احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xi

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 14
1.3 تفاعل 30
1.4 ترسیم کی منتقلی 52
1.5 تکونیاتی تفاعل 72

2 حدود اور استمرار 93
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 93
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 110
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف 123
2.4 تصور حد کی توسیع 143
2.5 استمرار 163
2.6 مماسی خط 181

3 تفرق 195
3.1 تفاعل کا تفرق 195
3.2 قواعد تفرق 217
3.3 تبدیلی کی شرح 236
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 253
3.5 زنجیری قاعدہ 274
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 291
3.7 دیگر شرح تبدیلی 308

4 تفرق کا استعمال 323
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں 323
4.2 مسئلہ اوسط قیمت 337
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ 353
4.3.1 پرکھ 353
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم 365
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء 388
4.6 بہترین بنانا 415
4.7 خط بندی اور تفرقات 439
4.8 ترکیب نیوٹن 460

5 تکمل 471
5.1 غیر قطعی تکملات 471
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی 483
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق 499
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ 511
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات 527
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ 555
5.7 بنیادی مسئلہ 571
5.8 قطعی تکمل میں بدل 592
5.9 اعدادی تکمل 598
5.10 قاعدہ ذوزنقہ 598

6 تکمل کا استعمال 617
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ 617
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 621
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش 632
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا 639
6.4 نلکی چھلے 654
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 667
6.6 سطح طواف کا رقبہ 677
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 689
6.7.1 وسطانی مرکز 701
6.8 کام 706
6.9 فشار سیال اور قوت سیال 720
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال 730

7 ماورائی تفاعل 743
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق 744

7.2 قدرتی لوگارتھم 762
7.3 قوت نمائی تفاعل 779
7.4 a^x اور $\log_a x$ 794
7.5 افزائش اور تنزل 805
7.6 قاعدہ لھوپیٹال 819
7.7 اضافی شرح نمو 835
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش 840
7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل 846
7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل 862
7.10 ہذلولی تفاعل 879
7.11 یک رتبی تفرقی مساوات 900
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان 918

8 تکمل کے طریقے 929
8.1 تکمل کے بنیادی کلیات 929
8.2 تکمل بالحصص 945
8.2.1 بار بار استعمال 950
8.3 جزوی کسر 959
8.4 تکونیاتی بدل 974
8.5 جدول تکمل اور کمپیوٹر 985
8.6 غیر مناسب تکمل 1002

9 لامتناہی تسلسل 1029
9.1 اعداد کی ترتیب کی حد 1029
9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے 1048
9.3 لامتناہی تسلسل 1064
9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ 1083
9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ 1093
9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ 1103
9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز 1115
9.8 طاقتی تسلسل 1129
9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل 1145
9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے 1156
9.11 طاقتی تسلسل کے استعمال 1175

10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد 1195
10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں 1195
10.2 سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی 1219

10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا 1229
10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول 1243
10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات 1259
10.6 قطبی محدد 1273
10.7 قطبی محدد میں ترسیم 1285
10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات 1299
10.8.1 دائرے 1300
10.9 قطبی محدد میں تکمل 1314

11 سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری 1327
11.1 مستوی میں سمتیات 1327
11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات 1344
11.2.1 کرہ 1351
11.3 ضرب نقطہ 1361
11.3.1 حساب 1362
11.4 صلیبی ضرب 1376
11.5 فضا میں خطوط اور مستویات 1391
11.6 نلکی اور مربع سطحیں 1405
11.7 نلکی اور کروی محدد 1423

12 سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت 1435
12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات 1435
12.2 گولا کی حرکت کی نمونہ کشی 1458
12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ 1467
12.4 انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ 1475
12.5 فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت 1497

13 کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات 1513
13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل 1513
13.2 حد اور استمرار 1528
13.3 جزوی تفرقات 1543
13.4 تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات 1560
13.5 زنجیری قاعدہ 1577
13.6 پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات 1592
13.7 رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں 1599
13.8 انتہائی قیمتیں اور نقاط زین 1620
13.8.1 نتیجہ 1629
13.9 لیگرینج ضاربین 1638
13.10 کلیہ ٹیلر 1655

14 تکمل بالکثرت 1663
14.1 دوہرا تکملات 1663
14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت 1683
14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ 1699
14.4 کارتیسی محدد میں تہرا تکمل 1710
14.5 تعین بعدی کمیت اور معیار اثر 1724
14.6 نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل 1733
14.7 تکملات بالکثرت میں بدل 1749

جوابات 1751

ا ضمیمہ اول 1759

ب ضمیمہ دوم 1761

ج ضمیمہ تین 1763

د ضمیمہ چار 1765

ھ ضمیمہ پانچ 1767

و ضمیمہ چھ 1769

ز ضمیمہ سات 1771

ح ضمیمہ آٹھ 1773

ط ضمیمہ آٹھ 1775

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

14.1 دوہرا تکملات

ہم xy مستوی میں محدود خطہ پر استمراری تفاعل $f(x, y)$ کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دو گنّا) تکمل اور باب 5 میں متعارف کردہ ایک گنّا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنّا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جا سکتی ہے۔

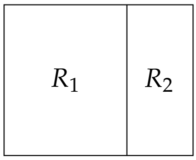
مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل $f(x, y)$ درج ذیل مستطیل خطہ R میں معین ہے۔

$$R: \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

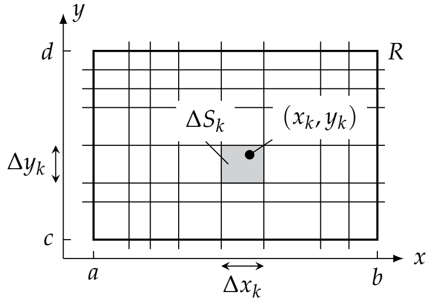
ہم تصور میں R پر x اور y محور کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو R کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.1)۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ ΔS_k میں ایک نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ J_n لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k \tag{14.1}$$



$$\iint\limits_{R_1\cup R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

شکل 14.2: دوہرا تکملات بھی ایک گنا تکملات کی طرح مجموعیت دائرہ کار کی خاصیت رکھتے ہیں۔



شکل 14.1: خطہ R کو مستطیل جال چھوٹے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے رقبے $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ہوں گے۔

اگر پورے R میں f استمراری ہو، تب، ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ Δx اور Δy دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے سے مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو R پر f کا **دوہرا تکمل**[1] کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}S \quad \text{یا} \quad \iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k \tag{14.2}$$

واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات $[a,b]$ اور $[c,d]$ کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات 14.2 میں حد کی قیمت، نا تو رقبات ΔS_k کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر ΔS_k میں نقطہ (x_k,y_k) کے مقام پر منحصر ہو گی۔ انفرادی مجموعات J_n کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کا حد آخر میں وہی ایک ہو گا۔ استمراری f کے لئے اس حد کی وجودیت اور یکتائی کے ثبوت اعلٰی نصاب میں دیے جاتے ہیں۔ دوہرا تکمل کی وجودیت کے لئے f کا استمرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

دوہرا تکملات کے خواص

ایک گنا تکملات کی طرح، دوہرا تکملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لئے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

ا. $\iint\limits_{R} kf(x,y)\,\mathrm{d}S = k\iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}S$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

[1] double integral

ب. $\iint\limits_R (f(x,y) \mp g(x,y))\,\mathrm{d}S = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \mp \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$

ج. اگر R پر $f(x,y) \geq 0$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \geq 0$ ہو گا۔

د. اگر R پر $f(x,y) \geq g(x,y)$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \geq \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$ ہو گا۔

یہ خواص ایک گنا تکملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ 5.6)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

ھ. $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$

جہاں ایک دوسرے کو نا ڈھانپنے والے مستطیل R_1 اور R_2 خطوں کا اشتراک R ہے (شکل 14.2)۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا تکملات بطور حجم

مثبت $f(x,y)$ کی صورت میں ہم مستطیل خطہ R پر f کے دوہرا تکمل کو ٹھوس منشور نما کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی نچلا سطح R اور بالائی سطح $z = f(x,y)$ ہو گی (شکل 14.3)۔ مجموعہ $J_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta S_k$ میں ہر رکن $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ ایک انتصابی مستطیلی منشور نما کا حجم ہو گا جو بنیاد ΔS_k پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینی قیمت ہو گی۔ یوں مجموعہ J_n پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمین ہو گی۔ اس حجم کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{حجم} = \lim J_n = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \tag{14.3}$$

جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج، باب 6 میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔

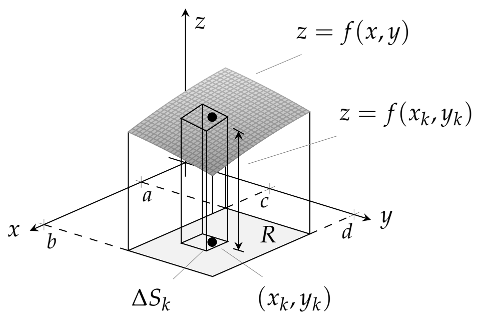
دوہرا تکمل کے حصول کا مسئلہ فوبنی

فرض کریں ہم مستوی xy میں مستطیل خطہ $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر مستوی $z = 4 - x - y$ کے نیچے حجم تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ 6.2 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور x کے عمودی ٹکیاں لیں (شکل 14.4) تب حجم

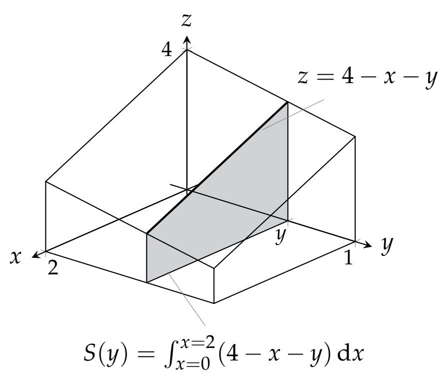
$$\int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.4}$$

ہو گا جہاں x پر رقبہ عمودی تراش $S(x)$ ہے۔ ہم x کی ہر قیمت کے لئے درج ذیل تکمل سے $S(x)$ معلوم کر سکتے ہیں

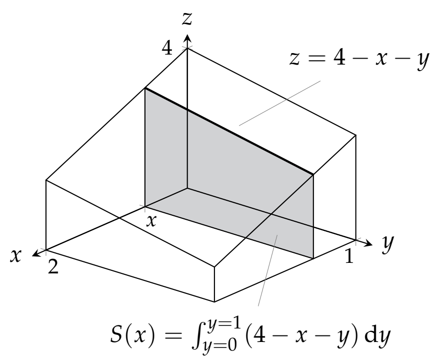
$$S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \tag{14.5}$$



شکل 14.3: ٹھوس جسم کو تخمینی طور پر متعدد مستطیل منشور نما سے ظاہر کرتے ہوئے ہم زیادہ عمومی منشور نما کے حجم کو بطور دوہرا تکمل تعین کر سکتے ہیں۔ یہاں منشور کا حجم R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمل ہو گا۔



شکل 14.5: رقبہ عمودی تراش $S(y)$ حاصل کرنے کے لئے ہم y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔



شکل 14.4: رقبہ عمودی تراش $S(x)$ حاصل کرنے کے لئے ہم x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

جو منحنی $z = 4 - x - y$ کے نیچے، x پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہو گا۔ رقبہ $S(x)$ کے حصول میں x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 14.3 اور مساوات 14.4 کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہو گا۔

(14.6)
$$\begin{aligned}
\text{حجم} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\frac{7}{2} - x \Big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5
\end{aligned}$$

اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ، جسے **بارہا تکمل**[2] یا **اعادہ تکمل**[3] کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں اور اس کے بعد y کو مستقل ٹھراتے ہوئے، x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔

اگر ہم محور y کے عمودی ٹکیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا (شکل 14.5)؟ ایسی صورت میں ایک علامتی عمودی تراش رقبہ، y کا تفاعل ہو گا:

$$S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y \tag{14.7}$$

یوں پورے جسم کا حجم

$$\text{حجم} = \int_{y=0}^{y=1} S(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)\,\mathrm{d}y = \left[6y - y^2 \right]_0^1 = 5 \tag{14.8}$$

ہو گا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

ہم اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$\text{حجم} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

---

[2] repeated integral
[3] iterated integral

لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے $4-x-y$ کا تکمل $x=0$ تا $x=2$ لیں۔ اس کے بعد x کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $y=0$ تا $y=1$ لیں۔ اس بار ہم بارہا تکمل کے حصول میں پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں جو مساوات 14.6 میں تکمل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ $R: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ پر درج ذیل دوہرا تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint\limits_R (4-x-y)\,\mathrm{d}S$$

اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں تکمل اس دوہرا تکمل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا تکمل، کسی بھی ترتیب سے، بارہا تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (جناب فوبنی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

مسئلہ 14.1: **مسئلہ فوبینی (پہلا روپ)**
اگر مستطیل خطہ $R: a \le x \le b, c \le y \le d$ پر $f(x,y)$ استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

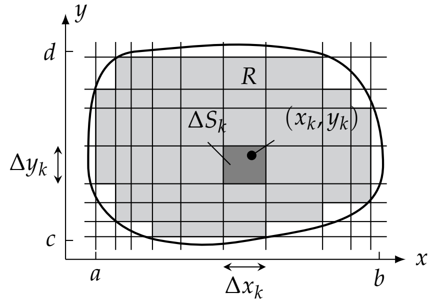
مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں دوہرا تکمل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے لحاظ سے تکمل لے سکتے ہیں۔

مسئلہ فوبنی مزید کہتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بارہا تکمل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کار آمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم جلد ایک مثال میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم x محور یا y محور کے عمودی سطحیں لے کر ٹکیاں کاٹ سکتے ہیں۔

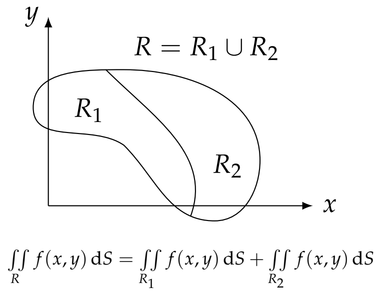
مثال 14.1: خطہ $R: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$ میں $f(x,y) = 1-6x^2y$ کے دوہرا تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: مسئلہ فوبنی کے تحت درج ذیل ہو گا:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{-1}^1 \int_0^2 (1-6x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \Big[x-2x^3y\Big]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^1 (2-16y)\,\mathrm{d}y = \Big[2y-8y^2\Big]_{-1}^1 = 4$$



شکل 14.6: غیر مستطیل محدود خطہ کو مستطیل جال سے خانہ بند کیا گیا ہے۔



شکل 14.7: مستطیل خطہ کی مجموعیت کی خاصیت ان غیر مستطیل خطوں کے لئے بھی کارآمد ہے جن کی پوری سرحد استمراری منحنیات سے بنی ہو۔

تکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \Big[y-3x^2y^2\Big]_{y=-1}^{y=1} \mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 \Big[(1-3x^2)-(-1-3x^2)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2\,\mathrm{d}x = 4\end{aligned}$$

□

آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا تکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسما[4] میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

میکسما احکامات	درکار دوہرا تکمل
integrate(integrate($x^2 * y, x), y$);	$\iint x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
integrate(integrate($x * \cos(y), x, 0, 1), y, -\%pi/3, \%pi/4$);	$\int_{-\pi/3}^{\pi/4}\int_0^1 x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات

محدود غیر مستطیل خطہ پر تفاعل $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی R پر مستطیل جال بچھاتے ہیں (شکل 14.6) لیکن جزوی مجموعہ میں صرف ان چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہوں۔ ہم

[4] wxMaxima

ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ ΔS_k میں کوئی نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

اس مجموعہ میں اور مستطیل خطے پر مجموعہ (مساوات 14.1) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام ΔS_k مل کر خطہ R کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے ہیں۔البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو، J_n میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور R کا زیادہ سے زیادہ حصہ J_n میں شامل ہو گا۔ اگر f استمراری ہو اور R کی سرحد، متغیر x کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل اور (یا) متغیر y کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کی ترسیمات، ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر مختارانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ J_n کا حد موجود ہو گا۔ ہم اس حد کو R پر f کا **دوہرا تکمل** کہتے ہیں:

$$\iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum f(x, y_k)\Delta S_k$$

یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

غیر مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کے دوہرا تکملات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی ہے کہ اگر R کو ایسے دو خطوں R_1 اور R_2 میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہوں (مثال کے لئے شکل 14.7 دیکھیں) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x, y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x, y)\,\mathrm{d}S$$

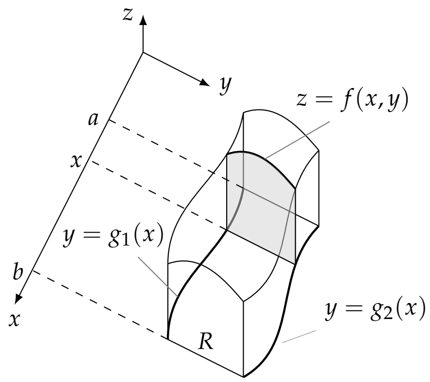
ہم R پر استمراری اور مثبت f کی صورت میں R اور $z = f(x, y)$ کے بیچ ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی $\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}S$ کرتے ہیں۔

اگر شکل 14.8 میں مستوی xy میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کی "بالائی" حد $y = g_2(x)$ ، "زیریں" حد $y = g_1(x)$ ، اور اطراف کے حدود خط $x = a$ اور خط $x = b$ ہوں تب ہم حجم H کو ٹکیوں کی ترکیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے رقبہ عمودی تراش تلاش کرتے ہیں

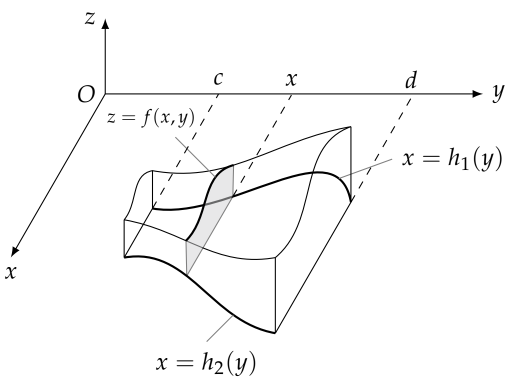
$$S(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

اور اس کے بعد $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیتے ہوئے بارہا تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{14.9}$$



شکل 14.8: سایہ دار انتصابی ٹکیہ کا رقبہ $S(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کرنے کے لئے ہم $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیں گے۔



شکل 14.9: سایہ دار ٹکیہ کا رقبہ $S(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ ہے۔
ٹھوس جسم کا حجم $\int_c^d S(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔

اسی طرح اگر شکل 14.9 میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کے حدود $x = h_2(y)$ ، $x = h_1(y)$ اور خط $y = c$ اور $y = d$ ہوں تب ٹکیوں کی ترکیب سے بارہا تکمل سے حجم تلاش کیا جا سکتا ہے:

$$H = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{14.10}$$

ہم نے دیکھا کہ مساوات 14.9 اور مساوات 14.9، جو R پر f کے دوہرا تکمل ہیں، دونوں حجم دیتے ہیں۔ اس کی وجہ مسئلہ فوبینی کی درج ذیل زیادہ مضبوط صورت ہے۔

مسئلہ 14.2: **مسئلہ فوبینی (مضبوط روپ)**
فرض کریں خطہ R پر f استمراری ہے۔

ا. اگر R کو $a \le x \le b$ ، $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[a,b]$ پر g_1 اور g_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y) \,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

ب. اگر R کو $c \le y \le d$ ، $h_1(y) \le y \le h_2(y)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[c,d]$ پر h_1 اور h_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

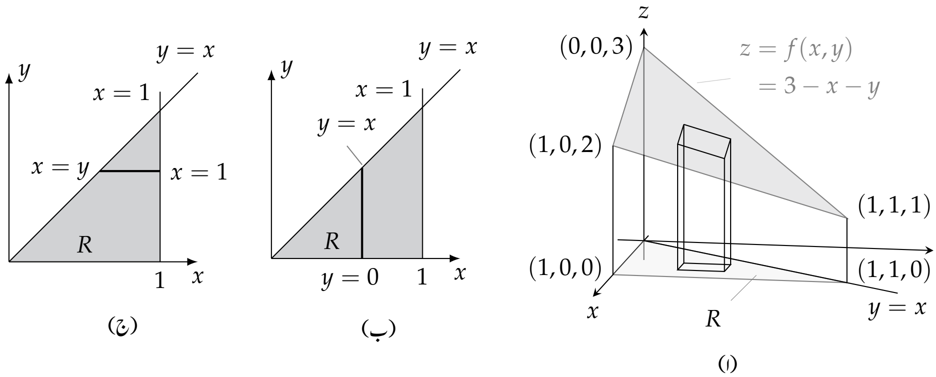
$$\iint\limits_R f(x,y) \,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

مثال 14.2: ایک منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں ایک مثلث ہو، جس کے اضلاع محور x ، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ ہوں اور جس کا راس درج ذیل مستوی میں پایا جاتا ہو، کا حجم تلاش کریں۔

$$z = f(x,y) = 3 - x - y$$

حل: ہم دیکھتے ہیں (شکل 14.10-ا) کہ 0 اور 1 تک کسی بھی x کے لئے y کی قیمت $y = 0$ تا $y = x$ ہو گی (شکل 14.10-ب)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[3y - xy - \frac{y^2}{2}\Big]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big(3x - \frac{3x^2}{2}\Big) \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\Big]_{x=0}^{x=1} = 1 \end{aligned}$$



شکل 14.10: منشور کا حجم (مثال 14.2)

تکملات کی ترتیب الٹ کرنے سے درج ذیل ہو گا (شکل 14.10-ج)۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1
\end{aligned}
$$

دونوں تکملات کے جواب ایک جیسے ہیں۔ہمیں یہی توقع تھی۔ □

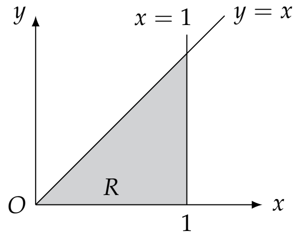
اگرچہ مسئلہ فوبنی ہمیں یقین دھیانی کرتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل میں کسی بھی ترتیب سے تکملات لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے، حقیقت میں ایک تکمل کا حصول دوسرے سے آسان ہو سکتا ہے۔ اگلی مثال میں آپ ایسی صورت حال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.3: مستوی xy میں محور x ، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$
\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}S
$$

