

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونباتی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونباتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونباتی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1344 . . . . .	11.2	کار تیزی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تکلی اور مربع سطحیں
1423 . . . . .	11.7	تکلی اور کروی محدود
1435 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1475 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1497 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1543 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1560 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1592 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1638 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1655 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالکثرت
1663 . . . . .	14.1 دوہرا تکملات
1683 . . . . .	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1699 . . . . .	14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ
1710 . . . . .	14.4 تہرا تکمل
1724 . . . . .	14.5 تعین بعدی کیت اور معیار اثر
1733 . . . . .	14.6 نکلی اور کردی محد میں تہرا تکمل
1747	جوابات
1749	ا ضمیمہ اول
1751	ب ضمیمہ دوم
1753	ج ضمیمہ تین
1755	د ضمیمہ چار
1757	ه ضمیمہ پانچ
1759	و ضمیمہ چھ
1761	ز ضمیمہ سات
1763	ح ضمیمہ آٹھ
1765	ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 14.6 ٹکلی اور کروی محدود میں تہر اتمل

انجینئری، طبیعیات اور جیومیٹری میں مخروط، بیلن یا کرہ کے ساتھ کام ٹکلی اور کروی محدود میں زیادہ آسان ہوتا ہے۔

ٹکلی محدود

جن بیلن کا محور  $z$  محدود پر پایا جاتا ہو اور وہ مستویات جن میں  $z$  محدود پایا جاتا ہو یا جو  $z$  محدود کے عمودی ہوں، کو ٹکلی محدود میں بیان کرنا نہایت آسان ہوتا ہے۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں ان سطحوں کی مساوات مستقل محدودی صورت رکھتی ہیں۔

$$\rho = 4$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2$$

فضا میں خطہ کی ٹکلی محدود میں مستطیلی خانہ بندی کر کے ایک خانے کا حجم

$$dH = dz \rho d\rho d\phi$$

ہو گا۔ تب ٹکلی محدود میں تہر اتملات کو بطور بارہا اتملات حل کیا جائے گا۔ ایسا اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.20: خطہ  $D$  پر تفاعل  $f(\rho, \phi, z)$  کی ٹکلی محدود میں تہر اتمل کی حدیں تلاش کریں۔ خطہ  $D$  نیچے سے مستوی  $z = 0$  اور اطراف سے دائری بیلن  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  جبکہ اوپر سے قطع مکانی  $z = x^2 + y^2$  کے بیچ پایا جاتا ہے۔

حل

1. خاکہ بنانا:  $D$  کا قاعدہ ہی مستوی  $xy$  پر  $D$  کی تقطیل  $R$  ہوگی۔ تقطیل  $R$  کی سرحد دائرہ  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  ہوگی جس کی قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\rho^2 - 2\rho \sin \phi = 0$$

$$\rho = 2 \sin \phi$$

2. مکمل کی  $z$  حدیں: خطہ  $R$  میں عمومی نقطہ  $(\rho, \phi)$  سے گزرتی ہوئی کلیئر  $M$ ، جو  $z$  محدود کے متوازی ہو  $D$  میں  $z = 0$  پر داخل اور  $z = x^2 + y^2 = \rho^2$  پر خارج ہوگی۔

3. مکمل کی  $\rho$  حدیں: مبدا سے خط  $L$  جو نقطہ  $(\rho, \phi)$  سے گزرتا ہو،  $R$  میں  $\rho = 0$  پر داخل اور  $\rho = 2 \sin \phi$  پر خارج ہوگا۔

4. مکمل کی  $\phi$  حدیں: خط  $L$  جھاڑو کی طرح  $R$  کو جھاڑتے ہوئے مثبت  $x$  محور کے ساتھ  $\phi = 0$  اور  $\phi = \pi$  کے بیچ رہتا ہے۔

