احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جا سکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

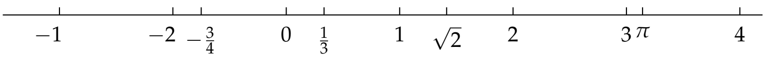
احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔**حقیقی اعداد**[1] وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{4} &= -0.75000\cdots \\
\frac{1}{3} &= 0.33333\cdots \\
\sqrt{2} &= 1.4142\cdots
\end{aligned}
$$

[1] real numbers

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں $\ldots$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو لکیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اس لکیر کو **حقیقی خط**[2] کہتے ہیں۔



$\Re$ کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جا سکتے ہیں: الجبرائی خواص، خواص درجہ، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جا سکتے ہیں۔آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

حقیقی اعداد کی خواص درج ذیل ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

1. $a + c < b + c \Longleftarrow a < b$
2. $a - c < b - c \Longleftarrow a < b$
3. $ac < bc \Longleftarrow a < b$ اور $c > 0$
4. $bc < ac \Longleftarrow a < b$ اور $c < 0$ **خصوصی صورت:** $-b < -a \Longleftarrow a < b$

[2] real line

5. $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$

6. اگر a اور b دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

درج بالا میں $a < b \implies a + c < b + c$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہو گی۔دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دارومدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ درجہ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

$\Re$ کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی سلسلوں[3] کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. **قدرتی اعداد**[4]، یعنی 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، $\cdots$

2. **عدد صحیح**، یعنی 0 ، ∓ 1 ، ∓ 2 ، ∓ 3 ، $\cdots$

3. **ناطق اعداد**[5]، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9}, \quad \frac{200}{13}, \quad 57 = \frac{57}{1}$$

---

[3] sets
[4] natural numbers
[5] rational numbers

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔
(الف) مختتم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000\cdots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909\cdots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور خواص درجہ رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں **غیر ناطق اعداد**[6] کہلاتے ہیں۔غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نا مختتم اور نا ہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو ارکان کے بیچ تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں **وقفہ**[7] کہلاتا ہے۔ مثال کے طور تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہٰذا -1 اور 1 کے بیچ تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔خطی قطع **متناہی وقفہ**[8] جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط **لامتناہی وقفہ**[9] کہلاتے ہیں۔

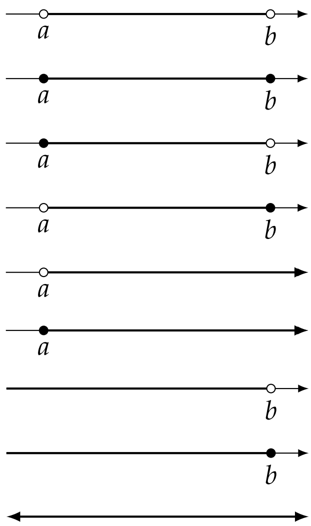
---

[6] irrational numbers
[7] interval
[8] finite interval
[9] infinite interval

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ **بند**[10] کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ **نصف کھلا**[11] کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ **کھلا**[12] کہلاتا ہے۔ وقفے کے سروں کو **سرحدی نقطے**[13] بھی کہتے ہیں۔ یہ وقفہ کی **سرحد**[14] ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو **اندرونی نقطے**[15] کہتے ہیں۔ تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی **اندرون**[16] کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسمیں

	علامت	سلسلہ	ترسیم
متناہی	(a,b)	$\{x\|a<x<b\}$	
	$[a,b]$	$\{x\|a\leq x\leq b\}$	
	$[a,b)$	$\{x\|a\leq x<b\}$	
	$(a,b]$	$\{x\|a<x\leq b\}$	
لا متناہی	(a,∞)	$\{x\|x>a\}$	
	$[a,\infty)$	$\{x\|x\geq a\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x\|x<b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x\|x\leq b\}$	
	$(-\infty,\infty)$	$\Re$	



عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

مثال 1.1:

---
[10] closed
[11] half-open
[12] open
[13] boundary points
[14] boundary
[15] interior points
[16] interior

1) $2x - 4 < x + 1$ 2) $-\frac{x}{3} < x - 1$ 3) $\frac{2}{x-1} \geq 4$

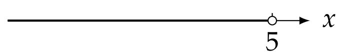
حل:

1)

$$2x - 4 < x + 1$$

$2x < x + 5$ دونوں ہاتھ 4 جمع کریں

$x < 5$ دونوں ہاتھ سے x منفی کریں



حل سلسلہ وقفہ $(-\infty, 5)$ ہے۔

2)

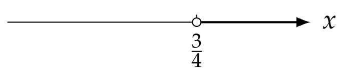
$$-\frac{x}{3} < x - 1$$

$-x < 3x - 3$ دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں

$0 < 4x - 3$ دونوں ہاتھ کے ساتھ x جمع کریں

$3 < 4x$ دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں

$\frac{3}{4} < x$ دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں



وقفہ $(\frac{3}{4}, \infty)$ حل سلسلہ ہے۔

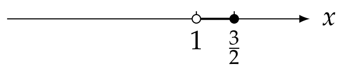
3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بایاں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بایاں ہاتھ غیر متعین ہے۔عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

$2 \geq 4x - 4$ دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیں

$6 \geq 4x$ دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

$\frac{3}{2} \geq x$ دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$ ہے۔

□

مطلق قیمت

عدد x کی **مطلق قیمت**[17] جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

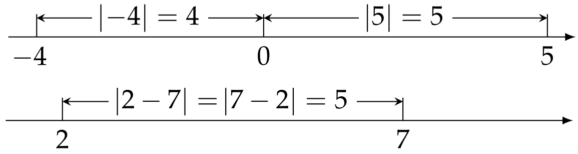
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $|0.88| = 0.88, \quad |0| = 0, \quad |-13| = -(-13) = 13, \quad \big|-|a|\big| = |a|$ □

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq$ ہو گی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہو گا۔چونکہ a کی غیر منفی جذر کو $\sqrt{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

[17] absolute value



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

آپ $\sqrt{a^2} = |a|$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہو گا۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$x \text{ اور } y \text{ کے بیچ فاصلہ } = |x-y|$$

ہو گا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص

1. $|-a| = |a|$ کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔
2. $|ab| = |a||b|$ حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہو گا۔
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$ دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہو گی۔اس کو تکونی عدم مساوات کہتے ہیں۔

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a+b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہو گی۔اس کے علاوہ ہر صورت $|a+b| = |a| + |b|$ ہو گا۔

مثال 1.3:

$$\begin{aligned}
|-2+6| &= |4| = 4 < |-2| + |6| = 8 \\
|2+6| &= |8| = |2| + |6| \\
|-2-6| &= |-8| = 8 = |-2| + |-6|
\end{aligned}$$

□

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x-1| = 11$ کو حل کریں۔

حل: اس مساوات کے تحت $2x-1 = \mp 11$ ہو سکتا ہے لہٰذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 11 & \qquad 2x-1 &= -11 \\ 2x &= 12 & 2x &= -10 \\ x &= 6 & x &= -5 \end{aligned}$$

یوں $|2x-1| = 11$ کا درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔ □

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے

اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

$$|a| < D \iff -D < a < D \tag{1.1}$$

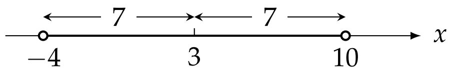
$$|a| \le D \iff -D \le a \le D \tag{1.2}$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x-3| < 7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} |x-3| &< 7 \\ -7 < x-3 &< 7 && \text{مساوات } 1.1 \\ -7+3 < x &< 7+3 && \text{دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں} \\ -4 < x &< 10 \end{aligned}$$

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔



□

مثال 1.6: عدم مساوات $\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1$ کو حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1 \iff -1 < 3 - \frac{2}{x} < 1 &\qquad \text{مساوات } 1.1\\
-4 < -\frac{2}{x} < -2 &\qquad \text{3 منفی کریں}\\
2 > \frac{1}{x} > 1 &\qquad -\tfrac{1}{2} \text{ سے ضرب دیں}\\
\frac{1}{2} < x < 1 &\qquad \text{معکوس لیں}
\end{aligned}$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب معکوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہو گی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2}, 1)$ ہے۔ □

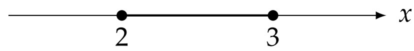
مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔حل سلسلہ ترسیم کریں۔

(الف) $|2x - 5| \le 1$ (ب) $|2x - 5| \ge 1$

حل: (الف)

$$\begin{aligned}
|2x - 5| &\le 1\\
-1 \le 2x - 5 &\le 1 &\qquad \text{مساوات } 1.2\\
4 \le 2x &\le 6 &\qquad \text{جمع } 5\\
2 \le x &\le 3 &\qquad \text{تقسیم } 2
\end{aligned}$$

حل سلسلہ بند وقفہ $[2, 3]$ ہے۔

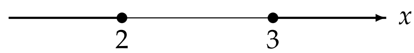


(ب)

$$|2x-5| \ge 1$$

$$\begin{array}{c|c} 2x-5 \ge 1 & -(2x-5) \ge 1 \\ 2x \ge 6 & 2x-5 \le -1 \\ x \ge 3 & 2x \le 4 \\ & x \le 2 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty,2] \cup [3,\infty)$ ہے۔