حل: تکمل کا خطہ شکل 14.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لیں تب

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(y\frac{\sin x}{x}\right]_{y=0}^{y=x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(1) + 1 \approx 0.46
\end{aligned}
$$



شکل 14.11: تکمل کا دائرہ کار برائے مثال 14.3

ہو گا۔ اگر ہم تکمل لینے کی ترتیب الٹ کریں تب

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

ہو گا اور چونکہ $\int ((\sin x)/x)\, \mathrm{d}x$ کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے للٰذا ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہیں۔

قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں کہ کس ترتیب سے تکمل لینے سے ہمیں آسانی ہو گی للٰذا اس پر زیادہ مت سوچیں اور کسی ایک ترتیب سے حل کرنے کی کوشش کریں اور اگر مشکلات پیش آئیں تب تکمل کی ترتیب الٹ کر کے دوبارہ کوشش کریں۔ □

تکمل کی حدوں کی تلاش

دوہرا تکمل کی قیمت کے حصول میں سب سے مشکل کام تکمل کی حدیں تلاش کرنا ہو سکتا ہے۔ خوش قسمتی سے ایک اچھا طریقہ کار موجود ہے جس پر ہم چل سکتے ہیں۔

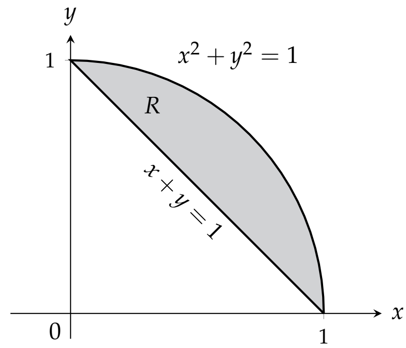
تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار

(ا) خطہ R پر $\iint_R f(x,y)\, \mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لینے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

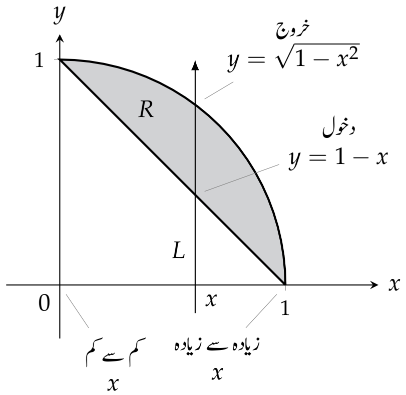
1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.12-ا)۔

2. تکمل کی y حدیں: بڑھتی y رخ خطہ R سے گزرتا ہوا انتصابی خط L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی y حدیں ہوں گی (شکل 14.12-ب)۔

3. تکمل کی x حدیں: متغیر x کی وہ قیمتیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام انتصابی لکیریں شامل ہوں (شکل 14.12-ب)۔ یہ قیمتیں تکمل کی x حدیں ہوں گی۔



(ا) تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں۔



(ب) خطہ R میں جس نقاط پر انتصابی لکیر داخل اور خارج ہوتی ہے، ان کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے y حد ہوں گے۔ تمام انتصابی لکیروں کو شامل کرنے والے x حدود کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے x حد ہوں گے۔

شکل 14.12: تکمل کے حدوں کی تلاش۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

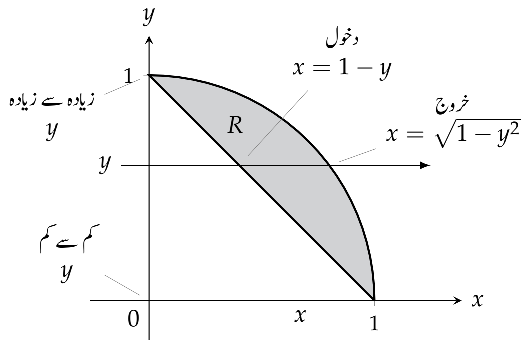
(ب) اسی دوہرا تکمل کو بطور بارہا تکمل حل کرتے ہوئے، ترتیب الٹ کرنے سے، انتصابی لکیروں کی بجائے افقی لکیریں استعمال کریں (شکل 14.13)۔ تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_0^1\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

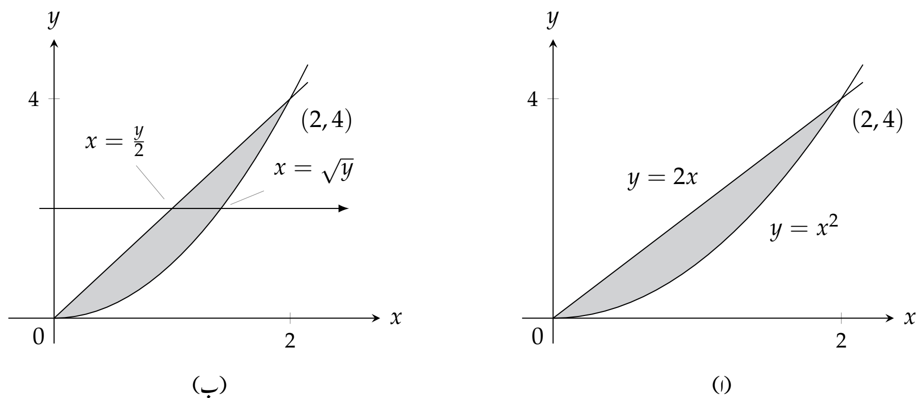
مثال 14.4: درج ذیل تکمل کے خطہ تکمل کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے اس کا مساوی تکمل لکھیں۔

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل: تکمل کا خطہ، عدم مساوات $x^2 \le y \le 2x$ اور $0 \le x \le 2$ دیتے ہیں۔ یوں اس خطہ کی حدیں، خط $x=0$ ، خط $x=2$ اور منحنیات $y=x^2$ اور $y=2x$ ہوں گی (شکل 14.14-ا)۔



شکل 14.13: بارہا تکمل میں ترتیب الٹ کرنے سے R پر افقی لکیریں کھینچی جائیں گی۔



شکل 14.14: دو منحنیات کے بیچ خطہ (مثال 14.4)

تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے ہم اس خطہ پر افقی لکیریں کھینچتے ہیں۔ یہ لکیریں اس خطہ میں $x = \frac{y}{2}$ پر داخلی ہوتی ہیں اور $x = \sqrt{y}$ پر اس سے خارج ہوتی ہیں۔ ان تمام افقی لکیریں کو شامل کرنے کے لئے ہمیں $y = 0$ سے $y = 4$ تک لینا ہو گا (شکل 14.14-ب)۔ یوں متبادل تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ان دونوں تکملات کے جواب 8 ہے۔ □

سوالات

تکمل کے خطہ کی تلاش اور دوہرا تکملات

سوال 1 تا سوال 10 میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 2: $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 3: $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 4: $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x+\cos y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 5: $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 6: $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 7: $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 8: $\int_1^2 \int_y^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 9: $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 10: $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 11 تا سوال 16 میں f کو دیے ہوئے خطہ پر تکمل کریں۔

سوال 11: ربع اول میں لکیر $x = y$ ، $y = 2x$ ، $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ خطہ پر تفاعل $f(x, y) = \frac{x}{y}$ کا تکمل۔

سوال 12: چکور $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ پر تفاعل $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ کا تکمل۔

سوال 13: مثلث خطہ جس کے راس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ اور $(0, 1)$ ہیں میں تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کا تکمل۔

سوال 14: مستطیل $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$ پر تفاعل $f(x, y) = y \cos xy$ کا تکمل۔

سوال 15: مستوی uv کے ربع اول میں لکیر $u + v = 1$ کے نیچے تفاعل $f(u, v) = v - \sqrt{u}$ کا تکمل۔

سوال 16: مستوی st کے ربع اول میں منحنی $s = \ln t$ کے اوپر جانب $t = 1$ سے $t = 2$ تک تفاعل $f(s, t) = e^s \ln t$ کا تکمل۔

سوال 17 تا سوال 20 میں تکملات دیے گئے ہیں۔ ان تکملات کے خطوں کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 17: $\int_{-2}^{0} \int_{v}^{-v} 2 \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}v$ مستوی pv

سوال 18: $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s$ مستوی st

سوال 19: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{0}^{\sec t} 3 \cos t \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t$ مستوی tu

سوال 20: $\int_{0}^{3} \int_{-2}^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$ مستوی uv

تکمل کی الٹ ترتیب

سوال 21 تا سوال 30 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر معادل الٹ ترتیب کا تکمل لکھیں۔

سوال 21: $\int_{0}^{1} \int_{2}^{4-2x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 22: $\int_{0}^{2} \int_{y-2}^{0} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 23: $\int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 24: $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 25: $\int_0^1 \int_1^{e^x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 26: $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 27: $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 28: $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 29: $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 30: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

دوہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 31 تا سوال 40 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی ترتیب تعین کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 31: $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 32: $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 33: $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 34: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 35: $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 36: $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^{1} e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 37: $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 38: $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{y^4+1}$

سوال 39: $\iint\limits_R (y-2x^2)\,\mathrm{d}S$ جہاں R چکور $|x|+|y|=1$ کا اندرونی خطہ ہے۔

سوال 40: $\iint\limits_R xy\,\mathrm{d}S$ جہاں لکیر $y=x$ ، $y=2x$ اور $x+y=2$ کے بیچ خطہ R ہے۔

سطح $z=f(x,y)$ کے نیچے حجم

سوال 41: مستوی xy میں لکیر $y=x$ ، $x=0$ اور $x+y=2$ کے بیچ مثلث کے اور قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ کے نیچے خطہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 42: ایک ٹھوس جسم اوپر سے بیلن $z=x^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں لکیر $y=x$ اور قطع مکافی $y=2-x^2$ کے بیچ مثلث خطہ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 43: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ مستوی xy میں لکیر $y=3x$ اور قطع مکافی $y=4-x^2$ کے بیچ خطہ ہے جبکہ اس کا بالائی سر مستوی $z=x+4$ پر مشتمل ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 44: ثُمن اول میں محددی مستویات، بیلن $x^2+y^2=4$ اور مستوی $z+y=3$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 45: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x=3$ اور قطع مکافی بیلن $z=4-y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 46: ثُمن اول سے سطح $z=4-x^2-y$ ایک ٹھوس جسم کاٹتی ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 47: ثُمن اول سے بیلن $z=12-3y^2$ اور مستوی $x+y=2$ ایک پچر کاٹتے ہیں۔ اس پچر کا حجم تلاش کریں۔

سوال 48: چکور ستون $|x|+|y|\le 1$ سے مستویات $z=0$ اور $3x+z=3$ جس ٹھوس جسم کو کاٹتے ہیں اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 49: ایک ٹھوس جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x=2$ اور $x=1$ ، اطراف سے بیلن $y=\mp\frac{1}{x}$ ، اوپر سے مستوی $z=x+1$ اور نیچے سے مستوی $z=0$ میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 50: ایک جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = \pm\frac{\pi}{3}$ ، اطراف سے بیلن $y = \mp \sec x$ ، اوپر سے بیلن $z = 1 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

غیر محدود خطوں پر تکملات

سوال 51 تا سوال 54 میں غیر مناسب تکملات کو بار با تکمل تصور کرتے ہوئے ان کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 51: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 52: $\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 53: $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 54: $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

دوہرا تکملات کی تخمین

سوال 55 اور سوال 56 میں تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کے خطہ R کو انتصابی خط $x = a$ اور افقی خط $y = c$ خانہ بند کرتی ہیں۔ ہر ذیلی مستطیل میں دکھائے گئے (x_k, y_k) لیتے ہوئے درج ذیل تخمین استعمال کر کے دوہرا تکملات کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

سوال 55: تفاعل $f(x,y) = x + y$ اور خطہ R ، جو نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ اور محور x کے بیچ ہے۔ خانہ بندی $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ اور $y = 0, 1/2, 1$ لیں۔ نقطہ (x_k, y_k) کو k واں خانے کا نچلا بایاں کونا لیں بشرطیکہ یہ مستطیل R کے اندر پایا جاتا ہو۔

سوال 56: تفاعل $f(x,y) = x + 2y$ ہے جبکہ اور دائرہ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ کا اندرونی خطہ R ہے۔ خانہ بندی $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ اور $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ لیں۔ بشرطیکہ k واں مستطیل R میں پایا جاتا ہو، k ویں مستطیل کے وسطانی مرکز کو (x_k, y_k) لیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 57: قرص $x^2 + y^2 \le 4$ کو شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے چھوٹے ٹکڑے پر $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2}$ کا تکمل لیں۔

سوال 58: لا متناہی مستطیل $2 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le 2$ پر $f(x,y) = \frac{1}{(x^2-x)(y-1)^{2/3}}$ کا تکمل لیں۔

سوال 59: ایک ٹھوس (غیر دائری) قائمہ بیلن کا قاعدہ xy مستوی ہے جبکہ اس کی بالائی سرحد قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ ہے۔ اس بیلن کا حجم

$$H = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہے۔ خطہ R کا خاکہ بنائیں اور بیلن کے حجم کو، تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے، ایک بارہا تکمل کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔

سوال 60: درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کو ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔)

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x)\,\mathrm{d}x$$

سوال 61: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟

$$\iint\limits_R (4 - x^2 - 2y^2)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 62: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟

$$\iint\limits_R (x^2 + y^2 - 9)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 63: کیا استمراری تفاعل $f(x,y)$ کا مستوی xy میں مستطیل خطہ پر تکمل کی ترتیب بدلتے ہوئے مختلف نتائج کا حصول ٹھیک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ بتائیں۔

سوال 64: ایک مثلث جس کے راس $(0,1)$ ، $(2,0)$ اور $(1,2)$ ہوں پر استمراری تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت درکار ہے۔ آپ یہ قیمت کیسے حاصل کریں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 65: درج ذیل تعلق کو ثابت کریں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

سوال 66: درج ذیل غیر مناسب تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 67 تا سوال 70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے اعدادی تراکیب سے دوہرا تکملات کی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال 67: $\int_1^3 \int_1^x \frac{1}{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 68: $\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 69: $\int_0^1 \int_0^1 \tan^{-1} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 70: $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت

اس حصہ میں دوہرا تکملات استعمال کرتے ہوئے مستوی میں محدود خطوں کے رقبات اور ان خطوں پر باریک چادروں کی کمیت، معیار اثر، مرکز کمیت، اور **حرکت دواری**[5] کے رداس معلوم کرنا دکھایا جائے گا۔ ان کا حساب باب 6 کے حساب کی طرح ہو گا لیکن اب ہم زیادہ قسم کے اشکال کے لئے حساب کر پائیں گے۔

[5] gyration

مستوی میں محدود خطوں کے رقبات

گزشتہ حصہ میں خطہ R پر دوہرا تکمل کی تعریف میں $f(x,y)=1$ لینے سے جزوی مجموعات کی تخفیف شدہ صورت

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k \tag{14.11}$$

حاصل ہو گی۔ یہ تخمینی طور پر R کا رقبہ ہو گا۔ جوں جوں شکل 14.15 میں Δx اور Δy صفر کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں توں توں R کے زیادہ سے زیادہ حصہ کو تمام ΔS_k مل کر کو ڈھانپتے ہیں، اور ہم R کی رقبہ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\text{رقبہ}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k=\iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{14.12}$$

تعریف: بند محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S=\iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{14.13}$$

□

اس باب کے دیگر تعریفات کی طرح، رقبے کی یک متغیری تعریف کے لحاظ سے، جو ہم پہلے پیش کر چکے ہیں، موجودہ تعریف زیادہ اقسام کے خطوں پر قابل اطلاق ہو گی، لیکن، جن خطوں پر دونوں تعریفات قابل اطلاق ہوں، وہاں موجودہ تعریف گزشتہ تعریف کے عین موافق ہو گی۔

مساوات 14.13 میں دی گئی تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم R پر $f(x,y)=1$ لیتے ہیں۔

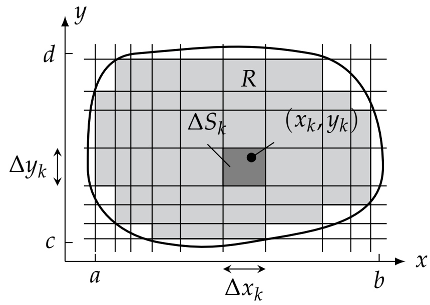
مثال 14.5: ربع اول میں $y=x$ اور $y=x^2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ (شکل 14.16) بنا کر رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

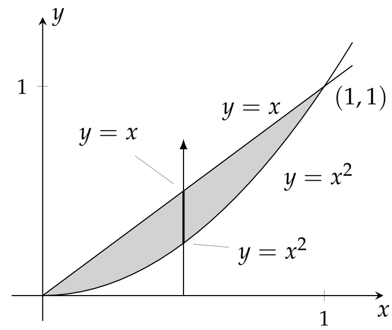
$$S=\int_0^1\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\Big[y\Big]_{x^2}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x=\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac{1}{6}$$

□

مثال 14.6: قطع مکافی $y=x^2$ اور لکیر $y=x+2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔



شکل 14.15: ایک خطہ کے رقبے کی تلاش میں پہلا قدم خطے کی اندرون کی خانہ بندی ہے۔



شکل 14.16: قطع مکافی اور لکیر کے بیچ رقبہ (مثال 14.5)۔

حل: اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب ہمیں اس خطہ کو R_1 اور R_2 میں تقسیم کر کے درج ذیل دو علیحدہ علیحدہ تکملات کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ا)۔

$$S = \iint_{R_1} \mathrm{d}S + \iint_{R_2} \mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس کے برعکس تکمل کی ترتیب الٹ کرنے سے صرف ایک تکمل

$$S = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ب)۔ ہم اسی سے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

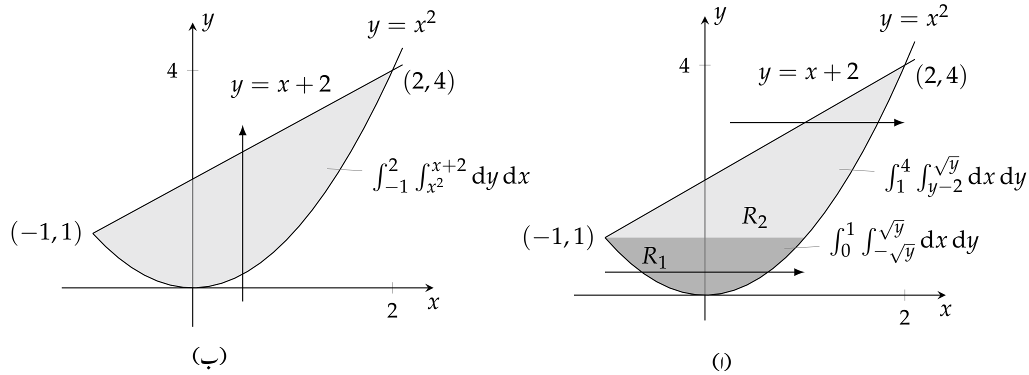
$$S = \int_{-1}^{2} \Big[y\Big]_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

□

اوسط قیمت

بند وقفہ پر قابل تکمل واحد متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس وقفہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم لمبائی وقفہ ہو گی۔ بند اور محدود خطہ پر، جس کا رقبہ قابل ناپ ہو، معین قابل تکمل دو متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس خطہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم خطہ کا رقبہ ہو گی۔ اگر خطہ R اور تفاعل f ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$R \text{ پر } f \text{ کی اوسط قیمت} = \frac{1}{R \text{ کا رقبہ}} \iint_R f\,\mathrm{d}S \tag{14.14}$$



شکل 14.17: (ا) اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب رقبے کے حصول کے لئے دو تکملات کا مجموعہ درکار ہو گا۔ (ب) البتہ پہلے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے صرف ایک تکمل سے حاصل ہو گا۔

اگر خطہ R پر باریک (پتلی) چادر کی کثافت رقبہ f ہو تب R پر f کے دوہرا تکمل کو R کے رقبہ سے تقسیم کرنے سے اس چادر کی اوسط کثافت حاصل ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی رقبہ ہو گی۔ اگر نقطہ (x,y) سے مقررہ نقطہ N تک فاصلہ $f(x,y)$ ہو تب R پر f کی اوسط قیمت، N سے R کے نقاط کا اوسط فاصلہ ہو گا۔

مثال 14.7: مستطیل $R: 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$ پر $f(x,y) = x\cos xy$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: خطہ R پر f کا تکمل

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^{1} x\cos xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\Big[\sin xy\Big]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi}(\sin x - 0)\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big]_0^{\pi} 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

ہو گا جبکہ مستطیل R کا رقبہ π ہے۔یوں R پر f کی اوسط قیمت $\frac{2}{\pi}$ ہو گی۔ □

مراکز کمیت کے معیار اثر اول اور دوم

باریک چادروں کی کمیت اور معیار اثر تلاش کرنے کے لئے ہم باب 6 کے کلیات کی طرح کلیات استعمال کرتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ دوہرا تکمل کی بنا اب ہم زیادہ اشکال اور کثافتی تفاعل کو عمل میں لا سکتے ہیں۔ جدول میں ان کلیات درج ذیل ہیں۔

مستوی xy میں باریک چادر کی کمیت، معیار اثر اول[6]، معیار اثر دوم[7] اور رداس دوار[8] کے کلیات

کثافت: $\delta(x,y)$

کمیت: $M = \iint \delta(x,y)\,\mathrm{d}S$

معیار اثر اول: $M_x = \iint y\delta(x,y)\,\mathrm{d}S, \quad M_y = \iint x\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$

مرکز کمیت: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر):

بلحاظ محور x: $$I_x = \iint y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$$

بلحاظ محور y: $$I_y = \int x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$$

بلحاظ خط L: $$I_L = \iint r^2(x,y)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S,$$ (جہاں L سے (x,y) کا فاصلہ $r(x,y)$ ہے)

(قطبی معیار اثر) بلحاظ مبدا: $$I_0 = \int (x^2+y^2)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S = I_x + I_y$$

رداس دوار:

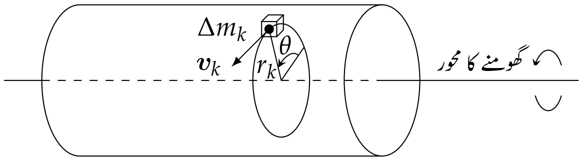
بلحاظ محور x: $$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$

بلحاظ محور y: $$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$$

بلحاظ مبدا: $$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$

---

[6] first moment
[7] second moment
[8] radius of gyration



شکل 14.18: گھومتے ہوئے دھرے میں ذخیرہ توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو متعدد چھوٹے کمیتوں میں تقسیم کر کے ہر تمام چھوٹے کمیتوں کی حرکی توانائی کا مجموعہ لیتے ہیں۔

