

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک درجی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	
392	4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
417	ضمیمہ دوم	۱

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

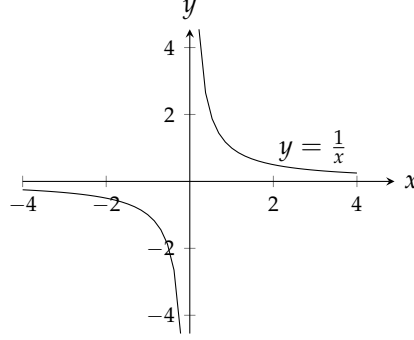
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 4.73: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \rightarrow \pm\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔

$x \rightarrow \pm\infty$ پر حد

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار بتدریج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \rightarrow \pm\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

2. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

□

لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$x \rightarrow \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کے حد حاصل کیے۔ اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کی بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$7.4(\lim_{x \rightarrow \mp\infty} k = k, \quad \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

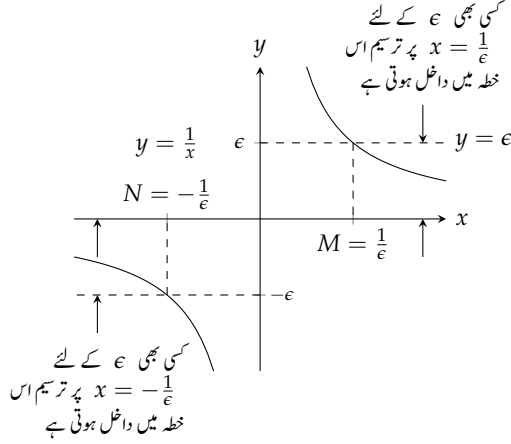
$$ا. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ب. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x > M, \implies \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

$M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔



شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 4.20)

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \implies \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

یا $N = -\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔

□

مسائل 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6: $x \rightarrow \mp\infty$ پر حل کے خواص
اگر $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) + g(x)] = L + M \quad \text{قاعدہ مجموعہ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) - g(x)] = L - M \quad \text{قاعدہ فرق:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M \quad \text{قاعدہ ضرب:}$$

4.5. $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، مشتق اور غالب اجزاء

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} kf(x) = kL$

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $L^{m/n} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x)]^{m/n}$

یہ خواص بالکل مسئلہ 2.1 (صفحہ 113) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ} \\ &= 5 + 0 = 5 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

ب.

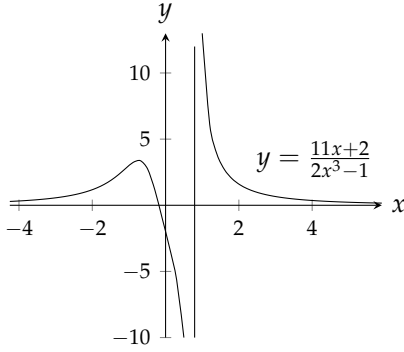
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

□

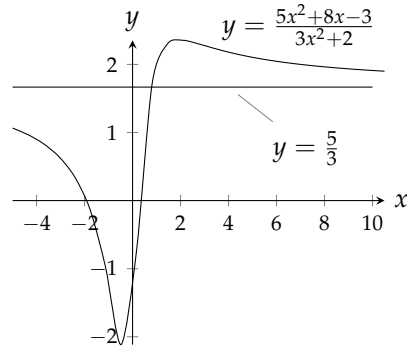
مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 4.75)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

□



شکل 4.76: ترسیم تقاطع اور حد (مثال 4.23)



شکل 4.75: ترسیم تقاطع اور حد (مثال 4.22)

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 4.76)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{11}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$= \frac{0+0}{2-0} = 0$$

□

مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل 4.77

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{3}{x}}{7 + \frac{4}{x}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}$$

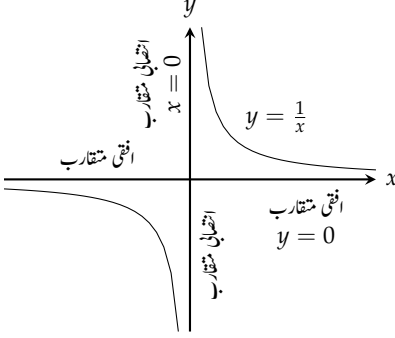
$$= -\infty$$

ا.

