

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	انحنا، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629	13.8.1	نتیجہ
1638	13.9	لیگرینج ضاربین
1655	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالکثرت
1663	14.1 دوہرا تکملات
1683	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1699	14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ
1710	14.4 کار تینی محدود میں تہرا تکمل
1724	14.5 تعین بعدی کیت اور معیار اثر
1733	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا تکمل
1749	جوابات
1757	ا ضمیمہ اول
1759	ب ضمیمہ دوم
1761	ج ضمیمہ تین
1763	د ضمیمہ چار
1765	ه ضمیمہ پانچ
1767	و ضمیمہ چھ
1769	ز ضمیمہ سات
1771	ح ضمیمہ آٹھ
1773	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

14.1 دوہرا تکملات

ہم xy مستوی میں محدود خطہ پر استمراری تفاعل $f(x, y)$ کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دوگنا) تکمل اور باب 5 میں متعارف کردہ ایک گنا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جاسکتی ہے۔

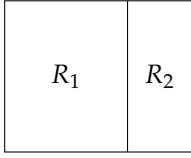
مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل $f(x, y)$ درج ذیل مستطیل خطہ R میں معین ہے۔

$$R : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

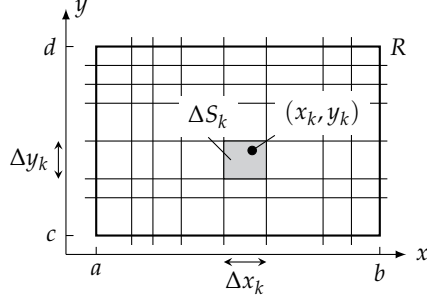
ہم تصور میں R پر x اور y محور کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو R کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.1)۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ ΔS_k میں ایک نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ J_n لیتے ہیں۔

$$(14.1) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$



$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dS = \iint_{R_1} f(x, y) dS + \iint_{R_2} f(x, y) dS$$

شکل 14.2: دوہرا تکملات بھی ایک گننا تکملات کی طرح مجموعیت دائرہ کار کی خاصیت رکھتے ہیں۔



شکل 14.1: خطہ R کو مستطیل جال چھوٹے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے رقبے $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ہوں گے۔

اگر پورے R میں f استمراری ہو، تب ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ Δx اور Δy دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے سے مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو R پر f کا دوہرا تکمل¹ کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint_R f(x, y) dS \quad \text{یا} \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(14.2) \quad \iint_R f(x, y) dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات $[a, b]$ اور $[c, d]$ کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات 14.2 میں حد کی قیمت، تا تو رقبات ΔS_k کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر ΔS_k میں نقطہ (x_k, y_k) کے مقام پر منحصر ہو گی۔ انفرادی مجموعات J_n کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کا حد آخر میں وہی ایک ہو گا۔ استمراری f کے لئے اس حد کی وجودیت اور یکتائی کے ثبوت اعلیٰ نصاب میں دیے جاتے ہیں۔ دوہرا تکمل کی وجودیت کے لئے f کا استمرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

دوہرا تکملات کے خواص

ایک گننا تکملات کی طرح، دوہرا تکملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لئے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

$$1. \quad \iint_R k f(x, y) dS = k \iint_R f(x, y) dS \quad \text{جہاں } k \text{ کوئی مستقل ہے۔}$$

double integral¹

$$\iint_R (f(x, y) \mp g(x, y)) \, dS = \iint_R f(x, y) \, dS \mp \iint_R g(x, y) \, dS \quad \text{ب۔}$$

$$\text{ج۔ اگر } R \text{ پر } f(x, y) \geq 0 \text{ ہو تب } \iint_R f(x, y) \, dS \geq 0 \text{ ہو گا۔}$$

$$\text{د۔ اگر } R \text{ پر } f(x, y) \geq g(x, y) \text{ ہو تب } \iint_R f(x, y) \, dS \geq \iint_R g(x, y) \, dS \text{ ہو گا۔}$$

یہ خواص ایک گنا نکملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ 5.6)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

$$\iint_R f(x, y) \, dS = \iint_{R_1} f(x, y) \, dS + \iint_{R_2} f(x, y) \, dS \quad \text{ه۔}$$

جہاں ایک دوسرے کو ناڈھانچنے والے مستطیل R_1 اور R_2 خطوں کا اشتراک R ہے (شکل 14.2)۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا انکملات بطور حجم

ثبت $f(x, y)$ کی صورت میں ہم مستطیل خطہ R پر f کے دوہرا انکمل کو ٹھوس منشور نما کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی پچلا سطح R اور بالائی سطح $z = f(x, y)$ ہوگی (شکل 14.3)۔ مجموعہ $J_n = \sum f(x_k, y_k) \Delta S_k$ میں ہر رکن $f(x_k, y_k) \Delta S_k$ ایک انتصابی مستطیلی منشور نما کا حجم ہوگا جو بنیاد ΔS_k پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینہ قیمت ہوگی۔ یوں مجموعہ J_n پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمینہ ہوگی۔ اس حجم کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(14.3) \quad \text{حجم} = \lim J_n = \iint_R f(x, y) \, dS$$

جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج، باب 6 میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔

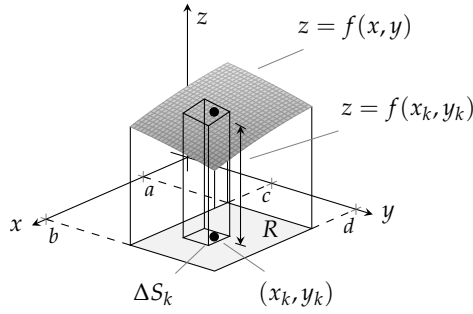
دوہرا انکمل کے حصول کا مسئلہ فونینی

فرض کریں ہم مستوی xy میں مستطیل خطہ $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر مستوی $z = 4 - x - y$ کے نیچے حجم تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ 6.2 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور x کے عمودی نکلیاں لیں (شکل 14.4) تب حجم

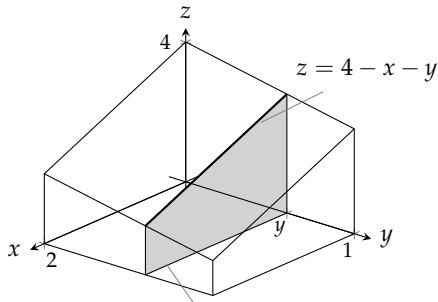
$$(14.4) \quad \int_{x=0}^{x=2} S(x) \, dx$$

ہوگا جہاں x پر رقبہ عمودی تراش $S(x)$ ہے۔ ہم x کی ہر قیمت کے لئے درج ذیل عمل سے $S(x)$ معلوم کر سکتے ہیں

$$(14.5) \quad S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) \, dy$$

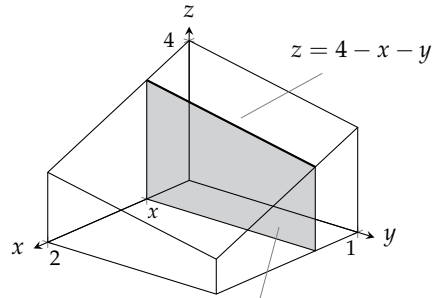


شکل 14.3: ٹھوس جسم کو تختیبنی طور پر متعدد مستطیل منشور نما سے ظاہر کرتے ہوئے ہم زیادہ عمومی منشور نما کے حجم کو بطور دوہرا تکمیل تعین کر سکتے ہیں۔ یہاں منشور کا حجم R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمیل ہو گا۔



$$S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx$$

شکل 14.5: رقبہ عمودی تراش $S(y)$ حاصل کرنے کے لئے ہم y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے تکمیل لیتے ہیں۔



$$S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy$$

شکل 14.4: رقبہ عمودی تراش $S(x)$ حاصل کرنے کے لئے ہم x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمیل لیتے ہیں۔

جو منحنی $z = 4 - x - y$ کے نیچے، x پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہو گا۔ رقبہ $S(x)$ کے حصول میں x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 14.3 اور مساوات 14.4 کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہو گا۔

(14.6)

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5 \end{aligned}$$

اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$\bar{V} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) dy dx$$

دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ جسے بارہا مکمل² یا اعادہ مکمل³ کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا مکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں اور اس کے بعد y کو مستقل ٹھراتے ہوئے، x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا مکمل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔

اگر ہم محور y کے عمودی نکلیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا (شکل 14.5)؟ ایسی صورت میں ایک علامتی عمودی تراش رقبہ، y کا تفاعل ہو گا:

$$(14.7) \quad S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y$$

یوں پورے جسم کا حجم

$$(14.8) \quad \bar{V} = \int_{y=0}^{y=1} S(y) dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y) dy = \left[6y - y^2 \right]_0^1 = 5$$

ہو گا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

ہم اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$\bar{V} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dx dy$$

repeated integral²
iterated integral³

لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمیل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔ اس کے بعد x کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمیل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں۔ اس بار ہم بارہا تکمیل کے حصول میں پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تکمیل لیتے ہیں جو مساوات 14.6 میں تکمیل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر درج ذیل دوہرا تکمیل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint_R (4 - x - y) dS$$

اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں تکمیل اس دوہرا تکمیل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبینی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا تکمیل، کسی بھی ترتیب سے، بارہا تکمیل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ (جناب فوبینی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

مسئلہ 14.1: (پہلا روپے)

اگر مستطیل خطہ $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ پر استمراری ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

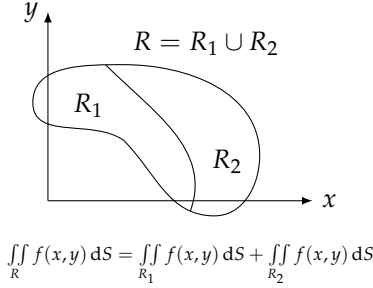
مسئلہ فوبینی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا تکمیل کی قیمت بارہا تکمیل سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں دوہرا تکمیل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے لحاظ سے تکمیل لے سکتے ہیں۔

مسئلہ فوبینی مزید کہتا ہے کہ دوہرا تکمیل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بارہا تکمیل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کار آمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم جلد ایک مثال میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم x محور یا y محور کے عمودی سطحیں لے کر ٹکلیاں کاٹ سکتے ہیں۔

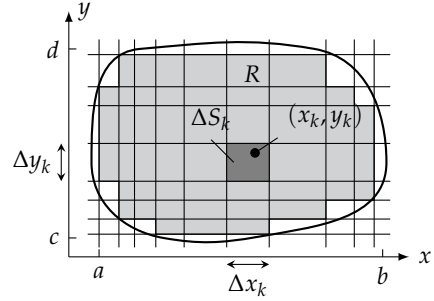
مثال 14.1: خطہ $R : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ میں $f(x, y) = 1 - 6x^2y$ کے دوہرا تکمیل $\iint_R f(x, y) dS$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: مسئلہ فوبینی کے تحت درج ذیل ہوگا:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dS &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 \left[x - 2x^3y \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = \left[2y - 8y^2 \right]_{-1}^1 = 4 \end{aligned}$$



شکل 14.7: مستطیل خطہ کی مجموعیت کی خاصیت ان غیر مستطیل خطوں کے لئے بھی کارآمد ہے جن کی پوری سرحد استمراری منحنیات سے بنی ہو۔



شکل 14.6: غیر مستطیل محدود خطہ کو مستطیل جال سے خانہ بند کیا گیا ہے۔

تکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy dx &= \int_0^2 \left[y - 3x^2y^2 \right]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 \left[(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2) \right] dx = \int_0^2 2 dx = 4 \end{aligned}$$

□

آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا انکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسا 4 میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

میکسا احکامات

درکار دوہرا تکمل

integrate(integrate(x^2 * y, x), y);

$\int \int x^2 y dx dy$

integrate(integrate(x * cos(y), x, 0, 1), y, -%pi/3, %pi/4);

$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \int_0^1 x \cos y dx dy$

محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا انکملات

محدود غیر مستطیل خطہ پر تقابل $f(x, y)$ کا دوہرا تکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی R پر مستطیل جال بچھاتے ہیں (شکل 14.6) لیکن جزوی مجموعہ میں صرف ان چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہوں۔ ہم

ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ ΔS_k میں کوئی نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

اس مجموعہ میں اور مستطیل خطے پر مجموعہ (مساوات 14.1) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام ΔS_k مل کر خطہ R کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے ہیں۔ البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو، J_n میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور R کا زیادہ سے زیادہ حصہ J_n میں شامل ہو گا۔ اگر f استمراری ہو اور R کی سرحد، متغیر x کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل اور (یا) متغیر y کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کی ترسیمات، ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر مختار نہ طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ J_n کا حد موجود ہو گا۔ ہم اس حد کو R پر f کا دوہرا مکمل کہتے ہیں:

$$\iint_R f(x, y) dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum f(x, y_k) \Delta S_k$$

یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

غیر مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کے دوہرا مکملات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا مکملات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی ہے کہ اگر R کو ایسے دو خطوں R_1 اور R_2 میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہوں (مثال کے لئے شکل 14.7 دیکھیں) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \iint_{R_1} f(x, y) dS + \iint_{R_2} f(x, y) dS$$

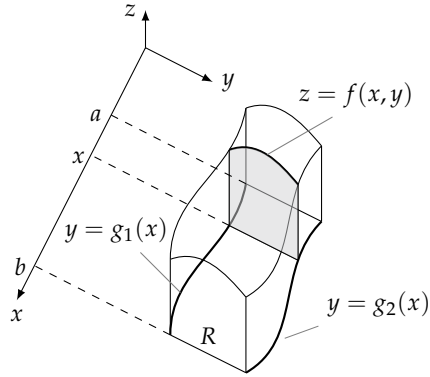
ہم R پر استمراری اور مثبت f کی صورت میں R اور $z = f(x, y)$ کے بیچ ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی $\iint_R f(x, y) dS$ کرتے ہیں۔

اگر شکل 14.8 میں مستوی xy میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کی "بالائی" حد $y = g_2(x)$ ، "زیریں" حد $y = g_1(x)$ ، اور اطراف کے حدود خط $x = a$ اور خط $x = b$ ہوں تب ہم حجم H کو کلیوں کی ترکیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے رقبہ عمودی تراش تلاش کرتے ہیں

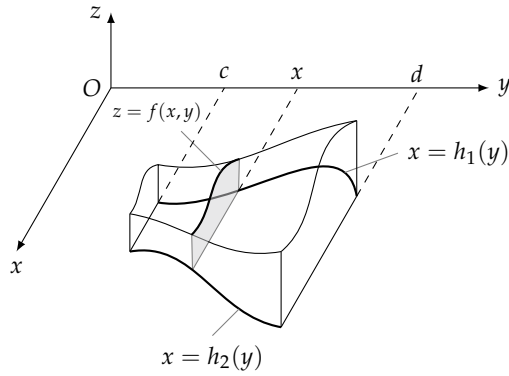
$$S(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy$$

اور اس کے بعد $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا مکمل لیتے ہوئے بارہا مکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$(14.9) \quad H = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$



شکل 14.8: سایہ دار انتظامی ٹکیہ کا رقبہ $S(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ ہو گا۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کرنے کے لئے ہم $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا مکمل لیں گے۔



شکل 14.9: سایہ دار ٹکیہ کا رقبہ $S(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$ ہے۔
ٹھوس جسم کا حجم $\int_c^d S(y) dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$ ہو گا۔

اسی طرح اگر شکل 14.9 میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کے حدود $x = h_2(y)$ ، $x = h_1(y)$ اور خط $y = c$ اور $y = d$ ہوں تب نکیوں کی ترکیب سے بارہا تکمیل سے حجم تلاش کیا جاسکتا ہے:

$$H = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (14.10)$$

ہم نے دیکھا کہ مساوات 14.9 اور مساوات 14.10، جو R پر f کے دوہرا تکمیل ہیں، دونوں حجم دیتے ہیں۔ اس کی وجہ مسئلہ فوبینی کی درج ذیل زیادہ مضبوط صورت ہے۔

مسئلہ 14.2: مسئلہ فوبینی (مضبوط روپ)
فرض کریں خطہ R پر f استمراری ہے۔

ا. اگر R کو $a \leq x \leq b$ ، $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[a, b]$ پر g_1 اور g_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

ب. اگر R کو $c \leq y \leq d$ ، $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[c, d]$ پر h_1 اور h_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

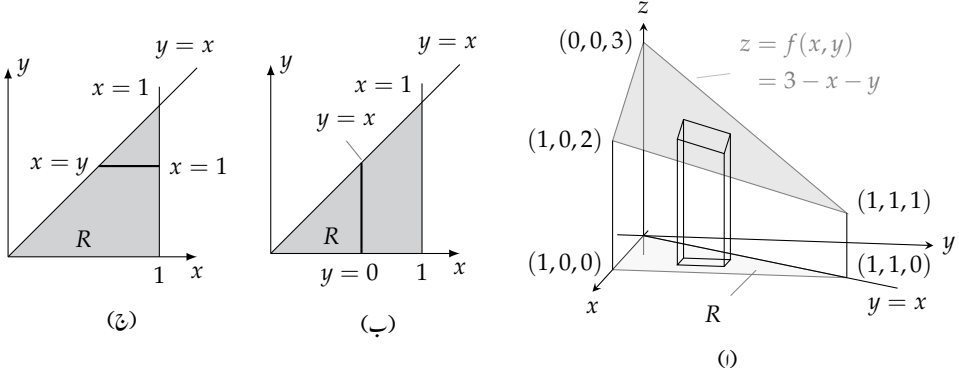
$$\iint_R f(x, y) dS = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

مثال 14.2: ایک منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں ایک مثلث ہو، جس کے اضلاع محور x ، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ ہوں اور جس کا اس درج ذیل مستوی میں پایا جاتا ہو، کا حجم تلاش کریں۔

$$z = f(x, y) = 3 - x - y$$

حل: ہم دیکھتے ہیں (شکل 14.10-ا) کہ 0 اور 1 تک کسی بھی x کے لئے y کی قیمت $y = 0$ تا $y = x$ ہوگی (شکل 14.10-ب)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1 \end{aligned}$$



شکل 14.10: منشور کا حجم (مثال 14.2)

نکملات کی ترتیب الٹ کرنے سے درج ذیل ہوگا (شکل 14.10-ج)۔

$$\begin{aligned}
 H &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\
 &= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2}y^2 \right) dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1
 \end{aligned}$$

□

دونوں نکملات کے جواب ایک جیسے ہیں۔ ہمیں یہی توقع تھی۔

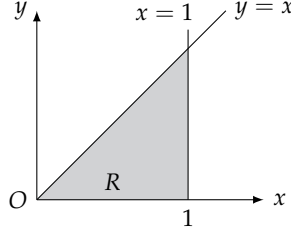
اگرچہ مسئلہ فوبینی ہمیں یقین دہانی کرتا ہے کہ دوہرا نکمل کی قیمت بارہا نکمل میں کسی بھی ترتیب سے نکملات لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے، حقیقت میں ایک نکمل کا حصول دوسرے سے آسان ہو سکتا ہے۔ اگلی مثال میں آپ ایسی صورت حال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.3: مستوی xy میں محور x ، خط $x=1$ اور خط $y=x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iint_R \frac{\sin x}{x} dS$$

حل: نکمل کا خطہ شکل 14.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے نکمل لیں تب

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx &= \int_0^1 \left(y \frac{\sin x}{x} \right)_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \sin x dx \\
 &= -\cos(1) + 1 \approx 0.46
 \end{aligned}$$



شکل 14.11: تکمیل کا دائرہ کار برائے مثال 14.3

ہو گا۔ اگر ہم تکمیل لینے کی ترتیب الٹ کریں تب

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$$

ہو گا اور چونکہ $\int ((\sin x)/x) dx$ کو بنیادی تغاقل کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے لہذا ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہیں۔

قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں کہ کس ترتیب سے تکمیل لینے سے ہمیں آسانی ہوگی لہذا اس پر زیادہ مت سوچیں اور کسی ایک ترتیب سے حل کرنے کی کوشش کریں اور اگر مشکلات پیش آئیں تب تکمیل کی ترتیب الٹ کر کے دوبارہ کوشش کریں۔ □

تکمیل کی حدود کی تلاش

دوہرا تکمیل کی قیمت کے حصول میں سب سے مشکل کام تکمیل کی حدیں تلاش کرنا ہو سکتا ہے۔ خوش قسمتی سے ایک اچھا طریقہ کار موجود ہے جس پر ہم چل سکتے ہیں۔

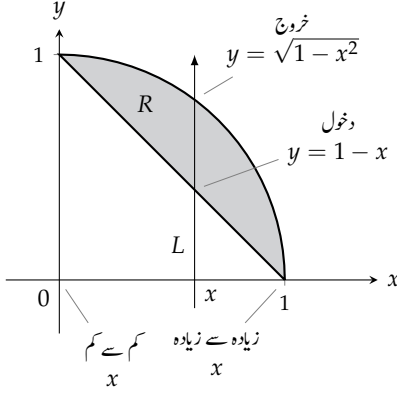
تکمیل کے حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار

(i) خطہ R پر $\iint_R f(x, y) dS$ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمیل لینے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

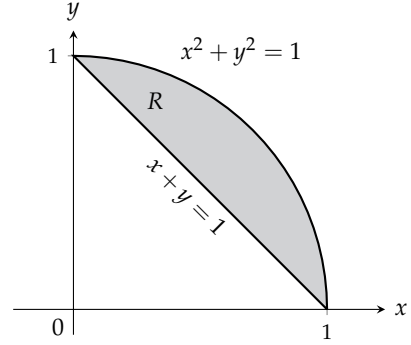
1. خاکہ: تکمیل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.12-ا)۔

2. تکمیل کی y حدیں: بڑھتی y رخ خطہ R سے گزرتا ہوا انتصابی خط L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمیل کی y حدیں ہوں گی (شکل 14.12-ب)۔

3. تکمیل کی x حدیں: متغیر x کی وہ قیمتیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام انتصابی لکیریں شامل ہوں (شکل 14.12-ب)۔ یہ قیمتیں تکمیل کی x حدیں ہوں گی۔



(ب) خط R میں جس نقطہ پر انتظامیہ لکیر داخل اور خارج ہوتی ہے، ان کی نشاندہی کریں۔ یہی مکمل کے y حد ہوں گے۔ تمام انتظامیہ لکیریوں کو شامل کرنے والے x حدود کی نشاندہی کریں۔ یہی مکمل کے x حد ہوں گے۔



(ب) مکمل کے خط کا خاکہ بنائیں اور تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں۔

شکل 14.12: مکمل کے حدود کی تلاش۔

مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) \, dS = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$$

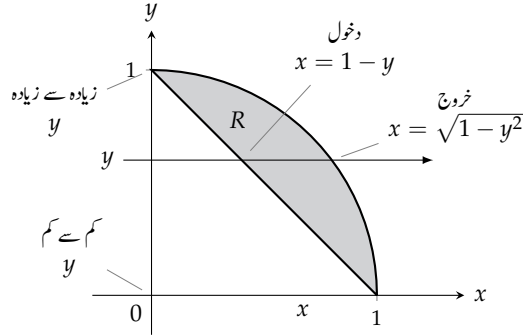
(ب) اسی دوہرا مکمل کو بطور بارہا مکمل حل کرتے ہوئے، ترتیب الٹ کرنے سے، انتظامیہ لکیریوں کی بجائے افقی لکیریں استعمال کریں (شکل 14.13)۔ مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) \, dS = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$$