یوں مکمل درج ذیل ہوگا۔

$$\iiint_D f(\rho, \phi, z) dH = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \phi} \int_0^{\rho^2} f(\rho, \phi, z) dz \rho d\rho d\phi$$

□

اس مثال میں ہم نے نئی محدود میں مکمل کی حدیں تلاش کرنا سیکھا۔

مثال 14.21: بیلیں  $x^2 + y^2 = 4$  میں بند ٹھوس جسم جو اوپر سے قطع مکانی سطح  $z = x^2 + y^2$  اور نیچے سے مستوی  $xy$  کے بیچ پایا جاتا ہو، کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ ٹھوس جسم کی کثافت  $\delta = 1$  ہے۔

حل

ہم اوپر سے قطع مکانی  $z = \rho^2$  اور نیچے سے مستوی  $z = 0$  میں ملفوف ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس کا قاعدہ  $R$  مستوی  $xy$  میں قرص  $|\rho| \leq 2$  ہوگا۔

ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تشاکلی محور پر ہوگا جو محور  $z$  ہے۔ یوں  $\bar{x} = \bar{y} = 0$  ہوگا۔ ہم معیار اثر  $M_{xy}$  کو کمیت  $M$  سے تقسیم کر کے  $\bar{z}$  تلاش کرتے ہیں۔

کمیت اور معیار اثر کے مکملات کی حدیں تلاش کرنے کی خاطر ہم وہی چار مخصوص قدم لیتے ہیں۔ خاکہ بنا کر ہم پہلا قدم مکمل کر چکے ہیں۔ باقی اقدام درج ذیل ہیں۔

2. مکمل کی  $z$  حدیں: علامتی نقطہ  $(\rho, \phi)$  سے گزرتی ہوئی، محدود  $z$  کی متوازی کلیئر  $M$ ، ٹھوس جسم میں  $z = 0$  سے داخل اور  $z = \rho^2$  سے خارج ہوگی۔

3. مکمل کی  $\rho$  حدیں: مبدا سے شروع نقطہ  $\rho, \phi$  سے گزرتی ہوئی کلیئر  $L$  خطہ  $R$  میں  $\rho = 0$  سے داخل اور  $\rho = 2$  سے خارج ہوگی۔

4. تکمل کی  $\phi$  حدیں: کیر  $L$  قاعدہ پر گھڑی کی سوئی کی طرح گھومتی ہوئی  $\phi = 0$  سے  $\phi = 2\pi$  تک طے کرتی ہے۔

یوں  $M_{xy}$  کی قیمت

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} z \, dz \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{\rho^5}{2} \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^6}{12} \right]_0^2 d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \, d\phi = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

اور  $M$  کی قیمت

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} dz \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ z \right]_0^{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 d\phi = \int_0^{2\pi} 4 \, d\phi = 8\pi \end{aligned}$$

ہو گی لہذا

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3} \frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$$

□

ہو گا۔ وسطانی مرکز  $(0, 0, 4/3)$  ہو گا جو ٹھوس جسم سے باہر ہے۔

تکلی محدود میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ  $D$  پر تکمل

$$\iiint_D f(\rho, \phi, z) \, dH$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے تکلی محدود میں پہلے  $z$ ، اس کے بعد  $\rho$  اور آخر میں  $\phi$  کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ  $D$  اور مستوی  $xy$  پر اس کی تقطیل  $R$  کا خاکہ بنائیں۔  $D$  اور  $R$  کی سرحدی سطحوں اور منحنیات کی نشاندہی کریں۔

2. تکمل کی  $z$  حدیں:  $R$  میں علامتی نقطہ  $(\rho, \phi)$  پر محور  $z$  کے متوازی ایک علامتی کیر  $M$  کھینچیں جو بڑھ کر  $D$  میں  $z = g_1(\rho, \phi)$  سے داخل اور  $z = g_2(\rho, \phi)$  سے خارج ہوگی۔ یہی تکمل کی  $z$  حدیں ہوں گی۔

