

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	
392	4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
406	4.6 بہترین بنانا	
431	4.7 temporary	
443	ضمیمہ دوم	1



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## temporary 4.7

## سوالات

سوال 1 تا سوال 6 میں (i)  $x \rightarrow \infty$  پر (ب)  $x \rightarrow -\infty$  پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 1:  $f(x) = \frac{2}{x} - 3$  (i)  $-3$ ، (ب)  $-3$

سوال 2:  $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 3:  $g(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$  (i)  $\frac{1}{2}$ ، (ب)  $\frac{1}{2}$

سوال 4:  $g(x) = \frac{1}{8 - \frac{5}{x^2}}$

سوال 5:  $h(x) = \frac{-5 + \frac{7}{x}}{3 - \frac{1}{x^2}}$  (i)  $-\frac{5}{3}$ ، (ب)  $-\frac{5}{3}$

سوال 6:  $h(x) = \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال 7 تا سوال 10 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$  جواب: 0

سوال 8:  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\cos \theta}{3\theta}$

سوال 9:  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2 - t + \sin t}{t + \cos t}$  جواب:  $-1$



سوال 10:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r + \sin r}{2r + 7 - 5 \sin r}$

ناطق تفاعل کی حد  
سوال 11 تا سوال 24 میں دیے ناطق تفاعل کی (i)  $x \rightarrow \infty$  اور (پ)  $x \rightarrow -\infty$  پر حد تلاش کریں۔

سوال 11:  $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$   
جواب: (i)  $\frac{2}{5}$ ، (پ)  $\frac{2}{5}$

سوال 12:  $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال 13:  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$   
جواب: (i) 0، (پ) 0

سوال 14:  $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال 15:  $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$   
جواب: (i)  $-\infty$ ، (پ)  $\infty$

سوال 16:  $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال 17:  $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$   
جواب: (i) 7، (پ) 7

سوال 18:  $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

سوال 19:  $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$   
جواب: (i)  $-\infty$ ، (پ)  $\infty$

سوال 20:  $g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

سوال 21:  $g(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$   
جواب: (i)  $\infty$ ، (پ)  $-\infty$

سوال 22:  $h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$

سوال 23:  $h(x) = \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$   
 جواب: (i)  $-\frac{2}{3}$ ، (ب)  $-\frac{2}{3}$

سوال 24:  $h(x) = \frac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت  
 ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔  
 نسب نما میں  $x$  کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 25 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 25:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$   
 جواب: 0

سوال 26:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

سوال 27:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$   
 جواب: 1

سوال 28:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

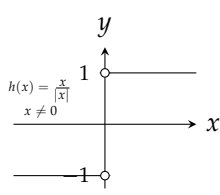
سوال 29:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$   
 جواب:  $\infty$

سوال 30:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

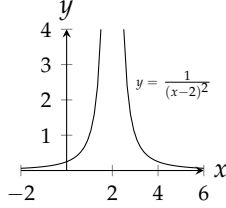
قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول  
 سوال 31 تا سوال 34 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہذا کار تیمی محدود پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے  
 شرائط پر پورا اترتی ہو۔ (ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

سوال 31:  $f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$   
 جواب: شکل 4.103

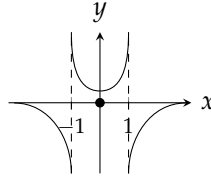
سوال 32:  $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$



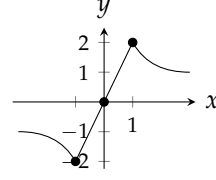
شکل 4.106: ایک ممکنہ حل  
برائے سوال 37



شکل 4.105: ایک ممکنہ حل  
برائے سوال 35



شکل 4.104: ایک ممکنہ حل  
برائے سوال 33



شکل 4.103: ایک ممکنہ حل  
برائے سوال 31

سوال 33:  $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty,$   
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$   
 جواب: شکل 4.104

سوال 34:  $f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty,$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

تفاعل کی ایجاد  
سوال 35 تا سوال 38 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ کلاؤں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

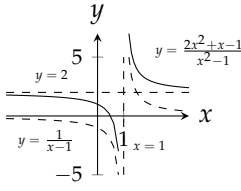
سوال 35:  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$   
 جواب: شکل 4.105