ان کلیات کا استعمال مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے گا۔

معیار اثر اول M_x اور M_y اور معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر) I_x اور I_y میں ریاضیاتی فرق یہ ہے کہ معیار اثر دور "بیرم کے بازوؤں" کے فاصلوں، x اور y ، کا مربع لیتا ہے۔

معیار اثر I_0 کو **قطبی معیار اثر**[9] بھی کہتے ہیں۔ کمیتی کثافت $\delta(x, y)$ (کمیت فی اکائی رقبہ) ضرب $x^2 + y^2$ ، جو نمائندہ نقطہ (x, y) سے مبدا تک فاصلہ ہے، کا تکمل قطبی معیار اثر کہلاتا ہے۔ چونکہ $I_0 = I_x + I_y$ ہے لہٰذا ان میں سے کسی دو کے حصول کے بعد تیسرے کو اس تعلق سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ (معیار اثر I_0 بعض اوقات I_z لکھا جاتا اور بلحاظ محور z معیار اثر کہلاتا ہے۔ تب تماثل $I_z = I_x + I_y$ **مسئلہ عمودی محور**[10] کہلاتا ہے۔)

رداس دوار R_x کی تعریف درج ذیل مساوات ہے۔

$$I_x = MR_x^2$$

رداس دوار ہمیں بتاتا ہے کہ محور x کتنا دور پوری چادر کی کمیت مجمد کرتے ہوئے وہی I_x حاصل ہو گا۔ رداس دوار استعمال کرتے ہوئے ہم معیار اثر کو کمیت اور لمبائی کی صورت میں لکھ پاتے ہیں۔ رداس R_y اور R_0 کی تعریفات بھی اسی طرح ہیں:

$$I_y = MR_y^2, \quad I_0 = MR_0^2$$

ہم ان تعریفی مساوات کے جذر سے R_x ، R_y اور R_0 کے کلیات لکھتے ہیں۔

ہمیں معیار اثر میں کیا دلچسپی ہے؟ ایک جسم کا پہلا معیار ا اثر ہمیں ثقلی میدان میں اس جسم کے توازن اور مختلف محوروں کے لحاظ سے اس کی قوت مروڑ کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ اب اگر یہ جسم گھومتا ہوا دھرا ہو تب ہمیں اس میں ذخیرہ توانائی جاننے میں زیادہ دلچسپی ہو گی تا کہ ہم جان سکیں کہ اس کو روکنے کے لئے یا اس کو کسی خاص زاویاتی رفتار تک پہنچانے میں کتنی توانائی درکار ہو گی۔ایسی صورت میں معیار اثر دوم استعمال ہو گا۔

[9] polar moment
[10] Perpendicular Axis Theorem

اس دھرا کو متعدد چھوٹی کمیتوں Δm_k میں تقسیم کریں اور گھومنے کے محور سے k ویں کمیتی ٹکڑے کے فاصلہ کو r_k سے ظاہر کریں (شکل 14.18)۔ اگر دھرا کی زاویاتی سمتی رفتار $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ریڈیئن فی سیکنڈ ہو، تب اس ٹکڑے کا کمیتی مرکز اپنے مدار میں خطی رفتار

$$v_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_k\theta) = r_k\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_k\omega$$

سے حرکت کرے گا۔اس ٹکڑے کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k(r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\Delta m_k \tag{14.15}$$

ہو گی۔دھرا کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\sum\frac{1}{2}\omega^2 r_k^2\Delta m_k \tag{14.16}$$

ہو گی۔دھرا کو زیادہ سے زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے اس مجموعہ کی قیمت ایک حد تک پہنچتی ہے جسے تکمل

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \int\frac{1}{2}\omega^2 r^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2\int r^2\,\mathrm{d}m \tag{14.17}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ جزو

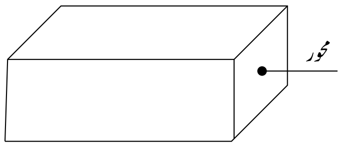
$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m \tag{14.18}$$

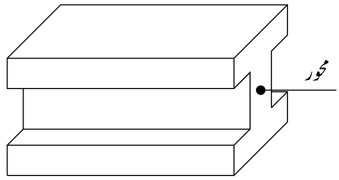
درحقیقت گھومنے کے محور کے لحاظ سے دھرے کا جمودی معیار اثر ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{14.19}$$

ایک دھرا، جس کا جمودی معیار اثر I ہو، کو ω زاویاتی سمتی رفتار تک پہنچانے کے لئے $\frac{1}{2}I\omega^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس رفتار پر چلتے ہوئے دھرا کو روکنے کے لئے ہمیں دھرا سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ کمیت m کی گاڑی کو سمتی رفتار v تک پہنچانے کے لئے اس کو $\frac{1}{2}mv^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس کو روکنے کے لئے اس گاڑی سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ دھرے کا جمودی معیار اثر گاڑی کی کمیت کا مماثل ہے۔ گاڑی کی رفتار تیز یا کم کرنے کو گاڑی کی کمیت مشکل بناتی ہے۔اسی طرح دھرے کی زاویاتی رفتار تیز یا کم کرنے کو دھرے کا جمودی معیار اثر مشکل بناتا ہے۔ جمودی معیار اثر کمیت کے علاوہ کمیت کی تقسیم کا بھی حساب رکھتا ہے۔

بوجھ بردار افقی دھاتی شہتیر کے جھکاو کو بھی جمودی معیار اثر تعین کرتا ہے۔ شہتیر کا اکڑا پن I ضرب ایک مستقل ہوتا ہے، جہاں شہتیر کے افقی محور کے لحاظ سے عمودی تراش کا قطبی معیار اثر I ہے۔ جمودی معیار اثر I کی قیمت جتنی زیادہ ہو، شہتیر اتنا زیادہ اکڑ ہو گا اور اتنا کم جھکے گا۔





شکل 14.19: دونوں شہتیر کا رقبہ عمودی تراش ایک جیسا ہے لیکن شہتیر-ا کا جمودی معیار اثر زیادہ ہے لہٰذا شہتیر-ا زیادہ اکڑ ہو گا۔

یہی وجہ ہے کہ ہم شکل 14.19-ا میں دکھایا گیا شہتیر استعمال کرتے ہیں نا کہ ایسے شہتیر جن کا عمودی تراش چکور ہو (شکل 14.19-ب)۔ شہتیر کے بالائی اور زیریں لگر زیادہ تر کمیت کو افقی محور سے دور رکھتے ہوئے I کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

جمودی معیار اثر کو سمجھنے کے لئے ایک تجربہ کریں۔ ایک قلم کے دونوں سروں کے ساتھ سکے چپکا کر قلم کو انگلیوں میں تیزی سے آگے پیچھے گھمائیں۔ گھومنے کا رخ تبدیل کرتے وقت آپ کو جو مزاحمت محسوس ہوتی ہے وہ جمودی معیار اثر کی بنا ہے۔ اب ان سکوں کو قلم کے سروں سے دور اور آپس میں قریب کریں۔ قلم اور سکوں کی کمیت تبدیل نہیں ہوئی ہے البتہ اس نظام کا جمودی معیار اثر کم ہو ہے۔ اب آپ دیکھیں گے کہ انہیں آگے پیچھے گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

آپ کہہ سکتے ہیں کہ معیار اثر اول کا تعلق توازن سے ہے جبکہ معیار اثر دوم کا تعلق گھومنے سے ہے۔

مثال 14.8: محور x، لکیر $x = 1$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ تکونی چادر پائی جاتی ہے۔ نقطہ (x, y) پر اس چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ ہے۔ اس چادر کی کمیت، پہلا معیار اثر، مرکز کمیت، جمودی معیار اثر اور محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دوار تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ بنا کر (شکل 14.20) اس پر اتنی معلومات درج کرتے ہیں کہ تکمل کے حد جان سکیں۔

چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[6xy + 3y^2 + 6y\Big]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (24x^2 + 12x)\,\mathrm{d}x = \Big[8x^3 + 6x^2\Big]_0^1 = 14
\end{aligned}$$

محور x کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2\Big]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[7x^4 + 4x^3\Big]_0^1 = 11
\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 10$$

مرکز کمیت کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3\Big]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[8x^5 + 4x^4\Big]_0^1 = 12
\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

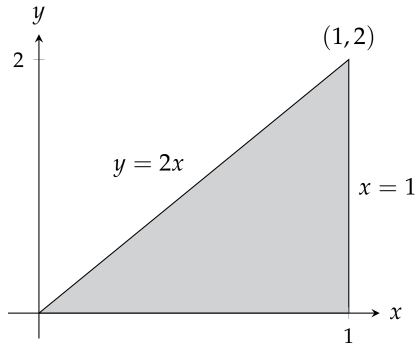
$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{39}{5}$$

ہم I_x اور I_y کی قیمتوں سے I_0 کی قیمت کلیہ $I_0 = I_x + I_y$ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

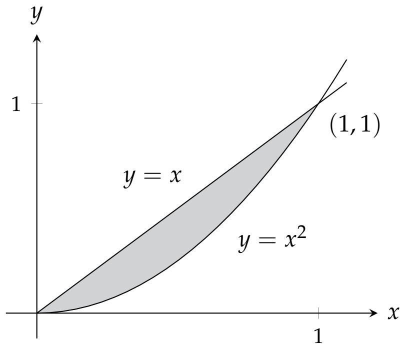
$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}$$

تین رداس دوار درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
R_x &= \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \\
R_y &= \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\Big(\frac{39}{5}\Big)/14} = \sqrt{\frac{39}{70}} \\
R_0 &= \sqrt{\frac{I_0}{M}} = \sqrt{\Big(\frac{99}{5}\Big)/14} = \sqrt{\frac{99}{70}}
\end{aligned}$$



شکل 14.20: خطہ برائے مثال 14.8



شکل 14.21: خطہ برائے مثال 14.9

□

جیومیٹریائی اشکال کے وسطانی مراکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں شمار کنندہ اور نسب نما میں موجود کثافت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے نقطہ نظر سے δ کی قیمت 1 ہو سکتی ہے۔ یوں مستقل δ کی صورت میں مرکز کمیت کا دارومدار جسم کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نا کہ جسم کے مادہ پر۔ ایسی صورت میں مرکز کمیت عموماً شکل کا **وسطانی مرکز**[11] پکارا جاتا ہے۔ وسطانی مرکز کی تلاش میں ہم $\delta = 1$ لے کر، پہلے کی طرح، معیار اثر اول کو کمیت سے تقسیم کرتے ہوئے $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کرتے ہیں۔

مثال 14.9: ربع اول میں اوپر سے لکیر $y = x$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ ایک خطہ کو محدود کرتے ہیں۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم خطے کا خاکہ بنا کر تکمل کے حد جانتے ہیں (شکل 14.21)۔ اس کے بعد $\delta = 1$ لے کر آگے بڑھتے ہیں۔

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\Big) \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

---

centroid[11]

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم وسطانی مرکز کے محدد دریافت کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = 2, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

نقطہ $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$ اس خطے کا وسطانی مرکز ہو گا۔ □

سوالات

رقبہ بذریعہ دوہرا تکمل

سوال 1 تا سوال 8 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر اس خطے کے رقبہ کو بطور دوہرا بارہا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 1: محددی محور اور لکیر $x + y = 2$

سوال 2: لکیر $x = 0$ ، $y = 2x$ اور $y = 4$

سوال 3: قطع مکافی $x = -y^2$ اور لکیر $y = x + 2$

سوال 4: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $y = -x$

سوال 5: منحنی $y = e^x$ اور لکیر $y = 0$ ، $x = 0$ اور $x = \ln 2$

سوال 6: ربع اول میں منحنیات $y = \ln x$ ، $y = 2\ln x$ اور لکیر $x = e$

سوال 7: قطع مکافی $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$

سوال 8: قطع مکافی $x = y^2 - 1$ اور $x = 2y^2 - 2$

سوال 9 تا سوال 14 میں مستوی xy میں خطوں کے رقبات کو تکمل یا تکملات کے مجموعوں کی کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔ ان خطوں کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر ان کی مساواتیں لکھیں اور ان نقطوں کی نشاندہی کریں جہاں منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے بعد ان خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 9: $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 10: $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 11: $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 12: $\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 13: $\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14: $\int_0^2 \int_{x^2-4}^{0} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

اوسط قیمت

سوال 15: تفاعل $f(x, y) = \sin(x + y)$ کی اوسط قیمت درج ذیل خطوں پر تلاش کریں۔

ا. مستطیل $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$

ب. مستطیل $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi/2$

سوال 16: کیا چکور $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ یا ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ میں $f(x, y) = xy$ کی اوسط قیمت زیادہ ہو گی؟ ان دونوں خطوں میں اوسط کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 17: چکور $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$ میں قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 18: چکور $\ln 2 \le x \le 2 \ln 2,\ \ln 2 \le y \le 2 \ln 2$ میں $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

مستقل کثافت

سوال 19: ربع اول میں قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $x = 0$ ، $y = x$ کے بیچ ایک باریک چادر جس کی کثافت $\delta = 3$ ہو پائی جاتی ہے۔اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 20: ربع اول میں محددی محور اور لکیر $x = 3$ اور $y = 3$ کے بیچ مستقل کثافت کی باریک مستطیل چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 21: ربع اول میں محور x ، قطع مکافی $y^2 = 2x$ اور لکیر $x + y = 4$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 22: ربع اول سے لکیر $x + y = 3$ ایک تکونی خطہ کاٹتی ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 23: محور x اور منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 24: ربع اول میں قطع مکافی $y=6x-x^2$ اور لکیر $y=x$ کے بیچ خطے کا رقبہ $\frac{125}{6}$ ہے۔ اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 25: ربع اول سے دائرہ $x^2+y^2=a^2$ ایک خطہ کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 26: دائرہ $x^2+y^2=4$ کے بیچ کثافت $\delta=1$ کی باریک چادر کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کی I_y اور I_0 دریافت کریں۔

سوال 27: محور x اور قوس $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 28: محور x اور منحنی $y=\frac{\sin^2 x}{x^2}$ کے بیچ وقفہ $\pi\le x\le 2\pi$ پر کثافت $\delta=1$ کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 29: لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز
ربع دوم میں محددی محور اور منحنی $y=e^x$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (کمیت اور معیار اثر کے کلیات میں آپ کو غیر مناسب تکملات استعمال کرنے ہوں گے۔)

سوال 30: لامتناہی چادر کا پہلا معیار اثر
ربع اول میں منحنی $y=e^{-x^2/2}$ کے نیچے کثافت $\delta=1$ کے لامتناہی جسامت کی چادر کا محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 31: قطع مکافی $x=y-y^2$ اور لکیر $x+y=0$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x,y)=x+y$ ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 32: ترخیم $x^2+4y^2=12$ سے قطع مکافی $x=4y^2$ جس چھوٹے حصہ کو کاٹتا ہے، اس کی کثافت $\delta(x,y)=5x$ ہے۔ اس کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 33: محور y اور لکیر $y=x$ اور $y=2-x$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x,y)=6x+3y+3$ ہے۔ اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 34: منحنیات $x=y^2$ اور $x=2y-y^2$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x,y)=y+1$ ہے۔ اس کی کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 35: ربع اول سے خطوط $x = 6$ اور $y = 1$ ایک مستطیل باریک چادر کاٹتے ہیں جس کی کثافت $\delta(x, y) = x + y + 1$ ہے۔ اس کی مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 36: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 37: قطع مکافی $y = x^2$ ، محور x اور لکیر $x = \mp 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 7y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 38: خطوط $x = 0$ ، $x = 20$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1 + x/20$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 39: لکیر $y = x$ ، $y = -x$ اور $y = 1$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔ اس کا قطبی جمودی معیار اثر اور رداس دوار بھی تلاش کریں۔

سوال 40: کثافت $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ لیتے ہوئے سوال 39 کو دوبارہ حل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 41: مستوی xy میں جراثیم کی تعدادی کثافت $f(x, y) = \frac{10000e^y}{1+|x|/2}$ ہے جہاں x اور y کی ناپ سنٹی میٹر میں ہے۔ مستطیل $-5 \le x \le 5,\ -2 \le y \le 0$ میں جراثیم کی کل تعداد تلاش کریں۔

سوال 42: سطح زمین پر کثافت آبادی $f(x, y) = 100(y + 1)$ ہے جہاں x اور y کلومیٹر میں ہیں۔ منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ کل آبادی کتنی ہو گی؟

سوال 43: مستقل کثافت کا ایک برتن مستوی xy میں خطہ $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le a(1 - x^2)$ پر واقع ہے۔ یہ برتن $45°$ تک ٹیڑھا کرنے تک واپس اپنی جگہ پر آن گرتا ہے۔ مستقل a کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 44: جمودی معیار اثر کم سے کم کرنا
ربع اول میں کثافت $\delta(x, y) = 1$ کی چادر لکیر $x = 4$ اور $y = 2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ لکیر $y = a$ کے لحاظ سے اس چادر کی جمودی معیار اثر I_a درج ذیل ہے۔

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 \, dy \, dx$$

مستقل a کی وہ قیمت تلاش کریں جو I_a کو کم سے کم کرتا ہو۔

سوال 45: مستوی xy میں لکیر $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 46: ایک پتلی چھڑی کی مستقل خطی کثافت δ گرام فی سنٹی میٹر اور لمبائی L ہے۔ اس کا رداس دوار دیے گئے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

ا. چھڑی کے محور کو عمودی اور اس کی مرکز کمیت سے گزرتے ہوا خط۔

ب. چھڑی کے ایک سر پر چھڑی کے محور کو عمودی خط۔

سوال 47: مستوی xy میں مستقل کثافت δ کی چادر منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔

ا. ایسا δ دریافت کریں کہ چادر کی کمیت سوال 34 کے چادر کی کمیت کے برابر ہو۔

ب. جزو-ا میں حاصل δ کی قیمت کا اس خطہ پر $\delta(x, y) = y + 1$ کی اوسط قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 48: دائرہ $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ کی کثافت مستقل ہے۔ محوروں کے لحاظ سے اس کے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

مسئلہ متوازی محور

مستوی xy میں ایک خطہ پر کمیت m کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہے۔ خط $L_{c,m}$ کے متوازی h اکائیاں دور خط L پایا جاتا ہے۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر $I_{c,m}$ اور I_L درج ذیل کلیہ کو مطمئن کریں گے۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{14.20}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک جمودی معیار اثر سے دوسرا با آسانی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

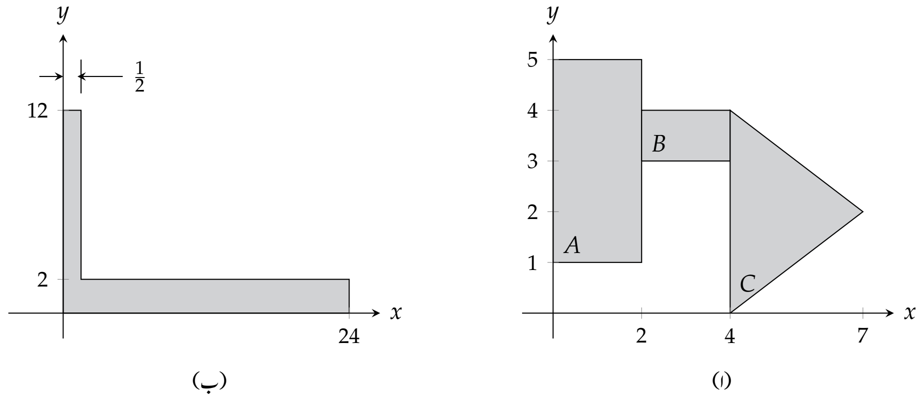
سوال 49: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت
(ا) دکھائیں کہ باریک چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی خط کے لحاظ سے چادر کا جمودی معیار اثر صفر ہو گا۔ (اشارہ: مرکز کمیت کو مبدا پر رکھیں اور خط کو محور y پر رکھیں۔ کلیہ $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ کیا دیگا؟) (ب) جزو-ا کے نتیجہ سے مسئلہ متوازی محور اخذ کریں۔(اشارہ: خط $L_{c,m}$ کو محور y اور L کو $x = h$ پر رکھ کر I_L کے تکمل کو دو حصوں میں لکھیں۔)

سوال 50: (ا) مسئلہ متوازی محور استعمال کرتے ہوئے مثال 14.8 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے اس مثال میں چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی افقی اور انتصابی خطوط کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ (ب) جزو-ا کے نتائج استعمال کرتے ہوئے خطوط $x = 1$ اور $y = 2$ کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

کلیہ پاپس

جناب پاپس نے حصہ 6.10 کا مسئلہ پاپس بیان کیا۔ اس کے علاوہ وہ جانتے تھے کہ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے دو مستوی خطوں کا وسطانی مرکز ان خطوں کے وسطانی مراکز سے گزرتے ہوئے خط پر پایا جاتا ہے۔ مستوی xy میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو باریک چادر P_1 اور P_2 فرض کریں، جن کی کمیت بالترتیب m_1 اور m_2 ہو۔ مبدا سے بالترتیب ان چادروں کے مراکز کمیت تک سمتیات $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ لیں۔ اب اشتراک $P_1 \cup P_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل دیگا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{14.21}$$



شکل 14.22: اشکال برائے سوال 53 اور سوال 54

مساوات 14.21 کو **کلیہ پاپس**[12] کہتے ہیں۔ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو سے زیادہ (لیکن متناہی تعداد کی) چادروں کے لئے درج ذیل کلیہ ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{14.22}$$

یہ کلیہ بالخصوص وہاں فائدہ مند ہو گا جہاں غیر منظم شکل و صورت کی چادر کے حصوں کے وسطانی مراکز ہم جیومیٹری سے علیحدہ علیحدہ طور پر جانتے ہوں اور جہاں ہر حصہ از خود مستقل کثافت کا ہو۔ ہم اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے پوری چادر کا وسطانی مرکز معلوم کر سکتے ہیں۔

سوال 51: کلیہ پاپس (مساوات 14.21) اخذ کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں ان خطوں کو ترسیم کر کے ان کے مراکز کمیت $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ کی نشاندہی کریں۔ محددی محور کے لحاظ سے $P_1 \cup P_2$ کے معیار اثر کیا ہوں گے؟)

سوال 52: ریاضی (الکراجی) ماخوذ اور مساوات 14.21 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی عدد صحیح $n > 2$ کے لئے مساوات 14.22 مطمئن ہو گا۔

