احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفر. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

Vii																																	,	زيباچ	
ix																													4	یبادٍ	، کا د	اب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	
1																														٠	لمومات	مع	ابتدائی	1	
1																									خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																								Ĺ	زي	ھو	بر برا	. اور	لحوط	، خو	محدد		1.2		
32																														Ĺ	تفاعل		1.3		
54																												غلى	انمذ	م کی	ترسيم	•	1.4		
74																												بل	نفاء	ائی اِتی ا	بنكونيا		1.5		
0.5																																		~	
95																															/		حدود ا	2	,
95																																			
113				•	•	•		•	•			•		•		•	•	•	•	•	٠.		•	عد	فواه	کے	_ 2	_,	ي لر ا	لاتر	<i>כנ</i> "		2.2		
126																																	2.3		
146																																	2.4		
165																															-		2.5		
184	١.	•		•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•		•	•	٠	•	Ł	ی ز	مماسح		2.6		
199)																																تفرق	3	
199) .																											, ق	تفر	6.	تفاعل		3.1		
221																												(رق	ِ تفر	قواعد		3.2		
240																																	3.3		
257	٠.																								ن	فرو	ا تا	ل	نفاء	إتى أ	تكونيا		3.4		
277																																	3.5		
294	١.																						نما	ت	قور	ن	ناطؤ	اور	ق ا	تفرأ	خفی		3.6		
310) .																										ىلى	تنبد	ح .	شرر	و گیر	,	3.7		