□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی اشتراک[18] کی علامت $\cup$ استعمال کی گئی ہے۔دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔اسی طرح ہم تقاطع[19] کی علامت $\cap$ بھی استعمال کرتے ہیں۔دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔مثال کے طور پر $[1,3) \cap [2,4] = [2,3)$ ہو گا۔

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1.1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

جواب: $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}$

---

[18] union
[19] intersection

سوال 1.2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔ دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 1.3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $0 < x < 4$

ب $0 < x - 2 < 4$

ج $1 < \frac{x}{2} < 3$

د $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

ہ $1 < \frac{6}{x} < 3$

و $|x - 4| < 2$

ز $-6 < -x < 2$

ح $-6 < -x < -2$

سوال 1.4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $4 < y < 6$

ب $-6 < y < -4$

ج $y > 4$

د $y < 6$

ہ $0 < y - 4 < 2$

و $2 < \frac{y}{2} < 3$

ز $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$

ح $|y - 5| < 1$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ ترسیم کریں۔

سوال 1.5: $-2x > 4$
جواب: $x < -2$

سوال 1.6: $8 - 3x \geq 5$

سوال 1.7: $5x - 3 \leq 7 - 3x$
جواب: $x \leq \frac{5}{4}$

سوال 1.8: $3(2 - x) > 2(3 + x)$

سوال 1.9: $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
جواب: $x \leq -\frac{1}{3}$

سوال 1.10: $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$

سوال 1.11: $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$
جواب: $x < -\frac{6}{7}$

سوال 1.12: $-\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}$

مطلق قیمت

سوال 1.13 تا سوال 1.18 میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال 1.13: $|y| = 3$

جواب: ∓ 3

سوال 1.14: $|y-3| = 7$

سوال 1.15: $|2t+5| = 4$

جواب: $-\frac{9}{2}, \quad -\frac{1}{2}$

سوال 1.16: $|1-t| = 1$

سوال 1.17: $|8-3s| = \frac{9}{2}$

جواب: $\frac{25}{6}, \quad \frac{7}{6}$

سوال 1.18: $\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 1$

سوال 1.19 تا سوال 1.34 میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ ترسیم کریں

سوال 1.19: $|x| < 2$

جواب: $-2 < x < 2$

سوال 1.20: $|x| \leq 2$

سوال 1.21: $|t-1| \leq 3$

جواب: $-2 \leq t \leq 4$

سوال 1.22: $|t+2| < 1$

سوال 1.23: $|3y-7| < 4$

جواب: $1 < y < \frac{11}{3}$

سوال 1.24: $|2y+5| < 1$

سوال 1.25: $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$

جواب: $0 \leq z \leq 10$

سوال 1.26: $\left|\frac{3}{2}z - 1\right| \leq 2$

سوال 1.27: $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$
جواب: $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

سوال 1.28: $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$

سوال 1.29: $|2s| \geq 4$
جواب: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

سوال 1.30: $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

سوال 1.31: $|1 - x| > 1$
جواب: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

سوال 1.32: $|2 - 3x| > 5$

سوال 1.33: $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$
جواب: $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

سوال 1.34: $\left|\frac{3}{5}r - 1\right| > \frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات

سوال 1.35 تا سوال 1.42 میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2} = |a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 1.35: $x^2 < 2$
جواب $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 1.36: $4 \leq x^2$

سوال 1.37: $4 < x^2 < 9$
جواب $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 1.38: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 1.39: $(x-1)^2 < 4$
جواب $(-1,3)$

سوال 1.40: $(x+3)^2 < 2$

سوال 1.41: $x^2 - x < 0$
جواب $(0,1)$

سوال 1.42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $|-a| = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔
جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 1.44: مساوات $|x-1| = 1-x$ کو حل کریں۔

سوال 1.45: تکونی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a+b| = (a+b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے تکونی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\
&\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
&= (|a| + |b|)^2 \\
|a+b| &\leq |a| + |b|
\end{aligned}$$

سوال 1.46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 1.47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟
جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 1.48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ ترسیم کریں۔

سوال 1.49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔
جواب: $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 1.50: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔

1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری

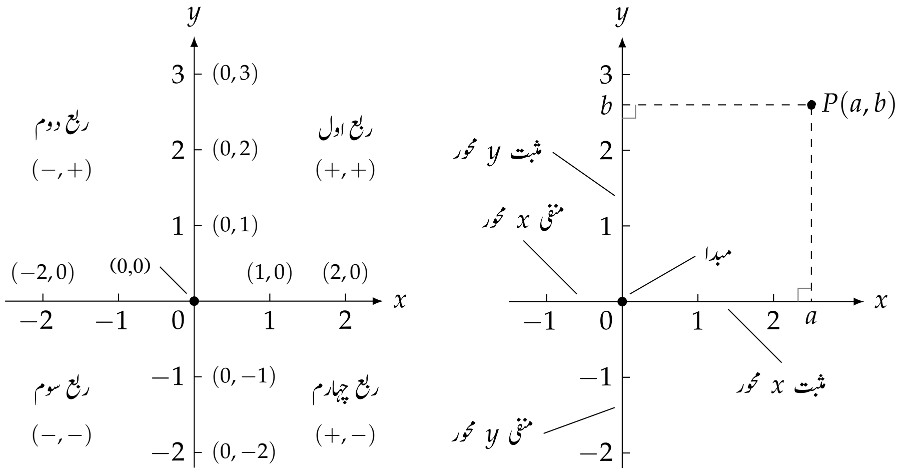
اس حصہ میں محدد اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدد

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ان خطوط کو مستوی میں **محددی محور**[20] کہتے ہیں۔افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔انتصابی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محددی نظام کا **مبدا**[21] کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جا سکتے ہیں۔اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x **محدد**[22] a ہو گا۔اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور

[20] coordinate axis
[21] origin
[22] x-coordinate



شکل 1.2: کارتیسی محدد

کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y **محدد**[23] b ہو گا۔ مرتب جوڑی (a,b) کو نقطے کی **محددی جوڑی**[24] کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محددی جوڑی کا y محدد 0 ہو گا جبکہ y محور پر ہر محددی جوڑی کا x محدد 0 ہو گا۔ محددی نظام کا مبدا نقطہ $(0,0)$ ہے۔

محور x کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدا کے دائیں جانب **مثبت x محور**[25] اور مبدا کے بائیں جانب **منفی x محور**[26] پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدا y محور کو بھی **مثبت y محور** اور **منفی y محور** میں تقسیم کرتا ہے۔ محدد مستوی کو چار **ربعات**[27] میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پیما

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ

---

[23] y-coordinate
[24] coordinate pair
[25] positive x-axis
[26] negative x-axis
[27] quadrants

ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی تناسب پہلو[28] ایک جیسے رکھتے ہیں لہٰذا دونوں محور پر پیمائشی فیتہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدد میں کل تبدیلی کو بڑھوتری[29] کہتے ہیں۔ اختتامی محدد سے ابتدائی محدد منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

مثال 1.8: نقطہ $A(4,-3)$ سے نقطہ $B(2,5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = 2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

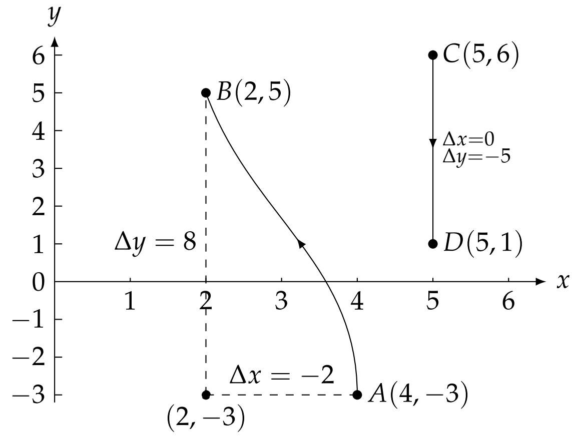
مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5,6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5,1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔

حل: $\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$ □

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[28] aspect ratio
[29] increments



شکل 1.3: محددی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

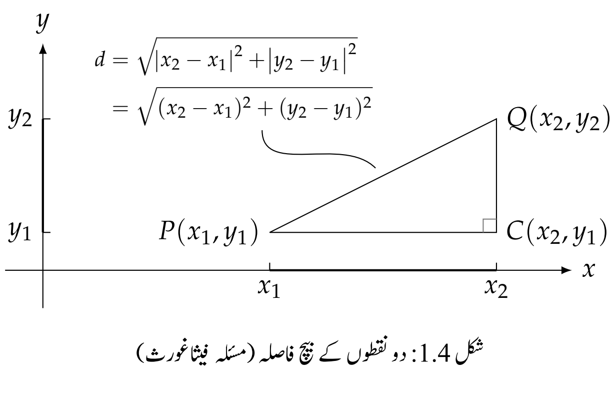
مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ

نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا (شکل 1.4)۔

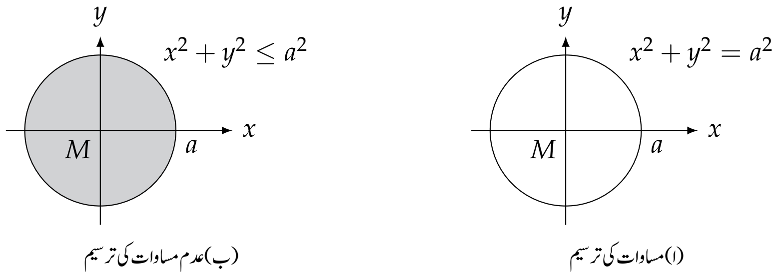
$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1.10: (الف) $P(-1,2)$ اور $Q(3,4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)



شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)

(ب) مبدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

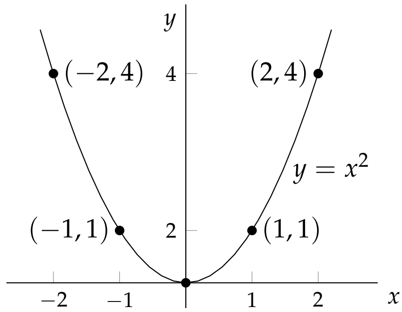
ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو
(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصل $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔
(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصل $\leq a$ ہے۔یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہو گی (شکل 1.5)۔ □

اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو **اکائی دائرہ**[30] کہتے ہیں۔

[30] unit circle



شکل 1.6: قطع مکافی (مثال 1.12)

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(-1,1)$ ، $(2,4)$ اور $(-2,4)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدد اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو **قطع مکافی**[31] کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکتا سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

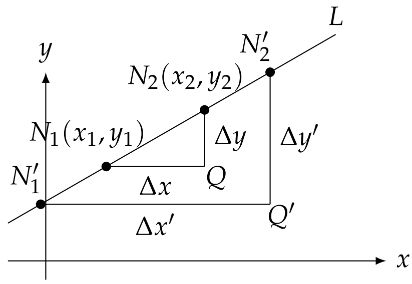
کی قیمت ایک جیسی ہو گی (شکل 1.7)۔

تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

---

[31] parabola



شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N_1'Q'N_2'$ متشابہ مثلثات ہیں لہٰذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی **ڈھلوان**[32] کہلاتی ہے۔

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لہٰذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا[33]۔یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں L_1 کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1-(-1)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

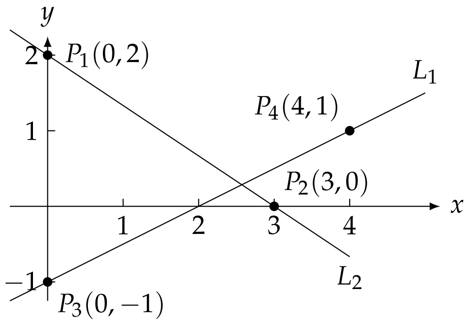
ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔اسی طرح L_2 کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ ہے۔یوں دائیں رخ چلتے ہوئے □

خط کی چڑھائی یا اترائی کو **زاویہ میلان**[34] سے بھی ناپا جاتا ہے۔ x محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہجی ϕ سے ظاہر کیا جائے تب $0 \le \phi \le 180^\circ$ ہو گا۔

[32] slope
[33] چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔
[34] angle of inclination



شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)

شکل 1.9: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے

خط کی ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

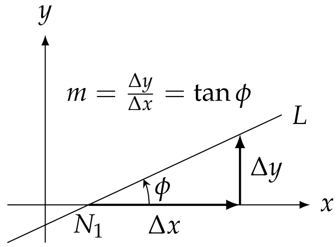
$$m = \tan\phi$$

متوازی اور قائمہ خطوط

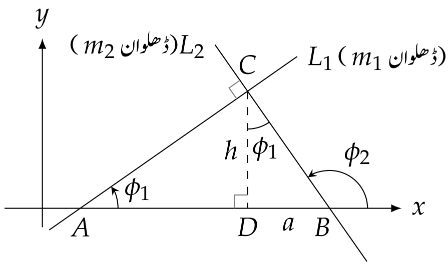
متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا یہ متوازی ہوں گے۔

اگر غیر انتصابی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

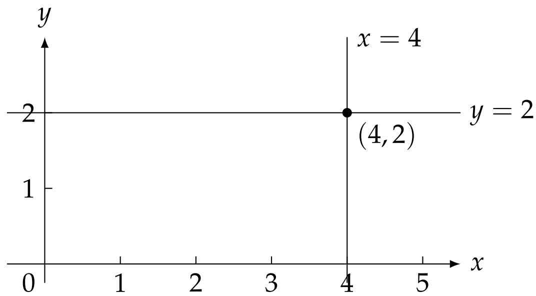
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



شکل 1.10: غیر انتصابی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجنٹ ہوتا ہے



شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق



شکل 1.12: افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan\phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan\phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔یوں $m_1 m_2 = (\frac{a}{h})(-\frac{h}{a}) = -1$ ہو گا۔

خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ x محور کے نقطہ a سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی x محدد a ہو گی۔یوں اس انتصابی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔اسی طرح y محور کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔

مثال 1.14: نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتے افقی اور انتصابی خطوط کے مساوات بالترتیب $y = 2$ اور $x = 4$ ہوں گی (شکل 1.12)۔ □

اگر ہمیں غیر انتصابی سیدھے خط L کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر $N(x, y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \implies \quad y = y_1 + m(x - x_1)$$

لکھا جا سکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

تعریف: نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان m ہو کی مساوات $y = y_1 + m(x - x_1)$ ہو گی جس کو خط کی **نقطہ۔ڈھلوان مساوات**[35] ہے۔

مثال 1.15: نقطہ $(3, 2)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔
حل:

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \quad \implies \quad y = -\frac{2}{3}x + 4$$

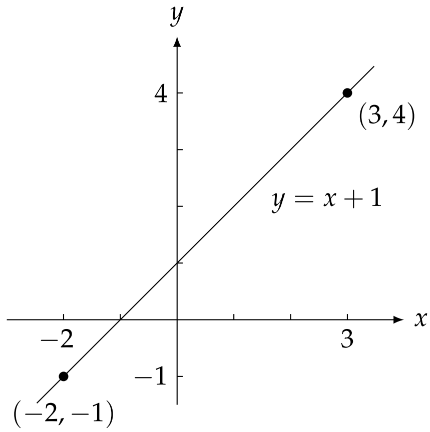
□

مثال 1.16: نقطہ $(-2, -1)$ اور $(3, 4)$ سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔
حل: اس خط کی ڈھلوان

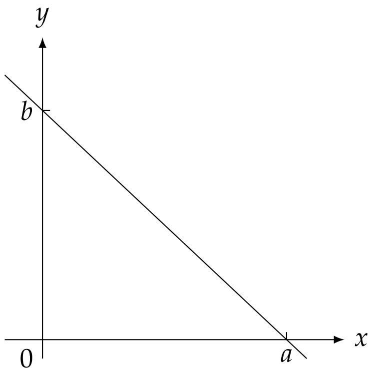
$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ہے۔ ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ لیتے ہیں	نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ لیتے ہیں
$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$	$y = -1 + 1 \cdot (x - x(-2))$
$y = 4 + x - 3$	$y = -1 + x + 2$
$y = x + 1$	$y = x + 1$



شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال 1.16)



شکل 1.14: غیر انتصابی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔ □

غیر انتصابی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y **قطع**[36] کہتے ہیں۔اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر x محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا x **قطع**[37] کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

غیر انتصابی خط جو y محور کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = mx + b$$

ہو گی۔

تعریف: درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = mx + b$$

کو خط کی **ڈھلوان۔قطع مساوات**[38] کہتے ہیں۔اس خط کی ڈھلوان m ہے اور یہ y محور کو b پر قطع کرتا ہے۔

point-slope equation[35]
y-intercept[36]
x-intercept[37]
slope-intercept equation[38]

مثال 1.17: خط $y = 3x - 7$ کی ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ y محور کو -7 پر قطع کرتا ہے۔ $\square$

درج ذیل مساوات کو **عمومی خطی مساوات**[39] کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 1.18: خط $8x + 5y = 20$ کی y قطع تلاش کریں۔
حل: ہم مساوات کو ڈھلوان۔قطع روپ میں لکھ کر y قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

یوں خط کی ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور y قطع 4 ہے۔ $\square$

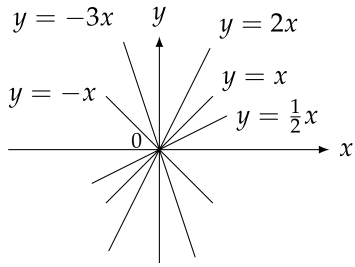
مثال 1.19: مبدا سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔
چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہو گا لہٰذا ان کی مساوات $y = mx$ ہو گی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔ $\square$

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بنا سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں **خطی مساوات**[40] کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

---

[39] general linear equation
[40] linear equations



شکل 1.15: مبدا سے گزرتا خط کی مساوات $y=mx$ ہے جہاں m خط کی ڈھلوان ہے

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔یہ جانتے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباو V اور برقی رو I کا تعلق $V=IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔اس مساوات کی ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔ □

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی

سوال 1.51 تا سوال 1.54 میں ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1.51: $A(-3,2),\ B(-1,-2)$
جواب: $2,-4;2\sqrt{5}$

سوال 1.52: $A(-1,-2),\ B(-3,2)$

سوال 1.53: $A(-3.2,-2),\ B(-8.1,-2)$
جواب: $-4.9,0;4.9$

سوال 1.54: $A(\sqrt{2},4),\ B(0,1.5)$

سوال 1.55 تا سوال 1.58 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.55: $x^2 + y^2 = 1$
جواب: اکائی دائرہ

