

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	4.1
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	4.2
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	4.3
356	4.3.1 پرکھ	4.3.1
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ تزییم	4.4
391	4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	4.5
418	4.6 بہترین بنانا	4.6
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	4.7
463	4.8 ترکیب نیوٹن	4.8
475	تکمل	5
475	5.1 غیر قطعی کمالات	5.1
487	5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	5.2
503	5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	5.3
514	5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	5.4
532	5.5 ریمان مجموعے اور قطعی کمالات	5.5
559	5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	5.6
576	5.7 بنیادی مسئلہ	5.7
597	5.8 قطعی تکمل میں بدل	5.8
603	5.9 اعدادی تکمل	5.9
603	5.10 قاعدہ ڈورنقہ	5.10
623	تکمل کا استعمال	6
623	6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ	6.1
627	6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد	6.1.1
638	6.2 کلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش	6.2
646	6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا	6.3
661	6.4 تکلی چھلے	6.4
674	6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں	6.5
685	6.6 سطح طواف کا رقبہ	6.6
697	6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت	6.7
709	6.7.1 وسطانی مرکز	6.7.1
714	6.8 کام	6.8
729	6.9 فشار سیال اور قوت سیال	6.9
739	6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال	6.10

747	ضمیمہ اول	ا
749	ضمیمہ دوم	ب

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال

اس باب میں ریمان مجموعہ کے استعمال سے ہم نے چیزوں کا حساب کرنا سیکھا۔ یہ عمل درج ذیل تین اقدام پر مشتمل ہے۔

ا. مطلوبہ چیز کو ایک یا ایک سے زائد تقاطع سے ظاہر کیا جاتا ہے جو بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری ہوں۔

ب. وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے ہر ذیلی وقفہ میں ایک نقطہ c_k منتخب کیا جاتا ہے۔ k ویں ذیلی وقفہ کی لمبائی Δx_k ہوگی۔

مطلوبہ چیز کی تخمینی قیمت کو مجموعہ کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

اس مجموعہ کی شناخت بطور وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تقاطع کی ریمان مجموعہ کی جاتی ہے۔

ج. خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے ریمان مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔

ریمان مجموعہ کا حد قطعی مکمل ہو گا۔

قطعی مکمل استعمال کرتے ہوئے چیز کا حساب لگایا جاتا ہے۔

درج بالا اقدام سے کلیئر کی لمبائی، خطے کا رقبہ، اجسام کا حجم، کام، وغیرہ کا حساب ممکن ہے۔

حقیقت میں انجینئری، حیاتیات، علم کیمیا، اقتصادیات، ارضیات، طب، اور دیگر شعبوں میں ہزاروں کی تعداد میں چیزوں کو ان اقدام سے حل کیا جا سکتا ہے۔

اس حصہ میں ان اقدام پر دوبارہ غور کیا جائے گا اور کئی نئے مکمل متعارف کیے جائیں گے جو ان اقدام سے پیدا ہوتے ہیں۔

فاصلہ بالمقابل ہٹاؤ

اگر کسی محدودی لکیر پر ایک جسم کا مقام تفاعل $s(t)$ دیتا ہو اور یہ جسم ایک ہی سمت میں حرکت کرتا ہو تب $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کے سمتی رفتار تفاعل $v(t)$ کا مکمل اس دورانیے میں طے شدہ فاصلہ دے گا۔ اگر جسم اس دورانیے میں سمت تبدیل کرتا ہو تب طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لئے ہمیں جسم کی رفتار $|v(t)|$ کا مکمل لینا ہو گا۔ جسم کی سمتی رفتار کا مکمل جسم کا ہٹاؤ $s(b) - s(a)$ دے گا جو اس کی ابتدائی اور اختتامی مقامات کے بیچ فاصلہ ہے۔

یہ دیکھنے کے لئے ہم وقتی وقفہ $a \leq t \leq b$ کی خانہ بندی کرتے ہیں جہاں k ویں وقفے کی لمبائی Δt_k ہے۔ اگر Δt_k بہت کم ہو تب دورانیہ t_{k-1} تا t_k جسم کی سمتی رفتار $v(t)$ میں تبدیلی قابل نظر انداز ہو گی لہذا اس ذیلی وقفے کی دائیں سر پر جسم کی سمتی رفتار $v(t_k)$ کو اس ذیلی وقفہ پر جسم کی سمتی رفتار تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں k ویں ذیلی وقفہ کے دوران جسم کے مقام میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$v(t_k)\Delta t_k$$

