احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 10

مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد

جائزہ

حرکت پر غور احصاء کی مدد سے کیا جا سکتا ہے۔ اس حصہ میں ہم وقت کے ساتھ ایک ذرے کے بدلتے مقام پر غور کریں گے۔ ہم مخروطی حصوں کی مساوات سے شروع کرتے ہیں چونکہ بالعکس مربع قوت کی بنا سیارے، مصنوعی سیارے، اور دیگر اجسام مخروطی راہ پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک جسم مخروطی راہ پر حرکت کر رہا ہے تب ہم اس کی رفتار اور اس پر عمل کرنے والی قوت دریافت کر سکتے ہیں۔ قطبی محدد سیاروں کی حرکت پر غور کو بہت آسان بناتا ہے لہٰذا ہم اس نئے محدد میں منحنیات، تفرق اور تکمل پر بھی غور کریں گے۔

10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ مخروطی حصوں کو کس طرح محددی سطح پر بطور دو قدری مساوات پیش کیا جاتا ہے۔ دوہرے مخروط کو سطح سے کاٹ کر مخروطی منحنیات پیدا کی جاتی ہیں اور اسی کی بنا مخروطی حصہ کی اصطلاح پیدا ہوئی۔

دائرہ

تعریف : ایک مستوی میں رہتے ہوئے اس مستوی میں کسی مقررہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو دائرہ[1] کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقطہ کو دائرے کا مرکز[2] کہتے ہیں جبکہ اس مستقل فاصلہ کو رداس[3] کہتے ہیں۔

□

دائرے کے معیاری مساوات جنہیں حصہ 1.4 میں فاصلہ کی مساوات $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ سے اخذ کیا گیا درج ذیل ہیں۔

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (0,0)$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (h,k)$$

قطع مکافی

تعریف : ایک سطح میں رہتے ہوئے کسی مقررہ سیدھی لکیر اور مقررہ نقطہ (جو اس مقررہ سیدھی لکیر پر نہیں پایا جاتا ہو) سے مستقل فاصلہ پر پائے جانے والے تمام نقطوں کے سلسلہ کو قطع مکافی[4] کہتے ہیں۔ مقررہ نقطے کو قطع مکافی کا [5] کہتے ہیں جبکہ مقررہ لکیر کو ناظمہ[6] کہتے ہیں۔

□

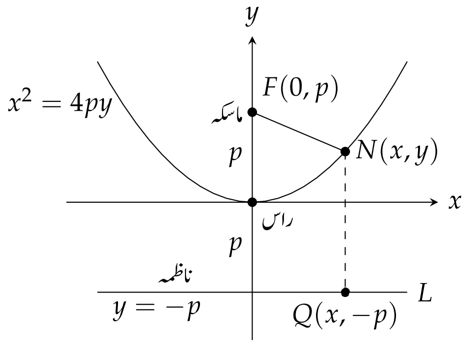
جب ماسکہ کسی محددی محور پر ہو اور ناظمہ اس محددی محور کے متوازی ہو تب قطع مکافی کی مساوات سادہ ترین ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ماسکہ y محور پر نقطہ $F(0,p)$ پر پایا جاتا ہے اور لکیر $y = -p$ ناظمہ (شکل 10.1) ہے۔ یوں شکل 10.1 میں نقطہ $N(x,y)$ صرف اور صرف اس صورت اس قطع مکافی پر پایا جائے گا جب $NF = NQ$ ہو۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$NF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

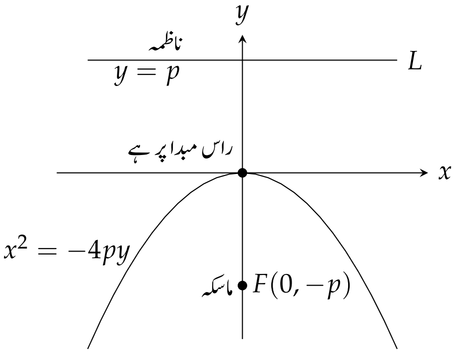
$$NQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

---

[1] circle
[2] center
[3] radius
[4] parabola
[5] focus
[6] directrix



شکل 10.1: قطع مکافی $x^2 = 4py$ ؛ راس کا فاصل ماسکہ اور ناظمہ سے ایک جیسا ہے۔



شکل 10.2: قطع مکافی $x^2 = -4py$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان مساوات کو ایک دوسرے کے برابر پر کر کے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y = \frac{x^2}{4p} \implies x^2 = 4py \qquad \text{معیاری روپ} \tag{10.1}$$

اس مساوات سے قطع مکافی کی y محور کے لحاظ سے تشاکلی واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ محور y اس قطع مکافی کا محور تشاکلی ہے جس کو عموماً چھوٹا کر کے صرف محور[7] پکارا جاتا ہے۔

وہ نقطہ جس پر قطع مکافی اپنے محور کو قطع کرتا ہو راس[8] کہلاتا ہے۔ قطع مکافی $x^2 = 4py$ کا راس مبدا پر پایا جاتا ہے (شکل 10.1)۔ مثبت عدد p کو قطع مکافی کا طول ماسکہ[9] کہتے ہیں۔

اگر قطع مکافی نیچے رخ کھلتا ہو اور اس کا ماسکہ $(0, -p)$ جبکہ ناظمہ لکیر $y = p$ ہو تب مساوات 10.1 درج ذیل روپ اختیار کرے گی (شکل 10.2)۔

$$y = -\frac{x^2}{4p} \implies x^2 = -4py$$

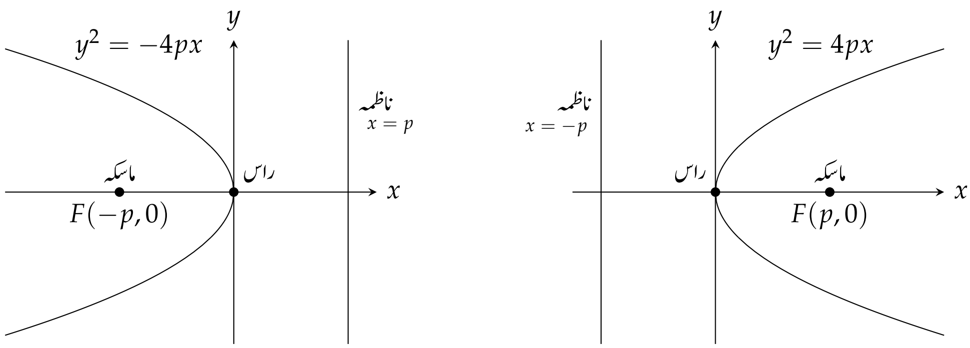
ہم اسی طرح کے مساوات ہم دائیں اور بائیں کھلنے والے قطع مکافی کے لئے حاصل کر سکتے ہیں (جدول 10.1 اور شکل 10.3)۔