عـــنوان

 325 340 340 341 340 341 352 363 365 361 362 368 368 374 391 44 391 45 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 53 54 55 55 56 57 57 58 58 59 605 605 605 606 606 607 608 609 600 <		تفرق کا استعال	4
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 59 50 50<td></td><td></td><td></td>			
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 59 50 50<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td>	اوسط قیمت	4.2 متله	
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 59 50 50<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
 391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر	356	3.1	
418 بیترین بنان 4.6 442 خط بخد کی اور تنو تات 4.7 465 خط بخد کی اور تر تات 4.8 477 خط کل 4.8 477 5 حگ کل 477 5.1 5.1 489 5.1 5.2 505 تعلق محلات 5.2 505 تعلق محلی بدر اید ترکیب بدل و ترجیری تاتده کا السال میلین مجرب 5.5 5.1 اید از میلین مجرب و تحلیل محلید 5.5 578 بیادی محلی 5.7 599 بیادی محلی 5.8 605 بیادی محلی 5.9 605 بیادی محلی 5.10 625 محلی بیل کاستر میلی و تحلیل بیل محلی 6.1 625 محلی السال مواف کی المی و تحلیل بیل محلی 6.2 626 محلی المی و تحلیل بیل محلی 6.3 627 محلیل محلیل المی و تحلیل بیل و تحلیل بیل و تحلیل بیل محلیل المی و تحلیل بیل و تحلیل بیل و تحلیل بیل و تحلیل و تحل	اور y'' کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442 غط بدی کا اور تو تات 465 خیر توشی کلداد 477 4.8 477 5.1 477 5.1 489 5.1 5.2 تقری ساوات، ابتدائی تیب سنت، اور ریافسیاتی موند شی 5.3 5.2 5.5 کلی بدر بید ترایی کبوسی 5.6 کبی بدر بید ترایی کبوسی 5.7 بنیادی سلیم 5.8 کسیم کلی سیم بدل 6.5 کسیم کلی سیم بدل 605 سیم کلی سیم بدل 605 سیم کلی سیم بدل 605 سیم کلی سیم بدل 625 سیم کلی سیم کلی سیم کلی 626 سیم کلی سیم کلی 627 کلی کا سیم کلی سیم کلی 640 سیم کلی کلی کر تیم کلی طاش 65 کلی کلی کلی کلی کر تیم کلی طاش 663 سیم کلی کلی کلی کلی کلی کلی کلی کلی کر تیم کلی			
465 ریب نیوش 4.8 477 کل کا 477 خیر تطبی محملات 5.1 489 خیر تطبی محملات 5.2 5.2 تفری براید ترکیب بدل ر تیجری تامیده کا الت اطارت 5.3 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.7 نیادی متلد 5.8 5.8 کل کل 605 علی سیر برل 5.9 605 علی سیر برل 5.0 605 علی سیر برل 6.1 625 علی کا سیر برل 6.1 626 کاب کر تیج کی کی ترثیر 6.2 640 کی کی 651 کل کی 662 کی کی 663 کی کی 664 کی کی 665 کی کی کی 667 کی کی کی 668 کی کی کی 669 کی			
477 گل قریق الطاق الله 5.1 489 قریق ساوات، ابتدائی آیت سکنا، اور ریاضیاتی موند آشی 5.2 505 تفریق سراوات، ابتدائی آیت سکنا، اور ریاضیاتی موند آشی 5.3 516 تفریق سراوات، ابتدائی آیت سکنا، اور ریاضیاتی موند آشی 5.4 54 اندازه بذراید شای تجموع 5.5 55 ریان مجموع اور تعلی تحلیل 5.6 578 شیادی مسئل 5.7 599 میان میں بل ل 5.8 605 شیادی مسئل 5.9 605 میان بل ل 6.0 605 میان بل ل 6.1 625 شیال کاستمال 6.5 626 میان کار استمال 6.5 627 کیاں کا سرای ہوتے کلیات والا مرحد 6.3 640 شیال کار تو تو تعلیل کر تو تو تعلیل 641 کیاں کا سرای کی لیا تیاں 642 میان افزاد مرکز کہتے 6.5 643 شیار سیال اور تو تو تعلیل اور تو ت سیال اور			
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.4 534 محمد بدرایید تعالی محمد 5.5 551 محمد بدرایید تعالی محمد 5.5 561 محمد بدرایید تعالی محمد 5.6 578 محمد بدرایی محمد 5.7 599 محمد بدرایی محمل 5.8 605 محمد بدرای محمل 5.9 605 محمد بدرای محمل 6.5 625 محمد بدرای محمل 6.1 626 محمد بدرای محم	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.4 534 محمد بدرایید تعالی محمد 5.5 551 محمد بدرایید تعالی محمد 5.5 561 محمد بدرایید تعالی محمد 5.6 578 محمد بدرایی محمد 5.7 599 محمد بدرایی محمل 5.8 605 محمد بدرای محمل 5.9 605 محمد بدرای محمل 6.5 625 محمد بدرای محمل 6.1 626 محمد بدرای محم	477	کلمل	5
489 ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی 505 تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3 516 ندازہ بذریعہ تعلیم جوٹے اور تطبی گملات 52 دسوعیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 56 نے اور اوسط قیت سئلہ 57 نبادی سئلہ 58 نبادی سئلہ 59 نبادی سئلہ 605 58 605 ہی کی کس بدل 605 ہی کس بدل 606 ہی کس بدل 607 ہی کس بدل 608 ہی کس بدل 609 ہی کس بدل 600 ہی کس بدل		•	5
505 کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق 5.3 516 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.4 54 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.5 55 ریمان تجویم اور قطعی تحملیت 5.6 56 محمل کا سرا برا اور اصطفی تحمل میں بدل 5.8 605 نظمی تحمل میں بدل 5.9 605 اعدادی تحمل کی اس بدل 6.1 625 اعدادی تحمل کی اس بدل 6.1 625 محمل کا استعمال 6.1 640 مخمل کا سرا ہوتے کلیات والا سرحد 640 محمل کا سرا ہوتے کلیات والا سرحد 648 محمل کی اجبابل کا ث کر تجم کی طاش 650 محمل کا سرائی تجم اور چھلا 663 محمل کی اجبابل کی اس بیال اور تو تحل کی اس بیال کا در ترک کہتے 664 محمل کی اس بیادی قشق اور دیگر نمونی استعمال 755 موان کے تیم اور تو تحل میال کی استعمال 755 موان کے تیم کی استعمال 755 موان کی تخص اور دیگر نمونی استعمال 755 موان کی تخص اور دیگر نمونی استعمال	ر با		
