

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	نکونیا تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
258	نکونیا تفاعل کا تفرق	3.4
279	ضمیمہ دوم	۱



## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



### 3.4 تکنونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقیاتی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں چھ تکنونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

#### چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر  $\theta$  کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں  $\theta$  ربع اول میں واقع ہے لہذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی  $|\theta|$  ہوگی۔ چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی  $\theta$  سے کم ہے لہذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہذا

$$\sin^2 \theta < \theta^2, \quad (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جاسکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

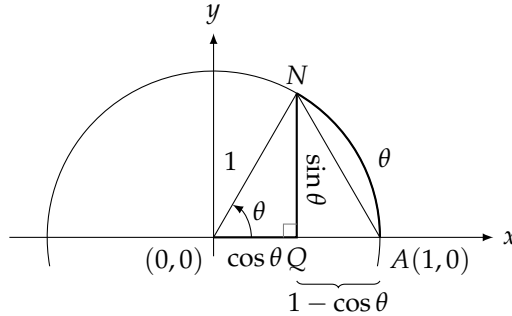
$$|\sin \theta| < |\theta|, \quad |1 - \cos \theta| < |\theta|$$

یعنی

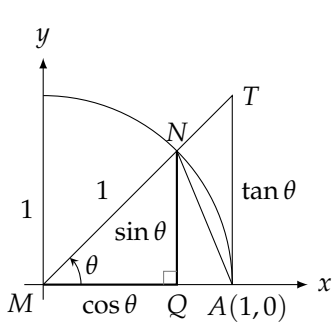
$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

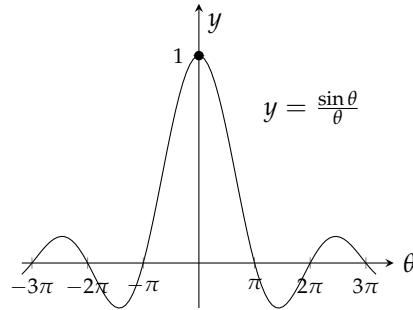
□



شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں  $\theta > 0$  ہے، سے عدم مساوات  $\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$  لکھی جاسکتی ہے۔



شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4



شکل 3.45: تقابل  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  جہاں  $\theta$  کی پیکش ریڈینٹ میں ہے۔

مثال 3.27: دکھائیں کہ  $\theta = 0$  پر  $\sin \theta$  اور  $\cos \theta$  استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

حل:  $\theta \rightarrow 0$  کرنے سے  $|\theta|$  اور  $|\theta|$  دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ 3.4 سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔ □

تقابل  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  جہاں  $\theta$  کی پیکش ریڈینٹ میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے  $\theta = 0$  پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ اس شکل کے مطابق  $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 1$  ہو گا۔

مسئلہ 3.4:

$$(3.4) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ کی پیمائش ریڈین میں ہے})$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔ یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم  $\theta$  کی قیمت مثبت اور  $\frac{\pi}{2}$  سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta MAN < \text{رقبہ خطہ } MAN < \Delta MAT$$

ہے۔ ان رقبوں کو  $\theta$  کی صورت

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\sin \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$MAN \text{ رقبہ خطہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2}(1)^2 \theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\Delta MAT \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\tan \theta) = \frac{1}{2} \tan \theta$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$$

جس کو  $\frac{1}{2} \sin \theta$  سے تقسیم کرنے سے

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

حاصل ہو گا۔ اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

چونکہ  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$  ہے لہذا مسئلہ پتہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

آخر میں دھیان رہے کہ  $\sin \theta$  اور  $\theta$  دونوں طاق تفاعل ہیں لہذا  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم  $y$  محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔ اس تشاکلی کی بنا بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 148 پر مسئلہ 2.5 کے تحت  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم ٹکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر ٹکونیاتی حد تلاش کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$  ہے۔  
حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے  $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$  لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \quad (\theta = \frac{h}{2}) \\ &= -(1)(0) = 0 \end{aligned}$$

□

### سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل  $y = \sin \theta$  کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کو سائن تفاعل ہے۔