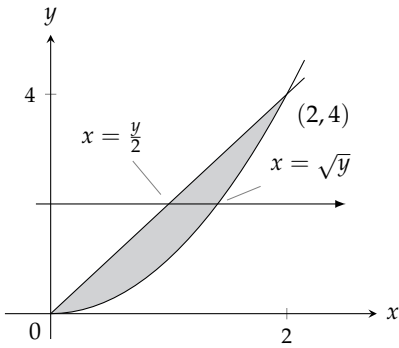
مثال 14.4: درج ذیل مکمل کے خطہ مکمل کا خاکہ بنائیں اور مکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے اس کا مساوی مکمل لکھیں۔

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) \, dy \, dx$$

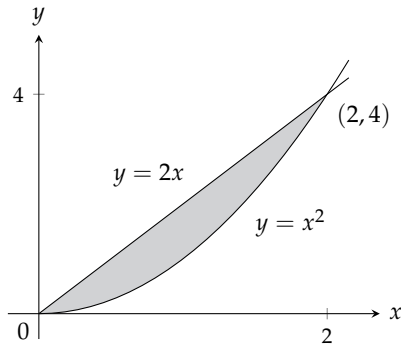
حل: مکمل کا خطہ، عدم مساوات $x^2 \leq y \leq 2x$ اور $0 \leq x \leq 2$ دیتے ہیں۔ یوں اس خطہ کی حدیں، خط $x = 0$ ، خط $x = 2$ اور منحنیات $y = x^2$ اور $y = 2x$ ہوں گی (شکل 14.14-ا)۔



شکل 14.13: بارہا عمل میں ترتیب الٹ کرنے سے R پر افقی لکیریں کھینچی جائیں گی۔



(ب)



(i)

شکل 14.14: دو منحنیات کے بیچ خطہ (مثال 14.4)

تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے ہم اس خط پر افقی لکیریں کھینچتے ہیں۔ یہ لکیریں اس خط میں $x = \frac{y}{2}$ پر داخلی ہوتی ہیں اور $x = \sqrt{y}$ پر اس سے خارج ہوتی ہیں۔ ان تمام افقی لکیریں کو شامل کرنے کے لئے ہمیں $y = 0$ سے $y = 4$ تک لینا ہوگا (شکل 14.14-ب)۔ یوں متبادل تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy$$

□

ان دونوں تکملات کے جواب 8 ہے۔

سوالات

تکمل کے خط کی تلاش اور دوہرا تکملات
سوال 1 تا سوال 10 میں تکمل کے خط کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx$

سوال 2: $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2 y - 2xy) dy dx$

سوال 3: $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1) dx dy$

سوال 4: $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy$

سوال 5: $\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y dy dx$

سوال 6: $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy dx$

سوال 7: $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy$

سوال 8: $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx dy$

سوال 9: $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx dy$

سوال 10: $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}} dy dx$

سوال 11 تا سوال 16 میں f کو دیے ہوئے خطے پر مکمل کریں۔
سوال 11: ربع اول میں لکیر $y = x$ ، $y = 2x$ ، $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ خطے پر تفاعل $f(x, y) = \frac{x}{y}$ کا مکمل۔

سوال 12: پکڑ $1 \leq x \leq 2$ ، $1 \leq y \leq 2$ پر تفاعل $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ کا مکمل۔

سوال 13: مثلث خطے جس کے راس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ اور $(0, 1)$ ہیں میں تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کا مکمل۔

سوال 14: مستطیل $0 \leq x \leq \pi$ ، $0 \leq y \leq 1$ پر تفاعل $f(x, y) = y \cos xy$ کا مکمل۔

سوال 15: مستوی uv کے ربع اول میں لکیر $u + v = 1$ کے نیچے تفاعل $f(u, v) = v - \sqrt{u}$ کا مکمل۔

سوال 16: مستوی st کے ربع اول میں منحنی $s = \ln t$ کے اوپر جانب $t = 1$ سے $t = 2$ تک تفاعل $f(s, t) = e^s \ln t$ کا مکمل۔

سوال 17 تا سوال 20 میں کمالات دیے گئے ہیں۔ ان کمالات کے خطوں کا خاکہ بنائیں اور مکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 17: مستوی pv $\int_{-2}^0 \int_v^{-v} 2 \, dp \, dv$

سوال 18: مستوی st $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, dt \, ds$

سوال 19: مستوی tu $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{\sec t} 3 \cos t \, du \, dt$

سوال 20: مستوی uv $\int_0^3 \int_{-2}^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, dv \, du$

تکمل کے الٹے ترتیب

سوال 21 تا سوال 30 میں مکمل کے خطے کا خاکہ بنا کر معادل الٹے ترتیب کا مکمل لکھیں۔

سوال 21: $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy \, dx$

سوال 22: $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dx \, dy$

سوال 23: $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx \, dy$

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy dx \quad \text{سوال 24:}$$

$$\int_0^1 \int_1^{e^x} dy dx \quad \text{سوال 25:}$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx dy \quad \text{سوال 26:}$$

$$\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x dy dx \quad \text{سوال 27:}$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y dx dy \quad \text{سوال 28:}$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y dx dy \quad \text{سوال 29:}$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x dy dx \quad \text{سوال 30:}$$

دوہرا انضمام کے قیمتے کا حصول

سوال 31 تا سوال 40 میں مکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر مکمل کی ترتیب تعین کرتے ہوئے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx \quad \text{سوال 31:}$$

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy dy dx \quad \text{سوال 32:}$$

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy \quad \text{سوال 33:}$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx \quad \text{سوال 34:}$$

$$\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dx dy \quad \text{سوال 35:}$$

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3} dy dx \quad \text{سوال 36:}$$

$$\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5) dx dy \quad \text{سوال 37:}$$

سوال 38: $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy dx}{y^4 + 1}$

سوال 39: $\iint_R (y - 2x^2) dS$ جہاں R پکڑ $|x| + |y| = 1$ کا اندرونی خطہ ہے۔

سوال 40: $\iint_R xy dS$ جہاں لکیر $y = x$ ، $y = 2x$ اور $x + y = 2$ کے قح خطہ R ہے۔

سطح $z = f(x, y)$ کے نیچے حجم

سوال 41: مستوی xy میں لکیر $y = x$ ، $x = 0$ اور $x + y = 2$ کے قح مثلث کے اور قطع مکانی سطح $z = x^2 + y^2$ کے نیچے خطہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 42: ایک ٹھوس جسم اوپر سے بیلن $z = x^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں لکیر $y = x$ اور قطع مکانی $y = 2 - x^2$ کے قح مثلث خطہ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 43: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ مستوی xy میں لکیر $y = 3x$ اور قطع مکانی $y = 4 - x^2$ کے قح خطہ ہے جبکہ اس کا بالائی سر مستوی $z = x + 4$ پر مشتمل ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 44: شمن اول میں محدوی مستویات، بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستوی $z + y = 3$ کے قح ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 45: شمن اول میں محدوی مستویات، مستوی $x = 3$ اور قطع مکانی بیلن $z = 4 - y^2$ کے قح ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 46: شمن اول سے سطح $z = 4 - x^2 - y$ ایک ٹھوس جسم کا قح ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 47: شمن اول سے بیلن $z = 12 - 3y^2$ اور مستوی $x + y = 2$ ایک پچر کاٹے ہیں۔ اس پچر کا حجم تلاش کریں۔

سوال 48: پکڑ ستون $|x| + |y| \leq 1$ سے مستویات $z = 0$ اور $3x + z = 3$ جس ٹھوس جسم کو کاٹے ہیں اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 49: ایک ٹھوس جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = 1$ اور $x = 2$ ، اطراف سے بیلن $y = \pm \frac{1}{x}$ ، اوپر سے مستوی $z = x + 1$ اور نیچے سے مستوی $z = 0$ میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 50: ایک جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = \pm \frac{\pi}{3}$ ، اطراف سے بیلیں $y = \mp \sec x$ ، اوپر سے بیلیں $z = 1 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

غیر محدود خطوط پر نکلاتے

سوال 51 تا سوال 54 میں غیر مناسب نکملات کو بارہا مکمل تصور کرتے ہوئے ان کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 51: } \int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy dx$$

$$\text{سوال 52: } \int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1) dy dx$$

$$\text{سوال 53: } \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} dx dy$$

$$\text{سوال 54: } \int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-(x+2y)} dx dy$$

دوہرا انکملات کے نتیجے

سوال 55 اور سوال 56 میں تقابل $f(x, y)$ کے دوہرا مکمل کے خطہ R کو انتہائی خط $x = a$ اور افقی خط $y = c$ خانہ بند کرتی ہیں۔ ہر ذیلی مستطیل میں دکھائے گئے (x_k, y_k) لیتے ہوئے درج ذیل تخمین استعمال کر کے دوہرا انکملات کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\iint_R f(x, y) dS \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

سوال 55: تقابل $f(x, y) = x + y$ اور خطہ R ، جو نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ اور محور x کے بیچ ہے۔ خانہ بندی $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ اور $y = 0, 1/2, 1$ لیں۔ نقطہ (x_k, y_k) کو k واں خانے کا نیچا بایاں کونا لیں بشرطیکہ یہ مستطیل R کے اندر پایا جاتا ہو۔

سوال 56: تقابل $f(x, y) = x + 2y$ ہے جبکہ دائرہ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ کا اندرونی خطہ R ہے۔ خانہ بندی $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ اور $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ لیں۔ بشرطیکہ k واں مستطیل R میں پایا جاتا ہو، k ویں مستطیل کے وسطانی مرکز کو (x_k, y_k) لیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 57: قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ کو شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے چھوٹے ٹکڑے پر $f(x, y) = \sqrt{4-x^2}$ کا مکمل لیں۔

سوال 58: لا متناہی مستطیل $0 \leq y \leq 2$ ، $2 \leq x \leq \infty$ پر $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 - x)(y - 1)^{2/3}}$ کا تکمل لیں۔

سوال 59: ایک ٹھوس (غیر دائری) قائمہ بیلن کا قاعدہ xy مستوی ہے جبکہ اس کی بالائی سرحد قطع مکانی سطح $z = x^2 + y^2$ ہے۔ اس بیلن کا حجم

$$H = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy$$

ہے۔ خطہ R کا خاکہ بنائیں اور بیلن کے حجم کو، تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے، ایک بار تکمل کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔

سوال 60: درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: مکمل کو ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔)

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x) dx$$

سوال 61: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2) dS$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 62: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9) dS$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 63: کیا استمراری تفاعل $f(x, y)$ کا مستوی xy میں مستطیل خطہ پر تکمل کی ترتیب بدلتے ہوئے مختلف نتائج کا حصول ٹھیک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ بنائیں۔

سوال 64: ایک مثلث جس کے راس $(0, 1)$ ، $(2, 0)$ اور $(1, 2)$ ہوں پر استمراری تفاعل $f(x, y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت درکار ہے۔ آپ یہ قیمت کیسے حاصل کریں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 65: درج ذیل تعلق کو ثابت کریں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \int_{-b}^b e^{-x^2 - y^2} dx dy = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

سوال 66: درج ذیل غیر مناسب تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}} dy dx$$

اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 67 تا سوال 70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے اعدادی تراکیب سے دوہرا تکملات کی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال 67: $\int_1^3 \int_1^x \frac{1}{xy} dy dx$

سوال 68: $\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2} dy dx$

سوال 69: $\int_0^1 \int_0^1 \tan^{-1} xy dy dx$

سوال 70: $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$

14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کثیت

اس حصہ میں دوہرا تکملات استعمال کرتے ہوئے مستوی میں محدود خطوں کے رقبات اور ان خطوں پر باریک چادروں کی کثیت، معیار اثر، مرکز کثیت، اور حرکت دوارے⁵ کے رداس معلوم کرنا دکھایا جائے گا۔ ان کا حساب باب 6 کے حساب کی طرح ہو گا لیکن اب ہم زیادہ قسم کے اشکال کے لئے حساب کر پائیں گے۔

مستوی میں محدود خطوں کے رقبات

گزشتہ حصہ میں خطہ R پر دوہرا تکمیل کی تعریف میں $f(x, y) = 1$ لینے سے جزوی مجموعات کی تخفیف شدہ صورت

$$(14.11) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k = \sum_{k=1}^n \Delta S_k$$

حاصل ہو گی۔ یہ تخمینہ طور پر R کا رقبہ ہو گا۔ جوں جوں شکل 14.15 میں Δx اور Δy صفر کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں توں توں R کے زیادہ سے زیادہ حصہ کو تمام ΔS_k مل کر کو ڈھانپتے ہیں، اور ہم R کی رقبہ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$(14.12) \quad \text{رقبہ} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \iint_R dS$$

تعریف: بند محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(14.13) \quad S = \iint_R dS$$

□

اس باب کے دیگر تعریفات کی طرح، رقبے کی ایک متغیری تعریف کے لحاظ سے، جو ہم پہلے پیش کر چکے ہیں، موجودہ تعریف زیادہ اقسام کے خطوں پر قابل اطلاق ہو گی، لیکن، جن خطوں پر دونوں تعریفات قابل اطلاق ہوں، وہاں موجودہ تعریف گزشتہ تعریف کے عین موافق ہو گی۔

مساوات 14.13 میں دی گئی تکمیل کی قیمت کے حصول میں ہم R پر $f(x, y) = 1$ لیتے ہیں۔

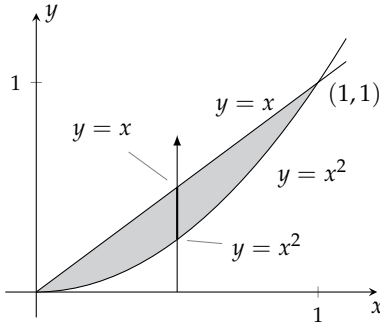
مثال 14.5: ربع اول میں $y = x$ اور $y = x^2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ (شکل 14.16) بنا کر رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

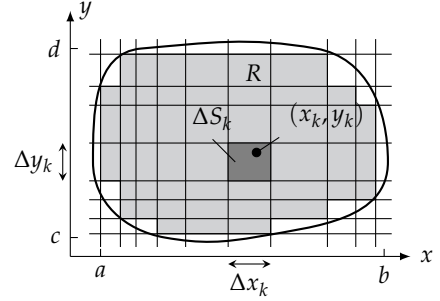
$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

□

مثال 14.6: قطعہ مکانی $y = x^2$ اور لکیر $y = x + 2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔



شکل 14.16: قطع مکانی اور کلیئر کے بیچ رقبہ (مثال 14.5)۔



شکل 14.15: ایک خطہ کے رقبے کی تلاش میں پہلا قدم خطہ کی اندرون کی خانہ بندی ہے۔

حل: اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے مکمل لیں تب ہمیں اس خطہ کو R_1 اور R_2 میں تقسیم کر کے درج ذیل دو علیحدہ علیحدہ کھمبات کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17)۔

$$S = \iint_{R_1} dS + \iint_{R_2} dS = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy$$

اس کے برعکس مکمل کی ترتیب الٹ کرنے سے صرف ایک مکمل

$$S = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx$$

کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ب)۔ ہم اسی سے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

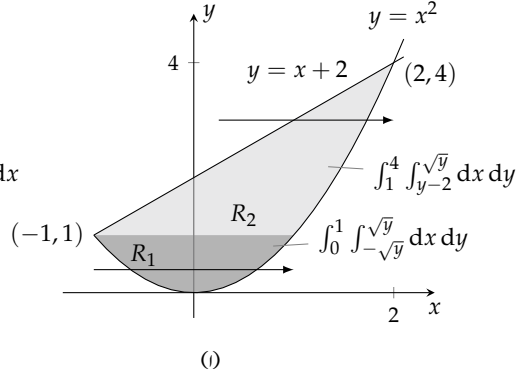
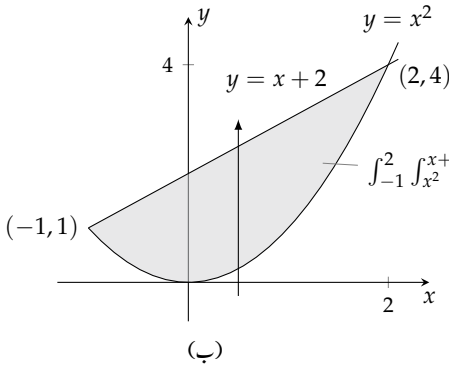
$$S = \int_{-1}^2 \left[y \right]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

□

اوسط قیمت

بند وقفہ پر قابل مکمل واحد متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس وقفہ پر تفاعل کا مکمل تقسیم لمبائی وقفہ ہوگی۔ بند اور محدود خطہ پر، جس کا رقبہ قابل ناپ ہو، معین قابل مکمل دو متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس خطہ پر تفاعل کا مکمل تقسیم خطہ کا رقبہ ہوگی۔ اگر خطہ R اور تفاعل f ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$(14.14) \quad R \text{ پر } f \text{ کی اوسط قیمت} = \frac{1}{R} \iint_R f dS$$



شکل 14.17: (i) اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمیل لیں تب رقبہ کے حصول کے لئے دو عملیات کا مجموعہ درکار ہو گا۔ (ب) البتہ پہلے y کے لحاظ سے تکمیل لیتے ہوئے صرف ایک تکمیل سے حاصل ہو گا۔

اگر خطہ R پر باریک (چٹکی) چادر کی کثافت رقبہ f ہو تب R پر f کے دوہرا تکمیل کو R کے رقبہ سے تقسیم کرنے سے اس چادر کی اوسط کثافت حاصل ہو گی جس کی اکائی کثافت فی اکائی رقبہ ہو گی۔ اگر نقطہ (x, y) سے مقررہ نقطہ N تک فاصلہ $f(x, y)$ ہو تب R پر f کی اوسط قیمت، N سے R کے نقاط کا اوسط فاصلہ ہو گا۔

مثال 14.7: مستطیل $R: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$ پر $f(x, y) = x \cos xy$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: خطہ R پر f کا تکمیل

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^1 x \cos xy \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left[\sin xy \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^\pi (\sin x - 0) \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

□ ہو گا جبکہ مستطیل R کا رقبہ π ہے۔ یوں R پر f کی اوسط قیمت $\frac{2}{\pi}$ ہو گی۔

مراکز کثافت کے معیار اثر اول اور دوم

باریک چادروں کی کثافت اور معیار اثر تلاش کرنے کے لئے ہم باب 6 کے کلیات کی طرح کلیات استعمال کرتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ دوہرا تکمیل کی بنیاد ہم زیادہ اشکال اور کشافاتی تفاعل کو عمل میں لا سکتے ہیں۔ جدول میں ان کلیات درج ذیل ہیں۔

مستوی xy میں باریکے چادر کی کمیت، معیار اثر اول⁶، معیار اثر دوم⁷ اور رداس دوار⁸ کے کلیات

کثافت: $\delta(x, y)$

کیت: $M = \iint \delta(x, y) \, dS$

معیار اثر اول: $M_x = \iint y \delta(x, y) \, dS, \quad M_y = \iint x \delta(x, y) \, dS$

مرکز کیت: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر):

$$I_x = \iint y^2 \delta(x, y) \, dS$$

بلحاظ محور x

$$I_y = \iint x^2 \delta(x, y) \, dS$$

بلحاظ محور y

$$I_L = \iint r^2(x, y) \delta(x, y) \, dS, \quad (\text{جہاں } L \text{ سے } (x, y) \text{ کا فاصلہ } r(x, y) \text{ ہے})$$

بلحاظ خط L

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y) \, dS = I_x + I_y$$

(قطبی معیار اثر) بلحاظ مبدا

رداس دوار:

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$

بلحاظ محور x

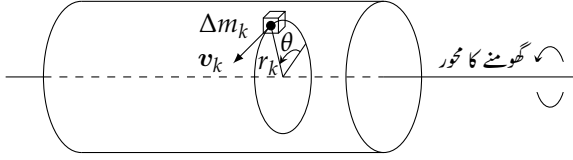
$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$$

بلحاظ محور y

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$

بلحاظ مبدا

first moment⁶
second moment⁷
radius of gyration⁸



شکل 14.18: گھومتے ہوئے دھڑے میں ذخیرہ توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو متعدد چھوٹے کمیتوں میں تقسیم کر کے ہر تمام چھوٹے کمیتوں کی حرکی توانائی کا مجموعہ لیتے ہیں۔

ان کلیات کا استعمال مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے گا۔

معیار اثر اول M_x اور M_y اور معیار اثر دوم (ہمودی معیار اثر) I_x اور I_y میں ریاضیاتی فرق یہ ہے کہ معیار اثر دور "ہیرم کے بازوؤں" کے فاصلوں، x اور y ، کا مربع لیتا ہے۔

معیار اثر I_0 کو قطبی معیار اثر⁹ بھی کہتے ہیں۔ کمیتی کثافت $\delta(x, y)$ (کمیتی فی اکائی رقبہ) ضرب $x^2 + y^2$ ، جو نمائندہ نقطہ (x, y) سے مبداء تک فاصلہ ہے، کا مکمل قطبی معیار اثر کہلاتا ہے۔ چونکہ $I_0 = I_x + I_y$ ہے لہذا ان میں سے کسی دو کے حصول کے بعد تیسرے کو اس تعلق سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ (معیار اثر I_0 بعض اوقات I_z لکھا جاتا اور بلحاظ محور z معیار اثر کہلاتا ہے۔ تب تماش $I_z = I_x + I_y$ مسئلہ عمودی محور¹⁰ کہلاتا ہے۔)

رداس دوار R_x کی تعریف درج ذیل مساوات ہے۔

$$I_x = MR_x^2$$

رداس دوار ہمیں بتاتا ہے کہ محور x کتنا دور پوری چادر کی کمیت منجمد کرتے ہوئے وہی I_x حاصل ہو گا۔ رداس دوار استعمال کرتے ہوئے ہم معیار اثر کو کمیت اور لمبائی کی صورت میں لکھ پاتے ہیں۔ رداس R_y اور R_0 کی تعریفات بھی اسی طرح ہیں:

$$I_y = MR_y^2, \quad I_0 = MR_0^2$$

ہم ان تعریفی مساوات کے جذر سے R_x ، R_y اور R_0 کے کلیات لکھتے ہیں۔

ہمیں معیار اثر میں کیا دلچسپی ہے؟ ایک جسم کا پہلا معیار اثر ہمیں ثقلي میدان میں اس جسم کے توازن اور مختلف محوروں کے لحاظ سے اس کی قوت مروڑ کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ اب اگر یہ جسم گھومتا ہوا دھڑا ہو تب ہمیں اس میں ذخیرہ توانائی جاننے میں زیادہ دلچسپی ہو گی تاکہ ہم جان سکیں کہ اس کو روکنے کے لئے یا اس کو کسی خاص زاویاتی رفتار تک پہنچانے میں کتنی توانائی درکار ہو گی۔ ایسی صورت میں معیار اثر دوم استعمال ہو گا۔

⁹ polar moment
¹⁰ Perpendicular Axis Theorem

اس دھرا کو متعدد چھوٹی کمیتوں Δm_k میں تقسیم کریں اور گھومنے کے محور سے k ویں کمیتی ٹکڑے کے فاصلہ کو r_k سے ظاہر کریں (شکل 14.18)۔ اگر دھرا کی زاویائی سمتی رفتار $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ریڈین فی سیکنڈ ہو، تب اس ٹکڑے کا کمیتی مرکز اپنے مدار میں خطی رفتار

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k \theta) = r_k \frac{d\theta}{dt} = r_k \omega$$

سے حرکت کرے گا۔ اس ٹکڑے کی حرکی توانائی تخمیناً

$$(14.15) \quad \frac{1}{2} \Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \Delta m_k (r_k \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