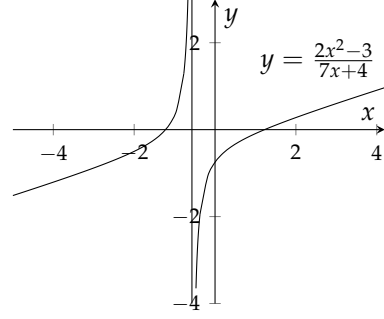
ب.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + \frac{7}{x}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$= \frac{\infty}{2} = \infty$$



شکل 4.78: محدودی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے مقارب ہیں۔



شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 4.24

□

مثال 4.22 تا مثال 4.24 سے $x \rightarrow \pm\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انحصالی متقارب

اگر مہداسے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصلہ صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا متقارب¹² کہتے ہیں۔

مثال 4.25: محدودی محور تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل 4.78)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہیں لہذا x محور $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ہیں لہذا y محور بھی $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

□

یاد رہے کہ $x = 0$ پر نسب نما صفر ہے لہذا تفاعل غیر معین ہے۔

تعریف: تفاعل $y = f(x)$ کا خط $y = b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

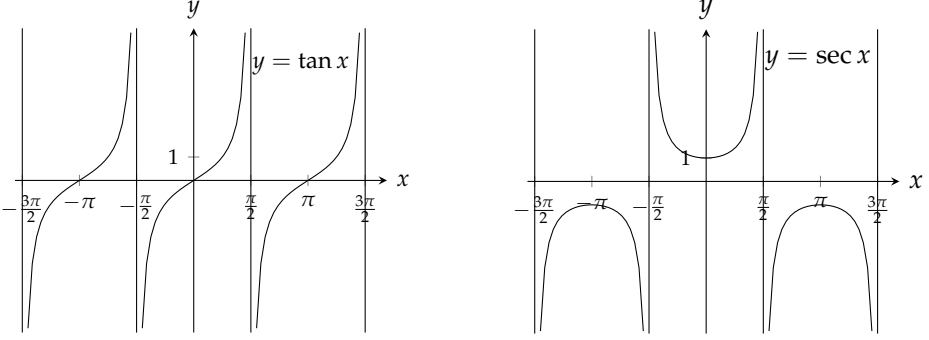
ہو۔

تفاعل $y = f(x)$ کا خط $x = a$ اس صورت انحصالی متقارب ہو گا جب

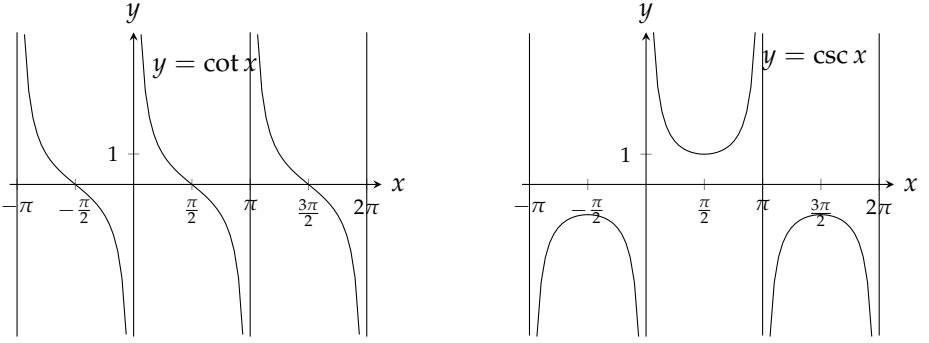
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

ہو۔

□



شکل 4.79: انتظامی مقارب (مثال 4.26)



شکل 4.80: انتظامی مقارب (مثال 4.26)