سوال 36:  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \infty$

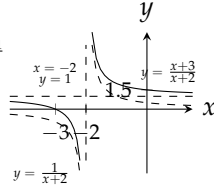
سوال 37:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$   
 جواب: شکل 4.106

سوال 38:  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} k(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = -\infty$

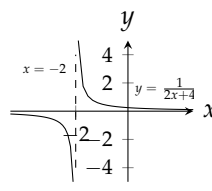
ناطق تفاعل کی ترسیم  
سوال 39 تا سوال 66 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ مقتارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔



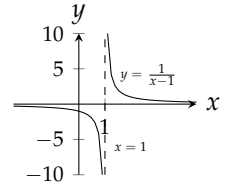
شکل 4.110: ترسیم سوال 45



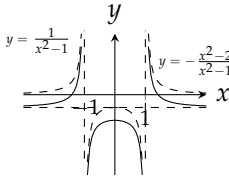
شکل 4.109: ترسیم سوال 43



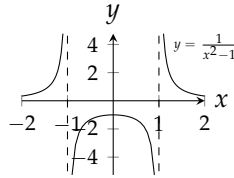
شکل 4.108: ترسیم سوال 41



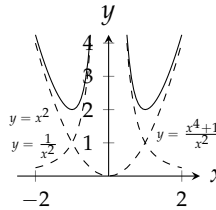
شکل 4.107: ترسیم سوال 39



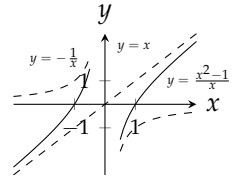
شکل 4.114: ترسیم سوال 53



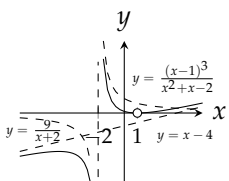
شکل 4.113: ترسیم سوال 51



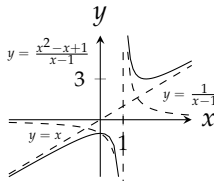
شکل 4.112: ترسیم سوال 49



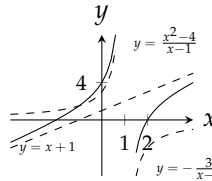
شکل 4.111: ترسیم سوال 47



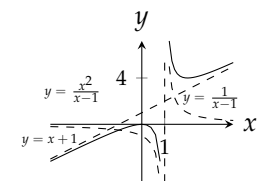
شکل 4.118: ترسیم سوال 61



شکل 4.117: ترسیم سوال 59



شکل 4.116: ترسیم سوال 57



شکل 4.115: ترسیم سوال 55

سوال 39:  $y = \frac{1}{x-1}$   
جواب: شکل 4.107

سوال 40:  $y = \frac{1}{x+1}$

سوال 41:  $y = \frac{1}{2x+4}$   
جواب: شکل 4.108

سوال 42:  $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 43:  $y = \frac{x+3}{x+2}$   
جواب: شکل 4.109

سوال 44:  $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 45:  $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$   
جواب: شکل 4.110

سوال 46:  $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 47:  $y = \frac{x^2-1}{x}$   
جواب: شکل 4.111

سوال 48:  $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 49:  $y = \frac{x^4+1}{x^2}$   
جواب: شکل 4.112

سوال 50:  $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 51:  $y = \frac{1}{x^2-1}$   
جواب: شکل 4.113

سوال 52:  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 53:  $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$   
جواب: شکل 4.114

سوال 54:  $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

سوال 55:  $y = \frac{x^2}{x-1}$   
جواب: شکل 4.115

سوال 56:  $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 57:  $y = \frac{x^2-4}{x-1}$   
جواب: شکل 4.116

سوال 58:  $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

سوال 59:  $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$   
جواب: شکل 4.117

سوال 60:  $y = -\frac{x^2-x+1}{x-1}$

سوال 61:  $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$   
جواب: شکل 4.118