ہو گی۔ دھرا کی حرکی توانائی تخمیناً

$$(14.16) \quad \sum \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

ہو گی۔ دھرا کو زیادہ سے زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے اس مجموعہ کی قیمت ایک حد تک پہنچتی ہے جسے مکمل

$$(14.17) \quad \text{دھرا کی حرکی توانائی} = \int \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جزو

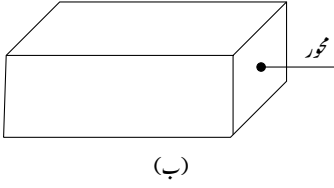
$$(14.18) \quad I = \int r^2 dm$$

درحقیقت گھومنے کے محور کے لحاظ سے دھرے کا جمودی معیار اثر ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

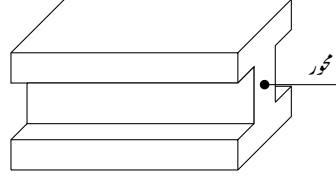
$$(14.19) \quad \text{دھرا کی حرکی توانائی} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

ایک دھرا، جس کا جمودی معیار اثر I ہو، کو ω زاویائی سمتی رفتار تک پہنچانے کے لئے $\frac{1}{2} I \omega^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس رفتار پر چلتے ہوئے دھرا کو روکنے کے لئے ہمیں دھرا سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ کمیت m کی گاڑی کو سمتی رفتار v تک پہنچانے کے لئے اس کو $\frac{1}{2} m v^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس کو روکنے کے لئے اس گاڑی سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ دھرے کا جمودی معیار اثر گاڑی کی کمیت کا مماثل ہے۔ گاڑی کی رفتار تیز یا کم کرنے کو گاڑی کی کمیت مشکل بناتی ہے۔ اسی طرح دھرے کی زاویائی رفتار تیز یا کم کرنے کو دھرے کا جمودی معیار اثر مشکل بناتا ہے۔ جمودی معیار اثر کمیت کے علاوہ کمیت کی تقسیم کا بھی حساب رکھتا ہے۔

بو جھ بردار افقی دھاتی شہتیر کے جھکاؤ کو بھی جمودی معیار اثر تعین کرتا ہے۔ شہتیر کا اکڑا پن I ضرب ایک مستقل ہوتا ہے، جہاں شہتیر کے افقی محور کے لحاظ سے عمودی تراش کا قطبی معیار اثر I ہے۔ جمودی معیار اثر I کی قیمت جتنی زیادہ ہو، شہتیر اتنا زیادہ اکڑ ہو گا اور اتنا کم جھکے گا۔



(ب)



(i)

شکل 14.19: دونوں شہتیر کا رقبہ عمودی تراش ایک جیسا ہے لیکن شہتیر-ا کا جمودی معیار اثر زیادہ ہے لہذا شہتیر-ا زیادہ اکر ہو گا۔

یہی وجہ ہے کہ ہم شکل 14.19-ا میں دکھایا گیا شہتیر استعمال کرتے ہیں تاکہ ایسے شہتیر جن کا جمودی تراش چکور ہو (شکل 14.19-ب)۔ شہتیر کے بالائی اور زیریں لگر زیادہ ترکیت کو افقی محور سے دور رکھتے ہوئے I کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

جمودی معیار اثر کو سمجھنے کے لئے ایک تجربہ کریں۔ ایک قلم کے دونوں سروں کے ساتھ سکے چپا کر قلم کو انگلیوں میں تیزی سے آگے پیچھے گھمائیں۔ گھومنے کا رخ تبدیل کرتے وقت آپ کو جو مزاحمت محسوس ہوتی ہے وہ جمودی معیار اثر کی بنا ہے۔ اب ان سکوں کو قلم کے سروں سے دور اور آپس میں قریب کریں۔ قلم اور سکوں کی کیت تبدیل نہیں ہوئی ہے البتہ اس نظام کا جمودی معیار اثر کم ہو ہے۔ اب آپ دیکھیں گے کہ انہیں آگے پیچھے گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

آپ کہہ سکتے ہیں کہ معیار اثر اول کا تعلق توازن سے ہے جبکہ معیار اثر دوم کا تعلق گھومنے سے ہے۔

مثال 14.8: محور x ، کلیئر $x = 1$ اور کلیئر $y = 2x$ کے بیچ نیکنی چادر پائی جاتی ہے۔ نقطہ (x, y) پر اس چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ ہے۔ اس چادر کی کیت، پہلا معیار اثر، مرکز کیت، جمودی معیار اثر اور محدودی محوروں کے لحاظ سے رداس دوار تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ بنا کر (شکل 14.20) اس پر اتنی معلومات درج کرتے ہیں کہ تکمیل کے حد جان سکیں۔

چادر کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y \right]_{y=0}^{y=2x} \, dx \\
 &= \int_0^1 (24x^2 + 12x) \, dx = \left[8x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = 14
 \end{aligned}$$

محور x کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y \delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2) dx \\ &= \left[7x^4 + 4x^3 \right]_0^1 = 11 \end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x \delta(x, y) dy dx = 10$$

مرکز کثرت کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) dx \\ &= \left[8x^5 + 4x^4 \right]_0^1 = 12 \end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

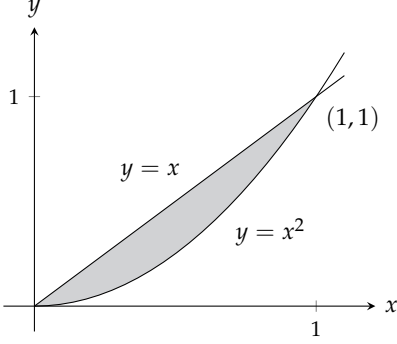
$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x, y) dy dx = \frac{39}{5}$$

ہم I_x اور I_y کی قیمتوں سے I_0 کی قیمت کلیہ $I_0 = I_x + I_y$ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

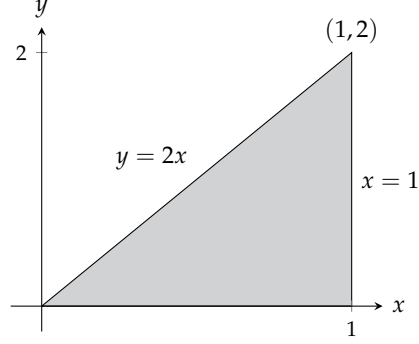
$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60 + 39}{5} = \frac{99}{5}$$

تین رداس دوار درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} R_x &= \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \\ R_y &= \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{39}{70}} \\ R_0 &= \sqrt{\frac{I_0}{M}} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{99}{70}} \end{aligned}$$



شکل 14.21: خطہ برائے مثال 14.9



شکل 14.20: خطہ برائے مثال 14.8

□

جیومیٹریائی اشکال کے وسطانی مراکز

مستقل کثافت کی صورت میں \bar{x} اور \bar{y} کے کلیات میں شمار کنندہ اور نسب نما میں موجود کثافت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ \bar{x} اور \bar{y} کے نقطہ نظر سے δ کی قیمت 1 ہو سکتی ہے۔ یوں مستقل δ کی صورت میں مرکز کثیت کا دار و مدار جسم کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا ناکہ جسم کے مادہ پر۔ ایسی صورت میں مرکز کثیت عموماً شکل کا وسطانی مرکز¹¹ پکارا جاتا ہے۔ وسطانی مرکز کی تلاش میں ہم $\delta = 1$ لے کر، پہلے کی طرح، معیار اثر اول کو کثیت سے تقسیم کرتے ہوئے \bar{x} اور \bar{y} دریافت کرتے ہیں۔

مثال 14.9: ربع اول میں اوپر سے لکیر $y = x$ اور نیچے سے قطع مکانی $y = x^2$ ایک خطہ کو محدود کرتے ہیں۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم خطہ کا خاکہ بنا کر مکمل کے حد جانتے ہیں (شکل 14.21)۔ اس کے بعد $\delta = 1$ لے کر آگے بڑھتے ہیں۔

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^x 1 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y \right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_{x^2}^x y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^x x \, dy \, dx = \int_0^1 \left[xy \right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

centroid¹¹

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم وسطانی مرکز کے محدود دریافت کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = 2, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

□

نقطہ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$ اس خطے کا وسطانی مرکز ہو گا۔

سوالات

رقبہ بذریعہ دوہرا تکامل

سوال 1 تا سوال 8 میں منحنیات اور کلیروں کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر اس خطے کے رقبہ کو بطور دوہرا بارہا تکامل لکھیں۔ اس عمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 1: محدودی محور اور کلیر $x + y = 2$

سوال 2: کلیر $y = 4$ اور $y = 2x$ ، $x = 0$

سوال 3: قطع مکانی $x = -y^2$ اور کلیر $y = x + 2$

سوال 4: قطع مکانی $x = y - y^2$ اور کلیر $y = -x$

سوال 5: منحنی $y = e^x$ اور کلیر $y = 0$ ، $x = 0$ اور $x = \ln 2$

سوال 6: ربع اول میں منحنیات $y = \ln x$ ، $y = 2 \ln x$ اور کلیر $x = e$

سوال 7: قطع مکانی $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$

سوال 8: قطع مکانی $x = y^2 - 1$ اور $x = 2y^2 - 2$

سوال 9 تا سوال 14 میں مستوی xy میں خطوں کے رقبات کو تکامل یا تجمعات کے مجموعوں کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔ ان خطوں کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر ان کی مساواتیں لکھیں اور ان نقطوں کی نشاندہی کریں جہاں منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے بعد ان خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 9: $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} dx dy$

سوال 10: $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dy dx$

سوال 11: $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx$

سوال 12: $\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx dy$

سوال 13: $\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy dx$

سوال 14: $\int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$

اوسط قیمت

سوال 15: تقابل $f(x, y) = \sin(x + y)$ کی اوسط قیمت درج ذیل خطوں پر تلاش کریں۔

ا. مستطیل $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$

ب. مستطیل $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2$

سوال 16: کیا چکور $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ یا ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ میں $f(x, y) = xy$ کی اوسط قیمت زیادہ ہو گی؟ ان دونوں خطوں میں اوسط کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 17: چکور $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ میں قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 18: چکور $\ln 2 \leq x \leq 2 \ln 2, \ln 2 \leq y \leq 2 \ln 2$ میں $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

مستقل کثافت

سوال 19: ربع اول میں قطع مکانی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $x = 0$ ، $y = x$ کے بیچ ایک باریک چادر جس کی کثافت $\delta = 3$ ہو پائی جاتی ہے۔ اس کا مرکز کثیت تلاش کریں۔

سوال 20: ربع اول میں محدودی محور اور لکیر $x = 3$ اور $y = 3$ کے بیچ مستقل کثافت کی باریک مستطیل چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے جھودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 21: ربع اول میں محور x ، قطع مکانی $y^2 = 2x$ اور لکیر $x + y = 4$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 22: ربع اول سے لکیر $x + y = 3$ ایک ٹکونی خطہ کا متقی ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 23: محور x اور منحنی $y = \sqrt{1-x^2}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 24: ربع اول میں قطع مکانی $y = 6x - x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطے کا رقبہ $\frac{125}{6}$ ہے۔ اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 25: ربع اول سے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ ایک خطہ کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 26: دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کی I_y اور I_0 دریافت کریں۔

سوال 27: محور x اور قوس $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 28: محور x اور منحنی $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ کے بیچ وقفہ $\pi \leq x \leq 2\pi$ پر کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 29: لانتناہی خطہ کا وسطانی مرکز
ربع دوم میں محدودی محور اور منحنی $y = e^x$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (کیٹ اور معیار اثر کے کلیات میں آپ کو غیر مناسب محکملات استعمال کرنے ہوں گے۔)

سوال 30: لانتناہی چادر کا پہلا معیار اثر
ربع اول میں منحنی $y = e^{-x^2/2}$ کے نیچے کثافت $\delta = 1$ کے لانتناہی جسامت کی چادر کا محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 31: قطع مکانی $x = y - y^2$ اور لکیر $x + y = 0$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = x + y$ ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 32: ترخیم $x^2 + 4y^2 = 12$ سے قطع مکانی $x = 4y^2$ جس چھوٹے حصہ کو کاٹتا ہے، اس کی کثافت $\delta(x, y) = 5x$ ہے۔ اس کی کثافت تلاش کریں۔

سوال 33: محور y اور لکیر $y = x$ اور $y = 2 - x$ کے بیچ ٹکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$ ہے۔ اس چادر کا مرکز کثافت تلاش کریں۔

سوال 34: منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کی کثافت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 35: ربع اول سے خطوط $x = 6$ اور $y = 1$ ایک مستطیل باریک چادر کاٹتے ہیں جس کی کثافت $\delta(x, y) = x + y + 1$ ہے۔ اس کی مرکز کثیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 36: قطع مکانی $y = x^2$ اور $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کثیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 37: قطع مکانی $y = x^2$ ، محور x اور $x = \pm 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 7y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کثیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 38: خطوط $x = 0$ ، $x = 20$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1 + x/20$ ہے۔ اس کا مرکز کثیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 39: کلیئر $y = x$ ، $y = -x$ اور $y = 1$ کے بیچ تکوئی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کثیت اور محدودی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔ اس کا قطبی جمودی معیار اثر اور رداس دوار بھی تلاش کریں۔

سوال 40: کثافت $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ لیتے ہوئے سوال 39 کو دوبارہ حل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 41: مستوی xy میں جراثیم کی تعدادی کثافت $f(x, y) = \frac{10000e^y}{1+|x|/2}$ ہے جہاں x اور y کی ناپ سنٹی میٹر میں ہے۔ مستطیل $-5 \leq x \leq 5$ ، $-2 \leq y \leq 0$ میں جراثیم کی کل تعداد تلاش کریں۔

سوال 42: سطح زمین پر کثافت آبادی $f(x, y) = 100(y + 1)$ ہے جہاں x اور y کلومیٹر میں ہیں۔ منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ کل آبادی کتنی ہوگی؟

سوال 43: مستقل کثافت کا ایک برتن مستوی xy میں خطہ $-1 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq a(1 - x^2)$ پر واقع ہے۔ یہ برتن 45° تک ٹیڑھا کرنے تک واپس اپنی جگہ پر آن گرتا ہے۔ مستقل a کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 44: جمودی معیار اثر کم سے کم کرنا
ربع اول میں کثافت $\delta(x, y) = 1$ کی چادر کلیئر $x = 4$ اور $y = 2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ کلیئر $y = a$ کے لحاظ سے اس چادر کی جمودی معیار اثر I_a درج ذیل ہے۔

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 dy dx$$

مستقل a کی وہ قیمت تلاش کریں جو I_a کو کم سے کم کرتا ہو۔

سوال 45: مستوی xy میں کلیئر $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ اور $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ لانتناہی خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 46: ایک تیلی چھڑی کی مستقل خطی کثافت δ گرام فی سنٹی میٹر اور لمبائی L ہے۔ اس کا رداس دوار دیے گئے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

- ا. چھڑی کے محور کو عمودی اور اس کی مرکز کیت سے گزرتے ہوا خط۔
 ب. چھڑی کے ایک سر پر چھڑی کے محور کو عمودی خط۔

سوال 47: مستوی xy میں مستقل کثافت δ کی چار منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے قی پائی جاتی ہے۔

ا. ایسا δ دریافت کریں کہ چادر کی کیت سوال 34 کے چادر کی کیت کے برابر ہو۔

ب. جزو-1 میں حاصل δ کی قیمت کا اس خط پر $\delta(x, y) = y + 1$ کی اوسط قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 48: دائرہ $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ کی کثافت مستقل ہے۔ محوروں کے لحاظ سے اس کے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

مسئلہ متوازی محور

مستوی xy میں ایک خط پر کیت m کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مرکز کیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہے۔ خط $L_{c,m}$ کے متوازی h اکائیاں دور خط L پایا جاتا ہے۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر $I_{c,m}$ اور I_L درج ذیل کلیہ کو مطمئن کریں گے۔

$$(14.20) \quad I_L = I_{c,m} + mh^2$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک جمودی معیار اثر سے دوسرا با آسانی دریافت کیا جاسکتا ہے۔

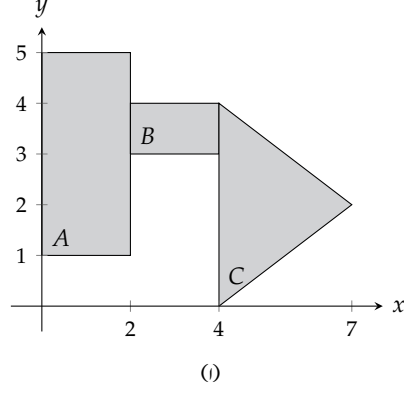
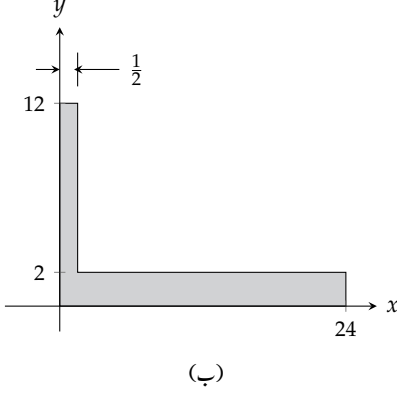
سوال 49: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت
 (i) دکھائیں کہ باریک چادر کے مرکز کیت سے گزرتی خط کے لحاظ سے چادر کا جمودی معیار اثر صفر ہو گا۔ (اشارہ: مرکز کیت کو مبدا پر رکھیں اور خط کو محور y پر رکھیں۔ کلیہ $\bar{x} = \frac{My}{M}$ کیا دیگا؟) (ب) جزو-1 کے نتیجہ سے مسئلہ متوازی محور اخذ کریں۔ (اشارہ: خط $L_{c,m}$ کو محور y اور L کو $x = h$ پر رکھ کر I_L کے تکل کو دو حصوں میں لکھیں۔)

سوال 50: (i) مسئلہ متوازی محور استعمال کرتے ہوئے مثال 14.8 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے اس مثال میں چادر کے مرکز کیت سے گزرتی افقی اور انتصابی خطوط کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ (ب) جزو-1 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے خطوط $x = 1$ اور $y = 2$ کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

کلیہ پاپس

جناب پاپس نے حصہ 6.10 کا مسئلہ پاپس بیان کیا۔ اس کے علاوہ وہ جانتے تھے کہ ایک دوسرے کو نہ ڈھانچتے ہوئے دو مستوی خطوں کا وسطانی مرکز ان خطوں کے وسطانی مراکز سے گزرتے ہوئے خط پر پایا جاتا ہے۔ مستوی xy میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانچتی ہوئی دو باریک چادر P_1 اور P_2 فرض کریں، جن کی کیت بالترتیب m_1 اور m_2 ہو۔ مبدا سے بالترتیب ان چادروں کے مراکز کیت تک سمتیات c_1 اور c_2 لیں۔ اب اشتراک $P_1 \cup P_2$ کے مرکز کیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل دیگا۔

$$(14.21) \quad c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$$



شکل 14.22: اشکال برائے سوال 53 اور سوال 54

مسوات 14.21 کو کلیہ پاپس¹² کہتے ہیں۔ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو سے زیادہ (لیکن متنہائی تعداد کی) چادروں کے لئے درج ذیل کلیہ ہو گا۔

$$(14.22) \quad c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

یہ کلیہ بالخصوص وہاں فائدہ مند ہو گا جہاں غیر منظم شکل و صورت کی چادروں کے حصوں کے وسطانی مراکز ہم جیومیٹری سے علیحدہ علیحدہ طور پر جانتے ہوں اور جہاں ہر حصہ از خود مستقل کثافت کا ہو۔ ہم اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے پوری چادر کا وسطانی مرکز معلوم کر سکتے ہیں۔

سوال 51: کلیہ پاپس (مسوات 14.21) اخذ کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں ان خطوں کو ترسیم کر کے ان کے مراکز کیت (\bar{x}_1, \bar{y}_1) اور (\bar{x}_2, \bar{y}_2) کی نشاندہی کریں۔ محدود محور کے لحاظ سے $P_1 \cup P_2$ کے معیار اثر کیا ہوں گے؟)

سوال 52: ریاضی (الکراچی) ماخوذ اور مسوات 14.21 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی عدد صحیح $n > 2$ کے لئے مسوات 14.22 مطمئن ہو گا۔

سوال 53: فرض کریں A، B اور C تین اشکال ہیں (شکل 14.22-ا)۔ کلیہ پاپس کی مدد سے درج ذیل کے وسطانی مراکز دریافت کریں۔

ا. $A \cup B$ ب. $A \cup C$ ج. $B \cup C$ د. $A \cup B \cup C$

سوال 54: وسطانی مرکز دریافت کریں (شکل 14.22-ب)۔

سوال 55: ایک مساوی الساقین مثلث T کا قاعدہ $2a$ اور قد h ہے۔ اس کا قاعدہ، رداس a کے نصف دائرہ D کے قطر پر پایا جاتا ہے۔ مثلث دائرہ کے باہر ہے۔ $T \cup D$ کا وسطانی مرکز (O) اور T کی مشترک سرحد پر (P) T کے اندر ہونے کے لئے a اور h کا تعلق دریافت کریں۔

سوال 56: ایک مساوی الساقین مثلث T جس کا قد h ہے کا قاعدہ چکور Q کا ایک ضلع ہے۔ چکور کے ضلع کی لمبائی s ہے۔ (چکور اور مثلث ایک دوسرے کو نہیں ڈھانپتے ہیں)۔ $T \cup Q$ کا وسطانی مرکز مثلث کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر h کا s کے ساتھ کیا تعلق گا؟ اپنے جواب کا موازنہ سوال 55 کے جواب کے ساتھ کریں۔

14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ

بعض اوقات عمل کو قطبی روپ میں تبدیل کرنے سے اس کا حل آسان ہو جاتا ہے۔ اس حصہ میں یہ تبدیلی دکھائی جائے گی اور ان نکملات کی قیمت کا حصول دکھایا جائے گا جن کے سرحد قطبی روپ میں دیے گئے ہوں۔

قطبی روپ میں نکملات

مستوی xy میں دوہرا نکل کا ذکر کرتے ہوئے ہم نے خطہ R کو مستطیلی ٹکڑوں میں اس طرح کاٹا کہ مستطیل کے اضلاع محدودی محوروں کے متوازی ہوں۔ اس طرح ان مستطیلوں کے اضلاع مستقل x اور یا مستقل y لکھے جاسکتے ہیں۔ کارٹیزی محدودی مستطیل قدرتی صورت ہے۔ قطبی محدودی نظام میں "قطبی مستطیل" قدرتی صورت ہے جس کے اضلاع مستقل r اور مستقل θ لکھے جاسکتے ہیں۔

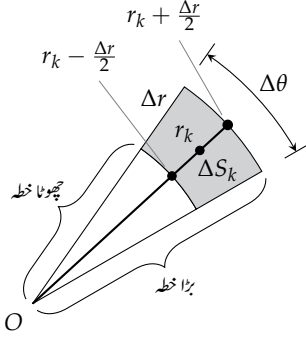
فرض کریں تفاعل $f(r, \theta)$ خطہ R پر معین ہے جس کے سرحد شعاع $\theta = \alpha$ اور $\theta = \beta$ اور استراری منحنیات $r = g_1(\theta)$ اور $r = g_2(\theta)$ ہیں۔ مزید α اور β کے ہر قیمت کے لئے $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq a$ ہے۔ یوں R پکھا نما خطہ Q میں، جس کو عدم مساوات $0 \leq r \leq a$ ، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ظاہر کرتی ہیں، پایا جائے گا (شکل 14.23)۔

