x\ln y)\boldsymbol{i} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right)\boldsymbol{j} + (y\cos z)\boldsymbol{k}$

سوال 29: نقطہ $(1,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک درج ذیل راہ کی ہمراہ $\boldsymbol{F} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (y^2+x)\boldsymbol{j} + ze^z\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = 0$ ، $0 \le z \le 1$

ب. پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{2\pi}\boldsymbol{k},\, 0 \le t \le 2\pi$

ج. محور x پر $(1,0,0)$ سے $(0,0,0)$ کے بعد $(0,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک قطع مکافی $z = x^2,\, y = 0$

سوال 30: قوت $\boldsymbol{F} = e^{yz}\boldsymbol{i} + (xze^{yz} + z\cos y)\boldsymbol{j} + (xye^{yz} + \sin y)\boldsymbol{k}$ کا کام نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$ درج ذیل راہ کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = \frac{\pi t}{2}$ ، $z = 1 - t$ ، $0 \le t \le 1$

ب. نقطہ $(1,0,1)$ سے مبدا تک قطع اور اس کے بعد مبدا سے $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$ تک قطع۔

ج. نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1,0,0)$ قطع کے بعد محور x پر $(1,0,0)$ سے مبدا اور آخر میں قطع مکافی $y = \frac{\pi x^2}{2},\, z = 0$

سوال 31: مستوی xy میں $(1,1)$ تا $(-1,1)$ راہ C ، نقطہ $(-1,1)$ تا $(0,0)$ اور نقطہ $(0,0)$ تا $(1,1)$ قطعات پر مشتمل ہے جبکہ $\boldsymbol{F} = \nabla(x^3y^2)$ ہے۔ تکمل $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت درج ذیل دو طریقوں سے تلاش کریں۔

ا. راہ C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ اس کو استعمال کر کے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

ب. اس حقیقت کو برائے کار لائیں کہ $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل $f(x,y) = x^3y^2$ ہے۔

سوال 32: مستوی xy میں درج ذیل راہ C کی ہمراہ $\int_C 2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

ا. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,1)$ قطع مکافی $y = (x-1)^2$

ب. نقطہ $(-1,\pi)$ تا $(1,0)$ لکیری قطع

ج. ستارہ نما $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j},\, 0 \le t \le 2\pi$ پر نقطہ $(1,0)$ سے خلاف گھڑی واپس نقطہ $(1,0)$ تک۔

سوال 33: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -GmM\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ کا مخفی قوہ تفاعل تلاش کریں۔

سوال 34: مبدا سے s_1 اور s_2 فاصلوں پر بالترتیب نقاط N_1 اور N_2 پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ سوال 33 کے ثقلی میدان میں N_1 سے N_2 تک ایک ذرہ کو منتقل کرنے کے لئے $GmM\left(\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1}\right)$ کام درکار ہو گا۔

سوال 35: (ا) روپ $(ay^2+2czx)\,\mathrm{d}x + y(bx+cz)\,\mathrm{d}y + (ay^2+cx^2)\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہونے کی صورت میں مستقل a ، b اور c کا تعلق تلاش کریں۔ (ب) b اور c کی کن قیمتوں کے لئے درج ذیل میدان ڈھلوان ہو گا؟

$$\boldsymbol{F} = (y^2+2czx)\boldsymbol{i} + y(bx+cz)\boldsymbol{j} + (y^2+cx^2)\boldsymbol{k}$$

سوال 36: فرض کریں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ بقائی سمتی میدان ہے اور $g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ہے۔ دکھائیں کہ $\nabla g = \boldsymbol{F}$ ہو گا۔

سوال 37: آپ کو دو نقطوں کے بیچ وہ راہ تلاش کرنی ہے جس پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{F}$ کم سے کم کام کرے گا۔ آپ جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔ آپ کا جواب کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 38: آپ تجرباتی طور جانتے ہیں کہ A سے B تک راہ C_1 کی ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کام راہ C_2 کی ہمراہ کام کا نصف ہے۔ آپ $\boldsymbol{F}$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

