

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ڈورنقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
686	6.6	سطح طواف کا رقبہ
695	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
699	1	ضمیمہ اول
701	ب	ضمیمہ دوم

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

6.6 سطح طواف کا رقبہ

بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسی گھماتے ہوئے رسی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو سطح طواف⁹ کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسی کی لمبائی اور رسی کے ہر حصے کی جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کا رقبہ اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔ زیادہ پیچیدہ سطحوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ کو x محور کے گرد گھما کر پیدا کر سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل میں نمائندہ حصہ PQ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

توس PQ محور x کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے۔ محور x اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو مخروط مقطوع¹⁰ کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبہ کا تخمین ہو گا۔

مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ 2π ضرب دونوں سروں کے رداس کا اوسط ضرب ترچھاقد کے برابر ہو گا۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

قطع PQ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کی پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

$$(6.14) \quad \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے مساوات 6.14 میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

surface of revolution⁹
frustum¹⁰

یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات 6.14 کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تقاضے کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔ لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفرقات کے مسئلہ اوسط قیمت کی طرف دیکھتے ہیں۔

اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطع PQ کے متوازی ہو گا۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

$$\Delta y_k = f'(c_k) \Delta x_k$$

مساوات 6.14 میں درج بالا Δy_k پر کرتے ہیں۔

$$(6.15) \quad \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$$

اب یہاں ایک بری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بری خبر یہ ہے کہ مساوات 6.15 میں x_{k-1} ، x_k اور c_k ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک دوسرے جیسا کسی صورت نہیں بنایا جاسکتا ہے لہذا مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔ اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا مسئلہ بس کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل کو مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

جو ہم چاہتے ہیں۔ یوں a تا b تقاضے f کی ترسیم کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی شکل کو لیتے ہیں۔

تعریف: محور x کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[a, b]$ پر تقاضے $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تقاضے $y = f(x)$ کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(6.16) \quad S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

□

مساوات 6.16 میں جزر وہی ہے جو پیدا کار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیہ میں پایا جاتا ہے۔

مثال 6.21: محور x کے گرد منحنی $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a = 1, b = 2, y = 2\sqrt{x}, \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

مساوات 6.16 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1} dx \\ &= 4\pi \cdot \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

□

محور y کے گرد سطح طواف

محور y کے گرد سطح طواف کے لئے ہم مساوات 6.16 میں x اور y کی جگہیں تبدیل کرتے ہیں۔

محور y کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \geq 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(6.17) \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

مثال 6.22: لکیری قطعہ $x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کا رقبہ پہلو تلاش کریں۔

حل: اس رقبہ کو جیومیٹری سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0, d = 1, x = 1 - y, \frac{dx}{dy} = -1$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

مسادات 6.17 سے اس رقبہ کا حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2} dy \\ &= 2\pi\sqrt{2} \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

دونوں نتائج ایک جیسے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔

مختصر تفریقی روپ

درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

کو عموماً تفریقی لمبائی قوس $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے:

$$S = \int_a^b 2\pi y ds \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x ds$$

بایاں مساوات میں x محور سے قطع ds تک فاصلہ y ہے۔ دایاں مساوات میں y محور سے قطع ds کا فاصلہ x ہے۔ ان دونوں کلیوں کو

$$S = \int 2\pi (رداس) (چوڑائی پٹی) = \int 2\pi \rho ds$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں رکن لمبائی قوس ds تک محور طواف سے فاصلہ ρ ہے۔

مختصر تفریقی روپ

$$S = \int 2\pi \rho ds$$

کسی مخصوص مسئلے میں آپ رکن لمبائی قوس ds اور رداس ρ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر مکمل کے حدود بھی اسی متغیر کی روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال 6.23: منحنی $y = x^3, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم مختصر تفریقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi \rho ds \\ &= \int 2\pi y ds \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ہم نے یہاں فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا ds کو dx یا dy کی روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات $y = x^3$ سے dy کو dx کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3, dy = 3x^2 dx, \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2 dx)^2} = \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے مکمل کا متغیر x ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \\
 &= \int_0^{1/2} 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{36} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (1 + 9x^4)^{3/2} \Big|_0^{1/2} \\
 &= \frac{\pi}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] \\
 &= \frac{\pi}{27} \left[\left(\frac{25}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] \\
 &= \frac{\pi}{27} \left(\frac{125}{64} - 1 \right) \\
 &= \frac{61\pi}{1728}
 \end{aligned}$$

□

سوالات

سطحی رقبہ کے مکمل سوال 1 تا سوال 8 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا مکمل لکھیں۔

ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ کو بھی ترسیم کریں۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس مکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 1: محور x ، $y = \tan x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ؛
جواب: (ا) $2\pi \int_0^{\pi/4} \tan x \sqrt{1 + \sec^4 x} dx$ ، (ب) ≈ 3.84

سوال 2: محور x ، $y = x^2$ ، $0 \leq x \leq 2$ ؛

سوال 3: محور y ، $xy = 1$ ، $1 \leq y \leq 2$ ؛
جواب: (ا) $2\pi \int_1^2 \frac{1}{y} \sqrt{1 + y^{-4}} dy$ ، (ب) ≈ 5.02

سوال 4: محور y ، $x = \sin y$ ، $0 \leq y \leq \pi$ ؛

سوال 5: محور x ، نقطہ $(1, 4)$ سے $(4, 1)$ تک $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ ،
جواب: (i) $\int_0^4 (3 - \sqrt{x})^2 \sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2} dx \approx 63.37$ (ج)

سوال 6: محور y ، $y + 2\sqrt{y} = x$ ، $1 \leq y \leq 2$ ؛

سوال 7: محور y ، $x = \int_0^y \tan t dt$ ، $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ ؛
جواب: (i) $\int_0^{\pi/3} (\int_0^y \tan t dt) \sec y dy \approx 2.08$ (ج)

سوال 8: محور x ، $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$ ، $1 \leq x \leq \sqrt{5}$ ؛

سطحی رقبہ کا حصول

سوال 9: لکیری قطع $y = \frac{x}{2}$ ، $0 \leq x \leq 4$ کو محور x کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (محیط قاعدہ) (ترچھاوند)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $4\pi\sqrt{5}$

سوال 10: لکیری قطع $y = \frac{x}{2}$ ، $0 \leq x \leq 4$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 11: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ، $1 \leq x \leq 3$ کو محور x کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع $= \pi (r_1 + r_2)$ (ترچھاوند)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $3\pi\sqrt{5}$

سوال 12: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ، $1 \leq x \leq 3$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع $= \pi (r_1 + r_2)$ (ترچھاوند)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال 13: محور x ، $y = \frac{x^3}{9}$ ، $0 \leq x \leq 2$ ؛
جواب: $\frac{98\pi}{81}$

سوال 14: محور x ، $y = \sqrt{x}$ ، $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{15}{4}$ ؛

سوال 15: محور x پر $y = \sqrt{2x - x^2}$, $0.5 \leq x \leq 1.5$,
جواب: 2π

سوال 16: محور x پر $y = \sqrt{x+1}$, $1 \leq x \leq 5$,

سوال 17: محور y پر $x = \frac{y^3}{3}$, $0 \leq y \leq 1$,
جواب: $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

سوال 18: محور y پر $x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}$, $1 \leq y \leq 3$,

سوال 19: محور y پر $x = 2\sqrt{4-y}$, $0 \leq y \leq \frac{15}{4}$,
جواب: $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

سوال 20: محور y پر $x = \sqrt{2y-1}$, $\frac{5}{8} \leq y \leq 1$,

سوال 21: محور x پر $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$, $1 \leq y \leq 2$, (اشارہ مکمل میں $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ کو
کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi y ds$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)
جواب: $\frac{253\pi}{20}$

سوال 22: محور y پر $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, (اشارہ مکمل میں $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$
کو dx کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi x ds$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

سوال 23: نئی تعریف کی پرکھ
تفاعل x کو $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ کے گرد گھمانے سے کردی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات
6.16 سے بھی رداس a کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24: نئی تعریف کی پرکھ
لکیری قطع h کو $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$ کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$
ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد h اور اس کے قاعدہ کا رداس r ہے لہذا اس کے ترچھا قد $\sqrt{r^2 + h^2}$ ہو گا۔ مکمل سے مخروط کے پہلو کا
رقبہ دریافت کر کے اس کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 25: (i) منحنی $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف
کے رقبہ کا محتمل لکھیں جس کو حل کرنا بعد میں سکھایا جائے گا۔ (ب) اس سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔
جواب: (i) $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$, (ب) ≈ 14.4236

سوال 26: ستارہ نما کا سطحی رقبہ $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ کا وہ حصہ جو x محور سے اوپر پایا جاتا ہے کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں منحنی کے حصہ $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$ کو x محور کے گرد گھما کر نتیجہ کو دیکھنا کریں۔)

سوال 27: رنگ ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی 0.5 mm موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لئے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔
جواب: 452.4 L

سوال 28: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروڑی ڈبل روٹی کے ایک جتنی موٹے ٹکڑوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور x پر وقفہ h کے اوپر نصف دائرے کا قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو x محور کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبہ کی قیمت h کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ (کرارا رقبہ کی قیمت h پر منحصر ہوگی۔)