ہم Q پر دائری قوسین اور شعاعوں کا جال بچھاتے ہیں۔ یہ قوسین ان دائروں سے کاٹے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے اور جن کے رداس Δr ، $2\Delta r$ ، \dots ، $m\Delta r$ ہیں جہاں $\Delta r = \frac{a}{m}$ ہے۔ ان شعاع کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{m'}$ ہے۔

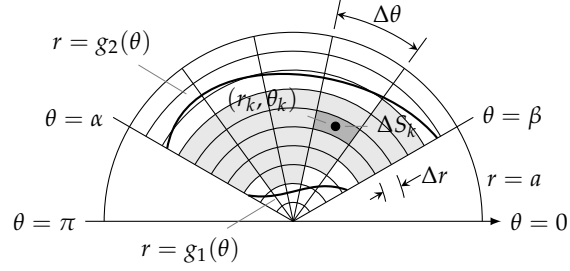
$$\theta = \alpha, \theta = \alpha + \Delta\theta, \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \dots, \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$$

یہ شعاع اور قوسین Q کو "قطبی مستطیلوں" میں تقسیم کرتے ہیں۔

ہم ان قطبی مستطیلوں کو 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں جو مکمل طور پر R کے اندر پائے جاتے ہوں اور ان کے رقبوں کو ΔS_1 ، ΔS_2 ، \dots ، ΔS_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ شمار کرنے کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ ہم ΔS_k رقبے کی قطبی مستطیل کے مرکز کو



شکل 14.24: سایہ دار خطے کا رقبہ ΔS_k حاصل کرنے کے لئے بڑے خطے سے چھوٹے خطے کا رقبہ منفی کریں۔



شکل 14.23: خطہ $R : g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$ ، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ میں پایا جاتا ہے۔ خطہ $Q : 0 \leq r \leq a$ کی خانہ بندی شعاعوں اور دائری قوسین سے کرتے ہوئے R کی خانہ بندی کی جاتی ہے۔

(r_k, θ_k) سے ظاہر کرتے ہیں۔ قطبی مستطیل کے مرکز سے مراد وہ نقطہ ہے جو دونوں دائری قوسین کی اوسط رداس کے قوس اور اس شعاع پر پایا جاتا ہو جو دونوں قوسین کو درمیان سے کاٹی ہو۔ ہم اب درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(14.23) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(r, \theta) \Delta S_n$$

اگر پورے R پر f استمراری ہو، تب جال کے خانے چھوٹے سے چھوٹے کر کے Δr اور $\Delta \theta$ کو صفر تک پہنچانے سے یہ مجموعہ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد R پر f کا دوہرا تکمیل کہلاتا ہے جس کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

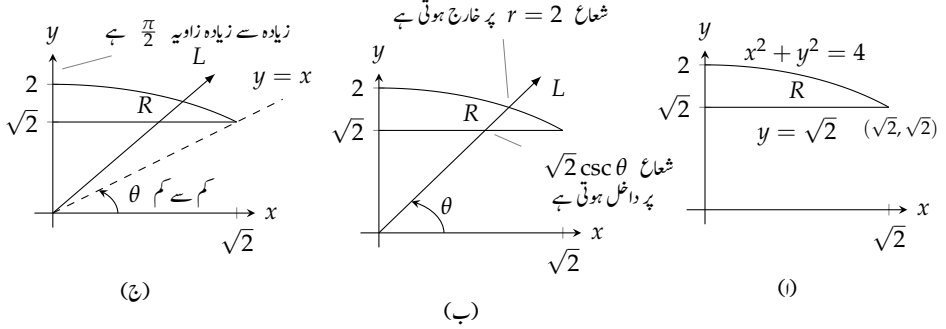
$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \iint_R f(r, \theta) dS$$

اس حد کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر ہمیں مجموعہ J_n یوں لکھنا ہو گا کہ ΔS_k کی قیمت Δr اور $\Delta \theta$ کی روپ میں ہو۔ رقبہ ΔS_k کی اندرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k - \frac{\Delta r}{2}$ جبکہ اس کی بیرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k + \frac{\Delta r}{2}$ ہے (شکل 14.24)۔ ان قوسین سے مبداء تک دائری تکونی خطوں کے رقبے

$$(14.24) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta \quad \text{اندرونی تکونی رقبہ} \\ & \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta \quad \text{بیرونی تکونی رقبہ} \end{aligned}$$

ہوں گے۔ یوں درج ہو گا۔

$$\begin{aligned} \Delta S_k &= \text{اندرونی تکونی رقبہ} - \text{بیرونی تکونی رقبہ} \\ &= \frac{\Delta \theta}{2} \left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] = \frac{\Delta \theta}{2} (2r_k \Delta r) = r_k \Delta r \Delta \theta \end{aligned}$$



شکل 14.25: قطبی محدود میں مکمل کی قیمت کے قدم۔

اس نتیجہ کو مساوات 14.23 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(14.25) \quad I_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta \theta$$

مسئلہ فوینی کی ایک صورت کہتی ہے کہ اس مجموعہ کی حد r اور θ کے لحاظ سے درج ذیل بارہا مکمل دیگا۔

$$(14.26) \quad \iint_R f(r, \theta) dS = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

مکمل کی حدیں

کار تہی محدود میں مکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار قطبی محدود کے لئے بھی کارآمد ہے۔

قطبی محدود میں مکمل حاصل کرنے کا طریقہ

قطبی محدود میں خطہ R پر $\iint_R f(r, \theta) dS$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے پہلے r کے لحاظ سے اور بعد میں θ کے لحاظ سے مکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: مکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی مخفیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.25-ا)۔

2. مکمل کی r حدیں: مبداء سے بڑھتی ہوئی r کے رخ خطہ R سے گزرتا ہوا شعاع L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ مکمل کی r حدیں ہوں گے۔ ان کی قیمتیں عموماً θ پر منحصر ہوں گی (شکل 14.25-ب)۔

3. تکمیل کی θ حدیں: وہ θ حدیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام شعاعیں شامل ہوں (شکل 14.25-ج)۔

تکمیل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_R f(r, \theta) dS = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r, \theta) r dr d\theta$$

مثال 14.10: دائرہ $r = 1$ کے باہر اور قلب نما $r = 1 + \cos \theta$ کے اندر خطہ میں $f(r, \theta)$ کے تکمیل کی حدیں تلاش کریں۔

حل:

1. خاکہ: ہم خطے کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر نام و نشان لکھتے ہیں (شکل 14.26)۔

2. تکمیل کی r حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی علامتی شعاع خطہ R میں $r = 1$ کے مقام پر داخل اور $r = 1 + \cos \theta$ کے مقام پر خارج ہو گی۔

3. تکمیل کی θ حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی وہ شعاعیں جو R سے گزرتی ہوں، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ تا $\theta = \frac{\pi}{2}$ میں پائی جاتی ہیں۔

یوں تکمیل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} f(r, \theta) r dr d\theta$$

□

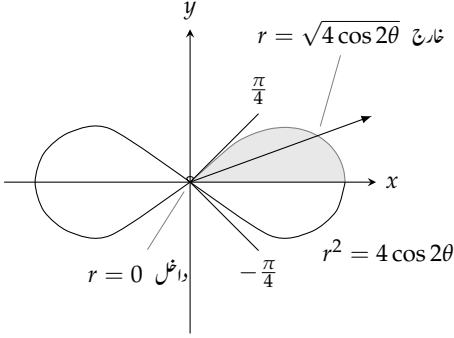
اگر $f(r, \theta)$ ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب R پر f کا تکمیل R کا رقبہ ہو گا۔

قطبی محدود رقبہ

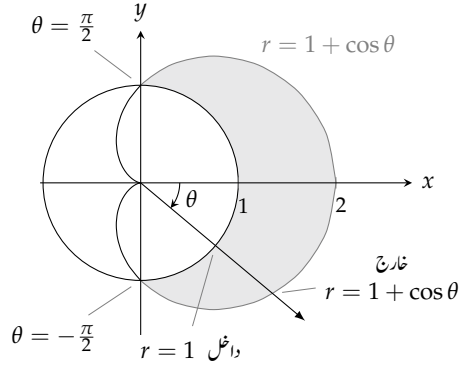
قطبی محدود مستوی میں بند اور محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(14.27) \quad S = \iint_R r dr d\theta$$

جیسا آپ توقع کرتے ہوں گے یہ کلیہ، پہلے دیے گئے کلیات کے عین مطابق ہے۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت پیش نہیں کریں گے۔



شکل 14.27: کٹھن کی قیت کے حصول میں ہم r کو $\sqrt{4 \cos 2\theta}$ جبکہ θ کو 0 تا $\frac{\pi}{4}$ لیتے ہیں۔



شکل 14.26: دائرہ اور قلب نما (مثال 14.10)

مثال 14.11: دو چشمہ $r^2 = 4 \cos 2\theta$ میں گھیرا ہوا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم دو چشمہ کا خاکہ بنا کر کٹھن کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.27)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ربع اول میں دو چشمہ کے رقبہ کو 4 سے ضرب دے کر پورا رقبہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{4 \cos 2\theta}} r \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{4 \cos 2\theta}} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta \, d\theta = 4 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 4 \end{aligned}$$

□

کار تہی کٹھنات کی قطبی کٹھنات میں تبدیلی

کار تہی کٹھن $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ کو قطبی کٹھن میں دو قدموں میں تبدیل کیا جاتا ہے:

1. کار تہی کٹھن میں $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ پر کرتے ہوئے $dx \, dy$ کی جگہ $r \, dr \, d\theta$ لکھیں۔

2. خطہ R کی سرحد کی قطبی حدیں مہیا کریں۔

یوں کارتیسی تکمیل سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تکمیل کے خطہ کو قطبی محدود میں G سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$(14.28) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

یہ باب 5 میں ترکیب بدل کی طرح ہے البتہ یہاں ایک کی بجائے دو متغیرات ہیں۔ دھیان رہے کہ $dx dy$ کی جگہ $dr d\theta$ نہیں بلکہ $r dr d\theta$ پر کیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ آگے پیش کی جائے گی۔

مثال 14.12: ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ایک چوتھائی میں کثافت $\delta(x, y) = 1$ کی باریک چادر کی مبداء کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: ہم چادر کا خاکہ بنا کر تکمیل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.28)۔ کارتیسی محدود میں اس خطہ کا قطبی معیار اثر سے مراد درج ذیل تکمیل ہے۔

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

ہم y کے لحاظ سے تکمیل لے کر

$$\int_0^1 (x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}) dx$$

حاصل کرتے ہیں جس کا حل، جدول کی مدد کے بغیر، مشکل ہے۔

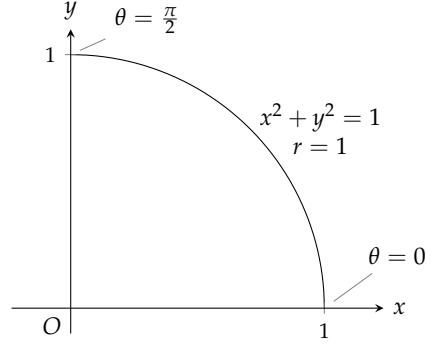
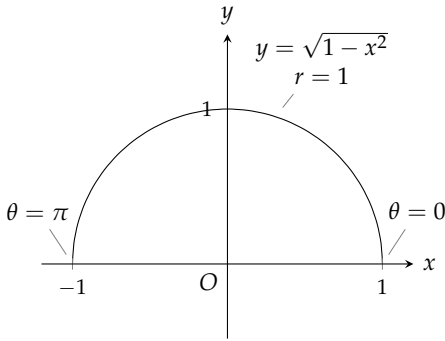
اس تکمیل کو قطبی تکمیل میں تبدیل کرنے سے حالات بہتر ہوتے ہیں۔ ہم $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ پر کر کے $dx dy$ کی جگہ $r dr d\theta$ لکھ کر

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ قطبی محدود میں تکمیل اتنا آسان کیوں ہوا۔ ایک وجہ یہ ہے کہ $x^2 + y^2$ سادہ صورت r^2 اختیار کرتا ہے۔ دوسری وجہ یہ کہ تکمیل کی حدیں اب مستقل ہیں۔ □

مثال 14.13: محور x اور $y = \sqrt{1-x^2}$ کے بیچ نصف دائری خطہ R پر درج ذیل تکمیل کی قیمت تلاش کریں (شکل 14.29)۔

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx$$



شکل 14.29: نصف دائری خط $0 \leq r \leq 1$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ہے۔

شکل 14.28: قطبی محد میں یہ خط $0 \leq r \leq 1$ ، $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ہے۔

حل: کارتیسی محد میں یہ مکمل غیر بنیادی ہے اور $e^{x^2+y^2}$ کا x یا y کے لحاظ سے مکمل، سیدھا طریقہ ہے، حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے باوجود یہ مکمل اور اس طرح کے دیگر مکملات ریاضیات میں اہمیت رکھتے ہیں اور ان کا حل ضروری ہے۔ قطبی محد یہاں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ ہم $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ پر کر کے $dy dx$ کی جگہ $r dr d\theta$ لکھ کر مکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} \iint_R e^{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (e - 1) d\theta = \frac{\pi}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ e^{r^2} کے مکمل میں ہمیں $r dr d\theta$ کا r درکار تھا جس کے بغیر ہم مکمل حاصل نہیں کر سکتے تھے۔ □

سوالات

قطبی مکملات کے قیمت کے تلاش

سوال 1 تا سوال 16 میں دیے گئے مکملات کو قطبی روپ میں تبدیل کر کے حل کریں۔

سوال 1: $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$

سوال 2: $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$

سوال 3: $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$

$$\text{سوال 4: } \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\text{سوال 5: } \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$$

$$\text{سوال 6: } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\text{سوال 7: } \int_0^6 \int_0^y x dx dy$$

$$\text{سوال 8: } \int_0^2 \int_0^x y dy dx$$

$$\text{سوال 9: } \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$$

$$\text{سوال 10: } \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy$$

$$\text{سوال 11: } \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

$$\text{سوال 12: } \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx$$

$$\text{سوال 13: } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx$$

$$\text{سوال 14: } \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy$$

$$\text{سوال 15: } \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

$$\text{سوال 16: } \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx$$

قطب محدودیہ رقبات کے تلاش

سوال 17: ربع اول سے منحنی $r = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ جس خطہ کو کاٹتی ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 18: قلب نما $r = 1 + \cos \theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 19: گلاب $r = 12 \cos 3\theta$ کے ایک پتے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 20: مثبت محور x اور پچ دار $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r = \frac{4\theta}{3}$ کے پچ رقبہ تلاش کریں۔ اس خطے کی صورت گھونگا کے خول سے ملتی جلتی ہے۔

سوال 21: ربع اول میں قلب نما $r = 1 + \sin \theta$ جس خطے کو کاٹتا ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 22: قلب نما $r = 1 + \cos \theta$ اور $r = 1 - \cos \theta$ کے مشترکہ خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

کمیتے اور معیار اثر

سوال 23: مستقل کشاف $\delta(x, y) = 3$ کی باریک چادر جس کی زیریں سرحد محور x اور بالائی سرحد قلب نما $r = 1 - \cos \theta$ ہے، کا محور x کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔

سوال 24: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے اندر باریک دائرہ قرص کی کشاف $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے۔ اس قرص کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اول اور مہدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 25: دائرہ $r = 3$ کے باہر اور دائرہ $r = 6 \sin \theta$ کے اندر چادر کی کشاف $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r}$ ہے۔ اس چادر کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 26: قلب نما $r = 1 - \cos \theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر باریک چادر کی کشاف $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$ ہے۔ مہدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 27: قلب نما $r = 1 + \cos \theta$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 28: قلب نما $r = 1 + \cos \theta$ کے اندر باریک چادر کی کشاف $\delta(x, y) = 1$ ہے۔ مہدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

اوسط قیمتیں

سوال 29: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ کے اوپر نصف کرہ $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 30: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ کے اوپر (ایک) مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 31: قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ میں مہدا سے نقطہ $N(x, y)$ کا اوسط فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 32: قرص $x^2 + y^2 \leq a$ میں نقطہ $N(x, y)$ کا سرحدی نقطہ $A(1, 0)$ سے فاصلے کے مربع کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 33: خطہ $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$ پر $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ کے مکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 34: خطہ $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$ پر $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ کا مکمل حل کریں۔

سوال 35: قلب نما $r = 1 + \cos \theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر خطہ ٹھوس قائمہ بیلیں کا قاعدہ ہے۔ اس بیلیں کی چوٹی مستوی $z = x$ میں پائی جاتی ہے۔ اس بیلیں کا حجم تلاش کریں۔

سوال 36: دو چشمہ $r^2 = 2 \cos 2\theta$ کے اندر خطہ ٹھوس قائمہ بیلیں کا قاعدہ ہے۔ اس بیلیں کی چوٹی کرہ $z = \sqrt{2 - r^2}$ کی سطح کو مس کرتی ہے۔ اس بیلیں کا حجم تلاش کریں۔

سوال 37: (i) غیر مناسب مکمل $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ کے حل کا درست طریقہ یہ ہے کہ پہلے اس کا مربع لیں:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$$

اس مکمل کو قطبی روپ میں لکھ کر حل کریں۔ (ب) درج ذیل مکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (حصہ 8.6 کا سوال 92 جاری)۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt$$

سوال 38: درج ذیل مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy$$

سوال 39: قرص $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$ پر تفاعل $f(x, y) = 1/(1 - x^2 - y^2)$ کا مکمل حل کریں۔ کیا قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ پر $f(x, y)$ کا مکمل موجود ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 40: قطبی محدود میں دوہرا انکمل استعمال کرتے ہوئے قطبی منحنی $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ اور مبدا کے بچ پٹھا نما خطہ کے رقبہ کا درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

سوال 41: رداس a کے دائرہ میں N_0 ایک نقطہ ہے اور N_0 سے دائرہ کے مرکز تک فاصلہ h ہے۔ کسی بھی اختیاری نقطہ N سے N_0 تک فاصلہ کو d سے ظاہر کریں۔ دائرہ میں محیط خطہ پر d^2 کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: دائرے کے مرکز کو مبدا پر اور N_0 کو محور x پر رکھ کر اپنے لئے آسانی پیدا کریں۔)

سوال 42: فرض کریں ایک قطبی خطے کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc \theta}^{2\sin \theta} r dr d\theta$$

(i) اس انکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں۔ (ب) پاپس کے ایک مسئلہ اور حصہ 6.10 میں سوال 23 میں وسطانی مرکز کی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 43 تا سوال 46 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کارتیسی نکملات کو قطبی نکملات میں تبدیل کر کے ان قطبی نکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ کو درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

ا. کارتیسی نکمل کے خطہ کا خاکہ مستوی xy پر بنائیں۔

ب. جزو-1 میں خطہ کی ہر سرحد کی کارتیسی مساوات کو r اور θ کے لئے حل کرتے ان کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

ج. جزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے نکمل کے خطہ کے خاکہ کو قطبی $r\theta$ مستوی میں بنائیں۔

د. متکمل کو کارتیسی سے قطبی روپ میں تبدیل کریں۔ جزو-ج کے خاکہ سے نکمل کی حدیں معلوم کر کے قطبی نکمل کی قیمت کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2} dy dx \quad \text{سوال 43}$$

$$\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2} dy dx \quad \text{سوال 44}$$

$$\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad \text{سوال 45}$$

$$\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y} dx dy \quad \text{سوال 46}$$

14.4 کار تیزی محدود میں تہرا تکمل

ہم تہرا تکملات کی مدد سے تین بعدی اجسام کے حجم، کمیت اور معیار اثر اور تین متغیری تفاعل کی اوسط قیمت معلوم کرتے ہیں۔ اگلے باب میں ہم دیکھیں گے کہ سمتی میدان اور حرکت سیال کے مطالعہ میں ہمیں ان تکملات سے کیسا واسطہ پڑتا ہے۔

تہرا تکمل

فرض کریں فضا میں بند محدود خطہ D پر تفاعل $F(x, y, z)$ معین ہے، تب D پر تکمل F کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔ ہم ایک مستطیل خطہ جس میں D پایا جاتا ہو کو محدودی مستویات کے متوازی مستویات سے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.30-ا)۔ ہم D کے اندر پائے جانے والے خانوں کو (کسی بھی ترتیب سے) 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں ایک علامتی مستطیل خانے کے اضلاع Δx_k ، Δy_k اور Δz_k جبکہ اس کا حجم ΔH_k ہو گا (شکل 14.30-ب)۔ ہم ہر مستطیل خانے میں کوئی نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(14.29) \quad J_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \Delta H_k$$

اگر F استمراری ہو اور D کی تحدیدی سطح ہموار سطحوں پر مشتمل ہو جو ایک دوسرے کے ساتھ استمراری منحنیات میں جڑتے ہوں، تب جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر کے قریب پہنچتے ہوں توں توں مجموعات J_n ایک حد تک پہنچتے ہیں:

$$(14.30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \iiint_D F(x, y, z) dH$$

ہم اس حد کو D پر F کا تہرا تکمل¹³ کہتے ہیں۔ یہ حد چند غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

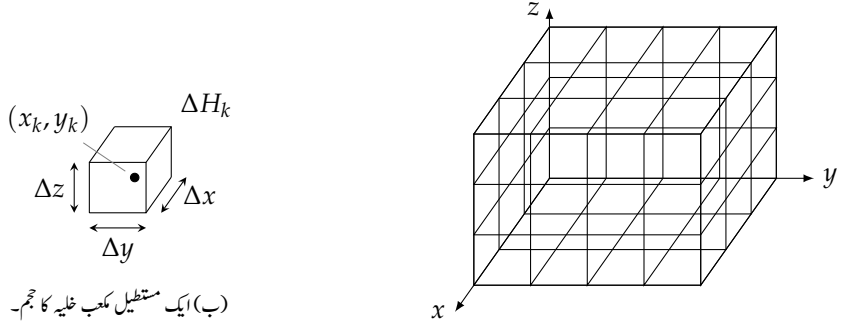
تہرا تکملات کے خواص

تہرا تکملات کے خواص وہی ہیں جو واحد تکملات اور دوہرا تکملات کے ہیں۔ اگر $F = F(x, y, z)$ اور $G = G(x, y, z)$ استمراری ہوں، تب

$$1. \quad \iiint_D kF dH = k \iiint_D F dH \quad (k \text{ کوئی عدد ہے})$$

$$2. \quad \iiint_D (F \mp G) dH = \iiint_D F dH \mp \iiint_D G dH$$

$$3. \quad \text{اگر } D \text{ پر } F \geq 0 \text{ تب } \iiint_D F dH \geq 0$$



(ب) ایک مستطیل مکعب خلیہ کا حجم۔

(ا) ایک حجم جس میں D پایا جاتا ہے کو محدودی مستویات کے متوازی سطحوں سے مستطیل مکعب خلیوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

شکل 14.30: ٹھوس جسم کو ΔH_k حجم کے مستطیل خانوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

$$4. \text{ اگر } D \text{ پر } F \geq G \text{ ہو تب } \iiint_D F dH \geq \iiint_D G dH$$

5. تہرا نکملات مجموعیت کی خاصیت بھی رکھتے ہیں جو طبیعیات، انجینیری اور ریاضیات کے میدان میں کام آتی ہے۔ اگر استمراری تفاعل F کے دائرہ کار D کو ہموار سطحوں سے متناہی تعداد کے علیحدہ علیحدہ مکملوں D_1, D_2, \dots, D_n میں تقسیم کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D F dH = \iiint_{D_1} F dH + \iiint_{D_2} F dH + \dots + \iiint_{D_n} F dH$$