سوال 53: فرض کریں A ، B اور C تین اشکال ہیں (شکل 14.22-ا)۔ کلیہ پاپس کی مدد سے درج ذیل کے وسطانی مراکز دریافت کریں۔

ا. $A \cup B$ ب. $A \cup C$ ج. $B \cup C$ د. $A \cup B \cup C$

سوال 54: وسطانی مرکز دریافت کریں (شکل 14.22-ب)۔

[12]Pappus's formula

سوال 55: ایک مساوی الساقین مثلث T کا قاعدہ $2a$ اور قد h ہے۔ اس کا قاعدہ، رداس a کے نصف دائرہ D کے قطر پر پایا جاتا ہے۔ مثلث دائرہ کے باہر ہے۔ $T \cup D$ کا وسطانی مرکز (ا) T اور D کی مشترک سرحد پر (ب) T کے اندر ہونے کے لئے a اور h کا تعلق دریافت کریں۔

سوال 56: ایک مساوی الساقین مثلث T جس کا قد h ہے کا قاعدہ چکور Q کا ایک ضلع ہے۔ چکور کے ضلع کی لمبائی s ہے۔ (چکور اور مثلث ایک دوسرے کو نہیں ڈھانپتے ہیں۔) $T \cup Q$ کا وسطانی مرکز مثلث کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر h کا s کے ساتھ کیا تعلق گا؟ اپنے جواب کا موازنہ سوال 55 کے جواب کے ساتھ کریں۔

14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ

بعض اوقات تکمل کو قطبی روپ میں تبدیل کرنے سے اس کا حل آسان ہو جاتا ہے۔اس حصہ میں یہ تبدیلی دکھائی جائے گی اور ان تکملات کی قیمت کا حصول دکھایا جائے گا جن کے سرحد قطبی روپ میں دیے گئے ہوں۔

قطبی روپ میں تکملات

مستوی xy میں دوہرا تکمل کا ذکر کرتے ہوئے ہم نے خطہ R کو مستطیلی ٹکڑوں میں اس طرح کاٹا کہ مستطیل کے اضلاع محددی محوروں کے متوازی ہوں۔اس طرح ان مستطیلوں کے اضلاع مستقل x اور یا مستقل y لکھے جا سکتے ہیں۔ کارتیسی محدد میں مستطیل قدرتی صورت ہے۔ قطبی محددی نظام میں "قطبی مستطیل" قدرتی صورت ہے جس کے اضلاع مستقل r اور مستقل θ لکھے جا سکتے ہیں۔

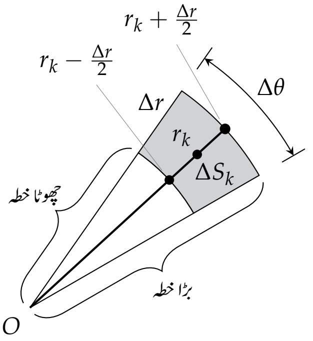
فرض کریں تفاعل $f(r,\theta)$ خطہ R پر معین ہے جس کے سرحد شعاع $\theta = \alpha$ اور $\theta = \beta$ اور استمراری منحنیات $r = g_1(\theta)$ اور $r = g_2(\theta)$ ہیں۔مزید α اور β کے بیچ ہر قیمت کے لئے $0 \le g_1(\theta) \le g_2(\theta) \le a$ ہے۔ یوں R پنکھا نما خطہ Q میں، جس کو عدم مساوات $0 \le r \le a,\ \alpha \le \theta \le \beta$ ظاہر کرتی ہیں، پایا جائے گا (شکل 14.23)۔

ہم Q پر دائری قوسین اور شعاعوں کا جال بچھاتے ہیں۔ یہ قوسین ان دائروں سے کاٹے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے اور جن کے رداس Δr ، $2\Delta r$ ، $\cdots$ ، $m\Delta r$ ہیں جہاں $\Delta r = \frac{a}{m}$ ہے۔ان شعاع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{m'}$ ہے۔

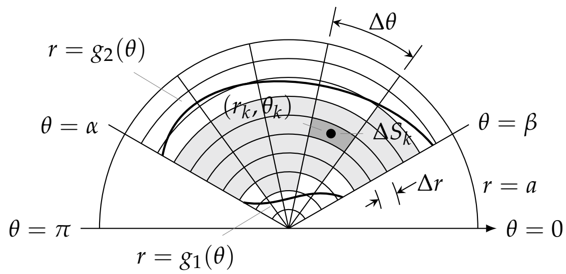
$$\theta = \alpha,\ \theta = \alpha + \Delta\theta,\ \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \cdots, \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$$

یہ شعاع اور قوسین Q کو "قطبی مستطیلوں" میں تقسیم کرتے ہیں۔

ہم ان قطبی مستطیلوں کو 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں جو مکمل طور پر R کے اندر پائے جاتے ہوں اور ان کے رقبوں کو ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ شمار کرنے کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ ہم ΔS_k رقبے کی قطبی مستطیل کے مرکز کو



شکل 14.24: سایہ دار خطے کا رقبہ ΔS_k حاصل کرنے کے لئے بڑے خطے سے چھوٹے خطے کا رقبہ منفی کریں۔



شکل 14.23: خطہ $R:\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$ ، $\alpha \le \theta \le \beta$ پنکھا نما خطہ $Q:\ 0 \le r \le a$ ، $\alpha \le \theta \le \beta$ میں پایا جاتا ہے۔ خطہ Q کی خانہ بندی شعاعوں اور دائری قوسین سے کرتے ہوئے R کی خانہ بندی کی جاتی ہے۔

(r_k, θ_k) سے ظاہر کرتے ہیں۔ قطبی مستطیل کے مرکز سے مراد وہ نقطہ ہے جو دونوں دائری قوسین کی اوسط رداس کے قوس اور اس شعاع پر پایا جاتا ہو جو دونوں قوسین کو درمیان سے کاٹتی ہو۔ ہم اب درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r, \theta) \Delta S_n \tag{14.23}$$

اگر پورے R پر f استمراری ہو، تب جال کے خانے چھوٹے سے چھوٹے کر کے Δr اور $\Delta\theta$ کو صفر تک پہنچانے سے یہ مجموعہ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد R پر f کا دوہرا تکمل کہلاتا ہے جس کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

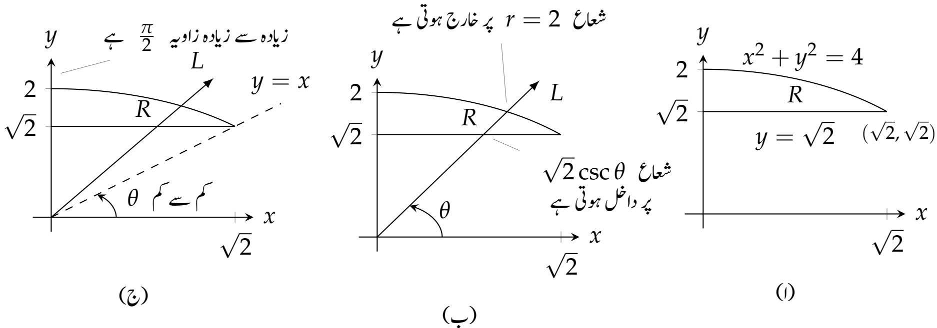
$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iint_R f(r, \theta)\, \mathrm{d}S$$

اس حد کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر ہمیں مجموعہ J_n یوں لکھنا ہو گا کہ ΔS_k کی قیمت Δr اور $\Delta\theta$ کی روپ میں ہو۔ رقبہ ΔS_k کی اندرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k - \frac{\Delta r}{2}$ جبکہ اس کی بیرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k + \frac{\Delta r}{2}$ ہے (شکل 14.24)۔ ان قوسین سے مبدا تک دائری تکونی خطوں کے رقبے

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{اندرونی تکونی رقبہ} \\ &\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{بیرونی تکونی رقبہ} \end{aligned} \tag{14.24}$$

ہوں گے۔ یوں درج ہو گا۔

$$\begin{aligned} \Delta S_k &= \text{بیرونی تکونی رقبہ} - \text{اندرونی تکونی رقبہ} \\ &= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k \Delta r_k \Delta\theta \end{aligned}$$



شکل 14.25: قطبی محدد میں تکمل کی قیمت کے قدم۔

اس نتیجہ کو مساوات 14.23 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta\theta \tag{14.25}$$

مسئلہ فوبنی کی ایک صورت کہتی ہے کہ اس مجموعہ کی حد r اور θ کے لحاظ سے درج ذیل بارہا تکمل دیگا۔

$$\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.26}$$

تکمل کی حدیں

کارتیسی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار قطبی محدد کے لئے بھی کارآمد ہے۔

قطبی محدد میں تکمل حاصل کرنے کا طریقہ

قطبی محدد میں خطہ R پر $\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے پہلے r کے لحاظ سے اور بعد میں θ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.25-ا)۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے بڑھتی ہوئی r کے رخ خطہ R سے گزرتا ہوا شعاع L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی r حدیں ہوں گے۔ ان کی قیمتیں عموماً θ پر منحصر ہو گی (شکل 14.25-ب)۔

3. تکمل کی θ حدیں: وہ θ حدیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام شعاعیں شامل ہوں (شکل 14.25-ج)۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int\limits_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

مثال 14.10: دائرہ $r=1$ کے باہر اور قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر خطہ میں $f(r,\theta)$ کے تکمل کی حدیں تلاش کریں۔

حل:

1. خاکہ: ہم خطے کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر نام و نشان لکھتے ہیں (شکل 14.26)۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی علامتی شعاع خطہ R میں $r=1$ کے مقام پر داخل اور $r=1+\cos\theta$ کے مقام پر خارج ہو گی۔

3. تکمل کی θ حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی وہ شعاعیں جو R سے گزرتی ہوں، $\theta=-\frac{\pi}{2}$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ میں پائی جاتی ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

□

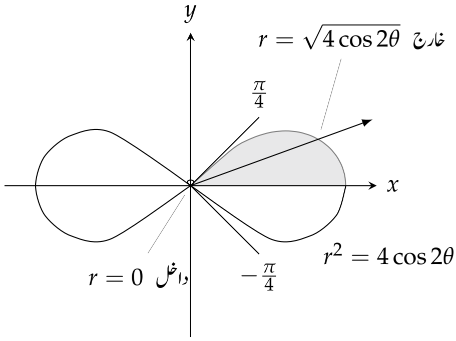
اگر $f(r,\theta)$ ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب R پر f کا تکمل R کا رقبہ ہو گا۔

قطبی محدد میں رقبہ

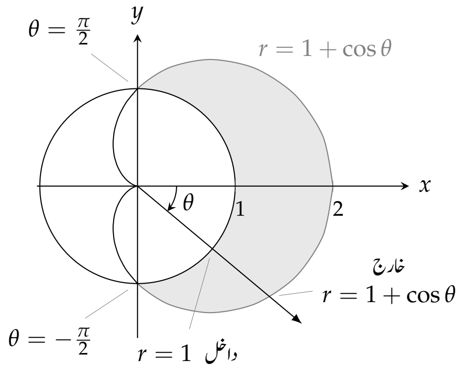
قطبی محددی مستوی میں بند اور محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint\limits_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.27}$$

جیسا آپ توقع کرتے ہوں گے یہ کلیہ، پہلے دیے گئے کلیات کے عین مطابق ہے۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت پیش نہیں کریں گے۔



شکل 14.27: تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم r کو 0 تا $\sqrt{4\cos 2\theta}$ جبکہ θ کو 0 تا $\frac{\pi}{4}$ لیتے ہیں۔



شکل 14.26: دائرہ اور قلب نما (مثال 14.10)

مثال 14.11: دو چشمہ $r^2 = 4\cos 2\theta$ میں گھیرا ہوا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم دو چشمہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.27)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ربع اول میں دو چشمہ کے رقبہ کو 4 سے ضرب دے کر پورا رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 4 \end{aligned}$$

□

کارتیسی تکملات کی قطبی تکملات میں تبدیلی

کارتیسی تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کو قطبی تکمل میں دو قدموں میں تبدیل کیا جاتا ہے:

1. کارتیسی تکمل میں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھیں۔

2. خطہ R کی سرحد کی قطبی حدیں مہیا کریں۔

یوں کارتیسی تکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تکمل کے خطہ کو قطبی محدد میں G سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.28}$$

یہ باب 5 میں ترکیب بدل کی طرح ہے البتہ یہاں ایک کی بجائے دو متغیرات ہیں۔دھیان رہے کہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ نہیں بلکہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ پر کیا جاتا ہے۔اس کی وجہ آگے پیش کی جائے گی۔

مثال 14.12: ربع اول میں دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ایک چوتھائی میں کثافت $\delta(x,y)=1$ کی باریک چادر کی مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: ہم چادر کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.28)۔کارتیسی محدد میں اس خطہ کا قطبی معیار اثر سے مراد درج ذیل تکمل ہے۔

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ہم y کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\int_0^1 (x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3})\,\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں جس کا حل، جدول کی مدد کے بغیر، مشکل ہے۔

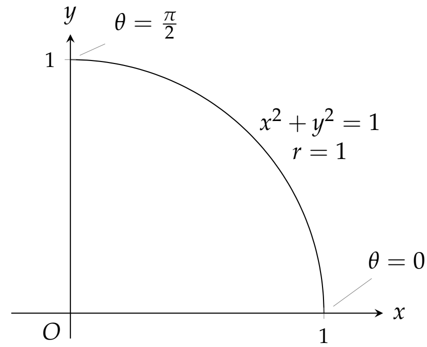
اس تکمل کو قطبی تکمل میں تبدیل کرنے سے حالات بہتر ہوتے ہیں۔ ہم $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

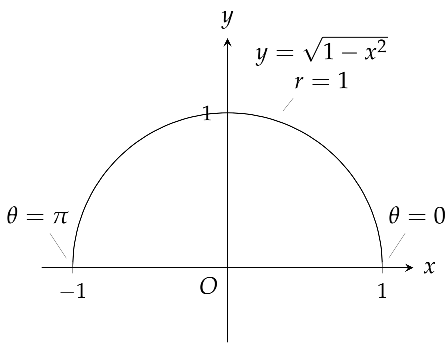
حاصل کرتے ہیں۔قطبی محدد میں تکمل اتنا آسان کیوں ہوا۔ایک وجہ یہ ہے کہ x^2+y^2 سادہ صورت r^2 اختیار کرتا ہے۔دوسری وجہ یہ کہ تکمل کی حدیں اب مستقل ہیں۔ □

مثال 14.13: محور x اور منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ کے بیچ نصف دائری خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں (شکل 14.29)۔

$$\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



شکل 14.28: قطبی محدد میں یہ خطہ $0 \le r \le 1$ ، $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ہے۔



شکل 14.29: نصف دائری خطہ $0 \le r \le 1$ ، $0 \le \theta \le \pi$ ہے۔

حل: کارتیسی محدد میں یہ تکمل غیر بنیادی ہے اور $e^{x^2+y^2}$ کا x یا y کے لحاظ سے تکمل، سیدھا طریقے سے، حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے باوجود یہ تکمل اور اس طرح کے دیگر تکملات ریاضیات میں اہمیت رکھتے ہیں اور ان کا حل ضروری ہے۔ قطبی محدد یہاں مدد گار ثابت ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

آپ نے دیکھا کہ e^{r^2} کے تکمل میں ہمیں $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کا r درکار تھا جس کے بغیر ہم تکمل حاصل نہیں کر سکتے تھے۔ □

سوالات

قطبی تکملات کی قیمت کی تلاش

سوال 1 تا سوال 16 میں دیے گئے تکملات کو قطبی روپ میں تبدیل کر کے حل کریں۔

سوال 1: $\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 2: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 3: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 4: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 5: $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 6: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 7: $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 8: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 9: $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 10: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 11: $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 12: $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 13: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14: $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0}xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 15: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\ln(x^2+y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 16: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

قطبی محدد میں رقبات کی تلاش

سوال 17: ربع اول سے منحنی $r=2(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ جس خطہ کو کاٹتی ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 18: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r=1$ کے باہر خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 19: گلاب $r = 12\cos 3\theta$ کے ایک پتے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 20: مثبت محور x اور پیچ دار $r = \frac{4\theta}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ اس خطہ کی صورت گھونگا کے خول سے ملتی جلتی ہے۔

سوال 21: ربع اول میں قلب نما $r = 1 + \sin\theta$ جس خطہ کو کاٹتا ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 22: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ اور $r = 1 - \cos\theta$ کے مشترکہ خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

کمیت اور معیار اثر

سوال 23: مستقل کثافت $\delta(x, y) = 3$ کی باریک چادر جس کی زیریں سرحد محور x اور بالائی سرحد قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ ہے، کا محور x کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔

سوال 24: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے اندر باریک دائرہ قرص کی کثافت $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے۔ اس قرص کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 25: دائرہ $r = 3$ کے باہر اور دائرہ $r = 6\sin\theta$ کے اندر چادر کی کثافت $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r}$ ہے۔ اس چادر کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 26: قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر باریک چادر کی کثافت $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 27: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 28: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کے اندر باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

اوسط قیمتیں

سوال 29: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کے اوپر نصف کرہ $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 30: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کے اوپر (ایک) مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 31: قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ میں مبدا سے نقطہ $N(x, y)$ کا اوسط فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 32: قرص $x^2+y^2 \le a$ میں نقطہ $N(x,y)$ کا سرحدی نقطہ $A(1,0)$ سے فاصلے کے مربع کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 33: خطہ $1 \le x^2+y^2 \le e$ پر $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کے تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 34: خطہ $1 \le x^2+y^2 \le e^2$ پر $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ کا تکمل حل کریں۔

سوال 35: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r=1$ کے باہر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی مستوی $z=x$ میں پائی جاتی ہے۔ اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 36: دو چشمہ $r^2=2\cos 2\theta$ کے اندر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی کرہ $z=\sqrt{2-r^2}$ کی سطح کو مس کرتی ہے۔اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 37: (ا) غیر مناسب تکمل $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے حل کا درست طریقہ یہ ہے کہ پہلے اس کا مربع لیں:

$$I^2=\Big(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس تکمل کو قطبی روپ میں لکھ کر حل کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (حصہ 8.6 کا سوال 92 جاری)۔

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{erf}(x)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t$$

سوال 38: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 39: قرص $x^2+y^2 \le \frac{3}{4}$ پر تفاعل $f(x,y)=1/(1-x^2-y^2)$ کا تکمل حل کریں۔ کیا قرص $x^2+y^2\le 1$ پر $f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 40: قطبی محدد میں دوہرا تکمل استعمال کرتے ہوئے قطبی منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ اور مبدا کے بیچ پنکھا نما خطہ کے رقبہ کا درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

سوال 41: رداس a کے دائرہ میں N_0 ایک نقطہ ہے اور N_0 سے دائرہ کے مرکز تک فاصلہ h ہے۔ کسی بھی اختیاری نقطہ N سے N_0 تک فاصلہ کو d سے ظاہر کریں۔ دائرہ میں محیط خطہ پر d^2 کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: دائرے کے مرکز کو مبدا پر اور N_0 کو محور x پر رکھ کر اپنے لئے آسانی پیدا کریں۔)

سوال 42: فرض کریں ایک قطبی خطے کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta$$

(ا) اس تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں۔ (ب) پاپس کے ایک مسئلہ اور حصہ 6.10 میں سوال 23 میں وسطانی مرکز کی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 43 تا سوال 46 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کارتیسی تکملات کو قطبی تکملات میں تبدیل کر کے ان قطبی تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ کو درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

ا. کارتیسی تکمل کے خطہ کا خاکہ مستوی xy پر بنائیں۔

ب. جزو-ا میں خطہ کی ہر سرحد کی کارتیسی مساوات کو r اور θ کے لئے حل کرتے ان کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

ج. جزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تکمل کے خطہ کے خاکہ کو قطبی $r\theta$ مستوی میں بنائیں۔

د. متکمل کو کارتیسی سے قطبی روپ میں تبدیل کریں۔ جزو-ج کے خاکہ سے تکمل کی حدیں معلوم کر کے قطبی تکمل کی قیمت کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 43: $\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 44: $\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 45: $\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

سوال 46: $\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

14.4 کارتیسی محدد میں تہرا تکمل

ہم تہرا تکملات کی مدد سے تین بعدی اجسام کے حجم، کمیت اور معیار اثر اور تین متغیری تفاعل کی اوسط قیمت معلوم کرتے ہیں۔ اگلے باب میں ہم دیکھیں گے کہ سمتی میدان اور حرکت سیال کے مطالعہ میں ہمیں ان تکملات سے کیسا واسطہ پڑتا ہے۔

تہرا تکمل

فرض کریں فضا میں بند محدود خطہ D پر تفاعل $F(x, y, z)$ معین ہے، تب D پر تکمل F کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔ہم ایک مستطیل خطہ جس میں D پایا جاتا ہو کو محددی مستویات کے متوازی مستویات سے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.30-ا)۔ ہم D کے اندر پائے جانے والے خانوں کو (کسی بھی ترتیب سے) 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں ایک علامتی مستطیل خانے کے اضلاع Δx_k ، Δy_k اور Δz_k جبکہ اس کا حجم ΔH_h ہو گا (شکل 14.30-ب)۔ ہم ہر مستطیل خانے میں کوئی نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k \tag{14.29}$$

اگر F استمراری ہو اور D کی تحدیدی سطح ہموار سطحوں پر مشتمل ہو جو ایک دوسرے کے ساتھ استمراری منحنیات میں جڑتے ہوں، تب جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر کے قریب پہنچتے ہوں توں توں مجموعات J_n ایک حد تک پہنچتے ہیں:

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iiint\limits_D F(x, y, z)\,\mathrm{d}H \tag{14.30}$$

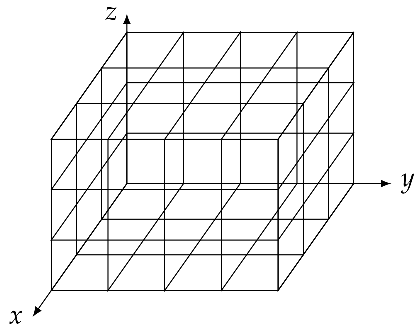
ہم اس حد کو D پر F **کا تہرا تکمل**[13] کہتے ہیں۔ یہ حد چند غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

