احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xi

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 14
1.3 تفاعل 30
1.4 ترسیم کی منتقلی 52
1.5 تکونیاتی تفاعل 72

2 حدود اور استمرار 93
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 93
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 110
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف 123
2.4 تصور حد کی توسیع 143
2.5 استمرار 163
2.6 مماسی خط 181

3 تفرق 195
3.1 تفاعل کا تفرق 195
3.2 قواعد تفرق 217
3.3 تبدیلی کی شرح 236
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 253
3.5 زنجیری قاعدہ 274
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 291
3.7 دیگر شرح تبدیلی 308

4 تفرق کا استعمال 323
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں . . . 323
4.2 مسئلہ اوسط قیمت . . . 337
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ . . . 353
4.3.1 پرکھ . . . 353
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم . . . 365
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء . . . 388
4.6 بہترین بنانا . . . 415
4.7 خط بندی اور تفرقات . . . 439
4.8 ترکیب نیوٹن . . . 460

5 تکمل 471
5.1 غیر قطعی تکملات . . . 471
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی . . . 483
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق . . . 499
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ . . . 511
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات . . . 527
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ . . . 555
5.7 بنیادی مسئلہ . . . 571
5.8 قطعی تکمل میں بدل . . . 592
5.9 اعدادی تکمل . . . 598
5.10 قاعدہ ذوزنقہ . . . 598

6 تکمل کا استعمال 617
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ . . . 617
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد . . . 621
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش . . . 632
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا . . . 639
6.4 نلکی چھلے . . . 654
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں . . . 667
6.6 سطح طواف کا رقبہ . . . 677
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت . . . 689
6.7.1 وسطانی مرکز . . . 701
6.8 کام . . . 706
6.9 فشار سیال اور قوت سیال . . . 720
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال . . . 730

7 ماورائی تفاعل 743
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات . . . 744

7.2 قدرتی لوگارتھم . . . 762
7.3 قوت نمائی تفاعل . . . 779
7.4 a^x اور $\log_a x$ . . . 794
7.5 افزائش اور تنزل . . . 805
7.6 قاعدہ لھوپیٹال . . . 819
7.7 اضافی شرح نمو . . . 835
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش . . . 840
7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل . . . 846
7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل . . . 862
7.10 ہذلولی تفاعل . . . 879
7.11 یک رتبی تفرقی مساوات . . . 900
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان . . . 918

8 تکمل کے طریقے 929
8.1 تکمل کے بنیادی کلیات . . . 929
8.2 تکمل بالحصص . . . 945
8.2.1 بار بار استعمال . . . 950
8.3 جزوی کسر . . . 959
8.4 تکونیاتی بدل . . . 974
8.5 جدول تکمل اور کمپیوٹر . . . 986
8.6 غیر مناسب تکمل . . . 1003

9 لامتناہی تسلسل 1029
9.1 اعداد کی ترتیب کی حد . . . 1029
9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے . . . 1048
9.3 لامتناہی تسلسل . . . 1064
9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ . . . 1083
9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ . . . 1093
9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ . . . 1103
9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز . . . 1115
9.8 طاقتی تسلسل . . . 1129
9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل . . . 1145
9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے . . . 1156
9.11 طاقتی تسلسل کے استعمال . . . 1175

10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد 1195
10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں . . . 1195
10.2 سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی . . . 1220

10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا 1230
10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول 1244
10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات 1260
10.6 قطبی محدد 1274
10.7 قطبی محدد میں ترسیم 1286
10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات 1300
10.8.1 دائرے 1301
10.9 قطبی محدد میں تکمل 1315

11 سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری 1329
11.1 مستوی میں سمتیات 1329
11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات 1345
11.2.1 کرہ 1353
11.3 ضرب نقطہ 1363
11.3.1 حساب 1364
11.4 صلیبی ضرب 1378
11.5 فضا میں خطوط اور مستویات 1393
11.6 نلکی اور مربع سطحیں 1408
11.7 نلکی اور کروی محدد 1426

12 سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت 1437
12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات 1437
12.2 گولا کی حرکت کی نمونہ کشی 1460
12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ 1469
12.4 انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ 1478
12.5 فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت 1499

13 کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات 1515
13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل 1515
13.2 حد اور استمرار 1530
13.3 جزوی تفرقات 1545
13.4 تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات 1562
13.5 زنجیری قاعدہ 1579
13.6 پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات 1594
13.7 رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں 1601
13.8 انتہائی قیمتیں اور نقاط زین 1622
13.8.1 نتیجہ 1631
13.9 لیگرینج ضاربین 1640
13.10 کلیہ ٹیلر 1657

14 تکمل بالکثرت 1665
14.1 دوہرا تکملات 1665
14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت 1685
14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ 1701
14.4 کارتیسی محدد میں تہرا تکمل 1712
14.5 تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر 1727
14.6 نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل 1736
14.7 تکملات بالکثرت میں بدل 1756

15 سمتی میدان میں تکمل 1763
15.1 خطی تکمل 1763
15.1.1 جمع پذیری 1765

جوابات 1769

ا ضمیمہ اول 1791

ب ضمیمہ دوم 1793

ج ضمیمہ تین 1795

د ضمیمہ چار 1797

ھ ضمیمہ پانچ 1799

و ضمیمہ چھ 1801

ز ضمیمہ سات 1803

ح ضمیمہ آٹھ 1805

ط ضمیمہ آٹھ 1807

ي تکملات کا مختصر جدول 1809

فرہنگ 1821

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

14.1 دوہرا تکملات

ہم xy مستوی میں محدود خطہ پر استمراری تفاعل $f(x,y)$ کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دو گنّا) تکمل اور باب 5 میں متعارف کردہ ایک گنّا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنّا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جا سکتی ہے۔

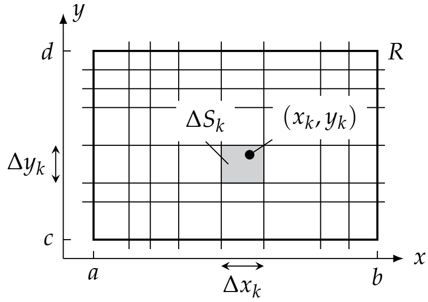
مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل $f(x,y)$ درج ذیل مستطیل خطہ R میں معین ہے۔

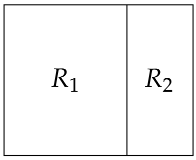
$$R: \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

ہم تصور میں R پر x اور y محور کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو R کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.1)۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ ΔS_k میں ایک نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ J_n لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k \tag{14.1}$$



شکل 14.1: خطہ R کو مستطیل جال چھوٹے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے رقبے $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ہوں گے۔



$$\iint\limits_{R_1 \cup R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

شکل 14.2: دوہرا تکملات بھی ایک گنا تکملات کی طرح مجموعیت دائرہ کار کی خاصیت رکھتے ہیں۔

اگر پورے R میں f استمراری ہو، تب، ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ Δx اور Δy دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے سے مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو R پر f کا **دوہرا تکمل**[1] کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \quad \text{یا} \quad \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \tag{14.2}$$

واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات $[a,b]$ اور $[c,d]$ کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات 14.2 میں حد کی قیمت، نا تو رقبات ΔS_k کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر ΔS_k میں نقطہ (x_k, y_k) کے مقام پر منحصر ہو گی۔ انفرادی مجموعات J_n کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کا حد آخر میں وہی ایک ہو گا۔ استمراری f کے لئے اس حد کی وجودیت اور یکتائی کے ثبوت اعلٰی نصاب میں دیے جاتے ہیں۔ دوہرا تکمل کی وجودیت کے لئے f کا استمرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

دوہرا تکملات کے خواص

ایک گنا تکملات کی طرح، دوہرا تکملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لئے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

ا. $\iint\limits_R kf(x,y)\,\mathrm{d}S = k\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

[1] double integral

ب. $\iint\limits_R (f(x,y) \mp g(x,y))\,\mathrm{d}S = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \mp \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$

ج. اگر R پر $f(x,y) \geq 0$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \geq 0$ ہو گا۔

د. اگر R پر $f(x,y) \geq g(x,y)$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \geq \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$ ہو گا۔

یہ خواص ایک گنّا تکملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ 5.6)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

ھ. $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$

جہاں ایک دوسرے کو نا ڈھانپنے والے مستطیل R_1 اور R_2 خطوں کا اشتراک R ہے (شکل 14.2)۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا تکملات بطور حجم

مثبت $f(x,y)$ کی صورت میں ہم مستطیل خطہ R پر f کے دوہرا تکمل کو ٹھوس منشور نما کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی نچلا سطح R اور بالائی سطح $z = f(x,y)$ ہو گی (شکل 14.3)۔ مجموعہ $J_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta S_k$ میں ہر رکن $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ ایک انتصابی مستطیلی منشور نما کا حجم ہو گا جو بنیاد ΔS_k پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینی قیمت ہو گی۔ یوں مجموعہ J_n پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمین ہو گی۔ اس حجم کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{حجم} = \lim J_n = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \tag{14.3}$$

جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج، باب 6 میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔

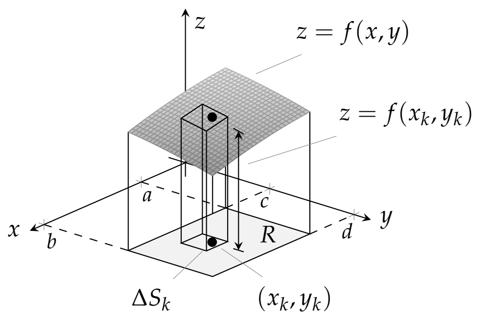
دوہرا تکمل کے حصول کا مسئلہ فوبنی

فرض کریں ہم مستوی xy میں مستطیل خطہ $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر مستوی $z = 4 - x - y$ کے نیچے حجم تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ 6.2 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور x کے عمودی ٹکیاں لیں (شکل 14.4) تب حجم

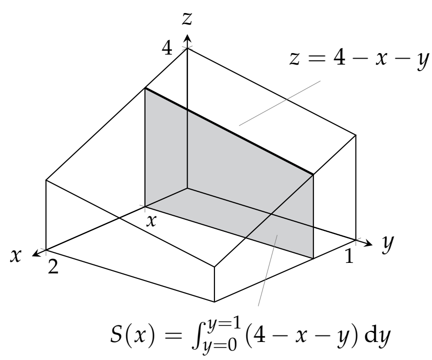
$$\int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.4}$$

ہو گا جہاں x پر رقبہ عمودی تراش $S(x)$ ہے۔ہم x کی ہر قیمت کے لئے درج ذیل تکمل سے $S(x)$ معلوم کر سکتے ہیں

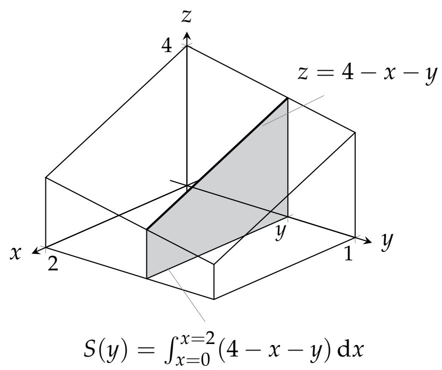
$$S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \tag{14.5}$$



شکل 14.3: ٹھوس جسم کو تخمینی طور پر متعدد مستطیل منشور نما سے ظاہر کرتے ہوئے ہم زیادہ عمومی منشور نما کے حجم کو بطور دوہرا تکمل تعین کر سکتے ہیں۔ یہاں منشور کا حجم R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمل ہو گا۔



شکل 14.4: رقبہ عمودی تراش $S(x)$ حاصل کرنے کے لئے ہم x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔



شکل 14.5: رقبہ عمودی تراش $S(y)$ حاصل کرنے کے لئے ہم y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

جو منحنی $z = 4 - x - y$ کے نیچے، x پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہو گا۔ رقبہ $S(x)$ کے حصول میں x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 14.3 اور مساوات 14.4 کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\text{حجم} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\frac{7}{2} - x \Big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5
\end{aligned}
\tag{14.6}
$$

اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$
\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
$$

دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ، جسے **بارہا تکمل**[2] یا **اعادہ تکمل**[3] کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں اور اس کے بعد y کو مستقل ٹھراتے ہوئے، x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔

اگر ہم محور y کے عمودی ٹکیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا (شکل 14.5)؟ ایسی صورت میں ایک علامتی عمودی تراش رقبہ، y کا تفاعل ہو گا:

$$
S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y
\tag{14.7}
$$

یوں پورے جسم کا حجم

$$
\text{حجم} = \int_{y=0}^{y=1} S(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)\,\mathrm{d}y = \Big[6y - y^2 \Big]_0^1 = 5
\tag{14.8}
$$

ہو گا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

ہم اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$
\text{حجم} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

---

[2] repeated integral
[3] iterated integral

لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔ اس کے بعد x کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں۔ اس بار ہم بارہا تکمل کے حصول میں پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں جو مساوات 14.6 میں تکمل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر درج ذیل دوہرا تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint_R (4 - x - y)\,\mathrm{d}S$$

اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں تکمل اس دوہرا تکمل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا تکمل، کسی بھی ترتیب سے، بارہا تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (جناب فوبنی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

مسئلہ 14.1: مسئلہ فوبنی (پہلا روپ)
اگر مستطیل خطہ $R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ پر $f(x, y)$ استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

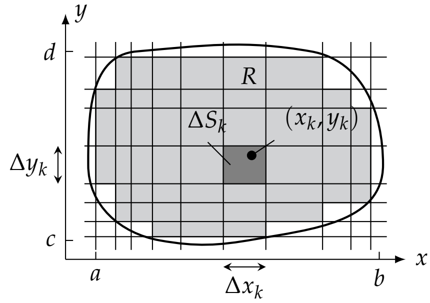
مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں دوہرا تکمل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے لحاظ سے تکمل لے سکتے ہیں۔

مسئلہ فوبنی مزید کہتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بارہا تکمل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کار آمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم مثال 14.3 میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم x محور یا y محور کے عمودی سطحیں لے کر ٹکیاں کاٹ سکتے ہیں۔

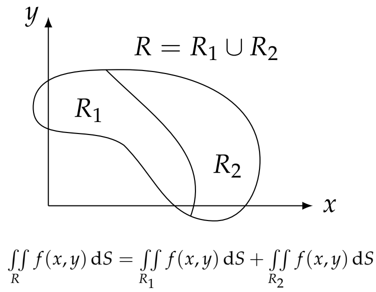
مثال 14.1: خطہ $R : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ میں $f(x, y) = 1 - 6x^2y$ کے دوہرا تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: مسئلہ فوبنی کے تحت درج ذیل ہو گا:

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{-1}^{1}\int_0^2 (1 - 6x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \Big[x - 2x^3y\Big]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^{1} (2 - 16y)\,\mathrm{d}y = \Big[2y - 8y^2\Big]_{-1}^{1} = 4$$



شکل 14.6: غیر مستطیل محدود خطہ کو مستطیل جال سے خانہ بند کیا گیا ہے۔



شکل 14.7: مستطیل خطہ کی مجموعیت کی خاصیت ان غیر مستطیل خطوں کے لئے بھی کارآمد ہے جن کی پوری سرحد استمراری منحنیات سے بنی ہو۔

تکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \Big[y - 3x^2y^2\Big]_{y=-1}^{y=1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \Big[(1-3x^2)-(-1-3x^2)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2\,\mathrm{d}x = 4\end{aligned}$$

□

آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا تکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسما[4] میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

درکار دوہرا تکمل	میکسما احکامات
$\iint x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	integrate(integrate($x^2 * y, x$), y);
$\int_{-\pi/3}^{\pi/4}\int_0^1 x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	integrate(integrate($x*\cos(y), x, 0, 1$), y, $-\%pi/3, \%pi/4$);

محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات

محدود غیر مستطیل خطہ پر تفاعل $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی R پر مستطیل جال بچھاتے ہیں (شکل 14.6) لیکن جزوی مجموعہ میں صرف ان چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہیں۔ ہم

[4] wxMaxima

ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ ΔS_k میں کوئی نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

اس مجموعہ میں اور مستطیل خطے پر مجموعہ (مساوات 14.1) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام ΔS_k مل کر خطہ R کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے ہیں۔البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو، J_n میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور R کا زیادہ سے زیادہ حصہ J_n میں شامل ہو گا۔ اگر f استمراری ہو اور R کی سرحد، متغیر x کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل اور (یا) متغیر y کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کی ترسیمات، ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر مختارانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ J_n کا حد موجود ہو گا۔ ہم اس حد کو R پر f کا **دوہرا تکمل** کہتے ہیں:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S\to 0}\sum f(x_{,}y_k)\Delta S_k$$

یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

غیر مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کے دوہرا تکملات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی ہے کہ اگر R کو ایسے دو خطوں R_1 اور R_2 میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہوں (مثال کے لئے شکل 14.7 دیکھیں) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

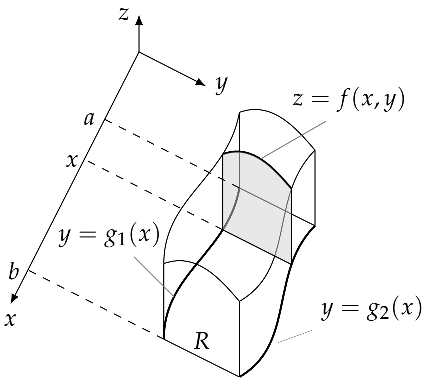
ہم R پر استمراری اور مثبت f کی صورت میں R اور $z = f(x,y)$ کے بیچ ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کرتے ہیں۔