3. مکمل کی  $\rho$  حدیں: مبداء سے ایک کثیر  $L$  کھینچیں جو نقطہ  $(\rho, \phi)$  سے گزرتی ہو۔ یہ شعاع خطہ  $R$  میں  $\rho = h_1(\phi)$  سے  $\rho = h_2(\phi)$  اور  $\rho = h_2(\phi)$  سے خارج ہوگی۔ یہی مکمل کی  $\rho$  حدیں ہوں گی۔

4. مکمل کی  $\phi$  حدیں: کثیر  $L$  خطہ  $R$  کو جھاڑتے ہوئے مثبت  $x$  محور کے ساتھ زاویہ  $\phi = \alpha$  اور  $\phi = \beta$  کے بیچ رہتی ہے۔ یہی مکمل کی  $\phi$  حدیں ہوں گی۔

یوں مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$(14.40) \quad \iiint_D f(\rho, \phi, z) dH = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\rho=h_1(\phi)}^{\rho=h_2(\phi)} \int_{z=g_1(\rho, \phi)}^{z=g_2(\rho, \phi)} f(\rho, \phi, z) dz \rho d\rho d\phi$$

کروی محدود

ایسے کرہ جن کے مراکز مبداء پر ہوں، وہ نصف چادر جن کا پول محور  $z$  ہو، اور وہ مخروط جن کا راس مبداء پر اور محور محدودی نظام کے محور  $z$  پر ہو، کو کروی محدود میں بیان کرنا آسان ہوتا ہے۔ ان سطحوں کی مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} r &= 4 && \text{کرہ، جس کا رداس 4 اور مرکز مبداء پر ہے} \\ \phi &= \frac{\pi}{3} && \text{مبداء سے اوپر رخ کھلتا ہوا مخروط جو مثبت } z \text{ محور کے ساتھ } \pi/3 \text{ زاویہ بناتا ہے} \\ \phi &= \frac{\pi}{3} && \text{نصف چادر جس کا پول محور } z \text{ ہے اور جو مثبت } x \text{ محور کے ساتھ } \pi/3 \text{ زاویہ بناتا ہے} \end{aligned}$$

کروی محدود میں چھوٹے مستطیل حجم سے مراد وہ **کروی چھپر**<sup>17</sup> ہے جس کو  $dr$ ،  $d\phi$  اور  $d\phi$  تعین کرتے ہیں۔ یہ چھپر تقریباً مستطیلی ہو گا جس کے ایک اطراف کی قوسی لمبائی  $r d\phi$ ، دوسرے طرف کی قوسی لمبائی  $r \sin \phi d\phi$  اور موٹائی  $dr$  ہوگی۔ یوں کروی محدود میں چھوٹے ٹکڑے کا حجم

$$(14.41) \quad dH = r^2 \sin \phi dr d\phi d\phi$$

ہو گا اور تہرا مکمل کی صورت درج ذیل ہوگی۔

$$\iiint F(r, \phi, \phi) dH = \iiint F(r, \phi, \phi) r^2 \sin \phi dr d\phi d\phi$$

ہم عموماً پہلے  $r$  کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔ ہم صرف ان کھمبات پر غور کریں گے جو  $z$  محور کے لحاظ سے اجسام طواف (یا ان کا حصہ) ہوں اور جن کے  $\phi$  اور  $\phi$  حدیں مستقل ہوں۔

<sup>17</sup>spherical wedge



کروی محدود میں تکمیل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ  $D$  پر تکمیل

$$\iiint_D F(r, \phi, \phi) dH$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے  $r$ ، اس کے بعد  $\phi$ ، اور آخر میں  $\phi$  کے لحاظ سے تکمیل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ  $D$  اور مستوی  $xy$  میں  $D$  کی تقطیل  $R$  کا خاکہ بنا کر  $D$  کی سرحدی سطحوں کی نشاندہی کریں۔