مثال 10.1: قطع مکافی $y^2 = 10x$ کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کریں۔

axis[7]
vertex[8]
focal length[9]

جدول 10.1: مبدا پر راس والے قطع مکافی کے معیاری مساوات ($p > 0$)

مساوات	ماسکہ	ناظمہ	محور	کھلنے کا رخ
$x^2 = 4py$	$(0, p)$	$y = -p$	y محور	اوپر
$x^2 = -4py$	$(0, -p)$	$y = p$	y محور	نیچے
$y^2 = 4px$	$(p, 0)$	$x = -p$	x محور	دائیں
$y^2 = -4px$	$(-p, 0)$	$x = p$	x محور	بائیں



شکل 10.3: قطع مکافی $y^2 = 4px$ اور $y^2 = -4px$ کے ترسیمات۔

حل: ہم معیاری مساوات $y^2 = 4px$ میں p کی قیمت تلاش کرتے ہیں:

$$4p = 10 \quad \implies \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

اس کے بعد ہم حاصل کردہ p کے لئے ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرتے ہیں۔

$$(p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right) \qquad \text{ماسکہ}$$

$$x = -p, \qquad x = -\frac{5}{2} \qquad \text{ناظمہ}$$

□

جدول 10.1 کے کلیات پر حصہ 1.4 میں دیے گئے منتقلی کے کلیات لاگو کرتے ہوئے دیگر مقامات پر واقع قطع مکافی کے مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

ترخیم

تعریف: ایک مستوی پر رہتے ہوئے، مستوی پر دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو، ان کے سلسلہ کو ترخیم[10] کہتے ہیں۔ ان دو مقررہ نقطوں کو ترخیم کے ماسکے کہتے ہیں (شکل 10.4 اور شکل 10.5)۔

□

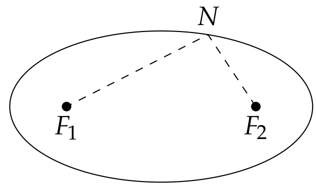
ترخیم کو اس کی تعریف استعمال کرتے ہوئے بہت جلد ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ مقررہ نقطوں F_1 اور F_2 پر ڈوری باندھیں۔ ڈوری کو قلم سے کھینچ کر رکھتے ہوئے قلم کو بند دائری حرکت دیں۔ چونکہ ڈوری کی لمبائی مستقل ہے لہٰذا قلم ترخیم کو ترسیم کرے گا (شکل 10.4)۔

اگر ماسکے $F_1(-c, 0)$ اور $F_2(c, 0)$ ہوں (شکل 10.6) اور فاصلہ $NF_1 + NF_2$ کو $2a$ سے ظاہر کیا جائے تب ترخیم پر نقطہ $N(x, y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

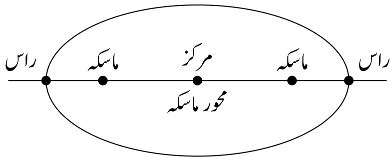
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذری جزو کو دائیں منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذری جزو کو ایک ہاتھ رکھتے ہوئے دوبارہ مربع لیتے ہیں۔ نتیجتاً درج ذیل حاصل ہو گا۔

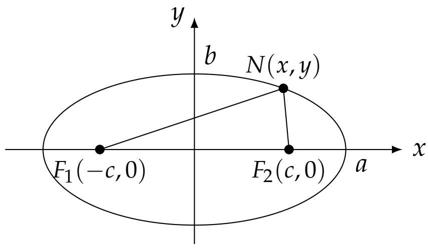
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{10.2}$$



شکل 10.4: دونوں ماسکوں (F_1 اور F_2) سے کسی بھی نقطہ N تک فاصلوں کا مجموعہ (نقطہ دار لکیر) ایک مستقل ہے۔



شکل 10.5: ترخیم پر اہم نقطے۔



شکل 10.6: ترخیم کی تعریف $NF_1+NF_2=2a$ اور اس کی مساوات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ہے۔

چونکہ NF_1+NF_2 کی لمبائی F_1F_2 کی لمبائی سے زیادہ ہے (تکون NF_1F_2 کے لئے تکونی عدم مساوات) لہٰذا عدد $2a$ عدد $2c$ سے بڑا ہو گا۔ یوں $a>c$ ہو گا لہٰذا مساوات 10.2 میں a^2-c^2 ایک مثبت عدد ہو گا۔

ہم مساوات 10.2 حاصل کرنے کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ جو مساوات 10.2 کو $0<c<a$ کے لئے مطمئن کرتا ہو $NF_1+NF_2=2a$ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت ترخیم پر پایا جائے گا اگر وہ مساوات 10.2 کو مطمئن کرتا ہو۔

اگر

$$b=\sqrt{a^2-c^2} \tag{10.3}$$

ہو تب $a^2-c^2=b^2$ ہو گا اور مساوات 10.2 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{10.4}$$

ellipse[10]

مساوات 10.4 کے تحت مبدا اور دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ $x = \pm a$ اور $y = \pm b$ لکیروں میں بند مستطیل کے اندر پایا جاتا ہے۔ یہ محوروں کو نقطہ $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{مساوات 10.4 سے حاصل کیا گیا}$$

کی قیمت $x = 0$ پر صفر اور $y = 0$ پر لامتناہی ہے لہٰذا $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر مماثل محوروں کو عمودی ہوں گے۔

ترخیم کا اکبر اور اصغر محور

مساوات 10.4 کی ترخیم کا اکبر محور[11] نقاط $(\pm 2, 0)$ کو جوڑنا والی لکیر ہے جس کی لمبائی $2a$ ہے۔ اس کے اصغر محور[12] کی لمبائی $2b$ ہے جو نقاط $(0, \pm b)$ کے بیچ لکیر ہے۔ عدد a از خود نصف اکبر محور جبکہ عدد نصف اصغر محور کہلاتے ہیں۔ مساوات 10.3 سے عدد c