اگر شکل 14.8 میں مستوی xy میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کی "بالائی" حد $y = g_2(x)$ ، "زیریں" حد $y = g_1(x)$ ، اور اطراف کے حدود خط $x = a$ اور خط $x = b$ ہوں تب ہم حجم H کو ٹکیوں کی ترکیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے رقبہ عمودی تراش تلاش کرتے ہیں

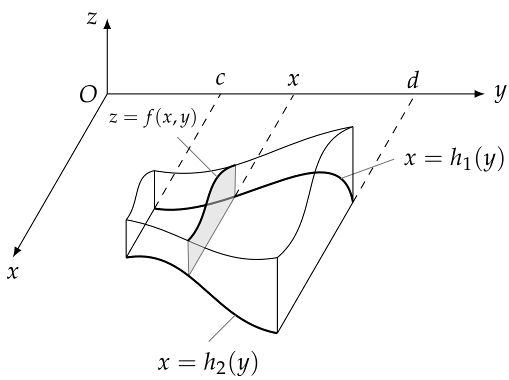
$$S(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

اور اس کے بعد $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیتے ہوئے بارہا تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{14.9}$$



شکل 14.8: سایہ دار انتصابی ٹکیہ کا رقبہ $S(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کرنے کے لئے ہم $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیں گے۔



شکل 14.9: سایہ دار ٹکیہ کا رقبہ $S(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ ہے۔
ٹھوس جسم کا حجم $\int_c^d S(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔

اسی طرح اگر شکل 14.9 میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کے حدود $x = h_2(y)$ ، $x = h_1(y)$ اور خط $y = c$ اور $y = d$ ہوں تب ٹکیوں کی ترکیب سے بارہا تکمل سے حجم تلاش کیا جا سکتا ہے:

$$H = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.10}$$

ہم نے دیکھا کہ مساوات 14.9 اور مساوات 14.9، جو R پر f کے دوہرا تکمل ہیں، دونوں حجم دیتے ہیں۔ اس کی وجہ مسئلہ فوبنی کی درج ذیل زیادہ مضبوط صورت ہے۔

مسئلہ 14.2: **مسئلہ فوبینی (مضبوط روپ)**
فرض کریں خطہ R پر f استمراری ہے۔

ا. اگر R کو $a \le x \le b$ ، $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[a,b]$ پر g_1 اور g_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ب. اگر R کو $c \le y \le d$ ، $h_1(y) \le y \le h_2(y)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[c,d]$ پر h_1 اور h_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

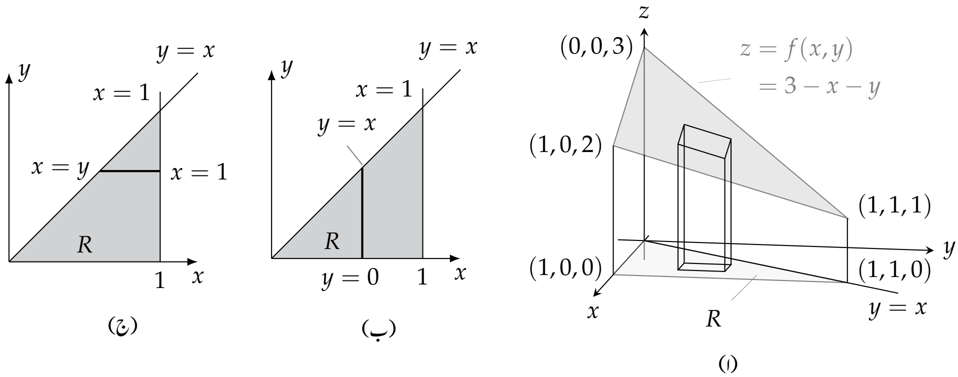
$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

مثال 14.2: ایک منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں ایک مثلث ہو، جس کے اضلاع محور x ، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ ہوں اور جس کا راس درج ذیل مستوی میں پایا جاتا ہو، کا حجم تلاش کریں۔

$$z = f(x,y) = 3 - x - y$$

حل: ہم دیکھتے ہیں (شکل 14.10-ا) کہ 0 اور 1 تک کسی بھی x کے لئے y کی قیمت $y = 0$ تا $y = x$ ہو گی (شکل 14.10-ب)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}H &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[3y - xy - \frac{y^2}{2}\Big]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \Big(3x - \frac{3x^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\Big]_{x=0}^{x=1} = 1\end{aligned}$$



شکل 14.10: منشور کا حجم (مثال 14.2)

تکملات کی ترتیب الٹ کرنے سے درج ذیل ہو گا (شکل 14.10-ج)۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1 \end{aligned}$$

دونوں تکملات کے جواب ایک جیسے ہیں۔ہمیں یہی توقع تھی۔ □

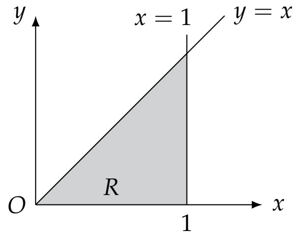
اگرچہ مسئلہ فوبنی ہمیں یقین دھیانی کرتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل میں کسی بھی ترتیب سے تکملات لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے، حقیقت میں ایک تکمل کا حصول دوسرے سے آسان ہو سکتا ہے۔ اگلی مثال میں آپ ایسی صورت حال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.3: مستوی xy میں محور x ، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}S$$

حل: تکمل کا خطہ شکل 14.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لیں تب

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(y\frac{\sin x}{x}\right]_{y=0}^{y=x}\Big) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(1) + 1 \approx 0.46 \end{aligned}$$



شکل 14.11: تکمل کا دائرہ کار برائے مثال 14.3

ہو گا۔اگر ہم تکمل لینے کی ترتیب الٹ کریں تب

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہو گا اور چونکہ $\int ((\sin x)/x)\,\mathrm{d}x$ کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہیں۔

قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں کہ کس ترتیب سے تکمل لینے سے ہمیں آسانی ہو گی لہٰذا اس پر زیادہ مت سوچیں اور کسی ایک ترتیب سے حل کرنے کی کوشش کریں اور اگر مشکلات پیش آئیں تب تکمل کی ترتیب الٹ کر کے دوبارہ کوشش کریں۔ □

تکمل کی حدوں کی تلاش

دوہرا تکمل کی قیمت کے حصول میں سب سے مشکل کام تکمل کی حدیں تلاش کرنا ہو سکتا ہے۔ خوش قسمتی سے ایک اچھا طریقہ کار موجود ہے جس پر ہم چل سکتے ہیں۔

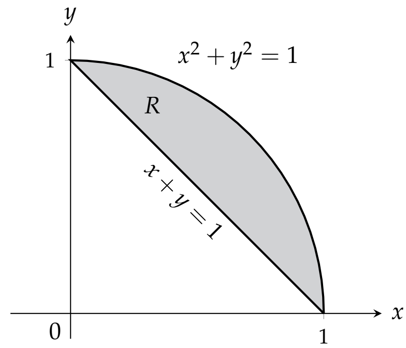
تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار

(ا) خطہ R پر $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لینے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

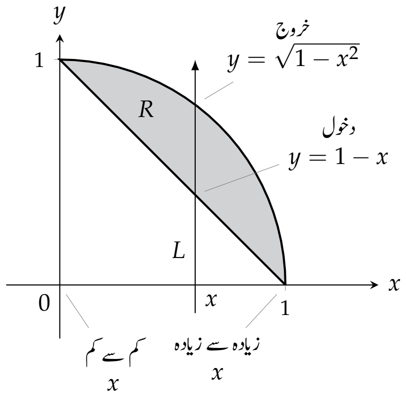
1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.12-ا)۔

2. تکمل کی y حدیں: بڑھتی y رخ خطہ R سے گزرتا ہوا انتصابی خط L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی y حدیں ہوں گی (شکل 14.12-ب)۔

3. تکمل کی x حدیں: متغیر x کی وہ قیمتیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام انتصابی لکیریں شامل ہوں (شکل 14.12-ب)۔ یہ قیمتیں تکمل کی x حدیں ہوں گی۔



(ا) تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں۔



(ب) خطہ R میں جس نقاط پر انتصابی لکیر داخل اور خارج ہوتی ہے، ان کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے y حد ہوں گے۔ تمام انتصابی لکیروں کو شامل کرنے والے x حدود کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے x حد ہوں گے۔

شکل 14.12: تکمل کے حدوں کی تلاش۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

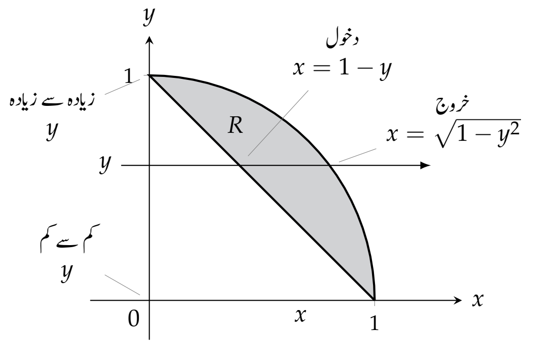
(ب) اسی دوہرا تکمل کو بطور بارہا تکمل حل کرتے ہوئے، ترتیب الٹ کرنے سے، انتصابی لکیروں کی بجائے افقی لکیریں استعمال کریں (شکل 14.13)۔ تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

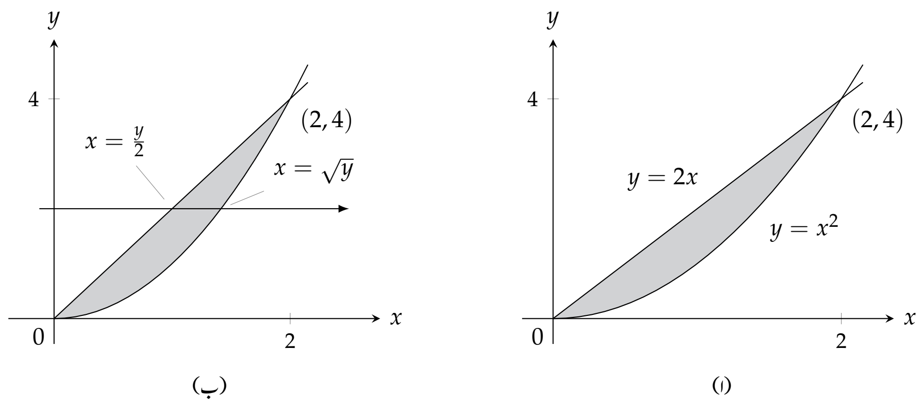
مثال 14.4: درج ذیل تکمل کے خطہ تکمل کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے اس کا مساوی تکمل لکھیں۔

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل: تکمل کا خطہ، عدم مساوات $x^2 \le y \le 2x$ اور $0 \le x \le 2$ دیتے ہیں۔ یوں اس خطہ کی حدیں، خط $x = 0$ ، خط $x = 2$ اور منحنیات $y = x^2$ اور $y = 2x$ ہوں گی (شکل 14.14-ا)۔



شکل 14.13: بارہا تکمل میں ترتیب الٹ کرنے سے R پر افقی لکیریں کھینچی جائیں گی۔



شکل 14.14: دو منحنیات کے بیچ خطہ (مثال 14.4)

تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے ہم اس خطہ پر افقی لکیریں کھینچتے ہیں۔ یہ لکیریں اس خطہ میں $x = \frac{y}{2}$ پر داخلی ہوتی ہیں اور $x = \sqrt{y}$ پر اس سے خارج ہوتی ہیں۔ ان تمام افقی لکیریں کو شامل کرنے کے لئے ہمیں $y = 0$ سے $y = 4$ تک لینا ہو گا (شکل 14.14-ب)۔ یوں متبادل تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ان دونوں تکملات کے جواب 8 ہے۔ □

سوالات

تکمل کے خطہ کی تلاش اور دوہرا تکملات

سوال 14.1 تا سوال 14.10 میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.1: $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.2: $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.3: $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.4: $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x+\cos y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.5: $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.6: $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.7: $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.8: $\int_1^2 \int_y^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.9: $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.10: $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.11 تا سوال 14.16 میں f کو دیے ہوئے خطہ پر تکمل کریں۔
سوال 14.11: ربع اول میں لکیر $y = x$ ، $y = 2x$ ، $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ خطہ پر تفاعل $f(x, y) = \frac{x}{y}$ کا تکمل۔

سوال 14.12: چکور $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ پر تفاعل $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ کا تکمل۔

سوال 14.13: مثلث خطہ جس کے راس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ اور $(0, 1)$ ہیں میں تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کا تکمل۔

سوال 14.14: مستطیل $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$ پر تفاعل $f(x, y) = y \cos xy$ کا تکمل۔

سوال 14.15: مستوی uv کے ربع اول میں لکیر $u + v = 1$ کے نیچے تفاعل $f(u, v) = v - \sqrt{u}$ کا تکمل۔

سوال 14.16: مستوی st کے ربع اول میں منحنی $s = \ln t$ کے اوپر جانب $t = 1$ سے $t = 2$ تک تفاعل $f(s, t) = e^s \ln t$ کا تکمل۔

سوال 14.17 تا سوال 14.20 میں تکملات دیے گئے ہیں۔ ان تکملات کے خطوں کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 14.17: $\int_{-2}^{0} \int_{v}^{-v} 2 \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}v$ مستوی pv

سوال 14.18: $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s$ مستوی st

سوال 14.19: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{0}^{\sec t} 3 \cos t \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t$ مستوی tu

سوال 14.20: $\int_{0}^{3} \int_{-2}^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$ مستوی uv

تکمل کی الٹ ترتیب

سوال 14.21 تا سوال 14.30 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر معادل الٹ ترتیب کا تکمل لکھیں۔

سوال 14.21: $\int_{0}^{1} \int_{2}^{4-2x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.22: $\int_{0}^{2} \int_{y-2}^{0} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.23: $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.24: $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.25: $\int_0^1 \int_1^{e^x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.26: $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.27: $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.28: $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.29: $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.30: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

دوہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 14.31 تا سوال 14.40 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی ترتیب تعین کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.31: $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.32: $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.33: $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.34: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.35: $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.36: $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^{1} e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.37: $\int_0^{1/16}\int_{y^{1/4}}^{1/2}\cos(16\pi x^5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.38: $\int_0^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{y^4+1}$

سوال 14.39: $\iint\limits_R (y-2x^2)\,\mathrm{d}S$ جہاں R چکور $|x|+|y|=1$ کا اندرونی خطہ ہے۔

سوال 14.40: $\iint\limits_R xy\,\mathrm{d}S$ جہاں لکیر $y=x$ ، $y=2x$ اور $x+y=2$ کے بیچ خطہ R ہے۔

سطح $z=f(x,y)$ کے نیچے حجم

سوال 14.41: مستوی xy میں لکیر $y=x$ ، $x=0$ اور $x+y=2$ کے بیچ مثلث کے اور قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ کے نیچے خطہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.42: ایک ٹھوس جسم اوپر سے بیلن $z=x^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں لکیر $y=x$ اور قطع مکافی $y=2-x^2$ کے بیچ مثلث خطہ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.43: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ مستوی xy میں لکیر $y=3x$ اور قطع مکافی $y=4-x^2$ کے بیچ خطہ ہے جبکہ اس کا بالائی سر مستوی $z=x+4$ پر مشتمل ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.44: ثُمن اول میں محددی مستویات، بیلن $x^2+y^2=4$ اور مستوی $z+y=3$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.45: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x=3$ اور قطع مکافی بیلن $z=4-y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.46: ثُمن اول سے سطح $z=4-x^2-y$ ایک ٹھوس جسم کاٹتی ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.47: ثُمن اول سے بیلن $z=12-3y^2$ اور مستوی $x+y=2$ ایک پچر کاٹتے ہیں۔ اس پچر کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.48: چکور ستون $|x|+|y|\le 1$ سے مستویات $z=0$ اور $3x+z=3$ جس ٹھوس جسم کو کاٹتے ہیں اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.49: ایک ٹھوس جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = 2$ اور $x = 1$، اطراف سے بیلن $y = \mp\frac{1}{x}$، اوپر سے مستوی $z = x + 1$ اور نیچے سے مستوی $z = 0$ میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.50: ایک جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = \pm\frac{\pi}{3}$، اطراف سے بیلن $y = \mp \sec x$، اوپر سے بیلن $z = 1 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

غیر محدود خطوں پر تکملات

سوال 14.51 تا سوال 14.54 میں غیر مناسب تکملات کو بارہا تکمل تصور کرتے ہوئے ان کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.51: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.52: $\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.53: $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.54: $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

دوہرا تکملات کی تخمین

سوال 14.55 اور سوال 14.56 میں تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کے خطہ R کو انتصابی خط $x = a$ اور افقی خط $y = c$ خانہ بند کرتی ہیں۔ ہر ذیلی مستطیل میں دکھائے گئے (x_k, y_k) لیتے ہوئے درج ذیل تخمین استعمال کر کے دوہرا تکملات کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

سوال 14.55: تفاعل $f(x,y) = x + y$ اور خطہ R، جو نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ اور محور x کے بیچ ہے۔ خانہ بندی $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ اور $y = 0, 1/2, 1$ لیں۔ نقطہ (x_k, y_k) کو k واں خانے کا نچلا بایاں کونا لیں بشرطیکہ یہ مستطیل R کے اندر پایا جاتا ہو۔

سوال 14.56: تفاعل $f(x,y) = x + 2y$ ہے جبکہ اور دائرہ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ کا اندرونی خطہ R ہے۔ خانہ بندی $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ اور $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ لیں۔ بشرطیکہ k واں مستطیل R میں پایا جاتا ہو، k ویں مستطیل کے وسطانی مرکز کو (x_k, y_k) لیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.57: قرص $x^2 + y^2 \le 4$ کو شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے چھوٹے ٹکڑے پر $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2}$ کا تکمل لیں۔

سوال 14.58: لا متناہی مستطیل $2 \le x \le \infty, 0 \le y \le 2$ پر $f(x,y) = \frac{1}{(x^2-x)(y-1)^{2/3}}$ کا تکمل لیں۔