2. تکمیل کی  $r$  حدیں: مبدا سے ایک لکیر  $M$  کھینچیں جو مثبت محور  $z$  کے ساتھ زاویہ  $\phi$  بناتی ہو۔ ساتھ ہی  $R$  پر  $M$  کی تقطیل  $L$  کا خاکہ بنائیں جو مثبت  $x$  محور کے ساتھ زاویہ  $\phi$  بنائی گی۔ جیسے جیسے  $r$  بڑھے گا  $M$  خطہ  $D$  میں  $r = g_1(\phi, \phi)$  سے داخل اور  $r = g_2(\phi, \phi)$  سے خارج ہوگی۔ یہی تکمیل کی  $r$  حدیں ہوں گی۔

3. تکمیل کی  $\phi$  حدیں: کسی بھی مخصوص  $\phi$  کے لئے  $M$  مثبت محور  $z$  کے ساتھ  $\phi = \phi_1$  سے  $\phi = \phi_2$  تک زاویہ بنائے گی۔ یہی تکمیل کی  $\phi$  حدیں ہوں گی۔

4. تکمیل کی  $\phi$  حدیں: کسی بھی مخصوص  $\phi$  کے لئے  $L$  خطہ  $R$  پر جھاڑو کی طرح چلتے ہوئے  $\phi = \alpha$  سے  $\phi = \beta$  تک چلتی ہے۔ یہی تکمیل کی  $\phi$  حدیں ہوں گی۔

یوں تکمیل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D F(r, \phi, \phi) dH = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=g_1(\phi, \phi)}^{r=g_2(\phi, \phi)} F(r, \phi, \phi) r^2 \sin \phi dr d\phi d\phi$$

مثال 14.22: ٹھوس کرہ  $r \leq 1$  سے مخروط  $\theta = \pi/3$  بالائی خطہ  $D$  کا ٹکڑا ہے۔ اس خطہ کا حجم تلاش کریں۔

حل: اس خطے کا حجم  $\iiint_D r^2 \sin \phi dr d\phi d\phi$  ہو گا۔ تکمیل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: ہم  $D$  اور مستوی  $xy$  میں اس کی تقطیل  $R$  کا خاکہ بناتے ہیں۔

2. تکمیل کی  $r$  حدیں: ہم مثبت  $z$  محور کے ساتھ  $\phi$  زاویہ پر مبدا سے شعاع  $M$  کھینچتے ہیں اور ساتھ ہی  $xy$  مستوی میں اس کی تقطیل  $L$  کھینچتے ہیں جو مثبت  $x$  محور کے ساتھ زاویہ  $\phi$  بناتا ہے۔ شعاع  $M$  خطہ  $D$  میں  $r = 0$  سے داخل اور  $r = 1$  سے خارج ہو گا۔

3. مکمل کی  $\phi$  حدیں: مخروط  $\theta = \pi/3$  مثبت  $z$  محور کے ساتھ زاویہ  $\pi/3$  بناتا ہے۔ یوں شعاع  $M$  زاویہ  $\phi = 0$  سے  $\phi = \pi/3$  تک چل سکتی ہے۔

4. مکمل کی  $\phi$  حدیں: شعاع  $L$  خطہ  $R$  پر  $\phi = 0$  سے  $2\pi$  تک چلتی ہے۔  
یوں مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \iiint_D r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 \sin \phi \, d\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi/3} d\phi = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) d\phi = \frac{1}{6} (2\pi) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

□

مثال 14.23: مستقل کثافت  $\delta = 1$  کا ایک ٹھوس جسم مثال 14.22 کے خطہ  $D$  میں پایا جاتا ہے۔ محور  $z$  کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: کارٹیزی میں جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \, dH$$

ہو گا۔ کردی محدود میں  $x^2 + y^2 = (r \sin \phi \cos \phi)^2 + (r \sin \phi \sin \phi)^2 = r^2 \sin^2 \phi$  کی بنا جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (r^2 \sin^2 \phi) r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\phi = \iiint r^4 \sin^3 \phi \, dr \, d\phi \, d\phi$$