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مرکز تا ماسکہ فاصلہ ہے۔

مثال 10.2: افقی اکبر محور
درج ذیل ترخیم

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{10.5}$$

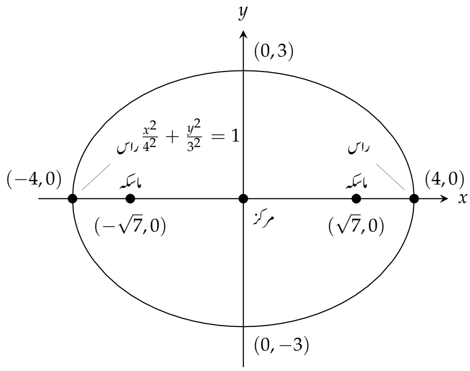
جس کو شکل 10.7 میں دکھایا گیا ہے کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{16} = 4 && \text{نصف اکبر محور}\\
b &= \sqrt{9} = 3 && \text{نصف اصغر محور}\\
c &= \sqrt{16-9} = \sqrt{7} && \text{ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ}\\
(\pm c, 0) &= (\pm 7, 0) && \text{ماسکے}\\
(\pm a, 0) &= (\pm 4, 0) && \text{راس}\\
&(0, 0) && \text{مرکز}
\end{aligned}$$

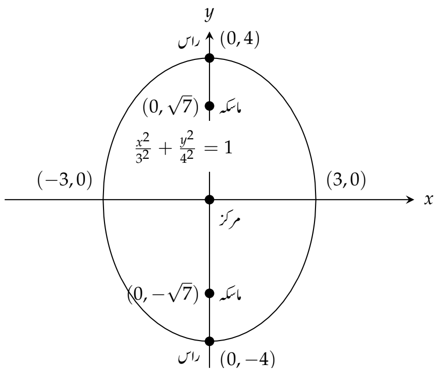
□

---

[11] major axis
[12] minor axis



شکل 10.7: اکبر محور افقی ہے۔ (مثال 10.2)



شکل 10.8: اکبر محور عمودی ہے۔ (مثال 10.3)

مثال 10.3: عمودی اکبر محور
مساوات 10.5 میں x اور y کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر درج ذیل ترخیم حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \tag{10.6}$$

جس کو شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$a=\sqrt{16}=4$	نصف اکبر محور
$b=\sqrt{9}=3$	نصف اصغر محور
$c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$	ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ
$(0,\pm c)=(0,\pm 7)$	ماسکے
$(0,\pm a)=(0,\pm 4)$	راس
$(0,0)$	مرکز

□

مساوات 10.5 اور مساوات 10.6 کو سمجھنے میں کبھی دشواری پیش نہیں آتی ہے۔ ہم محددی محور پر نقطہ قطع معلوم کر کے لمبی محور کو اکبر محور چنتے ہیں۔ مرکز ان صورتوں میں مبدا پر ہو گا اور ماسکہ اکبر محور پر پائے جائیں گے۔

مبدا پر مرکز والے ترخیم کے معیاری مساوات

x محور پر ماسکہ	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
ماسکے	$(\pm c, 0)$
راس	$(\pm a, 0)$

y محور پر ماسکہ	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b)$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
ماسکے	$(0, \pm c)$
راس	$(0, \pm a)$

دونوں صورتوں میں نصف اکبر محور a اور نصف اصغر محور b ہیں۔

قطع زائد

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے مستوی میں دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا فرق ایک مستقل ہو، ان تمام نقطوں کے سلسلہ کو قطع زائد[13] کہتے ہیں۔ یہ دو مقررہ نقطے قطع زائد کے ماسکہ کہلاتے ہیں۔

□

اگر ماسکے $F_1(-c, 0)$ اور $(F_2(c, 0))$ ہوں (شکل 10.9) اور مستقل فرق $2a$ ہو تب نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا جب درج ذیل مطمئن ہو۔

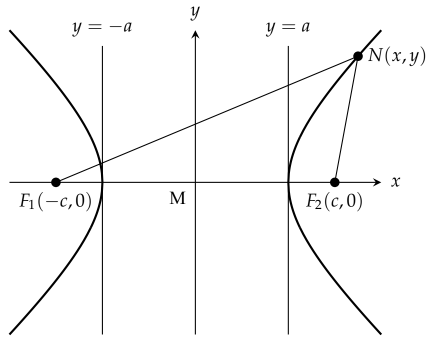
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{10.7}$$

اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذر کو دائیں ہاتھ منتقل کر کے دونوں ہاتھ کا مربع لے کر جذر کو ایک ہاتھ رکھ کر دوبارہ دونوں ہاتھ کا مربع لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

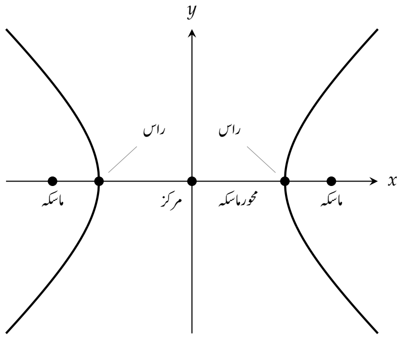
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{10.8}$$

---

[13] hyperbola



شکل 10.9: قطع زائد کے دائیں بازو کے لئے $NF_1 - NF_2 = 2a$ جبکہ بائیں بازو کے لئے $NF_2 - NF_1 = 2a$ ہو گا۔



شکل 10.10: قطع مکافی کے محور ماسکہ پر نقطے۔

اب تک یہ مساوات بالکل ترخیم کی مساوات کی طرح ہے۔ البتہ اب چونکہ تکون NF_1F_2 کے دو اضلاع کا فرق $2a$ ہے جو تیسرے ضلع $2c$ سے کم ہو گا لہٰذا $a^2 - c^2$ منفی قیمت ہے۔

ہم مساوات 10.8 کے حصول کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ N جو $0 < a < c$ کے لئے اس طرز کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو، مساوات 10.7 کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا اگر اس کے محدد مساوات 10.8 کو مطمئن کرتے ہوں۔

اگر ہم $c^2 - a^2$ کے مثبت جذر کو b سے ظاہر کریں،

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{10.9}$$

تب $a^2 - c^2 = -b^2$ ہو گا اور مساوات 10.8 درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.10}$$

قطع زائد کی مساوات 10.10 اور ترخیم کی مساوات 10.4 میں فرق منفی علامت کا اور درج ذیل نئے تعلق کا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{مساوات 10.9 سے حاصل کیا گیا}$$

ترخیم کی طرح قطع زائد بھی مبدا اور محددی محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ x محور کو نقطہ $(\pm a, 0)$ پر قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{مساوات 10.10 سے حاصل کیا گیا}$$