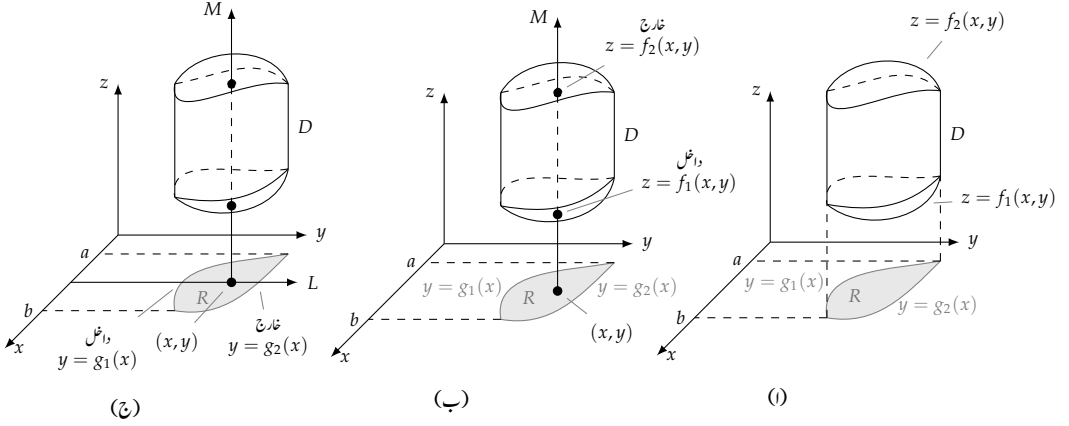
فضا میں خطے کا حجم

اگر F ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب مساوات 14.29 کے تہرا مجموعہ کی تنخیف صورت درج ذیل ہو گی۔

$$(14.31) \quad J_n = \sum F(x_k, y_k, z_k) \Delta H_k = \sum 1 \cdot \Delta H_k = \sum \Delta H_k$$

جوں جوں $\Delta x_k, \Delta y_k$ اور Δz_k صفر تک پہنچتے ہیں توں توں ΔH_k جسامت میں چھوٹے اور تعداد میں زیادہ ہوتے جاتے ہیں اور D کے زیادہ حصہ کو بھرتے ہیں۔ اسی لئے ہم D کے حجم کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta H_k = \iiint_D dH$$



شکل 14.31: تہرائکملات کی حدود کی تلاش۔

تعریف: فضا میں بند محدود خط D کا حجم 14 درج ذیل ہوگا۔

$$(14.32) \quad H = \iiint_D dH$$

□

جیسا ہم جلد دیکھیں گے، قوسی سطحوں میں ملفوف ٹھوس اجسام کا حجم اس تکمیل سے حاصل کیا جاتا ہے۔

تہرائکمل کی قیمت کا حصول

ہم تہرائکمل کی تعریف سے اس کی قیمت شاذ و نادر حاصل کرتے ہیں۔ اس کی بجائے ہم مسئلہ فونینی کی تین بعدی روپ استعمال کرتے ہوئے تین بار ایک گنتا نکملات سے اس کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ دہرائکمل کی طرح، تکمیل کے حدیں معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ کار پایا جاتا ہے۔

تہرائکملات کے حدود کے تلاش

دائرہ کار D پر درج ذیل تکمیل میں پہلے z ، اس کے بعد y اور آخر میں x کے لحاظ سے تکمیل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

$$\iiint_D F(x, y, z) dH$$

1. خاکہ: خطہ D کا خاکہ بنائیں اور مستوی xy پر اس کا انتظامی سایہ R دکھائیں۔ خطہ D کی بالائی اور زیریں تحدیدی سطحوں کی نشاندہی کریں اور R کی بالائی اور زیریں تحدیدی مخنیات کی نشاندہی کریں (شکل 14.31-ا)۔

2. مکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے z محور کے متوازی لکیر M کھینچیں۔ بڑھتے z رک چلتے ہوئے، یہ لکیر $z = f_1(x, y)$ پر D میں داخل ہوگی اور $z = f_2(x, y)$ پر D سے خارج ہوگی۔ یہی مکمل کی z حدیں ہیں (شکل 14.31-ب)۔

3. مکمل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی y محور کے متوازی لکیر L کھینچیں۔ بڑھتے y رخ چلتے ہوئے یہ لکیر R میں $y = g_1(x)$ پر داخل اور $y = g_2(x)$ پر خارج ہوگی۔ یہی مکمل کی y حدیں ہیں (شکل 14.31-ج)۔

4. مکمل کی x حدیں: وہ x حدیں منتخب کریں جس میں محور y کے متوازی، R سے گزرتی ہوئی تمام لکیریں L شامل ہوں۔ ہماری مثال میں یہ حدیں $x = a$ اور $x = b$ ہیں۔

یوں مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx$$

تعملات کی ترتیب تبدیل کرنے کی صورت میں اسی طرح کی طریقہ کار سے تعملات کی حدیں تلاش کریں۔ بارہا مکمل میں آخری دو متغیرات، جن کے لحاظ سے مکمل لیا گیا ہو، کے مستوی میں D کا سایہ درکار ہو گا۔

مثال 14.14: خطہ D سطح $z = x^2 + 3y^2$ اور سطح $z = 8 - x^2 - y^2$ میں ملفوف ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

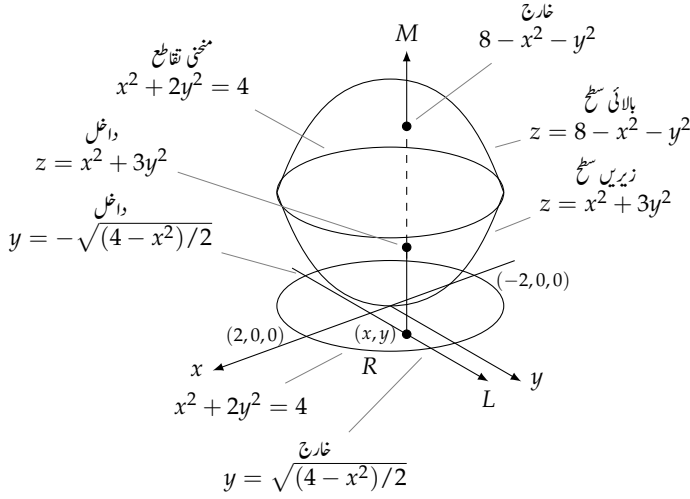
حل: ہم $F(x, y, z) = 1$ لیتے ہوئے حجم کے لئے درج ذیل مکمل لکھتے ہیں۔

$$H = \iiint_D dz dy dx$$

ہم مکمل کی حدیں درج ذیل اقدام سے معلوم کرتے ہیں۔

1. خاکہ: یہ سطحیں ایک دوسرے کو قطع مکاں $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ یعنی $x^2 + 2y^2 = 4$ میں قطع کرتی ہیں (شکل 14.32)۔ مستوی xy میں D کے سایہ R کی سرحد کی مساوات یہی $(x^2 + 2y^2 = 4)$ ہوگی۔ خطہ R کی بالائی سرحد مخنی $y = \sqrt{(4 - x^2)}/2$ اور اس کی زیریں سرحد مخنی $y = -\sqrt{(4 - x^2)}/2$ ہوگی۔

2. مکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور z کی متوازی لکیر M خطہ D میں $z = x^2 + 3y^2$ پر داخل اور $z = 8 - x^2 - y^2$ پر خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.32: دو سطحوں کے تقاطع حجم (مثال 14.14)

3. تکمیل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور y کی متوازی لکیر L خطہ R میں $y = -\sqrt{(4 - x^2)}/2$ پر داخل اور $y = \sqrt{(4 - x^2)}/2$ پر خارج ہوتی ہے۔

4. تکمیل کی x حدیں: محور y کی متوازی لکیریں L خطہ R میں $x = -2$ (نقطہ $(-2, 0, 0)$) سے $x = 2$ (نقطہ $(2, 0, 0)$) تک گزرتی ہیں۔

یوں حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 H &= \iiint_D dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[(8-2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left(2(8-2x^2) \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right) dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[8 \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right] dx \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx \\
 &= 8\pi\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$x = 2 \sin u$ پر کر کے مکمل لیا گیا ہے

□

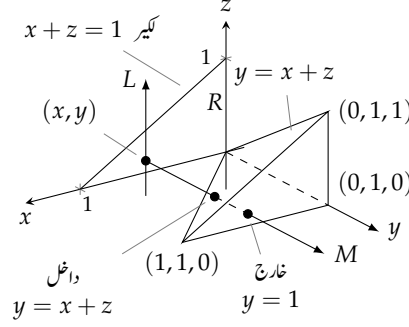
اگلی مثال میں ہم مستوی xy کی بجائے مستوی xz میں D کا سایہ لیتے ہیں۔

مثال 14.15: چو سطح D کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,1,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,1,1)$ ہیں۔ تقابل $F(x,y,z)$ کے تھرائیکمل کی حدیں معلوم کریں۔

حل:

1. خطہ: ہم D اور مستوی xz میں اس کے سایہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 14.33)۔ خطہ D کی بالائی (دائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = 1$ میں پائی جاتی ہے۔ اس کی زیریں (بائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = x + z$ میں پائی جاتی ہے۔ خطہ R کی بالائی سرحد لکیر $z = 1 - x$ اور زیریں سرحد لکیر $z = 0$ ہیں۔

2. مکمل کی y حدیں: خطہ R میں علاقہ نقطہ (x,y) سے گزرتی لکیر جو محور y کے متوازی ہو D میں $y = x + z$ پر داخل اور $y = 1$ پر خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.33: چھ سطح (مثال 14.15)

3. تکامل کی z حدیں: محور z کے متوازی نقطہ (x, y) سے گزرتی کثیر L خطہ R میں $z = 0$ پر داخل اور $z = 1 - x$ پر خارج ہوتی ہے۔

4. تکامل کی x حدیں: خطہ R میں $x = 0$ سے $x = 1$ تک گزرتی ہیں۔

یوں تکامل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x, y, z) dy dz dx$$

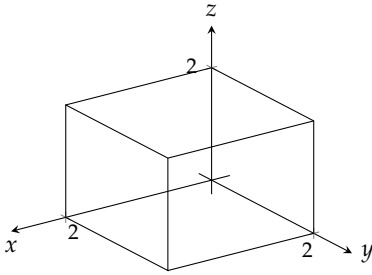
□

جیسا ہم جانتے ہیں، دہرائ تکامل کا حصول عموماً (لیکن ضروری نہیں) ایک گنا تکملات کو دو مختلف ترتیب سے حاصل کر کے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تہرائ تکامل کے لئے اس طرح کے چھ ترتیب ممکن ہو سکتے ہیں۔

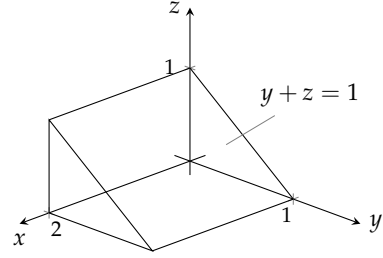
مثال 14.16: درج ذیل چھ تکملات شکل 14.34 میں دکھائے گئے منشور کا حجم دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx dy dz & \quad \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx dz dy \\ \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy dx dz & \quad \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy dz dx \\ \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz dx dy & \quad \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz dy dx \end{aligned}$$

□



شکل 14.35: مکمل کا خطہ (مثال 14.17)



شکل 14.34: منشور کے حجم کی چھ بارہا کملات مثال 14.16 میں دیے گئے ہیں۔

فضا میں تفاعل کی اوسط قیمت

فضا میں خطہ D پر تفاعل F کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$(14.33) \quad D \text{ پر } F \text{ کی اوسط قیمت} = \frac{1}{D \text{ کا حجم}} \iiint_D F dH$$

مثال کے طور پر اگر $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہو تب D پر F کی اوسط قیمت سے مراد مبداء سے D میں نقطوں کا اوسط فاصلہ ہے۔ اگر D میں $F(x, y, z)$ ایک ٹھوس جسم کی کمیتی کثافت ہو تب D میں F کی اوسط قیمت اس جسم کی اوسط کمیتی کثافت ہوگی جس کی اکائی کمیت فی اکائی حجم ہوگی۔

مثال 14.17: ٹین اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x=2$ ، $y=2$ اور $z=2$ کے قعب $F(x, y, z) = xyz$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم اس مکعب کا خاکہ بنا کر اس پر مکمل کی حدود کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 14.35)۔ اس کے بعد مساوات 14.33 سے مکعب پر F کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مکعب کا حجم $(2)(2)(2) = 8$ ہو گا۔ مکعب پر F کی قیمت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} yz \right]_{x=0}^{x=2} dy \, dz = \int_0^2 \int_0^2 2yz \, dy \, dz \\ &= \int_0^2 \left[y^2 z \right]_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^2 4z \, dz = \left[2z^2 \right]_0^2 = 8 \end{aligned}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.33 سے درج ذیل اوسط قیمت حاصل ہوگی۔

$$\text{مکعب پر اوسط قیمت} = \frac{1}{\text{حجم}} \iiint xyz \, dH = \left(\frac{1}{8} \right) (8) = 1$$

ہم نے اس تکمل کو dx ، dy ، dz ترتیب سے حاصل کیا۔ ہم باقی پانچ ترتیب میں سے کسی ایک ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے بھی اس تکمل کو حل کر سکتے ہیں۔
□

سوالات

مختلف اعادوں سے تہرا تکمل کے قیمتے کا حصول

سوال 1: چھ مختلف اعادوں سے مثال 14.16 میں حجم کا حل دیا گیا ہے۔ ان تمام کا مشترک جواب کیا ہے؟

سوال 2: ثمن اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 2$ اور $z = 3$ کے بیچ ٹھوس مستطیل جسم کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا نکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 3: ثمن اول سے مستوی $6x + 3y + 2z = 6$ ایک چو سطح کا ٹٹا ہے۔ اس کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا نکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 4: ثمن اول سے نیلن $x^2 + z^2 = 4$ اور مستوی $y = 3$ ایک خطہ کاٹتے ہیں۔ اس خطہ کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا نکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5: قطععات مکانی $z = 8 - x^2 - y^2$ اور $z = x^2 + y^2$ میں محیط خطہ D کے حجم کا چھ مختلف تہرا اعادہ نکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 6: قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ اور مستوی $z = 2y$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کی تہرا اعادہ نکملات ترتیب $dz dx dy$ اور $dz dy dx$ میں لکھیں۔ ان میں سے کسی بھی تکمل کی قیمت حاصل نہ کریں۔

تہرا اعادہ تکمل کے قیمتے کے تلاش

سوال 7 تا 20 میں نکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{سوال 7: } \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

$$\text{سوال 8: } \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz dx dy$$

$$\text{سوال 9: } \int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} dx dy dz$$

$$\text{سوال 10: } \int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz dy dx$$

$$\text{سوال 11: } \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi y \sin z \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{سوال 12: } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x + y + z) \, dy \, dx \, dz$$

$$\text{سوال 13: } \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz \, dy \, dx$$

$$\text{سوال 14: } \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2x+y} dz \, dx \, dy$$

$$\text{سوال 15: } \int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz \, dy \, dx$$

$$\text{سوال 16: } \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x \, dz \, dy \, dx$$

$$\text{سوال 17: } \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(u + v + w) \, du \, dv \, dw \quad (uvw \text{ فضا})$$

$$\text{سوال 18: } \int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln r \ln s \ln t \, dt \, dr \, ds \quad (rst \text{ فضا})$$

$$\text{سوال 19: } \int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln \sec v} \int_{-\infty}^{2t} e^x \, dx \, dt \, dv \quad (tvx \text{ فضا})$$

$$\text{سوال 20: } \int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1} \, dp \, dq \, dr \quad (pqr \text{ فضا})$$

تجم بذریعہ تہرا تکملاتے

سوال 21: درج ذیل مکمل کا خطہ شکل 14.36 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dz \, dy \, dx$$

اس مکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔

$$\text{د. } dz \, dx \, dy$$

$$\text{ج. } dx \, dy \, dz$$

$$\text{ا. } dy \, dz \, dx$$

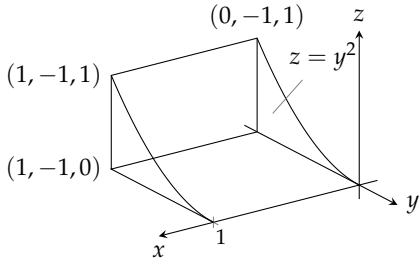
$$\text{د. } dx \, dz \, dy$$

$$\text{ب. } dy \, dx \, dz$$

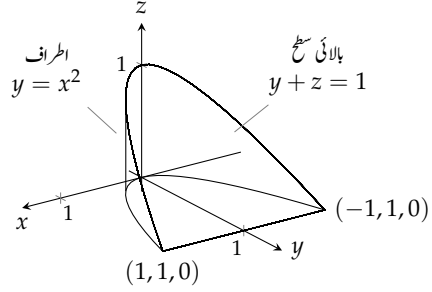
سوال 22: درج ذیل مکمل کا خطہ شکل 14.37 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz \, dy \, dx$$

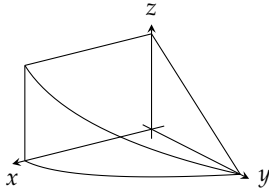
اس مکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔



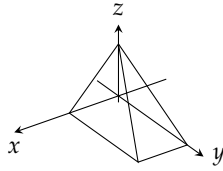
شکل 14.37: خاکہ برائے سوال 22



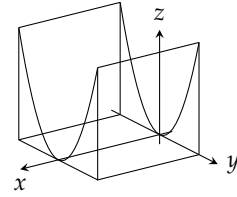
شکل 14.36: خاکہ برائے سوال 21



شکل 14.40: خاکہ برائے سوال 25



شکل 14.39: خاکہ برائے سوال 24



شکل 14.38: خاکہ برائے سوال 23

ا. $dy dz dx$

ب. $dx dy dz$

ج. $dx dz dy$

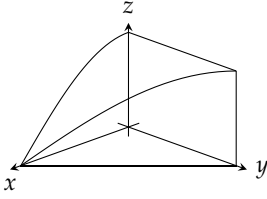
د. $dy dx dz$

سوال 23 تا سوال 36 میں خطوں کا حجم تلاش کریں۔

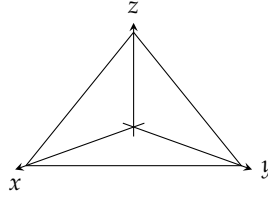
سوال 23: بیلیں $z = y^2$ اور مستوی xy کے تق خط جس کی سرحدیں مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ ہیں (شکل 14.38)۔

سوال 24: ٹن اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x + z = 1$ ، $y + 2z = 2$ کے تق خط (شکل 14.39)۔

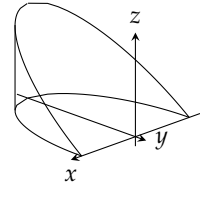
سوال 25: ٹن اول میں محدودی مستویات اور مستوی $y + z = 2$ اور بیلیں $x = 4 - y^2$ کے تق خط (شکل 14.40)۔



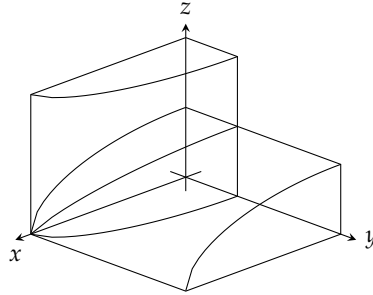
شکل 14.43: خاکہ برائے سوال 28



شکل 14.42: خاکہ برائے سوال 27



شکل 14.41: خاکہ برائے سوال 26



شکل 14.44: خاکہ برائے سوال 29

سوال 26: بیلیں $x^2 + y^2 = 1$ سے مستویات $z = 0$ اور $z = -y$ جو چپ کاٹتے ہیں (شکل 14.41)۔

سوال 27: ثمن اول میں محدودی مستویات اور مستوی $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ کے چھ سطحوں (شکل 14.42)۔

سوال 28: ثمن اول میں محدودی مستویات، مستوی $y = 1 - x$ اور سطح $z = \cos(\pi x/2)$, $0 \leq x \leq 1$ کے چھ خط (شکل 14.43)۔

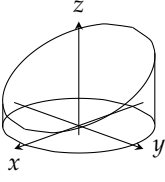
سوال 29: بیلیں $x^2 + y^2 = 1$ اور بیلیں $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترک اندرون (شکل 14.44)۔

سوال 30: ثمن اول میں محدودی مستویات اور سطح $z = 4 - x^2 - y^2$ کے چھ خط (شکل 14.45)۔

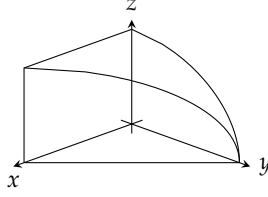
سوال 31: ثمن اول میں محدودی مستویات، مستوی $x + y = 4$ اور بیلیں $y^2 + 4z^2 = 16$ کے چھ خط (شکل 14.46)۔

سوال 32: بیلیں $x^2 + y^2 = 4$ سے مستویات $z = 0$ اور $x + z = 3$ جو خط کاٹتے ہیں (شکل 14.47)۔

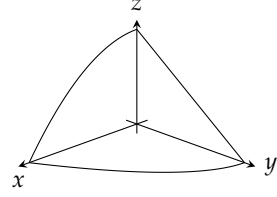
سوال 33: ثمن اول میں مستویات $x + y + 2z = 2$ اور $2x + 2y + z = 4$ کے چھ خط۔



شکل 14.47: خاکہ برائے سوال 32



شکل 14.46: خاکہ برائے سوال 31



شکل 14.45: خاکہ برائے سوال 30

سوال 34: مستویات $z = x$ ، $x + z = 8$ ، $z = y$ ، $y = 8$ اور $z = 0$ کے تقاطعی خط۔

سوال 35: ٹھوس تریخی بیلن $x^2 + 4y^2 \leq 4$ سے xy مستوی اور مستوی $z = x + 2$ جو خط کاٹتے ہیں۔

سوال 36: وہ خط جس کا پشت مستوی $x = 0$ ، سامنے اور اطراف قطع مکانی بیلن $x = 1 - y^2$ ، بالا قطع مکانی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے مستوی xy ہوں۔

اوسط قیمتیں

سوال 37 تا سوال 40 میں دیے گئے خط پر $F(x, y, z)$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 37: ثمن اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے تقاطعی خط اور تقاطعی $F(x, y, z) = x^2 + 9$ لیں۔

سوال 38: ثمن اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 2$ کے تقاطعی خط اور تقاطعی $F(x, y, z) = x + y - z$ لیں۔

سوال 39: ثمن اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے تقاطعی خط اور تقاطعی $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ لیں۔

سوال 40: ثمن اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے تقاطعی خط اور تقاطعی $F(x, y, z) = xyz$ لیں۔

متکامل کے ترتیب بدلتا

سوال 41 تا سوال 44 میں موزوں طریقہ سے متکامل کی ترتیب تبدیل کر کے متکامل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 41: } \int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz$$

$$\text{سوال 42: } \int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xz e^{zy^2} dy dx dz$$

$$\text{سوال 43: } \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz$$

$$\text{سوال 44: } \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: درج ذیل کو a کے لئے حل کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dz dy dx = \frac{4}{15}$$

سوال 46: ترقیمی سطح $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کا حجم c کی کس قیمت کے لئے 8π ہوگا؟