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$y = x^2 - \sin x : \quad \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق}) \\ = 2x - \cos x$$

ب.

$$y = x^2 \sin x : \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\ = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

ج.

$$y = \frac{\sin x}{x} : \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\ = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  ہوتا ہے اور  $\sin x$  کا تفرق  $\cos x$  ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \quad (\text{تفرق کی تعریف}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \quad (\text{مثال 3.28 اور مسئلہ 3.4}) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

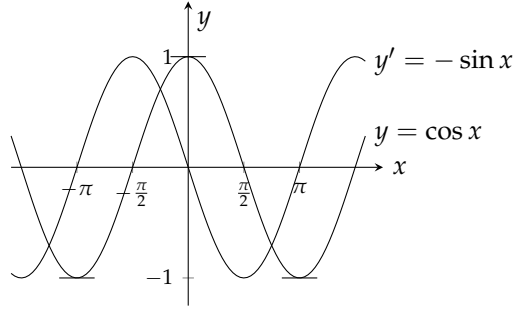
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی  $x = -\pi, 0, \pi$ ) وہاں اس کا تفرق یعنی  $y' = -\sin x$  کی قیمت صفر ہے۔ اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب  $x = -\frac{\pi}{2}$  اور  $x = \frac{\pi}{2}$  پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

ا.

$$\begin{aligned} y &= 5x + \cos x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x \end{aligned}$$



شکل 3.47:  $y = \cos x$  کی ڈھلوان تقابل  $y' = -\sin x$  دیتی ہے۔

ب۔

$$\begin{aligned}
 y &= \sin x \cos x \\
 \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
 &= \cos^2 x - \sin^2 x
 \end{aligned}$$

ج۔

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\
 &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
 &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
 &= \frac{1}{1 - \sin x}
 \end{aligned}$$

□

## سادہ ہارمونئی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونئی حرکت کی ایک مثال ہے۔ اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ  $t = 0$  پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔ لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5 \cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned} s &= 5 \cos t && \text{ہم مقام} \\ v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = 5 \frac{d}{dt}(\cos t) = -5 \sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \frac{d}{dt}(\sin t) = -5 \cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں} \end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ  $s$  محور پر جسم  $s = 5$  اور  $s = -5$  کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا محیط 5 ہے جبکہ اس کی تعدد  $2\pi$  ہے جو  $\cos t$  کی تعدد ہے۔

2. تفاعل  $\sin t$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہوگی جب  $\cos t = 0$  ہوگا۔ یوں جسم کی رفتار  $|v| = 5|\sin t|$  اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہوگی جب  $\cos t = 0$  ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب  $\sin t = 0$  ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب  $\cos t = \pm 1$  ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع  $a = -5 \cos t$  اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب  $\cos t = 0$  ہوگا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔ کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہوگا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہوگا۔ اسراع کی مطلق قیمت مبداء سے دور ترین نقطہ پر زیادہ سے زیادہ ہوگی جہاں  $\cos t = \pm 1$  ہوگا۔



جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔ گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق  $\frac{d^3s}{dt^3}$  جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو جھٹکا<sup>33</sup> کہتے ہیں۔ اگر لمحہ  $t$  پر ایک جسم کا مقام  $s = f(t)$  ہو تب لمحہ  $t$  پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔ اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔ یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{dg}{dt} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) \\ = 5 \sin t$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب  $\sin t = \pm 1$  ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ  $\sin x$  اور  $\cos x$  متغیر  $x$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس  $x$  پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \csc x &= \frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x\end{aligned}\tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم  $\tan x$  اور  $\sec x$  کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔ سوال میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33:  $y = \tan x$  کا تفرق تلاش کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر  $y = \sec x$  ہو تب  $y''$  تلاش کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned}
 y &= \sec x \\
 y' &= \sec x \tan x & (\text{مساوات 3.5}) \\
 y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\
 &= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) & (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\
 &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
 \end{aligned}$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\frac{d}{dx}(3x + \cot x) = 3 + \frac{d}{dx}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{d}{dx}(2 \csc x) = 2 \frac{d}{dx}(\csc x) \\
 &= 2(-\csc x \cot x) = -2 \csc x \cot x
 \end{aligned}$$

