# احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 6.6 سطح طواف کا رقبہ

بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسی گھماتے ہوئے رسی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو سطح طواف[9] کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسی کی لمبائی اور رسی کے ہر حصے کی جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کا رقبہ اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔زیادہ پیچیدہ سطحوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

### بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل $y = f(x),\ a \le x \le b$ کو $x$ محور کے گرد گھما کر پیدا سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل میں نمائندہ حصہ $PQ$ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

قوس $PQ$ محور $x$ کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے۔محور $x$ اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو مخروط مقطوع[10] کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبہ کا تخمین ہو گا۔

مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ $2\pi$ ضرب دونوں سروں کے رداس کا اوسط ضرب ترچھا قد کے برابر ہو گا۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

قطع $PQ$ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کی پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{6.14}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے مساوات 6.14 میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

---

[9] surface of revolution
[10] frustum

یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات 6.14 کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تفاعل کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفرقات کے مسئلہ اوسط قیمت کی طرف دیکھتے ہیں۔

اگر $f$ ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت $P$ اور $Q$ کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطع $PQ$ کے متوازی ہو گا۔اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f'(c_k) &= \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \\ \Delta y_k &= f'(c_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

مساوات 6.14 میں درج بالا $\Delta y_k$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k \end{aligned} \tag{6.15}$$

اب یہاں ایک بری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بری خبر یہ ہے کہ مساوات 6.15 میں $x_{k-1}$ ، $x_k$ اور $c_k$ ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک دوسرے جیسا کسی صورت نہیں بنایا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔اعلٰی احصاء کا مسئلہ بلس کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل کو مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

جو ہم چاہتے ہیں۔یوں $a$ تا $b$ تفاعل $f$ کی ترسیم کو $x$ محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی تکمل کو لیتے ہیں۔

تعریف: محور $x$ کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تفاعل $y = f(x)$ کو $x$ محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

□

مساوات 6.16 میں جذر وہی ہے جو پیداکار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیہ میں پایا جاتا ہے۔

مثال 6.21: محور $x$ کے گرد منحنی $y = 2\sqrt{x},\ 1 \leq x \leq 2$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہوئے

$$a = 1,\ b = 2,\ y = 2\sqrt{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\\ &= \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

مساوات 6.16 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}S &= \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\end{aligned}$$

□

## محور $y$ کے گرد سطح طواف

محور $y$ کے گرد سطح طواف کے لئے ہم مساوات 6.16 میں $x$ اور $y$ کی جگہیں تبدیل کرتے ہیں۔

محور $y$ کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \geq 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور $y$ کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.17}$$

مثال 6.22: لکیری قطع $x = 1 - y,\ 0 \le y \le 1$ کو محور $y$ کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کا رقبہ پہلو تلاش کریں۔

حل: اس رقبہ کو جیومیٹری سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0,\ d = 1,\ x = 1 - y,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -1$$
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

مساوات 6.17 سے اس رقبہ کا حاصل کریں۔

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \pi\sqrt{2}$$

دونوں نتائج ایک جیسے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □

## مختصر تفریقی روپ

درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

کو عموماً تفریقی لمبائی قوس $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے:

$$S = \int_a^b 2\pi y\,\mathrm{d}s \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x\,\mathrm{d}s$$

بایاں مساوات میں $x$ محور سے قطع $ds$ تک فاصلہ $y$ ہے۔ دایاں مساوات میں $y$ محور سے قطع $ds$ کا فاصلہ $x$ ہے۔ان دونوں کلیوں کو

$$S = \int 2\pi (\text{رداس})(\text{چوڑائی پٹی}) = \int 2\pi\rho \, \mathrm{d}s$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں رکن لمبائی قوس $ds$ تک محور طواف سے فاصلہ $\rho$ ہے۔