سوال 14.59: ایک ٹھوس (غیر دائری) قائمہ بیلن کا قاعدہ xy مستوی ہے جبکہ اس کی بالائی سرحد قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ ہے۔ اس بیلن کا حجم

$$H = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہے۔ خطہ R کا خاکہ بنائیں اور بیلن کے حجم کو، تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے، ایک بارہا تکمل کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔

سوال 14.60: درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کو ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔)

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x)\,\mathrm{d}x$$

سوال 14.61: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟

$$\iint\limits_R (4 - x^2 - 2y^2)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.62: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟

$$\iint\limits_R (x^2 + y^2 - 9)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.63: کیا استمراری تفاعل $f(x,y)$ کا مستوی xy میں مستطیل خطہ پر تکمل کی ترتیب بدلتے ہوئے مختلف نتائج کا حصول ٹھیک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ بتائیں۔

سوال 14.64: ایک مثلث جس کے راس $(0,1)$ ، $(2,0)$ اور $(1,2)$ ہوں پر استمراری تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت درکار ہے۔ آپ یہ قیمت کیسے حاصل کریں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.65: درج ذیل تعلق کو ثابت کریں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

سوال 14.66: درج ذیل غیر مناسب تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1\int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 14.67 تا سوال 14.70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے اعدادی تراکیب سے دوہرا تکملات کی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال 14.67: $\int_1^3\int_1^x \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.68: $\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.69: $\int_0^1\int_0^1 \tan^{-1} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.70: $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت

اس حصہ میں دوہرا تکملات استعمال کرتے ہوئے مستوی میں محدود خطوں کے رقبات اور ان خطوں پر باریک چادروں کی کمیت، معیار اثر، مرکز کمیت، اور **حرکت دواری**[5] کے رداس معلوم کرنا دکھایا جائے گا۔ ان کا حساب باب 6 کے حساب کی طرح ہو گا لیکن اب ہم زیادہ قسم کے اشکال کے لئے حساب کر پائیں گے۔

[5] gyration

مستوی میں محدود خطوں کے رقبات

گزشتہ حصہ میں خطہ R پر دوہرا تکمل کی تعریف میں $f(x, y) = 1$ لینے سے جزوی مجموعات کی تخفیف شدہ صورت

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \tag{14.11}$$

حاصل ہو گی۔ یہ تخمینی طور پر R کا رقبہ ہو گا۔ جوں جوں شکل 14.15 میں Δx اور Δy صفر کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں توں توں R کے زیادہ سے زیادہ حصہ کو تمام ΔS_k مل کر کو ڈھانپتے ہیں، اور ہم R کی رقبہ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\text{رقبہ} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{14.12}$$

تعریف: بند محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{14.13}$$

□

اس باب کے دیگر تعریفات کی طرح، رقبے کی یک متغیری تعریف کے لحاظ سے، جو ہم پہلے پیش کر چکے ہیں، موجودہ تعریف زیادہ اقسام کے خطوں پر قابل اطلاق ہو گی، لیکن، جن خطوں پر دونوں تعریفات قابل اطلاق ہوں، وہاں موجودہ تعریف گزشتہ تعریف کے عین موافق ہو گی۔

مساوات 14.13 میں دی گئی تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم R پر $f(x, y) = 1$ لیتے ہیں۔

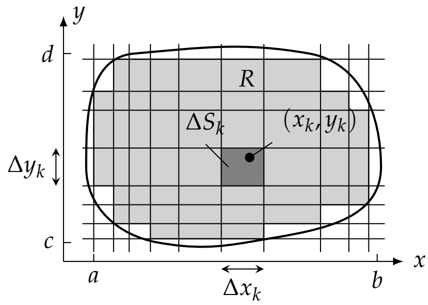
مثال 14.5: ربع اول میں $y = x$ اور $y = x^2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ (شکل 14.16) بنا کر رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

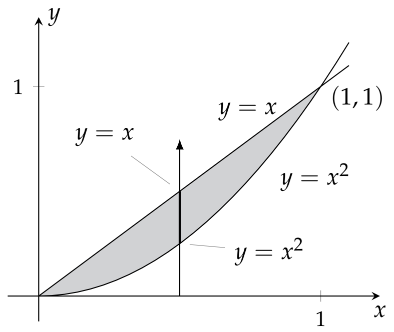
$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

□

مثال 14.6: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = x + 2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔



شکل 14.15: ایک خطہ کے رقبے کی تلاش میں پہلا قدم خطے کی اندرون کی خانہ بندی ہے۔



شکل 14.16: قطع مکافی اور لکیر کے بیچ رقبہ (مثال 14.5)۔

حل: اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب ہمیں اس خطہ کو R_1 اور R_2 میں تقسیم کر کے درج ذیل دو علیحدہ علیحدہ تکملات کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ا)۔

$$S = \iint\limits_{R_1} \mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} \mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس کے برعکس تکمل کی ترتیب الٹ کرنے سے صرف ایک تکمل

$$S = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ب)۔ ہم اسی سے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

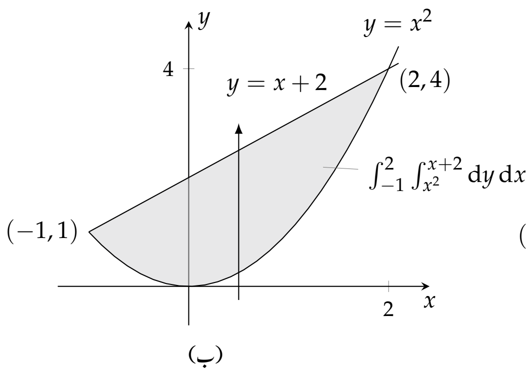
$$S = \int_{-1}^{2} \Big[y\Big]_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

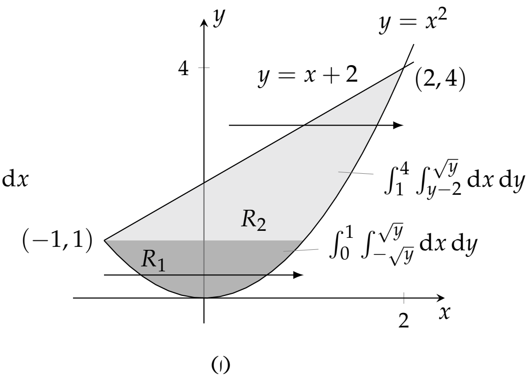
□

اوسط قیمت

بند وقفہ پر قابل تکمل واحد متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس وقفہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم لمبائی وقفہ ہو گی۔ بند اور محدود خطہ پر، جس کا رقبہ قابل ناپ ہو، معین قابل تکمل دو متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس خطہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم خطہ کا رقبہ ہو گی۔ اگر خطہ R اور تفاعل f ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\text{پر } R \text{ کی اوسط قیمت } f \;=\; \frac{1}{\text{کا رقبہ } R} \iint\limits_{R} f\,\mathrm{d}S \tag{14.14}$$





شکل 14.17: (ا) اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب رقبے کے حصول کے لئے دو تکملات کا مجموعہ درکار ہو گا۔ (ب) البتہ پہلے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے صرف ایک تکمل سے حاصل ہو گا۔

اگر خطہ R پر باریک (پتلی) چادر کی کثافت رقبہ f ہو تب R پر f کے دوہرا تکمل کو R کے رقبہ سے تقسیم کرنے سے اس چادر کی اوسط کثافت حاصل ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی رقبہ ہو گی۔ اگر نقطہ (x, y) سے مقررہ نقطہ N تک فاصلہ $f(x, y)$ ہو تب R پر f کی اوسط قیمت، N سے R کے نقاط کا اوسط فاصلہ ہو گا۔

مثال 14.7: مستطیل $R : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1$ پر $f(x, y) = x \cos xy$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: خطہ R پر f کا تکمل

$$\int_0^\pi \int_0^1 x \cos xy \,dx\,dy = \int_0^\pi \Big[\sin xy\Big]_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^\pi (\sin x - 0)\,dx = -\cos x\Big]_0^\pi 1 + 1 = 2$$

ہو گا جبکہ مستطیل R کا رقبہ π ہے۔یوں R پر f کی اوسط قیمت $\frac{2}{\pi}$ ہو گی۔ □

مراکز کمیت کے معیار اثر اول اور دوم

باریک چادروں کی کمیت اور معیار اثر تلاش کرنے کے لئے ہم باب 6 کے کلیات کی طرح کلیات استعمال کرتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ دوہرا تکمل کی بنا اب ہم زیادہ اشکال اور کثافتی تفاعل کو عمل میں لا سکتے ہیں۔ جدول میں ان کلیات درج ذیل ہیں۔

مستوی xy میں باریک چادر کی کمیت، معیار اثر اول[6]، معیار اثر دوم[7] اور رداس دوار[8] کے کلیات

کثافت: $\delta(x, y)$

کمیت: $M = \iint \delta(x, y)\,\mathrm{d}S$

معیار اثر اول: $M_x = \iint y\delta(x, y)\,\mathrm{d}S, \quad M_y = \iint x\delta(x, y)\,\mathrm{d}S$

مرکز کمیت: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر):

$$I_x = \iint y^2\delta(x, y)\,\mathrm{d}S \qquad \text{بلحاظ محور } x$$

$$I_y = \int x^2\delta(x, y)\,\mathrm{d}S \qquad \text{بلحاظ محور } y$$

$$I_L = \iint r^2(x, y)\delta(x, y)\,\mathrm{d}S, \quad (\text{جہاں } L \text{ سے } (x, y) \text{ کا فاصلہ } r(x, y) \text{ ہے}) \qquad \text{بلحاظ خط } L$$

$$I_0 = \int (x^2 + y^2)\delta(x, y)\,\mathrm{d}S = I_x + I_y \qquad \text{(قطبی معیار اثر) بلحاظ مبدا}$$

رداس دوار:

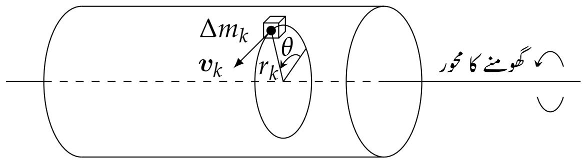
$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} \qquad \text{بلحاظ محور } x$$

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} \qquad \text{بلحاظ محور } y$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}} \qquad \text{بلحاظ مبدا}$$

---

first moment[6]
second moment[7]
radius of gyration[8]



شکل 14.18: گھومتے ہوئے دھرے میں ذخیرہ توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو متعدد چھوٹے کمیتوں میں تقسیم کر کے ہر تمام چھوٹے کمیتوں کی حرکی توانائی کا مجموعہ لیتے ہیں۔

ان کلیات کا استعمال مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے گا۔

معیار اثر اول M_x اور M_y اور معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر) I_x اور I_y میں ریاضیاتی فرق یہ ہے کہ معیار اثر دوم "بیرم کے بازوؤں" کے فاصلوں، x اور y ، کا مربع لیتا ہے۔

معیار اثر I_0 کو **قطبی معیار اثر**[9] بھی کہتے ہیں۔ کمیتی کثافت $\delta(x, y)$ (کمیت فی اکائی رقبہ) ضرب $x^2 + y^2$ ، جو نمائندہ نقطہ (x, y) سے مبدا تک فاصلہ ہے، کا تکمل قطبی معیار اثر کہلاتا ہے۔ چونکہ $I_0 = I_x + I_y$ ہے لہٰذا ان میں سے کسی دو کے حصول کے بعد تیسرے کو اس تعلق سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ (معیار اثر I_0 بعض اوقات I_z لکھا جاتا اور بلحاظ محور z معیار اثر کہلاتا ہے۔ تب تماثل $I_z = I_x + I_y$ **مسئلہ عمودی محور**[10] کہلاتا ہے۔)

رداس دوار R_x کی تعریف درج ذیل مساوات ہے۔

$$I_x = MR_x^2$$

رداس دوار ہمیں بتاتا ہے کہ محور x کتنا دور پوری چادر کی کمیت منجمد کرتے ہوئے وہی I_x حاصل ہو گا۔ رداس دوار استعمال کرتے ہوئے ہم معیار اثر کو کمیت اور لمبائی کی صورت میں لکھ پاتے ہیں۔ رداس R_y اور R_0 کی تعریفات بھی اسی طرح ہیں:

$$I_y = MR_y^2, \quad I_0 = MR_0^2$$

ہم ان تعریفی مساوات کے جذر سے R_x ، R_y اور R_0 کے کلیات لکھتے ہیں۔

ہمیں معیار اثر میں کیا دلچسپی ہے؟ ایک جسم کا پہلا معیار ا اثر ہمیں ثقلی میدان میں اس جسم کے توازن اور مختلف محوروں کے لحاظ سے اس کی قوت مروڑ کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ اب اگر یہ جسم گھومتا ہوا دھرا ہو تب ہمیں اس میں ذخیرہ توانائی جاننے میں زیادہ دلچسپی ہو گی تا کہ ہم جان سکیں کہ اس کو روکنے کے لئے یا اس کو کسی خاص زاویاتی رفتار تک پہنچانے میں کتنی توانائی درکار ہو گی۔ایسی صورت میں معیار اثر دوم استعمال ہو گا۔

[9] polar moment
[10] Perpendicular Axis Theorem

اس دھرا کو متعدد چھوٹی کمیتوں Δm_k میں تقسیم کریں اور گھومنے کے محور سے k ویں کمیتی ٹکڑے کے فاصلہ کو r_k سے ظاہر کریں (شکل 14.18)۔ اگر دھرا کی زاویاتی سمتی رفتار $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ریڈیئن فی سیکنڈ ہو، تب اس ٹکڑے کا کمیتی مرکز اپنے مدار میں خطی رفتار

$$v_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_k\theta) = r_k\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_k\omega$$

سے حرکت کرے گا۔اس ٹکڑے کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k (r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k \tag{14.15}$$

ہو گی۔ دھرا کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\sum \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k \tag{14.16}$$

ہو گی۔ دھرا کو زیادہ سے زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے اس مجموعہ کی قیمت ایک حد تک پہنچتی ہے جسے تکمل

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \,\mathrm{d}m \tag{14.17}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ جزو

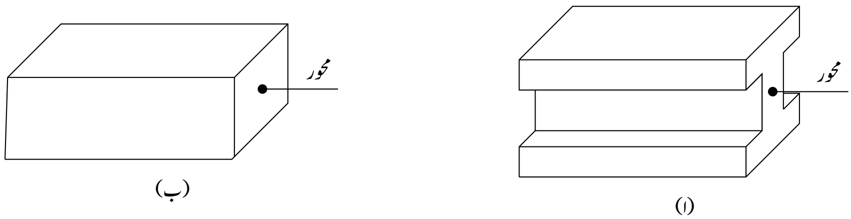
$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m \tag{14.18}$$

در حقیقت گھومنے کے محور کے لحاظ سے دھرے کا جمودی معیار اثر ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{14.19}$$

ایک دھرا، جس کا جمودی معیار اثر I ہو، کو ω زاویاتی سمتی رفتار تک پہنچانے کے لئے $\frac{1}{2}I\omega^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس رفتار پر چلتے ہوئے دھرا کو روکنے کے لئے ہمیں دھرا سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ کمیت m کی گاڑی کو سمتی رفتار v تک پہنچانے کے لئے اس کو $\frac{1}{2}mv^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس کو روکنے کے لئے اس گاڑی سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ دھرے کا جمودی معیار اثر گاڑی کی کمیت کا مماثل ہے۔ گاڑی کی رفتار تیز یا کم کرنے کو گاڑی کی کمیت مشکل بناتی ہے۔اسی طرح دھرے کی زاویاتی رفتار تیز یا کم کرنے کو دھرے کا جمودی معیار اثر مشکل بناتا ہے۔ جمودی معیار اثر کمیت کے علاوہ کمیت کی تقسیم کا بھی حساب رکھتا ہے۔

بوجھ بردار افقی دھاتی شہتیر کے جھکاو کو بھی جمودی معیار اثر تعین کرتا ہے۔ شہتیر کا اکڑا پن I ضرب ایک مستقل ہوتا ہے، جہاں شہتیر کے افقی محور کے لحاظ سے عمودی تراش کا قطبی معیار اثر I ہے۔ جمودی معیار اثر I کی قیمت جتنی زیادہ ہو، شہتیر اتنا زیادہ اکڑ ہو گا اور اتنا کم جھکے گا۔



شکل 14.19: دونوں شہتیر کا رقبہ عمودی تراش ایک جیسا ہے لیکن شہتیر-ا کا جمودی معیار اثر زیادہ ہے لہٰذا شہتیر-ا زیادہ اکڑ ہو گا۔

یہی وجہ ہے کہ ہم شکل 14.19-ا میں دکھایا گیا شہتیر استعمال کرتے ہیں نا کہ ایسے شہتیر جن کا عمودی تراش چکور ہو (شکل 14.19-ب)۔ شہتیر کے بالائی اور زیریں لگر زیادہ تر کمیت کو افقی محور سے دور رکھتے ہوئے I کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

جمودی معیار اثر کو سمجھنے کے لئے ایک تجربہ کریں۔ ایک قلم کے دونوں سروں کے ساتھ سکے چپکا کر قلم کو انگلیوں میں تیزی سے آگے پیچھے گھمائیں۔ گھومنے کا رخ تبدیل کرتے وقت آپ کو جو مزاحمت محسوس ہوتی ہے وہ جمودی معیار اثر کی بنا ہے۔ اب ان سکوں کو قلم کے سروں سے دور اور آپس میں قریب کریں۔ قلم اور سکوں کی کمیت تبدیل نہیں ہوئی ہے البتہ اس نظام کا جمودی معیار اثر کم ہو ہے۔ اب آپ دیکھیں گے کہ انہیں آگے پیچھے گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

آپ کہہ سکتے ہیں کہ معیار اثر اول کا تعلق توازن سے ہے جبکہ معیار اثر دوم کا تعلق گھومنے سے ہے۔