سوال 29: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ h ہے رداس R کے کروڑی سطح سے ایک پٹی کاٹتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہوگا۔

سوال 30: موسیقیاتی ریڈار کو شکل میں دکھائے گئے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہوگا؟ (قاعدہ کو شامل نہ کریں۔)

سوال 31: محور طواف کو قطع کرنے والے منحنیات سے حاصل سطح طواف وقفہ $[a, b]$ پر تقابل f کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات 6.16 اخذ کی گئی۔ جہاں تقابل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات 6.16 کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$(6.18) \quad S = \int 2\pi \rho \, ds = \int 2\pi |f(x)| \, ds$$

تقابل $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرا مخروط کا سطحی رقبہ مساوات 6.18 استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔
جواب: $5\sqrt{2}\pi$

سوال 32: قوس $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات 6.18 میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہوگا؟

اعدادی تکمیل سوال 33 تا سوال 33 میں محور x کے گرد دیے گئے منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گے۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درجی تک معلوم کریں۔

سوال 33: $y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$
جواب: 14.4

سوال 34: $y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2$

سوال 35: $y = x + \sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$
جواب: 54.9

سوال 36: $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 6$

سوال 37: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ
فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں اور k ویں ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کے وسطی نقطہ $m_k = (\frac{x_{k-1} + x_k}{2})$ پر منحنی کی مماس لکیر بنائیں۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ k ویں ذیلی وقفہ میں مماسی قطع کی لمبائی $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k) \Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطع کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k) \sqrt{1 + (f'(m_k))^2} \Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ کو محور x گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (k \text{ ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو}) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

6.7 معیار اثر اور مرکز کیت

بہت سارے ساخت اور میکانی نظام کا رویہ ایسا ہوتا ہے جیسا ان کی کیت ایک نقطہ میں سمجھی ہو جس کو مرکز کیت کہتے ہیں۔ اس نقطہ کا مقام جاننا اہم ہے جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس باب میں یک بعدی اور دو بعدی چیزوں پر توجہ دی جائے گی۔ تین بعدی چیزوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

لکیر پر کیت

ہم اپنا ریاضی نمونہ بتدریج تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی منزل میں ہم محور x جس کا مبدا اس کا چول ہو، پر کیت m_1 ، m_2 اور m_3 تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دار و مدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر منحصر ہے۔

ہر کیت m_k پر نیچے رخ قوت $m_k g$ عمل کرتا ہے جہاں g ثقلی اسراع ہے۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو قوت مروڑ¹¹ کہتے ہیں۔ قوت $m_k g$ کو مبدا سے فاصلہ x_k سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے جبکہ مبدا سے دائیں جانب کیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام گھومنے کے رجحان کا ناپ ہے۔ اس مجموعہ کو نظام کی قوت مروڑ¹² کہتے ہیں۔

$$(6.19) \quad \text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں g اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے جبکہ عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ نظام کی خاصیت ہے جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ کو مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر کہتے ہیں جو انفرادی کیت کے معیار اثر $m_1 x_1$ ، $m_2 x_2$ اور $m_3 x_3$ کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \sum m_k x_k = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ \bar{x} پر رکھنے سے نظام کا قوت مروڑ صفر ہو گا۔

اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے ہر کیت کا قوت مروڑ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (\text{نیچے رخ قوت}) (\bar{x} \text{ سے } m_k \text{ کا فاصلہ}) &= \bar{x} \text{ کے لحاظ سے } m_k \text{ کا معیار اثر} \\ &= (x_k - \bar{x}) m_k g \end{aligned}$$

torque¹¹
system torque¹²

ان معیار اثر کے مجموعہ کو صفر کے برابر پر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم \bar{x} کے لئے حل کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} \sum (x_k - \bar{x})m_k g &= 0 && \text{معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے} \\ g \sum (x_k - \bar{x})m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب} \\ \sum (m_k x_k - \bar{x}m_k) &= 0 && \text{g سے تقسیم اور } m_k \text{ پھیلا یا گیا ہے} \\ \sum m_k x_k - \sum \bar{x}m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ فرق} \\ \sum m_k x_k &= \bar{x} \sum m_k && \text{مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی} \\ \bar{x} &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} && \bar{x} \text{ کے لئے حل} \end{aligned}$$

یہ آخری مساوات کہتی ہے کہ \bar{x} معلوم کرنے کے لئے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کیت سے تقسیم کریں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کیت}}$$

نقطہ \bar{x} کو نظام کا مرکز کمیت¹³ کہتے ہیں۔

تار اور پتلے سلاخ

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