تہرا تکملات کے خواص

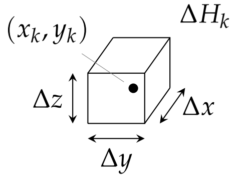
تہرا تکملات کے خواص وہی ہیں جو واحد تکملات اور دوہرا تکملات کے ہیں۔ اگر $F = F(x, y, z)$ اور $G = G(x, y, z)$ استمراری ہوں، تب

1. $\iiint\limits_D kF\,\mathrm{d}H = k\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H$ (k کوئی عدد ہے)
2. $\iiint\limits_D (F \mp G)\,\mathrm{d}H = \iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \mp \iiint\limits_D G\,\mathrm{d}H$
3. اگر D پر $F \geq 0$ تب $\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \geq 0$

[13] triple integral



(ا) ایک حجم جس میں D پایا جاتا ہے کو محددی مستویات کے متوازی سطحوں سے مستطیل مکعب خلیوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔



(ب) ایک مستطیل مکعب خلیہ کا حجم۔

شکل 14.30: ٹھوس جسم کو ΔH_k حجم کے مستطیل خانوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

4. اگر D پر $F \geq D$ ہو تب $\displaystyle\iiint_D F \,\mathrm{d}H \geq \iiint_D G \,\mathrm{d}H$

5. تہرا تکملات مجموعیت کی خاصیت بھی رکھتے ہیں جو طبیعیات، انجینئری اور ریاضیات کے میدان میں کام آتی ہے۔ اگر استمراری تفاعل F کے دائرہ کار D کو ہموار سطحوں سے متناہی تعداد کے علیحدہ علیحدہ ٹکڑوں D_1 ، D_2 ، $\cdots$ ، D_n میں تقسیم کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔
$$\iiint_D F \,\mathrm{d}H = \iiint_{D_1} F \,\mathrm{d}H + \iiint_{D_2} F \,\mathrm{d}H + \cdots + \iiint_{D_n} F \,\mathrm{d}H$$

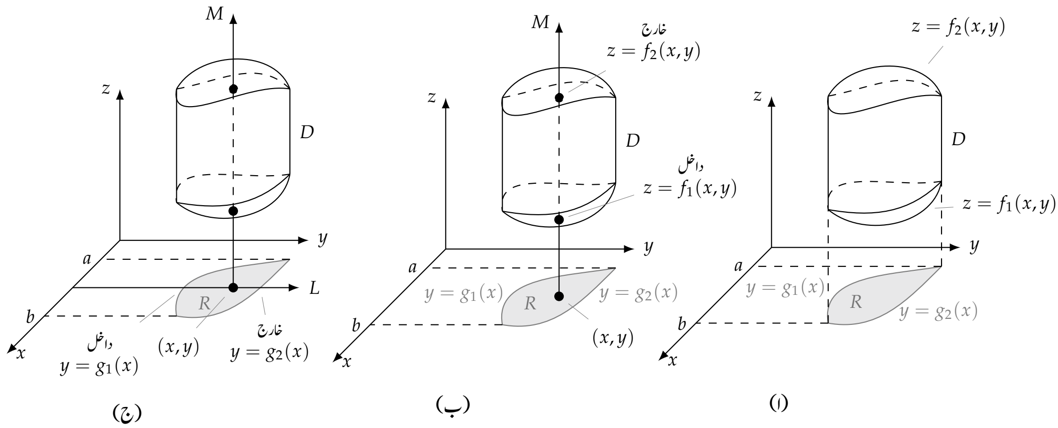
فضا میں خطے کا حجم

اگر F ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب مساوات 14.29 کے تہرا مجموعہ کی تخفیف صورت درج ذیل ہو گی۔

$$J_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k = \sum 1 \cdot \Delta H_k = \sum \Delta H_k \tag{14.31}$$

جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر تک پہنچتے ہیں توں توں ΔH_k جسامت میں چھوٹے اور تعداد میں زیادہ ہوتے جاتے ہیں اور D کے زیادہ حصہ کو بھرتے ہیں۔ اسی لئے ہم D کے حجم کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k = \iiint_D \mathrm{d}H$$



شکل 14.31: تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش۔

تعریف: فضا میں بند محدود خطہ D کا حجم[14] درج ذیل ہو گا۔

$$H = \iiint\limits_D \mathrm{d}H \tag{14.32}$$

□

جیسا ہم جلد دیکھیں گے، قوسی سطحوں میں ملفوف ٹھوس اجسام کا حجم اس تکمل سے حاصل کیا جاتا ہے۔

تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

ہم تہرا تکمل کی تعریف سے اس کی قیمت شاذ و نادر حاصل کرتے ہیں۔ اس کی بجائے ہم مسئلہ فوبنی کی تین بعدی روپ استعمال کرتے ہوئے تین بار ایک گنا تکملات سے اس کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ دہرا تکمل کی طرح، تکمل کے حدیں معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ کار پایا جاتا ہے۔

تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش

دائرہ کار D پر درج ذیل تکمل میں پہلے z، اس کے بعد y اور آخر میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}H$$

---

[14] volume

1. خاکہ: خطہ D کا خاکہ بنائیں اور مستوی xy پر اس کا انتصابی سایہ R دکھائیں۔ خطہ D کی بالائی اور زیریں تحدیدی سطحوں کی نشاندہی کریں اور R کی بالائی اور زیریں تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل 14.31-ا)۔

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے z محور کے متوازی لکیر M کھینچیں۔ بڑھتے z رخ چلتے ہوئے، یہ لکیر $z = f_1(x, y)$ پر D میں داخل ہو گی اور $z = f_2(x, y)$ پر D سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی z حدیں ہیں (شکل 14.31-ب)۔

3. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی y محور کے متوازی لکیر L کھینچیں۔ بڑھتے y رخ چلتے ہوئے یہ لکیر R میں $y = g_1(x)$ پر داخل اور $y = g_2(x)$ پر خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی y حدیں ہیں (شکل 14.31-ج)۔

4. تکمل کی x حدیں: وہ x حدیں منتخب کریں جس میں محور y کے متوازی، R سے گزرتی ہوئی تمام لکیریں L شامل ہوں۔ ہماری مثال میں یہ حدیں $x = a$ اور $x = b$ ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

تکملات کی ترتیب تبدیل کرنے کی صورت میں اسی طرح کی طریقہ کار سے تکملات کی حدیں تلاش کریں۔ بارہا تکمل میں آخری دو متغیرات، جن کے لحاظ سے تکمل لیا گیا ہو، کے مستوی میں D کا سایہ درکار ہو گا۔

مثال 14.14: خطہ D سطح $z = x^2 + 3y^2$ اور سطح $z = 8 - x^2 - y^2$ میں ملفوف ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

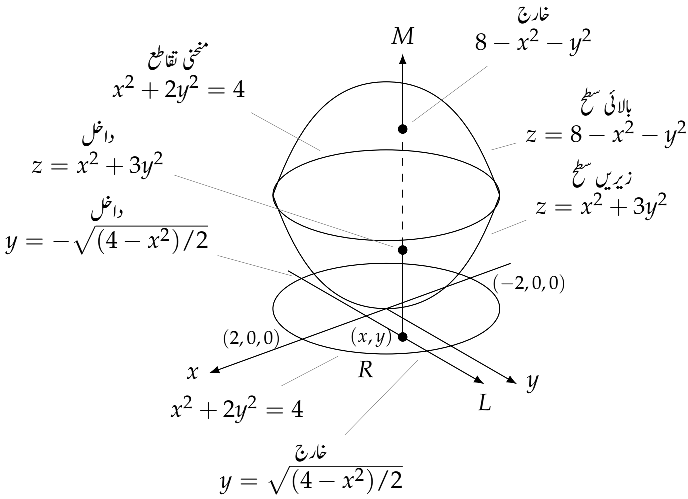
حل: ہم $F(x, y, z) = 1$ لیتے ہوئے حجم کے لئے درج ذیل تکمل لکھتے ہیں۔

$$H = \iiint\limits_D \mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

ہم تکمل کی حدیں درج ذیل اقدام سے معلوم کرتے ہیں۔

1. خاکہ: یہ سطحیں ایک دوسرے کو قطع مکافی $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ یعنی $x^2 + 2y^2 = 4$ میں قطع کرتی ہیں (شکل 14.32)۔ مستوی xy میں D کے سایہ R کی سرحد کی مساوات یہی ($x^2 + 2y^2 = 4$) ہو گی۔ خطہ R کی بالائی سرحد منحنی $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ اور اس کی زیریں سرحد منحنی $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ ہو گی۔

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور z کی متوازی لکیر M خطہ D میں $z = x^2 + 3y^2$ پر داخل اور $z = 8 - x^2 - y^2$ پر خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.32: دو سطحوں کے بیچ حجم (مثال 14.14)

3. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x,y) سے گزرتی ہوئی محور y کی متوازی لکیر L خطہ R میں $y=-\sqrt{(4-x^2)/2}$ پر داخل اور $y=\sqrt{(4-x^2)/2}$ پر خارج ہوتی ہے۔

4. تکمل کی x حدیں: محور y کی متوازی لکیریں L خطہ R میں $x=-2$ (نقطہ (-2,0,0)) سے $x=2$ (نقطہ (2,0,0)) تک گزرتی ہیں۔

یوں حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \iiint\limits_{D} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\Big[(8-2x^2)y-\frac{4}{3}y^3\Big]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\Big(2(8-2x^2)]\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}-\frac{8}{3}\Big(\frac{4-x^2}{2}\Big)^{3/2}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\Big[8\Big(\frac{4-x^2}{2}\Big)^{3/2}-\frac{8}{3}\Big(\frac{4-x^2}{2}\Big)^{3/2}\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\pi\sqrt{2} \qquad \text{$x = 2\sin u$ پر کر کے تکمل لیا گیا ہے}
\end{aligned}$$

□

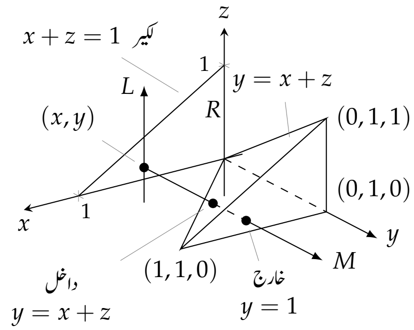
اگلی مثال میں ہم مستوی xy کی بجائے مستوی xz میں D کا سایہ لیتے ہیں۔

مثال 14.15: چوسطحہ D کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,1,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,1,1)$ ہیں۔ تفاعل $F(x,y,z)$ کے تہرا تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

حل:

1. خطہ: ہم D اور مستوی xz میں اس کے سایہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 14.33)۔ خطہ D کی بالائی (دائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = 1$ میں پائی جاتی ہے۔ اس کی زیریں (بائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = x + z$ میں پائی جاتی ہے۔ خطہ R کی بالائی سرحد لکیر $z = 1 - x$ اور زیریں سرحد لکیر $z = 0$ ہیں۔

2. تکمل کی y حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x,y) سے گزرتی لکیر جو محور y کے متوازی ہو D میں $y = x + z$ پر داخل اور $y = 1$ پر خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.33: چو سطحہ (مثال 14.15)

3. تکمل کی z حدیں: محور z کے متوازی نقطہ (x,y) سے گزرتی لکیر L خطہ R میں $z=0$ پر داخل اور $z=1-x$ پر خارج ہوتی ہے۔

4. تکمل کی x حدیں: خطہ R میں $x=0$ سے $x=1$ تک گزرتی ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

□

جیسا ہم جانتے ہیں، دہرا تکمل کا حصول عموماً (لیکن ضروری نہیں) ایک گنا تکملات کو دو مختلف ترتیب سے حاصل کر کے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تہرا تکمل کے لئے اس طرح کے چھ ترتیب ممکن ہو سکتے ہیں۔

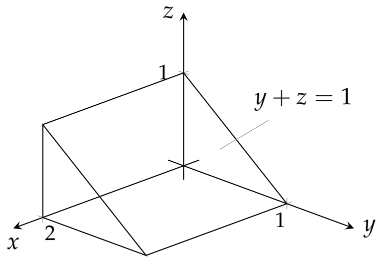
مثال 14.16: درج ذیل چھ تکملات شکل 14.34 میں دکھائے گئے منشور کا حجم دیتے ہیں۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

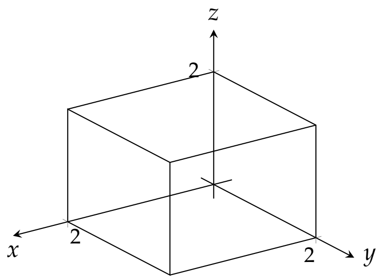
$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

□



شکل 14.34: منشور کے حجم کی چھ بارہا تہرا تکملات مثال 14.16 میں دیے گئے ہیں۔



شکل 14.35: تکمل کا خطہ (مثال 14.17)

فضا میں تفاعل کی اوسط قیمت

فضا میں خطہ D پر تفاعل F کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$D \text{ پر } F \text{ کی اوسط قیمت} = \frac{1}{D \text{ کا حجم}} \iiint\limits_D F \,\mathrm{d}H \tag{14.33}$$

مثال کے طور پر اگر $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہو تب D پر F کی اوسط قیمت سے مراد مبدا سے D میں نقطوں کا اوسط فاصلہ ہے۔ اگر D میں $F(x,y,z)$ ایک ٹھوس جسم کی کمیتی کثافت ہو تب D میں F کی اوسط قیمت اس جسم کی اوسط کمیتی کثافت ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی حجم ہو گی۔

مثال 14.17: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ $F(x,y,z) = xyz$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم اس مکعب کا خاکہ بنا کر اس پر تکمل کی حدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 14.35)۔ اس کے بعد مساوات 14.33 سے مکعب پر F کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مکعب کا حجم $(2)(2)(2) = 8$ ہو گا۔ مکعب پر F کی قیمت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^2\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2\int_0^2 2yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^2 \left[y^2z\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}z = \int_0^2 4z\,\mathrm{d}z = \left[2z^2\right]_0^2 = 8\end{aligned}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.33 سے درج ذیل اوسط قیمت حاصل ہو گی۔

$$\text{مکعب پر اوسط قیمت} = \frac{1}{\text{حجم}}\iiint xyz\,\mathrm{d}H = \left(\frac{1}{8}\right)(8) = 1$$

ہم نے اس تکمل کو $\mathrm{d}x$ ، $\mathrm{d}y$ ، $\mathrm{d}z$ ترتیب سے حاصل کیا۔ ہم باقی پانچ ترتیب میں سے کسی ایک ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے بھی اس تکمل کو حل کر سکتے ہیں۔ □

سوالات

مختلف اعادوں سے تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 1: چھ مختلف اعادوں سے مثال 14.16 میں حجم کا حل دیا گیا ہے۔ ان تمام کا مشترک جواب کیا ہے؟

سوال 2: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 2$ اور $z = 3$ کے بیچ ٹھوس مستطیل جسم کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 3: ثُمن اول سے مستوی $6x + 3y + 2z = 6$ ایک چو سطحہ کاٹتا ہے۔ اس کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 4: ثُمن اول سے بیلن $x^2 + z^2 = 4$ اور مستوی $y = 3$ ایک خطہ کاٹتے ہیں۔ اس خطہ کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5: قطعات مکافی $z = 8 - x^2 - y^2$ اور $z = x^2 + y^2$ میں محیط خطہ D کے حجم کا چھ مختلف تہرا اعادہ تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 6: قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور مستوی $z = 2y$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کی تہرا اعادہ تکملات ترتیب $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ میں لکھیں۔ ان میں سے کسی بھی تکمل کی قیمت حاصل نہ کریں۔

تہرا اعادہ تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 7 تا سوال 20 میں تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 7: $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 8: $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 9: $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 10: $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 11: $\int_0^1\int_0^\pi\int_0^\pi y\sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 12: $\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1(x+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

سوال 13: $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14: $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{2x+y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 15: $\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 16: $\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_3^{4-x^2-y}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 17: $\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(u+v+w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ (فضا uvw)

سوال 18: $\int_1^e\int_1^e\int_1^e\ln r\ln s\ln t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$ (فضا rst)

سوال 19: $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\ln\sec v}\int_{-\infty}^{2t}e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$ (فضا tvx)

سوال 20: $\int_0^7\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-q^2}}\frac{q}{r+1}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}r$ (فضا pqr)

حجم بذریعہ تہرا تکملات

سوال 21: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل 14.36 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔

ا. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

ب. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

ج. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

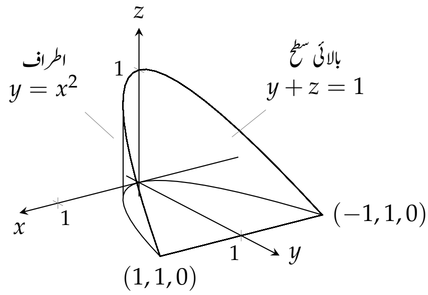
د. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

ھ. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

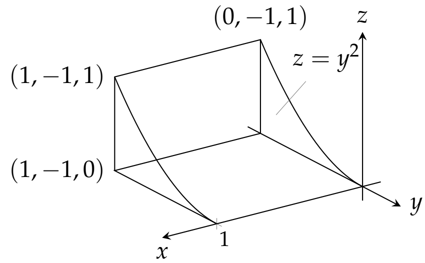
سوال 22: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل 14.37 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^{y^2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

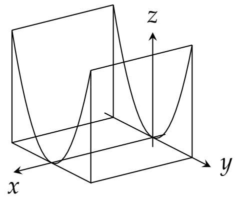
اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔



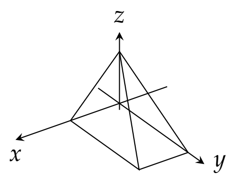
شکل 14.36: خاکہ برائے سوال 21



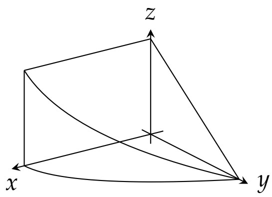
شکل 14.37: خاکہ برائے سوال 22



شکل 14.38: خاکہ برائے سوال 23



شکل 14.39: خاکہ برائے سوال 24



شکل 14.40: خاکہ برائے سوال 25

ا. $dy\,dz\,dx$

ب. $dy\,dx\,dz$

ج. $dx\,dy\,dz$

د. $dx\,dz\,dy$

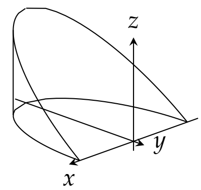
ہ. $dz\,dx\,dy$

سوال 23 تا سوال 36 میں خطوں کا حجم تلاش کریں۔

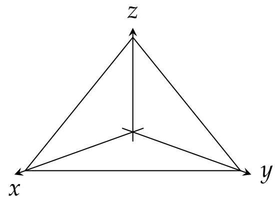
سوال 23: بیلن $z = y^2$ اور مستوی xy کے بیچ خطہ جس کی سرحدیں مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ ہیں (شکل 14.38)۔

سوال 24: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x + z = 1$ ، $y + 2z = 2$ کے بیچ خطہ (شکل 14.39)۔

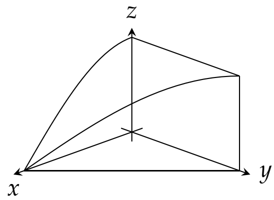
سوال 25: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $y + z = 2$ اور بیلن $x = 4 - y^2$ کے بیچ خطہ (شکل 14.40)۔



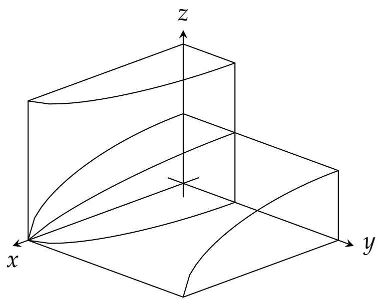
شکل 14.41: خاکہ برائے سوال 26



شکل 14.42: خاکہ برائے سوال 27



شکل 14.43: خاکہ برائے سوال 28



شکل 14.44: خاکہ برائے سوال 29

سوال 26: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے مستویات $z = -y$ اور $z = 0$ جو ٹکڑا کاٹتے ہیں (شکل 14.41)۔

سوال 27: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ کے بیچ چو سطحہ (شکل 14.42)۔

سوال 28: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $y = 1 - x$ اور سطح $z = \cos(\pi x/2),\ 0 \le x \le 1$ کے بیچ خطہ (شکل 14.43)۔

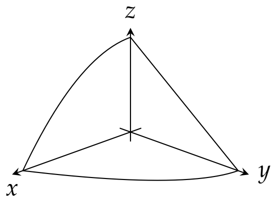
سوال 29: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور بیلن $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترک اندرون (شکل 14.44)۔

سوال 30: ثُمن اول میں محددی مستویات اور سطح $z = 4 - x^2 - y$ کے بیچ خطہ (شکل 14.45)۔

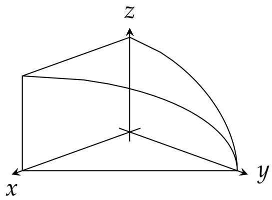
سوال 31: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x + y = 4$ اور بیلن $y^2 + 4z^2 = 16$ کے بیچ خطہ (شکل 14.46)۔

سوال 32: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ سے مستویات $z = 0$ اور $x + z = 3$ جو خطہ کاٹتے ہیں (شکل 14.47)۔

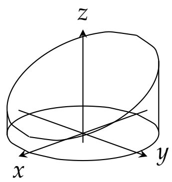
سوال 33: ثُمن اول میں مستویات $x + y + 2z = 2$ اور $2x + 2y + z = 4$ کے بیچ خطہ۔



شکل 14.45: خاکہ برائے سوال 30



شکل 14.46: خاکہ برائے سوال 31



شکل 14.47: خاکہ برائے سوال 32

سوال 34: مستویات $z = x$ ، $x + z = 8$ ، $z = y$ ، $y = 8$ اور $z = 0$ کے بیچ متناہی خطہ۔

سوال 35: ٹھوس ترخیمی بیلن $x^2 + 4y^2 \leq 4$ سے xy مستوی اور مستوی $z = x + 2$ جو خطہ کاٹتے ہیں۔

سوال 36: وہ خطہ جس کا پشت مستوی $x = 0$ ، سامنے اور اطراف قطع مکافی بیلن $x = 1 - y^2$ ، بالا قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے مستوی xy ہوں۔

اوسط قیمتیں

سوال 37 تا سوال 40 میں دیے گئے خطہ پر $F(x, y, z)$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 37: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ مکعب خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^2 + 9$ لیں۔