15.4 مستوی میں مسئلہ گرین

ہم اب ایک ایسا مسئلہ پیش کرتے ہیں جو مستوی خطہ کی سرحد کی ہمراہ یا اس کو عبور کرتے ہوئے داب ناپذیر سیال کی بہاو اور خطہ کے اندر اس کی حرکت کے بیچ تعلق پیش کرتا ہے۔ پھیلاو اور گردش کے تصورات سیال کے سرحدی رویہ اور اندرونی رویہ کے بیچ تعلق پیش کرنا ممکن بناتے ہیں۔ سیال کی سمتی رفتاری میدان کا پھیلاو کسی نقطہ پر خطہ میں سیال کے دخول یا خروج کی ناپ ہے جبکہ گردش اس نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ ہے۔

مسئلہ گرین کہتا ہے کہ، چند ایسے شرائط مطمئن ہونے کی صورت میں جو عملی استعمال میں عموماً پورے ہوتے ہیں، مستوی خطہ کی سرحد سے خارجی بہاو سرحد کے اندر میدان کے پھیلاو کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ اس مسئلے کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ خطہ کی سرحد کی ہمراہ خلاف گھڑی دائری بہاو اس خطہ میں میدان کی گردش کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ گرین، علم احصاء کے عظیم مسائل میں سے ایک ہے۔ یہ گہرا اور حیرت کن ہے اور اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ خالص ریاضیات میں مسئلہ گرین کی اہمیت، احصاء کے بنیادی مسئلہ کے برابر ہے۔ عملی ریاضیات میں مسئلہ گرین کا تین ابعادی روپ برقی، مقناطیسی، اور سیالی حرکیات کے مسائل کا بنیاد مہیا کرتا ہے۔

ہم سیال کی حرکت کی سمتی رفتاری میدان کی بات اس لئے کرتے ہیں کہ سیال کی حرکت کا ذہنی خاکہ بنانا آسان ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ مسئلہ گرین کسی بھی سمتی میدان، جو چند شرائط کو مطمئن کرتا ہو، کے لئے درست ہو گا۔ اس کی درستگی میدان کے کسی خصوصی طبعی خاصیت کے ہونے پر منحصر نہیں ہے۔

نقطہ پر کثافت بہاو: پھیلاو

مسئلہ گرین کے لئے ہمیں دو نئے تصورات کی ضرورت پیش آتی ہے۔ پہلا تصور، ایک نقطہ پر سمتی میدان کی کثافت بہاو ہے جس کو ریاضیات میں سمتی میدان کا پھیلاو کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

فرض کریں مستوی میں سمتی میدانی کا سیالی بہاو $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ ہے اور خطہ R کے ہر نقطہ پر M اور N کے یک رتبی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔ خطہ R میں (x,y) ایک نقطہ ہے اور S ایک ایسا چھوٹا مستطیل ہے جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہے اور جس کا ایک راس (x,y) ہے۔ اس مستطیل کے اطراف محددی محور کے متوازی ہیں اور ان کی لمبائیاں Δx اور Δy ہیں۔ مستطیل کی نچلی سرحد کو عبور کرتا ہوا خارجی سیال کی شرح تخمیناً نقطہ (x,y) پر باہر رخ عمودی سمتی رفتار کے غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع کے برابر ہو گی:

$$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta x = -N(x,y)\Delta x \tag{15.19}$$

یوں اگر سمتی رفتار کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ہو تب خارجی شرح کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ضرب میٹر یعنی مربع میٹر فی سیکنڈ ہو گی۔ باقی تین اطراف کے عمودی باہر رخ خارجی سیال کی شرح بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔ چاروں اطراف کے نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x,y+\Delta y)\cdot\boldsymbol{j}\Delta x &= N(x,y+\Delta y)\Delta x && \text{بالائی}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta x &= -N(x,y)\Delta x && \text{نچلی}\\
\boldsymbol{F}(x+\Delta x,y)\cdot\boldsymbol{i}\Delta y &= M(x+\Delta x,y)\Delta y && \text{دائیں}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{i})\Delta y &= -M(x,y)\Delta y && \text{بائیں}
\end{aligned} \tag{15.20}$$