ہے لہٰذا یہاں مماس عمودی ہوں گے۔

تعریف: قطع زائد کے ماسکوں کے بیچ لکیر کو محور ماسکہ[14] کہتے ہیں جس کے وسطی نقطہ کو قطع مکافی کا مرکز[15] کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر محور ماسکہ اور قطع مکافی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں، انہیں راس[16] کہتے ہیں (شکل 10.10)۔

□

قطع زائد کے متقارب؛ ترسیم کا عمل

قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.11}$$

کے دو متقارب[17] درج ذیل لکیریں ہیں۔

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

متقارب کی مدد سے ہم قطع زائد کو جلدی ترسیم کر پاتے ہیں۔ متقارب کی مساوات حاصل کرنے کا آسان ترین طریقہ مساوات 10.11 میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 پر کر کے y کے لئے حل کرنا ہے:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{قطع زائد}} \implies \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{0 کی جگہ 1}} \implies \underbrace{y = \pm \frac{b}{a} x}_{\text{متقارب}}$$

[14] focal axis
[15] center
[16] vertices
[17] asymptotes

مرکز پر مبدا والے قطع زائد کی معیاری مساواتیں

محور x پر ماسکے ہیں	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c = \sqrt{a^2+b^2}$
ماسکے	$(\pm c, 0)$
راس	$(\pm a, 0)$
متقارب	$y = \pm \frac{b}{a}x$

محور y پر ماسکے ہیں	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c = \sqrt{a^2+b^2}$
ماسکے	$(0, \pm c)$
راس	$(0, \pm a)$
متقارب	$y = \pm \frac{a}{b}x$

دھیان رہے کہ پہلی صورت میں متقارب کی مساوات میں $\frac{b}{a}$ اور دوسری صورت میں $\frac{a}{b}$ ہیں۔

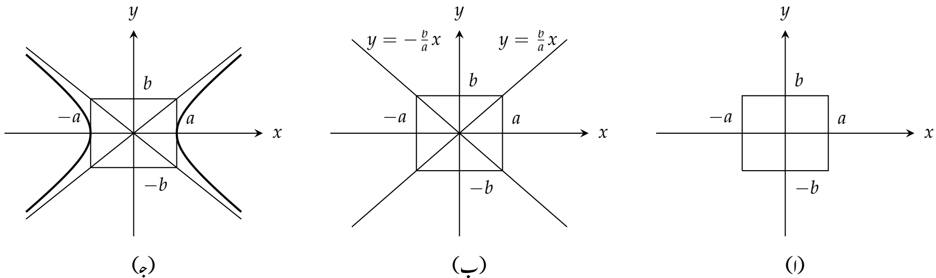
قطع زائد ترسیم کرنے کا عمل

قطع زائد $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ترسیم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں (شکل 10.11)۔

ا. نقاط $(\pm a, 0)$ اور $0, \pm b$ کو ترسیم کرتے ہوئے اس مستطیل کو مکمل کریں جن کے اضلاع میں یہ نقطے پائے جاتے ہوں۔

ب. مستطیل کے وتر کو بڑھا کر متقارب ترسیم کریں۔

ج. مستطیل اور متقارب کو راہ بر لیتے ہوئے قطع زائد ترسیم کریں۔



شکل 10.11: متقارب کی مدد سے قطع زائد کی ترسیم۔

مثال 10.4: محور x پر ماسکے
درج ذیل قطع زائد کی مساوات ہے (شکل 10.12)

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

جس میں $a^2=4$ اور $b^2=5$ ہیں (مساوات 10.10)۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

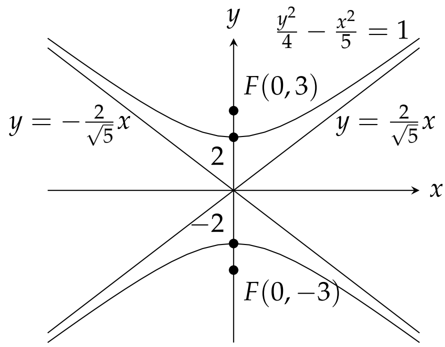
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$
ماسکے	$(\pm c,0)=(\pm 3,0)$
راس	$(\pm a,0)=(\pm 2,0)$
متقارب	$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

□

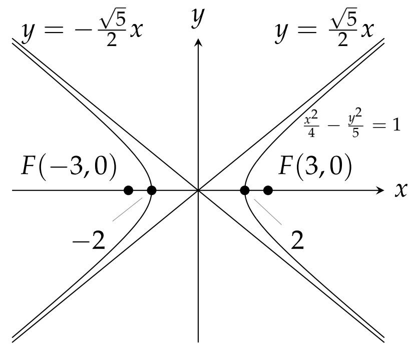
مثال 10.5: درج ذیل قطع زائد کو مثال 10.4 کے قطع زائد میں x اور y کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر حاصل کیا گیا ہے۔

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$$

اس قطع زائد کے راس عمودی محور پر پائے جائیں گے (شکل 10.13)۔ اب بھی $a^2=4$ اور $b^2=5$ ہوں گے۔یوں درج ذیل ہو



شکل 10.13: قطع زائد (مثال 10.5)



شکل 10.12: قطع زائد (مثال 10.4)

گا۔

مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+5} = 3$
ماسکے	$(0, \pm c) = (0, \pm 3)$
راس	$(0, \pm a) = (0, \pm 2)$
مرکز	$(0,0)$
متقارب	$y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$

□

عکسی خواص

قطع مکافی کا اہم ترین استعمال بطور شعاع اور ریڈیو امواج کا عاکس ہے۔ قطع مکافی کے ماسکہ سے خارج شعاع، قطع مکافی کے محور کے متوازی منعکس ہوتا ہے۔ یہ خاصیت ہاتھ بتی اور گاڑیوں کی اگلی بتیوں میں بروئے کار لایا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ خرد امواج نشر کرنے کے لئے بھی قطع مکافی اینٹینا استعمال کیا جاتا ہے جو نقطہ منبع سے خارج برقناطیسی امواج کو ایک محدود شعاع کی صورت میں خارج کرتا ہے۔ اس کے برعکس قطع مکافی عاکس کے محور کے متوازی آمد برقناطیسی امواج عاکس کے ماسکہ پر مرکوز کیے جاتے ہیں۔اس خاصیت کی بنا ٹیلی وژن کا ڈش اینٹینا یا ریڈیو دور بین کمزور اشارات کو اکٹھے کر کے زیادہ طاقتور اشارہ حاصل کرتا ہے۔ اسی طرح سورج کی روشنی کو ایک نقطہ پر مرتکز کیا جا سکتا ہے۔