سوال 47: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل متکامل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4) dH$$

سوال 48: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل متکامل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2) dH$$

کمپیوٹر

سوال 49 تا سوال 52 میں دیے گئے خطہ پر تفاعل کا تھرا متکامل کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔

سوال 49: مستویات $z = 0$ اور $z = 1$ اور سطح $x^2 + y^2 = 1$ کے بیچ ٹھوس بیلیں پر تعادل $F(x, y, z) = x^2 y^2 z$ لیں۔

سوال 50: ٹھوس خطہ جو نیچے سے قطع مکانی سطح $z = x^2 + y^2$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تعادل $F(x, y, z) = |xyz|$ لیں۔

سوال 51: ٹھوس خطہ جو نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تعادل $F(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ لیں۔

سوال 52: ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ اور تعادل $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$ لیں۔

14.5 تعین بعدی کمیت اور معیار اثر

اس حصہ میں تین بعدی اجسام کی کمیت اور معیار اثر کا حصول کارتیسی محدود میں سکھایا جائے گا۔ یہ کلیات دو بعدی اجسام کے کلیات کی طرح ہیں۔
کروی اور تنکی محدود میں حساب کرنا اگلے حصہ میں دکھایا جائے گا۔

کمیت اور معیار اثر

فضا میں خطہ D میں پائے جانے والے ایک جسم کی کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ ہے۔ خطہ D پر δ کا مکمل اس جسم کی کمیت دیگا۔
یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں کر ہو گا ہم اس جسم کو n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.48)۔ جسم کی کمیت درج ذیل حد ہو گی۔

$$(14.34) \quad M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta m_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta H_k = \iiint_D \delta(x, y, z) dH$$

اگر D میں لکیر L سے نقطہ (x, y, z) کا فاصلہ $r(x, y, z)$ ہو، تب L کے لحاظ سے کمیت $\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta H_k$ تقریباً $\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k) \Delta m_k$ ہو گا۔ یوں L کے لحاظ سے پورے جسم کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$I_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta I_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r^2(x_k, y_k, z_k) \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta H_k = \iiint_D r^2 \delta dH$$

اگر L محور x ہو تب $r^2 = y^2 + z^2$ ہو گا اور

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta \, dH$$

ہو گا۔ اسی طرح

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dH \quad \text{اور} \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta \, dH$$

ہوں گے۔ ان کلیات کو دیگر کلیات کے ساتھ یہاں یکجا کیا گیا ہے۔

$$\text{کیت:} \quad M = \iiint_D \delta \, dH \quad (\delta = \text{کثافت})$$

محدی مستویات کے لحاظ سے معیار اثر اول:

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta \, dH, \quad M_{xz} = \iiint_D y \delta \, dH, \quad M_{xy} = \iiint_D z \delta \, dH$$

$$\text{مرکز کیت:} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

جمودی معیار اثر (معیار اثر دوم):

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta \, dH$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta \, dH$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dH$$

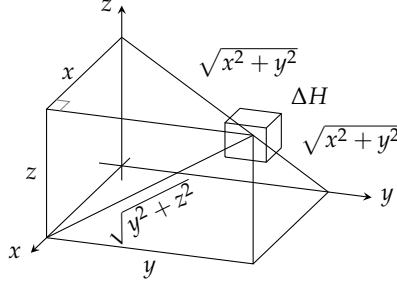
خط L کے لحاظ سے معیار اثر: $I_L = \iiint r^2 \delta \, dH$ (جہاں L سے نقطہ (x, y, z) کا فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔)

$$\text{خط } L \text{ کے لحاظ سے رداس دوار:} \quad R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

مثال 14.18: مستقل کثافت δ کا مستطیل ٹھوس جسم شکل 14.49 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کریں۔

حل: ہم مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$(14.35) \quad I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz$$



شکل 14.48: محددی محور اور محددی مستویات سے ایک ٹکڑے کے فاصلے۔

ہو گا۔ چونکہ $\delta(y^2 + z^2)$ متغیرات x ، y اور z کا جفت تفاعل ہے لہذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

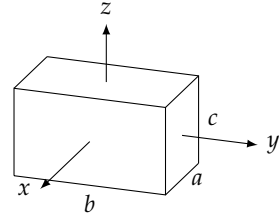
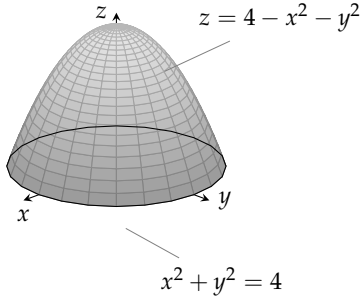
$$\begin{aligned}
 I_x &= 8 \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz = 4a\delta \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} (y^2 + z^2) \, dy \, dz \\
 &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{y=0}^{y=b/2} dz \\
 &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2} \right) dz \\
 &= 4a\delta \left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48} \right) = \frac{abc\delta}{12} (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$I_z = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \quad \text{اور} \quad I_y = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

□

مثال 14.19: مستقل کثافت δ کے جسم کی پختی سرحد مستوی $z = 0$ میں قرص $R : x^2 + y^2 \leq 4$ ہے جبکہ اس کی بالائی حد قطع مکانی $z = 4 - x^2 - y^2$ ہے (شکل 14.50)۔ اس جس کا مرکز کیت تلاش کریں۔



شکل 14.49: ٹھوس جسم برائے مثال 14.18

شکل 14.50: ٹھوس جسم برائے مثال 14.19

حل: تشاکلی کی بنا $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہمیں \bar{z} معلوم کرنے کے لئے پہلے درج ذیل دریافت کرنے ہوں گے۔

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \delta \, dz \, dy \, dx = \iint_R \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3} \end{aligned}$$

قطبی محدود

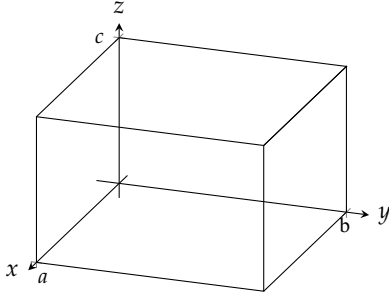
اسی طرح

$$M = \iiint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, dz \, dy \, dx = 8\pi\delta$$

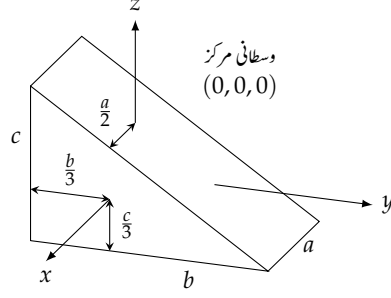
□

ہو گا۔ یوں $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4}{3}$ اور مرکز کیت $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ ہو گا۔

جب جسم کی کثافت اٹل ہو (جیسا مثال 14.18 اور مثال 14.19 میں تھا)، تب (دو بعدی اجسام کی طرح) مرکز کیت اس جسم کا وسطانی مرکز¹⁵ ہو گا۔



شکل 14.52: مستطیل ٹھوس جسم برائے سوال 3



شکل 14.51: پیچہ برائے سوال 2

سوالات

مستقل کثافت

سوال 1 تا سوال 12 میں کثافت $\delta = 1$ ہے۔

سوال 1: جمودی معیار اثر کی مساوات 14.35 کو سیدھا حل کر کے مثال 14.18 میں مستعمل چھوٹے طریقہ کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔ مثال 14.18 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تینوں ممدی محوروں کے لحاظ سے اس جسم کے رداس دوار تلاش کریں۔

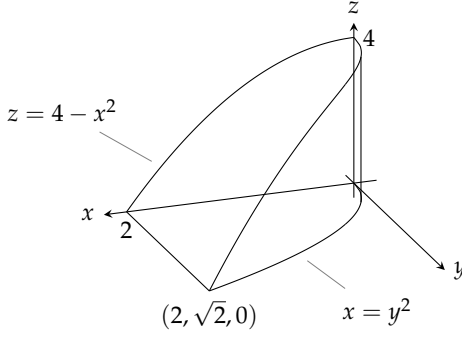
سوال 2: ایک پیچہ کے وسطانی مرکز گزرتے ممدی محور پیچہ کے کناروں کے متوازی ہیں (شکل 14.51)۔ اگر $a = b = 6$ اور $c = 4$ تب I_x ، I_y اور I_z کیا ہوں گے۔

سوال 3: مستطیل ٹھوس جسم کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کرتے ہوئے جسم کے کناروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں (شکل 14.52)۔

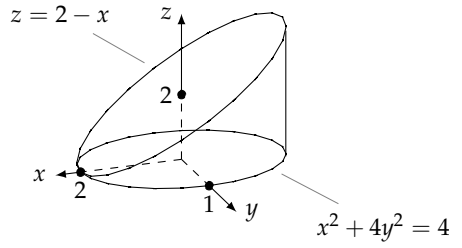
سوال 4: (i) ایک چو سطح جس کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ ہیں کا وسطانی مرکز اور I_x ، I_y اور I_z تلاش کریں۔ (ب) محور x کے لحاظ سے اس چو سطح کا رداس دوار معلوم کریں۔ محور x سے وسطانی مرکز تک فاصلہ کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔

سوال 5: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس "کونڈا" کی زیریں سرحدی سطح $z = 4y^2$ ، بالائی سرحدی سطح $z = 4$ اور اطراف مستویات $x = -1$ اور $x = 1$ ہیں۔ اس کی مرکز کثیت اور تینوں محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 6: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد مستوی $z = 0$ ، بالائی سرحد مستوی $z = 2 - x$ اور اس کے اطراف ترخیمی ہیلن $x^2 + 4y^2 = 4$ (شکل 14.53)۔ (i) \bar{x} اور \bar{y} دریافت کریں۔ (ب) درج ذیل مکمل کی قیمت حاصل کریں۔ آخری



شکل 14.54: ٹھوس جسم برائے سوال 14



شکل 14.53: ٹھوس جسم برائے سوال 6

تکمل میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے آپ کو نکملات کا جدول استعمال کرنا ہو گا۔ $M_{xy} = \int_{-2}^2 \int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2-x} z \, dz \, dy \, dx$ اس کے بعد M_{xy} کو M سے تقسیم کر کے تصدیق کریں کہ $\bar{z} = \frac{5}{4}$ ہو گا۔

سوال 7: (i) مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور بالائی سرحد مستوی $z = 4$ ہے۔ اس جسم کا مرکز کیت تلاش کریں۔ (ب) وہ مستوی $z = c$ دریافت کریں جو اس جسم کو برابر حجم کے دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتا ہو۔ یہ مستوی اس جسم کے مرکز کیت سے نہیں گزرتا ہے۔

سوال 8: ایک ٹھوس مکعب کے اضلاع کی لمبائیاں 2 اکائیاں ہیں۔ یہ مستویات $x = \pm 1$ ، $z = \pm 1$ ، $y = 3$ اور $y = 5$ کے بیچ واقع ہے۔ اس مکعب کا مرکز کیت اور محدودی محوروں کے لحاظ سے مکعب کے رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 9: ایک بیچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 2 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ بیچر کے کسی علاقائی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L: y = 6, z = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (y - 6)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس بیچر کا مجموعی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال 10: ایک بیچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 2 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ بیچر کے کسی علاقائی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L: x = 4, y = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (x - 4)^2 + y^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس بیچر کا مجموعی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال 11: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 3 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علاقائی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L: y = 2, z = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (y - 2)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا مجموعی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 12: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 3 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے کلیئر $L : x = 4, y = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (x - 4)^2 + y^2$ ہو گا۔ کلیئر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دو بار تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 13 اور سوال 14 میں (i) جسم کی کثیت اور (ب) اس کا مرکز کثیت تلاش کریں۔

سوال 13: ٹرن اول میں ایک ٹھوس جسم جو محدودی مستویات اور مستوی $x + y + z = 2$ کے بیچ واقع ہے۔ اس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2x$ ہے۔

سوال 14: ٹرن اول میں مستویات $y = 0$ اور $z = 0$ اور سطح $z = 4 - x^2$ اور سطح $x = y^2$ کے بیچ واقع جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (شکل 14.54)۔

سوال 15 اور سوال 16 میں درج ذیل تلاش کریں۔

ا. اس جسم کی کثیت۔

ب. اس جسم کا مرکز کثیت۔

ج. محدودی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر۔

د. محدودی محوروں کے لحاظ سے رداس دور۔

سوال 15: ٹرن اول میں محدودی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ ٹھوس مکعب جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے۔

سوال 16: ایک مستطیل ٹھوس جسم جس کے $a = 2$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 2 دیکھیں) کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + 1$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل کثافت کی صورت میں اس جسم کا مرکز کثیت $(0, 0, 0)$ ہو گا۔

سوال 17: مستویات $x + z = 1$ ، $x - z = -1$ ، $y = 0$ اور سطح $y = \sqrt{z}$ کے بیچ واقع ٹھوس جسم جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2y + 5$ ہے۔

سوال 18: قطع مکافی سطح $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ اور $z = 2x^2 + 2y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ اس جسم کی کثیت تلاش کریں۔

کام

سوال 19 اور سوال 20 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. مکمل بھرے ہوئے برتن سے سیال کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟ (اشارہ: برتن میں سیال کو چھوٹے چھوٹے حجم کے ٹکڑوں ΔH_k میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کو منتقل کرنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے سیال کو منتقل کرنے کا کام ہو گا۔ یہ مجموعہ، حد کی صورت میں، تھراکمل دیگا جس کی قیمت آپ کو معلوم کرنی ہوگی۔)

ب. مکمل بھرے ہوئے برتن میں سیال کے مرکز کیت کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟

سوال 19: برتن ٹن اول میں کعبی ڈبہ کی صورت کا ہے جو محدودی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے (سوال 15 دیکھیں)۔

سوال 20: مستویات $z = 0$ ، $y = 0$ اور سطحوں $z = 4 - x^2$ ، $x = y^2$ کے بیچ برتن پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (سوال 14 دیکھیں)۔

مسئلہ متوازی محور

مسئلہ متوازی محور (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں ایک جسم جس کی کیت m ہو کے مرکز کیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہو جس کے متوازی h فاصلہ پر خط L پایا جاتا ہو۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے اس جسم کے جمودی معیار اثر درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(14.36) \quad I_L = I_{c,m} + mh^2$$

دو بعدی صورت کی طرح اگر ہمیں ایک جمودی معیار اثر، فاصلہ h اور جسم کی کیت m معلوم ہو تب ہم اس مسئلہ کی مدد سے دوسرا جمودی معیار اثر با آسانی دریافت کر سکتے ہیں۔

سوال 21: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

ا. پہلے دکھائیں کہ جسم کے مرکز کیت سے گزرتے ہوئے فضا میں کسی بھی مستوی کے لحاظ سے معیار اثر اول صفر ہو گا۔ (اشارہ: جسم کے مرکز کیت کو مبداء پر اور مستوی کو مستوی yz لیں۔ تب کلیہ $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$ کیا معلومات فراہم کرتا ہے؟)

ب. جسم کے مرکز کیت کو مبداء پر، خط $L_{c,m}$ کو محور z پر، اور نقطہ $(h, 0, 0)$ پر L کو مستوی xy کا متوازی رکھیں۔ فرض کریں یہ جسم فضا میں خط D میں پایا جاتا ہے۔ تب شکل کے لحاظ سے درج ذیل ہو گا۔

$$(14.37) \quad I_L = \iiint_D |v - h\mathbf{i}|^2 dm$$

اس شکل کو پھیلا کر حل کر کرتے ہوئے ثبوت مکمل کریں۔

سوال 22: مستقل کثافت، رداس a کے کرہ قطر کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $\frac{2}{5}ma^2$ ہو گا جہاں کرہ کی کمیت m ہے۔ کرہ کو مماسی خط کے لحاظ سے کرہ کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 23: محور z کے لحاظ سے سوال 3 کے جسم کا جمودی معیار اثر $I_z = \frac{1}{3}abc(a^2 + b^2)$ ہے۔

ا. مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے اس ٹھوس جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے، محور z کے متوازی خط کے لحاظ سے جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

ب. جزو-ا کے نتائج اور مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے خط $x = 0, y = 2b$ کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 24: اگر سوال 2 کے پچر میں $a = b = 6$ اور $c = 4$ ہوں محور x کے لحاظ سے $I_x = 208$ ہو گا۔ اس پچر کا خط $y = 4, z = -4/3$ (پچر کے تنگ سر کے کنارہ) کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

کلیہ پاپس

کلیہ پاپس (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں دو اجسام B_1 اور B_2 جن کی کمیتیں بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں فضا میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے خطوں میں پائے جاتے ہیں۔ مبدا سے ان اجسام کے مراکز کمیت تک سمتیت بالترتیب c_1 اور c_2 ہیں۔ تب ان کے اشتراک $B_1 \cup B_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گرہستہ درج ذیل ہو گا۔

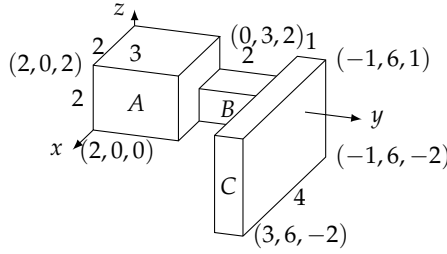
$$(14.38) \quad c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$$

پہلے کی طرح، اس کو کلیہ پاپس¹⁶ کہتے ہیں۔ دو بعدی صورت کی طرح، n عدد اجسام کے لئے اس کلیہ کی عمومی روپ درج ذیل ہو گی۔

$$(14.39) \quad c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

سوال 25: کلیہ پاپس (مساوات 14.38) اخذ کریں۔ (اشارہ: ثمن اول میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے اجسام B_1 اور B_2 کا خاکہ بنا کر ان کے مراکز کمیت کو $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ سے ظاہر کریں۔ کمیت m_1 اور m_2 اور ان کمیت کے مراکز کے محدود کی صورت میں محدودی مستویات کے لحاظ سے $B_1 \cup B_2$ کے معیار اثر حاصل کریں۔)

سوال 26: مستقل کثافت $\delta = 1$ کے تین مستطیل ٹھوس اجسام سے ایک جسم حاصل کیا گیا ہے (شکل 14.55)۔ کلیہ پاپس استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کے مراکز کمیت تلاش کریں۔



شکل 14.55: ٹھوس جسم برائے سوال 26

د. $A \cup B \cup C$

ج. $B \cup C$

ب. $A \cup C$

ا. $A \cup B$

سوال 27:

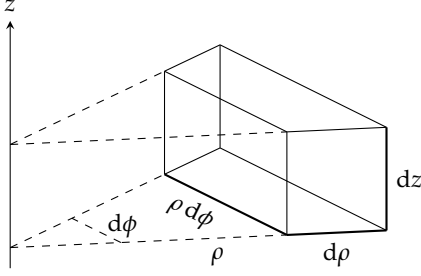
ا. قد h اور رداس r کے قاعدہ کا دائری ٹھوس مخروط C ، رداس a کے ٹھوس نصف کرہ S پر قلفی کی طرح ہمایا گیا ہے۔ ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی $(\frac{1}{4})$ فاصلہ پر واقع ہے۔ نصف کرہ کے وسطانی مرکز قاعدہ سے سر کے رخ تین آٹھواں $(\frac{3}{8})$ فاصلہ دور ہے۔ مشترک جسم $C \cup S$ کا مرکز مشترک قاعدہ پر رکھنے کی خاطر a اور h کے بیچ تعلق معلوم کریں۔

ب. اگر آپ نے حصہ 14.2 میں معادل سوال 55 کو اب تک حل نہ کیا ہو، تب اس کو حل کریں۔ دونوں کے جواب ایک جیسے نہیں ہیں۔

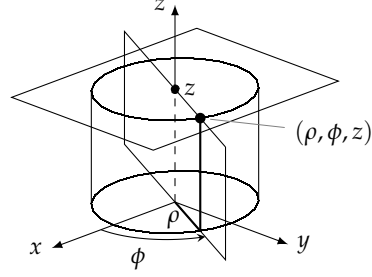
سوال 28: ایک ٹھوس اہرام P جس کا قد h اور مماثل چار اضلاع ہیں کا قاعدہ ٹھوس مکعب C کا ایک مربعی سطح ہے جس کے اضلاع کی لمبائیاں s ہے۔ ٹھوس اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی فاصلہ پر ہے۔ ٹھوس جسم $P \cup C$ کا وسطانی مرکز اہرام کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر s اور h کا تعلق دریافت کریں۔ سوال 27 کے نتیجے کے ساتھ موازنہ کریں۔ حصہ 14.2 میں سوال 56 کے نتیجے کے ساتھ بھی موازنہ کریں۔

14.6 ٹکلی اور کروی محدود میں جبرائیل

انجینئری، طبیعیات اور جیومیٹری میں مخروط، بیلن یا کرہ کے ساتھ کام ٹکلی اور کروی محدود میں زیادہ آسان ہوتا ہے۔



شکل 14.57: ٹکلی محدود میں چھوٹا حجم $dH = dz \rho d\rho d\phi$ ہو گا۔



شکل 14.56: ٹکلی محدود میں مستقل محدود سطحیں۔

ٹکلی محدود

جن بیلیں کا محور z محدود پر پایا جاتا ہو اور وہ مستویات جن میں z محدود پایا جاتا ہو یا جو z محدود کے عمودی ہوں، کو ٹکلی محدود میں بیان کرنا نہایت آسان ہوتا ہے (شکل 14.56)۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں ان سطحوں کی مساوات مستقل محدودی صورت رکھتی ہیں۔

$$\rho = 4$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2$$

فضا میں خطہ کی ٹکلی محدود میں مستطیلی خانہ بندی کا ایک خانہ شکل 14.57 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر z محدود سے اس خانے کی وسط تک رداں ρ ہو تب خانے کے اندرونی اور بیرونی سطحوں کے رداں بالترتیب $\rho - \frac{d\rho}{2}$ اور $\rho + \frac{d\rho}{2}$ ہوں گے۔ اس چھوٹے خانے کو نقطہ دار کیریوں سے z محدود تک بڑھا کر حجم $\frac{1}{2}(\rho + \frac{d\rho}{2})^2 d\phi dz$ حاصل ہو گا جس میں سے اضافی حجم $\frac{1}{2}(\rho - \frac{d\rho}{2})^2 d\phi dz$ منفی کر کے چھوٹے حصہ کا حجم معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} dH &= \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{d\rho}{2} \right)^2 d\phi dz - \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{d\rho}{2} \right)^2 d\phi dz \\ &= dz \rho d\rho d\phi \end{aligned}$$

چھوٹے مستطیل خانے کی وسطی (یا اندرونی قوسی) چوڑائی $\rho d\phi$ ، لمبائی $d\rho$ اور قد dz لے کر

$$dH = (\rho d\phi)(d\rho)(dz) = dz \rho d\rho d\phi$$

جہ زیادہ آسانی سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح خانے کی سامنے (یا پشت) سطح کا رقبہ $dp dz$ ، ٹپلی (یا بالائی) سطح کا رقبہ $\rho d\phi d\rho$ اور قوسی (اندرونی یا بیرونی) سطح کا رقبہ $\rho d\phi dz$ ہو گا۔ یوں تکلی محدود میں تہر اکملات کو بطور بارہ اکملات حل کیا جائے گا۔ ایسا اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.20: خطہ D پر تفاعل $f(\rho, \phi, z)$ کی تکلی محدود میں کمل کی حدیں تلاش کریں۔ خطہ D نیچے سے مستوی $z = 0$ اور اطراف سے دائری بیلن $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ جبکہ اوپر سے قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ کے قچ پایا جاتا ہے (شکل 14.58)۔