سوال 1.56: $x^2 + y^2 = 2$

سوال 1.57: $x^2 + y^2 \leq 3$
جواب: رداس $\sqrt{3}$ کا دائرہ اور اس کی اندرون۔دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 1.58: $x^2 + y^2 = 0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

سوال 1.59 تا سوال 1.62 دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کی قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 1.59: $A(-1,2),\ B(-2,-1)$
جواب: $m_\perp = -\frac{1}{3}$

سوال 1.60: $A(-2,1),\ B(2,-2)$

سوال 1.61: $A(2,3),\ B(-1,3)$
جواب: $\perp$ غیر معین ہے۔

سوال 1.62: $A(-2,0),\ B(-2,-2)$

سوال 1.63 تا سوال 1.66 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتا (الف) انتصابی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 1.63: $(-1, \frac{4}{3})$
جواب: (الف) $x = -1$ (ب) $y = \frac{4}{3}$

سوال 1.64: $(\sqrt{2}, -1.3)$

سوال 1.65: $(0,-\sqrt{2})$
جواب: (الف) $x=0$ $y=-\sqrt{2}$

سوال 1.66: $(-\pi,0)$

سوال 1.67 تا سوال 1.80 میں خط کی مساوات تلاش کریں۔خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 1.67: نقطہ $(-1,1)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان -1 ہو۔
جواب: $y=-x$

سوال 1.68: نقطہ $(2,-3)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔

سوال 1.69: نقطہ $(3,4)$ اور $(-2,5)$ سے گزرتا خط۔
جواب: $y=-\frac{x}{5}+\frac{23}{5}$

سوال 1.70: نقطہ $(-8,0)$ اور $(-1,3)$ سے گزرتا خط۔

سوال 1.71: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔
جواب: $y=-\frac{5}{4}x+6$

سوال 1.72: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع -3 ہے۔

سوال 1.73: نقطہ $(-12,-9)$ سے گزرتا جس کی ڈھلوان 0 ہو۔
جواب: $y=-9$

سوال 1.74: نقطہ $(\frac{1}{3},2)$ سے گزرتا جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔

سوال 1.75: جس کا x قطع -1 اور y قطع 4 ہو۔
جواب: $y=4x+4$

سوال 1.76: جس کا x قطع 2 اور y قطع -6 ہو۔

سوال 1.77: جو نقطہ $(5,-1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x+5y=15$ کے متوازی ہو۔
جواب: $y=-\frac{2}{5}x+1$

سوال 1.78: جو نقطہ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔

سوال 1.79: نقطہ $4, 10$ سے گزرتا اور خط $6x - 3y = 13$ کا قائمہ ہو۔
جواب: $y = -\frac{x}{2} + 12$

سوال 1.80: نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتا اور خط $8x - 13y = 13$ کا قائمہ۔

خط کا x قطع اور y قطع تلاش کریں۔ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال 1.81 تا سوال 1.84)

سوال 1.81: $3x + 4y = 12$
جواب: قطع $x = 4$ ، قطع $y = 3$

سوال 1.82: $x + 2y = -4$

سوال 1.83: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
جواب: قطع $x = \sqrt{3}$ ، قطع $y = -\sqrt{2}$

سوال 1.84: $1.5x - y = -3$

سوال 1.85: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Bx - Ay = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔
جواب: جی ہاں۔خطوط قائمہ ہیں چونکہ ان کی ڈھلوان $-\frac{A}{B}$ اور $\frac{B}{A}$ ایک دوسرے کے منفی معکوس ہیں۔

سوال 1.86: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Ax + By = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال 1.87: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(-2, 3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ ، $\Delta y = -6$ ہیں۔ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔
جواب: $(3, -3)$

سوال 1.88: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(6, 0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = -6$ ، $\Delta y = 0$ ہیں۔ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 1.89: ایک ذرہ $A(x, y)$ سے $B(3, -3)$ منتقل ہوتا ہے۔اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ اور $\Delta y = 6$ ہیں۔ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔
جواب: $(-2, -9)$

سوال 1.90: ایک ذرہ $A(1, 0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1, 0)$ کو واپس لوٹتا ہے۔اس کے محدد میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال 1.91: پانی میں دباو پانی میں d گہرائی پر غوطہ خور p دباو محسوس کرے گا جہاں $p = kd + 1$ ہے جہاں k مستقل ہے۔پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر دباو کیا ہو گا؟
جواب: 5.97 کرہ ہوائی دباو

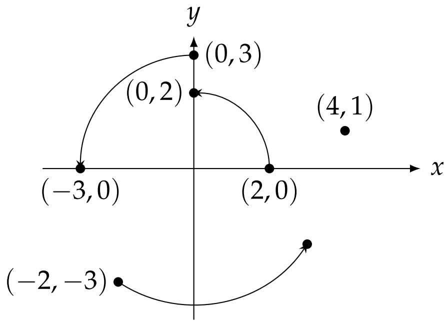
سوال 1.92: انعکاس شعاع ربع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع x محور سے منعکس ہوتی ہے۔زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 1.93: **سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ** سیلیسئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلیسئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟
جواب: جی ہاں۔ $C = F = -40°$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.94: ایک مثلث کے راس $A(1, 2)$ ، $B(5, 5)$ اور $C(4, -2)$ پر پائے جاتے ہیں۔مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 1.95: ایک مثلث کے راس $A(0, 0)$ ، $B(1, \sqrt{3})$ اور $C(2, 0)$ ہیں۔دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔



شکل 1.16: گھڑی مخالف 90° گھومنا (سوال 1.98)

سوال 1.96: دکھائیں کہ $A(2,-1)$ ، $B(1,3)$ اور $C(-3,2)$ چکور کی راسیں ہیں۔چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 1.97: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1,1)$ ، $(2,0)$ اور $(2,3)$ ہیں۔تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔
جواب: $(-1,4), (-1,-2), (5,2)$

سوال 1.98: مبدا کے گرد گھڑی مخالف 90° گھمانے سے نقطہ $(2,0)$ اور $(0,3)$ بالترتیب $(0,2)$ اور $(-3,0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

ا) $(4,1)$
ب) $(-2,-3)$
ج) $(2,-5)$
د) $(x,0)$
ہ) $(0,y)$
و) (x,y)
ز) کونسا نقطہ $(10,3)$ پر منتقل ہو گا؟

سوال 1.99: k کی کس قیمت کے لئے خط $2x+ky=3$ اور خط $4x+y=1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟
جواب: $k=\frac{1}{2}$ ، $k=-8,$

سوال 1.100: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1,2)$ اور خط $x+2y=3$ اور $2x-3y=-1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 1.101: دکھائیں کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع کا وسط $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہو گا۔

سوال 1.102: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0, y_0)$ سے خط $L : Ax + By = C$ تک فاصل درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

- L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔
- خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔
- N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصل تلاش کریں۔

ا) $N(2, 1), L : y = x + 2$

ب) $N(4, 6), L : 4x + 3y = 12$

ج) $N(a, b), L : x = -1$

د) $N(x_0, y_0), L : Ax + By = C$

1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ابلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دارومدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔چونکہ y کی قیمت مکمل طور پر x تعین کرتا ہے لہٰذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چونکہ $A = \pi r^2$ ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا رقبہ A تفاعل ہے۔مساوات $A = \pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لئے A کی یکتا قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا **دائرہ کار**[41] کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا **سعت**[42] کہتے ہیں۔چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0, \infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ہم

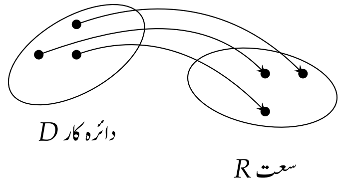
$$y = f(x) \qquad (\text{y برابر ہے x کا f})$$

لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y، متغیر x کا تفاعل ہے۔یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت x **غیر تابع متغیر**[43] ہے اور خارجی قیمت y **تابع متغیر**[44] ہیں۔ x کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہو گی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہو گی۔

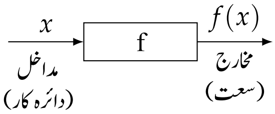
تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔

---

[41] domain
[42] range
[43] independent variable
[44] dependent variable



شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔



شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کا سعت R کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

2. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f ، نا کہ $f(x)$ ، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً حقیقی متغیرات[45] کے **حقیقی قیمت تفاعل**[46] پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$3\,\mathrm{m}$ رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi\,\mathrm{m}^2$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t-1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0 ، 2 ، $x+2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
F(0) &= 2(0-1) + 3 = -2 + 3 = 1\\
F(2) &= 2(2-1) + 3 = 2 + 3 = 5\\
F(x+2) &= 2(x+2-1) + 3 = 2x + 5\\
F(F(2)) &= F(5) = 2(5-1) + 3 = 11
\end{aligned}$$

□

---

[45] real variables
[46] real valued function

روایت دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔اس کو تفاعل کا **قدرتی دائرہ کار**[47] کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم "$y = x^2, x \geq 2$" لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔تفاعل $y = x^2$ کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کا سعت $[4, \infty)$ ہو گا جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