سوال 38: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x + y - z$ لیں۔

سوال 39: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ لیں۔

سوال 40: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = xyz$ لیں۔

تکمل کی ترتیب بدلنا

سوال 41 تا سوال 44 میں موزوں طریقہ سے تکمل کی ترتیب تبدیل کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 41: $\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz$

سوال 42: $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\, dy\, dx\, dz$

سوال 43: $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2}\, dx\, dy\, dz$

سوال 44: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\, dy\, dz\, dx$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: درج ذیل کو a کے لئے حل کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dz\, dy\, dx = \frac{4}{15}$$

سوال 46: ترخیمی سطح $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کا حجم c کی کس قیمت کے لئے 8π ہو گا؟

سوال 47: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)\, dH$$

سوال 48: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2)\, dH$$

کمپیوٹر

سوال 49 تا سوال 52 میں دیے گئے خطہ پر تفاعل کا تہرا تکمل کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔

سوال 49: مستویات $z = 0$ اور $z = 1$ اور سطح $x^2 + y^2 = 1$ کے بیچ ٹھوس بیلن پر تفاعل $F(x, y, z) = x^2y^2z$ لیں۔

سوال 50: ٹھوس خطہ جو نیچے سے قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x, y, z) = |xyz|$ لیں۔

سوال 51: ٹھوس خطہ جو نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x, y, z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ لیں۔

سوال 52: ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$ لیں۔

14.5 تین بعدی کمیت اور معیار اثر

اس حصہ میں تین بعدی اجسام کی کمیت اور معیار اثر کا حصول کارتیسی محدد میں سکھایا جائے گا۔ یہ کلیات دو بعدی اجسام کے کلیات کی طرح ہیں۔ کروی اور نلکی محدد میں حساب کرنا اگلے حصہ میں دکھایا جائے گا۔

کمیت اور معیار اثر

فضا میں خطہ D میں پائے جانے والے ایک جسم کی کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ ہے۔ خطہ D پر δ کا تکمل اس جسم کی کمیت دیگا۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں کر ہو گا ہم اس جسم کو n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.48)۔ جسم کی کمیت درج ذیل حد ہو گی۔

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k = \iiint\limits_D \delta(x, y, z)\,\mathrm{d}H \tag{14.34}$$

اگر D میں لکیر L سے نقطہ (x, y, z) کا فاصلہ $r(x, y, z)$ ہو، تب L کے لحاظ سے کمیت $\Delta m_k = \delta(x, y_k, z_k)\Delta H_k$ تقریباً $\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k)\Delta m_k$ ہو گا۔ یوں L کے لحاظ سے پورے جسم کا معیار اثر درج ذیل ہو گی۔

$$I_L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta I_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r^2(x_k, y_k, z_k)\delta(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k = \iiint\limits_D r^2\delta\,\mathrm{d}H$$

اگر L محور x ہو تب $r^2 = y^2 + z^2$ ہو گا اور

$$I_x = \iiint\limits_D (y^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}H$$

ہو گا۔اسی طرح

$$I_y = \iiint\limits_D (x^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}H \quad \text{اور} \quad I_z = \iiint\limits_D (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}H$$

ہوں گے۔ان کلیات کو دیگر کلیات کے ساتھ یہاں یکجا کیا گیا ہے۔

کمیت: $M = \iiint\limits_D \delta \, \mathrm{d}H$ (δ =کثافت)

محددی مستویات کے لحاظ سے معیار اثر اول:

$$M_{yz} = \iiint\limits_D x\delta \, \mathrm{d}H, \quad M_{xz} = \iiint\limits_D y\delta \, \mathrm{d}H, \quad M_{xy} = \iiint\limits_D z\delta \, \mathrm{d}H$$

مرکز کمیت: $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$

جمودی معیار اثر (معیار اثر دوم):

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint (y^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}H \\
I_y &= \iiint (x^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}H \\
I_z &= \iiint (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}H
\end{aligned}$$

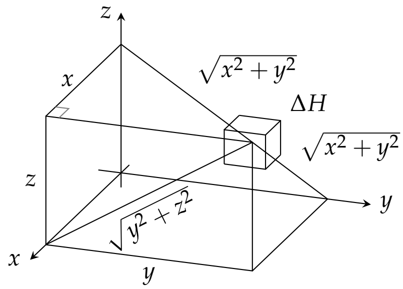
خط L کے لحاظ سے معیار اثر: $I_L = \iiint r^2 \delta \, \mathrm{d}H$ (جہاں L سے نقطہ (x, y, z) کا فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔)

خط L کے لحاظ سے رداس دوار: $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

مثال 14.18: مستقل کثافت δ کا مستطیل ٹھوس جسم شکل 14.49 میں دکھایا گیا ہے۔اس کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کریں۔

حل: ہم مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{14.35}$$



شکل 14.48: محددی محور اور محددی مستویات سے ایک ٹکڑے کے فاصلے۔

ہو گا۔چونکہ $\delta(y^2+z^2)$ متغیرات x ، y اور z کا جفت تفاعل ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

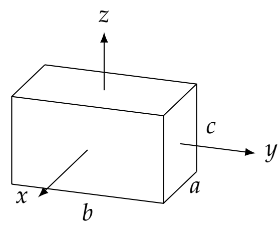
$$
\begin{aligned}
I_x &= 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2}(y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\Big[\frac{y^3}{3}+z^2y\Big]_{y=0}^{y=b/2}\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\Big(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\Big)\,\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\Big(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\Big) = \frac{abc\delta}{12}(b^2+c^2) = \frac{M}{12}(b^2+c^2)
\end{aligned}
$$

اسی طرح درج ذیل ہوں گے۔

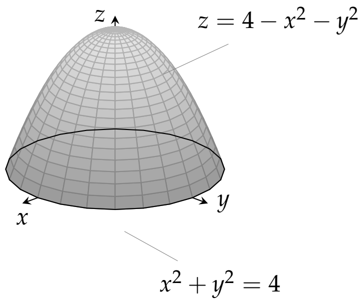
$$
I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2) \quad \text{اور} \quad I_y = \frac{M}{12}(a^2+c^2)
$$

□

مثال 14.19: مستقل کثافت δ کے جسم کی نچلی سرحد مستوی $z=0$ میں قرص $R:\ x^2+y^2\le 4$ ہے جبکہ اس کی بالائی حد قطع مکافی $z=4-x^2-y^2$ ہے (شکل 14.50)۔ اس جس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔



شکل 14.49: ٹھوس جسم برائے مثال 14.18



شکل 14.50: ٹھوس جسم برائے مثال 14.19

حل: تشاکلی کی بنا $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہمیں $\bar{z}$ معلوم کرنے کے لئے پہلے درج ذیل دریافت کرنے ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint\limits_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\delta \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \iint\limits_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2} \iint\limits_R (4 - x^2 - y^2)^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r)^2 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta && \text{قطبی محدد} \\
&= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(4 - r^2)^3\right]_{r=0}^{r=2} \mathrm{d}\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{32\pi\delta}{3}
\end{aligned}$$

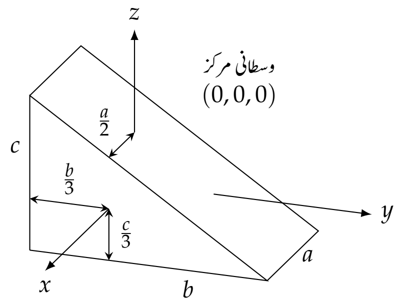
اسی طرح

$$M = \iint\limits_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 8\pi\delta$$

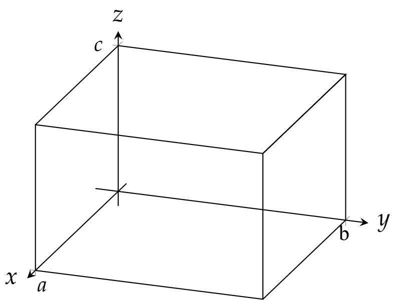
ہو گا۔یوں $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4}{3}$ اور مرکز کمیت $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ ہو گا۔ □

جب جسم کی کثافت اٹل ہو (جیسا مثال 14.18 اور مثال 14.19 میں تھا)، تب (دو بعدی اجسام کی طرح) مرکز کمیت اس جسم کا **وسطانی مرکز**[15] ہو گا۔

[15] centroid



شکل 14.51: پچر برائے سوال 2



شکل 14.52: مستطیل ٹھوس جسم برائے سوال 3

سوالات

مستقل کثافت

سوال 1 تا سوال 12 میں کثافت $\delta = 1$ ہے۔

سوال 1: جمودی معیار اثر کی مساوات 14.35 کو سیدھا حل کر کے مثال 14.18 میں مستعمل چھوٹے طریقہ کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔ مثال 14.18 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس جسم کے رداس دوار تلاش کریں۔

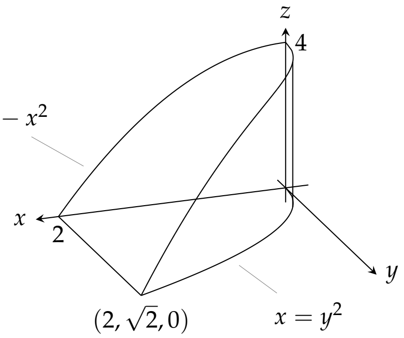
سوال 2: ایک پچر کے وسطانی مرکز گزرتے محددی محور پچر کے کناروں کے متوازی ہیں (شکل 14.51)۔اگر $a = b = 6$ اور $c = 4$ تب I_x ، I_y اور I_z کیا ہوں گے۔

سوال 3: مستطیل ٹھوس جسم کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کرتے ہوئے جسم کے کناروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں (شکل 14.52)۔

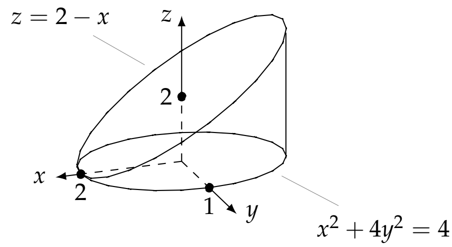
سوال 4: (ا) ایک چو سطحہ جس کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ ہیں کا وسطانی مرکز اور I_x ، I_y اور I_z تلاش کریں۔ (ب) محور x کے لحاظ سے اس چو سطحہ کا رداس دوار معلوم کریں۔ محور x سے وسطانی مرکز تک فاصلہ کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔

سوال 5: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس "کونڈا" کی زیریں سرحدی سطح $z = 4y^2$ ، بالائی سرحدی سطح $z = 4$ اور اطراف مستویات $x = 1$ اور $x = -1$ ہیں۔ اس کی مرکز کمیت اور تینوں محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 6: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد مستوی $z = 0$ ، بالائی سرحد مستوی $z = 2 - x$ اور اس کے اطراف ترخیمی بیلن $x^2 + 4y^2 = 4$ ہے (شکل 14.53)۔ (ا) $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔ آخری



شکل 14.54: ٹھوس جسم برائے سوال 14



شکل 14.53: ٹھوس جسم برائے سوال 6

تکمل میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے آپ کو تکملات کا جدول استعمال کرنا ہو گا۔ $M_{xy} = \int_{-2}^{2} \int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2-x} z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ اس کے بعد M_{xy} کو M سے تقسیم کر کے تصدیق کریں کہ $\bar{z} = \frac{5}{4}$ ہو گا۔

سوال 7: (ا) مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور بالائی سرحد مستوی $z = 4$ ہے۔ اس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ (ب) وہ مستوی $z = c$ دریافت کریں جو اس جسم کو برابر حجم کے دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتا ہو۔ یہ مستوی اس جسم کے مرکز کمیت سے نہیں گزرتا ہے۔

سوال 8: ایک ٹھوس مکعب کے اضلاع کی لمبائیاں 2 اکائیاں ہے۔ یہ مستویات $x = \mp 1$ ، $z = \mp 1$ ، $y = 3$ اور $y = 5$ کے بیچ واقع ہے۔ اس مکعب کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے مکعب کے رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 9: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 2 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : y = 6, z = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (y-6)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال 10: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 2 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : x = 4, y = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال 11: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 3 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : y = 2, z = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (y-2)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 12: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 3 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : x = 4, y = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 13 اور سوال 14 میں (ا) جسم کی کمیت اور (ب) اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 13: ثُمن اول میں ایک ٹھوس جسم جو محددی مستویات اور مستوی $x + y + z = 2$ کے بیچ واقع ہے۔ اس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2x$ ہے۔

سوال 14: ثُمن اول میں مستویات $y = 0$ اور $z = 0$ اور سطح $z = 4 - x^2$ اور سطح $x = y^2$ کے بیچ واقع جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (شکل 14.54)۔

سوال 15 اور سوال 16 میں درج ذیل تلاش کریں۔

ا. اس جسم کی کمیت۔

ب. اس جسم کا مرکز کمیت۔

ج. محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر۔

د. محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دور۔

سوال 15: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ ٹھوس مکعب جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے۔

سوال 16: ایک مستطیل ٹھوس جسم جس کے $a = 2$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 2 دیکھیں) کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + 1$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل کثافت کی صورت میں اس جسم کا مرکز کمیت $(0, 0, 0)$ ہو گا۔

سوال 17: مستویات $x + z = 1$ ، $x - z = -1$ ، $y = 0$ اور سطح $y = \sqrt{z}$ کے بیچ واقع ٹھوس جسم جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2y + 5$ ہے۔

سوال 18: قطع مکافی سطح $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ اور $z = 2x^2 + 2y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ اس جسم کی کمیت تلاش کریں۔

کام

سوال 19 اور سوال 20 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. مکمل بھرے ہوئے برتن سے سیال کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟ (اشارہ: برتن میں سیال کو چھوٹے چھوٹے حجم کے ٹکڑوں ΔH_k میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کو منتقل کرنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے سیال کو منتقل کرنے کا کام ہو گا۔ یہ مجموعہ، حد کی صورت میں، تہرا تکمل دیگا جس کی قیمت آپ کو معلوم کرنی ہو گی۔)

ب. مکمل بھرے ہوئے برتن میں سیال کے مرکز کمیت کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟

سوال 19: برتن ثمن اول میں مکعبی ڈبہ کی صورت کا ہے جو محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے (سوال 15 دیکھیں)۔

سوال 20: مستویات $y = 0$ ، $z = 0$ اور سطحوں $z = 4 - x^2$ ، $x = y^2$ کے بیچ برتن پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (سوال 14 دیکھیں)۔

مسئلہ متوازی محور

مسئلہ متوازی محور (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں ایک جسم جس کی کمیت m ہو کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہو جس کے متوازی h فاصلہ پر خط L پایا جاتا ہو۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے اس جسم کے جمودی معیار اثر درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{14.36}$$

دو بعدی صورت کی طرح اگر ہمیں ایک جمودی معیار اثر، فاصلہ h اور جسم کی کمیت m معلوم ہو تب ہم اس مسئلہ کی مدد سے دوسرا جمودی معیار اثر با آسانی دریافت کر سکتے ہیں۔

سوال 21: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

ا. پہلے دکھائیں کہ جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے فضا میں کسی بھی مستوی کے لحاظ سے معیار اثر اول صفر ہو گا۔ (اشارہ: جسم کے مرکز کمیت کو مبدا پر اور مستوی کو مستوی yz لیں۔ تب کلیہ $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$ کیا معلومات فراہم کرتا ہے؟)

ب. جسم کے مرکز کمیت کو بدا پر، خط $L_{c,m}$ کو محور z پر، اور نقطہ $(h, 0, 0)$ پر L کو مستوی xy کا متوازی رکھیں۔ فرض کریں یہ جسم فضا میں خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ تب شکل کے لحاظ سے درج ذیل ہو گا۔

$$I_L = \iiint\limits_D |\boldsymbol{v} - h\boldsymbol{i}|^2 \,\mathrm{d}m \tag{14.37}$$

اس تکمل کو پھیلا کر حل کر کرتے ہوئے ثبوت مکمل کریں۔

سوال 22: مستقل کثافت، رداس a کے کرہ قطر کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $\frac{2}{5}ma^2$ ہو گا جہاں کرہ کی کمیت m ہے۔ کرہ کو مماسی خط کے لحاظ سے کرہ کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 23: محور z کے لحاظ سے سوال 3 کے جسم کا جمودی معیار اثر $I_z = \frac{1}{3}abc(a^2 + b^2)$ ہے۔

ا. مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے اس ٹھوس جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے، محور z کے متوازی خط کے لحاظ سے جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

ب. جزو-ا کے نتائج اور مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے خط $x = 0$, $y = 2b$ کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 24: اگر سوال 2 کے پچر میں $a = b = 6$ اور $c = 4$ ہوں محور x کے لحاظ سے $I_x = 208$ ہو گا۔ اس پچر کا خط $y = 4$, $z = -4/3$ (پچر کے تنگ سر کے کنارہ) کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

کلیہ پاپس

کلیہ پاپس (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں دو اجسام B_1 اور B_2 جن کی کمیتیں بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں فضا میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے خطوں میں پائے جاتے ہیں۔ مبدا سے ان اجسام کے مراکز کمیت تک سمتیات بالترتیب $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ ہیں۔ تب ان کے اشتراک $B_1 \cup B_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{14.38}$$

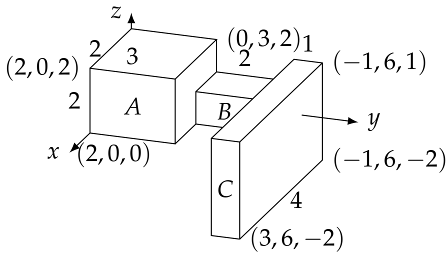
پہلے کی طرح، اس کو **کلیہ پاپس**[16] کہتے ہیں۔ دو بعدی صورت کی طرح، n عدد اجسام کے لئے اس کلیہ کی عمومی روپ درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{14.39}$$

سوال 25: کلیہ پاپس (مساوات 14.38) اخذ کریں۔ (اشارہ: ثُمن اول میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے اجسام B_1 اور B_2 کا خاکہ بنا کر ان کے مراکز کمیت کو $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ سے ظاہر کریں۔ کمیت m_1 اور m_2 اور ان کمیت کے مراکز کے محدد کی صورت میں محددی مستویات کے لحاظ سے $B_1 \cup B_2$ کے معیار اثر حاصل کریں۔)

سوال 26: مستقل کثافت $\delta = 1$ کے تین مستطیل ٹھوس اجسام سے ایک جسم حاصل کیا گیا ہے (شکل 14.55)۔ کلیہ پاپس استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کے مراکز کمیت تلاش کریں۔

[16] Pappus's formula



شکل 14.55: ٹھوس جسم برائے سوال 26

ا. $A \cup B$ ب. $A \cup C$ ج. $B \cup C$ د. $A \cup B \cup C$

سوال 27:

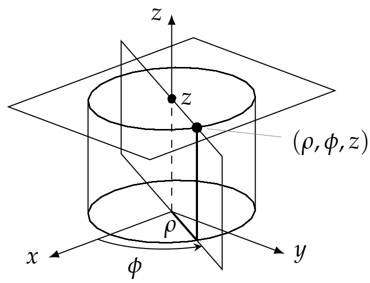
ا. قد h اور رداس r کے قاعدہ کا دائری ٹھوس مخروط C ، رداس a کے ٹھوس نصف کرہ S پر قلفی کی طرح جمایا گیا ہے۔ ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی ($\frac{1}{4}$) فاصلہ پر واقع ہے۔ نصف کرہ کے وسطانی مرکز قاعدہ سے سر کے رخ تین آٹھواں ($\frac{3}{8}$) فاصلہ دور ہے۔ مشترک جسم $C \cup S$ کا مرکز مشترک قاعدہ پر رکھنے کی خاطر a اور h کے بیچ تعلق معلوم کریں۔

ب. اگر آپ نے حصہ 14.2 میں معادل سوال 55 کو اب تک حل نہ کیا ہو، تب اس کو حل کریں۔ دونوں کے جواب ایک جیسے نہیں ہیں۔

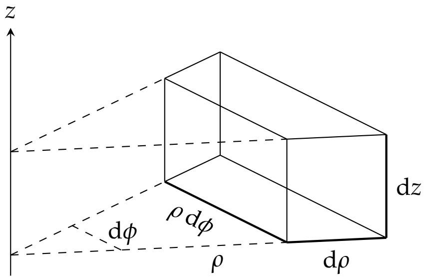
سوال 28: ایک ٹھوس اہرام P جس کا قد h اور مماثل چار اضلاع ہیں کا قاعدہ ٹھوس مکعب C کا ایک مربعی سطح ہے جس کے اضلاع کی لمبائیاں s ہے۔ ٹھوس اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی فاصلہ پر ہے۔ ٹھوس جسم $P \cup C$ کا وسطانی مرکز اہرام کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر s اور h کا تعلق دریافت کریں۔ سوال 27 کے نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔ حصہ 14.2 میں سوال 56 کے نتیجہ کے ساتھ بھی موازنہ کریں۔

14.6 نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل

انجینئری، طبیعیات اور جیومیٹری میں مخروط ، بیلن یا کرہ کے ساتھ کام نلکی اور کروی محدد میں زیادہ آسان ہوتا ہے۔



شکل 14.56: نلکی محدد میں مستقل محدد سطحیں۔



شکل 14.57: نلکی محدد میں چھوٹا حجم $\mathrm{d}H = \mathrm{d}z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

نلکی محدد

جن بیلن کا محور z محدد پر پایا جاتا ہو اور وہ مستویات جن میں z محدد پایا جاتا ہو یا جو z محدد کے عمودی ہوں، کو نلکی محدد میں بیان کرنا نہایت آسان ہوتا ہے (شکل 14.56)۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں ان سطحوں کی مساوات مستقل محددی صورت رکھتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\rho &= 4\\
\phi &= \frac{\pi}{3}\\
z &= 2
\end{aligned}
$$

فضا میں خطہ کی نلکی محدد میں مستطیلی خانہ بندی کا ایک خانہ شکل 14.57 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر z محدد سے اس خانے کی وسط تک رداس ρ ہو تب خانے کے اندرونی اور بیرونی سطحوں کے رداس بالترتیب $\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2}$ اور $\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2}$ ہوں گے۔ اس چھوٹے خانے کو نقطہ دار لکیروں سے z محدد تک بڑھا کر حجم $\frac{1}{2}(\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ حاصل ہو گا جس میں سے اضافی حجم $\frac{1}{2}(\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ منفی کر کے چھوٹے حصہ کا حجم معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)^2 \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)^2 \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\\
&= \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