ایک ترخیم کو اس کے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جا سکتا ہے جو ترخیمی سطح[18] کہلاتا ہے۔اس کی اندرونی سطح پر چاندی کی تہہ لگا کر آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔ ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر منعکس ہو گا۔ ترخیمی سطح اسی طرح آواز کو بھی ایک ماسکہ سے دوسرے

[18] ellipsoid

ماسکہ منتقل کرتا ہے۔ اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جا سکتا ہے جس میں ایک ماسکہ پر بیٹھا شخص دوسرے ماسکہ پر بیٹھے شخص کے ساتھ سرگوشی سے باتیں کر سکتا ہے۔ کمرہ سرگوشی میں موجود باقی لوگ ان کی باتیں سننے سے قاصر ہوں گے۔ ہوائی جہازوں کی کارکردگی پر ہوائی سرنگ میں غور کیا جاتا ہے۔ جہاز کے شور پر غور کرتے ہوئے نقطہ غور کو ترخیمی سطح کے ایک ماسکہ پر رکھا جاتا ہے جبکہ مائکروفون کو اس کی دوسرے ماسکہ پر رکھا جاتا ہے۔ دیگر نقطوں سے پیدا شور کے اثر کو یوں بہت کم کرنا ممکن ہوتا ہے۔

قطع زائد آئینہ کے ایک ماسکہ پر آمد شعاع کو آئینہ دوسرے ماسکہ پر بھیجتا ہے۔ قطع مکافی سطح، ترخیمی سطح اور قطع مکافی سطحوں کے خواص کو استعمال کرتے ہوئے جدید دور بین تیار کیے جاتے ہیں۔

سوالات

ترسیم کی پہچان

سوال 1 تا سوال 4 میں دی گئی قطع مکافی کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x$$

اس کے بعد قطع مکافی کے ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔

سوال 1: شکل 10.14-ا

جواب: $y^2 = 8x$، ماسکہ $F(2,0)$ اور ناظمہ $x = -2$

سوال 2: شکل 10.14-ب

سوال 3: شکل 10.14-ج

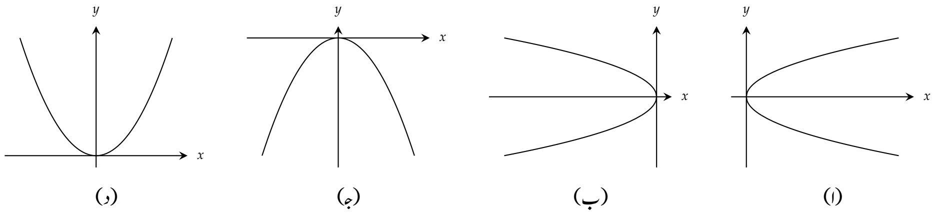
جواب: $x^2 = -6y$، ماسکہ $F(0, -\frac{3}{2})$ اور ناظمہ $y = \frac{3}{2}$

سوال 4: شکل 10.14-د

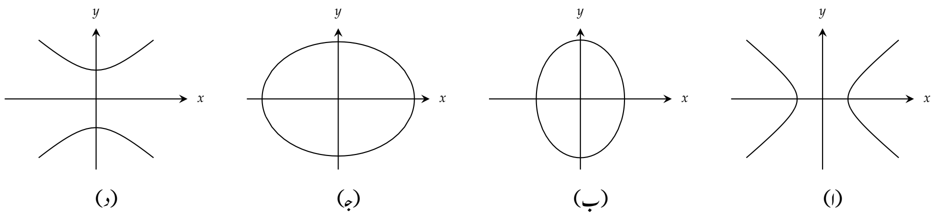
سوال 5 تا سوال 8 میں دیے گئے مخروط کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

دیے گئے مخروط کا ماسکہ اور راس تلاش کریں۔ اگر قطع زائد دیا گیا ہو تب اس کے متقارب بھی دریافت کریں۔



شکل 10.14: ترسیم برائے سوال 1 تا سوال 4



شکل 10.15: ترسیمات برائے سوال 5 تا سوال 8

سوال 5: ترسیم شکل 10.15-ا میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ ، ماسکہ $F(\pm\sqrt{13},0)$ ، راس $V(\pm 2,0)$ اور متقارب $y=\pm\frac{3}{2}x$

سوال 6: ترسیم شکل 10.15-ب میں دیا گیا ہے۔

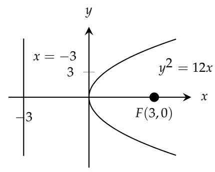
سوال 7: ترسیم شکل 10.15-ج میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ، ماسکہ $F(\pm 1,0)$ ، راس $V(\pm\sqrt{2},0)$

سوال 8: ترسیم شکل 10.15-د میں دیا گیا ہے۔

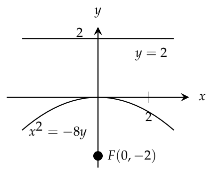
قطع مکافی

سوال 9 تا سوال 16 میں دیے گئے قطع مکافی کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرنے کے بعد اس کو ترسیم کریں۔ ماسکہ اور ناظمہ کو بھی ترسیم میں شامل کریں۔

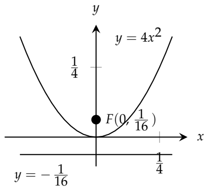
سوال 9: $y^2=12x$
جواب: شکل 10.16



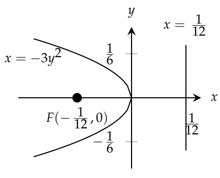
شکل 10.16



شکل 10.17



شکل 10.18



شکل 10.19

سوال 10: $x^2 = 6y$

سوال 11: $x^2 = -8y$
جواب: شکل 10.17

سوال 12: $y^2 = -2x$

سوال 13: $y = 4x^2$
جواب: شکل 10.18

سوال 14: $y = -8x^2$

سوال 15: $x = -3y^2$
جواب: شکل 10.19

سوال 16: $x = 2y^2$

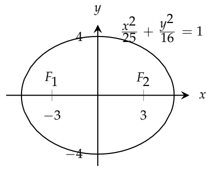
ترخیم
سوال 17 تا سوال 24 میں دیے گئے ترخیم کی مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر ترسیم کریں۔ ترسیم پر ماسکے دکھائیں۔

