

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1261 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات

1291 ا ضمیمہ اول

1293 ب ضمیمہ دوم

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## سوالات

مقدار معلوم منحنیات کے مماس  
سوال 1 تا سوال 12 میں  $t$  پر مقدار معلوم منحنی کے مماس کی مساوات دریافت کریں گے۔ اس نقطہ پر  $\frac{d^2y}{dx^2}$  بھی معلوم کریں۔

سوال 1:  $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال 2:  $x = \sin 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -\frac{1}{6}$

سوال 3:  $x = 4 \sin t, \quad y = 2 \cos t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال 4:  $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3} \cos t, \quad t = \frac{2\pi}{3}$

سوال 5:  $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = \frac{1}{4}$

سوال 6:  $x = \sec^2 t, \quad y = \tan t, \quad t = -\frac{\pi}{4}$

سوال 7:  $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \frac{\pi}{6}$

سوال 8:  $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

سوال 9:  $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

سوال 10:  $x = \frac{1}{t}, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$

سوال 11:  $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \frac{\pi}{3}$

سوال 12:  $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \frac{\pi}{2}$

خفی مقدار معلوم مساوات  
سوال 13 تا سوال 16 میں  $x$  اور  $y$  بطور قابل تفرق خفی مقدار معلوم تفاعل  $x = f(t), y = g(t)$  دیے گئے ہیں۔ دیے گئے  $t$  پر منحنی  $x = f(t), t = g(t)$  کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 13:  $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

سوال 14:  $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t - 1) = \ln y, \quad t = 1$

سوال 15:  $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

سوال 16:  $x \sin t + 2x = t, \quad t \sin t - 2t = y, \quad t = \pi$

منحنیات کی لمبائیاں  
سوال 17 تا سوال 22 میں منحنیات کی لمبائیاں تلاش کریں۔

سوال 17:  $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

سوال 18:  $x = t^3, \quad y = \frac{3t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$

سوال 19:  $x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}, \quad 0 \leq t \leq 4$

سوال 20:  $x = \frac{(2t+3)^{3/2}}{3}, \quad y = t + \frac{t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال 21:  $x = 8 \cos t + 8t \sin t, \quad y = 8 \sin t - 8t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

سوال 22:  $x = \ln(\sec t + \tan t), \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

سطحی رقبے  
سوال 23 تا سوال 26 میں دیے گئے محور کے گرد مغنی گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 23: محور  $x$ :  $x = \cos t, \quad y = 2 + \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 24: محور  $y$ :  $x = \frac{3}{2}t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$

سوال 25: محور  $y$ :  $x = t + \sqrt{2}, \quad y = \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

سوال 26: محور  $x$ :  $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

سوال 27: مخروط مقطوع  
نقطہ (0, 1) اور (2, 2) کے بیچ لکیر کو محور  $x$  کے گرد گھما کر مخروط مقطوع کا سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مقدار معلوم مساوات

نتیجہ کا جیومیٹری کے کلیہ استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔  
 $x = 2t, y = t + 1, 0 \leq t \leq 1$  کے ساتھ موازنہ کریں۔  
 $S = \pi(r_1 + r_2)$  (ترچھا قد)

سوال 28: مخروط

مبدأ اور نقطہ  $(h, r)$  کے بیچ قطع کو محور  $x$  کے گرد گھما کر مخروط سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کے قاعدے کا رداس  $r$  اور قد  $h$  ہوں گے۔ مقدار معلوم مساوات  $x = ht, y = rt, 0 \leq t \leq 1$  استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔ نتیجے کا موازنہ جیومیٹری کے کلیہ  $S = \pi r$  (ترچھا قد) کے ساتھ کریں۔

وسطانی مراکز

سوال 29: (i) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدود تلاش کریں۔

$$x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

(ب) یہ منحنی شکل 10.76 میں دکھائی گئی در پیچیدہ کا حصہ ہے۔ اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال 30: (i) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدود تلاش کریں۔