تفاعل	دائرہ کار(x)	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

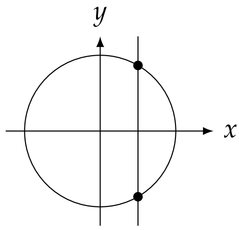
تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لئے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x = 0$ ، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لئے حقیقی y دیتا ہے۔تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔اس کا سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لئے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔تفاعل کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا۔ □

[47] natural domain



شکل 1.19: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط

تفاعل کی ترسیم

تفاعل f کی تقسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدد تفاعل f کی داخلی، خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر x کے لئے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہٰذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہٰذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔اگر تفاعل f کی دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تفاعل کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

مثال 1.24: وقفہ $[-2, 2]$ پر تفاعل $y = x^2$ ترسیم کریں۔

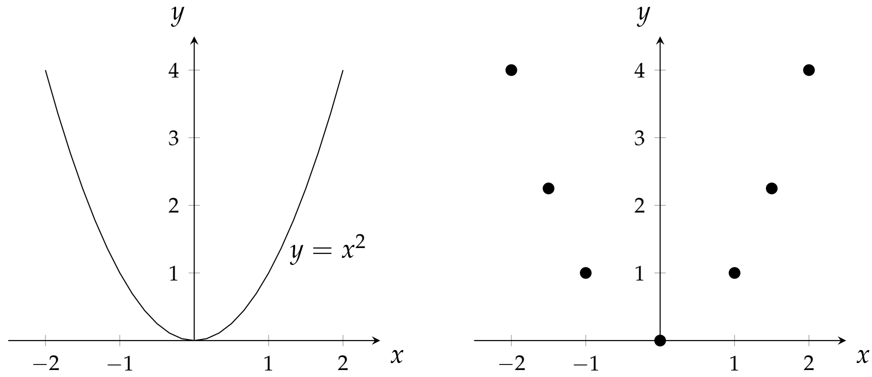
حل: **پہلا قدم:** پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو xy مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔

تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچیں۔ منحنی پر سرخی لکھیں۔ □

احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔



شکل 1.20: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال 1.24)

مجموعہ، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل $f+g$ ، $f-g$ اور fg کی تعریف درج ذیل ہے۔

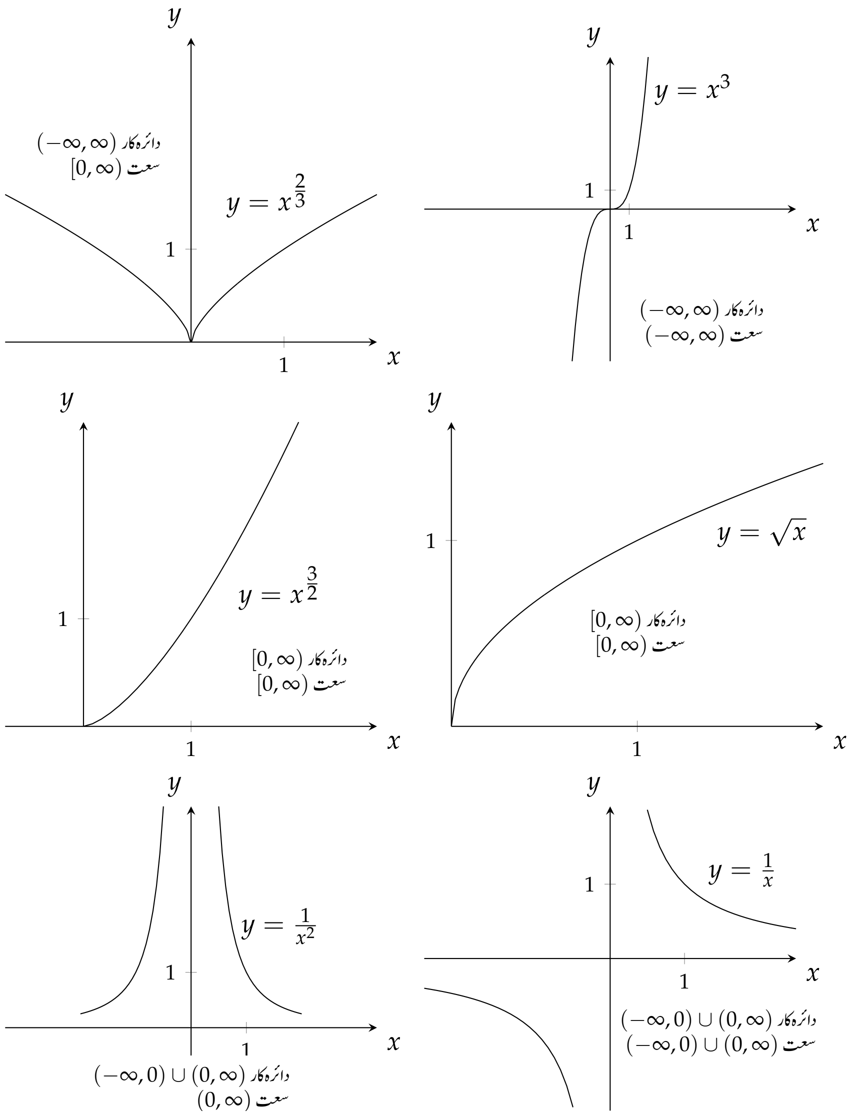
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\(fg)(x) &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

f اور g کی دائرہ کار کے اشتراک $D(f)\cap D(g)$ جہاں $g(x)\neq 0$ ہو ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہو گی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$



شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$3g$	$3g(x) = 3\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0,1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0,1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ ($x=1$ ماسوائے)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ ($x=0$ ماسوائے)

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جس کو **مرکب تفاعل**[48] $f \circ g$ کہتے ہیں۔

تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f \circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

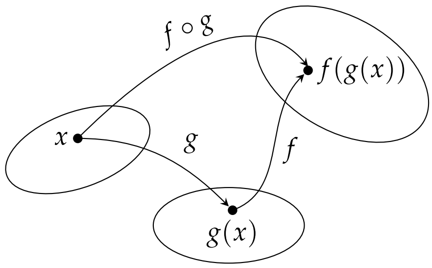
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f \circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جا سکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔ $f \circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

---

[48] composite function



شکل 1.22: مرکب تفاعل

معین $g \circ f$ حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $g \circ f$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f \circ g$ اور $g \circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = x + 1$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $(f \circ g)(x)$ ب. $(g \circ f)(x)$ ج. $(f \circ f)(x)$ د. $(g \circ g)(x)$

حل:

مرکب	دائرہ کار
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

یہ جاننے کے لئے کہ $f \circ g$ کا دائرہ کار کیوں $[-1, \infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x) = x + 1$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $x + 1 \geq 0$ یعنی $x \geq -1$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔تشاکل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ **جفت**[49] کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔تفاعل $f(x) = x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ہے۔

چونکہ $f(-x) = f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔یوں جفت تفاعل کی ترسیم y محور کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-الف)۔ y محور کے ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جا سکتی ہے۔

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ **طاق**[50] کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔تفاعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

طاق تفاعل کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-ب)۔چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔یہاں بھی y محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جا سکتی ہے۔

ٹکڑوں میں معین تفاعل

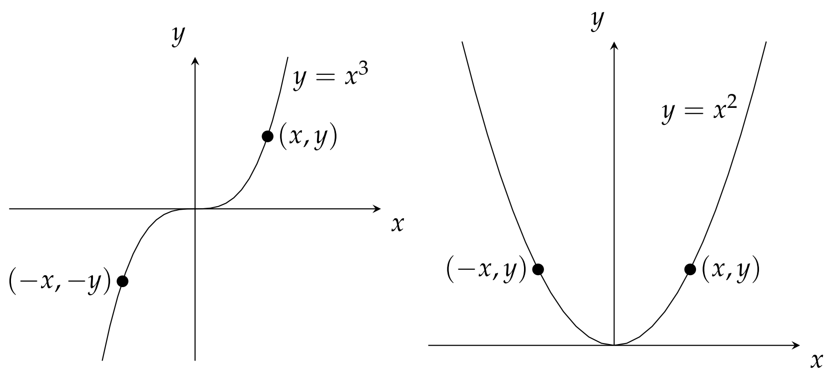
بعض اوقات ایک تفاعل دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات استعمال کرتا ہے۔اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفاعل ہے (شکل 1.24)۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔

---

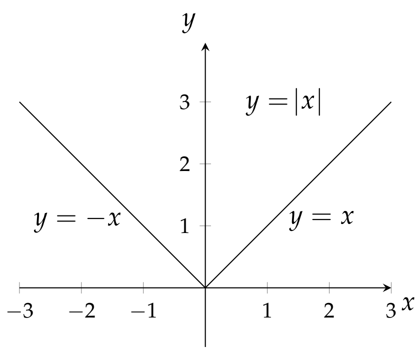
[49] even
[50] odd



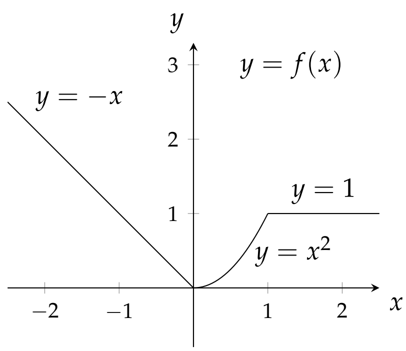
(ب) طاق تفاعل

(الف) جفت تفاعل

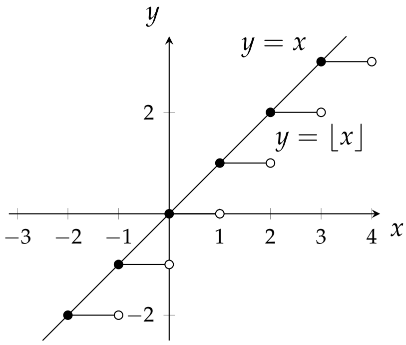
شکل 1.23: جفت اور طاق تفاعل



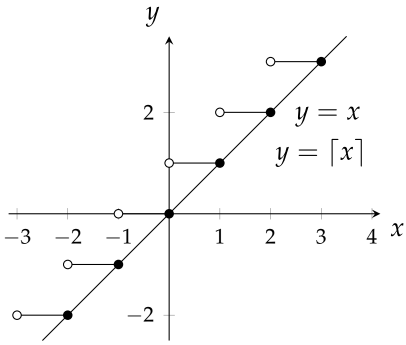
شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل



شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27



شکل 1.26: عدد صحیح زمین تفاعل (مثال 1.28)



شکل 1.27: عدد صحیح چھت تفاعل (مثال 1.29)

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل

ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو **بڑا ترین عدد تفاعل**[51] یا **عدد صحیح زمین تفاعل**[52] کہلاتا جس کو $\lfloor x \rfloor$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{array}{llll} \lfloor 2.4 \rfloor = 2, & \lfloor 1.9 \rfloor = 1, & \lfloor 0 \rfloor = 0, & \lfloor -1.2 \rfloor = -2 \\ \lfloor 2 \rfloor = 2, & \lfloor 0.2 \rfloor = 0, & \lfloor -0.3 \rfloor = -1, & \lfloor -2 \rfloor = -2 \end{array}$$

□

مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو **کم ترین عدد تفاعل**[53] یا **عدد صحیح چھت تفاعل**[54] کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل

greatest integer function[51]
integer floor function[52]
least integer function[53]
integer ceiling function[54]

1.26)۔ ۔اس کی مثال ٹیکسی کا کرایا ہے جو فی کلومیٹر واجب الادا ہوتا ہے۔اضافی نامکمل کلومیٹر کی صورت میں مکمل کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔یوں 17.2 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہو گا۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lceil 3.2 \rceil = 4, \quad \lceil 2.9 \rceil = 3, \quad \lceil 0 \rceil = 0, \quad \lceil 2 \rceil = 2,$$
$$\lceil -5 \rceil = -5, \quad \lceil -5.6 \rceil = -5, \quad \lceil -0.9 \rceil = 0, \quad \lceil -7.2 \rceil = -7$$

□

سوالات

سوال 1.103 تا سوال 1.108 میں تفاعل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1.103: $f(x) = 1 + x^2$
جواب: دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ، **سعت** $[1, \infty)$

سوال 1.104: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

سوال 1.105: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
جواب: دائرہ کار $(0, \infty)$ ، **سعت** $(0, \infty)$

سوال 1.106: $F(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}}$

سوال 1.107: $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$
جواب: دائرہ کار $[-2, 2]$ ، **سعت** $[0, 2]$

سوال 1.108: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4-z^2}}$

سوال 1.109: شکل 1.28 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

(ب) (الف)

شکل 1.28: اشکال برائے سوال 1.109

(ب) (الف)

شکل 1.29: اشکال برائے سوال 1.110

جواب: (الف) چونکہ چند x پر y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا x کا تفاعل نہیں ہے۔
(ب) چونکہ ہر x پر y کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہٰذا x کا تفاعل ہے۔

سوال 1.110: شکل 1.29 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

سوال 1.111: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی x کا تفاعل لکھیں۔

سوال 1.112: چکور کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں چکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔اب چکور کے رقبہ کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال 1.113: مکعب کی ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتری لمبائی d کی صورت میں لکھیں۔مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال 1.114: ربع اول میں نقطہ N تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔ N کے محدد کو مبدا سے N تک خط کی ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

تفاعل اور ترسیم

سوال 1.115 تا سوال 1.126 میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ان میں کونسی تشاکل پائی جاتی ہے (اگر پائی جاتی ہو تب)۔اشکال 1.21 میں دی ترسیم کا سہارا لیا جا سکتا ہے۔

سوال 1.115: $y = -x^3$

سوال 1.116: $y = -\frac{1}{x^2}$

سوال 1.117: $y = -\frac{1}{x}$

سوال 1.118: $y = \frac{1}{|x|}$

سوال 1.119: $y = \sqrt{|x|}$

سوال 1.120: $y = \sqrt{-x}$

سوال 1.121: $y = \frac{x^3}{8}$

سوال 1.122: $y = -4\sqrt{x}$

سوال 1.123: $y = -x^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.124: $y = (-x)^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.125: $y = (-x)^{\frac{2}{3}}$

سوال 1.126: $y = -x^{\frac{2}{3}}$

سوال 1.127: (الف) $x = |y|$ اور (ب) $y^2 = x^2$ ترسیم کریں۔یہ مساوات x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 1.128: (الف) $|x| + |y| = 1$ اور (ب) $|x + y| = 1$ ترسیم کریں۔یہ x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔وجہ پیش کریں۔

جفت اور طاق تفاعل

سوال 1.129 تا سوال 1.138 میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ جفت ہیں؟

سوال 1.129: $f(x) = 3$

سوال 1.130: $f(x) = x^{-5}$

سوال 1.131: $f(x) = x^2 + 1$

سوال 1.132: $f(x) = x^2 + x$

سوال 1.133: $g(x) = x^3 + x$

سوال 1.134: $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$

سوال 1.135: $h(t) = \frac{1}{t-1}$

سوال 1.136: $h(t) = \left|t^3\right|$

سوال 1.137: $h(t) = 2t + 1$

سوال 1.138: $h(t) = 2|t| + 1$

مجموعے، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

سوال 1.139 تا سوال 1.140 میں f ، g ، $f+g$ اور $f \cdot g$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 1.139: $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 1.140: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 1.141 تا سوال 1.142 میں f ، g ، $\frac{f}{g}$ اور $\frac{g}{f}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 1.141: $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

سوال 1.142: $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تفاعل کے مرکب

سوال 1.143: اگر $f(x) = x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $f(g(0))$ ج. $f(g(x))$ ہ. $f(f(-5))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(0))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

سوال 1.144: اگر $f(x) = x - 1$ اور $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $f(g(\frac{1}{2}))$ ج. $f(g(x))$ ہ. $f(f(2))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(\frac{1}{2}))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

سوال 1.145: اگر $u(x) = 4x - 5$ ، $v(x) = x^2$ اور $f(x) = \frac{1}{x}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $u(v(f(x)))$ ج. $v(u(f(x)))$ ہ. $f(u(v(x)))$

ب. $u(f(v(x)))$ د. $v(f(u(x)))$ و. $f(v(u(x)))$

سوال 1.146: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{x}{4}$ اور $h(x) = 4x - 8$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $h(g(f(x)))$ ج. $g(h(f(x)))$ ہ. $f(g(h(x)))$

ب. $h(f(g(x)))$ د. $g(f(h(x)))$ و. $f(h(g(x)))$

سوال 1.147 اور سوال 1.147 میں $f(x) = x - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $h(x) = x^3$ اور $j(x) = 2x$ لیں۔ سوال کے ہر جزو کو تفاعل کا مرکب لکھیں۔ مرکب میں f ، g ، h اور j میں سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل ہو سکتے ہیں۔

سوال 1.147:

ا. $y = \sqrt{x} - 3$ ج. $y = x^{\frac{1}{4}}$ ہ. $y = \sqrt{(x-3)^3}$

ب. $y = 2\sqrt{x}$ د. $y = 4x$ و. $y = (2x-6)^3$

سوال 1.148:

ا. $y = 2x - 3$ ج. $y = x^9$ ہ. $y = 2\sqrt{x-3}$

ب. $y = x^{\frac{3}{2}}$ د. $y = x - 6$ و. $y = \sqrt{x^3 - 3}$

سوال 1.149: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	
(ب)	$x + 2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ہ)	$1 + \frac{1}{x}$	x	
(و)	$\frac{1}{x}$		x

سوال 1.150: کوئی عدد x لیں۔اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟

ٹکڑوں میں معین تفاعل

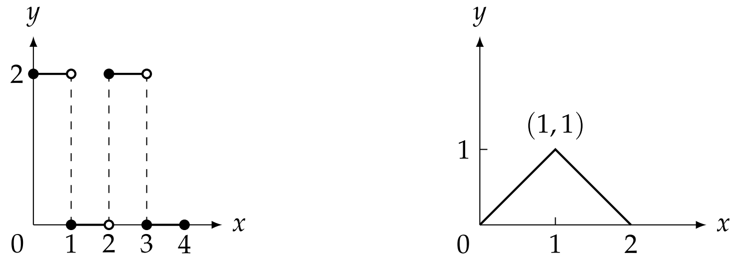
سوال 1.151 تا سوال 1.154 میں تفاعل ترسیم کریں۔

سوال 1.151:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

سوال 1.152:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



(ب) (ا)