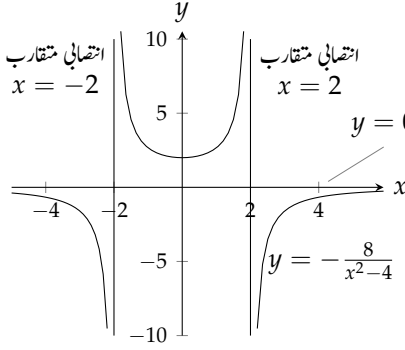
مثال 4.26: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتظامی مقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.79)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

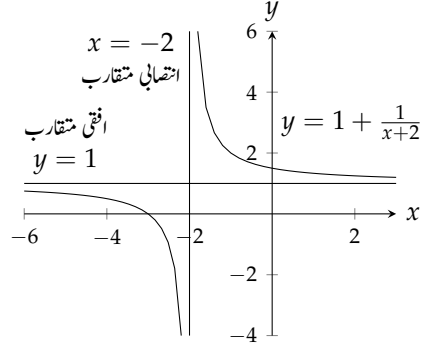
π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتظامی مقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.80)۔

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

□



شکل 4.82: انتصابی مقارب (مثال 4.28)



شکل 4.81: انتصابی مقارب (مثال 4.27)

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم $x \rightarrow \mp\infty$ پر اور $x \rightarrow -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے $x+3$ اور $x+2$ سے تقسیم کر کے

$$y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہوگی۔ یوں محدودی محور کی بجائے خط $y = 1$ اور خط $x = -2$ مقارب خط ہوں گے۔

□

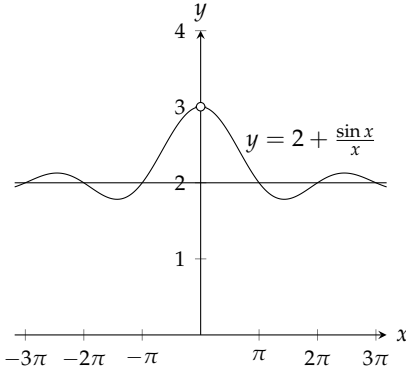
مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا مقارب تلاش کریں۔

$$y = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

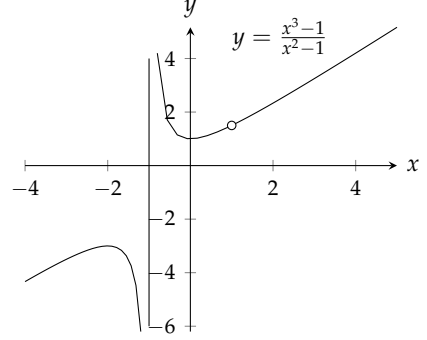
حل: ہم $x \rightarrow \mp\infty$ اور $x \rightarrow \mp 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

چونکہ $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0$ لہذا افقی مقارب خط $y = 0$ ہے (شکل 4.82)۔ چونکہ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ اور $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$ لہذا عمودی مقارب خط $x = 2$ سے بھی مقارب خط حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $x = -2$ بھی مقارب خط حاصل ہو گا۔

□



شکل 4.84: منحنی اپنے مقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کر سکتی ہے
(مثال 4.30)۔



شکل 4.83: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x=1$ پر عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے لہذا اس کی صرف $x=-1$ پر مقاربی خط ہو گا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

کا $x = -1$ پر انتصابی مقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$$

□

لکھا جاسکتا ہے لہذا عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے اور $x \rightarrow 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل 4.83)۔

مسئلہ 2.4 (صفحہ 119 مسئلہ 7) بھی $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال 4.30: مسئلہ 7 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم $x \rightarrow 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \rightarrow \pm\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

اور $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$ ہے لہذا مسئلہ پیچ کے تحت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2$$

□ ہو گا لہذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط $y = 2$ ہو گا (شکل 4.84)۔

ترچھے متقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو ناقصی اور نا انتہائی ہو گا۔

مثال 4.31: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

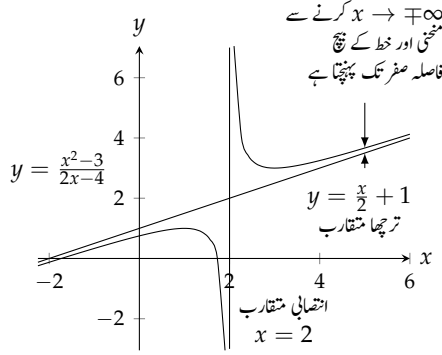
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