516 اندازه بذرایید تثانای مجموعها 534 5.5 5.6 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.7 5.8 5.8 5.8 5.8 5.9 5.9 5.9 605 606 605 606			
534 ريمان مجموع اور قطعي تحمالت 5.5 561 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.6 578 خمادی سئله 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 6.9 605 6.0 5.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.1 605 6.1 6.1 625 6.1 6.1 629 6.1 6.1 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 640 6.4 6.5 641 6.4 6.5 642 6.4 6.5 643 6.5 6.6 644 6.5 6.6 655 6.6 6.6 6.6 669 6.5 6.6 6.6 660 6.6 6.6 6.6 6.6 660 6.6 6.6 6.6 6.6 6.6 6.6 <td></td> <td></td> <td></td>			
561 فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل 5.6 578 5.7 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 5.9 605 5.0 5.10 625 605 6.1 626 6.2 6.1 627 6.1 6.2 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 663 6.4 6.5 664 6.5 6.5 665 6.6 6.6 6.6 670 6.2 6.4 687 6.3 6.4 688 6.5 6.6 689 6.6 6.7 710 6.8 6.8 731 6.8 6.9 740 6.10 6.5 755 7 10 6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578 بنیادی سئلد 5.7 5,10 5.8 5.8 5.8 5.8 6.0 5.8 6.0 5.9 5.9 6.0 5.9 6.0 5.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.1 6.2 6.2 6.2 6.1 6.2 6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599 قطع کمل میں برل 5.8 605 5.9 605 5.9 605 5.10 625 5.10 625 6.1 629 6.1 640 7 6.2 6.2 6.3 6.2 6.4 6.3 6.5 6.4 6.6 6.5 6.6 6.9 6.7 6.7 7 6.7 7 6.8 7 6.9 6.0 6.0 6.1 6.9 6.9 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و	^ت کمل میں بدل	5.8 قطعی	
 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 625 تاعدہ ذوزنقہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا 6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 میار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 میار اثر اور مرکز کمیت 6.9 وسطانی مرکز 6.7 میار اثر اور قوت سیال اور قوت سیال 6.10 میادرائی تفاعل 			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اگر رقبہ 6.1.1 640 تدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 640 شکل کا کٹر جم کی طاش 6.3 648 باب کوس اور چھلا 6.4 650 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 699 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 711 وسطانی مرکز 6.8 731 وسطانی مرکز 6.8 731 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 740 بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال 7 7 ماورائی نقاعل 7			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اگر رقبہ 6.1.1 640 تدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 640 شکل کا کٹر جم کی طاش 6.3 648 باب کوس اور چھلا 6.4 650 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 699 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 711 وسطانی مرکز 6.8 731 وسطانی مرکز 6.8 731 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 740 بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال 7 7 ماورائی نقاعل 7		کا ب	_
629 تدريل ہوتے کليات والا سرحد 640 6.2 640 6.2 6.3 6.4 6.4 6.5 6.5 6.6 6.6 6.6 6.7 6.6 6.8 6.7 711 6.8 731 6.8 740 6.0 755 6.0	0_0		6
640 گیاں کاٹ کر قجم کی طاش 648 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 6.4 676 شوی متحدیات کی لمبائیاں 687 6.6 689 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 67 6.71 711 0.71 68 6.71 716 وسطانی مرکز 6.8 مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال 740 مادرائی نقاعل			
648 اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا 6.3 663 شکلی چھلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.9 699 6.7 6.7 711 6.7 7 688 7.1 6.8 731 6.8 7 740 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 755 ماورائی نقاعل 7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663 بکی چیلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 711 6.8 7 716 6.8 7 731 10 6.0 740 6.10 6.10 755 31 6.10 6.10) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 687 6.5 688 6.6 699 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 6.7 6.7.1 70 6.8 731 8 740 6.10 755 ماورائی تفاعل	•		
687 شطح طواف کا رقبہ 699 6.7 711 6.7 711 6.7.1 716 9 6.8 731 700 6.10 701 6.10 702 6.10 703 6.10 704 6.10 705 6.10 706 6.10 707 6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.10 نیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.10 نیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