سوال 62:  $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$

سوال 63:  $y = \frac{x}{x^2-1}$

سوال 64:  $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

سوال 65:  $y = \frac{8}{x^2+4}$

سوال 66:  $y = \frac{4x}{x^2+4}$

کمپیوٹر کا استعمال  
سوال 67 تا سوال 72 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

$$y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 67:}$$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 68:}$$

$$y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}} \quad \text{سوال 69:}$$

$$y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \quad \text{سوال 70:}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 71:}$$

$$y = -\cos\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 72:}$$

اجزاء کی ترسیمات  
سوال 73 تا سوال 76 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 73:}$$

$$y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 74:}$$

$$y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 75:}$$

$$y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 76:}$$

نظریہ اور مثالیں

$$\text{سوال 77: } f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1} \text{ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا } c \text{ پایا جاتا ہے کہ } f(c) \text{ کی قیمت درج ذیل ہو۔}$$

$$\text{ا. } -2 \quad \text{ب. } \cos 3 \quad \text{ج. } 5\,000\,000$$

$$\text{سوال 78: } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) \text{ تلاش کریں۔}$$

سوال 79: تشاکی۔ فرض کریں وقفہ  $x > 0$  پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ  $x < 0$  پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟

سوال 80: تشاکی۔ فرض کریں وقفہ  $x < 0$  پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ  $x > 0$  پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

سوال 81: فرض کریں  $f(x)$  اور  $g(x)$  کثیر رکنی ہیں اور  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$  ہے۔ کیا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 82: فرض کریں  $f(x)$  اور  $g(x)$  کثیر رکنی ہیں۔ اگر  $g(x)$  کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا  $\frac{f(x)}{g(x)}$  کی ترسیم کا متقارب ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 83: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 84: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 85:

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی  $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$  (مثال 4.30) متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ  $x \rightarrow \infty$  پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل  $f(x)$  کی مثال پیش کریں۔

$$(1) \quad x > 0 \text{ پر } f \text{ قابل تفرق ہے۔}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \text{ غیر موجود ہے۔}$$

سوال 86: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = x + 1 + \frac{5}{x + 2}$$

جس کی ترسیمی متقارب  $y = x + 1$  ہے۔



اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو  $x$  سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = \frac{x + 3 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

ماتا ہے جس کی مقارب  $y = x + 3$  ہے۔

ان میں سے کون کا خط مقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 87 اور سوال 88 میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے  $x \rightarrow \mp\infty$  پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 87: اگر  $f$  کی قیمت مستقل ہو  $f(x) = k$  تب  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$  ہو گا۔

سوال 88: اگر  $f$  کی قیمت مستقل ہو  $f(x) = k$  تب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$  ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے  
سوال 89 تا سوال 92 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے مقارنی خط تلاش کریں۔ مقارنی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال 89:  $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

سوال 90:  $y = \frac{x^2+x-6}{2x-2}$

سوال 91:  $y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$

سوال 92:  $y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2}$

سوال 93 تا سوال 98 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔ تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

سوال 93:  $y = x^3 + \frac{3}{x}$

سوال 94:  $y = x^3 - \frac{3}{x}$

سوال 95:  $y = 2 \sin x + \frac{1}{x}$

سوال 96:  $y = 2 \cos x - \frac{1}{x}$

سوال 97:  $y = \frac{x^2}{2} + 3 \sin 2x$

سوال 98:  $y = (x-1)^{11} + 2 \sin 2\pi x$

سوال 99 اور سوال 100 کا تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا.  $x \rightarrow 0^+$  اور  $x \rightarrow 0^-$  پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب.  $x \rightarrow \pm\infty$  پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج.  $x \rightarrow 1$  اور  $x \rightarrow -1$  پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 99:  $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})^{2/3}$

سوال 100:  $y = \frac{3}{2}(\frac{x}{x-1})^{2/3}$

سوال 101: تقابل  $y = -\frac{x^3-2}{x^2+1}$  کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

ا.  $-9 \leq x \leq 9$  ب.  $-90 \leq x \leq 90$  ج.  $-900 \leq x \leq 900$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہوگی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہوگا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین  $y = -x$  کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 102: تقابل  $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$  کو وقفہ  $-2 \leq x \leq 2$  پر ترسیم کریں۔  $x = 1$  اور  $x = -1$  کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تقابل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta \quad (\theta = \frac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جاسکتا ہے۔ سوال 108 تا سوال 103 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تاکہ ترسیم پر حد کو دیکھا جاسکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

سوال 103:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x}$

سوال 104:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$

سوال 105:  $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{3x+4}{2x-5}$

سوال 106:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$

سوال 107:  $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) \left(\cos \frac{1}{x}\right)$

سوال 108:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos \frac{1}{x}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