مختصر تفریقی روپ

$$S = \int 2\pi\rho \, \mathrm{d}s$$

کسی مخصوص مسئلے میں آپ رکن لمبائی قوس $ds$ اور رداس $\rho$ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر تکمل کے حدود بھی اسی متغیر کی روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال 6.23: منحنی $y = x^3$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$ کو محور $x$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم مختصر تفریقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho \, \mathrm{d}s \\ &= \int 2\pi y \, \mathrm{d}s \\ &= \int 2\pi y \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \qquad\qquad \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \end{aligned}$$

ہم نے یہاں فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا $ds$ کو $dx$ یا $dy$ کی روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات $y = x^3$ سے $dy$ کو $dx$ کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہٰذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3,\ \mathrm{d}y = 3x^2 \, \mathrm{d}x,\ \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + (3x^2 \, \mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1 + 9x^4} \, \mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے تکمل کا متغیر $x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\\
&= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\pi(\tfrac{1}{36})(\tfrac{2}{3})(1+9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2}\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(1+\tfrac{9}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(\tfrac{25}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}(\tfrac{125}{64}-1)\\
&= \tfrac{61\pi}{1728}
\end{aligned}$$

□

## سوالات

سطحی رقبہ کے تکمل

سوال 1 تا سوال 8 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ کو بھی ترسیم کریں۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 1: $y=\tan x,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{4};\quad x$ محور

جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/4}\tan x\sqrt{1+\sec^4 x}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) $\approx 3.84$

سوال 2: $y=x^2,\quad 0\le x\le 2;\quad x$ محور

سوال 3: $xy=1,\quad 1\le y\le 2;\quad y$ محور

جواب: (ا) $2\pi\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}\,\mathrm{d}y$ ، (ج) $\approx 5.02$

سوال 4: $x = \sin y, \quad 0 \le y \le \pi; \quad y$ محور

سوال 5: $x^{1/2} + y^{1/2} = 3,$ نقطہ $(4,1)$ سے $(1,4)$ تک$;\quad x$ محور
جواب: (ا) $2\pi\int_0^4 (3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) $\approx 63.37$

سوال 6: $y + 2\sqrt{y} = x, \quad 1 \le y \le 2; \quad y$ محور

سوال 7: $x = \int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{3}; \quad y$ محور
جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t\right)\sec y\,\mathrm{d}y$ ، (ج) $\approx 2.08$

سوال 8: $y = \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t, \quad 1 \le x \le \sqrt{5}; \quad x$ محور

سطحی رقبہ کا حصول
سوال 9: لکیری قطع $y = \frac{x}{2}, 0 \le x \le 4$ کو $x$ محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (محیط قاعدہ)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $4\pi\sqrt{5}$

سوال 10: لکیری قطع $y = \frac{x}{2}, 0 \le x \le 4$ کو $y$ محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 11: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, 1 \le x \le 3$ کو $x$ محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع$= \pi\ (\ r_1 + r_2\ )$(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $3\pi\sqrt{5}$

سوال 12: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, 1 \le x \le 3$ کو $y$ محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع$= \pi\ (\ r_1 + r_2\ )$(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال 13: $y = \frac{x^3}{9}, \quad 0 \le x \le 2, \quad x$ محور
جواب: $\frac{98\pi}{81}$

سوال 14: $y = \sqrt{x}, \quad \frac{3}{4} \le x \le \frac{15}{4}, \quad x$ محور

سوال 15: $y=\sqrt{2x-x^2},\quad 0.5\le x\le 1.5,\quad x$ محور
جواب: $2\pi$

سوال 16: $y=\sqrt{x+1},\quad 1\le x\le 5,\quad x$ محور

سوال 17: $x=\frac{y^3}{3},\quad 0\le y\le 1,\quad y$ محور
جواب: $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

سوال 18: $x=\frac{1}{3}y^{3/2}-y^{1/2},\quad 1\le y\le 3,\quad y$ محور

سوال 19: $x=2\sqrt{4-y},\quad 0\le y\le \frac{15}{4},\quad y$ محور
جواب: $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

سوال 20: $x=\sqrt{2y-1},\quad \frac{5}{8}\le y\le 1,\quad y$ محور

سوال 21: $x=\frac{y^4}{4}+\frac{1}{8y^2},\quad 1\le y\le 2,\quad x$ محور (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھ کر $S=\int 2\pi y\,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)
جواب: $\frac{253\pi}{20}$