حل: ہم $x \rightarrow \pm\infty$ پر اور $x \rightarrow 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ $x^2 - 3$ کو $2x - 4$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

چونکہ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$ ہیں لہذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔
 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \rightarrow \frac{x}{2} + 1$ تک پہنچتی ہے۔ یوں $y = \frac{x}{2} + 1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل 4.85)۔

□



شکل 4.85: ترجیحا مقارب (مثال 4.31)

مقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1$$

x کی بڑی قیمتوں کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{2x - 4}$$

2 کے قریب x کی قیمتوں کے لئے

بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہذا $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا غلبہ¹³ ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ غالب¹⁴ ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

¹³ dominates
¹⁴ dominant

مثال 4.32: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3 + 1}{x}$$

حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاؤ، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔

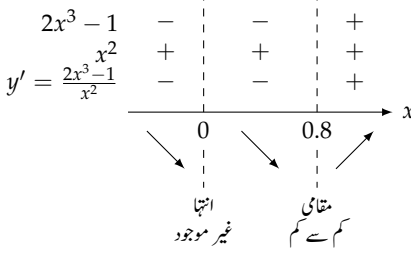
دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \quad (8.4)$$

$|x|$ کی بری قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات 4.8 میں $x = 0$ پر انتہائی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔
تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاؤ۔ یک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔



$$2x - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - 1 = 0$$

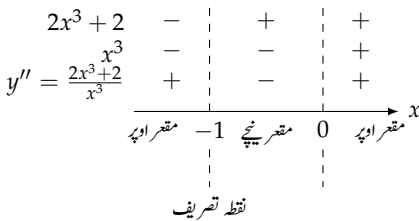
$$x^3 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8$$

چوتھا قدم: مقعر۔ دور رتبی تفرق

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 + 2}{x^3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

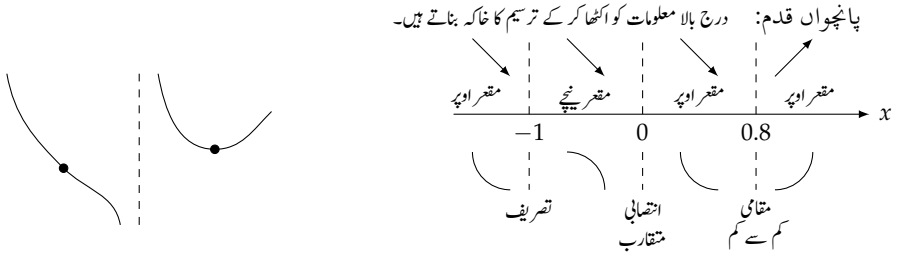


$$2 + \frac{2}{x^3} = 0$$

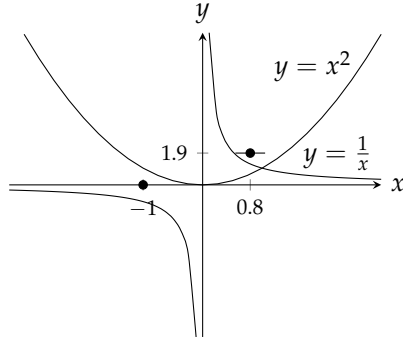
$$2x^3 + 2 = 0$$

$$x^3 = -1$$

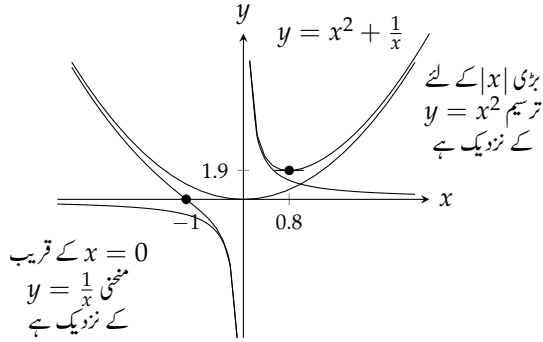
$$x = -1$$



چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تفاعل کی نشاندہی کریں۔
کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟
3. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔
4. متقارب خطوط اور قابل ہماو عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
 $x \rightarrow \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟
5. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاؤ دریافت کریں۔
6. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔
7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔
8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدود، پر f کی قیمت تلاش کریں۔
9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