عـــنوان

قدرتی لوگار تھم	7.2	
قوت نمائی تفاعل	7.3	
807 $\log_a x$ let a^x	7.4	
	7.5	
قاعده للحوييثال أ	7.6	
اضافی شرخ نمو	7.7	
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی علاش		
الث تكونياتى تفاعل	7.8	
الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9	
ہذلولی تفاعل	7.10	
ہذالولی تفاعل	7.11	
يوگر كى اعداد كى تركيب؛ ميدان ۋھلوان	7.12	
طريقي 943	ا تکمل کے	8
ر تمکن کے بنیادی کلیات	8.1	
تكمل بالحصص		
964	0.2	
974	8.3	
كونياتى بدلُ	8.4	
حبدول کمل اور کمپیوٹر	8.5	
	8.6	
, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	0.0	
ىلىل 1043	! لا مت ناہی ^{تن}	9
اعداد کی ترتیب کی حد	9.1	
ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	9.2	
لامتناي تسلسل	9.3	
غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پر کھ	9.4	
یر غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پر کھ	9.5	
یر منفی اجزاء کے شکسل کا تنابی اور جذری پر کھ	9.6	
يير کي ابراء کے سن کا بل اور جدري پر ھا		
بداتا تسلس، مطلق اور مشروط ارتکاز	9.7 9.8	
	9.8	
پیر اور مقلان مسلس کا از تکاز؛ خلل کے اندازے	9.9 9.10	
یر من کار نظر: کس کے انداز کے	9.10	
طاق عن کے استعمال	9.11	
ھے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد	ا مخروطی ج	0
ے میں مدیر کا ہوتے ہی گئی۔ مخروطی چھے اور دو قدری مساواتیں	10.1	•
ر می تعداد می از در معنون کا جماعت بندی	10.2	

1246.	. 10 دو در جی مساوات اور گھومنا	.3	
1261.	.10 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول	.4	
1277.	.10 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات '	.5	
1291.	. 10 قطبی محدد	.6	
	. 10 تخطبی محدد میں ترسیم		
	. 10 مخروط حصوں کے قطبی مساوات	.8	
1333 .	. 10. قطبی محدد میں عمل	.9	
1347	تبات اور خلا میں تخلیلی جیومیٹری	سم	11
1347 .		.1	
1364.	. 11 کار تیبی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات	.2	
1372			
	. 11. ضرب نقطه	.3	
	11.3.1 حا ب		
1398 .	. 11. صلیبی ضرب	.4	
1407	بمه اول	ضمي	1
1409	پمه دوم	ضمي	ب
1411	مبه تنمن	ضم	?
1413	مه چار	ضم	,
1415	بر مه پاچ	ضم	b
1417	ا عليه المارية	ضم	,
1419	بمه سات	ضم	j
1421		•	•
1423	بعد آٹھ	ضم	Ь

ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كَي

2011 كتوبر _2011

11.4 صليبي ضرب

اس حصہ میں سمتیات کے ضرب کی دوسری قشم پر غور کیا جائے گا جس کو صلیبی ضرب کہتے ہیں۔ چونکہ صلیبی ضرب کا حاصل سمتی ہوتا ہے المذا اس ضرب کو سمتی ضرب^{23 مج}می کہتے ہیں۔