ہو گا جس کی قیمت مثال 14.22 کے خطہ کے لئے درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^4 \sin^3 \phi \, dr \, d\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^1 \sin^3 \phi \, d\phi \, d\phi \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\phi = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[ -\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi/3} d\phi \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} \right) d\phi = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \frac{5}{24} d\phi = \frac{1}{24} (2\pi) = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

□

محدی بدلے کے کلیاتے

کروی سے نلکی	کروی سے کار تہی	نلکی سے کار تہی
$\rho = r \sin \phi$	$x = r \sin \phi \cos \phi$	$x = \rho \cos \phi$
$z = r \cos \phi$	$y = r \sin \phi \sin \phi$	$y = \rho \sin \phi$
$\phi = \phi$	$z = r \cos \phi$	$z = z$

مطابقتی چھوٹے حجم درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} dH &= dx dy dz \\ &= dz \rho d\rho d\phi \\ &= r^2 \sin \phi dr d\phi d\phi \end{aligned}$$

سوالات

نلکی محدود

سوال 1 تا سوال 6 میں نکل کی قیمت نلکی محدود استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$\text{سوال 1: } \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz \rho d\rho d\phi$$

$$\text{سوال 2: } \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz \rho d\rho d\phi$$

$$\text{سوال 3: } \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi/2\pi} \int_0^{3+24r^2} dz \rho d\rho d\phi$$

$$\text{سوال 4: } \int_0^\pi \int_0^{\phi/\pi} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z dz \rho d\rho d\phi$$

$$\text{سوال 5: } \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3 dz \rho d\rho d\phi$$

$$\text{سوال 6: } \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} (\rho^2 \sin^2 \phi + z^2) dz \rho d\rho d\phi$$

اب تک ہم نلکی محدود کی نکلات کو پسندیدہ ترتیب  $z$ ،  $\rho$ ،  $\phi$  سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے نکل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 7 تا سوال 10 کے نکلات کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 7: } \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{z/3} \rho^3 d\rho dz d\phi$$

$$\text{سوال 8: } \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \phi} 4\rho d\rho d\theta dz$$

$$\text{سوال 9: } \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} (\rho^2 \cos^2 \phi + z^2) \rho d\phi d\rho dz$$

$$\text{سوال 10: } \int_0^2 \int_{\rho-2}^{\sqrt{4-\rho^2}} \int_0^{2\pi} (\rho \sin \phi + 1) \rho d\phi dz d\rho$$

سوال 11: نیچے سے مستوی  $z = 0$ ، اوپر سے کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ، اور اطراف سے سیلن  $x^2 + y^2 = 1$  میں خطہ  $D$  ملفوف ہے۔ نلکی محدود میں خطہ  $D$  کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا نکل درج ذیل نکل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

ا.  $dz d\rho d\phi$       ب.  $d\rho dz d\phi$       ج.  $d\phi dz d\rho$

سوال 12: نیچے سے مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، اوپر سے قطع مکانی  $z = 2 - x^2 - y^2$ ، اور اطراف سے نیلن  $x^2 + y^2 = 1$  میں خطہ  $D$  ملفوف ہے۔ نیکی محدود میں خطہ  $D$  کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا مکمل درج ذیل مکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

ا.  $dz d\rho d\phi$       ب.  $d\rho dz d\phi$       ج.  $d\phi dz d\rho$

سوال 13: نیچے سے مستوی  $z = 0$ ، اطراف سے نیلن  $\rho = \cos \phi$ ، اور اوپر سے قطع مکانی سطح  $z = 3\rho^2$  میں ملفوف خطہ  $D$  کے لئے درج ذیل مکمل کی قیمت تلاش کرنے کے لئے کے مکمل کی حدیں معلوم کریں۔

$$\iiint F(\rho, \phi, z) dz \rho d\rho d\phi$$

سوال 14: درج ذیل مکمل کو معادل نیکی محدود کے مکمل میں تبدیل کر اس کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz dx dy$$