مخالف اضلاع کی شرح کے مجموعات درج ذیل ہوں گے۔

$$[N(x,y+\Delta y) - N(x,y)]\Delta x \approx \Big(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\Big)\Delta x \qquad \text{نچلی اور بالائی} \tag{15.21}$$

$$[M(x+\Delta x,y) - M(x,y)]\Delta y \approx \Big(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\Big)\Delta y \qquad \text{دائیں اور بائیں} \tag{15.22}$$

مساوات 15.21 اور مساوات 15.22 کا مجموعہ کل اخراج دیگا:

$$\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاو} \approx \Big(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\Big)\Delta x\Delta y \tag{15.23}$$

ہم اب $\Delta x \Delta y$ سے تقسیم کر کے بہاو فی اکائی رقبہ یعنی بہاو کی کثافت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاو}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

آخر میں ہم Δx اور Δy کو صفر تک پہنچا کر نقطہ (x, y) پر $\boldsymbol{F}$ کے کثافت بہاو کی تعریف اخذ کرتے ہیں۔

ریاضیات میں ہم کثافت بہاو کو $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاو کہتے ہیں۔میدان $\boldsymbol{F}$ کے پھیلاو کو ہم پھیلاو $\boldsymbol{F}$ لکھتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x, y) پر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کا کثافت بہاو یا **پھیلاو**[13] درج ذیل ہو گا۔

$$\text{پھیلاو}\ \boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \tag{15.24}$$

□

اگر نقطہ (x_0, y_0) پر ایک باریک سوراخ سے سیال ایک خطہ میں داخل ہو تب اس سوراخ سے سیال پھیلے گا جس کی بنا اس کو یہی نام دیا گیا ہے۔ چھوٹے مستطیل میں نقطہ (x_0, y_0) پر سوراخ سے سیال داخل ہونے کی صورت میں پھیلاو مثبت ہو گا جبکہ خطہ سے سیال کی اخراج کی صورت میں پھیلاو کی قیمت منفی ہو گی۔

مثال 15.14: سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + (xy - y^2)\boldsymbol{j}$ کا پھیلاو تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 15.24 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{پھیلاو}\ \boldsymbol{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) \\
&= 2x - x - 2y = 3x - 2y
\end{aligned}$$

□

[13] divergence

ایک نقطہ پر کثافت دائری بہاو

مسئلہ گرین کے لئے درکار دوسرا نیا تصور ایک نقطہ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاو ہے جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کی خاطر ہم وہی سمتی میدان

$$\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$$

اور نقطہ (x,y) پر چھوٹا مستطیل رقبہ S لیتے ہیں۔ اس مستطیل کو یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔

رقبہ S کے گرد خلاف گھڑی $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاو مستطیل S کی اطراف کی ہمراہ بہاو کی شرح کا مجموعہ ہو گا۔ اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کے رخ سمتی رفتار $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع تخمیناً نچلے ضلع کی ہمراہ بہاو کے برابر ہو گا:

$$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{i}\Delta x = M(x,y)\Delta x \tag{15.25}$$

باقی اطراف کی ہمراہ خلاف گھڑی بہاو اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔ چاروں اضلاع کے نتائج درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x,y+\Delta y)\cdot(-\boldsymbol{i})\Delta x &= -M(x,y+\Delta y)\Delta x && \text{بالائی}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{i}\Delta x &= M(x,y)\Delta x && \text{نچلی}\\
\boldsymbol{F}(x+\Delta x,y)\cdot\boldsymbol{j}\Delta y &= N(x+\Delta x,y)\Delta y && \text{دائیں}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta y &= -N(x,y)\Delta y && \text{بائیں}
\end{aligned} \tag{15.26}$$

ہم مخالف اطراف کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-[M(x,y+\Delta y)-M(x,y)]\Delta x \approx -\Big(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\Big)\Delta x \qquad \text{بالائی اور نچلی} \tag{15.27}$$

$$[N(x+\Delta x,y)-N(x,y)]\Delta y \approx \Big(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\Big)\Delta x \qquad \text{دائیں اور بائیں} \tag{15.28}$$