بر قیات، مقناطیسیات، صلیبی ضرب، حرکت سیال اور میکانیات مدار میں قوتوں کے اثرات پر غور میں صلیبی ضرب اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں صلیبی ضرب کے خواص پر غور کریں۔

دو سمتیات کا صلیبی ضرب

ہم خلامیں دو غیر صفر سمتیات A اور B ہے شروع کرتے ہیں۔ غیر متوازی سمتیات A اور B سطح کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ فاعدہ ہے اس سطح پر عودی اکائی سمتی n سنتی n سنتی سنج برتے ہیں۔ یوں سطح میں A ہے B کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیاں، زاویہ θ موڑنے ہوئے زاویہ π کا رخ دے گا (شکل 11.49)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ π کی تعریف درخ ذیل لیتے ہیں۔ سمتی ضرب $A \times B$ کی تعریف درخ ذیل لیتے ہیں۔

تعریف :

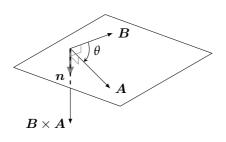
(11.27)
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta)\mathbf{n}$$

چونکہ سمتیہ A imes B اور B دونوں کو عمودی ہوگا۔ سمتیات A اور A imes B دونوں کو عمودی ہوگا۔ سمتیات A imes B اور B imes B کا صلیبی ضرب B imes B کا صلیبی ضرب B imes B کا صلیبی ضرب کہاتا ہے۔ اور ای کی بنا یہ صلیبی ضرب کہلاتا ہے۔

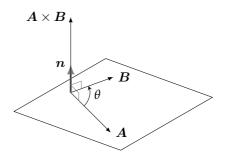
چونکہ 0 اور π کے سائن صفر ہوتے ہیں لہذا ہم مساوات 11.27 میں دو غیر صفر متوازی سمتیات کے صلیبی ضرب کی تعریف 0 کیس گے۔

اگر A یا B صفر ہوتب ہم $A \times B$ کی قیت صفر لیں گے۔ یوں دو سمتیات A اور B کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب A اور B متوازی ہوں یا ان میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ اس طرح غیر صفر سمتیات کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب یہ متوازی ہوں۔

vector product²³ cross product²⁴ .11.4 صلب بي ضرب .



 $oldsymbol{B} imes oldsymbol{A}$ شکل 11.50: صلیبی ضرب:



 $m{A} imes m{B}$ شکل 11.49: صلیبی ضرب شر

B imes A بالقابل A imes B

غیر صفر سمتی ضرب میں سمتیات کی ترتیب بدلنے سے حاصل ضرب کی سمت الٹ ہوتی ہے۔ اگر ہم سمتیہ $m{A} = m{B}$ کی جانب وائیں ہاتھ کی انگلیوں کو، زاویہ $m{\theta}$ موڑیں، تب ہمارا اگو شحا پہلے رخ کا مخالف رخ دے گا (یہاں پہلے رخ سے مراد $m{A} \times m{B}$ کے حصول میں انگلوٹ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ $m{\pi} \geq m{\theta} \leq 0$ لیا جاتا ہے۔ شکل 11.50 میں ان نتائج کو دکھایا گیا ہے۔ یوں تمام سمتیات $m{A}$ اور $m{B}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(11.28) B \times A = -(A \times B)$$

ضرب نقط کے برعس صلیبی ضرب نا قابل تبادل ²⁵ ہے۔

صلیبی ضرب کی تعریف j ، i اور k کی جوڑیوں پر لا گو کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جنہیں دکھائے گئے دائرے سے با آسانی یاد رکھا جا سکتا ہے۔

(11.29)
$$i \times j = -(j \times i) = k$$
$$j \times k = -(k \times j) = i$$
$$k \times i = -(i \times k) - j$$