سوال 15 تا سوال 20 میں دیے گئے خطہ  $D$  پر مکمل  $\iiint_D F(\rho, \phi, z) dz \rho d\rho d\phi$  کی قیمت حاصل کرنے کے لئے تہرا مکمل لکھیں۔

سوال 15: وہ قائمہ دائری نیلن جس کا قاعدہ مستوی  $xy$  میں دائرہ  $\rho = 2 \sin \phi$  اور سر مستوی  $z = 4 - y$  میں ہو، خطہ  $D$  ہے۔

سوال 16: وہ قائمہ دائری نیلن جس کا قاعدہ مستوی  $xy$  میں دائرہ  $\rho = 3 \cos \phi$  اور سر مستوی  $z = 5 - x$  میں ہو، خطہ  $D$  ہے۔

سوال 17: وہ قائمہ دائری نیلن جس کا قاعدہ مستوی  $xy$  میں قلب نما  $\rho = 1 + \cos \phi$  کے اندر اور دائرہ  $\rho = 1$  کے باہر اور سر مستوی  $z = 4$  میں ہو، خطہ  $D$  ہے۔

سوال 18: وہ ٹھوس قائمہ نیلن جس کا قاعدہ دائرہ  $\rho = \cos \phi$  اور دائرہ  $\rho = 2 \cos \phi$  کے بیچ اور سر مستوی  $z = 3 - y$  میں ہو، خطہ  $D$  ہے۔

سوال 19: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی  $xy$  میں محور  $x$ ، لکیر  $y = x$  اور لکیر  $x = 1$  کے بیچ مثلث اور سر مستوی  $z = 2 - y$  میں ہو، خطہ  $D$  ہے۔

سوال 20: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی  $xy$  میں محور  $y$ ، لکیر  $y = x$  اور لکیر  $y = 1$  کے بیچ مثلث اور سر مستوی  $z = 2 - x$  میں ہو، خطہ  $D$  ہے۔

### کروی محدود

سوال 21 تا سوال 26 میں کروی کمالات کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 21: } \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{سوال 22: } \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (r \cos\theta) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{سوال 23: } \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{(1-\cos\theta)/2} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{سوال 24: } \int_0^{3\pi/2} \int_0^\pi \int_0^1 5r^3 \sin^3\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{سوال 25: } \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\theta}^2 3r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{سوال 26: } \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\theta} (r \cos\theta) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

اب تک ہم کروی محدود کی کمالات کو پسندیدہ ترتیب سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے نکل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 27 تا سوال 30 میں کمالات کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 27: } \int_0^2 \int_{-\pi}^0 \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3 \sin 2\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$\text{سوال 28: } \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_{\csc\theta}^{2\csc\theta} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\phi \, dr \, d\theta$$

$$\text{سوال 29: } \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/4} 12r \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$\text{سوال 30: } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\csc\theta}^2 5r^4 \sin^3\theta \, dr \, d\phi \, d\theta$$

سوال 31: کروئی محدود میں (i)  $dr d\theta d\phi$ ، (ب)  $d\theta dr d\phi$  ترتیب سے سوال 11 کے خطہ کے حجم کے تہرا مکمل لکھیں۔

سوال 32: نیچے سے مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  اور اوپر سے مستوی  $z = 1$  کے بیچ خطہ  $D$  کے حجم کا مکمل کروئی محدود میں (i)  $dr d\theta d\phi$ ، (ب)  $d\theta dr d\phi$  ترتیب کے لئے لکھیں۔

سوال 33 تا سوال 38 میں دئے گئے ٹھوس جس کے حجم کے کروئی مکمل (i) کی حدیں تلاش کریں۔ (ب) کروئی مکمل حل کرتے ہوئے جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 33: کرہ  $r = \cos \theta$  اور نصف کرہ  $r = 2, z \geq 0$  کے بیچ ٹھوس جسم۔