چھوٹے مستطیل خانے کی وسطی (یا اندرونی قوسی) چوڑائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ ، لمبائی $\mathrm{d}\rho$ اور قد $\mathrm{d}z$ لے کر

$$
\mathrm{d}H = (\rho\,\mathrm{d}\phi)(\mathrm{d}\rho)(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
$$

حجم زیادہ آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح خانے کی سامنے (یا پشت) سطح کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ ، نچلی (یا بالائی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$ اور قوسی (اندرونی یا بیرونی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔ یوں نلکی محدد میں تہرا تکملات کو بطور بارہا تکملات حل کیا جائے گا۔ ایسا اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.20: خطہ D پر تفاعل $f(\rho,\phi,z)$ کی نلکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کریں۔ خطہ D نیچے سے مستوی $z=0$ اور اطراف سے دائری بیلن $x^2+(y-1)^2=1$ جبکہ اوپر سے قطع مکافی $z=x^2+y^2$ کے بیچ پایا جاتا ہے (شکل 14.58)۔

حل

1. خاکہ بنانا: D کا قاعدہ ہی مستوی xy پر D کی تظلیل R ہو گی۔تظلیل R کی سرحد دائرہ $x^2+(y-1)^2=2$ ہو گی جس کی قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
x^2+(y-1)^2&=1\\
x^2+y^2-2y+1&=1\\
\rho^2-2\rho\sin\phi&=0\\
\rho&=2\sin\phi
\end{aligned}$$

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں عمومی نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتی ہوئی لکیر M ، جو z محدد کے متوازی ہو D میں $z=0$ پر داخل اور $z=x^2+y^2=\rho^2$ پر خارج ہو گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے خط L جو نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتا ہو، R میں $\rho=0$ پر داخل اور $\rho=2\sin\phi$ پر خارج ہو گا۔

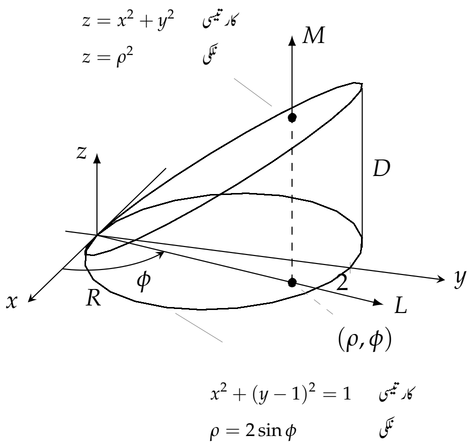
4. تکمل کی ϕ حدیں: خط L جھاڑو کی طرح R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ $\phi=0$ اور $\phi=\pi$ کے بیچ رہتا ہے۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

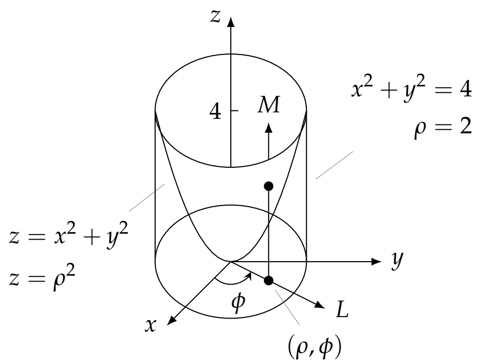
$$\iiint\limits_D f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}H=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\int_0^{\rho^2} f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

□

اس مثال میں ہم نے نلکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنا سیکھا۔



شکل 14.58: جسم برائے مثال 14.20



شکل 14.59: جسم برائے مثال 14.21

مثال 14.21: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ میں بند ٹھوس جسم جو اوپر سے قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy کے بیچ پایا جاتا ہو، کا وسطانی مرکز تلاش کریں (شکل 14.21)۔ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta = 1$ ہے۔

حل

ہم اوپر سے قطع کافی $z = \rho^2$ اور نیچے سے مستوی $z = 0$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں۔اس کا قاعدہ R مستوی xy میں قرص $|\rho| \le 2$ ہو گا۔

ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تشاکلی محور پر ہو گا جو محور z ہے۔ یوں $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہوگا۔ ہم معیار اثر M_{xy} کو کمیت M سے تقسیم کر کے $\bar{z}$ تلاش کرتے ہیں۔

کمیت اور معیار اثر کے تکملات کی حدیں تلاش کرنے کی خاطر ہم وہی چار مخصوص قدم لیتے ہیں۔ خاکہ بنا کر ہم پہلا قدم مکمل کر چکے ہیں۔ باقی اقدام درج ذیل ہیں۔

2. تکمل کی z حدیں: علامتی نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہوئی، محدد z کی متوازی لکیر M ، ٹھوس جسم میں $z = 0$ سے داخل اور $z = \rho^2$ سے خارج ہو گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے شروع نقطہ ρ, ϕ سے گزرتی ہوئی لکیر L خطہ R میں $\rho = 0$ سے داخل اور $\rho = 2$ سے خارج ہو گی۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L قاعدہ پر گھڑی کی سوئی کی طرح گھومتی ہوئی $\phi = 0$ سے $\phi = 2\pi$ تک طے کرتی ہے۔

یوں M_{xy} کی قیمت

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} z \, \mathrm{d}z \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\rho^2} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{\rho^5}{2} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^6}{12}\right]_0^{\rho^2} \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \, \mathrm{d}\phi = \frac{32\pi}{3}$$

اور M کی قیمت

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} \mathrm{d}z \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[z\right]_0^{\rho^2} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} 4 \, \mathrm{d}\phi = 8\pi$$

ہو گی لہٰذا

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3} \frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$$

ہو گا۔ وسطانی مرکز $(0, 0, 4/3)$ ہو گا جو ٹھوس جسم سے باہر ہے۔ □

نلکی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر تکمل

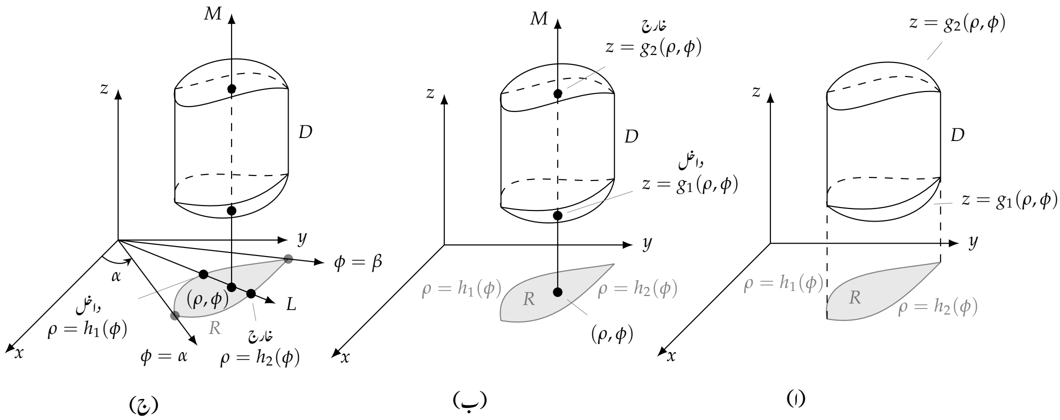
$$\iiint\limits_D f(\rho, \phi, z) \, \mathrm{d}H$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے نلکی محدد میں پہلے z ، اس کے بعد ρ اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy پر اس کی تظلیل R کا خاکہ بنائیں۔ D اور R کی سرحدی سطحوں اور منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل 14.60-ا)۔

2. تکمل کی z حدیں: R میں علامتی نقطہ (ρ, ϕ) پر محور z کے متوازی ایک علامتی لکیر M کھینچیں جو بڑھ کر D میں $z = g_1(\rho, \phi)$ سے داخل اور $z = g_2(\rho, \phi)$ سے خارج ہو گی (شکل 14.60-ب)۔ یہی تکمل کی z حدیں ہوں گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے ایک لکیر L کھینچیں جو نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہو۔ یہ شعاع خطہ R میں $\rho = h_1(\phi)$ سے داخل اور $\rho = h_2(\phi)$ سے خارج ہو گی (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکمل کی ρ حدیں ہوں گی۔



شکل 14.60: نلکی محدد میں تہرا تکمل کی حدوں کا تعین۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L خطہ R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ زاویہ $\phi = \alpha$ اور $\phi = \beta$ کے بیچ رہتی ہے (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D f(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}H = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\rho=h_1(\phi)}^{\rho=h_2(\phi)} \int_{z=g_1(\rho,\phi)}^{z=g_2(\rho,\phi)} f(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi \tag{14.40}$$

کروی محدد

ایسے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں، وہ نصف چادر جن کا چول محور z ہو، اور وہ مخروط جن کا راس مبدا پر اور محور محددی نظام کے محور z پر ہو، کو کروی محدد میں بیان کرنا آسان ہوتا ہے۔ ان سطحوں کی مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$r = 4$	کرہ، جس کا رداس 4 اور مرکز مبدا پر ہے
$\phi = \dfrac{\pi}{3}$	مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہوا مخروط جو مثبت z محور کے ساتھ $\pi/3$ زاویہ بناتا ہے
$\phi = \dfrac{\pi}{3}$	نصف چادر جس کا چول محور z ہے اور جو مثبت x محور کے ساتھ $\pi/3$ زاویہ بناتا ہے

کروی محدد میں چھوٹے مستطیل حجم سے مراد وہ **کروی پچر**[17] ہے جس کو $\mathrm{d}r$ ، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}\phi$ تعین کرتے ہیں۔ یہ پچر تقریباً مستطیلی ہو گا جس کے ایک اطراف کی قوسی لمبائی $r\,\mathrm{d}\phi$ ، دوسرے طرف کی قوسی لمبائی $r \sin\phi\,\mathrm{d}\phi$ اور موٹائی $\mathrm{d}r$ ہو گی۔ یوں کروی محدد

[17] spherical wedge

میں چھوٹے ٹکڑے کا حجم

$$\mathrm{d}H = r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi \tag{14.41}$$

ہو گا اور تہرا تکمل کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\iiint F(r,\phi,\phi)\,\mathrm{d}H = \iiint F(r,\phi,\phi) r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi$$

ہم عموماً پہلے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔ ہم صرف ان تکملات پر غور کریں گے جو z محور کے لحاظ سے اجسام طواف (یا ان کا حصہ) ہوں اور جن کے ϕ اور ϕ حدیں مستقل ہوں۔

کروی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر تکمل

$$\iiint_D F(r,\phi,\phi)\,\mathrm{d}H$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے r، اس کے بعد ϕ، اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy میں D کی تظلیل R کا خاکہ بنا کر D کی سرحدی سطحوں کی نشاندہی کریں۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے ایک لکیر M کھینچیں جو مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ϕ بناتی ہو۔ ساتھ ہی R پر M کی تظلیل L کا خاکہ بنائیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بنائی گی۔ جیسے جیسے r بڑھے گا M خطہ D میں $r = g_1(\phi,\phi)$ سے داخل اور $r = g_2(\phi,\phi)$ سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی r حدیں ہوں گی۔

3. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے M مثبت محور z کے ساتھ $\phi = \phi_1$ سے $\phi = \phi_2$ تک زاویہ بنائے گی۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے L خطہ R پر جھاڑو کی طرح چلتے ہوئے $\phi = \alpha$ سے $\phi = \beta$ تک چلتی ہے۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D F(r,\phi,\phi)\,\mathrm{d}H = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=g_1(\phi,\phi)}^{r=g_2(\phi,\phi)} F(r,\phi,\phi) r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi$$

مثال 14.22: ٹھوس کرہ $r \leq 1$ سے مخروط $\theta = \pi/3$ بالائی خطہ D کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا حجم تلاش کریں۔

حل: اس خطے کا حجم $\iiint_D r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi$ ہو گا۔ تکمل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: ہم D اور مستوی xy میں اس کی تظلیل R کا خاکہ بناتے ہیں۔

2. تکمل کی r حدیں: ہم مثبت z محور کے ساتھ ϕ زاویہ پر مبدا سے شعاع M کھینچتے ہیں اور ساتھ ہی xy مستوی میں اس کی تظلیل L کھینچتے ہیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بناتا ہے۔ شعاع M خطہ D میں $(r = 0)$ سے داخل اور $r = 1$ سے خارج ہو گا۔

3. تکمل کی ϕ حدیں: مخروط $\theta = \pi/3$ مثبت z محور کے ساتھ زاویہ $\pi/3$ بناتا ہے۔ یوں شعاع M زاویہ $\phi = 0$ سے $\phi = \pi/3$ تک چل سکتی ہے۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: شعاع L خطہ R پر $\phi = 0$ سے 2π تک چلتی ہے۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H = \iiint_D r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1 \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{3} \cos\phi \Big]_0^{\pi/3} \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \Big) \mathrm{d}\phi = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

□

مثال 14.23: مستقل کثافت $\delta = 1$ کا ایک ٹھوس جسم مثال 14.22 کے خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: کارتیسی محدد میں جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}H$$

ہو گا۔ کروی محدد میں $x^2 + y^2 = (r \sin\phi \cos\phi)^2 + (r \sin\phi \sin\phi)^2 = r^2 \sin^2\phi$ کی بنا جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (r^2 \sin^2\phi) r^2 \sin\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi = \iiint r^4 \sin^3\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\phi$$

ہو گا جس کی قیمت مثال 14.22 کے خطہ کے لئے درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{1} r^4\sin^3\phi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1 \sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(1-\cos^2\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\phi+\frac{\cos^3\phi}{3}\Big]_0^{\pi/3}\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\Big)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{24}\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

□

محددی بدل کے کلیات

کروی سے نلکی	کروی سے کارتیسی	نلکی سے کارتیسی
$\rho = r\sin\phi$	$x = r\sin\phi\cos\phi$	$x = \rho\cos\phi$
$z = r\cos\phi$	$y = r\sin\phi\sin\phi$	$y = \rho\sin\phi$
$\phi = \phi$	$z = r\cos\phi$	$z = z$

مطابقتی چھوٹے حجم درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\\
&= r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

سوالات

نلکی محدد

سوال 1 تا سوال 6 میں تکمل کی قیمت نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 1: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 2: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{18-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 3: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2\pi}\int_0^{3+24\rho^2} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 4: $\int_0^{\pi}\int_0^{\phi/\pi}\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{3\sqrt{4-\rho^2}} z \,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 5: $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{\rho}^{1/\sqrt{2-\rho^2}} 3 \,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 6: $\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-1/2}^{1/2} (\rho^2\sin^2\phi+z^2) \,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

اب تک ہم نلکی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب z ، ρ ، ϕ سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 7 تا سوال 10 کے تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7: $\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{z/3} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$

سوال 8: $\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\phi} 4\rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

سوال 9: $\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2\phi+z^2)\rho \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

سوال 10: $\int_0^{2}\int_{\rho-2}^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi} (\rho\sin\phi+1)\rho \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 11: نیچے سے مستوی $z=0$ ، اوپر سے کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ ، اور اطراف سے بیلن $x^2+y^2=1$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 12: نیچے سے مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ، اوپر سے قطع مکافی $z=2-x^2-y^2$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 13: نیچے سے مستوی $z=0$ ، اطراف سے بیلن $\rho=\cos\phi$ ، اور اوپر سے قطع مکافی سطح $z=3\rho^2$ میں ملفوف خطہ D کے لئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کرنے کے لئے کے تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

$$\iiint F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

سوال 14: درج ذیل تکمل کو معادل نلکی محدد کے تکمل میں تبدیل کر اس کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 15 تا سوال 20 میں دیے گئے خطہ D پر تکمل $\iiint_D F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے تہرا تکمل لکھیں۔

سوال 15: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 2\sin\phi$ اور سر مستوی $z = 4 - y$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 16: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 3\cos\phi$ اور سر مستوی $z = 5 - x$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 17: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں قلب نما $\rho = 1 + \cos\phi$ کے اندر اور دائرہ $\rho = 1$ کے باہر اور سر مستوی $z = 4$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 18: وہ ٹھوس قائمہ بیلن جس کا قاعدہ دائرہ $\rho = \cos\phi$ اور دائرہ $\rho = 2\cos\phi$ کے بیچ اور سر مستوی $z = 3 - y$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 19: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور x، لکیر $y = x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - y$ میں ہو، خطہ D ہے۔

سوال 20: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور y، لکیر $y = x$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - x$ میں ہو، خطہ D ہے۔

کروی محدد

سوال 21 تا سوال 26 میں کروی تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 21: $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 22: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2}(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 23: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\theta)/2} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 24: $\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^1 5r^3\sin^3\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$

سوال 25: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\theta}^2 3r^2\sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$

سوال 26: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta} (r\cos\theta)r^2\sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$

اب تک ہم کروی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 27 تا سوال 30 میں تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 27: $\int_0^2\int_{-\pi}^0\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3\sin 2\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r$

سوال 28: $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2\csc\theta}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$

سوال 29: $\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} 12r\sin^3\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r$

سوال 30: $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\csc\theta}^2 5r^4\sin^3\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$

سوال 31: کروی محدد میں (ا) $\mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$، (ب) $\mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$ ترتیب سے سوال 11 کے خطہ کے حجم کے تہرا تکمل لکھیں۔

سوال 32: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ کے بیچ خطہ D کے حجم کا تکمل کروی محدد میں(ا) $\mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$، (ب) $\mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$ ترتیب کے لئے لکھیں۔

سوال 33 تا سوال 38 میں دئے گئے ٹھوس جس کے حجم کے کروی تکمل (ا) کی حدیں تلاش کریں۔ (ب) کروی تکمل حل کرتے ہوئے جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 33: کرہ $r = \cos\theta$ اور نصف کرہ $r = 2, z \geq 0$ کے بیچ ٹھوس جسم۔

سوال 34: نیچے سے نصف کرہ $r = 1, z \geq 0$ اور اوپر سے سطح طواف قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ میں ملفوف ٹھوس جسم۔

سوال 35: جسم طواف قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ میں ملفوف۔

سوال 36: وہ بالائی خطہ جو سوال 35 کے جسم سے مستوی xy کاٹتا ہے۔

سوال 37: نیچے سے کرہ $r = 2\cos\theta$ اور اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ میں ملفوف جسم۔

سوال 38: نیچے سے مستوی xy، اوپر سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور اطراف سے کرہ $r = 2$ میں ملفوف

کارتیسی، نلکی اور کروی محدد

سوال 39: کرہ $r = 2$ کے حجم کا تہرا تکمل (ا) کروی، (ب) نلکی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔

سوال 40: ثُمن اول میں نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور اوپر سے کرہ $r = 3$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کا تہرا تکمل (ا) نلکی اور (ب) کروی محدد میں لکھیں۔ (ج) اس کے بعد اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 41: رداس 2 اکائیاں کے کرہ کو، کرہ سے مرکز سے 1 اکائی دور، مستوی دو ٹکڑوں میں کاٹتی ہے۔ چھوٹے ٹکڑے کے حجم کا تہرا تکمل (ا) کروی، (ب) نلکی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔ (د) اس ٹکڑے کا حجم کسی ایک تہرا تکمل کو حل کرتے ہوئے معلوم کریں۔

سوال 42: ٹھوس نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0$ کے جمودی معیار اثر I_z کو (ا) نلکی اور (ب) کروی محدد میں لکھیں۔ (ج) I_z کی قیمت تلاش کریں۔

حجم

سوال 43 تا سوال 48 میں ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 43:

سوال 44:

سوال 45:

سوال 46:

سوال 47:

سوال 48:

سوال 49: مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \le a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 50: ثُمن اول میں نصف مستویات $\phi = 0$ اور $\phi = \frac{\pi}{6}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \le a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 51: ٹھوس کرہ $r \le 2$ سے مستوی $z = 1$ جو چھوٹا ٹکڑا کاٹتا ہے، اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 52: مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 53: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 54: نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 1 + x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 55: موٹی دیوار کے بیلن $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ سے مخروط $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$ جتنا حصہ کاٹتے ہیں، اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 56: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کے اندر اور بیلن $x^2 + y^2 = 1$ کے باہر خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 57: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 58: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $x + y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 59: اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 5 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = 4x^2 + 4y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 60: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے باہر، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 9 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 61: اس خطے کا حجم تلاش کریں جسے ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \le 1$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ سے کاٹتا ہے۔

سوال 62: اوپر سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

اوسط قیمت

سوال 63: مستویات $z = -1$ اور $z = 1$ کے بیچ بیلن $\rho = 1$ میں تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 64: کرہ $\rho^2 + z^2 = 1$ (یعنی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) کے اندر تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 65: ٹھوس گیند $r \leq 1$ میں تفاعل $F(r, \theta, \phi) = r$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 66: بالائی نصف ٹھوس کرہ $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ میں تفاعل $F(r, \theta, \phi) = r\cos\theta$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

کمیت، معیار اثر، اور وسطانی مراکز

سوال 67: نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اوپر سے مخروط $z = \rho, \rho \geq 0$ ، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف مستقل کثافت کے ٹھوس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 68: ثُمن اول میں اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $x = 0$ اور $y = 0$ میں ملفوف خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 69: اس ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو سوال 38 میں دیا گیا ہے۔

سوال 70: اوپر سے کرہ $r = a$ اور نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 71: اوپر سے سطح $z = \sqrt{\rho}$ ، نیچے سے مستوی xy ، اور اطراف سے بیلن $\rho = 4$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 72: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو نصف مستویات $\phi = -\pi/3, \rho \geq 0$ اور $\phi = \pi/3, \rho \geq 0$ ٹھوس گیند $\rho^2 + z^2 \leq 1$ سے کاٹتے ہیں۔

سوال 73: قائمہ دائری موٹی دیوار کے بیلن کی اندرونی سطح بیلن $\rho = 1$ اور بیرونی سطح بیلن $\rho = 2$ ہیں۔اس کا نچلا سر مستوی $z = 0$ اور بالائی سر مستوی $z = 4$ میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 74: ایک قائمہ دائری بیلن کا رداس 1 اور قد 2 ہے۔ (ا) بیلن کے محور، (ب) بیلن کے وسطانی مرکز سے گزرتی ہوئے لکیر جو بیلن کے محور کو عمودی ہو، کے لحاظ سے بیلن کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 75: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ 1 اور قد 1 ہے۔ مخروط کے راس سے گزرتی ہوئی لکیر جو مخروط کے محور کو عمودی ہے کے لحاظ سے مخروط کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 76: رداس a کے کرہ کا جمودی معیار اثر کرہ کے قطر کے لحاظ سے تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 77: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ a اور قد h ہے۔ اس کا جمودی معیار اثر مخروط کے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔ (اشارہ: مخروط کے محور کو محور z اور راس کو مبدا پر رکھیں۔)