مثال 14.8: محور x، لکیر $x = 1$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ تکونی چادر پائی جاتی ہے۔ نقطہ (x, y) پر اس چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ ہے۔ اس چادر کی کمیت، پہلا معیار اثر، مرکز کمیت، جمودی معیار اثر اور محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دوار تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ بنا کر (شکل 14.20) اس پر اتنی معلومات درج کرتے ہیں کہ تکمل کے حد جان سکیں۔

چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[6xy + 3y^2 + 6y\Big]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (24x^2 + 12x)\,\mathrm{d}x = \Big[8x^3 + 6x^2\Big]_0^1 = 14
\end{aligned}
$$

محور x کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2\Big]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (28x^3 + 12x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[7x^4 + 4x^3\Big]_0^1 = 11
\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 10$$

مرکز کمیت کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3\Big]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[8x^5 + 4x^4\Big]_0^1 = 12
\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

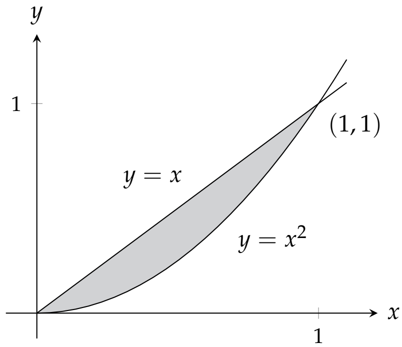
$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{39}{5}$$

ہم I_x اور I_y کی قیمتوں سے I_0 کی قیمت کلیہ $I_0 = I_x + I_y$ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

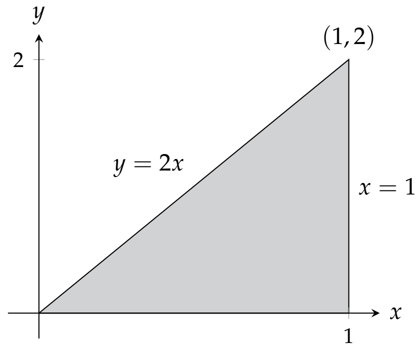
$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}$$

تین رداس دوار درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
R_x &= \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \\
R_y &= \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\Big(\frac{39}{5}\Big)/14} = \sqrt{\frac{39}{70}} \\
R_0 &= \sqrt{\frac{I_0}{M}} = \sqrt{\Big(\frac{99}{5}\Big)/14} = \sqrt{\frac{99}{70}}
\end{aligned}$$



شکل 14.21: خطہ برائے مثال 14.9



شکل 14.20: خطہ برائے مثال 14.8

□

جیومیٹریائی اشکال کے وسطانی مراکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں شمارکنندہ اور نسب نما میں موجود کثافت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے نقطہ نظر سے δ کی قیمت 1 ہو سکتی ہے۔ یوں مستقل δ کی صورت میں مرکز کمیت کا دارومدار جسم کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نا کہ جسم کے مادہ پر۔ ایسی صورت میں مرکز کمیت عموماً شکل کا **وسطانی مرکز**[11] پکارا جاتا ہے۔ وسطانی مرکز کی تلاش میں ہم $\delta = 1$ لے کر، پہلے کی طرح، معیار اثر اول کو کمیت سے تقسیم کرتے ہوئے $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کرتے ہیں۔

مثال 14.9: ربع اول میں اوپر سے لکیر $y = x$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ ایک خطہ کو محدود کرتے ہیں۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم خطے کا خاکہ بنا کر تکمل کے حد جانتے ہیں (شکل 14.21)۔ اس کے بعد $\delta = 1$ لے کر آگے بڑھتے ہیں۔

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\Big) \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big]_0^1 = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

---
[11] centroid

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم وسطانی مرکز کے محدد دریافت کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = 2, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

نقطہ $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$ اس خطے کا وسطانی مرکز ہو گا۔ □

سوالات

رقبہ بذریعہ دوہرا تکمل

سوال 14.71 تا سوال 14.78 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر اس خطے کے رقبہ کو بطور دوہرا بارہا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.71: محددی محور اور لکیر $x + y = 2$

سوال 14.72: لکیر $x = 0$ ، $y = 2x$ اور $y = 4$

سوال 14.73: قطع مکافی $x = -y^2$ اور لکیر $y = x + 2$

سوال 14.74: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $y = -x$

سوال 14.75: منحنی $y = e^x$ اور لکیر $y = 0$ ، $x = 0$ اور $x = \ln 2$

سوال 14.76: ربع اول میں منحنیات $y = \ln x$ ، $y = 2\ln x$ اور لکیر $x = e$

سوال 14.77: قطع مکافی $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$

سوال 14.78: قطع مکافی $x = y^2 - 1$ اور $x = 2y^2 - 2$

سوال 14.79 تا سوال 14.84 میں مستوی xy میں خطوں کے رقبات کو تکمل یا تکملات کے مجموعوں کی کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔ ان خطوں کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر ان کی مساواتیں لکھیں اور ان نقطوں کی نشاندہی کریں جہاں منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے بعد ان خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.79: $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.80: $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.81: $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.82: $\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.83: $\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{1-x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.84: $\int_0^2 \int_{x^2-4}^{0} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

اوسط قیمت

سوال 14.85: تفاعل $f(x, y) = \sin(x + y)$ کی اوسط قیمت درج ذیل خطوں پر تلاش کریں۔

ا. مستطیل $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$

ب. مستطیل $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi/2$

سوال 14.86: کیا چکور $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ یا ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ میں $f(x, y) = xy$ کی اوسط قیمت زیادہ ہو گی؟ ان دونوں خطوں میں اوسط کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.87: چکور $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$ میں قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 14.88: چکور $\ln 2 \le x \le 2\ln 2, \ln 2 \le y \le 2\ln 2$ میں $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

مستقل کثافت

سوال 14.89: ربع اول میں قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $x = 0$ ، $y = x$ کے بیچ ایک باریک چادر جس کی کثافت $\delta = 3$ ہو پائی جاتی ہے۔اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.90: ربع اول میں محددی محور اور لکیر $x = 3$ اور $y = 3$ کے بیچ مستقل کثافت کی باریک مستطیل چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.91: ربع اول میں محور x ، قطع مکافی $y^2 = 2x$ اور لکیر $x + y = 4$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.92: ربع اول سے لکیر $x + y = 3$ ایک تکونی خطہ کاٹتی ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.93: محور x اور منحنی $y = \sqrt{1 - x^2}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.94: ربع اول میں قطع مکافی $y = 6x - x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطے کا رقبہ $\frac{125}{6}$ ہے۔ اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.95: ربع اول سے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ ایک خطہ کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.96: دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کی I_y اور I_0 دریافت کریں۔

سوال 14.97: محور x اور قوس $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.98: محور x اور منحنی $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ کے بیچ وقفہ $\pi \le x \le 2\pi$ پر کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.99: لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز
ربع دوم میں محددی محور اور منحنی $y = e^x$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (کمیت اور معیار اثر کے کلیات میں آپ کو غیر مناسب تکملات استعمال کرنے ہوں گے۔)

سوال 14.100: لامتناہی چادر کا پہلا معیار اثر
ربع اول میں منحنی $y = e^{-x^2/2}$ کے نیچے کثافت $\delta = 1$ کے لامتناہی جسامت کی چادر کا محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 14.101: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $x + y = 0$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = x + y$ ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.102: ترخیم $x^2 + 4y^2 = 12$ سے قطع مکافی $x = 4y^2$ جس چھوٹے حصہ کو کاٹتا ہے، اس کی کثافت $\delta(x, y) = 5x$ ہے۔ اس کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.103: محور y اور لکیر $y = x$ اور $y = 2 - x$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$ ہے۔ اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.104: منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کی کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.105: ربع اول سے خطوط $x = 6$ اور $y = 1$ ایک مستطیل باریک چادر کاٹتے ہیں جس کی کثافت $\delta(x, y) = x + y + 1$ ہے۔ اس کی مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.106: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.107: قطع مکافی $y = x^2$، محور x اور لکیر $x = \mp 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 7y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.108: خطوط $x = 0$، $x = 20$، $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1 + x/20$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.109: لکیر $y = x$، $y = -x$ اور $y = 1$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔ اس کا قطبی جمودی معیار اثر اور رداس دوار بھی تلاش کریں۔

سوال 14.110: کثافت $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ لیتے ہوئے سوال 14.109 کو دوبارہ حل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.111: مستوی xy میں جراثیم کی تعدادی کثافت $f(x, y) = \frac{10000e^y}{1+|x|/2}$ ہے جہاں x اور y کی ناپ سنٹی میٹر میں ہے۔ مستطیل $-5 \le x \le 5,\ -2 \le y \le 0$ میں جراثیم کی کل تعداد تلاش کریں۔

سوال 14.112: سطح زمین پر کثافت آبادی $f(x, y) = 100(y + 1)$ ہے جہاں x اور y کلومیٹر میں ہیں۔ منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ کل آبادی کتنی ہو گی؟

سوال 14.113: مستقل کثافت کا ایک برتن مستوی xy میں خطہ $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le a(1 - x^2)$ پر واقع ہے۔ یہ برتن $45°$ تک ٹیڑھا کرنے تک واپس اپنی جگہ پر آن گرتا ہے۔ مستقل a کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.114: جمودی معیار اثر کم سے کم کرنا
ربع اول میں کثافت $\delta(x, y) = 1$ کی چادر لکیر $x = 4$ اور $y = 2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ لکیر $y = a$ کے لحاظ سے اس چادر کی جمودی معیار اثر I_a درج ذیل ہے۔

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 \, dy \, dx$$

مستقل a کی وہ قیمت تلاش کریں جو I_a کو کم سے کم کرتا ہو۔

سوال 14.115: مستوی xy میں لکیر $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.116: ایک پتلی چھڑی کی مستقل خطی کثافت δ گرام فی سنٹی میٹر اور لمبائی L ہے۔ اس کا رداس دوار دیے گئے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

ا. چھڑی کے محور کو عمودی اور اس کی مرکز کمیت سے گزرتے ہوا خط۔

ب. چھڑی کے ایک سر پر چھڑی کے محور کو عمودی خط۔

سوال 14.117: مستوی xy میں مستقل کثافت δ کی چادر منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔

ا. ایسا δ دریافت کریں کہ چادر کی کمیت سوال 14.104 کے چادر کی کمیت کے برابر ہو۔

ب. جزو-ا میں حاصل δ کی قیمت کا اس خطہ پر $\delta(x, y) = y + 1$ کی اوسط قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 14.118: دائرہ $x^2 + (y-1)^2 = 1$ کی کثافت مستقل ہے۔ محوروں کے لحاظ سے اس کے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

مسئلہ متوازی محور

مستوی xy میں ایک خطہ پر کمیت m کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہے۔ خط $L_{c,m}$ کے متوازی h اکائیاں دور خط L پایا جاتا ہے۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر $I_{c,m}$ اور I_L درج ذیل کلیہ کو مطمئن کریں گے۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{14.20}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک جمودی معیار اثر سے دوسرا با آسانی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

سوال 14.119: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت
(ا) دکھائیں کہ باریک چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی خط کے لحاظ سے چادر کا جمودی معیار اثر صفر ہو گا۔ (اشارہ: مرکز کمیت کو مبدا پر رکھیں اور خط کو محور y پر رکھیں۔ کلیہ $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ کیا دیگا؟) (ب) جزو-ا کے نتیجہ سے مسئلہ متوازی محور اخذ کریں۔ (اشارہ: خط $L_{c,m}$ کو محور y اور L کو $x = h$ پر رکھ کر I_L کے تکمل کو دو حصوں میں لکھیں۔)

سوال 14.120: (ا) مسئلہ متوازی محور استعمال کرتے ہوئے مثال 14.8 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے اس مثال میں چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی افقی اور انتصابی خطوط کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ (ب) جزو-ا کے نتائج استعمال کرتے ہوئے خطوط $x = 1$ اور $y = 2$ کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

کلیہ پاپس

جناب پاپس نے حصہ 6.10 کا مسئلہ پاپس بیان کیا۔ اس کے علاوہ وہ جانتے تھے کہ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے دو مستوی خطوں کا وسطانی مرکز ان خطوں کے وسطانی مراکز سے گزرتے ہوئے خط پر پایا جاتا ہے۔ مستوی xy میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو باریک چادر P_1 اور P_2 فرض کریں، جن کی کمیت بالترتیب m_1 اور m_2 ہو۔ مبدا سے بالترتیب ان چادروں کے مراکز کمیت تک سمتیات $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ لیں۔ اب اشتراک $P_1 \cup P_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل دیگا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{14.21}$$

مساوات 14.21 کو **کلیہ پاپس**[12] کہتے ہیں۔ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو سے زیادہ (لیکن متناہی تعداد کی) چادروں کے لئے درج ذیل کلیہ ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{14.22}$$

یہ کلیہ بالخصوص وہاں فائدہ مند ہو گا جہاں غیر منظم شکل و صورت کی چادر کے حصوں کے وسطانی مراکز ہم جیومیٹری سے علیحدہ علیحدہ طور پر جانتے ہوں اور جہاں ہر حصہ از خود مستقل کثافت کا ہو۔ ہم اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے پوری چادر کا وسطانی مرکز معلوم کر سکتے ہیں۔

سوال 14.121: کلیہ پاپس (مساوات 14.21) اخذ کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں ان خطوں کو ترسیم کر کے ان کے مراکز کمیت $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ کی نشاندہی کریں۔ محددی محور کے لحاظ سے $P_1 \cup P_2$ کے معیار اثر کیا ہوں گے؟)

سوال 14.122: ریاضی (الکراجی) ماخوذ اور مساوات 14.21 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی عدد صحیح $n > 2$ کے لئے مساوات 14.22 مطمئن ہو گا۔

سوال 14.123: فرض کریں A ، B اور C تین اشکال ہیں (شکل 14.22-ا)۔ کلیہ پاپس کی مدد سے درج ذیل کے وسطانی مراکز دریافت کریں۔

ا. $A \cup B$ ب. $A \cup C$ ج. $B \cup C$ د. $A \cup B \cup C$

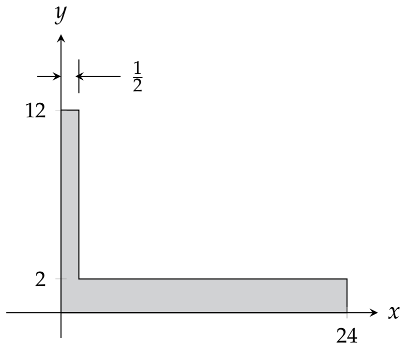
سوال 14.124: وسطانی مرکز دریافت کریں (شکل 14.22-ب)۔

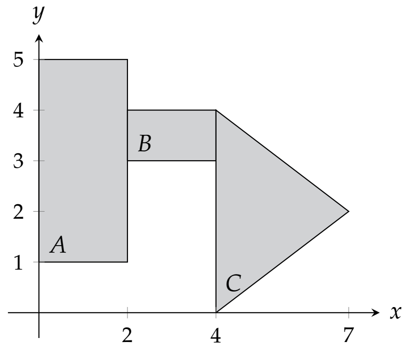
سوال 14.125: ایک مساوی الساقین مثلث T کا قاعدہ $2a$ اور قد h ہے۔ اس کا قاعدہ، رداس a کے نصف دائرہ D کے قطر پر پایا جاتا ہے۔ مثلث دائرہ کے باہر ہے۔ $T \cup D$ کا وسطانی مرکز (ا) T اور D کی مشترک سرحد پر (ب) T کے اندر ہونے کے لئے a اور h کا تعلق دریافت کریں۔

سوال 14.126: ایک مساوی الساقین مثلث T جس کا قد h ہے کا قاعدہ چکور Q کا ایک ضلع ہے۔ چکور کے ضلع کی لمبائی s ہے۔ (چکور اور مثلث ایک دوسرے کو نہیں ڈھانپتے ہیں۔) $T \cup Q$ کا وسطانی مرکز مثلث کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر h کا s کے ساتھ کیا تعلق گا؟ اپنے جواب کا موازنہ سوال 14.125 کے جواب کے ساتھ کریں۔

---

[12] Pappus's formula





شکل 14.22: اشکال برائے سوال 14.123 اور سوال 14.124

14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ

بعض اوقات تکمل کو قطبی روپ میں تبدیل کرنے سے اس کا حل آسان ہو جاتا ہے۔اس حصہ میں یہ تبدیلی دکھائی جائے گی اور ان تکملات کی قیمت کا حصول دکھایا جائے گا جن کے سرحد قطبی روپ میں دیے گئے ہوں۔

قطبی روپ میں تکملات

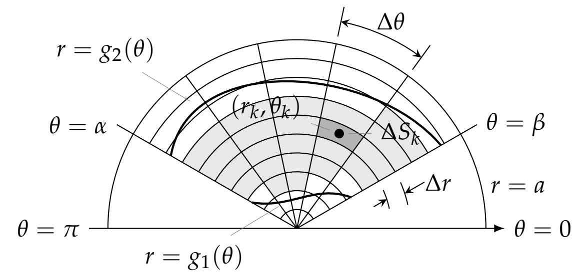
مستوی xy میں دوہرا تکمل کا ذکر کرتے ہوئے ہم نے خطہ R کو مستطیلی ٹکڑوں میں اس طرح کاٹا کہ مستطیل کے اضلاع محددی محوروں کے متوازی ہوں۔اس طرح ان مستطیلوں کے اضلاع مستقل x اور یا مستقل y لکھے جا سکتے ہیں۔کارتیسی محدد میں مستطیل قدرتی صورت ہے۔ قطبی محددی نظام میں "قطبی مستطیل" قدرتی صورت ہے جس کے اضلاع مستقل r اور مستقل θ لکھے جا سکتے ہیں۔