سوال 17: $16x^2 + 25y^2 = 400$
جواب: شکل 10.20

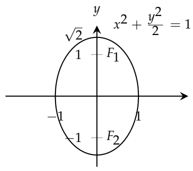
سوال 18: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال 19: $2x^2 + y^2 = 2$
جواب: شکل 10.21

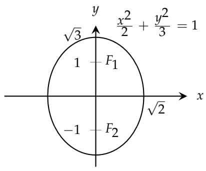
سوال 20: $2x^2 + y^2 = 4$



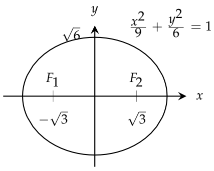
شکل 10.20



شکل 10.21



شکل 10.22



شکل 10.23

سوال 21: $3x^2+2y^2=6$
جواب: شکل 10.22

سوال 22: $9x^2+10y^2=90$

سوال 23: $6x^2+9y^2=54$
جواب: شکل 10.23

سوال 24: $169x^2+25y^2=4225$

سوال 25 اور سوال 26 میں xy مستوی میں پائے جانے والے ترخیم کے ماسکہ اور راس دیے گئے ہیں۔ ترخیم کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ ترخیم کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال 25: ماسکے $(\pm\sqrt{2},0)$ اور راس $(\pm 2,0)$
جواب: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

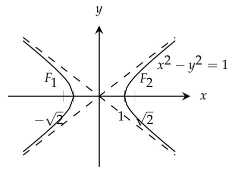
سوال 26: ماسکے $(0,\pm 4)$ اور راس $(0,\pm 5)$

قطع زائد

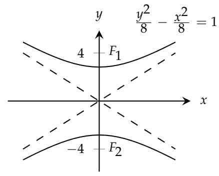
سوال 27 تا سوال 34 میں قطع زائد کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ مساوات کو معیاری روپ میں لکھیں اور قطع زائد کا متقارب دریافت کریں۔ قطع زائد کا خاکہ کھینچ کر متقارب اور ماسکہ بھی دکھائیں۔

سوال 27: $x^2-y^2=1$
جواب: متقارب $y=\pm x$ اور شکل 10.24

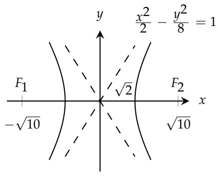
سوال 28: $9x^2-16y^2=144$



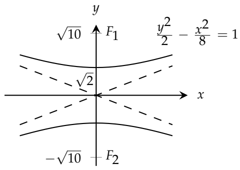
شکل 10.24



شکل 10.25



شکل 10.26



شکل 10.27

سوال 29: $y^2 - x^2 = 8$
جواب: متقارب $y = \pm x$ اور شکل 10.25

سوال 30: $y^2 - x^2 = 4$

سوال 31: $8x^2 - 2y^2 = 16$
جواب: متقارب $y = \pm 2x$ اور شکل 10.26

سوال 32: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال 33: $8y^2 - 2x^2 = 16$
جواب: متقارب $y = \pm \frac{x}{2}$ اور شکل 10.27

سوال 34: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال 35 تا سوال 38 میں xy مستوی پر پائے جانے والے قطع زائد کے ماسکہ، راس اور متقارب کی معلومات دی گئی ہے۔ قطع زائد کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ قطع زائد کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

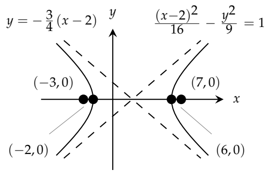
سوال 35: ماسکے $(0, \pm\sqrt{2})$ اور متقارب $y = \pm x$
جواب: $y^2 - x^2 = 1$

سوال 36: ماسکے $(\pm 2, 0)$ اور متقارب $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x$

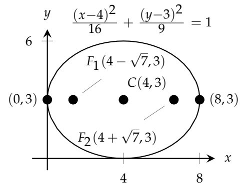
سوال 37: راس $(\pm 3, 0)$ اور متقارب $y = \pm \frac{4}{3} x$
جواب: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

سوال 38: راس $(0, \pm 2)$ اور متقارب $y = \pm \frac{1}{2} x$

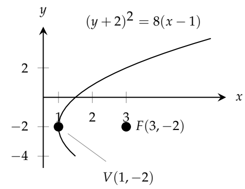
مخروطی حصوں کا انتقال



شکل 10.30



شکل 10.29



شکل 10.28

سوال 39: قطع مکافی $y^2 = 8x$ کو 2 اکائیاں نیچے اور 1 اکائی دائیں منتقل کر کے قطع مکافی $(y+2)^2 = 8(x-1)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکافی کے راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

جواب: (الف) راس $(1,-2)$ ، ماسکہ $(3,-2)$ ، ناظمہ $x = -1$ ؛ (ب) شکل 10.28

سوال 40: قطع مکافی $x^2 = -4y$ کو 1 اکائی بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے قطع مکافی $(x+1)^2 = -4(y-3)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

سوال 41: ترخیم $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ کو 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

جواب: (الف) ماسکے $(4 \pm \sqrt{7}, 3)$ ، راس $(8,3)$ اور $(0,3)$ ، مرکز $(4,3)$ ؛ (ب) شکل 10.29

سوال 42: ترخیم $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ کو 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 43: قطع زائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کر کے قطع زائد $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نئے مرکز، ماسکے، راس اور متقارب ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

جواب: (الف) مرکز $(2,0)$ ، ماسکے $(7,0)$ اور $(-3,0)$ ، راس $(6,0)$ اور $(-2,0)$ ، متقارب $y = \pm\frac{3}{4}(x-2)$ ؛ (ب) شکل 10.30

سوال 44: قطع زائد $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتے ہوئے قطع زائد $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نیا مرکز، ماسکے اور متقارب ترسیم کر کے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال 45 تا سوال 48 میں قطع مکافی کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع مکافی کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ معلوم کریں۔

سوال 45: $y^2 = 4x$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں نیچے۔
جواب: $(y+3)^2 = 4(x+2)$ ، راس $V(-2,-3)$ ، ماسکہ $F(-1,-3)$ ، ناظمہ $x = -3$

سوال 46: $y^2 = -12x$ ، 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال 47: $x^2 = 8y$ ، 1 اکائی دائیں اور 7 اکائیاں نیچے۔
جواب: $(x-1)^2 = 8(y+7)$ ، راس $V(1,-7)$ ، ماسکہ $F(1,-5)$ ، ناظمہ $y = -9$