□

تکوینیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکوینیاتی تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $\sin x$  اور  $\cos x$  تمام  $x$  کے لئے استمراری ہیں،  $\tan x$  اور  $\sec x$  تمام  $x$  کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب  $x$  کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  کا عددی صحیح مضرب ہو،  $\csc x$  اور  $\cot x$  تمام  $x$  کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب  $x$

کی قیمت  $\pi$  کا عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تقابل کے لئے جہاں  $f(c)$  معین ہو وہاں  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  ہو گا۔ نتیجتاً ہم ٹکونیاتی تقابل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \quad \text{مثال 3.36}$$

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

$\theta$  کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  مطمئن ہوگی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \theta = x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1, \theta = 7x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1, \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں  $x \rightarrow 0$  کرنا  $\theta \rightarrow 0$  کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 3.37:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x} \quad (\text{تقابل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے}) \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\ &= \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

ا.

ب.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) \quad (\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \\ &= \left( \frac{2}{5} \right) \left( \frac{1}{\cos 0} \right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$\square$

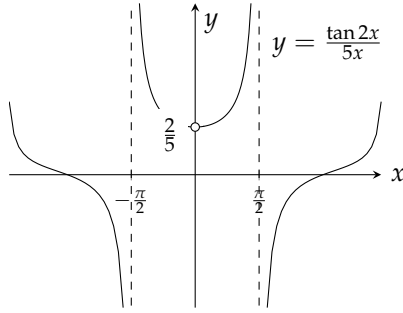
شکل 3.48 سے رجوع کریں۔

مثال 3.38: درج ذیل میں  $\theta = t - \frac{\pi}{2}$  لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔ یوں  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  سے مراد  $\theta \rightarrow 0$  ہو گا۔

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t - \frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$\square$

احصاء کی میدان کے علاوہ تقابل  $\frac{\sin x}{x}$  دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔



شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

### سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔

سوال 1:  $y = -10x + 3 \cos x$   
جواب:  $y' = -10 - 3 \sin x$

سوال 2:  $y = \frac{2}{x} + 3 \sin x$

سوال 3:  $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$   
جواب:  $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

سوال 4:  $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال 5:  $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$   
جواب:  $y' = 0$

سوال 6:  $y = (\sin x + \cos x) \sec x$

سوال 7:  $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

سوال 8:  $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

سوال 9:  $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

سوال 10:  $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

## 3.4. ٹیکنیقیقی تفعل عل ک تففرق

سوال 11:  $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

سوال 12:  $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

سوال 13 تا سوال 16 میں  $\frac{ds}{dt}$  تلاش کریں۔

سوال 13:  $s = \tan t - t$

سوال 14:  $s = t^2 - \sec t + 1$

سوال 15:  $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$

سوال 16:  $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

سوال 17 تا سوال 20 میں  $\frac{dr}{d\theta}$  تلاش کریں۔

سوال 17:  $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$

سوال 18:  $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$

سوال 19:  $r = \sec \theta \csc \theta$

سوال 20:  $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

سوال 21 تا سوال 24 میں  $\frac{dp}{dq}$  تلاش کریں۔

سوال 21:  $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

سوال 22:  $p = (1 + \csc q) \cos q$

سوال 23:  $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

سوال 24:  $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

سوال 25: (i)  $y = \csc x$  اور (ب)  $y = \sec x$  کے لئے  $y''$  تلاش کریں۔

سوال 26: (i)  $y = -2 \sin x$  اور (ب)  $y = 9 \cos x$  کے لئے  $y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4}$  تلاش کریں۔

سوال 27 تا سوال 32 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{سوال 27:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)} \quad \text{سوال 28:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sec[\cos x + \pi \tan(\frac{\pi}{4 \sec x}) - 1] \quad \text{سوال 29:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x} \quad \text{سوال 30:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \quad \text{سوال 31:}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \theta}{\sin \theta}\right) \quad \text{سوال 32:}$$