اگر $v(t_k)$ مثبت ہو تب یہ تبدیلی مثبت ہو گی اور اگر $v(t_k)$ منفی ہو تب یہ تبدیلی منفی ہو گی۔ دونوں صورتوں میں k ویں ذیلی وقفہ میں جسم

$$|v(t_k)|\Delta t_k$$

فاصلہ طے کرے گا۔ یوں پورے وقفے پر جس کل درج ذیل فاصلہ طے کرے گا۔

$$(6.39) \quad \sum_{k=1}^n |v(t_k)|\Delta t_k$$

مساوات 6.39 میں مجموعہ، وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل رفتار $|v(t)|$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ تخمینی مجموعہ بہتر نتیجہ دے گا۔ یوں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ میں جسم کا طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لئے درج ذیل مکمل استعمال کیا جاسکتا ہے۔

$$(6.40) \quad \text{فاصلہ} = \int_a^b |v(t)| dt$$

یہ ریاضیاتی نمونہ ہر بار بالکل درست فاصلہ دیتا ہے۔

اگر ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقتی دورانیے کی اختتام پر ابتدائی مقام سے جسم کتنا دور ہو گا تب ہم $v(t)$ کا مکمل ناکہ $|v(t)|$ کا مکمل لیں گے۔

آئیں دیکھیں ایسا کیوں ہو گا۔ فرض کریں کی تفاعل $s(t)$ جسم کا مقام دیتا ہے اور F تفاعل v کا الٹ تفرق ہے۔ تب

$$s(t) = F(t) + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ یوں لے $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کا ہٹاؤ

$$s(b) - s(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b v(t) dt$$

ہو گا یعنی:

$$(6.41) \quad \Delta s = \int_a^b v(t) dt$$

مثال 6.41: ایک کثیر پر لے $t = 0$ سے لے $t = \frac{3\pi}{2}$ s تک ایک جسم کی رفتار $v(t) = 5 \cos t \text{ m s}^{-1}$ ہے۔ یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟ اس کا کل ہٹاؤ کتنا ہو گا؟

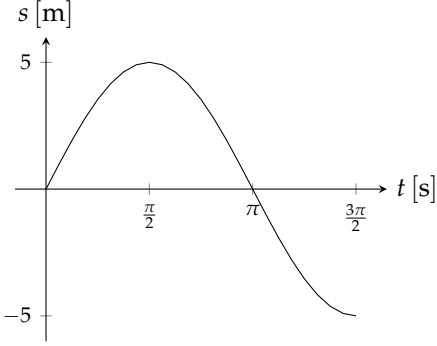
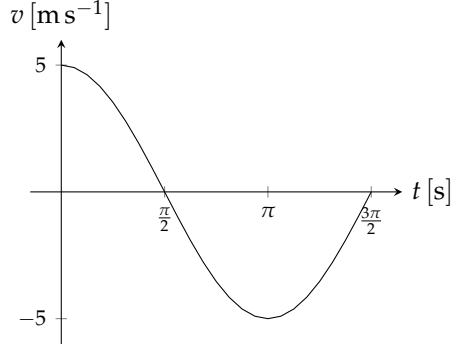
حل:

$$\begin{aligned} \text{رفتار لا مکمل فاصلہ ہو گا} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |5 \cos t| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-5 \cos t) dt \\ &= 5 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 5 \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= 5(1 - 0) - 5(-1 - 1) = 5 + 10 = 15 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{سمتی رفتار کا مکمل ہٹاؤ ہو گا} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 5 \cos t dt \\ &= 5 \sin t \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = 5(-1) - 5(0) = -5 \text{ m} \end{aligned}$$

اس دورانیے میں جسم 5 m آگے اور 10 m پیچھے سفر کرتا ہے۔ یوں یہ 15 m فاصل طے کرتا ہے جبکہ اس کا ہٹاؤ -5 m ہو گا (شکل 6.138)۔

□

(ب) ابتدائی نقطہ $s(0)$ سے جسم کا ہٹاؤ۔

(ا) سمتی رفتار تفاعل۔

شکل 6.138: سمتی رفتار تفاعل اور ہٹاؤ (مثال 6.41)

قاعدہ دولس

آپ جانتے ہیں کہ چنے کے بعد سیب کا ذائقہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں شکر وقت کے ساتھ نشاستہ میں تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں نشاستہ کی مقدار معلوم کرنے کے لئے ہم سیب کا ایک باریک کتلے کو خوردبین میں دیکھتے ہیں۔ نشاستہ کے ہر دانہ کا سطح عمودی تراش خوردبین میں صاف نظر آتا ہے لہذا کتلے کی سطح میں نشاستہ کے رقبہ عمودی تراش کا تناسب معلوم کیا جاسکتا ہے۔ یہ دو بعدی تناسب سیب میں نشاستہ کے تین بعدی تناسب کے برابر ہو گا۔ دو بعدی اور تین بعدی تناسب کی یکسانیت اوسط قیمت کی تصور پر مبنی ہے۔