حل

1. خاکہ بنانا: D کا قاعدہ ہی مستوی xy پر D کی تقلیل R ہو گی۔ تقلیل R کی سرحد دائرہ $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ ہو گی جس کی قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 1 \\ \rho^2 - 2\rho \sin \phi &= 0 \\ \rho &= 2 \sin \phi \end{aligned}$$

2. کمل کی z حدیں: خطہ R میں عمومی نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہوئی لکیر M ، جو z محدود کے متوازی ہو D میں $z = 0$ پر داخل اور $z = x^2 + y^2 = \rho^2$ پر خارج ہو گی۔

3. کمل کی ρ حدیں: مبداء سے خط L جو نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتا ہو، R میں $\rho = 0$ پر داخل اور $\rho = 2 \sin \phi$ پر خارج ہو گا۔

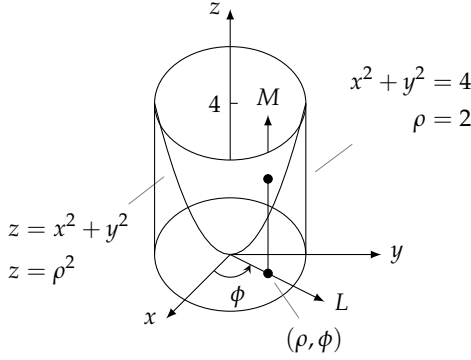
4. کمل کی ϕ حدیں: خط L جھاڑو کی طرح R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ $\phi = 0$ اور $\phi = \pi$ کے قچ رہتا ہے۔

یوں کمل درج ذیل ہو گا۔

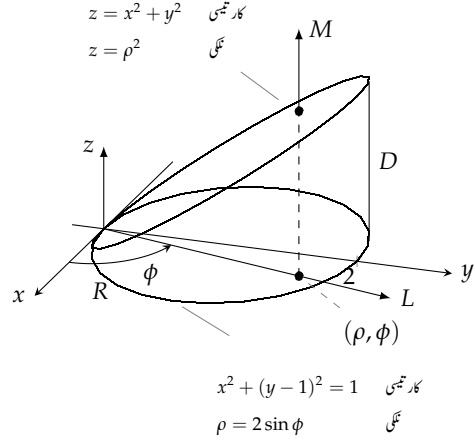
$$\iiint_D f(\rho, \phi, z) dH = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \phi} \int_0^{\rho^2} f(\rho, \phi, z) dz \rho d\rho d\phi$$

□

اس مثال میں ہم نے تکلی محدود میں کمل کی حدیں تلاش کرنا سیکھا۔



شکل 14.59: جسم برائے مثال 14.21



شکل 14.58: جسم برائے مثال 14.20

مثال 14.21: بیلیں $x^2 + y^2 = 4$ میں بند ٹھوس جسم جو اوپر سے قطع مکانی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy کے بیچ پایا جاتا ہو، کا وسطانی مرکز تلاش کریں (شکل 14.21)۔ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta = 1$ ہے۔

حل

ہم اوپر سے قطع مکانی $z = \rho^2$ اور نیچے سے مستوی $z = 0$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس کا قاعدہ R مستوی xy میں قرص $|\rho| \leq 2$ ہو گا۔

ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تشاکلی محور پر ہو گا جو محور z ہے۔ یوں $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہم معیار اثر M_{xy} کو کمیت M سے تقسیم کر کے \bar{z} تلاش کرتے ہیں۔

کمیت اور معیار اثر کے تسمکلات کی حدیں تلاش کرنے کی خاطر ہم وہی چار مخصوص قدم لیتے ہیں۔ خاکہ بنا کر ہم پہلا قدم مکمل کر چکے ہیں۔ باقی اقدام درج ذیل ہیں۔

2. تکمیل کی z حدیں: علامتی نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہوئی، محدود z کی متوازی لکیر M ، ٹھوس جسم میں $z = 0$ سے داخل اور $z = \rho^2$ سے خارج ہو گی۔

3. تکمیل کی ρ حدیں: مبداء سے شروع نقطہ ρ, ϕ سے گزرتی ہوئی لکیر L خطہ R میں $\rho = 0$ سے داخل اور $\rho = 2$ سے خارج ہو گی۔

4. تکمیل کی ϕ حدیں: لکیر L قاعدہ پر گھڑی کی سوئی کی طرح گھومتی ہوئی $\phi = 0$ سے $\phi = 2\pi$ تک طے کرتی ہے۔

یوں M_{xy} کی قیمت

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} z \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{\rho^5}{2} \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^6}{12} \right]_0^{\rho^2} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \, d\phi = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

اور M کی قیمت

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} dz \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[z \right]_0^{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\rho^2} d\phi = \int_0^{2\pi} 4 \, d\phi = 8\pi \end{aligned}$$

ہو گی لہذا

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3} \frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$$

□

ہو گا۔ وسطانی مرکز $(0, 0, 4/3)$ ہو گا جو ٹھوس جسم سے باہر ہے۔

تکلی محدود میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر تکمل

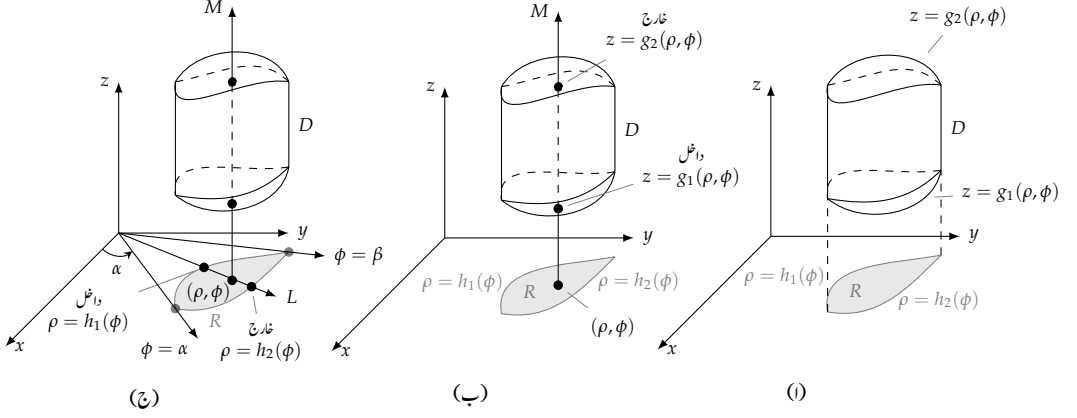
$$\iiint_D f(\rho, \phi, z) \, dH$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے تکلی محدود میں پہلے z ، اس کے بعد ρ اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy پر اس کی تفصیل R کا خاکہ بنائیں۔ D اور R کی سرحدی سطحوں اور منحنيات کی نشاندہی کریں (شکل 14.60-ا)۔

2. تکمل کی z حدیں: R میں علامتی نقطہ (ρ, ϕ) پر محور z کے متوازی ایک علامتی کثیر M کھینچیں جو بڑھ کر D میں $z = g_1(\rho, \phi)$ سے داخل اور $z = g_2(\rho, \phi)$ سے خارج ہوگی (شکل 14.60-ب)۔ یہی تکمل کی z حدیں ہوں گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبداء سے ایک کثیر L کھینچیں جو نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہو۔ یہ شعاع خطہ R میں $\rho = h_1(\phi)$ سے داخل اور $\rho = h_2(\phi)$ سے خارج ہوگی (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکمل کی ρ حدیں ہوں گی۔



شکل 14.60: نیکی محدود میں تہرا تکامل کی حدود کا تعین۔

4. تکامل کی ϕ حدیں: لکیر L خطہ R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ زاویہ $\phi = \alpha$ اور $\phi = \beta$ کے بیچ رہتی ہے (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکامل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

یوں تکامل درج ذیل ہو گا۔

$$(14.40) \quad \iiint_D f(\rho, \phi, z) dH = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\rho=h_1(\phi)}^{\rho=h_2(\phi)} \int_{z=g_1(\rho, \phi)}^{z=g_2(\rho, \phi)} f(\rho, \phi, z) dz \rho d\rho d\phi$$

کروی محدود

ایسے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں، وہ نصف چادر جن کا چول محور z ہو، اور وہ مخروط جن کا اس مبدا پر اور محور محدودی نظام کے محور z پر ہو، کو کروی محدود میں بیان کرنا آسان ہوتا ہے۔ ان سطحوں کی مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} r &= 4 && \text{کرہ، جس کا رداس 4 اور مرکز مبدا پر ہے} \\ \phi &= \frac{\pi}{3} && \text{مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہوا مخروط جو مثبت } z \text{ محور کے ساتھ } \pi/3 \text{ زاویہ بناتا ہے} \\ \phi &= \frac{\pi}{3} && \text{نصف چادر جس کا چول محور } z \text{ ہے اور جو مثبت } x \text{ محور کے ساتھ } \pi/3 \text{ زاویہ بناتا ہے} \end{aligned}$$

کروی محدود میں چھوٹے مستطیل حجم سے مراد وہ **کرہ چھپر**¹⁷ ہے جس کو dr ، $d\phi$ اور $d\phi$ تعین کرتے ہیں۔ یہ چھپر تقریباً مستطیلی ہو گا جس کے ایک اطراف کی قوسی لمبائی $r d\phi$ ، دوسرے طرف کی قوسی لمبائی $r \sin \phi d\phi$ اور موٹائی dr ہوگی۔ یوں کروی محدود

¹⁷spherical wedge

میں چھوٹے ٹکڑے کا حجم

$$(14.41) \quad dH = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\phi$$

ہو گا اور تہہ تکمیل کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\iiint F(r, \phi, \phi) \, dH = \iiint F(r, \phi, \phi) r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\phi$$

ہم عموماً پہلے r کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔ ہم صرف ان نکلات پر غور کریں گے جو z محور کے لحاظ سے اجسام طواف (یا ان کا حصہ) ہوں اور جن کے ϕ اور ϕ حدیں مستقل ہوں۔

کروی محدود میں مکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر مکمل

$$\iiint_D F(r, \phi, \phi) \, dH$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے r ، اس کے بعد ϕ ، اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے مکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy میں D کی تقطیل R کا خاکہ بنا کر D کی سرحدی سطحوں کی نشاندہی کریں۔

2. مکمل کی r حدیں: مبداء سے ایک لکیر M کھینچیں جو مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ϕ بناتی ہو۔ ساتھ ہی R پر M کی تقطیل L کا خاکہ بنائیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بنائی گی۔ جیسے جیسے r بڑھے گا M خطہ D میں $r = g_1(\phi, \phi)$ سے داخل اور $r = g_2(\phi, \phi)$ سے خارج ہو گی۔ یہی مکمل کی r حدیں ہوں گی۔

3. مکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے M مثبت محور z کے ساتھ $\phi = \phi_1$ سے $\phi = \phi_2$ تک زاویہ بنائے گی۔ یہی مکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

4. مکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے L خطہ R پر جھاڑو کی طرح چلتے ہوئے $\phi = \alpha$ سے $\phi = \beta$ تک چلتی ہے۔ یہی مکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

یوں مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D F(r, \phi, \phi) \, dH = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=g_1(\phi, \phi)}^{r=g_2(\phi, \phi)} F(r, \phi, \phi) r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\phi$$

مثال 14.22: ٹھوس کرہ $r \leq 1$ سے مخروط $\theta = \pi/3$ بالائی خطہ D کا ٹکڑا ہے۔ اس خطہ کا حجم تلاش کریں۔

حل: اس خطہ کا حجم $\iiint_D r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta$ ہو گا۔ مکمل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: ہم D اور مستوی xy میں اس کی تفصیل R کا خاکہ بناتے ہیں۔

2. مکمل کی r حدیں: ہم مثبت z محور کے ساتھ ϕ زاویہ پر مبداء سے شعاع M کھینچتے ہیں اور ساتھ ہی xy مستوی میں اس کی تفصیل L کھینچتے ہیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بناتا ہے۔ شعاع M خطہ D میں $(r = 0)$ سے داخل اور $r = 1$ سے خارج ہو گا۔

3. مکمل کی ϕ حدیں: مخروط $\theta = \pi/3$ مثبت z محور کے ساتھ زاویہ $\pi/3$ بناتا ہے۔ یوں شعاع M زاویہ $\phi = 0$ سے $\phi = \pi/3$ تک چل سکتی ہے۔

4. مکمل کی θ حدیں: شعاع L خطہ R پر $\theta = 0$ سے 2π تک چلتی ہے۔

یوں مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \iiint_D r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{1}{6} (2\pi) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

□

مثال 14.23: مستقل کثافت $\delta = 1$ کا ایک ٹھوس جسم مثال 14.22 کے خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: کارتیسی محدود میں جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \, dH$$

ہو گا۔ کرودی محدود میں $x^2 + y^2 = (r \sin \phi \cos \phi)^2 + (r \sin \phi \sin \phi)^2 = r^2 \sin^2 \phi$ کی بنا جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (r^2 \sin^2 \phi) r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \iiint r^4 \sin^3 \phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

ہوگا جس کی قیمت مثال 14.22 کے خطہ کے لئے درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^4 \sin^3 \phi \, dr \, d\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \sin^3 \phi \, d\phi \, d\phi \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\phi = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi/3} d\phi \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} \right) d\phi = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \frac{5}{24} d\phi = \frac{1}{24} (2\pi) = \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

□

محدود بدلے کے کلیاتے

کروی سے نلکی	کروی سے کارتیسی	نلکی سے کارتیسی
$\rho = r \sin \phi$	$x = r \sin \phi \cos \phi$	$x = \rho \cos \phi$
$z = r \cos \phi$	$y = r \sin \phi \sin \phi$	$y = \rho \sin \phi$
$\phi = \phi$	$z = r \cos \phi$	$z = z$

مطابقتی چھوٹے حجم درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
 dH &= dx \, dy \, dz \\
 &= dz \, \rho \, d\rho \, d\phi \\
 &= r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\phi
 \end{aligned}$$

سوالات

نلکی محدود

سوال 1 تا سوال 6 میں نکل کی قیمت نلکی محدود استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$\text{سوال 1: } \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

$$\text{سوال 2: } \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{18-\rho^2}} dz \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

$$\text{سوال 3: } \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi/2\pi} \int_0^{3+24\rho^2} dz \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

$$\text{سوال 4: } \int_0^\pi \int_0^{\phi/\pi} \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

$$\text{سوال 5: } \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^{1/\sqrt{2-\rho^2}} 3 \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

$$\text{سوال 6: } \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} (\rho^2 \sin^2 \phi + z^2) \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

اب تک ہم تکلی محدود کی نکلات کو پسندیدہ ترتیب z ، ρ ، ϕ سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 7 تا سوال 10 کے نکلات کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 7: } \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{z/3} \rho^3 \, d\rho \, dz \, d\phi$$

$$\text{سوال 8: } \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \phi} 4\rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$\text{سوال 9: } \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} (\rho^2 \cos^2 \phi + z^2) \rho \, d\phi \, d\rho \, dz$$

$$\text{سوال 10: } \int_0^2 \int_{\rho-2}^{\sqrt{4-\rho^2}} \int_0^{2\pi} (\rho \sin \phi + 1) \rho \, d\phi \, dz \, d\rho$$

سوال 11: نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اوپر سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ، اور اطراف سے سیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ تکلی محدود میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تھرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

$$\text{ا. } dz \, d\rho \, d\phi \quad \text{ب. } d\rho \, dz \, d\phi \quad \text{ج. } d\phi \, dz \, d\rho$$

سوال 12: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، اوپر سے قطع مکانی $z = 2 - x^2 - y^2$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ تکلی محدود میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تھرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

$$\text{ا. } dz \, d\rho \, d\phi \quad \text{ب. } d\rho \, dz \, d\phi \quad \text{ج. } d\phi \, dz \, d\rho$$

سوال 13: نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اطراف سے سیلن $\rho = \cos \phi$ ، اور اوپر سے قطع مکانی سطح $z = 3\rho^2$ میں ملفوف خطہ D کے لئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کرنے کے لئے کے تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

$$\iiint F(\rho, \phi, z) \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi$$

سوال 14: درج ذیل مکمل کو معادل تکلی محدود کے مکمل میں تبدیل کر اس کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz dx dy$$

سوال 15 تا سوال 20 میں دیے گئے خطہ D پر مکمل $\iiint_D F(\rho, \phi, z) dz \rho d\rho d\phi$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے تھرا مکمل لکھیں۔

سوال 15: وہ قائمہ دائری نیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 2 \sin \phi$ اور سر مستوی $z = 4 - y$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 16: وہ قائمہ دائری نیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 3 \cos \phi$ اور سر مستوی $z = 5 - x$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 17: وہ قائمہ دائری نیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں قلب نما $\rho = 1 + \cos \phi$ کے اندر اور دائرہ $\rho = 1$ کے باہر اور سر مستوی $z = 4$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 18: وہ ٹھوس قائمہ نیلن جس کا قاعدہ دائرہ $\rho = \cos \phi$ اور دائرہ $\rho = 2 \cos \phi$ کے بیچ اور سر مستوی $z = 3 - y$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 19: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور x ، لکیر $y = x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - y$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 20: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور y ، لکیر $y = x$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - x$ میں ہو، خطہ D ہے۔

کروی محدود

سوال 21 تا سوال 26 میں کروی کمالات کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \text{سوال 21}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \text{سوال 22}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{(1-\cos \theta)/2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \text{سوال 23}$$

$$\text{سوال 24: } \int_0^{3\pi/2} \int_0^\pi \int_0^1 5r^3 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{سوال 25: } \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \theta}^2 3r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{سوال 26: } \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} (r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

اب تک ہم کروئی محدود کی مکملات کو پسندیدہ ترتیب سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے مکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 27 تا سوال 30 میں مکملات کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 27: } \int_0^2 \int_{-\pi}^0 \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3 \sin 2\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$\text{سوال 28: } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_{\csc \theta}^{2\csc \theta} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\phi \, dr \, d\theta$$

$$\text{سوال 29: } \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/4} 12r \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$\text{سوال 30: } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\csc \theta}^2 5r^4 \sin^3 \theta \, dr \, d\phi \, d\theta$$

سوال 31: کروئی محدود میں (i) $dr \, d\theta \, d\phi$ ، (ب) $d\theta \, dr \, d\phi$ ترتیب سے سوال 11 کے خطہ کے حجم کے تہرا مکمل لکھیں۔

سوال 32: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ کے بیچ خطہ D کے حجم کا مکمل کروئی محدود میں (i) $dr \, d\theta \, d\phi$ ، (ب) $d\theta \, dr \, d\phi$ ترتیب کے لئے لکھیں۔

سوال 33 تا سوال 38 میں دئے گئے ٹھوس جس کے حجم کے کروئی مکمل (i) کی حدیں تلاش کریں۔ (ب) کروئی مکمل حل کرتے ہوئے جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 33: کرہ $r = \cos \theta$ اور نصف کرہ $r = 2, z \geq 0$ کے بیچ ٹھوس جسم۔

سوال 34: نیچے سے نصف کرہ $r = 1, z \geq 0$ اور اوپر سے سطح طواف قلب نما $r = 1 + \cos \theta$ میں ملفوف ٹھوس جسم۔

سوال 35: جسم طواف قلب نما $r = 1 - \cos \theta$ میں ملفوف۔

سوال 36: وہ بالائی خطہ جو سوال 35 کے جسم سے مستوی xy کاٹا ہے۔

سوال 37: نیچے سے کرہ $r = 2 \cos \theta$ اور اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ میں ملفوف جسم۔

سوال 38: نیچے سے مستوی xy ، اوپر سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور اطراف سے کرہ $r = 2$ میں ملفوف

کار تہی، نیکی اور کروئی محدود

سوال 39: کرہ $r = 2$ کے حجم کا تہرا مکمل (i) کروئی، (ب) نیکی، اور (ج) کار تہی محدود میں لکھیں۔

سوال 40: شمن اول میں نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور اوپر سے کرہ $r = 3$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کا تہرا مکمل (i) نیکی اور (ب) کروئی محدود میں لکھیں۔ (ج) اس کے بعد اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 41: رداس 2 اکائیاں کے کرہ کو، کرہ سے مرکز سے 1 اکائی دور، مستوی دو ٹکڑوں میں کاٹی ہے۔ چھوٹے ٹکڑے کے حجم کا تہرا مکمل (i) کروئی، (ب) نیکی، اور (ج) کار تہی محدود میں لکھیں۔ (د) اس ٹکڑے کا حجم کسی ایک تہرا مکمل کو حل کرتے ہوئے معلوم کریں۔

سوال 42: ٹھوس نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ کے جودی معیار اثر I_z کو (i) نیکی اور (ب) کروئی محدود میں لکھیں۔ (ج) I_z کی قیمت تلاش کریں۔

حجم

سوال 43 تا سوال 48 میں ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 43:

سوال 44:

سوال 45:

سوال 46:

سوال 47:

سوال 48:

سوال 49: مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

- سوال 50: ثمن اول میں نصف مستویات $\phi = 0$ اور $\phi = \frac{\pi}{6}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 51: ٹھوس کرہ $r \leq 2$ سے مستوی $z = 1$ جو چھوٹا ٹکڑا کاٹتا ہے، اس کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 52: مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 53: نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اوپر سے سطح قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیکن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 54: نیچے سے سطح قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ ، اوپر سے سطح قطع مکانی $z = 1 + x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیکن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 55: موٹی دیوار کے بیکن $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ سے مخروط $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ جتنا حصہ کاٹتے ہیں، اس کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 56: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کے اندر اور بیکن $x^2 + y^2 = 1$ کے باہر خطے کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 57: بیکن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 58: بیکن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $x + y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 59: اوپر سے سطح قطع مکانی $z = 5 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے سطح قطع مکانی $z = 4x^2 + 4y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 60: بیکن $x^2 + y^2 = 1$ سے باہر، اوپر سے سطح قطع مکانی $z = 9 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔
- سوال 61: اس خطے کا حجم تلاش کریں جسے ٹھوس بیکن $x^2 + y^2 \leq 1$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ سے کاٹتا ہے۔
- سوال 62: اوپر سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ اور نیچے سے سطح قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 63: مستویات $z = -1$ اور $z = 1$ کے بیچ بیلن $\rho = 1$ میں تقابل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 64: کرہ $\rho^2 + z^2 = 1$ (یعنی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) کے اندر تقابل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 65: ٹھوس گیند $r \leq 1$ میں تقابل $F(r, \theta, \phi) = r$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 66: بالائی نصف ٹھوس کرہ $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ، $r \leq 1$ میں تقابل $F(r, \theta, \phi) = r \cos \theta$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

کمیت، معیار اثر، اور وسطانی مراکز

سوال 67: نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اوپر سے مخروط $z = \rho$ ، $\rho \geq 0$ ، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف مستقل کثافت کے ٹھوس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 68: ٹنڈن اول میں اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $x = 0$ اور $y = 0$ میں ملفوف خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 69: اس ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو سوال 38 میں دیا گیا ہے۔

سوال 70: اوپر سے کرہ $r = a$ اور نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 71: اوپر سے سطح $z = \sqrt{\rho}$ ، نیچے سے مستوی xy ، اور اطراف سے بیلن $\rho = 4$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 72: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو نصف مستویات $\phi = -\pi/3$ ، $\rho \geq 0$ اور $\phi = \pi/3$ ، $\rho \geq 0$ سے کاٹے ہیں۔