سوال 22: $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2},\quad 0\le x\le\sqrt{2},\quad y$ محور (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھ کر $S=\int 2\pi x\,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

سوال 23: نئی تعریف کی پرکھ
تفاعل $y=\sqrt{a^2-x^2},\ -a\le x\le x$ کو $x$ محور کے گرد گھمانے سے کروی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات 6.16 سے بھی رداس $a$ کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24: نئی تعریف کی پرکھ
لکیری قطع $y=\frac{r}{h}x,\ 0\le x\le h$ کو $x$ محور کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد $h$ اور اس کے قاعدہ کا رداس $r$ ہے لہٰذا اس کے ترچھا قد $\sqrt{r^2+h^2}$ ہو گا۔ تکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ دریافت کر کے اس کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 25: (ا) منحنی $y=\cos x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ کو $x$ محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف کے رقبہ کا تکمل لکھیں جس کو حل کرنا بعد میں سکھایا جائے گا۔ (ب) اس سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔
جواب: (ا) $2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$، (ب) $\approx 14.4236$

سوال 26: ستارہ نما کا سطحی رقبہ
ستارہ نما $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ کا وہ حصہ جو $x$ محور سے اوپر پایا جاتا ہے کو $x$ محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ۔ ربع اول میں منحنی کے حصہ $y=(1-x^{2/3})^{3/2}, 0\le x\le 1$ ) کو $x$ محور کے گرد گھما کر نتیجہ کو دگنا کریں۔)

سوال 27: رنگ
ایک برتن کو رداس $16\,\mathrm{cm}$ کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ برتن کی گہرائی $9\,\mathrm{cm}$ ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی $0.5\,\mathrm{mm}$ موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لئے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔
جواب: $452.4\,\mathrm{L}$

سوال 28: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ
ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروی ڈبل روٹی کے ایک جتنی موٹے ٹکڑوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ کو $x$ محور کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور $x$ پر وقفہ $h$ کے اوپر نصف دائرے کا قوس $AB$ ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو $x$ محور کے گرد گھمانے سے $AB$ سے حاصل رقبہ کی قیمت $h$ کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ (کرارا رقبہ کی قیمت $h$ پر منحصر ہو گی۔)

سوال 29: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ $h$ ہے رداس $R$ کے کروی سطح سے ایک پٹی کاٹتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہو گا۔

سوال 30: موسمیاتی ریڈار کو شکل میں دکھائے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہو گا؟ (قاعدہ کو شامل نہ کریں۔)

سوال 31: محور طواف کو قطع کرنے والے منحنیات سے حاصل سطح طواف
وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f$ کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات 6.16 اخذ کی گئی۔ جہاں تفاعل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات 6.16 کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$S=\int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s=\int 2\pi\left|f(x)\right|\mathrm{d}s \tag{6.18}$$

تفاعل $y=\frac{x^3}{9}-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ کو محور $x$ کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرا مخروط کا سطحی رقبہ مساوات 6.18 استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔
جواب: $5\sqrt{2}\pi$

سوال 32: قوس $y=\frac{x^3}{9}-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ کو محور $x$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات 6.18 میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہو گا؟

### اعدادی تکمل
سوال 33 تا سوال 33 میں محور $x$ کے گرد دیے گئے منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گے۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درستگی تک معلوم کریں۔

سوال 33: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$
جواب: 14.4

سوال 34: $y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال 35: $y = x + \sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$
جواب: 54.9

سوال 36: $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \le x \le 6$

سوال 37: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ
فرض کریں $[a, b]$ پر $f$ ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں اور $k$ ویں ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کے وسطی نقطہ $m_k = (\frac{x_{k-1}+x_k}{2})$ پر منحنی کی مماس لکیر بنائیں۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ $k$ ویں ذیلی وقفہ میں مماسی قطع کی لمبائی $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطع کو محور $x$ کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ کو محور $x$ گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(k\text{ ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو}) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