سوال 1 تا سوال 6 میں (i) $x \rightarrow \infty$ پر (ب) $x \rightarrow -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 1: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

سوال 2: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 3: $g(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$

سوال 4: $g(x) = \frac{1}{8 - \frac{5}{x^2}}$

سوال 5: $h(x) = \frac{-5 + \frac{7}{x}}{3 - \frac{1}{x^2}}$

سوال 6: $h(x) = \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال 7 تا سوال 10 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$

سوال 8: $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\cos \theta}{3\theta}$

سوال 9: $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

سوال 10: $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

ناطق تفاعل کی حد
سوال 11 تا سوال 24 میں دیے ناطق تفاعل کی (i) $x \rightarrow \infty$ اور (ب) $x \rightarrow -\infty$ پر حد تلاش کریں۔

سوال 11: $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

سوال 12: $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال 13: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

سوال 14: $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال 15: $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

سوال 16: $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال 17: $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

سوال 18: $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

$$f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x} \quad \text{سوال 19:}$$

$$g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6} \quad \text{سوال 20:}$$

$$g(x) = \frac{x^4}{x^3+1} \quad \text{سوال 21:}$$

$$h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6} \quad \text{سوال 22:}$$

$$h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x} \quad \text{سوال 23:}$$

$$h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9} \quad \text{سوال 24:}$$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت
ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔
نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 25 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7} \quad \text{سوال 25:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \quad \text{سوال 26:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} \quad \text{سوال 27:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} \quad \text{سوال 28:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}} \quad \text{سوال 29:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4} \quad \text{سوال 30:}$$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال 31 تا سوال 34 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہذا کارتیسی محدود پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔ (ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

$$\text{سوال 31: } f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\text{سوال 32: } f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

$$\text{سوال 33: } f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{سوال 34: } f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

تفاعل کی ایجاد

سوال 35 تا سوال 38 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

$$\text{سوال 35: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

$$\text{سوال 36: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \infty$$

$$\text{سوال 37: } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$$

$$\text{سوال 38: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} k(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = -\infty$$

ناطق تفاعل کی ترسیم

سوال 39 تا سوال 66 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ مقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

$$\text{سوال 39: } y = \frac{1}{x-1}$$

سوال 40: $y = \frac{1}{x+1}$

سوال 41: $y = \frac{1}{2x+4}$

سوال 42: $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 43: $y = \frac{x+3}{x+2}$

سوال 44: $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 45: $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

سوال 46: $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 47: $y = \frac{x^2-1}{x}$

سوال 48: $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 49: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$

سوال 50: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 51: $y = \frac{1}{x^2-1}$

سوال 52: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 53: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$

سوال 54: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

سوال 55: $y = \frac{x^2}{x-1}$

سوال 56: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 57: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

$$y = -\frac{x^2-4}{x+1} \quad \text{سوال 58}$$

$$y = \frac{x^2-x+1}{x-1} \quad \text{سوال 59}$$

$$y = -\frac{x^2-x+1}{x-1} \quad \text{سوال 60}$$

$$y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2} \quad \text{سوال 61}$$

$$y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2} \quad \text{سوال 62}$$

$$y = \frac{x}{x^2-1} \quad \text{سوال 63}$$

$$y = \frac{x-1}{x^2(x-2)} \quad \text{سوال 64}$$

$$y = \frac{8}{x^2+4} \quad \text{سوال 65}$$

$$y = \frac{4x}{x^2+4} \quad \text{سوال 66}$$

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 67 تا سوال 72 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

$$y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 67}$$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 68}$$

$$y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}} \quad \text{سوال 69}$$

$$y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \quad \text{سوال 70}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 71}$$

$$y = -\cos\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 72}$$

اجزاء کی ترسیمات

سوال 73 تا سوال 76 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

$$\text{سوال 73: } y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{سوال 74: } y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{سوال 75: } y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{سوال 76: } y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