سوال 73: قائمہ دائری موٹی دیوار کے بیلن کی اندرونی سطح بیلن $\rho = 1$ اور بیرونی سطح بیلن $\rho = 2$ ہیں۔ اس کا نچلا سر مستوی $z = 0$ اور بالائی سر مستوی $z = 4$ میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 74: ایک قائمہ دائری بیلن کا رداس 1 اور قد 2 ہے۔ (i) بیلن کے محور، (ب) بیلن کے وسطانی مرکز سے گزرتی ہوئے لکیر جو بیلن کے محور کو عمودی ہو، کے لحاظ سے بیلن کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 75: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ 1 اور قد 1 ہے۔ مخروط کے راس سے گزرتی ہوئی کلیئر جو مخروط کے محور کو عمودی ہے کے لحاظ سے مخروط کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 76: رداس a کے کرہ کا جمودی معیار اثر کرہ کے قطر کے لحاظ سے تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 77: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ a اور قد h ہے۔ اس کا جمودی معیار اثر مخروط کے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔ (اشارہ: مخروط کے محور کو محور z اور راس کو مبدا پر رکھیں۔)

سوال 78: ایک ٹھوس جسم اوپر سے قطع مکانی سطح $z = \rho^2$ ، نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت $\delta(\rho, \phi, z) = \rho$ (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = \rho$ ہے۔

سوال 79: ایک ٹھوس جسم نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت $\delta(\rho, \phi, z) = z$ (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = z^2$ ہے۔

سوال 80: ایک ٹھوس گیند کا رداس $r = a$ ہے اور کثافت $\delta(r, \theta, \phi) = r^2$ (ب) $\delta(r, \theta, \phi) = \rho$ ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس گیند کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 81: دکھائیں کہ ایک نیم ترخیمی سطح طواف $z \geq 0, \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} \leq 1$ کا وسطانی مرکز محور z پر قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہے۔ بالخصوص $h = a$ ایک ٹھوس نصف کرہ دیتا ہے۔ یوں ٹھوس نصف کرہ کا وسطانی مرکز قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہو گا۔

سوال 82: دکھائیں کہ ایک قائمہ دائری ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز محور پر قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا۔ (عمومی طور پر مخروط اور اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا)۔

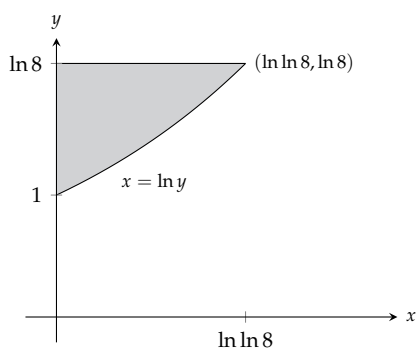
سوال 83: رداس $\rho = a$ کا ایک قائمہ دائری بیلن مستویات $z = 0$ اور $z = h, h > 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس کی کثافت $\delta(\rho, \phi, z) = z + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 84: رداس R کے ایک سیارہ پر ہوا کی کثافت $\mu = \mu_0 e^{-ch}$ ہے جہاں سیارہ کی سطح سے بلندی h ہے جبکہ سیارہ کی سطح پر ہوا کی کثافت μ_0 ہے اور c ایک مثبت مستقل ہے۔ سیارہ میں ہوا کی کیت تلاش کریں۔

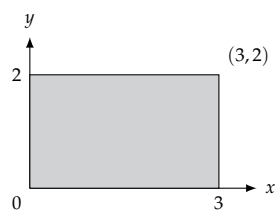
سوال 85: ایک سیارہ کا رداس R اور کیت M ہے۔ اس کی کثافت کروئی تشاکلی ہے جو سطح سے مرکز تک خطی بڑھتی ہے۔ سیارہ کی سطحی کثافت صفر لیتے ہوئے اس کے مرکز پر کثافت تلاش کریں۔

جوابات

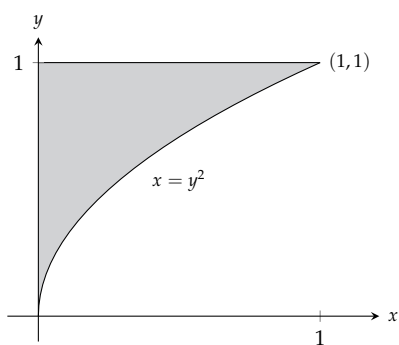
حصہ 14.1 صفحہ 1677



(9) $e - 2$



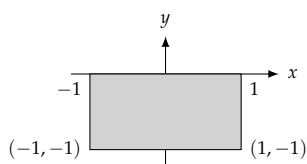
(1) 16



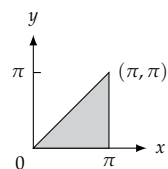
(11) $\frac{3}{2} \ln 2$

(13) $\frac{1}{6}$

(15) $-\frac{1}{10}$

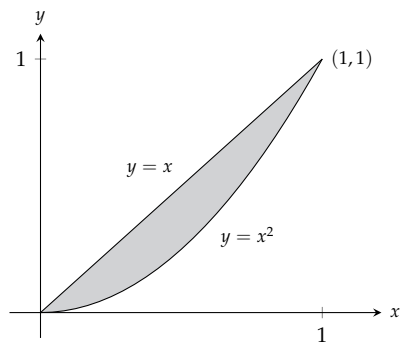


(5) $\frac{\pi^2}{2} + 2$

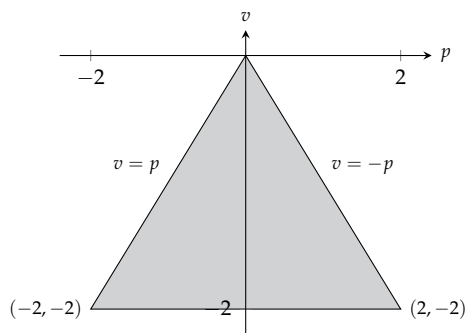


(7) $8 \ln 8 - 16 + e$

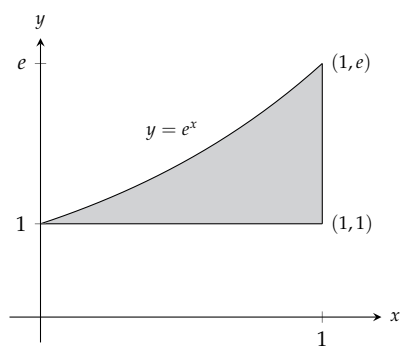
8 (17)



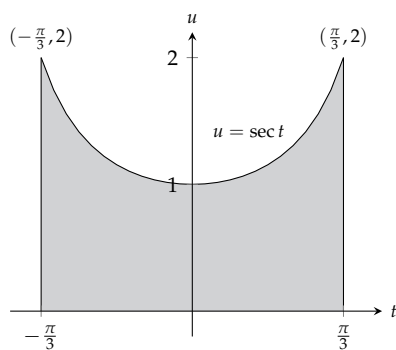
$$\int_1^e \int_{\ln y}^1 dx dy \quad (25)$$



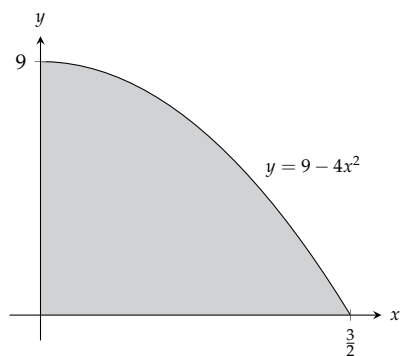
$$2\pi \quad (19)$$



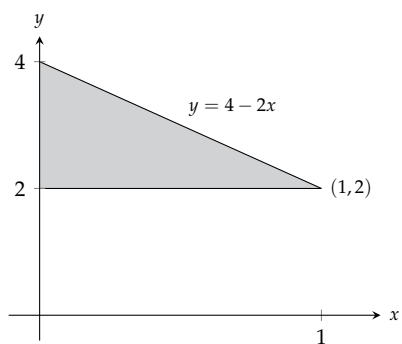
$$\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x dx dy \quad (27)$$



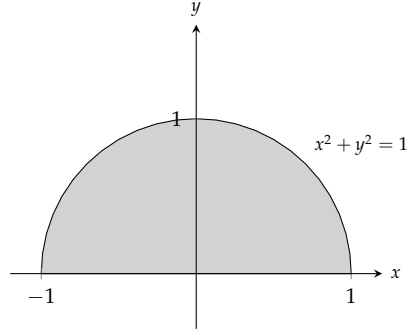
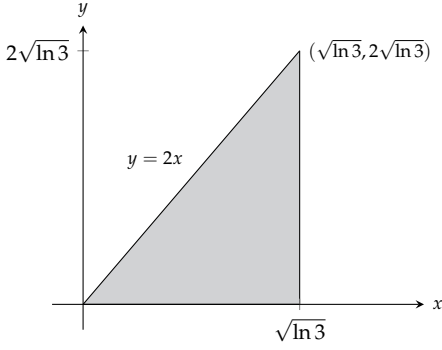
$$\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} dx dy \quad (21)$$



$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y dy dx \quad (29)$$

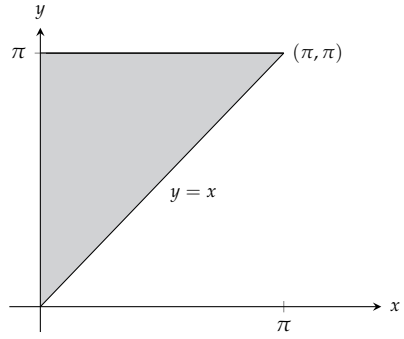
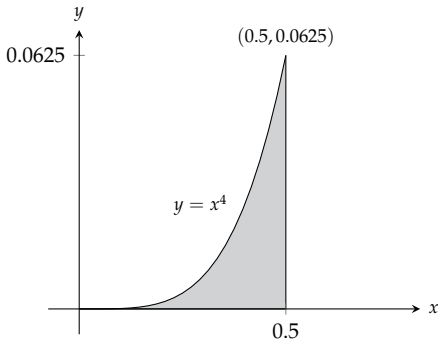


$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx \quad (23)$$



$$\frac{1}{80\pi} \quad (37)$$

$$2 \quad (31)$$



$$\frac{e-2}{2} \quad (33)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (39)$$

$$\frac{4}{3} \quad (41)$$

$$\frac{625}{12} \quad (43)$$

$$16 \quad (45)$$

$$20 \quad (47)$$

$$2(1 + \ln 2) \quad (49)$$

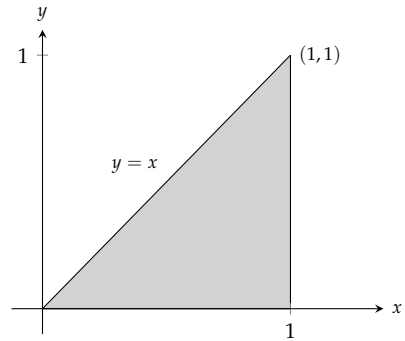
$$1 \quad (51)$$

$$\pi^2 \quad (53)$$

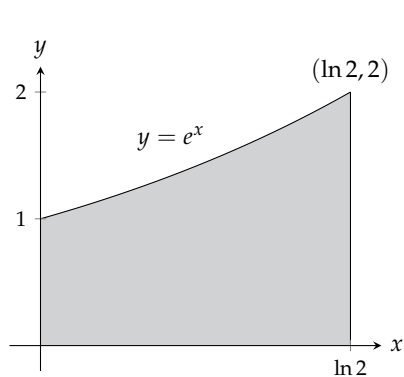
$$-\frac{1}{4} \quad (55)$$

$$\frac{20\sqrt{3}}{9} \quad (57)$$

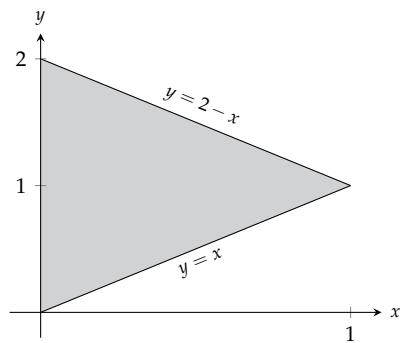
$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dy dx = \frac{4}{3} \quad (59)$$



$$2 \quad (35)$$

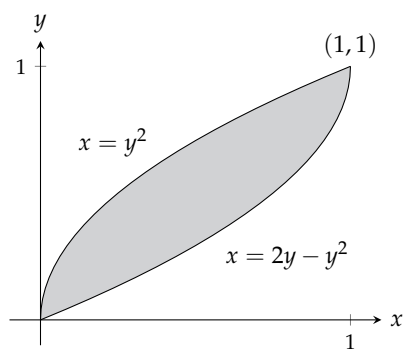


$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dx dy = \frac{1}{3} \quad (7)$$



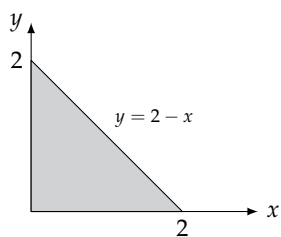
$$0.603 \quad (67)$$

$$0.233 \quad (69)$$

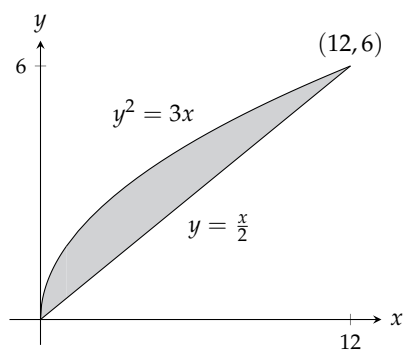


$$12 \quad (9)$$

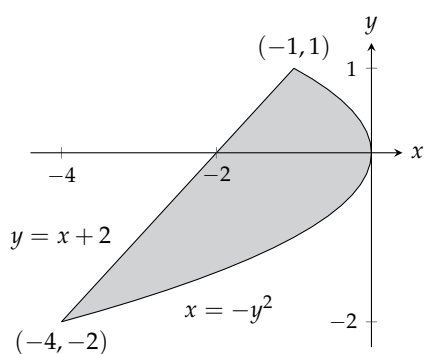
$$\int_0^2 \int_0^{2-x} dy dx = 2, \quad \int_0^2 \int_0^{2-y} dx dy = 2 \quad (1)$$



$$\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} dx dy = \frac{9}{2} \quad (3)$$



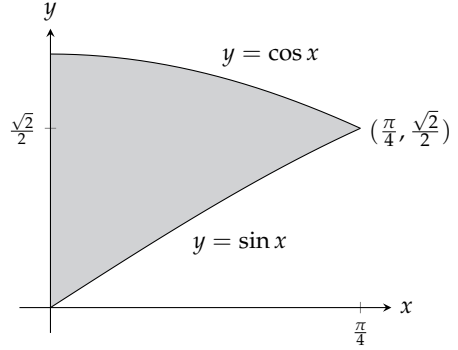
$$\sqrt{2} - 1 \quad (11)$$



$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} dy dx = 1 \quad (5)$$

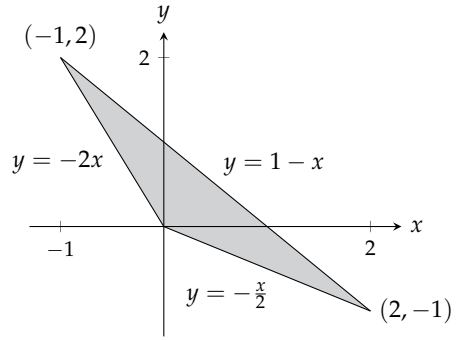
- $\frac{3\sqrt{2}}{5}$
 $40000(1 - e^{-2}) \ln\left(\frac{7}{2}\right) \approx 43329$ (41)
 $0 < a \leq \frac{5}{2}$ (43)
 $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$ (45)
 $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$ (ب) ایک جیسے ہیں۔ (47)
 $(\frac{9}{2}, \frac{19}{8})$ (ج)، $(\frac{19}{7}, \frac{18}{7})$ (ب)، $(\frac{7}{5}, \frac{31}{10})$ (ا) (53)
 $(\frac{11}{4}, \frac{43}{16})$ (د)
 مشترک سرحد پر ہونے کے لئے $h = a\sqrt{2}$ ، مثلث کے اندر
 ہونے کے لئے $h > a\sqrt{2}$ (55)

حصہ 14.3 صفحہ 1705

(13) $\frac{3}{2}$

- $\frac{\pi}{2}$ (1)
 $\frac{\pi}{8}$ (3)
 πa^2 (5)
 36 (7)
 $(1 - \ln 2)\pi$ (9)
 $(2 \ln 2 - 1)(\pi/2)$ (11)
 $\frac{\pi}{2} + 1$ (13)
 $\pi(\ln(4) - 1)$ (15)
 $2(\pi - 1)$ (17)
 12π (19)
 $\frac{3\pi}{8} + 1$ (21)
 4 (23)
 $6\sqrt{3} - 2\pi$ (25)
 $\bar{x} = \frac{5}{6}, \bar{y} = 0$ (27)
 $\frac{2a}{3}$ (29)
 $\frac{2a}{3}$ (31)
 2π (33)
 $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$ (35)
 1 (ب)، $\sqrt{\pi/2}$ (ا) (37)
 $\pi \ln 4$ (39)
 $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$ (41)

حصہ 14.4 صفحہ 1718



- $\frac{4}{\pi^2}$ (ب)، 0 (ا) (15)
 $\frac{8}{3}$ (17)
 $\bar{x} = \frac{5}{14}, \bar{y} = \frac{38}{35}$ (19)
 $\bar{x} = \frac{64}{35}, \bar{y} = \frac{5}{7}$ (21)
 $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}$ (23)
 $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$ (25)
 $\bar{x} = \frac{\pi}{2}, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$ (27)
 $\bar{x} = -1, \bar{y} = \frac{1}{4}$ (29)
 $I_x = \frac{64}{105}, R_x = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$ (31)
 $\bar{x} = \frac{3}{8}, \bar{y} = \frac{17}{16}$ (33)
 $\bar{x} = \frac{11}{3}, \bar{y} = \frac{14}{27}, I_y = 432, R_y = 4$ (35)
 $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{13}{31}, I_y = \frac{7}{5}, R_y = \sqrt{\frac{21}{31}}$ (37)
 $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{7}{10}, I_x = \frac{9}{10}, I_y = \frac{3}{10}$ (39)
 1 (ا) $I_0 = \frac{6}{5}, R_x = \frac{3\sqrt{6}}{10}, R_y = \frac{3\sqrt{2}}{10}, R_0 =$

$$\begin{aligned} & 1 \quad (27) \\ & \frac{16}{3} \quad (29) \\ & 8\pi - \frac{32}{3} \quad (31) \\ & 2 \quad (33) \\ & 4\pi \quad (35) \\ & \frac{31}{3} \quad (37) \\ & 1 \quad (39) \\ & 2 \sin 4 \quad (41) \\ & 4 \quad (43) \\ & a = \frac{13}{3} \text{ یا } a = 3 \quad (45) \end{aligned}$$

ص 14.6 صفحہ 1741

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3} \quad (1) \\ & \frac{17\pi}{5} \quad (3) \\ & \pi(6\sqrt{2}-8) \quad (5) \\ & \frac{3\pi}{10} \quad (7) \\ & \frac{\pi}{3} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\phi \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^1 \rho \, d\rho \, dz \, d\phi + \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3}}^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\phi$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz \, d\rho \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \phi} \int_0^{3\rho^2} F(\rho, \phi, z) \rho \, dz \, d\rho \, d\phi \quad (13)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\sin \phi} \int_0^{4-\rho \sin \phi} F(\rho, \phi, z) \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi \quad (15)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \phi} \int_0^4 F(\rho, \phi, z) \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi \quad (17)$$

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \int_0^{2-\rho \sin \phi} F(\rho, \phi, z) \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi \quad (19)$$

$$\pi^2 \quad (21)$$

$$\pi/3 \quad (23)$$

$$5\pi \quad (25)$$

$$2\pi \quad (27)$$

$$\left(\frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)\pi \quad (29)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi + \quad (31)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\csc \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{\pi/6}^{\sin^{-1}(1/r)} r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr \, d\phi + (\text{ب})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\pi/6} r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr \, d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\cos \theta}^2 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{31\pi}{6} \quad (33)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{1-\cos \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{8\pi}{3} \quad (35)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{\pi}{3} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-3y/2} dz \, dy \, dx, \quad (3) \\ & \int_0^2 \int_0^{1-y/2} \int_0^{3-3x-3y/2} dz \, dx \, dy, \\ & \int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{2-2x-2z/3} dy \, dz \, dx, \\ & \int_0^3 \int_0^{1-z/3} \int_0^{2-2x-2z/3} dy \, dx \, dz, \\ & \int_0^2 \int_0^{3-3y/2} \int_0^{1-y/2-z/3} dx \, dz \, dy, \\ & \int_0^3 \int_0^{2-2z/3} \int_0^{1-y/2-z/3} dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

نکات کا جواب 1

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx, \quad (5)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1 \, dz \, dx \, dy,$$

$$\int_{-2}^2 \int_4^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1 \, dx \, dz \, dy +$$

$$\int_{-2}^2 \int_{y^2}^4 \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1 \, dx \, dz \, dy,$$

$$\int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1 \, dx \, dy \, dz +$$

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1 \, dx \, dy \, dz,$$

$$\int_{-2}^2 \int_4^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1 \, dy \, dz \, dx +$$

$$\int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 \, dy \, dz \, dx,$$

$$\int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1 \, dy \, dx \, dz +$$

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 \, dy \, dx \, dz$$

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 \, dy \, dx \, dz$$

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 \, dy \, dx \, dz$$

نکات کا جواب 16\pi

$$1 \quad (7)$$

$$1 \quad (9)$$

$$\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1) \quad (11)$$

$$18 \quad (13)$$

$$\frac{7}{6} \quad (15)$$

$$0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (19)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_{x^2}^{1-z} dy \, dz \, dx \quad (21)$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{x^2}^{1-z} dy \, dx \, dz \quad \text{ب.}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \, dz \, dx \quad \text{ج.}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \, dz \, dy \quad \text{د.}$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{1-y} dz \, dx \, dy \quad \text{ه.}$$

$$\frac{2}{3} \quad (23)$$

$$\frac{20}{3} \quad (25)$$

- $5\pi/2$ (59)
 $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$ (61)
 $2/3$ (63)
 $3/4$ (65)
 $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 3/8$ (67)
 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 3/8)$ (69)
 $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 5/6$ (71)
 $I_z = 30\pi, R_z = \sqrt{\frac{5}{2}}$ (73)
 $I_x = \pi/4$ (75)
 $\frac{a^4 h \pi}{10}$ (77)
 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/5), I_z = \pi/12$ (i) (79)
 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 5/6)$ (ب) $R_z = \sqrt{1/3}$
 $I_z = \pi/14, R_z = \sqrt{5/14}$
 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{2h^2+3h}{3h+6})$ (83)
 $I_z = \frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4}, R_z = \frac{a}{\sqrt{2}}$
 $\frac{3M}{\pi R^3}$ (85)
- $8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ (i) (39)
 $8 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\phi$ (ب)
 $8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$ (ج)
 $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \theta}^2 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ (i) (41)
 $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\phi$ (ب)
 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx$ (ج)
 $\frac{5\pi}{3}$ (د)
 $8\pi/3$ (43)
 $9/4$ (45)
 $(3\pi - 4)/18$ (47)
 $\frac{2\pi a^3}{3}$ (49)
 $\frac{5\pi}{3}$ (51)
 $\pi/2$ (53)
 $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ (55)
 16π (57)

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