فرض کریں تفاعل $f(r,\theta)$ خطہ R پر معین ہے جس کے سرحد شعاع $\theta=\alpha$ اور $\theta=\beta$ اور استمراری منحنیات $r=g_1(\theta)$ اور $r=g_2(\theta)$ ہیں۔مزید α اور β کے بیچ ہر قیمت کے لئے $0\le g_1(\theta)\le g_2(\theta)\le a$ ہے۔ یوں R پنکھا نما خطہ Q میں، جس کو عدم مساوات $0\le r\le a,\ \alpha\le\theta\le\beta$ ظاہر کرتی ہیں، پایا جائے گا (شکل 14.23)۔

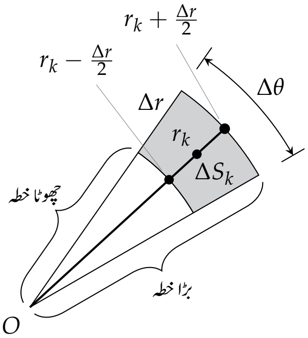
ہم Q پر دائری قوسین اور شعاعوں کا جال بچھاتے ہیں۔ یہ قوسین ان دائروں سے کاٹے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے اور جن کے رداس Δr، $2\Delta r$، $\cdots$، $m\Delta r$ ہیں جہاں $\Delta r=\frac{a}{m}$ ہے۔ان شعاع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\Delta\theta=\frac{\beta-\alpha}{m'}$ ہے۔

$$\theta=\alpha,\ \theta=\alpha+\Delta\theta,\ \theta=\alpha+2\Delta\theta,\cdots,\theta=\alpha+m'\Delta\theta=\beta$$

یہ شعاع اور قوسین Q کو "قطبی مستطیلوں" میں تقسیم کرتے ہیں۔



شکل 14.23: خطہ $R: \; g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$ ، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ پنکھا نما خطہ $Q: \; 0 \leq r \leq a$ ، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ میں پایا جاتا ہے۔ خطہ Q کی خانہ بندی شعاعوں اور دائری قوسین سے کرتے ہوئے R کی خانہ بندی کی جاتی ہے۔



شکل 14.24: سایہ دار خطے کا رقبہ ΔS_k حاصل کرنے کے لئے بڑے خطے سے چھوٹے خطے کا رقبہ منفی کریں۔

ہم ان قطبی مستطیلوں کو 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں جو مکمل طور پر R کے اندر پائے جاتے ہوں اور ان کے رقبوں کو ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ شمار کرنے کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ ہم ΔS_k رقبے کی قطبی مستطیل کے مرکز کو (r_k, θ_k) سے ظاہر کرتے ہیں۔ قطبی مستطیل کے مرکز سے مراد وہ نقطہ ہے جو دونوں دائری قوسین کی اوسط رداس کے قوس اور اس شعاع پر پایا جاتا ہو جو دونوں قوسین کو درمیان سے کاٹتی ہو۔ ہم اب درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

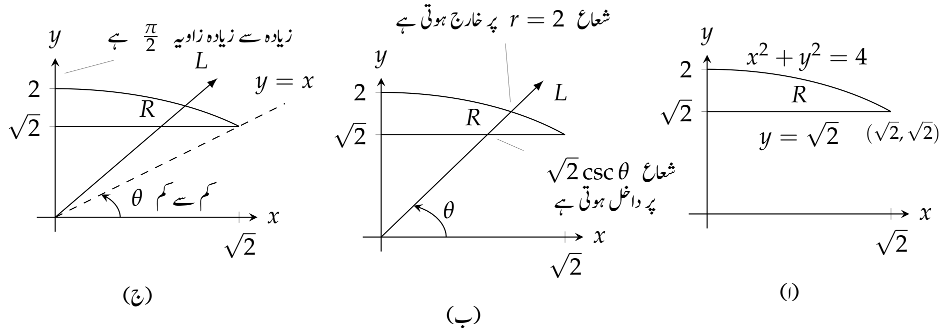
$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r, \theta) \Delta S_n \tag{14.23}$$

اگر پورے R پر f استمراری ہو، تب جال کے خانے چھوٹے سے چھوٹے کر کے Δr اور $\Delta\theta$ کو صفر تک پہنچانے سے یہ مجموعہ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد R پر f کا دوہرا تکمل کہلاتا ہے جس کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{n \to \infty} J_n = \iint\limits_R f(r, \theta) \, \mathrm{d}S$$

اس حد کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر ہمیں مجموعہ J_n یوں لکھنا ہو گا کہ ΔS_k کی قیمت Δr اور $\Delta\theta$ کی روپ میں ہو۔ رقبہ ΔS_k کی اندرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k - \frac{\Delta r}{2}$ جبکہ اس کی بیرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k + \frac{\Delta r}{2}$ ہے (شکل 14.24)۔ ان قوسین سے مبدا تک دائری تکونی خطوں کے رقبے

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{اندرونی تکونی رقبہ} \\ &\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{بیرونی تکونی رقبہ} \end{aligned} \tag{14.24}$$



شکل 14.25: قطبی محدد میں تکمل کی قیمت کے قدم۔

ہوں گے۔ یوں درج ہو گا۔

$$\begin{aligned}\Delta S_k &= \text{اندرونی تکونی رقبہ} - \text{بیرونی تکونی رقبہ}\\ &= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k\Delta r_k\Delta\theta\end{aligned}$$

اس نتیجہ کو مساوات 14.23 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta\theta \tag{14.25}$$

مسئلہ فوبنی کی ایک صورت کہتی ہے کہ اس مجموعہ کی حد r اور θ کے لحاظ سے درج ذیل بارہا تکمل دیگا۔

$$\iint\limits_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.26}$$

تکمل کی حدیں

کارتیسی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار قطبی محدد کے لئے بھی کار آمد ہے۔

قطبی محدد میں تکمل حاصل کرنے کا طریقہ

قطبی محدد میں خطہ R پر $\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے پہلے r کے لحاظ سے اور بعد میں θ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.25-ا)۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے بڑھتی ہوئی r کے رخ خطہ R سے گزرتا ہوا شعاع L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی r حدیں ہوں گے۔ ان کی قیمتیں عموماً θ پر منحصر ہو گی (شکل 14.25-ب)۔

3. تکمل کی θ حدیں: وہ θ حدیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام شعاعیں شامل ہوں (شکل 14.25-ج)۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int\limits_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

مثال 14.10: دائرہ $r=1$ کے باہر اور قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر خطہ میں $f(r,\theta)$ کے تکمل کی حدیں تلاش کریں۔

حل:

1. خاکہ: ہم خطے کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر نام و نشان لکھتے ہیں (شکل 14.26)۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی علامتی شعاع خطہ R میں $r=1$ کے مقام پر داخل اور $r=1+\cos\theta$ کے مقام پر خارج ہو گی۔

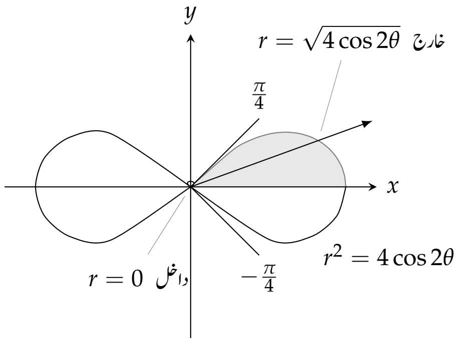
3. تکمل کی θ حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی وہ شعاعیں جو R سے گزرتی ہوں، $\theta=-\frac{\pi}{2}$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ میں پائی جاتی ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

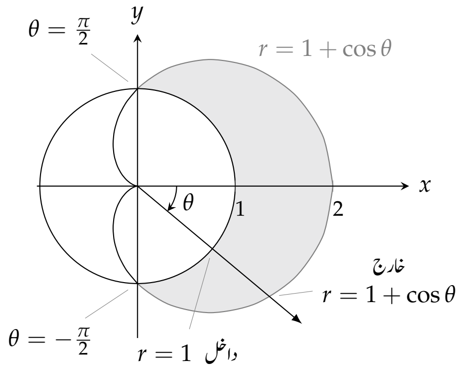
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

□

اگر $f(r,\theta)$ ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب R پر f کا تکمل R کا رقبہ ہو گا۔



شکل 14.27: تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم r کو 0 تا $\sqrt{4\cos 2\theta}$ جبکہ θ کو 0 تا $\frac{\pi}{4}$ لیتے ہیں۔



شکل 14.26: دائرہ اور قلب نما (مثال 14.10)

قطبی محدد میں رقبہ

قطبی محددی مستوی میں بند اور محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint_R r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \tag{14.27}$$

جیسا آپ توقع کرتے ہوں گے یہ کلیہ، پہلے دیے گئے کلیات کے عین مطابق ہے۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

مثال 14.11: دو چشمہ $r^2 = 4\cos 2\theta$ میں گھیرا ہوا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم دو چشمہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.27)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ربع اول میں دو چشمہ کے رقبہ کو 4 سے ضرب دے کر پورا رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 4 \end{aligned}$$

□

کارتیسی تکملات کی قطبی تکملات میں تبدیلی

کارتیسی تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کو قطبی تکمل میں دو قدموں میں تبدیل کیا جاتا ہے:

1. کارتیسی تکمل میں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھیں۔

2. خطہ R کی سرحد کی قطبی حدیں مہیا کریں۔

یوں کارتیسی تکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تکمل کے خطہ کو قطبی محدد میں G سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.28}$$

یہ باب 5 میں ترکیب بدل کی طرح ہے البتہ یہاں ایک کی بجائے دو متغیرات ہیں۔دھیان رہے کہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ نہیں بلکہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ پر کیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ حصہ 14.7 پیش کی جائے گی۔

مثال 14.12: ربع اول میں دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ایک چوتھائی میں کثافت $\delta(x,y)=1$ کی باریک چادر کی مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: ہم چادر کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.28)۔ کارتیسی محدد میں اس خطہ کا قطبی معیار اثر سے مراد درج ذیل تکمل ہے۔

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

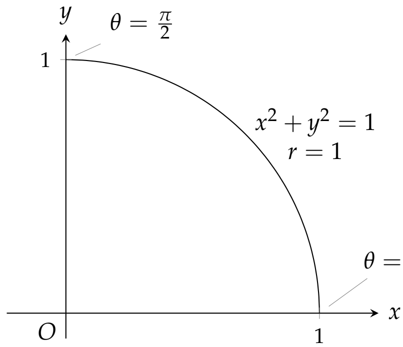
ہم y کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\int_0^1 (x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3})\,\mathrm{d}x$$

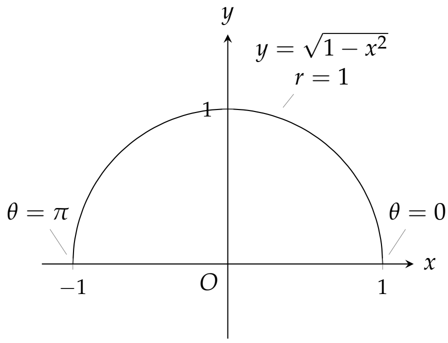
حاصل کرتے ہیں جس کا حل، جدول کی مدد کے بغیر، مشکل ہے۔

اس تکمل کو قطبی تکمل میں تبدیل کرنے سے حالات بہتر ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$



شکل 14.28: قطبی محدد میں یہ خطہ $0 \leq r \leq 1$ ، $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ہے۔



شکل 14.29: نصف دائری خطہ $0 \leq r \leq 1$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ہے۔

حاصل کرتے ہیں۔ قطبی محدد میں تکمل اتنا آسان کیوں ہوا۔ ایک وجہ یہ ہے کہ $x^2 + y^2$ سادہ صورت r^2 اختیار کرتا ہے۔ دوسری وجہ یہ کہ تکمل کی حدیں اب مستقل ہیں۔ □

مثال 14.13: محور x اور منحنی $y = \sqrt{1 - x^2}$ کے بیچ نصف دائری خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں (شکل 14.29)۔

$$\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل: کارتیسی محدد میں یہ تکمل غیر بنیادی ہے اور $e^{x^2+y^2}$ کا x یا y کے لحاظ سے تکمل، سیدھا طریقے سے، حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے باوجود یہ تکمل اور اس طرح کے دیگر تکملات ریاضیات میں اہمیت رکھتے ہیں اور ان کا حل ضروری ہے۔ قطبی محدد یہاں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ e^{r^2} کے تکمل میں ہمیں $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کا r درکار تھا جس کے بغیر ہم تکمل حاصل نہیں کر سکتے تھے۔ □

سوالات

قطبی تکملات کی قیمت کی تلاش

سوال 14.127 تا سوال 14.142 میں دیے گئے تکملات کو قطبی روپ میں تبدیل کر کے حل کریں۔

سوال 14.127: $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.128: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.129: $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.130: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.131: $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.132: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.133: $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.134: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.135: $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.136: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.137: $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.138: $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.139: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.140: $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.141: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.142: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

قطبی محدد میں رقبات کی تلاش

سوال 14.143: ربع اول سے منحنی $r = 2(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ جس خطہ کو کاٹتی ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.144: قلب نما $r = 1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.145: گلاب $r = 12\cos 3\theta$ کے ایک پتے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.146: مثبت محور x اور پیچ دار $r = \frac{4\theta}{3},\ 0 \le \theta \le 2\pi$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ اس خطہ کی صورت گھونگا کے خول سے ملتی جلتی ہے۔

سوال 14.147: ربع اول میں قلب نما $r = 1+\sin\theta$ جس خطہ کو کاٹتا ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.148: قلب نما $r = 1+\cos\theta$ اور $r = 1-\cos\theta$ کے مشترکہ خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

کمیت اور معیار اثر

سوال 14.149: مستقل کثافت $\delta(x,y) = 3$ کی باریک چادر جس کی زیریں سرحد محور x اور بالائی سرحد قلب نما $r = 1-\cos\theta$ ہے، کا محور x کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔

سوال 14.150: دائرہ $x^2+y^2 = a^2$ کے اندر باریک دائرہ قرص کی کثافت $\delta(x,y) = k(x^2+y^2)$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے۔ اس قرص کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.151: دائرہ $r = 3$ کے باہر اور دائرہ $r = 6\sin\theta$ کے اندر چادر کی کثافت $\delta(r,\theta) = \frac{1}{r}$ ہے۔ اس چادر کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.152: قلب نما $r = 1-\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر باریک چادر کی کثافت $\delta(r,\theta) = \frac{1}{r^2}$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.153: قلب نما $r = 1+\cos\theta$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.154: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر باریک چادر کی کثافت $\delta(x,y)=1$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

اوسط قیمتیں

سوال 14.155: مستوی xy میں قرص $x^2+y^2\le a^2$ کے اوپر نصف کرہ $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 14.156: مستوی xy میں قرص $x^2+y^2\le a^2$ کے اوپر (ایک) مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 14.157: قرص $x^2+y^2\le a^2$ میں مبدا سے نقطہ $N(x,y)$ کا اوسط فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 14.158: قرص $x^2+y^2\le a$ میں نقطہ $N(x,y)$ کا سرحدی نقطہ $A(1,0)$ سے فاصلے کے مربع کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.159: خطہ e $1\le x^2+y^2\le e$ پر $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کے تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.160: خطہ $1\le x^2+y^2\le e^2$ پر $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ کا تکمل حل کریں۔

سوال 14.161: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r=1$ کے باہر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی مستوی $z=x$ میں پائی جاتی ہے۔ اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.162: دو چشمہ $r^2=2\cos2\theta$ کے اندر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی کرہ $z=\sqrt{2-r^2}$ کی سطح کو مس کرتی ہے۔اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.163: (ا) غیر مناسب تکمل $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے حل کا درست طریقہ یہ ہے کہ پہلے اس کا مربع لیں:

$$I^2=\Big(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس تکمل کو قطبی روپ میں لکھ کر حل کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (حصہ 8.6 کا سوال 8.453 جاری)۔

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t$$

سوال 14.164: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.165: قرص $x^2+y^2 \le \frac{3}{4}$ پر تفاعل $f(x,y) = 1/(1-x^2-y^2)$ کا تکمل حل کریں۔ کیا قرص $x^2+y^2 \le 1$ پر $f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.166: قطبی محدد میں دوہرا تکمل استعمال کرتے ہوئے قطبی منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ اور مبدا کے بیچ پنکھا نما خطہ کے رقبہ کا درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\,\mathrm{d}\theta$$

سوال 14.167: رداس a کے دائرہ میں N_0 ایک نقطہ ہے اور N_0 سے دائرہ کے مرکز تک فاصلہ h ہے۔ کسی بھی اختیاری نقطہ N سے N_0 تک فاصلہ کو d سے ظاہر کریں۔ دائرہ میں محیط خطہ پر d^2 کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: دائرے کے مرکز کو مبدا پر اور N_0 کو محور x پر رکھ کر اپنے لئے آسانی پیدا کریں۔)

سوال 14.168: فرض کریں ایک قطبی خطے کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

(ا) اس تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں۔ (ب) پاپس کے ایک مسئلہ اور حصہ 6.10 میں سوال 6.350 میں وسطانی مرکز کی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 14.169 تا سوال 14.172 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کارتیسی تکملات کو قطبی تکملات میں تبدیل کر کے ان قطبی تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ کو درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

ا. کارتیسی تکمل کے خطہ کا خاکہ مستوی xy پر بنائیں۔

ب. جزو-ا میں خطہ کی ہر سرحد کی کارتیسی مساوات کو r اور θ کے لئے حل کرتے ان کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

ج. جزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تکمل کے خطہ کے خاکہ کو قطبی $r\theta$ مستوی میں بنائیں۔

د. متکمل کو کارتیسی سے قطبی روپ میں تبدیل کریں۔ جزو-ج کے خاکہ سے تکمل کی حدیں معلوم کر کے قطبی تکمل کی قیمت کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 14.169: $\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.170: $\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.171: $\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.172: $\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