فرض کریں ہم کسی ٹھوس جسم میں دانہ دار مادہ کی تناسب جاننا چاہتے ہیں۔ ہم ٹھوس جسم سے موزوں نمونہ حاصل کرتے ہیں جس کو کاٹ کر ایک مکعب حاصل کیا جاتا ہے۔ اس مکعب کا ضلع L ہے۔ اس مکعب کو شکل 6.139 میں دکھایا گیا ہے جہاں مکعب کا ضلع x محور پر ہے۔ ہم وقفہ $[0, L]$ کے عمودی سطحوں سے اس مکعب کو کستلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں x پر دانہ دار مادے کے رقبے کا تناسب $r(x)$ ہے۔ فرض کریں کہ $r(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہے۔

اب وقفہ $[0, L]$ کی خانہ بندی کریں۔ نقطہ خانہ بندی پر x محور کے عمودی سطحوں سے مکعب کو کستلوں میں تقسیم کریں۔ k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δx_k ہوگی جو نقطہ x_{k-1} اور نقطہ x_k پر موجود سطحوں کے بیچ فاصلہ ہو ہے۔ اگر یہ سطحیں کافی قریب ہوں تب یہ دانوں کو بیلنی شکل میں کاٹیں گے۔ ان بیلنیوں کا قاعدہ x_k پر ہو گا۔ ان سطحوں کے بیچ دانہ دار مادہ کی حجمی تناسب وہی ہوگی جو x_k پر سطح میں دانہ دار مادہ کی سطحی تناسب ہے جو ان بیلنیوں کے قاعدہ کے برابر ہے جو از خود تقریباً $r(x)$ ہو گا۔ یوں دو قریبی سطحوں کے بیچ دانہ دار مادہ کی مقدار درج ذیل ہوگی۔

$$(کتلے کا حجم) \times (\تناسب) = r(x)L^2\Delta x_k$$

پورے مکعب میں دانہ دار مادہ کی مقدار

$$\sum_{k=1}^n r(x) L^2 \Delta x_k$$

ہو گی جو وقفہ $[0, L]$ پر تقابل $r(x) L^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب پہنچانے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا لہذا درج ذیل مکمل، جو ریمان مجموعہ کی حد کو ظاہر کرتا ہے، مکعب میں دانہ دار مادہ کی مقدار دے گا۔

$$\int_0^L r(x) L^2 dx$$

اس مقدار کو مکعب کے حجم L^3 سے تقسیم کرنے سے مکعب میں دانہ دار مادہ کی تناسب حاصل ہو گی۔ اگر ہم نے موزوں نمونی مکعب منتخب کیا ہو تب پورے ٹھوس جس میں دانہ دار مادہ کا تناسب وہی ہو گا جو اس نمونی مکعب میں ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

مکعب میں دانہ دار مادہ کا تناسب = ٹھوس جسم میں دانہ دار مادہ کا تناسب

$$= \frac{\int_0^L r(x) L^2 dx}{L^3}$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L r(x) dx$$

نمائندہ سطح عمودی تراش میں دانہ دار مادے کا سطحی تناسب

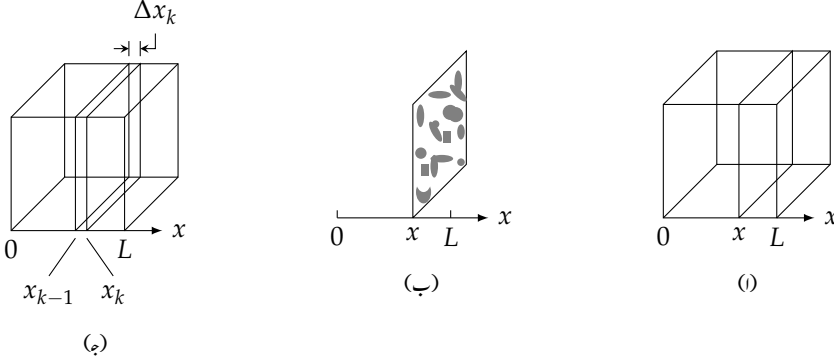
یہ قاعدہ دولس²⁸ ہے جسے فرانسیسی ماہر ارضیات اشلے ارنسٹ دولس [1817 – 1881] نے دریافت کیا۔ یوں وقفہ $[0, L]$ پر $r(x)$ کی اوسط قیمت \bar{r} سے ٹھوس جسم میں دانہ دار مادے کا تناسب حاصل ہو گا۔ حقیقت میں کئی رقبہ عمودی تراش پر \bar{r} حاصل کر کے ان کی اوسط لی جاتی ہے۔