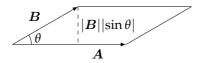


اکائی سمتیات کے ہم صلیبی ضرب صفر ہوں گے:

$$i \times i = (|i||i|\sin 0^{\circ})n = ((1)(1)(0))n = 0$$

 $j \times j = (|j||j|\sin 0^{\circ})n = ((1)(1)(0))n = 0$
 $k \times k = (|k||k|\sin 0^{\circ})n = ((1)(1)(0))n = 0$

 ${\rm non\ commutative}^{25}$



شکل 11.51: متوازی الاصلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ ضرب قد کے برابر ہوتا ہے۔

 $oldsymbol{A}$ متوازی الاضلاع کا رقبہ ہو گا $oldsymbol{A} imes oldsymbol{A}$

چونکہ n اکائی سمتیہ ہے لہذا A imes B کی مقدار

(11.30)
$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}||\sin\theta||\mathbf{n}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

 $|B\sin heta|$ ہو گی جو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جس کے ضلع A اور B ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ |A| جبکہ اس کا قد $|B\sin heta|$ ہو گئی جو اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ |A| جبکہ اس کا قد $|B\sin heta|$ ہو گئل 11.51)۔

قوت م وڑ

نقطہ N پر چول کے ساتھ سلاخ کا ایک سر منسلک ہے جس کے دوسرے سے پر قوت \mathbf{r} عمل کرتی ہے۔ چول سے سلاخ کے دوسرے سے پر قوت کا وہ حصہ جو \mathbf{r} کو سمتیہ \mathbf{r} ظاہر کرتا ہے (شکل 11.52)۔ قوت مروڑ کی مقدار سے مراد ہم \mathbf{r} کی لمبائی ضرب قوت کا وہ حصہ جو \mathbf{r} عمودی ہے، لیتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار کو

قوت مرورٌ سمتیه کی مقدار
$$|oldsymbol{r}| = |oldsymbol{r}| |oldsymbol{F}| \sin heta$$

یا |r imes F| کھ سکتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ قاعدہ سے حاصل اکائی سمتیہ n استعال کرتے ہوئے قوت مروڑ سمتیہ کو درج ذیل کھ سکتے ہیں۔ ہیں۔

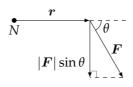
قوت مروڑ سمتی
$$oldsymbol{arepsilon} = (|oldsymbol{r}||oldsymbol{F}|\sin heta)oldsymbol{n} = oldsymbol{r} imesoldsymbol{F}$$

یاد رہے کہ (غیر صفر سمتیات کی صورت میں) A imes B تب 0 ہوتا ہے جب A اور B متوازی ہوں۔ قوت مروڑ کی تعریف عین اس حقیقت کے مطابق ہے۔ یوں اگر قوت عین سلاخ کے متوازی عمل کرے تب حاصل قوت مروڑ صفر ہو گا۔

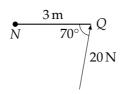
مثال 11.26: توت مرور کی مقدار شکل 11.53 میں درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\overrightarrow{NQ} \times F\right| = \left|\overrightarrow{NQ}\right| |F| \sin 70^{\circ}$$
 11.30 عبادات $\approx (3)(20)(0.94)$ $\approx 56.4 \, \mathrm{N \, m}$

11.4. ملت بي ضرب 11.4



شكل 11.52: قوت مروڑ۔



شكل 11.53: قوت مروڑ (مثال 11.26)۔

قوانين تلازم اور تقسيم

A imes صلیبی ضرب عام طور غیر تلازی ہو گا چونکہ C کے مستوی میں پایا جاتا ہے جبکہ اور B اور B کے مستوی میں پایا جاتا ہے۔ اس کے باوجود درج ذیل تواعد مطمئن ہوتے ہیں۔ (B imes C)

$$(11.31)$$
 $(rA) \times (sB) = (rs)(A \times B)$ قير سمّى قاعده تقيم

(11.32)
$$A \times (B+C) = A \times B + A \times C$$

(11.33)
$$(B+C) imes A = B imes A + C imes A$$

مساوات 11.31 کی ایک مخصوص صورت درج ذیل ہے۔

$$(11.34) \qquad (-\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (-\mathbf{B}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