سوال 48: $x^2 = 6y$ ، 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے۔

سوال 49 تا سوال 52 میں ترخیم کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے ترخیم کی مساوات تلاش کر کے نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز معلوم کریں۔

سوال 49: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 1 اکائی نیچے۔
جواب: $\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ ، $F(-2, \pm\sqrt{3}-1)$ ، $V(-2, \pm 3 - 1)$ ، $C(-2,-1)$

سوال 50: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ، 3 اکائیاں دائیں اور 4 اکائیاں اوپر۔

سوال 51: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ، 2 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔
جواب: $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$ ، $F(3,3)$ اور $F(1,3)$ ، $V(\pm\sqrt{3}+2, 3)$ ، $C(2,3)$

سوال 52: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ، 43 اکائیاں بائیں اور 5 اکائیاں نیچے۔

سوال 53 تا سوال 56 میں قطع زائد کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع زائد کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب معلوم کریں۔

سوال 53: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ دائیں 2 اکائیاں اور اوپر 2 اکائیاں۔
جواب: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ ، $C(2,2)$ ، $F(5,2)$ اور $F(-1,2)$ ، $V(4,2)$ اور $V(0,2)$ ،
متقارب $y - 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$

سوال 54: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ بائیں 5 اکائیاں اور نیچے 1 اکائی۔

سوال 55: $y^2-x^2=1$ بائیں 1 اکائی اور نیچے 1 اکائی۔
جواب: $(y+1)^2-(x+1)^2=1$ ، $C(-1,-1)$ ، $F(-1,\sqrt{2}-1)$ اور $F(-1,-\sqrt{2}-1)$ ، $V(-1,0)$ ، $V(-1,-2)$ ، متقارب $y+1=\pm(x+1)$

سوال 56: $\frac{y^2}{3}-x^2=1$ دائیں 1 اکائی اور اوپر 3 اکائیاں۔

سوال 57 تا سوال 68 میں دیے گئے مخروط حصوں کا (جیسا مناسب ہو) مرکز، ماسکے، راس، متقارب اور رداس دریافت کریں۔

سوال 57: $x^2+4x+y^2=12$
جواب: $C(-2,0)$ ، $a=4$

سوال 58: $2x^2+2y^2-28x+12y+144$

سوال 59: $x^2+2x+4y-3=0$
جواب: $V(-1,1)$ ، $F(-1,0)$

سوال 60: $y^2-4y-8x-12=0$

سوال 61: $x^2+5y^2+4x=1$
جواب: ترخیم $\frac{(x+2)^2}{5}+y^2=1$ ، $C(-2,0)$ ، $F(0,0)$ اور $F(-4,0)$ ، $V(\sqrt{5}-2,0)$ اور $V(-\sqrt{5}-2,0)$

سوال 62: $9x^2+6y^2+36y=0$

سوال 63: $x^2+2y^2-2x-4y=-1$
جواب: ترخیم $\frac{(x-1)^2}{5}+(y-1)^2=1$ ، $C(1,1)$ ، $F(2,1)$ اور $F(0,1)$ ، $V(\sqrt{2}+1,1)$ اور $V(-\sqrt{2}+1,1)$

سوال 64: $4x^2+y^2+8x-2y=-1$

سوال 65: $x^2-y^2-2x+4y=4$
جواب: قطع زائد $(x-1)^2-(y-2)^2=1$ ، $C(1,2)$ ، $F(1+\sqrt{2},2)$ اور $F(1-\sqrt{2},2)$ ، $V(2,2)$ اور $V(0,2)$ ، متقارب $y-2=\pm(x-1)$

سوال 66: $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

سوال 67: $2x^2 - y^2 + 6y = 3$
جواب: قطع زائد، $\frac{(y-3)^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$ ، $C(0,3)$ ، $F(0,6)$ اور $F(0,0)$ ، $V(0, \sqrt{6}+3)$ اور $V(0, -\sqrt{6}+3)$ ، متقارب $y = \sqrt{2}x + 3$ اور $y = -\sqrt{2}x + 3$

سوال 68: $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

عدم مساوات

سوال 69 تا سوال 74 میں ایک خطہ کو مطمئن کرنے والی عدم مساوات یا عدم مساوات کی جوڑی دی گئی ہے۔ xy مستوی میں اس خطہ کو ترسیم کریں۔

سوال 69: $9x^2 + 16y^2 \leq 144$
جواب: ترسیم شکل 10.31 میں دی گئی ہے۔

سوال 70: $4x^2 + y^2 \leq 4$ اور $x^2 + y^2 \geq 1$

سوال 71: $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ اور $x^2 + 4y^2 \geq 4$
جواب: ترسیم شکل 10.32 میں دی گئی ہے۔

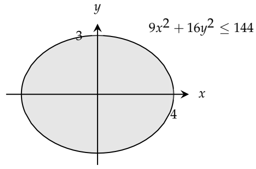
سوال 72: $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \leq 0$

سوال 73: $4y^2 - x^2 \geq 4$
جواب: ترسیم شکل 10.33 میں دی گئی ہے۔

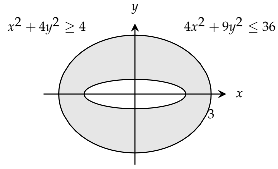
سوال 74: $\left|x^2 - y^2\right| \leq 1$

نظریہ اور مثالیں

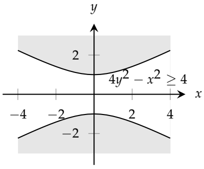
سوال 75: قطع مکافی ٹھوس جسم کے حجم کا کلیہ آرشمیدسی
قطع مکافی $y = \frac{4h}{b^2}x^2$ اور لکیر $y = h$ میں گھیرے ہوئے خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس جسم کا حجم مطابقتی مخروط کے حجم کا $\frac{3}{2}$ گنّا ہو گا (شکل 10.34)۔