سوال 33 تا سوال 48 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2} \theta}{\sqrt{2} \theta} \quad \text{سوال 33:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل}) \quad \text{سوال 34:}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{4y} \quad \text{سوال 35:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{\sin 3h} \quad \text{سوال 36:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} \quad \text{سوال 37:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\tan t} \quad \text{سوال 38:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x} \quad \text{سوال 39:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 6x^2 \cot x \csc 2x \quad \text{سوال 40:}$$

## 3.4. تکونیاتی تفاسل کا تفرق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos x}{\sin x \cos x} \quad \text{سوال 41:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x} \quad \text{سوال 42:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos t)}{1 - \cos t} \quad \text{سوال 43:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h} \quad \text{سوال 44:}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} \quad \text{سوال 45:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} \quad \text{سوال 46:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x} \quad \text{سوال 47:}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y} \quad \text{سوال 48:}$$

## مماسی خطوط

سوال 49 تا سوال 52 میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔ تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

$$y = \sin x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi, 0, 3\pi/2 \quad \text{سوال 49:}$$

$$y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, 0, \pi/3 \quad \text{سوال 50:}$$

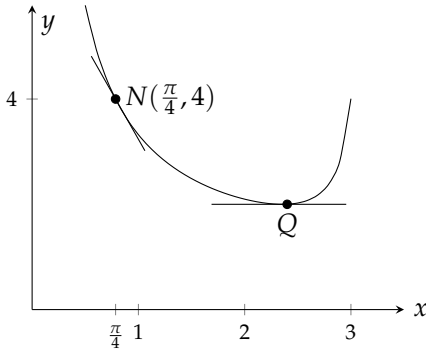
$$y = \sec x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, \pi/4 \quad \text{سوال 51:}$$

$$y = 1 + \cos x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi/3, 3\pi/2 \quad \text{سوال 52:}$$

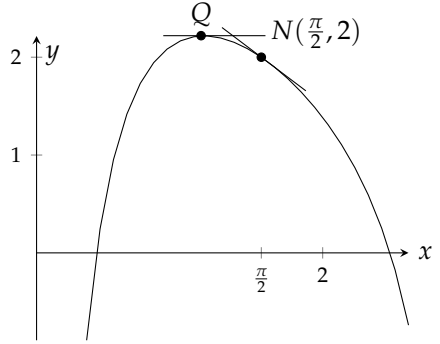
کیا سوال 53 تا سوال 56 کا دائرہ کار  $0 \leq x \leq 2\pi$  میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

$$y = x + \sin x \quad \text{سوال 53:}$$





شکل 3.50:  $y = 1 + \sqrt{2} \csc x + \cot x$  تقاطع کی منحنی (سوال 60)



شکل 3.49:  $y = 4 + \cot x - 2 \csc x$  تقاطع کی منحنی (سوال 59)

سوال 54:  $y = 2x + \sin x$

سوال 55:  $y = x - \cot x$

سوال 56:  $y = x + 2 \cos x$

سوال 57: منحنی  $y = \tan x$  پر  $-\pi/2 < x < \pi/2$  کے بیچ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط  $y = 2x$  کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 58: منحنی  $y = \cot x$ ,  $0 < x < \pi$  پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط  $y = -x$  کے متوازی ہے۔ منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 59: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.49 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سوال 60: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.50 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

### سادہ ہارمونی حرکت

سوال 61 تا سوال 61 میں محوری لکیر s پر ایک جسم کا مقام  $s = f(t)$  دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ  $t = \pi/4$  سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال 61:  $s = 2 - 2 \sin t$

سوال 62:  $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال 63: کیا  $c$  کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو  $x = 0$  پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

سوال 64: کیا  $b$  کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو  $x = 0$  پر (i) استمراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

سوال 65:  $\frac{d^{999}}{dx^{999}}(\cos x)$  تلاش کریں۔

سوال 66:  $\frac{d^{725}}{dx^{725}}(\sin x)$  تلاش کریں۔

سوال 67:  $x$  کے لحاظ سے  $\sec x$  (i) اور  $\csc x$  کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