## 6.7 معیاراثر اور مرکز کمیت

بہت سارے ساخت اور میکانی نظام کا رویہ ایسا ہوتا ہے جیسا ان کی کمیت ایک نقطہ میں سموئی ہو جس کو مرکز کمیت کہتے ہیں۔ اس نقطہ کا مقام جاننا اہم ہے جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں یک بعدی اور دو بعد چیزوں پر توجہ دی جائے گی۔ تین بعدی چیزوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

## لکیر پر کمیت

ہم اپنا ریاضی نمونہ بتدریج تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی منزل میں ہم محور $x$ جس کا مبدا اس کا چول ہو، پر کمیت $m_1$ ، $m_2$ اور $m_3$ تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دارومدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر منحصر ہے۔

ہر کمیت $m_k$ پر نیچے رخ قوت $m_kg$ عمل کرتا ہے جہاں $g$ ثقلی اسراع ہے۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو قوت مروڑ[11] کہتے ہیں۔ قوت $m_kg$ کو مبدا سے فاصلہ $x_k$ سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کمیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے جبکہ مبدا سے دائیں جانب کمیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام گھومنے کے رجحان کا ناپ ہے۔ اس مجموعہ کو نظام کی قوت مروڑ[12] کہتے ہیں۔

$$\text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3 \tag{6.19}$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \underbrace{(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $g$ اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے جبکہ عدد $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ نظام کی خاصیت ہے جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

عدد $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ کو مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر کہتے ہیں جو انفرادی کمیت کے معیار اثر $m_1x_1$ ، $m_2x_2$ اور $m_3x_3$ کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر} = \sum m_kx_k$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ $\bar{x}$ پر رکھنے سے نظام کا قوت مروڑ صفر ہو گا۔

اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے ہر کمیت کا قوت مروڑ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ کے لحاظ سے } m_k \text{ کا معیار اثر} &= \left(\bar{x} \text{ سے } m_k \text{ کا فاصلہ}\right)\left(\text{نیچے رخ قوت}\right) \\ &= (x_k - \bar{x})m_kg \end{aligned}$$

---

[11] torque
[12] system torque

ان معیار اثر کے مجموعہ کو صفر کے برابر پر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم $\bar{x}$ کے لئے حل کر سکتے ہیں:

$$\sum(x_k-\bar{x})m_k g = 0 \qquad \text{معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے}$$
$$g\sum(x_k-\bar{x})m_k = 0 \qquad \text{مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب}$$
$$\sum(m_k x_k-\bar{x}m_k) = 0 \qquad g \text{ سے تقسیم اور } m_k \text{ پھیلایا گیا ہے}$$
$$\sum m_k x_k-\sum \bar{x}m_k = 0 \qquad \text{مجموعہ کا قاعدہ فرق}$$
$$\sum m_k x_k = \bar{x}\sum m_k \qquad \text{مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی}$$
$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \qquad \bar{x} \text{ کے لئے حل}$$

یہ آخری مساوات کہتی ہے کہ $\bar{x}$ معلوم کرنے کے لئے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کمیت سے تقسیم کریں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

نقطہ $\bar{x}$ کو نظام کا مرکز کمیت[13] کہتے ہیں۔

## تار اور پتلے سلاخ

بہت سارے موقعوں پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کی کمیت کا مرکز مطلوب ہوتا ہے۔ایسی صورتوں میں اگر ہم تقسیم کمیت کو استمراری تفاعل کی صورت میں لکھ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کی بجائے تکمل ہو گا جیسے نیچے سمجھایا گیا ہے۔

فرض کریں ایک لمبی پٹی $x=a$ تا $x=b$ محور $x$ پر پڑی ہے۔ ہم $[a,b]$ اس پٹی کی خانہ بندی کرتے ہوئے اس کو $\Delta m_k$ کمیت کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ $k$ ویں ٹکڑے کی لمبائی $\Delta x_k$ ہے اور یہ مبدا سے تقریباً $x_k$ فاصلے پر پایا جاتا ہے۔اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔

اول، پٹی کا مرکز کمیت $\bar{x}$ اور نقطہ $x_k$ پر کمیت $\Delta m_k$ رکھنے سے حاصل نظام کا مرکز کمیت تقریباً ایک ہی مقام پر ہوں گے:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

دوم، مبدا کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً $x_k\Delta m_k$ ہو گا لہٰذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام $x_k\Delta m_m$ کا مجموعہ ہو گا:

$$\text{نظام کا معیار اثر} \approx \sum x_k \Delta m_k$$

---

[13] center of mass

سوم، اگر $x_k$ پر پٹی کی کثافت $\delta(x_k)$ ہو جہاں $\delta$ استمراری ہے (اور کثافت کی پیمائش کمیت فی لمبائی ہے) تب $\Delta m_k$ تخمیناً $\delta(x_k)\Delta x_k$ ہو گا:

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k} \tag{6.20}$$

مساوات 6.20 کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل $x\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفہ پر تفاعل $\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات 6.20 میں تخمین بہتر ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x}$$

ہم $\bar{x}$ کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

محور $x$ پر کثافتی تفاعل $\delta(x)$ کے سلاخ یا پٹی کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{مبدا کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{کمیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کمیت} \end{aligned} \tag{6.21}$$

مساوات 6.21 کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور کثافت سے مراد کمیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیمائش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔یوں تار، سلاخ اور پٹی کے لئے ہم کمیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں جبکہ مستوی سطحوں کے لئے کمیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

مثال 6.24: مستقل کثافت کا سلاخ یا پٹی
مستقل کثافت والے سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: ہم محور $x$ پر $x=a$ سے $x=b$ کو سلاخ تصور کرتے ہیں۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_a^b \delta x\,\mathrm{d}x = \delta\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \delta[\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2-a^2)\\
M &= \int_a^b \delta\,\mathrm{d}x = \delta\int_a^b \mathrm{d}x = \delta[x]_a^b = \delta(b-a)\\
\bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2-a^2)}{\delta(b-a)} = \frac{b+a}{2}
\end{aligned}$$

مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کمیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطہ پر ہو گا۔ □

مثال 6.25: متغیر کثافت
ایک سلاخ جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹی ہوتی ہے لہٰذا اس کی کثافت مستقل ہونے کی بجائے $\delta(x) = 1+\frac{x}{10}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ سلاخ کا مرکز کمیت معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات 6.21 استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_0^{10} x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} x\Big(1+\frac{x}{10}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10}\Big(x+\frac{x^2}{10}\Big)\,\mathrm{d}x\\
&= \Big[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{30}\Big]_0^{10} = 50+\frac{100}{3} = \frac{250}{3}\,\mathrm{kg\,m}
\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی $\mathrm{kg\,m}$ ہے۔ سلاخ کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int_0^{10}\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10}\Big(1+\frac{x}{10}\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[x+\frac{x^2}{20}\Big]_0^{10} 10+5 = 15\,\mathrm{kg}$$

مرکز کمیت درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\,\mathrm{m}$$

□

## مستوی پر تقسیم کمیت

فرض کریں ایک مستوی میں متناہی تعداد میں کمیت پائے جاتے ہیں۔یوں نقطہ $(x_k, y_k)$ پر کمیت $m_k$ ہو گا۔اس نظام کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \sum m_k \qquad \text{نظام کی کمیت}$$

ہر کمیت $m_k$ کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور $x$ کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k y_k$ ہو گا جبکہ محور $y$ کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k x_k$ ہو گا۔دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \sum m_k y_k \qquad \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$
$$M_y = \sum m_k x_k \qquad \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$

نظام کے مرکز کمیت کا $x$ محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{6.22}$$

یک بعدی صورت کی طرح $\bar{x}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $x = \bar{x}$ پر توازن میں ہو گا۔

نظام کے مرکز کمیت کا $y$ محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{6.23}$$