شکل 1.30: اشکال برائے سوال 1.155

سوال 1.153:

$$F(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

سوال 1.154:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$$

سوال 1.155: شکل 1.30 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

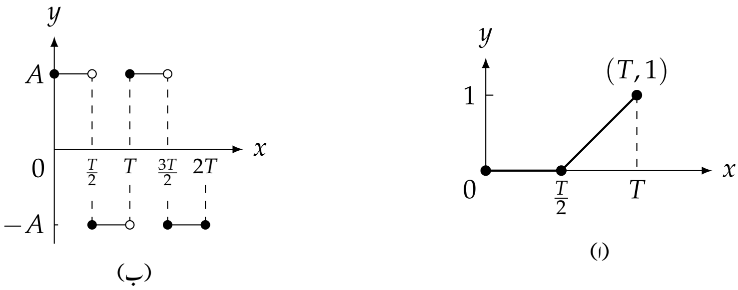
سوال 1.156: شکل 1.31 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چھت اور زمین تفاعل

سوال 1.157: x کی کن قیمتوں کے لئے (الف) $\lfloor x \rfloor = 0$ ہو گا؟ (ب) $\lceil x \rceil = 0$ ہو گا؟

سوال 1.158: کون سے عدد صحیح x مساوات $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال 1.159: کیا تمام x کے لئے $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل 1.31: اشکال برائے سوال 1.156

سوال 1.160: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔ $f(x)$ کو x کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} |\lfloor x \rfloor|, & x \geq 0 \\ |\lceil x \rceil|, & x < 0 \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل

سوال 1.161: فرض کریں کہ f جفت تفاعل اور g طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط $\Re$ پر معین ہیں۔ درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

ا. fg د. $f^2 = ff$ ز. $g \circ f$

ب. $\frac{f}{g}$ ہ. $g^2 = gg$ ح. $f \circ f$

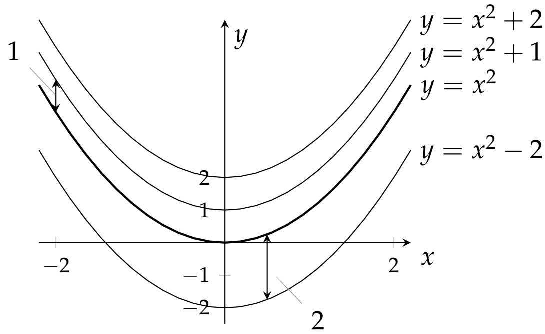
ج. $\frac{g}{f}$ و. $f \circ g$ ط. $g \circ g$

سوال 1.162: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

ترسیم

سوال 1.163: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = \sqrt{1-x}$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم کو بھی ترسیم کریں۔

سوال 1.164: فرض کریں کہ $f(x) = x - 7$ اور $g(x) = x^2$ ہیں۔ f اور g کے ساتھ $f \circ g$ اور $g \circ f$ کو بھی ترسیم کریں۔



شکل 1.32: تفاعل $f(x) = x^2$ کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال 1.30 اور مثال 1.31)۔

1.4 ترسیم کی منتقلی

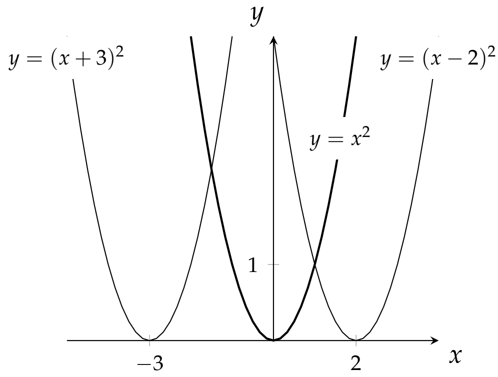
اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ایسا کرنے سے نئی مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کا ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتا ہے۔ہم دائرہ اور قطع مکافی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر دیگر منحنیات پر بھی قابل لاگو ہے۔

ترسیم کو کیسے منتقل کیا جاتا ہے

تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ $y = f(x)$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔

مثال 1.30: کلیہ $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے $y = x^2 + 1$ حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل 1.32)۔ □

مثال 1.31: مساوات $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = x^2 - 2$ ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل 1.32)۔ □



شکل 1.33: $y = x^2$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر x کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔ دائیں منتقلی کی خطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال 1.32 اور مثال 1.33)

مثال 1.32: $y = x^2$ میں x کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل 1.33)۔ $\square$

$y = f(x)$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لئے x کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال 1.33: $y = x^2$ میں x کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = (x-2)^2$ حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل 1.33)۔ $\square$

منتقلی کے کلیات

انتصابی منتقلی $\qquad y = f(x) + k$

$k > 0$ کی صورت میں ترسیم k اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ $k < 0$ کی صورت میں ترسیم $|k|$ اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

افقی منتقلی $\qquad y = f(x-h)$

$h > 0$ کی صورت میں ترسیم h اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ $h < 0$ کی صورت میں ترسیم $|h|$ اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

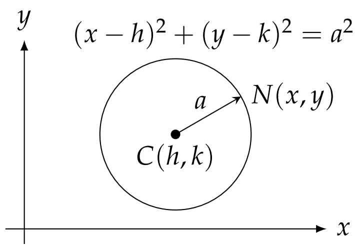
مثال 1.34: $y = (x-2)^2 + 3$ تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ □

مساوات دائرہ

ایک مقررہ نقطہ سے یکساں فاصلے پر نقطوں کا سلسلہ دائرہ کہلاتا ہے۔ مقررہ نقطہ کو دائرے کا **مرکز**[55] کہتے ہیں جبکہ مرکز سے دائرے تک فاصلے کو دائرے کی **رداس**[56] کہتے ہیں (شکل 1.34)۔ ہم نے مثال 1.11 میں دیکھ کہ مبدا کے گرد رداس a کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ہے۔ مرکز کو (h, k) منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ حاصل ہوتی ہے۔

رداس a کا دائرہ جس کا مرکز (h, k) ہو کی معیاری مساوات

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \tag{1.3}$$



شکل 1.34: xy مستوی میں h, k کے گرد رداس a کا دائرہ

center[55]
radius[56]

مثال 1.35: دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔ نئی مساوات $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ ہو گی۔ اس کا مرکز $(-2,3)$ ہو گا۔ □

مثال 1.36: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز $3,4$ پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$$

□

مثال 1.37: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 3$$

حل: اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رداس $a = \sqrt{3}$ اور مرکز $(h,k) = (1,-5)$ لکھے جا سکتے ہیں۔ □

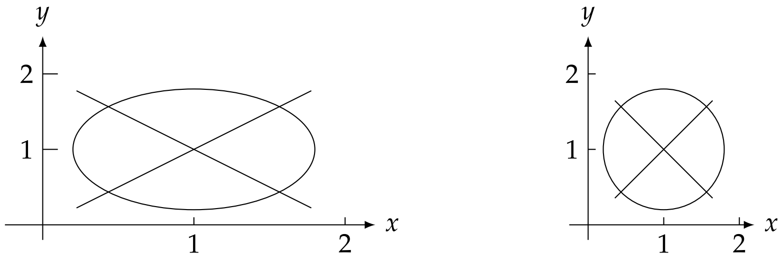
کمپیوٹر چکور نقش

چکور نقش سے مراد ایسا نقش ہے جس میں افقی اور انتصابی محدد کی پیائش ایک جیسی ہو۔ چکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔ غیر چکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔ چکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شیشہ نہیں ہے۔ بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام x اور y محدد کی پیائش غیر یکساں کرتے ہیں۔ یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔ عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جا سکتا ہے کہ وہ چکور ترسیم ہی دکھائے۔ شکل 1.35 میں چکور اور غیر چکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائری کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 1.38: درج ذیل دائرہ کا رداس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$



(ا) چکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے

(ب) غیر چکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے

شکل 1.35: چکور اور غیر چکور نقش

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}x^2+y^2+4x-6y-3&=0\\ x^2+4x+y^2-6y&=3\\ x^2+4x+4-4+y^2-6y+9-9&=3\\ (x+2)^2-4+(y-3)^2-9&=3\\ (x+2)^2+(y-3)^2&=16=4^2\end{aligned}$$

یوں رداس $a=4$ اور مرکز $(h,k)=(-2,3)$ ہیں۔ □

اندرون اور بیرون

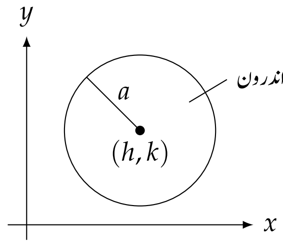
دائرہ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے کم ہو۔ یہ نقطے درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2+(y-k)^2<a^2$$

اس خطہ کو دائرے کی اندرون[57] کہتے ہیں (شکل 1.36)۔

---

[57] interior



شکل 1.36: دائرے کی اندرون

دائرے کی بیرون[58] ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے زیادہ ہو۔ایسے نقطے درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2+(y-k)^2>a^2$$

مثال 1.39:

خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کی اندرون	$x^2+y^2<1$
اکائی دائرہ اور اس کی اندرون	$x^2+y^2\leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2+y^2>1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2+y^2\geq 1$