نظریہ اور مثالیں

$$\text{سوال 77: } f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} \text{ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا } c \text{ پایا جاتا ہے کہ } f(c) \text{ کی قیمت درج ذیل ہو۔}$$

$$\text{ا. } -2 \quad \text{ب. } \cos 3 \quad \text{ج. } 5\,000\,000$$

$$\text{سوال 78: } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) \text{ تلاش کریں۔}$$

$$\text{سوال 79: تشریحی۔ فرض کریں وقفہ } x > 0 \text{ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ } x < 0 \text{ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟}$$

$$\text{سوال 80: تشریحی۔ فرض کریں وقفہ } x < 0 \text{ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ } x > 0 \text{ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟}$$

$$\text{سوال 81: فرض کریں } f(x) \text{ اور } g(x) \text{ کثیر رکنی ہیں اور } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2 \text{ ہے۔ کیا } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

$$\text{سوال 82: فرض کریں } f(x) \text{ اور } g(x) \text{ کثیر رکنی ہیں۔ اگر } g(x) \text{ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ کی ترسیم کا متقارب ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔}$$

$$\text{سوال 83: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔}$$

$$\text{سوال 84: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔}$$

$$\text{سوال 85:}$$

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال 4.30) متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

$$(1) \quad x > 0 \text{ پر } f \text{ قابل تفرق ہے۔}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \text{ غیر موجود ہے۔}$$

سوال 86: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = x + 1 + \frac{5}{x + 2}$$

جس کی ترجمانی متقارب $y = x + 1$ ہے۔

اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = \frac{x + 3 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

ملتا ہے جس کی متقارب $y = x + 3$ ہے۔

ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 87 اور سوال 88 میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \rightarrow \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 87: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ ہو گا۔

سوال 88: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے
سوال 89 تا سوال 92 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

$$y = -\frac{x^2-4}{x+1} \quad \text{سوال 89}$$

$$y = \frac{x^2+x-6}{2x-2} \quad \text{سوال 90}$$

$$y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1} \quad \text{سوال 91}$$

$$y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2} \quad \text{سوال 92}$$

سوال 93 تا سوال 98 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔ تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

$$y = x^3 + \frac{3}{x} \quad \text{سوال 93}$$

$$y = x^3 - \frac{3}{x} \quad \text{سوال 94}$$

$$y = 2 \sin x + \frac{1}{x} \quad \text{سوال 95}$$

$$y = 2 \cos x - \frac{1}{x} \quad \text{سوال 96}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 3 \sin 2x \quad \text{سوال 97}$$

$$y = (x-1)^{11} + 2 \sin 2\pi x \quad \text{سوال 98}$$

سوال 99 اور سوال 100 کا تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. $x \rightarrow 0^+$ اور $x \rightarrow 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب. $x \rightarrow \pm\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج. $x \rightarrow 1$ اور $x \rightarrow -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$y = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2/3} \quad \text{سوال 99}$$

$$y = \frac{3}{2} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2/3} \quad \text{سوال 100}$$

$$y = -\frac{x^3-2}{x^2+1} \quad \text{سوال 101: تفاعل کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔}$$

$$ا. \quad -9 \leq x \leq 9 \quad ب. \quad -90 \leq x \leq 90 \quad ج. \quad -900 \leq x \leq 900$$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہو گی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہو گا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم میں $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 102: تفاعل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$ کو وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = -1$ اور $x = 1$ کے قریب ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta \quad (\theta = \frac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جاسکتا ہے۔ سوال 108 تا سوال 103 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تاکہ ترسیم پر حد کو دیکھا جاسکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} x \sin \frac{1}{x} \quad \text{سوال 103}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{سوال 104}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5} \quad \text{سوال 105}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} \quad \text{سوال 106}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) \left(\cos \frac{1}{x}\right) \quad \text{سوال 107}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos \frac{1}{x}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) \quad \text{سوال 108}$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