یک بعدی صورت کی طرح $\bar{y}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $y = \bar{y}$ پر توازن میں ہو گا۔ لکیر $y = \bar{y}$ کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو کاٹ کر صفر قوت مروڑ پیدا کرتے ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ اس نظام کی پوری کمیت نقطہ $(\bar{x}, \bar{y})$ میں پائی جاتی ہے۔ اس نقطہ کو نظام کی کمیت کا مرکز[14] کہتے ہیں۔

## پتلی مستوی چادر

کئی بار ہمیں پتلی مستوی چادر کا مرکز کمیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کمیت کی تقسیم استمراری ہے لہٰذا $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں متناہی مجموعوں کی بجائے تکمل پائے جاتے ہیں۔آئیں اس پر غور کرتے ہیں۔

فرض کریں $xy$ مستوی میں ایک پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک پٹیوں میں تقسیم کریں۔ کسی ایک نمائندہ پٹی کی کمیت کا مرکز $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ہو گا۔ ہم پٹی کی کمیت $\Delta m$ کو نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر منجمد تصور کرتے ہیں۔یوں محور $y$ کے لحاظ سے پٹی

[14] center of mass

کا معیار اثر $\tilde{x}\Delta m$ ہو گا جبکہ محور $x$ کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{y}\Delta m$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 6.22 اور مساوات 6.23 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m}$$

یک بعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریمان مجموعے پائے جاتے ہیں جن کی قیمتیں، پٹی کی چوڑائی کم سے کم کرنے سے قطعی تکملات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان تکملات کو علامت طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

مستوی میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M_y &= \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M &= \int \mathrm{d}m && \text{کمیت}\\
\bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کمیت}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

ان تکملات کی حصول کے لئے ہم چادر کو محددی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدد کے متوازی ایک نمائندہ پٹی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پٹی کی کمیت اور مرکز کمیت کے محدد $(\tilde{x}, \tilde{y})$ کو $x$ اور $y$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد محددی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے بیچ $\tilde{y}\,\mathrm{d}m$ ، $\tilde{x}\,\mathrm{d}m$ اور $\mathrm{d}m$ کے تکملات لیتے ہیں۔

مثال 6.26: ایک تکونی چادر کی مستقل کثافت $\delta = 3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے۔ (ا) محور $y$ کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر $M_y$ معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کمیت $M$ معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کمیت کے مرکز کا $\bar{x}$ محدد معلوم کریں۔

حل: پہلی ترکیب: افقی پٹیاں
(ا) نمائندہ پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (x, y)\\
\mathrm{d}S &= 2x\,\mathrm{d}x\\
\mathrm{d}m &= \delta\,\mathrm{d}S = 3\cdot 2x\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

یوں محور $y$ کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = x \cdot 6x\,\mathrm{d}x = 6x^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہٰذا پوری چادر کا محور $y$ کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x = 2x^3\Big]_0^1 = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^1 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2\Big]_0^1 = 3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کے مرکز کمیت کا $x$ محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}, \mathrm{cm}$$

دوسری ترکیب: انتصابی پٹیاں
(ا) نمائندہ انتصابی پٹی کے مرکز کمیت کا $y$ محدد $y$ ہو گا:

$$\tilde{y} = y$$

پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں $x$ محدد پایا جائے گا:

$$\tilde{x} = \frac{\frac{y}{2}+1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\text{لمبائی} &= 1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}\\
\mathrm{d}S &= \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y\\
\mathrm{d}m &= \delta\,\mathrm{d}S = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y\\
\tilde{x} &= \frac{y+2}{4} && \text{محور } Y \text{ سے مرکز کمیت کا فاصلہ}
\end{aligned}$$

یوں محور $y$ کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y$$

ہو گا اور محور $y$ کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کی مرکز کمیت کا $x$ محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$$

ہم اسی طرح $M_x$ اور $\bar{y}$ بھی تلاش کر سکتے ہیں۔ □

اگر پتلی چادر میں کمیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب مرکز کمیت تشاکل کے محور پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کمیت دونوں محور کے نقطہ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مدد گار ثابت ہوتے ہیں۔

ضمیمہ ۱

# ضمیمہ اول

# ضمیمہ ب

# ضمیمہ دوم