سوال 68:  $x$  کے لحاظ سے  $\cot x$  کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

کمپیوٹر کا استعمال

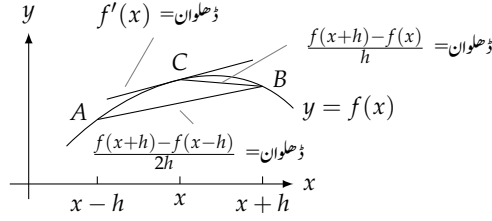
سوال 69:  $-\pi \leq x \leq 2\pi$  کے لئے  $y = \cos x$  ترسیم کریں۔ ساتھ ہی  $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$  لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

اب  $h = -1, -0.5, -0.3$  کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ  $h \rightarrow 0^+$  اور  $h \rightarrow 0^-$  کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال 70: وسطی فرق حاصل تقسیم وسطی تفریقی حاصل تقسیم<sup>34</sup>

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



شکل 3.51: فرمٹ تقریبی حاصل تقسیم سے وسطی تقریبی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

کو اعدادی تراکیب میں  $f'(x)$  کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر  $f'(x)$  موجود ہو تب  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے یہ تقابل کا تفرق دیتی ہے جو  $h$  کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً فرمٹ تقریبی حاصل تقسیم<sup>35</sup>

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سے بہتر ہوتا ہے (شکل 3.51)۔ (یہ دیکھنے کی خاطر کہ  $f(x) = \sin x$  کا وسطی تقریبی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے  $f'(x) = \cos x$  تک پہنچتا ہے،  $h = 1, 0.5, 0.3$  لیتے ہوئے وقفہ  $[-\pi, 2\pi]$  پر  $y = \cos x$  اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں  $h$  کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔ (ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ  $f(x) = \cos x$  کا وسطی تقریبی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے  $f'(x) = -\sin x$  تک پہنچتا ہے،  $h = 1, 0.5, 0.3$  لیتے ہوئے وقفہ  $[-\pi, 2\pi]$  پر  $y = -\sin x$  اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں  $h$  کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 71: وسطی تقریبی حاصل تقسیم کے لئے انتہا بعض اوقات  $x$  پر ناقابل تفرق  $f(x)$  کے لئے بھی وسطی تقریبی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کا  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر  $f(x) = |x|$  لیں اور

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ  $x = 0$  پر  $f(x) = |x|$  کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال 72: دائرہ کار  $(-\pi/2, \pi/2)$  پر  $y = \tan x$  اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (i) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73: دائرہ کار  $0 < x < \pi$  پر  $y = \cot x$  اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (i) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 74: وقفہ  $-2 \leq x \leq 2$  پر  $y = \frac{\sin x}{x}$ ،  $y = \frac{\sin 2x}{x}$  اور  $y = \frac{\sin 4x}{x}$  کو اکٹھے ترسیم کریں۔  $y$  محور کو ہر ترسیم کہاں قطع کرتا نظر آتا ہے۔ کیا یہ ترسیمات حقیقتاً محور کو قطع کرتے ہیں؟  $x \rightarrow 0$  کرتے ہوئے آپ  $y = \frac{\sin 5x}{x}$  اور  $y = \frac{\sin(-3x)}{x}$  کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ کیوں؟  $k$  کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے  $y = \frac{\sin kx}{x}$  سے کیا توقع کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 75: درجات بالقابل ریڈین  $x$  کو درجات میں ناپتے ہوئے  $\sin x$  اور  $\cos x$  کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$  کا اندازہ لگائیں۔ اس اندازے کا  $\frac{\pi}{180}$  کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا اس حد کی قیمت  $\frac{\pi}{180}$  کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جاسکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

ج. اب  $\sin x$  کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے  $\sin x$  کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے  $\cos x$  کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے  $\cos x$  کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ه. بلند درجی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔  $y = \sin x$  اور  $y = \cos x$  کے لئے  $y''$  اور  $y'''$  تلاش کریں۔

زنجیری قاعدہ



ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