غیر سمتی قاعدہ تقسیم ثابت کرنے کی خاطر مساوات 11.31 کے دونوں اطراف پر مساوات 11.27 عائد کر کے نتائج کا موازنہ کریں۔ سمتی قاعدہ تقسیم مساوات 11.32 کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس کی حقیقت کو یہاں تسلیم کرتے ہیں۔ اس کا ثبوت ضمیمہ زمیں پیش کیا گیا ہے۔ مساوات 11.33 کو دونوں اطراف کو 1- سے ضرب کر کے حاصل اجزاء کے مقام تبدیل کریں۔

کاکلیہ بذریعہ مقطع
$$A imes B$$

اور
$$m{B}$$
 کا حباب کار تیمی محدد کی نظام ش $m{A}$ اور $m{B}$ ہے کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ورج ذیل فرض کرتے ہیں۔ $m{A} imes m{A} imes m{A} imes m{A} imes m{A} imes m{A} imes m{B} = b_1 m{i} + b_2 m{j} + a_3 m{k}$

قواعد تقسیم اور
$$i$$
 ، ورج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k})
= a_1 b_1 \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1 b_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1 b_3 \mathbf{i} \times \mathbf{k}
+ a_2 b_1 \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_2 b_2 \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_2 b_3 \mathbf{j} \times \mathbf{k}
+ a_3 b_1 \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_3 b_2 \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3 b_3 \mathbf{k} \times \mathbf{k}
= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

مذكوره بالا مساوات كا آخرى حصه قالب

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

کو کھول کر ملتا ہے۔

يوں اگر سمتيات
$$oldsymbol{A}=a_1oldsymbol{i}+a_2oldsymbol{j}+b_3oldsymbol{k}$$
 اور $oldsymbol{A}=a_1oldsymbol{i}+a_2oldsymbol{j}+a_3oldsymbol{k}$ ہوں تب درج زیل ہو گا۔

(11.35)
$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

اثال 11.27:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

اثال 11.28:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

11.4 ملي بي ضرب . 11.4

ىثال 11.29:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

مثال 11.30:

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -5(1-3) - 3(2+4) + 1(6+4) = 10 - 18 + 10 = 2$$

مثال 11.31: صلیبی ضرب
$$m{A} imesm{B}$$
 اور $m{B} imesm{A}$ درج ذیل سمتیات کے لیے حاصل کریں۔ $m{A}=2i+j+k, \quad m{B}=-4i+3j+k$

حل:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$
$$= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$
$$B \times A = -(A \times B) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$$

مثال 11.32: ایک مستوی پر نقاط P(1,-1,0) ، P(1,-1,0) اور R(-1,1,2) پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کو عمودی سمتیہ تلاش کریں۔

صل: سمتیات $P\overline{Q}$ اور $P\overline{R}$ اس سطح میں پائے جائیں گے۔ چونکہ سمتیہ $P\overline{Q} imes P\overline{Q}$ ان دونوں سمتیات کو عمودی ہے لہٰذا یہ مستوی کو بھی عمودی ہو گا۔ اجزاء کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\vec{PQ} = (2-1)i + (1+1)j + (-1-0)k = i + 2j - k$$

$$\vec{PR} = (-1-1)i + (1+1)j + (2-0)k = -2i + 2j + 2k$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= 6i + 6k$$

مثال 11.33: ایک مثلث کے راس P(1,-1,0) ، P(1,-1,0) اور R(-1,1,2) بیں۔ اس مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

عل: سمتیات \overrightarrow{PQ} اور \overrightarrow{PR} جس متوازی الاطلاع کے ضلع ہوں اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