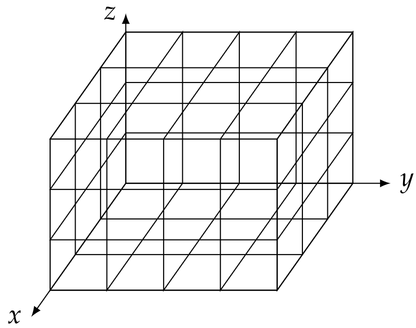
14.4 کارتیسی محدد میں تہرا تکمل

ہم تہرا تکملات کی مدد سے تین بعدی اجسام کے حجم، کمیت اور معیار اثر اور تین متغیری تفاعل کی اوسط قیمت معلوم کرتے ہیں۔ باب 15 میں ہم دیکھیں گے کہ سمتی میدان اور حرکت سیال کے مطالعہ میں ہمیں ان تکملات سے کیسا واسطہ پڑتا ہے۔

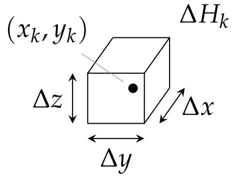
تہرا تکمل

فرض کریں فضا میں بند محدود خطہ D پر تفاعل $F(x,y,z)$ معین ہے، تب D پر تکمل F کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔ ہم ایک مستطیل خطہ جس میں D پایا جاتا ہو کو محددی مستویات کے متوازی مستویات سے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.30-ا)۔ ہم D کے اندر پائے جانے والے خانوں کو (کسی بھی ترتیب سے) 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں ایک علامتی مستطیل خانے کے اضلاع Δx_k ، Δy_k اور Δz_k جبکہ اس کا حجم ΔH_h ہو گا (شکل 14.30-ب)۔ ہم ہر مستطیل خانے میں کوئی نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k \tag{14.29}$$



(ا) ایک حجم جس میں D پایا جاتا ہے کو محددی مستویات کے متوازی سطحوں سے مستطیل مکعب خلیوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔



(ب) ایک مستطیل مکعب خلیہ کا حجم۔

شکل 14.30: ٹھوس جسم کو ΔH_k حجم کے مستطیل خانوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

اگر F استمراری ہو اور D کی تحدیدی سطح ہموار سطحوں پر مشتمل ہو جو ایک دوسرے کے ساتھ استمراری منحنیات میں جڑتے ہوں، تب جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر کے قریب پہنچتے ہوں توں توں مجموعات J_n ایک حد تک پہنچتے ہیں:

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}H \tag{14.30}$$

ہم اس حد کو D پر F **کا تہرا تکمل**[13] کہتے ہیں۔ یہ حد چند غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

تہرا تکملات کے خواص

تہرا تکملات کے خواص وہی ہیں جو واحد تکملات اور دوہرا تکملات کے ہیں۔ اگر $F = F(x,y,z)$ اور $G = G(x,y,z)$ استمراری ہوں، تب

1. $\iiint\limits_D kF\,\mathrm{d}H = k\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H$ (k کوئی عدد ہے)
2. $\iiint\limits_D (F \mp G)\,\mathrm{d}H = \iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \mp \iiint\limits_D G\,\mathrm{d}H$
3. اگر D پر $F \geq 0$ تب $\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \geq 0$
4. اگر D پر $F \geq D$ ہو تب $\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \geq \iiint\limits_D G\,\mathrm{d}H$

[13]triple integral

5. تہرا تکملات مجموعیت کی خاصیت بھی رکھتے ہیں جو طبیعیات، انجینئری اور ریاضیات کے میدان میں کام آتی ہے۔ اگر استمراری تفاعل F کے دائرہ کار D کو ہموار سطحوں سے متناہی تعداد کے علیحدہ علیحدہ ٹکڑوں D_1 ، D_2 ، $\cdots$ ، D_n میں تقسیم کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D F\,\mathrm{d}H = \iiint_{D_1} F\,\mathrm{d}H + \iiint_{D_2} F\,\mathrm{d}H + \cdots + \iiint_{D_n} F\,\mathrm{d}H$$

فضا میں خطے کا حجم

اگر F ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب مساوات 14.29 کے تہرا مجموعہ کی تخفیف صورت درج ذیل ہو گی۔

$$J_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k = \sum 1\cdot\Delta H_k = \sum \Delta H_k \tag{14.31}$$

جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر تک پہنچتے ہیں توں توں ΔH_k جسامت میں چھوٹے اور تعداد میں زیادہ ہوتے جاتے ہیں اور D کے زیادہ حصہ کو بھرتے ہیں۔اسی لئے ہم D کے حجم کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta H_k = \iiint_D \mathrm{d}H$$

تعریف : فضا میں بند محدود خطہ D کا **حجم**[14] درج ذیل ہو گا۔

$$H = \iiint_D \mathrm{d}H \tag{14.32}$$

□

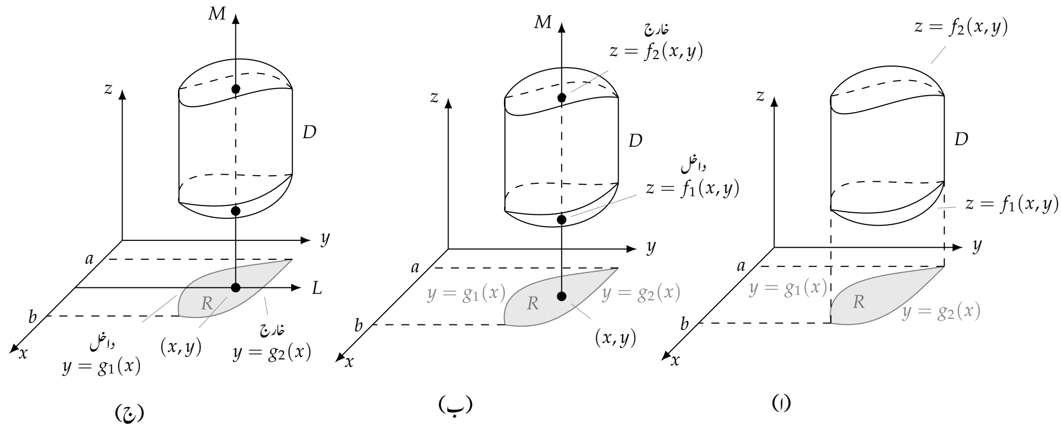
جیسا ہم جلد دیکھیں گے، قوسی سطحوں میں ملفوف ٹھوس اجسام کا حجم اس تکمل سے حاصل کیا جاتا ہے۔

تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

ہم تہرا تکمل کی تعریف سے اس کی قیمت شاذ و نادر حاصل کرتے ہیں۔ اس کی بجائے ہم مسئلہ فوبنی کی تین بعدی روپ استعمال کرتے ہوئے تین بار ایک گنا تکملات سے اس کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ دہرا تکمل کی طرح، تکمل کے حدیں معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ کار پایا جاتا ہے۔

---

[14] volume



شکل 14.31: تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش۔

تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش

دائرہ کار D پر درج ذیل تکمل میں پہلے z، اس کے بعد y اور آخر میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

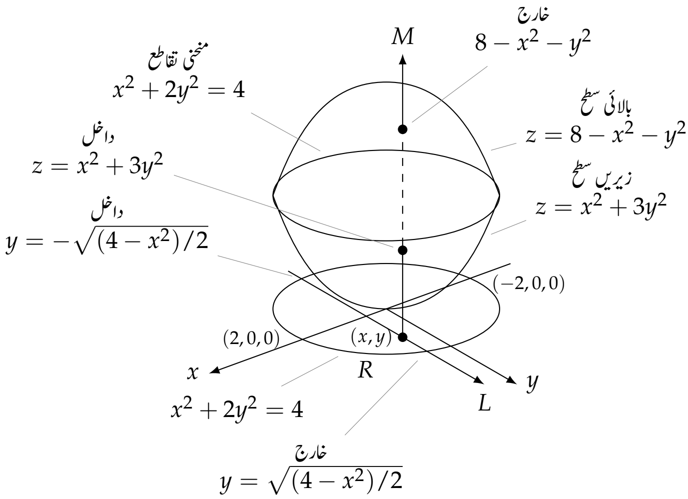
$$\iiint\limits_D F(x, y, z)\,\mathrm{d}H$$

1. خاکہ: خطہ D کا خاکہ بنائیں اور مستوی xy پر اس کا انتصابی سایہ R دکھائیں۔ خطہ D کی بالائی اور زیریں تحدیدی سطحوں کی نشاندہی کریں اور R کی بالائی اور زیریں تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل 14.31-ا)۔

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے z محور کے متوازی لکیر M کھینچیں۔ بڑھتے z رخ چلتے ہوئے، یہ لکیر $z = f_1(x, y)$ پر D میں داخل ہو گی اور $z = f_2(x, y)$ پر D سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی z حدیں ہیں (شکل 14.31-ب)۔

3. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی y محور کے متوازی لکیر L کھینچیں۔ بڑھتے y رخ چلتے ہوئے یہ لکیر R میں $y = g_1(x)$ پر داخل اور $y = g_2(x)$ پر خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی y حدیں ہیں (شکل 14.31-ج)۔

4. تکمل کی x حدیں: وہ x حدیں منتخب کریں جس میں محور y کے متوازی، R سے گزرتی ہوئی تمام لکیریں L شامل ہوں۔ ہماری مثال میں یہ حدیں $x = a$ اور $x = b$ ہیں۔



شکل 14.32: دو سطحوں کے بیچ حجم (مثال 14.14)

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

تکملات کی ترتیب تبدیل کرنے کی صورت میں اسی طرح کی طریقہ کار سے تکملات کی حدیں تلاش کریں۔ بارہا تکمل میں آخری دو متغیرات، جن کے لحاظ سے تکمل لیا گیا ہو، کے مستوی میں D کا سایہ درکار ہو گا۔

مثال 14.14: خطہ D سطح $z = x^2 + 3y^2$ اور سطح $z = 8 - x^2 - y^2$ میں ملفوف ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم $F(x, y, z) = 1$ لیتے ہوئے حجم کے لئے درج ذیل تکمل لکھتے ہیں۔

$$H = \iiint\limits_D \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

ہم تکمل کی حدیں درج ذیل اقدام سے معلوم کرتے ہیں۔

1. خاکہ: یہ سطحیں ایک دوسرے کو قطع مکافی $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ یعنی $x^2 + 2y^2 = 4$ میں قطع کرتی ہیں (شکل 14.32)۔ مستوی xy میں D کے سایہ R کی سرحد کی مساوات یہی ($x^2 + 2y^2 = 4$) ہو گی۔ خطہ R کی بالائی سرحد منحنی $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ اور اس کی زیریں سرحد منحنی $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ ہو گی۔

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x,y) سے گزرتی ہوئی محور z کی متوازی لکیر M خطہ D میں $z = x^2 + 3y^2$ پر داخل اور $z = 8 - x^2 - y^2$ پر خارج ہوتی ہے۔

3. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x,y) سے گزرتی ہوئی محور y کی متوازی لکیر L خطہ R میں $y = -\sqrt{(4-x^2)/2}$ پر داخل اور $y = \sqrt{(4-x^2)/2}$ پر خارج ہوتی ہے۔

4. تکمل کی x حدیں: محور y کی متوازی لکیریں L خطہ R میں $x = -2$ (نقطہ (-2,0,0)) سے $x = 2$ (نقطہ (2,0,0)) تک گزرتی ہیں۔

یوں حجم درج ذیل ہو گا۔

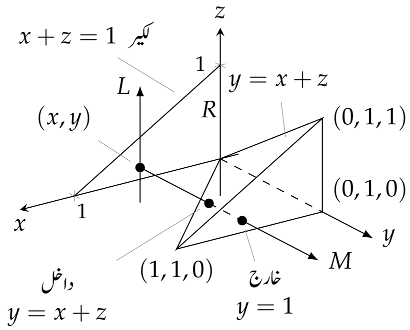
$$
\begin{aligned}
H &= \iiint\limits_D \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\Big[(8-2x^2)y - \frac{4}{3}y^3\Big]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\Big(2(8-2x^2)]\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3}\Big(\frac{4-x^2}{2}\Big)^{3/2}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\Big[8\Big(\frac{4-x^2}{2}\Big)^{3/2} - \frac{8}{3}\Big(\frac{4-x^2}{2}\Big)^{3/2}\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\pi\sqrt{2} && x = 2\sin u \text{ پر کر کے تکمل لیا گیا ہے}
\end{aligned}
$$

□

اگلی مثال میں ہم مستوی xy کی بجائے مستوی xz میں D کا سایہ لیتے ہیں۔

مثال 14.15: چو سطحہ D کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,1,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,1,1)$ ہیں۔ تفاعل $F(x,y,z)$ کے تہرا تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

حل:



شکل 14.33: چو سطحہ (مثال 14.15)

1. خطہ: ہم D اور مستوی xz میں اس کے سایہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 14.33)۔ خطہ D کی بالائی (دائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = 1$ میں پائی جاتی ہے۔ اس کی زیریں (بائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = x + z$ میں پائی جاتی ہے۔ خطہ R کی بالائی سرحد لکیر $z = 1 - x$ اور زیریں سرحد لکیر $z = 0$ ہیں۔

2. تکمل کی y حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے گزرتی لکیر جو محور y کے متوازی ہو D میں $y = x + z$ پر داخل اور $y = 1$ پر خارج ہوتی ہے۔

3. تکمل کی z حدیں: محور z کے متوازی نقطہ (x, y) سے گزرتی لکیر L خطہ R میں $z = 0$ پر داخل اور $z = 1 - x$ پر خارج ہوتی ہے۔

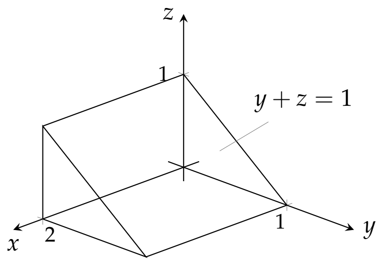
4. تکمل کی x حدیں: خطہ R میں $x = 0$ سے $x = 1$ تک گزرتی ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

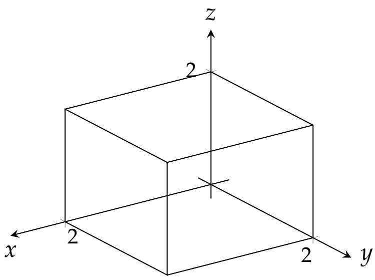
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

□

جیسا ہم جانتے ہیں، دہرا تکمل کا حصول عموماً (لیکن ضروری نہیں) ایک گنا تکملات کو دو مختلف ترتیب سے حاصل کر کے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تہرا تکمل کے لئے اس طرح کے چھ ترتیب ممکن ہو سکتے ہیں۔



شکل 14.34: منشور کے حجم کی چھ بارہا تہرا تکملات مثال 14.16 میں دیے گئے ہیں۔



شکل 14.35: تکمل کا خطہ (مثال 14.17)

مثال 14.16: درج ذیل چھ تکملات شکل 14.34 میں دکھائے گئے منشور کا حجم دیتے ہیں۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

□

فضا میں تفاعل کی اوسط قیمت

فضا میں خطہ D پر تفاعل F کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\text{اوسط قیمت } F \text{ کی } \text{ پر } D = \frac{1}{D \text{ کا حجم}} \iiint\limits_D F \,\mathrm{d}H \tag{14.33}$$

مثال کے طور پر اگر $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہو تب D پر F کی اوسط قیمت سے مراد مبدا سے D میں نقطوں کا اوسط فاصلہ ہے۔ اگر D میں $F(x,y,z)$ ایک ٹھوس جسم کی کمیتی کثافت ہو تب D میں F کی اوسط قیمت اس جسم کی اوسط کمیتی کثافت ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی حجم ہو گی۔

مثال 14.17: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x=2$ ، $y=2$ اور $z=2$ کے بیچ $F(x,y,z)=xyz$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم اس مکعب کا خاکہ بنا کر اس پر تکمل کی حدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 14.35)۔ اس کے بعد مساوات 14.33 سے مکعب پر F کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مکعب کا حجم $8 = (2)(2)(2)$ ہو گا۔مکعب پر F کی قیمت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} yz\right]_{x=0}^{x=2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^2 2yz \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2 \left[y^2 z\right]_{y=0}^{y=2} \mathrm{d}z = \int_0^2 4z \, \mathrm{d}z = \left[2z^2\right]_0^2 = 8$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.33 سے درج ذیل اوسط قیمت حاصل ہو گی۔

$$\text{مکعب پر اوسط قیمت} = \frac{1}{\text{حجم}} \iiint xyz \, \mathrm{d}H = \left(\frac{1}{8}\right)(8) = 1$$

ہم نے اس تکمل کو $\mathrm{d}x$ ، $\mathrm{d}y$ ، $\mathrm{d}z$ ترتیب سے حاصل کیا۔ ہم باقی پانچ ترتیب میں سے کسی ایک ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے بھی اس تکمل کو حل کر سکتے ہیں۔ □

سوالات

مختلف اعادوں سے تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 14.173: چھ مختلف اعادوں سے مثال 14.16 میں حجم کا حل دیا گیا ہے۔ ان تمام کا مشترک جواب کیا ہے؟

سوال 14.174: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 2$ اور $z = 3$ کے بیچ ٹھوس مستطیل جسم کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 14.175: ثُمن اول سے مستوی $6x + 3y + 2z = 6$ ایک چو سطحہ کاٹتا ہے۔ اس کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 14.176: ثُمن اول سے بیلن $x^2 + z^2 = 4$ اور مستوی $y = 3$ ایک خطہ کاٹتے ہیں۔ اس خطہ کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.177: قطعات مکافی $z = 8 - x^2 - y^2$ اور $z = x^2 + y^2$ میں محیط خطہ D کے حجم کا چھ مختلف تہرا اعادہ تکملات لکھیں۔ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 14.178: قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور مستوی $z = 2y$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کی تہرا اعادہ تکملات ترتیب $\mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ میں لکھیں۔ ان میں سے کسی بھی تکمل کی قیمت حاصل نہ کریں۔