مساوات 15.27 اور مساوات 15.28 کے مجموعہ کو $\delta x\Delta y$ سے تقسیم کر کے مستطیل کی کثافت دائری بہاو کی تخمینی قیمت حاصل ہو گی:

$$\frac{\text{مستطیل کے گرد دائری بہاو}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

آخر میں ہم Δx اور Δy کو صفر تک پہنچا کر نقطہ (x,y) پر $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاو کی تعریف اخذ کرتے ہیں جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x,y) پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاو یا **گردش**[14] درج ذیل ہو گی۔

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{15.29}$$

[14] curl

□

مستوی xy میں نہایت کم گہرائی کے رواں پانی میں نقطہ (x_0, y_0) پر گردش یا کثافت دائری بہاو، اس نقطہ پر نسب چرخی، جس کا محور مستوی کو عمودی ہو، کی حرکت کی رفتار اور رخ کی پیمائش ہو گی۔

مثال 15.15: درج ذیل سمتی میدان کی گردش تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + (xy - y^2)\boldsymbol{j}$$

حل: ہم مساوات 15.29 استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{گردش}\ \boldsymbol{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) = y + 1$$

□

مستوی میں مسئلہ گرین

مسئلہ گرین کا ایک روپ کہتا ہے کہ موزوں حالات میں مستوی میں سادہ بند منحنی سے سمتی میدان کا خارجی بہاو، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کے پھیلاو کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ مساوات 15.8 اور مساوات 15.9 میں بہاو کے کلیات پر دوبارہ نظر ڈالیں۔

مسئلہ 15.3: **مسئلہ گرین (پھیلاو-بہاو یا عمودی روپ)**
سادہ بند منحنی C سے میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کا اخراجی بہاو، C میں محیط خطہ R پر F کے پھیلاو کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x}_{\text{اخراجی بہاو}} = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{تکمل پھیلاو}} \tag{15.30}$$

مسئلہ گرین کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ ایک سادہ بند منحنی کی ہمراہ، خلاف گھڑی ایک میدان کا دائری بہاو، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ 15.4: **مسئلہ گرین (دائری بہاو-گردش یا مماسی روپ)**
مستوی میں ایک سادہ بند منحنی C کی ہمراہ خلاف گھڑی، میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاو، منحنی میں محیط خطہ R پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{15.31}$$

خلاف گھڑی دائری بہاو　　　　　　　　تکمل گردش

□

میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لئے مساوات 15.7 میں دائری بہاو کے لئے دیا گیا تکمل درج ذیل معادل روپ اختیار کرے گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$$

مسئلہ گرین کے دو روپ ایک دوسرے کے معادل ہیں۔ میدان $\boldsymbol{G}_1 = N\boldsymbol{i} - M\boldsymbol{j}$ پر مساوات 15.30 کا اطلاق مساوات 15.31 دے گی جبکہ میدان $\boldsymbol{G}_2 = -N\boldsymbol{i} + M\boldsymbol{j}$ پر مساوات 15.31 کا اطلاق مساوات 15.30 دے گی۔

مسئلہ گرین کے لئے ضروری ہے دو مفروضے مطمئن ہوتے ہوں۔ اول ہمیں M اور N پر ایسا شرائط مسلط کرنے ہوں گے کہ مسئلہ گرین میں پائے جانے والے تکملات موجود ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے کھلا خطہ، جس میں C اور R پائے جاتے ہوں، کے ہر نقطہ پر M اور N اور ان کے یک رتبی تفرقات استمراری ہوں گے۔ دوم، ہمیں منحنی C پر ہندسی شرائط مسلط کرنے ہوں گے۔ منحنی سادہ، بند اور ایسے ٹکڑوں پر مشتمل ہونی چاہیے جن کی ہمراہ M اور N قابل تکمل ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ C ٹکڑوں میں ہموار ہے۔ ہم جو ثبوت مسئلہ گرین کے لئے پیش کرتے ہیں اس میں R کی شکل و صورت پر بھی شرائط مسلط کئے گئے ہیں۔ اعلٰی نصاب کی کتب میں نسبتاً کم شرائط پر مبنی ثبوت موجود ہیں۔ آئیں پہلے چند مثالیں دیکھیں۔