سوال 34: نیچے سے نصف کرہ  $r = 1, z \geq 0$  اور اوپر سے سطح طواف قلب نما  $r = 1 + \cos \theta$  میں ملفوف ٹھوس جسم۔

سوال 35: جسم طواف قلب نما  $r = 1 - \cos \theta$  میں ملفوف۔

سوال 36: وہ بالائی خطہ جو مستوی  $xy$  سوال 35 کے جسم سے کاٹتا ہے۔

سوال 37: نیچے سے کرہ  $r = 2 \cos \theta$  اور اوپر سے مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  میں ملفوف جسم۔

سوال 38: نیچے سے مستوی  $xy$ ، اوپر سے مخروط  $\theta = \frac{\pi}{3}$  اور اطراف سے کرہ  $r = 2$  میں ملفوف

### کارٹینیسی، نیلکی اور کروئی محدود

سوال 39: کرہ  $r = 2$  کے حجم کا تہرا مکمل (i) کروئی، (ب) نیلکی، اور (ج) کارٹینیسی محدود میں لکھیں۔

سوال 40: ثمن اول میں نیچے سے مخروط  $\theta = \frac{\pi}{4}$  اور اوپر سے کرہ  $r = 3$  میں ملفوف خطہ  $D$  کے حجم کا تہرا مکمل (i) نیلکی اور (ب) کروئی محدود میں لکھیں۔ (ج) اس کے بعد اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 41: رداس 2 اکائیاں کے کرہ کو، کرہ سے مرکز سے 1 اکائی دور، مستوی دو ٹکڑوں میں کاٹتی ہے۔ چھوٹے ٹکڑے کے حجم کا تہرا مکمل (i) کروئی، (ب) نیلکی، اور (ج) کارٹینیسی محدود میں لکھیں۔ (د) اس ٹکڑے کا حجم کسی ایک تہرا مکمل کو حل کرتے ہوئے معلوم کریں۔

سوال 42: ٹھوس نصف کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$  کے جمودی معیار اثر  $I_z$  کو (i) نیلکی اور (ب) کروئی محدود میں لکھیں۔ (ج)  $I_z$  کی قیمت تلاش کریں۔

جتم

سوال 43 تا سوال 48 میں ٹھوس اجسام کے جتم تلاش کریں۔

سوال 43:

سوال 44:

سوال 45:

سوال 46:

سوال 47:

سوال 48:

سوال 49: مخروط  $\theta = \frac{\pi}{3}$  اور  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  کے بیچ ٹھوس کرہ  $r \leq a$  کے حصہ کا جتم تلاش کریں۔سوال 50: شمن اول میں نصف مستویات  $\phi = 0$  اور  $\phi = \frac{\pi}{6}$  کے بیچ ٹھوس کرہ  $r \leq a$  کے حصہ کا جتم تلاش کریں۔سوال 51: ٹھوس کرہ  $r \leq 2$  سے مستوی  $z = 1$  جو چھوٹا ٹکڑا کاٹتا ہے، اس کا جتم تلاش کریں۔سوال 52: مستویات  $z = 1$  اور  $z = 2$  کے بیچ مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  کے حصہ کا جتم تلاش کریں۔سوال 53: نیچے سے مستوی  $z = 0$ ، اوپر سے سطح قطع مکانی  $z = x^2 + y^2$  اور اطراف سے بیلن  $x^2 + y^2 = 1$  میں ملفوف خطے کا جتم تلاش کریں۔سوال 54: نیچے سے سطح قطع مکانی  $z = x^2 + y^2$ ، اوپر سے سطح قطع مکانی  $z = 1 + x^2 + y^2$  اور اطراف سے بیلن  $x^2 + y^2 = 1$  میں ملفوف خطے کا جتم تلاش کریں۔سوال 55: موٹی دیوار کے بیلن  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  سے مخروط  $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$  جتنا حصہ کاٹتے ہیں، اس کا جتم تلاش کریں۔سوال 56: کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  کے اندر اور بیلن  $x^2 + y^2 = 1$  کے باہر خطے کا جتم تلاش کریں۔سوال 57: بیلن  $x^2 + y^2 = 4$  اور مستویات  $z = 0$  اور  $y + z = 4$  میں ملفوف خطے کا جتم تلاش کریں۔سوال 58: بیلن  $x^2 + y^2 = 4$  اور مستویات  $z = 0$  اور  $x + y + z = 4$  میں ملفوف خطے کا جتم تلاش کریں۔

سوال 59: اوپر سے سطح قطعہ مکانی  $z = 5 - x^2 - y^2$  اور نیچے سے سطح قطعہ مکانی  $z = 4x^2 + 4y^2$  میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 60: بیلن  $x^2 + y^2 = 1$  سے باہر، اوپر سے سطح قطعہ مکانی  $z = 9 - x^2 - y^2$  اور نیچے سے مستوی  $xy$  میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 61: اس خطے کا حجم تلاش کریں جسے ٹھوس بیلن  $x^2 + y^2 \leq 1$  کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  سے کاٹا ہے۔

سوال 62: اوپر سے کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  اور نیچے سے سطح قطعہ مکانی  $z = x^2 + y^2$  میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

### اوسط قیمت

سوال 63: مستویات  $z = 1$  اور  $z = -1$  کے بیچ بیلن  $\rho = 1$  میں تقابل  $F(\rho, \phi, z) = \rho$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 64: کرہ  $\rho^2 + z^2 = 1$  (یعنی کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) کے اندر تقابل  $F(\rho, \phi, z) = \rho$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 65: ٹھوس گیند  $r \leq 1$  میں تقابل  $F(r, \theta, \phi) = r$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 66: بالائی نصف ٹھوس کرہ  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ،  $r \leq 1$  میں تقابل  $F(r, \theta, \phi) = r \cos \theta$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

### کمیت، معیار اثر، اور وسطانی مرکز

سوال 67: نیچے سے مستوی  $z = 0$ ، اوپر سے مخروط  $z = \rho$ ،  $\rho \geq 0$ ، اور اطراف سے بیلن  $\rho = 1$  میں ملفوف مستقل کثافت کے ٹھوس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 68: ٹنن اول میں اوپر سے مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، نیچے سے مستوی  $z = 0$ ، اور اطراف سے بیلن  $x^2 + y^2 = 4$  اور مستویات  $x = 0$  اور  $y = 0$  میں ملفوف خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 69: اس ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو سوال 38 میں دیا گیا ہے۔



سوال 70: اوپر سے کرہ  $r = a$  اور نیچے سے مخروط  $\theta = \frac{\pi}{4}$  کے بیچ ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 71: اوپر سے سطح  $z = \sqrt{\rho}$ ، نیچے سے مستوی  $xy$ ، اور اطراف سے بیلن  $\rho = 4$  میں ملفوف ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 72: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو نصف مستویات  $\phi = -\pi/3, \rho \geq 0$  اور  $\phi = \pi/3, \rho \geq 0$  ٹھوس گیند  $\rho^2 + z^2 \leq 1$  سے کاٹتے ہیں۔

سوال 73: قائمہ دائری موٹی دیوار کے بیلن کی اندرونی سطح بیلن  $\rho = 1$  اور بیرونی سطح بیلن  $\rho = 2$  ہیں۔ اس کا نچلا سر مستوی  $z = 0$  اور بالائی سر مستوی  $z = 4$  میں پایا جاتا ہے۔ محور  $z$  کے لحاظ سے اس کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں (لیں  $\delta = 1$ )۔



جوابات



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم





ضمیمہ ج

ضمیمہ تین



ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چھ





ضمیمہ ز

ضمیمہ سات



ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