تہرا اعادہ تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 14.179 تا سوال 14.192 میں تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 14.179: $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.180: $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.181: $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 14.182: $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.183: $\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 14.184: $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

سوال 14.185: $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.186: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2x+y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.187: $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.188: $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.189: $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos(u+v+w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ (فضا uvw)

سوال 14.190: $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln r \ln s \ln t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$ (فضا rst)

سوال 14.191: $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln \sec v} \int_{-\infty}^{2t} e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$ (فضا tvx)

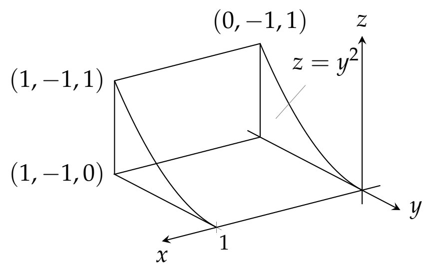
سوال 14.192: $\int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}r$ (فضا pqr)

حجم بذریعہ تہرا تکملات

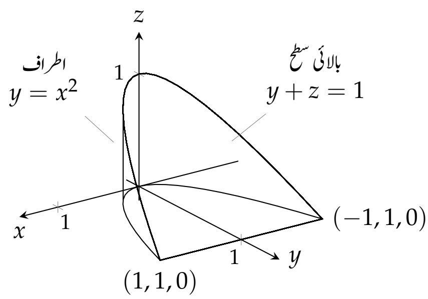
سوال 14.193: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل 14.36 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔



شکل 14.37: خاکہ برائے سوال 14.194



شکل 14.36: خاکہ برائے سوال 14.193

ا. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ ج. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہ. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

ب. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ د. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

سوال 14.194: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل 14.37 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔

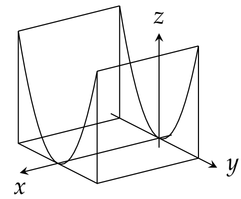
ا. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ ج. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہ. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

ب. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ د. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

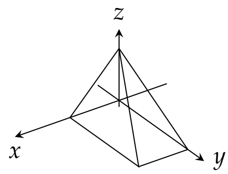
سوال 14.195 تا سوال 14.208 میں خطوں کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.195: بیلن $z = y^2$ اور مستوی xy کے بیچ خطہ جس کی سرحدیں مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ ہیں (شکل 14.38)۔

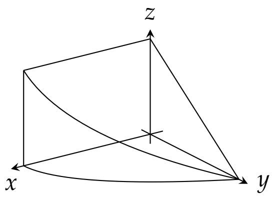
سوال 14.196: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x + z = 1$ ، $y + 2z = 2$ کے بیچ خطہ (شکل 14.39)۔



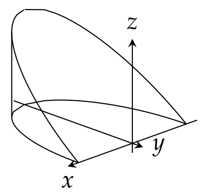
شکل 14.38: خاکہ برائے سوال 14.195



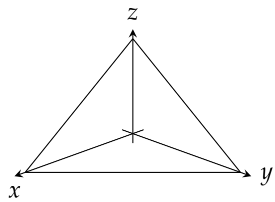
شکل 14.39: خاکہ برائے سوال 14.196



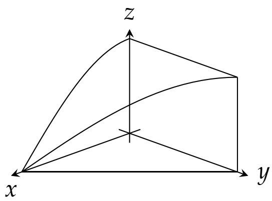
شکل 14.40: خاکہ برائے سوال 14.197



شکل 14.41: خاکہ برائے سوال 14.198



شکل 14.42: خاکہ برائے سوال 14.199



شکل 14.43: خاکہ برائے سوال 14.200

سوال 14.197: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $y + z = 2$ اور بیلن $x = 4 - y^2$ کے بیچ خطہ (شکل 14.40)۔

سوال 14.198: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے مستویات $z = -y$ اور $z = 0$ جو ٹکڑا کاٹتے ہیں (شکل 14.41)۔

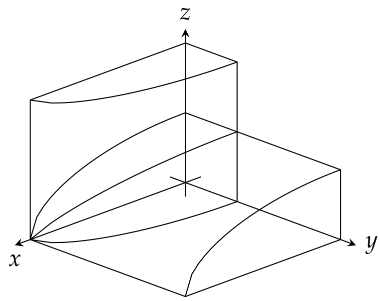
سوال 14.199: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ کے بیچ چو سطحہ (شکل 14.42)۔

سوال 14.200: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $y = 1 - x$ اور سطح $z = \cos(\pi x/2),\ 0 \leq x \leq 1$ کے بیچ خطہ (شکل 14.43)۔

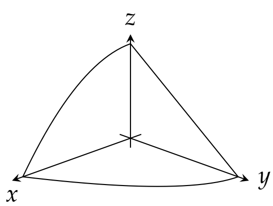
سوال 14.201: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور بیلن $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترک اندرون (شکل 14.44)۔

سوال 14.202: ثُمن اول میں محددی مستویات اور سطح $z = 4 - x^2 - y$ کے بیچ خطہ (شکل 14.45)۔

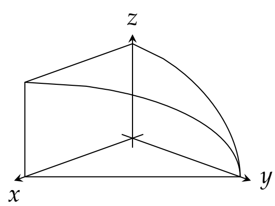
سوال 14.203: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x + y = 4$ اور بیلن $y^2 + 4z^2 = 16$ کے بیچ خطہ (شکل 14.46)۔



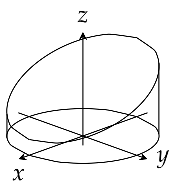
شکل 14.44: خاکہ برائے سوال 14.201



شکل 14.45: خاکہ برائے سوال 14.202



شکل 14.46: خاکہ برائے سوال 14.203



شکل 14.47: خاکہ برائے سوال 14.204

سوال 14.204: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ سے مستویات $z = 0$ اور $x + z = 3$ جو خطہ کاٹتے ہیں (شکل 14.47)۔

سوال 14.205: ثُمن اول میں مستویات $x + y + 2z = 2$ اور $2x + 2y + z = 4$ کے بیچ خطہ۔

سوال 14.206: مستویات $z = x$ ، $x + z = 8$ ، $z = y$ ، $y = 8$ اور $z = 0$ کے بیچ متناہی خطہ۔

سوال 14.207: ٹھوس ترخیمی بیلن $x^2 + 4y^2 \leq 4$ سے xy مستوی اور مستوی $z = x + 2$ جو خطہ کاٹتے ہیں۔

سوال 14.208: وہ خطہ جس کا پشت مستوی $x = 0$ ، سامنے اور اطراف قطع مکافی بیلن $x = 1 - y^2$ ، بالا قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے مستوی xy ہوں۔

اوسط قیمتیں

سوال 14.209 تا سوال 14.212 میں دیے گئے خطہ پر $F(x, y, z)$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.209: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ مکعب خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^2 + 9$ لیں۔

سوال 14.210: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x + y - z$ لیں۔

سوال 14.211: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ لیں۔

سوال 14.212: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = xyz$ لیں۔

تکمل کی ترتیب بدلنا

سوال 14.213 تا سوال 14.216 میں موزوں طریقہ سے تکمل کی ترتیب تبدیل کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.213: $\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$

سوال 14.214: $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$

سوال 14.215: $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$

سوال 14.216: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx$

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.217: درج ذیل کو a کے لئے حل کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dz\,dy\,dx = \frac{4}{15}$$

سوال 14.218: ترخیمی سطح $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کا حجم c کی کس قیمت کے لئے 8π ہو گا؟

سوال 14.219: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)\,dH$$

سوال 14.220: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2)\,dH$$

کمپیوٹر

سوال 14.221 تا سوال 14.224 میں دیے گئے خطہ پر تفاعل کا تہرا تکمل کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔

سوال 14.221: مستویات $z = 0$ اور $z = 1$ اور سطح $x^2 + y^2 = 1$ کے بیچ ٹھوس بیلن پر تفاعل $F(x, y, z) = x^2y^2z$ لیں۔

سوال 14.222: ٹھوس خطہ جو نیچے سے قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x, y, z) = |xyz|$ لیں۔

سوال 14.223: ٹھوس خطہ جو نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x, y, z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ لیں۔

سوال 14.224: ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$ لیں۔

14.5 تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر

اس حصہ میں تین بعدی اجسام کی کمیت اور معیار اثر کا حصول کارتیسی محدد میں سکھایا جائے گا۔ یہ کلیات دو بعدی اجسام کے کلیات کی طرح ہیں۔ کروی اور نلکی محدد میں حساب کرنا حصہ 14.6 میں دکھایا جائے گا۔

کمیت اور معیار اثر

فضا میں خطہ D میں پائے جانے والے ایک جسم کی کمیتی کثافت $\delta(x,y,z)$ ہے۔ خطہ D پر δ کا تکمل اس جسم کی کمیت دیگا۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں کر ہو گا ہم اس جسم کو n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.48)۔ جسم کی کمیت درج ذیل حد ہو گی۔

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta H_k=\iiint\limits_D \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}H \tag{14.34}$$

اگر D میں لکیر L سے نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہو، تب L کے لحاظ سے کمیت $\Delta m_k=\delta(x,y_k,z_k)\Delta H_k$ تقریباً $\Delta I_k=r^2(x_k,y_k,z_k)\Delta m_k$ ہو گا۔ یوں L کے لحاظ سے پورے جسم کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$I_L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta I_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r^2(x_k,y_k,z_k)\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta H_k=\iiint\limits_D r^2\delta\,\mathrm{d}H$$

اگر L محور x ہو تب $r^2=y^2+z^2$ ہو گا اور

$$I_x=\iiint\limits_D (y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$

ہو گا۔اسی طرح

$$I_z=\iiint\limits_D (x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}H \quad \text{اور} \quad I_y=\iiint\limits_D (x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$

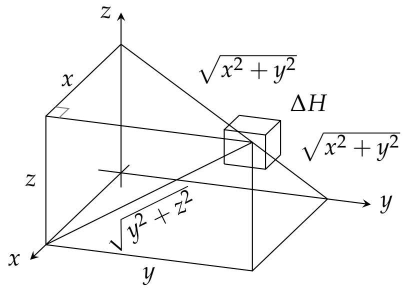
ہوں گے۔ان کلیات کو دیگر کلیات کے ساتھ یہاں یکجا کیا گیا ہے۔

کمیت: $M=\iiint\limits_D \delta\,\mathrm{d}H$ (کثافت $=\delta$)

محددی مستویات کے لحاظ سے معیار اثر اول:

$$M_{yz}=\iiint\limits_D x\delta\,\mathrm{d}H,\quad M_{xz}=\iiint\limits_D y\delta\,\mathrm{d}H,\quad M_{xy}=\iiint\limits_D z\delta\,\mathrm{d}H$$

مرکز کمیت: $\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{M},\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}$



شکل 14.48: محددی محور اور محددی مستویات سے ایک ٹکڑے کے فاصلے۔

جمودی معیار اثر (معیار اثر دوم):

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint (y^2+z^2)\delta \,\mathrm{d}H\\
I_y &= \iiint (x^2+z^2)\delta \,\mathrm{d}H\\
I_z &= \iiint (x^2+y^2)\delta \,\mathrm{d}H
\end{aligned}$$

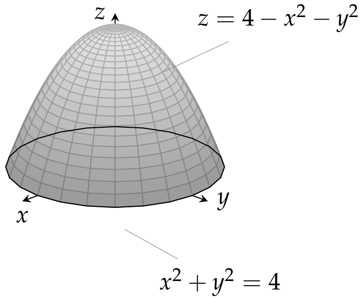
خط L کے لحاظ سے معیار اثر: $I_L = \iiint r^2\delta \,\mathrm{d}H$ (جہاں L سے نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہے۔)

خط L کے لحاظ سے رداس دوار: $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

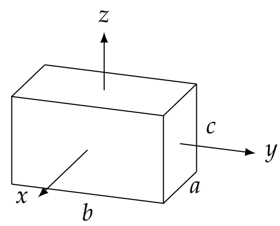
مثال 14.18: مستقل کثافت δ کا مستطیل ٹھوس جسم شکل 14.49 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کریں۔

حل: ہم مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)\delta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{14.35}$$



شکل 14.50: ٹھوس جسم برائے مثال 14.19



شکل 14.49: ٹھوس جسم برائے مثال 14.18

ہو گا۔ چونکہ $\delta(y^2+z^2)$ متغیرات x ، y اور z کا جفت تفاعل ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
I_x &= 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2}(y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\Big[\frac{y^3}{3}+z^2y\Big]_{y=0}^{y=b/2}\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\Big(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\Big)\,\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\Big(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\Big) = \frac{abc\delta}{12}(b^2+c^2) = \frac{M}{12}(b^2+c^2)
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2) \quad \text{اور} \quad I_y = \frac{M}{12}(a^2+c^2)$$

□

مثال 14.19: مستقل کثافت δ کے جسم کی نچلی سرحد مستوی $z=0$ میں قرص $R: x^2+y^2 \le 4$ ہے جبکہ اس کی بالائی حد قطع مکافی $z = 4 - x^2 - y^2$ ہے (شکل 14.50)۔ اس جس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: تشاکلی کی بنا $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہمیں $\bar{z}$ معلوم کرنے کے لئے پہلے درج ذیل دریافت کرنے ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint\limits_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\delta \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint\limits_R \Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2}\iint\limits_R (4-x^2-y^2)^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r)^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta && \text{قطبی محدد} \\
&= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{1}{6}(4-r^2)^3\Big]_{r=0}^{r=2}\mathrm{d}\theta = \frac{16\delta}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{32\pi\delta}{3}
\end{aligned}$$

اسی طرح

$$M = \iint\limits_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 8\pi\delta$$

ہو گا۔یوں $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4}{3}$ اور مرکز کمیت $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ ہو گا۔ □

جب جسم کی کثافت اٹل ہو (جیسا مثال 14.18 اور مثال 14.19 میں تھا)، تب (دو بعدی اجسام کی طرح) مرکز کمیت اس جسم کا **وسطانی مرکز**[15] ہو گا۔

سوالات

مستقل کثافت

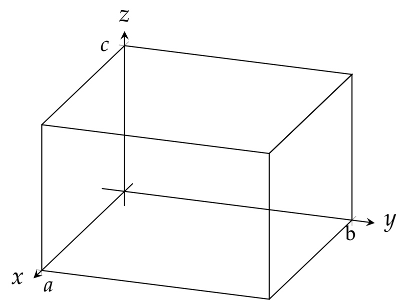
سوال 14.225 تا سوال 14.236 میں کثافت $\delta = 1$ ہے۔

سوال 14.225: جمودی معیار اثر کی مساوات 14.35 کو سیدھا حل کر کے مثال 14.18 میں مستعمل چھوٹے طریقہ کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔ مثال 14.18 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس جسم کے رداس دوار تلاش کریں۔

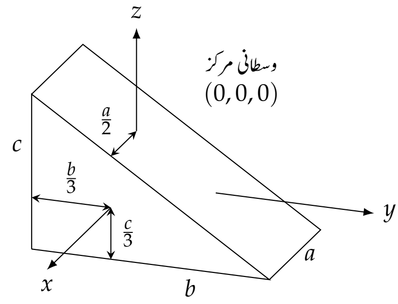
سوال 14.226: ایک پچر کے وسطانی مرکز گزرتے محددی محور پچر کے کناروں کے متوازی ہیں (شکل 14.51)۔اگر $a = b = 6$ اور $c = 4$ تب I_x ، I_y اور I_z کیا ہوں گے۔

سوال 14.227: مستطیل ٹھوس جسم کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کرتے ہوئے جسم کے کناروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں (شکل 14.52)۔

[15] centroid



شکل 14.52: مستطیل ٹھوس جسم برائے سوال 14.227



شکل 14.51: پچر برائے سوال 14.226

سوال 14.228: (ا) ایک چو سطحہ جس کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ ہیں کا وسطانی مرکز اور I_x ، I_y اور I_z تلاش کریں۔ (ب) محور x کے لحاظ سے اس چو سطحہ کا رداس دوار معلوم کریں۔ محور x سے وسطانی مرکز تک فاصلہ کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔

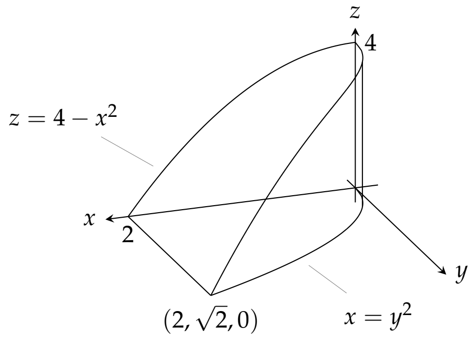
سوال 14.229: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس "کونڈا" کی زیریں سرحدی سطح $z = 4y^2$ ، بالائی سرحدی سطح $z = 4$ اور اطراف مستویات $x = 1$ اور $x = -1$ ہیں۔ اس کی مرکز کمیت اور تینوں محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.230: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد مستوی $z = 0$ ، بالائی سرحد مستوی $z = 2 - x$ اور اس کے اطراف ترخیمی بیلن $x^2 + 4y^2 = 4$ ہے (شکل 14.53)۔ (ا) $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔ آخری تکمل میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے آپ کو تکملات کا جدول استعمال کرنا ہو گا۔ $M_{xy} = \int_{-2}^{2}\int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2-x} z\,dz\,dy\,dx$ اس کے بعد M_{xy} کو M سے تقسیم کر کے تصدیق کریں کہ $\bar{z} = \frac{5}{4}$ ہو گا۔