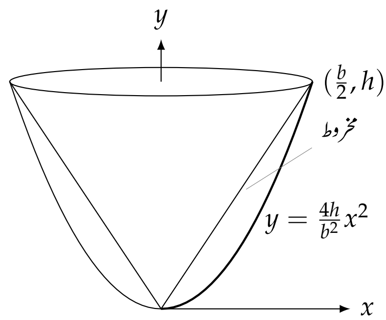
شکل 10.31



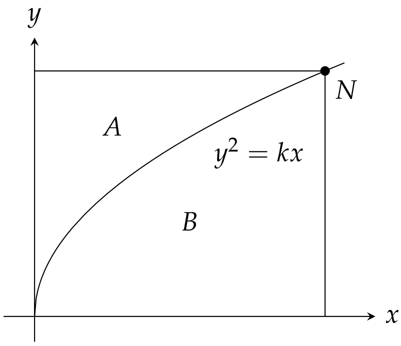
شکل 10.32



شکل 10.33



شکل 10.34: جسم طواف برائے سوال 75



شکل 10.35: خطے برائے سوال 81

سوال 76: معلق پل کی رسیاں قطع مکافی کی صورت میں لٹکی ہوتی ہیں۔
ایک معلق پل کی کمیت m کلو گرام فی میٹر ہے۔ اس پل کو رسیوں سے لٹکایا گیا ہے۔ اگر مبدا پر رسی کا افقی تناو H ہو تب رسی کی منحنی درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{H}x$$

اس تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ رسی کی منحنی کی مساوات ایک قطع مکافی ہے۔ $x = 0$ پر $y = 0$ ابتدائی معلومات ہے۔

سوال 77: نقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(2,2)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔
جواب: $3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$

سوال 78: نقاط $(2,3)$ ، $(3,2)$ اور $(-4,3)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 79: ایک دائرہ جس کا مرکز $(-2,1)$ پر ہے نقطہ $(1,3)$ سے گزرتا ہے۔ کیا نقطہ $(1.1, 2.8)$ اس دائرے پر، اس کے اندر یا اس کے باہر پایا جاتا ہے؟
جواب: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$ نقطہ دائرے کے اندر ہے۔

سوال 80: جہاں دائرہ $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ محددی محوروں کو قطع کرتا ہے وہاں اس دائرے کے مماس معلوم کریں۔

سوال 81: قطع مکافی $y^2=kx, k>0$ پر نقطہ N سے محددی محور کے متوازی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ ان لکیروں اور محددی محوروں کے کے بیچ مستطیل خطہ کو قطع مکافی دو حصوں A اور B میں تقسیم کرتا ہے (شکل 10.35)۔ (الف) دکھائیں کہ ان خطوں کو y محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت $4:1$ ہے۔ (ب) ان خطوں کو x محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت کیا ہو گی؟
جواب: (ب) $1:1$

سوال 82: دکھائیں کہ لکیر $x=-p$ پر کسی بھی نقطہ سے منحنی $y^2=4px$ پر دو مماس، آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال 83: ترخیم $x^2+4y^2=4$ میں محصور زیادہ سے زیادہ رقبے کے مستطیل کے اضلاع معلوم کریں۔ مستطیل کے اضلاع محددی محور کے متوازی ہیں۔
جواب: لمبائی $2\sqrt{2}$، چوڑائی $\sqrt{2}$، رقبہ 4

سوال 84: ترخیم $9x^2+4y^2=36$ کو (الف) x محور، (ب) y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم معلوم کریں۔

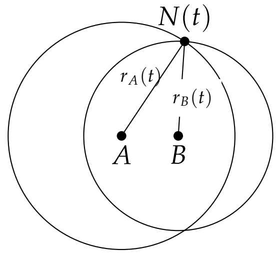
سوال 85: ربع اول میں x محور، لکیر $x=4$ اور قطع زائد $9x^2-4y^2=36$ کے بیچ تکونی خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: 24π

سوال 86: ایک خطہ کا بایاں سرحد محور y، دایاں سرحد قطع زائد $x^2-y^2=1$ جبکہ اس کا نچلا اور بالائی سرحد لکیر $y=\pm 3$ ہیں۔ اس خطہ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

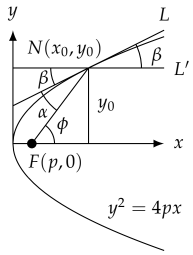
سوال 87: محور x کے بالائی اور ترخیم $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ کے نیچے خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔
جواب: $(0, \frac{16}{3\pi})$

سوال 88: قطع زائد $y^2-x^2=1$ کے بالائی شاخ $y=\sqrt{x^2+1}, 0\le x\le\sqrt{2}$ کو x محور کر گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 89: پانی کی سطح کو پہلے A اور بعد میں B پر چھو کر شکل 10.36 میں دکھائے گئے امواج پیدا کئے گئے۔ جیسے جیسے یہ امواج پھیلتے ہیں، ان کا نقطہ قطع ایک منحنی بناتا ہے جو قطع زائد کی طرح معلوم ہوتا ہے۔ کیا ایسا حقیقتاً ہو گا؟ یہ جاننے کے کئے ہم A اور B پر مرکز دائروں کو امواج کا نمونہ لے سکتے ہیں۔



شکل 10.36: امواج برائے سوال 89



شکل 10.37: قطع مکافی میں انعکاس (سوال 90)

لمحہ t پر نقطہ N مرکز A سے $r_A(t)$ اور B سے $r_B(t)$ فاصلہ پر ہو گا۔ چونکہ دائروں کے رداس ایک مستقل رفتار (موج کی رفتار) سے بڑھتے ہیں لہٰذا $\frac{\mathrm{d}r_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_B}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔ اس سے اخذ کریں کہ $r_A - r_B$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا N اس قطع زائد پر پایا جائے گا جس کے ماسکہ A اور B ہیں۔

سوال 90: قطع مکافی کے خواص انعکاس
قطع مکافی $y^2 = 4px$ پر عمومی نقطہ $N(x_0, y_0)$ کو شکل 10.37 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر لکیر L اس قطع مکافی کا مماس ہے۔ قطع مکافی کا ماسکہ $F(p, 0)$ ہے۔ نقطہ N سے دائیں منعکس شعاع L'، محور x کے متوازی ہے۔ ہم دکھاتے ہیں کہ F سے خارج، N پر پہنچتا شعاع انعکاس کے بعد L' کا ہم مکان ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر ہم دکھاتے ہیں کہ $\beta = \alpha$ ہو گا۔ اس مساوات کی تصدیق درج ذیل اقدام کے ذریعہ کریں۔

ا. دکھائیں کہ $\tan\beta = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0 - p}$ ہو گا۔

ج. درج ذیل مماثل

$$\tan\alpha = \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi\tan\beta}$$

استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\tan\alpha = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔ چونکہ α اور β دونوں زاویہ حادہ ہیں لہٰذا $\tan\beta = \tan\alpha$ یعنی $\beta = \alpha$ ہو گا۔

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم