

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629	13.8.1	نتیجہ
1638	13.9	لیگرینج ضاربین
1655	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالکثرت
1663	14.1 دوہرا نکملات
1683	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1699	14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1710	14.4 کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1724	14.5 تعین بعدی کیت اور معیار اثر
1733	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1749	14.7 نکملات بالکثرت میں بدل

1761	15 سستی میدان میں نکمل
1761	15.1 خطی نکمل
1763	15.1.1 جمع پذیری

1767	جوابات
1769	ا ضمیمہ اول
1771	ب ضمیمہ دوم
1773	ج ضمیمہ تین
1775	د ضمیمہ چار
1777	ه ضمیمہ پانچ
1779	و ضمیمہ چھ
1781	ز ضمیمہ سات
1783	ح ضمیمہ آٹھ
1785	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

باب 15

سمتی میدان میں تکمل

ایکے جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقطاطیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاؤ پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

15.1 خطی تکمل

جب فضا میں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$, $a \leq t \leq b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگے۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ f کا خطی تکمل¹ کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، خطی تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

خطی تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان عملیات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرنی سیال کی شرح بہاؤ کا حساب کرتے ہیں۔

line integral¹

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تقابل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$, $a \leq t \leq b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کو متناہی تعداد کے ذیلی قوسین میں ٹکڑے کرتے ہیں۔ ایک علامتی ذیلی قوس کی لمبائی Δs_k ہوگی۔ ہم ہر ذیلی قوس پر ایک نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(15.1) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

اگر f استمراری ہو اور g , h , اور k کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات 15.1 کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a تا b اس قوس پر f کا مکمل کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس مکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(15.2) \quad \int_C f(x, y, z) ds \quad "C \text{ پر } f \text{ کا مکمل}"$$

ہموار منحنیات پر مکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \leq t \leq b$ پر $r(t)$ ہموار ہو ($v = \frac{dr}{dt}$) استمراری ہو اور کبھی بھی 0 نہ ہو تب ہم ds کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $ds = |v(\tau)| dt$ لکھا جاسکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t |v(\tau)| d\tau \quad t_0 = a \quad \text{حصہ 12.3 کی مساوات 12.20 میں}$$

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے مکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |v(t)| dt$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں مکمل کی قیمت دیگا۔

خطی مکمل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تقابل f کا مکمل لینے کے لئے

1. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k, \quad a \leq t \leq b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$(15.3) \quad \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |v(t)| \, dt$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل C کی لمبائی دیگا۔

مثال 15.1: مبداء سے نقطہ $(1, 1, 1)$ تک قطع پر $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ تکمل کریں۔

حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$r(t) = ti + tj + tk, \quad 0 \leq t \leq 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $|v(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی 0 نہیں ہو سکتا ہے لہذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) \, ds &= \int_0^1 f(t, t, t)(\sqrt{3}) \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3} \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) \, dt = \sqrt{3} [t^2 - t^3]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

مساوات 15.3

□

15.1.1 جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1, C_2, \dots, C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے کملات کا مجموعہ ہو گا:

$$(15.4) \quad \int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds + \dots + \int_{C_n} f \, ds$$

مثال 15.2: مبداء سے نقطہ $(1, 1, 1)$ تک راہ C_1 اور C_2 [پر چل کر پہنچا جاتا ہے۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم C_1 اور C_2 کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1; |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds && \text{مساوات 15.4} \\ &= \int_0^1 f(t, t, 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 f(1, 1, t) (1) \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t) (1) \, dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

یہاں مثال 15.1 اور مثال 15.2 کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔ اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ مکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا مکمل لینے کے لئے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ کمالات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ سوم، مثال 15.1 میں C اور مثال 15.2 میں $C_1 \cup C_2$ پر مکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تقابل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تقابل کے لئے مکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیت کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

$$M = \iiint_D \delta(x, y, z) \, dH \quad \text{کمیت}$$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x \delta \, ds, \quad M_{xz} = \int_C y \delta \, ds, \quad M_{xy} = \int_C z \delta \, ds$$

مرکز کمیت کے محدود:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) \delta \, ds & I_y &= \int_C (x^2 + z^2) \delta \, ds \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta \, ds & I_L &= \int_C r^2 \delta \, ds \end{aligned}$$

جہاں L لکیر سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}} \quad L \text{ کے لحاظ سے رداس دور:}$$

مثال 15.3: ایک اسپرنگ درج ذیل پچھوار منحنی کے ساتھ ساتھ پڑا ہے۔

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس اسپرنگ کی کشافز مستقل تفاعل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کیت اور مرکز کیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکی کی بنا اس کا مرکز کیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $|v(t)|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} |v(t)| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4 \sin 4t)^2 + (4 \cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} M &= \int_C \delta \, ds = \int_0^{2\pi} (1) \sqrt{17} \, dt = 2\pi \sqrt{17} \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t) (1) (\sqrt{17}) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{17} \, dt = 2\pi \sqrt{17} \\ R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi \sqrt{17}}{2\pi \sqrt{17}}} = 1 \end{aligned}$$

□

دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔

مثال 15.4: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے۔ محراب کے نقطہ (x, y, z) پر کشاف $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز میت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کمیٹی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, 0 \leq t \leq \pi$$

لکھتے ہوئے \bar{z} دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

$$|v(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} M &= \int_C \delta \, ds = \int_C (2 - z) \, ds = \int_0^\pi (2 - \sin t) \, dt = 2\pi - 2 \\ M_{xy} &= \int_0^\pi z \delta \, ds = \int_C z(2 - z) \, ds = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t) \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 \sin t - \sin^2 t) \, dt = \frac{8 - \pi}{2} \\ \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57 \end{aligned}$$

□

یوں مرکز کمیٹ تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