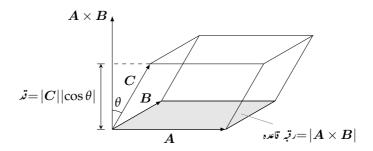
$$\left|\vec{PQ} \times \vec{PR}\right| = |6i + 6k|$$
 11.32 غن $= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = 6\sqrt{2}$

مثلث كا رقبه اس كا نصف $\sqrt{2}$ هو گاـ مثلث

مثال 11.34 \mathcal{C} مثال 11.34

طن: چونکہ $P\overline{Q} \times P\overline{R}$ مستوی کو عمودی ہے للذا n کا رخ بیبی سمتیہ دے گا۔ ہم اس سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقتیم کر کے عمودی اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں۔

$$m{n} = rac{ec{PQ} imes ec{PR}}{\left|ec{PQ} imes ec{PR}
ight|} = rac{6m{i} + 6m{k}}{6\sqrt{2}} = rac{1}{\sqrt{2}}m{i} + rac{1}{\sqrt{2}}m{k}$$



شکل 11.54: مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ ضرب قد کے برابر ہو گا۔

غیر سمتی سه ضرب

ضرب \mathbf{C} کو کی اور \mathbf{C} کا غیر سمتی سہ ضرب کتے ہیں جہاں سمتیات کی ترتیب کبی ہے۔ آپ دیکھ کتے ہیں شرب کے خیر سمتی سہ ضرب کی مطلق قیت (\mathbf{C} کا فیر سمتی سہ ضرب کی مطلق قیت

$$|(A \times B) \cdot C| = |A \times B||C||\cos \theta|$$

اں متنظیلی متوازی السطوح کا تجم دیتی ہے جس کے اضلاع $m{B}$ ، $m{A}$ اور $m{C}$ ہوں۔ متنظیلی متوازی السطوح کا تجم اس کے قاعدہ کا رقبہ $|m{C}|$ کا حاصل ضرب نقطہ $|m{A} \times m{B}|$

$$egin{aligned} ar{eta} &= (m{arphi} m{arphi}) \cdot (m{arphi}) \ &= |m{A} imes m{B}| \cdot |m{C}| |\cos heta| \ &= |m{(A} imes m{B}) \cdot m{C}| \end{aligned}$$

ہو گا۔

A اور B کی سطح کو شکل C اعلی تا تامدہ دکھایا گیا ہے۔ ہم سمتیات B اور C کی سطح یا سمتیات C اور C کی سطح کو تامدہ کے نامدہ کے نام ہیں جو کئیہ جم اثاث کر سکتے ہیں۔ چونکہ جم اثل قیت ہے المذا ورج ذیل حاصل ہو گا۔

(11.36)
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

اب غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے للذا مساوات 11.36 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

(11.37)
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر سمتی سہ ضرب میں سمتیات کا مقام تبدیل کئے بغیر صلیبی ضرب اور نقطہ ضرب کے مقامات کو بدلا جا سکتا ہے۔

غیر سمتی سه ضرب کی قیمت مقطع سے حاصل کی جا سکتی ہے:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

يوں درج ذيل ہو گا۔

(11.38)
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال 11.35: سمتيات $m{C}=7m{j}-4m{k}$ اور $m{B}=-2m{i}+3m{k}$ ايك منظيلي متوازى الطوح بناتے ہيں۔ اس کا حجم علاق کریں۔

حل:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= -21 - 16 + 13 = -23$$

يوں جگم $ig|m{A}\cdot(m{B} imesm{C})ig|=23$ ہو گا۔

سوالات

ضمیمها ضمیمه اول

ضمیمه به ضمیمه د وم

ضمیمه ج ضمیمه تلین

ضمیمه د ضمیمه چار

ضمیمه ه ضمیمه پانچ

تنميمه و

ضمیمه جیم

ضمیمه ز ضمیمه سات

ضیمه آڅه

ضمیمه آگھ