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال 31: (i) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدود تلاش کریں۔

$$x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال 32: مکمل کی قیمت

وسطانی مراکز کے مسائل کو عموماً کیلو لیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔ درج ذیل منحنی کا وسطانی مرکز 2 اعشاریہ تک کیلو لیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 33: لمبائی کا دار و مدار مقدار معلوم مساوات پر نہیں ہوتا ہے۔

نصف دائرہ  $y = \sqrt{1 - x^2}$  کی لمبائی درج ذیل مقدار معلوم مساوات استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$x = \cos 2t, y = \sin 2t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ ا.}$$

$$x = \sin \pi t, y = \cos \pi t, -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ ب.}$$

آپ دیکھیں گے کہ دونوں جوابات یکساں ہیں۔

سوال 34: ترخیمی مکمل  
ترخیم  $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  کی لمبائی درج ذیل ہے

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$$

جہاں  $e$  ترخیم کی سک ہے۔ ماسوائے  $e = 0$  یا  $e = 1$  یہ مکمل، جو ترخیمی تکمل<sup>34</sup> کہلاتا ہے، غیر بنیادی ہے۔

ا. قاعدہ ذوزلقہ میں  $n = 10$  لے کر  $a = 1$  اور  $e = \frac{1}{2}$  کے لئے اس ترخیم کی لمبائی کا اندازہ لگائیں۔

ب. تقابل  $f(t) = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$  کے دو گنا تفرق کی قیمت 1 سے کم ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے جزو-ا میں حاصل قیمت میں خلل کا بالائی حد تلاش کریں۔

سوال 35: جیسا حصہ 10.4 میں ذکر کیا گیا، وقفہ  $[a, b]$  پر تقابل  $y = f(x)$  کے ترسیم کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہوگی۔

$$x = x, y = f(x), a \leq x \leq b$$

یہاں  $x$  از خود مقدار معلوم ہے۔

اس مقدار معلوم روپ کے لئے دکھائیں کہ مقدار معلوم لمبائی

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

درج ذیل کار تیزی صورت اختیار کرتی ہے جس کو حصہ 6.5 میں حاصل کیا گیا۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

یوں کار تیزی در حقیقت مقدار معلوم کلیہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔

سوال 36: دکھائیں کہ منحنی  $x = g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  کی لمبائی کا کارتیسی کلیہ (مساوات 6.11)

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

در حقیقت درج ذیل مقدار معلوم کلیہ کی مخصوص صورت ہے۔

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

سوال 37: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

(اشارہ:  $dx = \frac{dx}{d\theta} d\theta$  استعمال کریں۔)

سوال 38: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کی لمبائی معلوم کریں۔

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

سوال 39: تدویر  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$  کی ایک محراب کو محور  $x$  کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

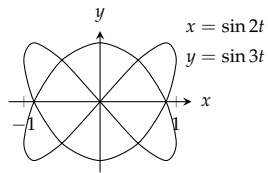
سوال 40: محور  $x$  اور تدویر  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$  کے ایک محراب کے بیچ منحنی کو محور  $x$  کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ:  $dH = \pi y^2 dx = \pi y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta$ )

کمپیوٹر کا استعمال

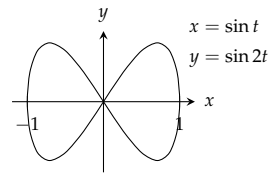
سوال 41 اور سوال 41 میں لیساجس اشکال<sup>35</sup> دکھائی گئی ہیں۔ دونوں سوالات میں ربع اول میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں منحنی کا مماس افقی ہو۔ مبداء پر دو مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 41: ترسیم شکل 10.85 میں دی گئی ہے۔

سوال 42: ترسیم شکل 10.86 میں دی گئی ہے۔



شکل 10.86: ترسیم سوال 42



شکل 10.85: ترسیم سوال 41





ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