مثال 15.16: مسئلہ گرین کے دونوں روپ کی تصدیق میدان

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

کے لئے اکائی دائرہ C میں خطہ R پر کریں۔

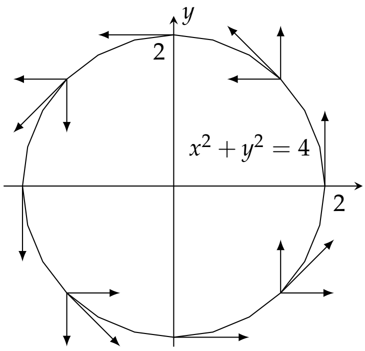
$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

□

جوابات

حصہ 15.1 صفحہ 1777

1) شکل 15.8
2) شکل 15.10
3) شکل 15.6
4) شکل 15.13
5) شکل 15.9
6) شکل 15.11
7) شکل 15.7
8) شکل 15.12
9) $\sqrt{2}$
11) $\frac{13}{2}$
13) $3\sqrt{14}$
15) $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}+9)$
17) $\sqrt{3}\ln\frac{b}{a}$
19) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$
21) 8
23) $2\sqrt{2}-1$
25) (ا) $4\sqrt{2}-1$ ،(ب) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$
27) $I_z = 2\pi\delta a^3$ ، $R_z = a$
29) (ا) $I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z = 1$ ؛ (ب) $I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z = 1$
31) $I_z = 2\pi - 2$ ، $R_z = 1$

5) $\boldsymbol{F} = \frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{i} - \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}, k > 0$
7) (ا) $\frac{9}{2}$ ،(ب) $\frac{13}{3}$ ،(ج) $\frac{9}{2}$
9) (ا) $\frac{1}{3}$ ،(ب) $-\frac{1}{5}$ ،(ج) 0
11) (ا) 2 ،(ب) $\frac{3}{2}$ ،(ج) $\frac{1}{2}$
13) $\frac{1}{2}$
15) $-\pi$
17) $\frac{207}{12}$
19) $-\frac{39}{2}$
21) $\frac{25}{6}$
23) (ا) دائری بہاو اول 0 ، دائری بہاو دوم 2π ، بہاو اول 2π ، بہاو دوم 0 ؛(ب) دائری بہاو اول 0 ، دائری بہاو دوم 8π ، بہاو اول 8π ، بہاو دوم 0
25) دائری بہاو 0 ، بہاو $a^2\pi$
27) دائری بہاو $a^2\pi$ ، بہاو 0
29) (ا) $-\frac{\pi}{2}$ ،(ب) 0 ،(ج) 1
31) 

33) (ا) $\boldsymbol{G} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ ، (ب) $\boldsymbol{G} = \sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{F}$

حصہ 15.2 صفحہ 1792

1) $\nabla f = \frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$
3) $\nabla g = -\frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} - \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k}$

35) $\boldsymbol{F}=\frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
37) 48
39) π
41) 0
43) $\frac{1}{2}$

حصہ 15.3 صفحہ 1807

1) بقائی
3) غیر بقائی
5) غیر بقائی
7) $f(x,y,z)=x^2+\frac{3y^2}{2}+2z^2+C$
9) $f(x,y,z)=xe^{y+2z}+C$
11) $f(x,y,z)=x\ln x-x+\tan(x+y)+\frac{1}{2}\ln(y^2+z^2)+C$
13) 49
15) -16
17) 1
19) $9\ln 2$
21) 0
23) -3
27) $\boldsymbol{F}=\nabla\left(\frac{x^2-1}{y}\right)$
29) (ا) 1 ، (ب) 1 ، (ج) 1
31) (ا) 2 ، (ب) 2
33) $f(x,y,z)=\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$
35) (ا) $c=b=2a$ ، (ب) $c=b=2$
37) چونکہ میدان بقائی ہے لہٰذا کام راہ پر منحصر نہیں ہو گا۔