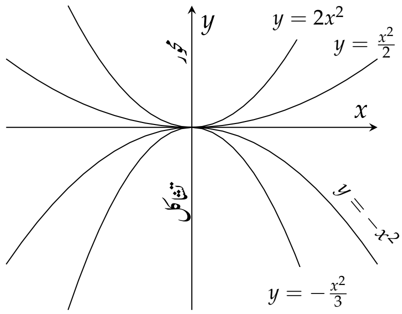
□

قطع مکافی ترسیم

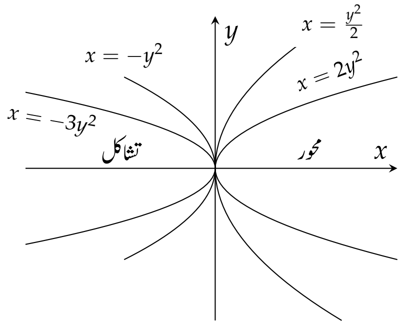
مساوات $y=3x^2$ یا $y=-5x^2$ جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y=ax^2$$

[58] exterior



شکل 1.37: قطع مکافی $y = ax^2$



شکل 1.38: قطع مکافی $x = ay^2$

کی ترسیم کو **قطع مکافی**[59] کہتے ہیں جس کی **محور**[60] تشاکل y محور ہے۔اس قطع مکافی کی راس[61] (جہاں قطع مکافی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبدا پر پائی جاتی ہے۔مثبت a $(a > 0)$ کی صورت میں یہ قطع مکافی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی a $a < 0$ کی صورت میں یہ قطع مکافی نیچے کو کھلتا ہے۔ $|a|$ کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکافی اتنا تنگ ہو گا (شکل 1.37)۔

کلیہ $y = ax^2$ میں x اور y کو آپس میں ادل بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$x = ay^2$$

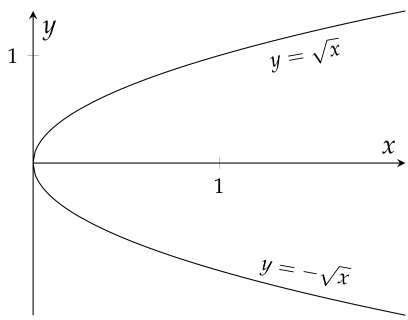
اس قطع مکافی کی ترسیم کا محور، x محور ہو گا اور اس کی راس مبدا پر پائی جائے گی (شکل 1.38)۔

مثال 1.40: کلیہ $x = y^2$ ہمیں x بطور y کا تفاعل دیتا ہے لیکن یہ ہمیں y بطور x کا تفاعل نہیں دیتا ہے۔ y کے لئے حل کرتے ہوئے $y = \mp\sqrt{x}$ حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت x کے لئے y کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تفاعل کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

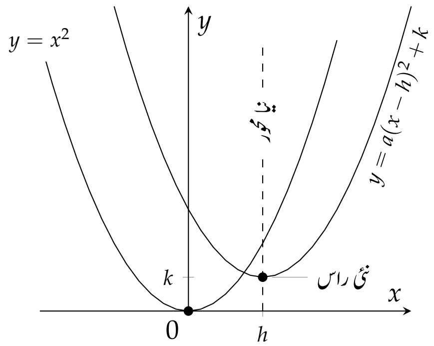
ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت x کے لئے یہ کلیات y کی ایک قیمت دیتے ہیں۔ $y = \sqrt{x}$ کی ترسیم قطع مکافی کا بالائی حصہ اور $y = -\sqrt{x}$ قطع مکافی کا نچلا حصہ دیتے ہیں (شکل 1.39)۔

□

[59] parabola
[60] axis
[61] vertex



شکل 1.39: تفاعل $y=\sqrt{x}$ اور $y=-\sqrt{x}$ کی ترسیم مبدا پر ملتے ہیں اور مساوات $x=y^2$ کی ترسیم دیتے ہیں (مثال 1.40)



شکل 1.40: قطع مکافی $y=ax^2,\ a>0$ کو h اکائیاں دائیں اور k اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے

دو درجی مساوات $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

قطع مکافی $y=ax^2$ کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y=a(x-h)^2 \tag{1.4}$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y-k=a(x-h)^2 \tag{1.5}$$

لکھتے ہیں۔دونوں منتقلی سے قطع مکافی کی راس (h,k) کو منتقل ہوتی ہے جبکہ اس کا محور $x=k$ ہو گا (شکل 1.40)۔

مساوات 1.5 کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$y=ax^2+bx+c \tag{1.6}$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت $y=ax^2$ کی ترسیم ہو گی جس کو کہیں اور منتقل کیا گیا ہے۔کیوں؟ اس لئے کہ جس طرح مساوات 1.5 سے مساوات 1.6 حاصل کی گئی اسی طرح واپس مساوات 1.6 سے مساوات 1.5 بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ منحنی $y=ax^2+bx+c$ اور $y=ax^2$ کی صورت اور سمت بندی ایک جیسی ہیں۔

قطع مکافی $y=ax^2+bx+c$ کا محور خط $x=-\frac{b}{2a}$ ہو گا۔اس کا قطع y حاصل کرنے کی خاطر $x=0$ پر کیا جائے گا۔

منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کی ترسیم

مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم قطع مکافی ہے جو $a > 0$ کی صورت میں اوپر رخ اور $a < 0$ کی صورت میں نیچے رخ کھلتا ہے۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{1.7}$$

اس کی راس اس نقطے پر ہو گی جہاں قطع مکافی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔راس کا x محدد $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا جس کو قطع مکافی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1.41: ترسیم قطع مکافی

مساوات $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ترسیم کریں۔

حل: **پہلا قدم:** مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

دوسرا قدم: چونکہ $a < 0$ ہے لہٰذا قطع مکافی نیچے کھلا ہے۔

تیسرا قدم: قطع مکافی کی محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

یوں راس کا x محدد -1 ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

اس طرح راس $(-1, \frac{9}{2})$ ہو گی۔

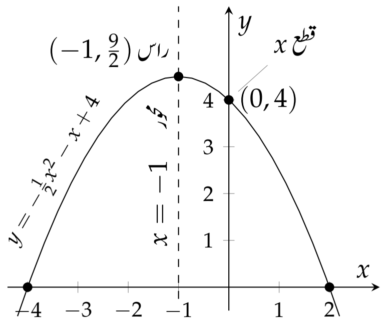
چوتھا قدم: قطع x (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \qquad \text{قطع مکافی کی مساوات میں } y = 0 \text{ پر کریں}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \qquad \text{دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں}$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$x = 2, \quad x = -4$$



شکل 1.41: ترسیم قطع مکافی (مثال 1.41)

پانچواں قدم: آپ $y = ax^2$ کو ترسیم کرتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کر کے منتقلی کے بعد کے xy محور کھینچیں (شکل 1.41)۔ $\square$

سوالات

ترسیم کی منتقلی

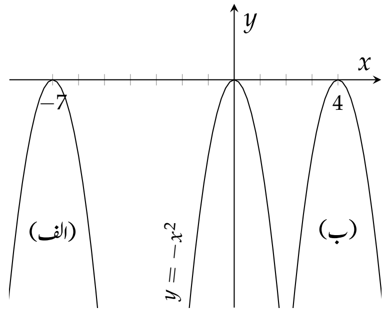
سوال 1.165: شکل 1.42 میں $y = -x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

سوال 1.166: شکل 1.43 میں $y = x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

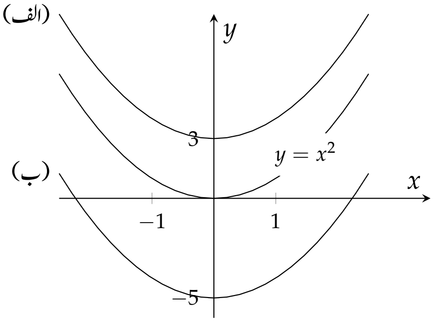
سوال 1.167: شکل 1.44 میں دکھائے گئے ترسیم کی مساوات درج ذیل میں سے منتخب کریں۔

$$y = (x-1)^2 - 4, \quad y = (x-2)^2 + 2, \quad y = (x+2)^2 + 2, \quad y = (x+3)^2 - 2$$

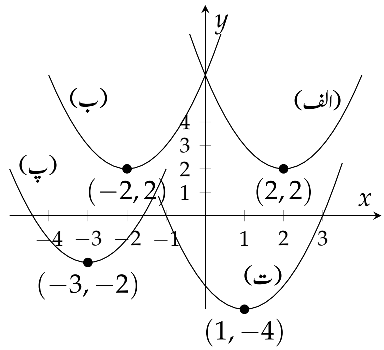
سوال 1.168: شکل 1.45 میں $y = -x^2$ کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔ چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔



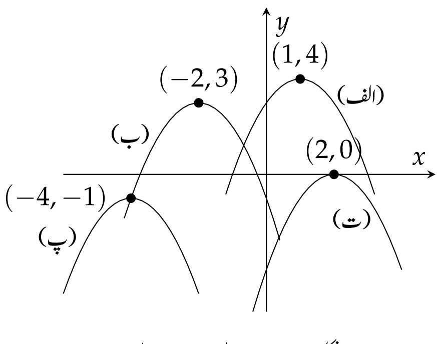
شکل 1.42: اشکال برائے سوال 1.165



شکل 1.43: اشکال برائے سوال 1.166



شکل 1.44: اشکال برائے سوال 1.167



شکل 1.45: اشکال برائے سوال 1.168