جناب دولس پتھر میں دانہ دار مادہ کی تناسب میں دلچسپی رکھتے تھے۔ وہ نمونی پتھر کی ایک سطح کو اچھی طرح چمکدار بنا کر سطح کے برابر مومی کاغذ کو چمکیلی سطح پر رکھ کر دانہ دار خطوں کی نشاندہی کرتے۔ کاغذ کا وزن کرنے کے بعد، دانہ دار خطوں کو کاغذ سے کاٹ کر کاغذ کا وزن دوبارہ کرتے۔ یوں دانہ دار خطوں کے رقبہ کا تناسب حاصل کیا جاتا۔ یہ ترکیب آج بھی تیل کی تلاش میں استعمال کیا جاتا ہے۔

ناکارہ مکمل، ناکارہ نمونہ کشی

بعض اوقات ریمان مجموعہ سے حاصل مکمل ہمارے کسی کام کے نہیں ہوتا ہے۔ اس کا دار و مدار مسئلے کی نمونہ کشی پر منحصر ہے۔ بعض طریقہ کار موزوں اور بعض غیر موزوں ہوتے ہیں۔ آئیں ایک غیر موزوں ریمان مجموعہ کی مثال دیکھیں۔

²⁸Delesse's rule



شکل 6.139: قاعدہ دوسل کے مراحل۔

ہم شکل 6.140 میں سطحی رقبہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ مخروطی نکلیاں لینے سے شکل 6.140-1 حاصل ہوتا ہے جس سے سطحی رقبے کا کلیہ

$$(6.42) \quad S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ ہر بار بالکل درست نتیجہ دیتا ہے جو دیگر ذرائع سے حاصل معلومات کے عین مطابق ہوتا ہے۔

انہیں شکل 6.140-ب کی طرح بیلیٹی پٹیاں لے کر ریمان مجموعہ حاصل کر کے دیکھیں۔ یہ ریمان مجموعہ بھی مرکز ہوتا ہے جو درج ذیل نسبتاً آسان مکمل دیتا ہے۔

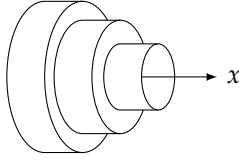
$$(6.43) \quad S = \int_a^b 2\pi f(x) dx$$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ حجم کی تلاش میں ہم نے بیلیٹی پٹیاں استعمال کیں لہذا یہاں بھی ان کا استعمال درست ہو گا۔ حقیقت میں مساوات 6.43 کوئی پیش گوئی نہیں کرتا ہے اور نا ہی اس سے کبھی درست نتائج حاصل ہوتا ہیں جو دیگر تراکیب سے حاصل جوابات کے ساتھ مشابہت رکھتے ہوں۔ نمونہ کشی کے دوران موازنہ کے قدم پر یہ کلیہ ناکام ثابت ہوتا ہے۔

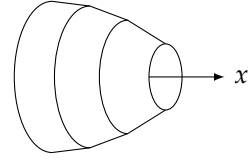
یاد رہے کہ اگر آپ ایک بہت اچھا نظر آنے والے مکمل حاصل کرنے میں کامیاب ہوں، اس کا یہ مطلب نہیں ہے کہ حاصل مکمل درست نتائج بھی دے گا۔ آپ کو مکمل کے نتائج کو پرکھنا بھی ہو گا۔

مسئلہ پاپس

وسطانی مراکز کا سطح طواف کے رقبہ اور جسم طواف کے حجم کے ساتھ تعلق کو مسئلہ پاپس پیش کرتا ہے۔



(ب) سطحی رقبہ بیلنی پیوں سے حاصل نہیں ہوتا ہے۔



(i) سطحی رقبہ مخروطی پیوں سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.140: مخروط پٹی لینے سے کارآمد مکمل جبکہ بیلنی پٹی سے غیر کارآمد مکمل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 6.1: مسئلہ پاپس برائے حجم اگر کسی مستوی خطہ کو سطح مستوی میں لکیر کے گرد گھمایا جائے جہاں خطے کو لکیر قطع نہ کرتی ہو تب جسم طواف کا حجم خطے کا رقبہ ضرب وہ فاصلہ جو ایک چکر کے دوران وسطانی نقطہ طے کرتا ہو کے برابر ہو گا۔ اگر خطے کا رقبہ S اور وسطانی نقطے کا محور سے فاصلہ ρ ہو تب جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi\rho S \quad (6.44)$$

ثبوت :

□

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