سوال 78: ایک ٹھوس جسم اوپر سے قطع مکافی سطح $z = \rho^2$ ، نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$ ، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = \rho$ ہے۔

سوال 79: ایک ٹھوس جسم نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$ ، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = z^2$ ہے۔

سوال 80: ایک ٹھوس گیند کا رداس $r = a$ ہے اور کثافت (ا) $\delta(r, \theta, \phi) = r^2$ ، (ب) $\delta(r, \theta, \phi) = \rho = r \sin\theta$ ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس گیند کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 81: دکھائیں کہ ایک نیم ترخیمی سطح طواف $\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} \le 1, z \ge 0$ کا وسطانی مرکز محور z پر قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہے۔ بالخصوص $h = a$ ایک ٹھوس نصف کرہ دیتا ہے۔ یوں ٹھوس نصف کرہ کا وسطانی مرکز قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہو گا۔

سوال 82: دکھائیں کہ ایک قائمہ دائری ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز محور پر قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا۔ (عمومی طور پر مخروط اور اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا)۔

سوال 83: رداس $\rho = a$ کا ایک قائمہ دائری بیلن مستویات $z = 0$ اور $z = h, h > 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس کی کثافت $\delta(\rho, \phi, z) = z + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 84: رداس R کے ایک سیارہ پر ہوا کی کثافت $\mu = \mu_0 e^{-ch}$ ہے جہاں سیارہ کی سطح سے بلندی h ہے جبکہ سیارہ کی سطح پر ہوا کی کثافت μ_0 ہے اور c ایک مثبت مستقل ہے۔ سیارہ میں ہوا کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 85: ایک سیارہ کا رداس R اور کمیت M ہے۔ اس کی کثافت کروی تشاکلی ہے جو سطح سے مرکز تک خطی بڑھتی ہے۔ سیارہ کی سطحی کثافت صفر لیتے ہوئے اس کے مرکز پر کثافت تلاش کریں۔

14.7 تکملات بالکثرت میں بدل

اس حصہ میں بارہا تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل سکھایا جائے گا۔ واحد تکمل کی طرح یہاں بھی پیچیدہ تکمل کو سادہ تکمل سے بدلہ جاتا ہے۔ بدل سے متکمل یا تکمل کی حدوں یا ان دونوں کی سادہ روپ استعمال کی جاتی ہے۔

دوہرا تکملات میں میں بدل

ہم قطبی محدد کی بدل کا استعمال حصہ 14.3 میں دیکھ چکے ہیں جو دہرا تکملات کی بدل، جس میں متغیرات کی تبدیلی کو خطے کی تبدیلی کو خطے کی تبدیلی تصور کیا جاتا ہے، کی ایک مخصوص شکل ہے۔

فرض کریں مستوی uv کے خطہ G کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ مساوات

$$x = g(u,v), \quad y = h(u,v)$$

کے ذریعہ مستوی xy کے خطہ R میں بدلا جاتا ہے۔ ہم R کو اس بدل میں G کا **عکس**[18] اور G کو R کا **قبل عکس**[19] کہتے ہیں۔ خطہ R کسی بھی تفاعل $f(x,y)$ کو خطہ G میں معین تفاعل $f(g(u,v),h(u,v))$ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خطہ R میں $f(x,y)$ کے تکمل کا خطہ G میں $f(g(u,v),h(u,v))$ کے تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

اس کا جواب: اگر g ، h اور f کے جزوی تفرقات استمراری ہوں اور $J(u,v)$ (جس پر جلد تبصرہ کیا جائے گا) صرف تنہا نقطوں پر صفر ہو (اگر صفر ہو بھی) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(g(u,v),h(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.42}$$

مذکورہ بالا مساوات میں $J(u,v)$ ، جو یعقوبی کہلاتا ہے، کی مطلق قیمت استعمال کی گئی۔

تعریف: **یعقوبی مقطع** یا محددی بدل $x = g(u,v)$ ، $y = h(u,v)$ کے **یعقوبی**[20] سے مراد درج ذیل ہے:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{14.43}$$

□

---

[18] image
[19] preimage
[20] Jacobian

یعقوبی کو

$$J(u,v) = \frac{x,y}{u,v}$$

سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے جو ہمیں یاد دلاتا ہے کہ x اور y کی جزوی تفرقات سے یعقوبی (مساوات 14.43) حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.42 کی استخراج آپ کو اعلیٰ احصاء کے نصاب میں ملے گی جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

قطبی محدد میں میں u اور v کی جگہ r اور θ ہوں گے لہٰذا $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لیتے ہوئے یعقوبی

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

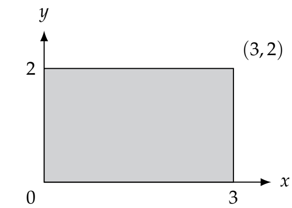
ہو گا اور مساوات 14.42 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جو حصہ 14.3 کی مساوات 14.28 ہے۔

$$\begin{aligned} \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{اگر } r \geq 0 \text{ ہو} \end{aligned} \tag{14.44}$$

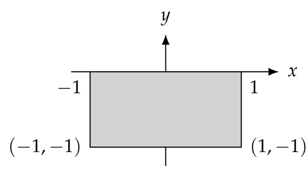
جوابات

حصہ 14.1 صفحہ 1677

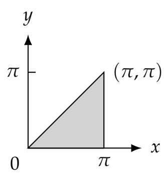
1) 16



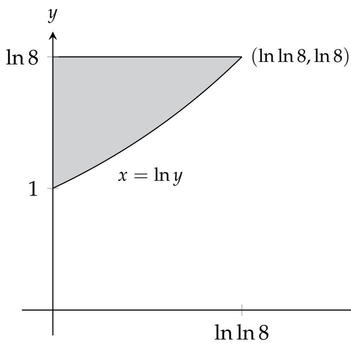
3) 1



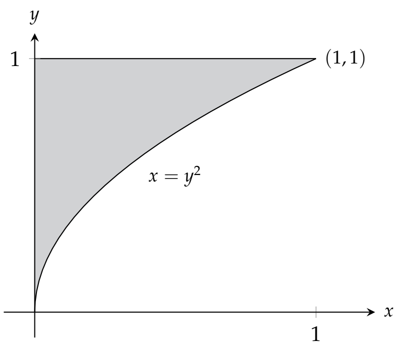
5) $\frac{\pi^2}{2}+2$



7) $8\ln 8-16+e$



9) $e-2$

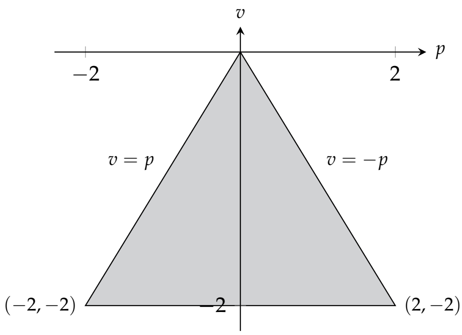


11) $\frac{3}{2}\ln 2$

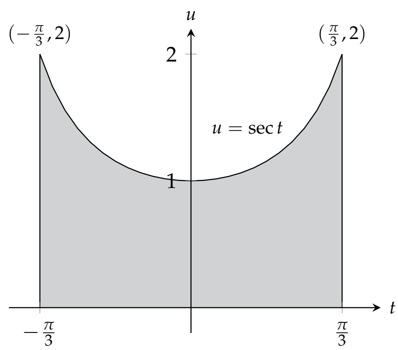
13) $\frac{1}{6}$

15) $-\frac{1}{10}$

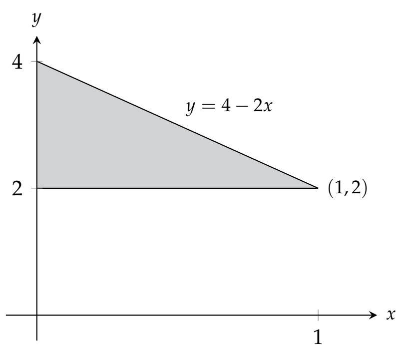
17) 8



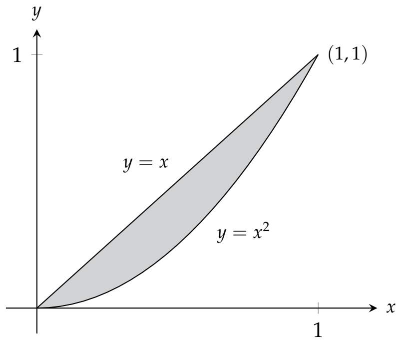
19) 2π



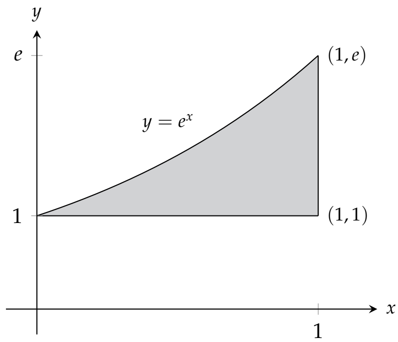
21) $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



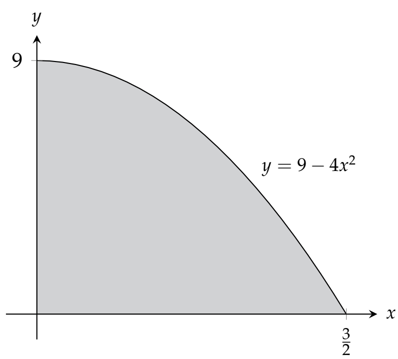
23) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



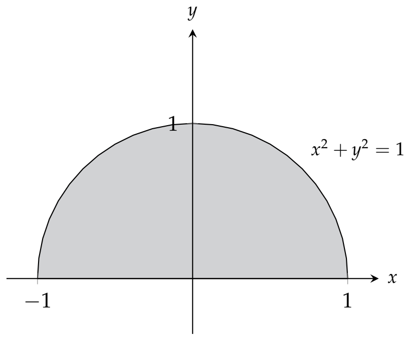
25) $\int_1^e \int_{\ln y}^{1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



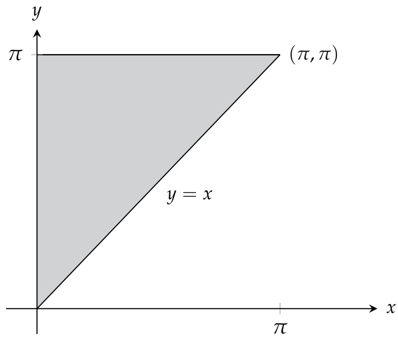
27) $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



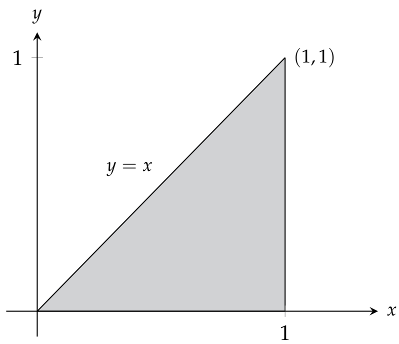
29) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



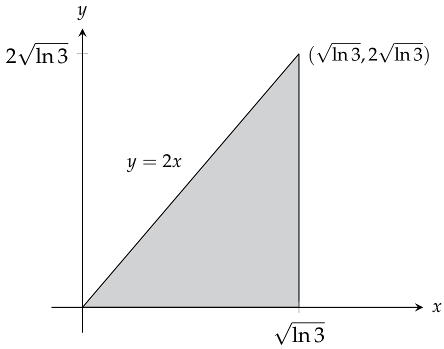
31) 2



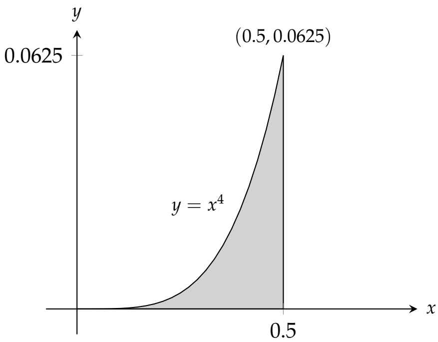
33) $\frac{e-2}{2}$



35) 2



37) $\frac{1}{80\pi}$



39) $-\frac{2}{3}$

41) $\frac{4}{3}$

43) $\frac{625}{12}$

45) 16

47) 20

49) $2(1+\ln 2)$

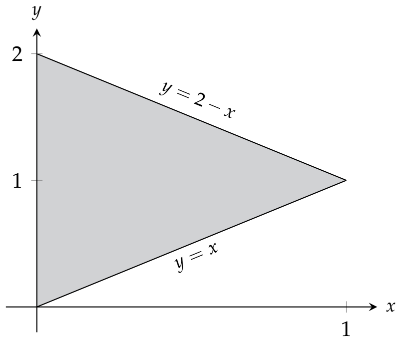
51) 1

53) π^2

55) $-\frac{1}{4}$

57) $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

59) $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

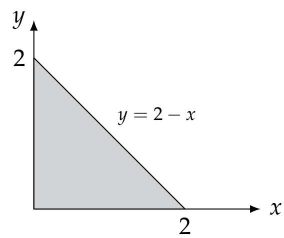


67) 0.603

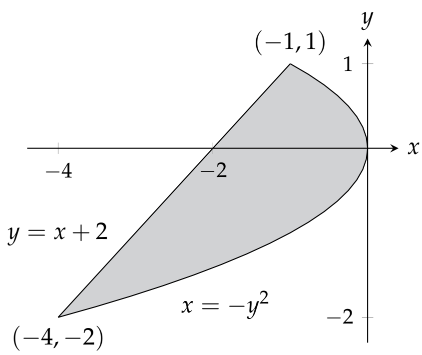
69) 0.233

حصہ 14.2 صفحہ 1693

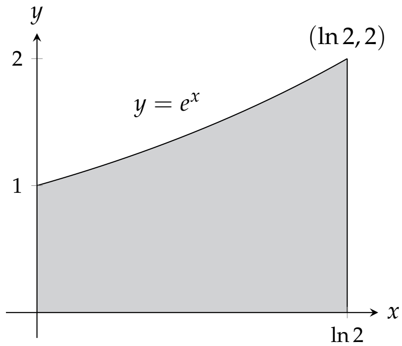
1) $\int_0^2 \int_0^{2-x} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = 2,\ \int_0^2 \int_0^{2-y} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2$



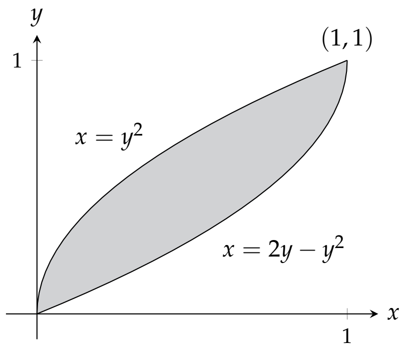
3) $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{9}{2}$



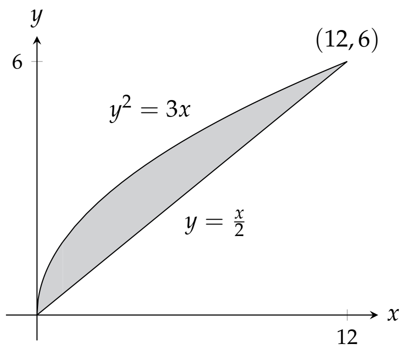
5) $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = 1$



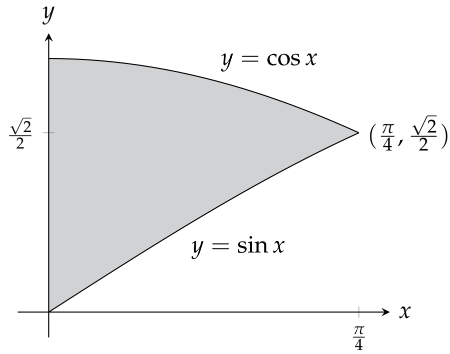
7) $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{3}$



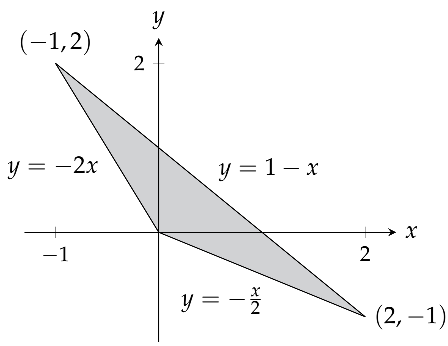
9) 12



11) $\sqrt{2} - 1$



13) $\frac{3}{2}$



15) (ا) 0 ، (ب) $\frac{4}{\pi^2}$

17) $\frac{8}{3}$

19) $\bar{x} = \frac{5}{14}, \bar{y} = \frac{38}{35}$

21) $\bar{x} = \frac{64}{35}, \bar{y} = \frac{5}{7}$

23) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}$

25) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$

27) $\bar{x} = \frac{\pi}{2}, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

29) $\bar{x} = -1, \bar{y} = \frac{1}{4}$

31) $I_x = \frac{64}{105}, R_x = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$

33) $\bar{x} = \frac{3}{8}, \bar{y} = \frac{17}{16}$

35) $\bar{x} = \frac{11}{3}, \bar{y} = \frac{14}{27}, I_y = 432, R_y = 4$

37) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{13}{31}, I_y = \frac{7}{5}, R_y = \sqrt{\frac{21}{31}}$

39) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{7}{10}, I_x = \frac{9}{10}, I_y = \frac{3}{10}$
$I_0 = \frac{6}{5}, R_x = \frac{3\sqrt{6}}{10}, R_y = \frac{3\sqrt{2}}{10}, R_0 =$
$\frac{3\sqrt{2}}{5}$

41) $40\,000(1 - e^{-2})\ln(\frac{7}{2}) \approx 43\,329$

43) $0 < a \leq \frac{5}{2}$

45) $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$

47) (ا) $\frac{3}{2}$ ، (ب) ایک جیسے ہیں۔

53) (ا) $(\frac{7}{5}, \frac{31}{10})$ ، (ب) $(\frac{19}{7}, \frac{18}{7})$ ، (ج) $(\frac{9}{2}, \frac{19}{8})$ ، (د) $(\frac{11}{4}, \frac{43}{16})$

55) مشترک سرحد پر ہونے کے لئے $h = a\sqrt{2}$ ، مثلث کے اندر ہونے کے لئے $h > a\sqrt{2}$

حصہ 14.3 صفحہ 1705

1) $\frac{\pi}{2}$

3) $\frac{\pi}{8}$

5) πa^2

7) 36

9) $(1 - \ln 2)\pi$

11) $(2\ln 2 - 1)(\pi/2)$

13) $\frac{\pi}{2} + 1$

15) $\pi(\ln(4) - 1)$

17) $2(\pi - 1)$

19) 12π

21) $\frac{3\pi}{8} + 1$

23) 4

25) $6\sqrt{3} - 2\pi$

27) $\bar{x} = \frac{5}{6}, \bar{y} = 0$

29) $\frac{2a}{3}$

31) $\frac{2a}{3}$

33) 2π

35) $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$

37) (ا) $\sqrt{\pi/2}$ ، (ب) 1

39) $\pi \ln 4$ نہیں

41) $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$

حصہ 14.4 صفحہ 1718

1) 1

3) $\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$
$\int_0^2\int_0^{1-y/2}\int_0^{3-3x-3y/2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$
$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{2-2x-2z/3} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$
$\int_0^3\int_0^{1-z/3}\int_0^{2-2x-2z/3} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$
$\int_0^2\int_0^{3-3y/2}\int_0^{1-y/2-z/3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$
$\int_0^3\int_0^{2-2z/3}\int_0^{1-y/2-z/3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ تمام
تکملات کا جواب 1 ہے۔

5) $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$
$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$
$\int_{-2}^2\int_4^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \quad +$
$\int_{-2}^2\int_{y^2}^4\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$
$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad +$
$\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$
$\int_{-2}^2\int_4^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \quad +$
$\int_{-2}^2\int_{x^2}^4\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$
$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad +$
$\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}zS$ تمام
تکملات کا جواب 16π ہے۔

7) 1
9) 1
11) $\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1)$
13) 18
15) $\frac{7}{6}$
17) 0
19) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$
21) ا. $\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$
ب. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$
ج. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$
د. $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$
ہ. $\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
23) $\frac{2}{3}$
25) $\frac{20}{3}$
27) 1
29) $\frac{16}{3}$
31) $8\pi-\frac{32}{3}$
33) 2
35) 4π
37) $\frac{31}{3}$
39) 1
41) $2\sin 4$
43) 4
45) $a=3$ یا $a=\frac{13}{3}$

حصہ 14.6 صفحہ 1741

1) $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$
3) $\frac{17\pi}{5}$
5) $\pi(6\sqrt{2}-8)$
7) $\frac{3\pi}{10}$
9) $\frac{\pi}{3}$
11) (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi \quad +$
$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$
(ج) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$
13) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\phi}\int_0^{3\rho^2} F(\rho,\phi,z)\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
15) $\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\int_0^{4-\rho\sin\phi} F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
17) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\phi}\int_0^4 F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
19) $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}\int_0^{2-\rho\sin\phi} F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
21) π^2
23) $\pi/3$
25) 5π
27) 2π
29) $(\frac{8-5\sqrt{2}}{2})\pi$
31) (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \quad +$
$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\pi/6}^{\sin^{-1}(1/r)} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi +$
$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi/6} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$
33) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\frac{31\pi}{6}$
35) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\frac{8\pi}{3}$
37) $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{3}$

(39 (ا) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(ج) $8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(41 (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\theta}^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(ج) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
(د) $\frac{5\pi}{3}$

(43 $8\pi/3$

(45 $9/4$

(47 $(3\pi-4)/18$

(49 $\frac{2\pi a^3}{3}$

(51 $\frac{5\pi}{3}$

(53 $\pi/2$

(55 $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$

(57 16π

(59 $5\pi/2$

(61 $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$

(63 $2/3$

(65 $3/4$

(67 $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=3/8$

(69 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

(71 $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=5/6$

(73 $I_z=30\pi,\ R_z=\sqrt{\frac{5}{2}}$

(75 $I_x=\pi/4$

(77 $\frac{a^4h\pi}{10}$

(79 (ا) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,4/5),\ I_z=\pi/12$
(ب) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,5/6)$ $R_z=\sqrt{1/3}$
$I_z=\pi/14,\ R_z=\sqrt{5/14}$

(83 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{2h^2+3h}{3h+6})$
$I_z=\frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4},\ R_z=\frac{a}{\sqrt{2}}$

(85 $\frac{3M}{\pi R^3}$

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