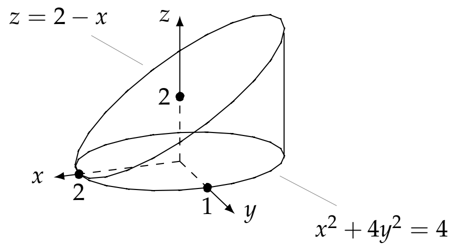
سوال 14.231: (ا) مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور بالائی سرحد مستوی $z = 4$ ہے۔ اس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ (ب) وہ مستوی $z = c$ دریافت کریں جو اس جسم کو برابر حجم کے دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتا ہو۔ یہ مستوی اس جسم کے مرکز کمیت سے نہیں گزرتا ہے۔

سوال 14.232: ایک ٹھوس مکعب کے اضلاع کی لمبائیاں 2 اکائیاں ہے۔ یہ مستویات $x = \mp 1$ ، $z = \mp 1$ ، $y = 3$ اور $y = 5$ کے بیچ واقع ہے۔ اس مکعب کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے مکعب کے رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.233: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 14.226 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L: y = 6, z = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (y-6)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔



شکل 14.54: ٹھوس جسم برائے سوال 14.238



شکل 14.53: ٹھوس جسم برائے سوال 14.230

سوال 14.234: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 14.226 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L: x = 4, y = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال 14.235: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 14.227 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L: y = 2, z = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (y-2)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.236: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 14.227 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L: x = 4, y = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 14.237 اور سوال 14.238 میں (ا) جسم کی کمیت اور (ب) اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.237: ثُمن اول میں ایک ٹھوس جسم جو محددی مستویات اور مستوی $x + y + z = 2$ کے بیچ واقع ہے۔ اس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2x$ ہے۔

سوال 14.238: ثُمن اول میں مستویات $y = 0$ اور $z = 0$ اور سطح $z = 4 - x^2$ اور سطح $x = y^2$ کے بیچ واقع جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (شکل 14.54)۔

سوال 14.239 اور سوال 14.240 میں درج ذیل تلاش کریں۔

ا. اس جسم کی کمیت۔

ب. اس جسم کا مرکز کمیت۔

ج. محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر۔

د. محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دور۔

سوال 14.239: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ ٹھوس مکعب جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے۔

سوال 14.240: ایک مستطیل ٹھوس جسم جس کے $a = 2$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 14.226 دیکھیں) کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + 1$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل کثافت کی صورت میں اس جسم کا مرکز کمیت $(0, 0, 0)$ ہو گا۔

سوال 14.241: مستویات $x + z = 1$ ، $x - z = -1$ ، $y = 0$ اور سطح $y = \sqrt{z}$ کے بیچ واقع ٹھوس جسم جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2y + 5$ ہے۔

سوال 14.242: قطع مکافی سطح $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ اور $z = 2x^2 + 2y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ اس جسم کی کمیت تلاش کریں۔

کام

سوال 14.243 اور سوال 14.244 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. مکمل بھرے ہوئے برتن سے سیال کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟ (اشارہ: برتن میں سیال کو چھوٹے چھوٹے حجم کے ٹکڑوں ΔH_k میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کو منتقل کرنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے سیال کو منتقل کرنے کا کام ہو گا۔ یہ مجموعہ، حد کی صورت میں، تہرا تکمل دیگا جس کی قیمت آپ کو معلوم کرنی ہو گی۔)

ب. مکمل بھرے ہوئے برتن میں سیال کے مرکز کمیت کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟

سوال 14.243: برتن ثُمن اول میں کعبی ڈبہ کی صورت کا ہے جو محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے (سوال 14.239 دیکھیں)۔

سوال 14.244: مستویات $y = 0$ ، $z = 0$ اور سطحوں $z = 4 - x^2$ ، $x = y^2$ کے بیچ برتن پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (سوال 14.238 دیکھیں)۔

مسئلہ متوازی محور

مسئلہ متوازی محور (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں ایک جسم جس کی کمیت m ہو کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہو جس کے متوازی h فاصلہ پر خط L پایا جاتا ہو۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے اس جسم کے جمودی معیار اثر درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{14.36}$$

دو بعدی صورت کی طرح اگر ہمیں ایک جمودی معیار اثر، فاصلہ h اور جسم کی کمیت m معلوم ہو تب ہم اس مسئلہ کی مدد سے دوسرا جمودی معیار اثر باآسانی دریافت کر سکتے ہیں۔

سوال 14.245: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

ا. پہلے دکھائیں کہ جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے فضا میں کسی بھی مستوی کے لحاظ سے معیار اثر اول صفر ہو گا۔ (اشارہ: جسم کے مرکز کمیت کو مبدا پر اور مستوی کو مستوی yz لیں۔ تب کلیہ $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$ کیا معلومات فراہم کرتا ہے؟)

ب. جسم کے مرکز کمیت کو بدا پر، خط $L_{c,m}$ کو محور z پر، اور نقطہ $(h, 0, 0)$ پر L کو مستوی xy کا متوازی رکھیں۔ فرض کریں یہ جسم فضا میں خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ تب شکل کے لحاظ سے درج ذیل ہو گا۔

$$I_L = \iiint\limits_D |\boldsymbol{v} - h\boldsymbol{i}|^2 \, \mathrm{d}m \tag{14.37}$$

اس تکمل کو پھیلا کر حل کر کرتے ہوئے ثبوت مکمل کریں۔

سوال 14.246: مستقل کثافت، رداس a کے کرہ قطر کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $\frac{2}{5}ma^2$ ہو گا جہاں کرہ کی کمیت m ہے۔ کرہ کو مماسی خط کے لحاظ سے کرہ کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.247: محور z کے لحاظ سے سوال 14.227 کے جسم کا جمودی معیار اثر $I_z = \frac{1}{3}abc(a^2 + b^2)$ ہے۔

ا. مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے اس ٹھوس جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے، محور z کے متوازی خط کے لحاظ سے جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

ب. جزو-ا کے نتائج اور مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے خط $x = 0, \; y = 2b$ کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.248: اگر سوال 14.226 کے پچر میں $a = b = 6$ اور $c = 4$ ہوں محور x کے لحاظ سے $I_x = 208$ ہو گا۔ اس پچر کا خط $y = 4,\ z = -4/3$ (پچر کے تنگ سر کے کنارہ) کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

کلیہ پاپس

کلیہ پاپس (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں دو اجسام B_1 اور B_2 جن کی کمیتیں بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں فضا میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے خطوں میں پائے جاتے ہیں۔ مبدا سے ان اجسام کے مراکز کمیت تک سمتیات بالترتیب $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ ہیں۔تب ان کے اشتراک $B_1 \cup B_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{14.38}$$

پہلے کی طرح، اس کو **کلیہ پاپس**[16] کہتے ہیں۔ دو بعدی صورت کی طرح، n عدد اجسام کے لئے اس کلیہ کی عمومی روپ درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{14.39}$$

سوال 14.249: کلیہ پاپس (مساوات 14.38) اخذ کریں۔ (اشارہ: ثُمن اول میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے اجسام B_1 اور B_2 کا خاکہ بنا کر ان کے مراکز کمیت کو $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ سے ظاہر کریں۔ کمیت m_1 اور m_2 اور ان کمیت کے مراکز کے محدد کی صورت میں محددی مستویات کے لحاظ سے $B_1 \cup B_2$ کے معیار اثر حاصل کریں۔)

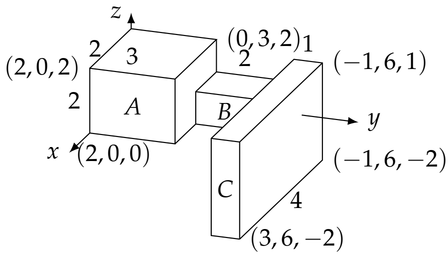
سوال 14.250: مستقل کثافت $\delta = 1$ کے تین مستطیل ٹھوس اجسام سے ایک جسم حاصل کیا گیا ہے (شکل 14.55)۔ کلیہ پاپس استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کے مراکز کمیت تلاش کریں۔

ا. $A \cup B$ ب. $A \cup C$ ج. $B \cup C$ د. $A \cup B \cup C$

سوال 14.251:

---

[16] Pappus's formula



شکل 14.55: ٹھوس جسم برائے سوال 14.250

ا. قد h اور رداس r کے قاعدہ کا دائری ٹھوس مخروط C ، رداس a کے ٹھوس نصف کرہ S پر قلفی کی طرح جمایا گیا ہے۔ ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی ($\frac{1}{4}$) فاصلہ پر واقع ہے۔ نصف کرہ کے وسطانی مرکز قاعدہ سے سر کے رخ تین آٹھواں ($\frac{3}{8}$) فاصلہ دور ہے۔ مشترک جسم $C \cup S$ کا مرکز مشترک قاعدہ پر رکھنے کی خاطر a اور h کے بیچ تعلق معلوم کریں۔

ب. اگر آپ نے حصہ 14.2 میں معادل سوال 14.125 کو اب تک حل نہ کیا ہو، تب اس کو حل کریں۔ دونوں کے جواب ایک جیسے نہیں ہیں۔

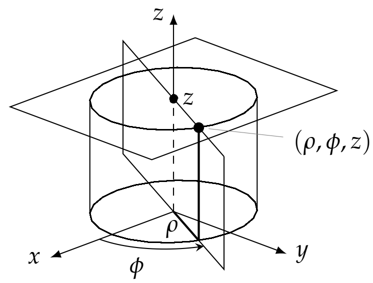
سوال 14.252: ایک ٹھوس اہرام P جس کا قد h اور مماثل چار اضلاع ہیں کا قاعدہ ٹھوس مکعب C کا ایک مربعی سطح ہے جس کے اضلاع کی لمبائیاں s ہے۔ ٹھوس اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی فاصلہ پر ہے۔ ٹھوس جسم $P \cup C$ کا وسطانی مرکز اہرام کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر s اور h کا تعلق دریافت کریں۔ سوال 14.251 کے نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔ حصہ 14.2 میں سوال 14.126 کے نتیجہ کے ساتھ بھی موازنہ کریں۔

14.6 نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل

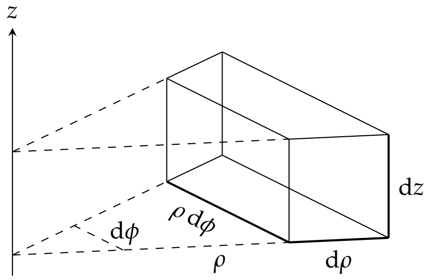
انجینئری، طبیعیات اور جیومیٹری میں مخروط ، بیلن یا کرہ کے ساتھ کام نلکی اور کروی محدد میں زیادہ آسان ہوتا ہے۔

نلکی محدد

جن بیلن کا محور z محدد پر پایا جاتا ہو اور وہ مستویات جن میں z محدد پایا جاتا ہو یا جو z محدد کے عمودی ہوں، کو نلکی محدد میں بیان کرنا نہایت آسان ہوتا ہے (شکل 14.56)۔



شکل 14.56: نلکی محدد میں مستقل محدد سطحیں۔



شکل 14.57: نلکی محدد میں چھوٹا حجم $\mathrm{d}H = \mathrm{d}z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں ان سطحوں کی مساوات مستقل محددی صورت رکھتی ہیں۔

$$\rho = 4$$
$$\phi = \frac{\pi}{3}$$
$$z = 2$$

فضا میں خطہ کی نلکی محدد میں مستطیلی خانہ بندی کا ایک خانہ شکل 14.57 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر z محدد سے اس خانے کی وسط تک رداس ρ ہو تب خانے کے اندرونی اور بیرونی سطحوں کے رداس بالترتیب $\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2}$ اور $\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2}$ ہوں گے۔اس چھوٹے خانے کو نقطہ دار لکیروں سے z محدد تک بڑھا کر حجم $\frac{1}{2}(\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ حاصل ہو گا جس میں سے اضافی حجم $\frac{1}{2}(\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ منفی کر کے چھوٹے حصہ کا حجم معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

چھوٹے مستطیل خانے کی وسطی (یا اندرونی قوسی) چوڑائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ ، لمبائی $\mathrm{d}\rho$ اور قد $\mathrm{d}z$ لے کر

$$\mathrm{d}H = (\rho\,\mathrm{d}\phi)(\mathrm{d}\rho)(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

حجم زیادہ آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح خانے کی سامنے (یا پشت) سطح کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ ، نچلی (یا بالائی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$ اور قوسی (اندرونی یا بیرونی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔ یوں نلکی محدد میں تہرا تکملات کو بطور بارہا تکملات حل کیا جائے گا۔ ایسا اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.20: خطہ D پر تفاعل $f(\rho,\phi,z)$ کی نلکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کریں۔ خطہ D نیچے سے مستوی $z = 0$ اور اطراف سے دائری بیلن $x^2 + (y-1)^2 = 1$ جبکہ اوپر سے قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کے بیچ پایا جاتا ہے (شکل 14.58)۔

حل

1. خاکہ بنانا: D کا قاعدہ ہی مستوی xy پر D کی تظلیل R ہو گی۔ تظلیل R کی سرحد دائرہ $x^2 + (y-1)^2 = 2$ ہو گی جس کی قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}x^2 + (y-1)^2 &= 1\\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 1\\ \rho^2 - 2\rho\sin\phi &= 0\\ \rho &= 2\sin\phi\end{aligned}$$

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں عمومی نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہوئی لکیر M، جو z محدد کے متوازی ہو D میں $z = 0$ پر داخل اور $z = x^2 + y^2 = \rho^2$ پر خارج ہو گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے خط L جو نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتا ہو، R میں $\rho = 0$ پر داخل اور $\rho = 2\sin\phi$ پر خارج ہو گا۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: خط L جھاڑو کی طرح R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ $\phi = 0$ اور $\phi = \pi$ کے بیچ رہتا ہے۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D f(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}H = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\int_0^{\rho^2} f(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

□

اس مثال میں ہم نے نلکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنا سیکھا۔

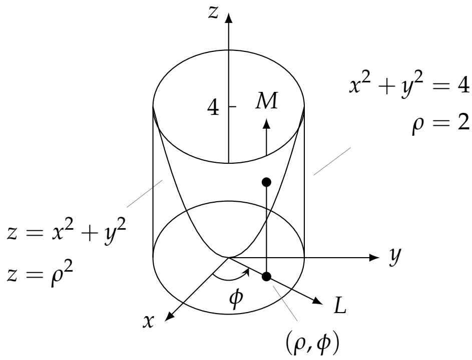
مثال 14.21: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ میں بند ٹھوس جسم جو اوپر سے قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy کے بیچ پایا جاتا ہو، کا وسطانی مرکز تلاش کریں (شکل 14.21)۔ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta = 1$ ہے۔

حل

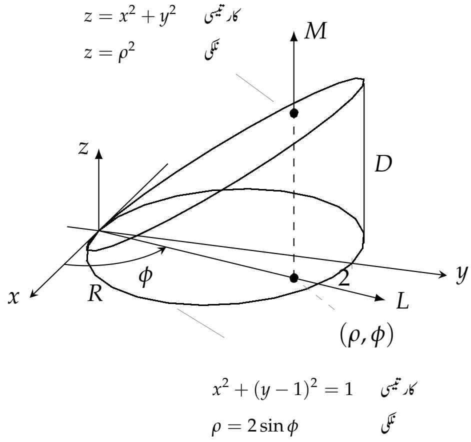
ہم اوپر سے قطع کافی $z = \rho^2$ اور نیچے سے مستوی $z = 0$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس کا قاعدہ R مستوی xy میں قرص $|\rho| \le 2$ ہو گا۔

ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تشاکلی محور پر ہو گا جو محور z ہے۔ یوں $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہم معیار اثر M_{xy} کو کمیت M سے تقسیم کر کے $\bar{z}$ تلاش کرتے ہیں۔

کمیت اور معیار اثر کے تکملات کی حدیں تلاش کرنے کی خاطر ہم وہی چار مخصوص قدم لیتے ہیں۔ خاکہ بنا کر ہم پہلا قدم مکمل کر چکے ہیں۔ باقی اقدام درج ذیل ہیں۔



شکل 14.59: جسم برائے مثال 14.21



شکل 14.58: جسم برائے مثال 14.20

2. تکمل کی z حدیں: علامتی نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتی ہوئی، محدد z کی متوازی لکیر M، ٹھوس جسم میں $z=0$ سے داخل اور $z=\rho^2$ سے خارج ہو گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے شروع نقطہ ρ,ϕ سے گزرتی ہوئی لکیر L خطہ R میں $\rho=0$ سے داخل اور $\rho=2$ سے خارج ہو گی۔

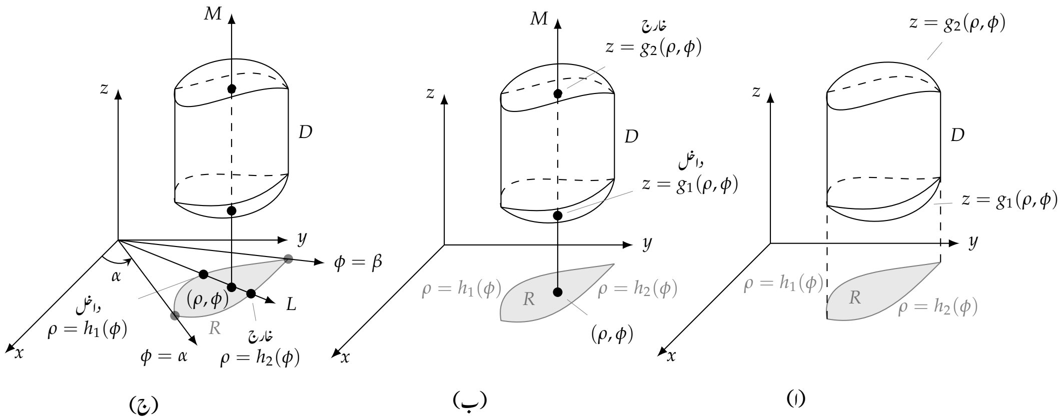
4. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L قاعدہ پر گھڑی کی سوئی کی طرح گھومتی ہوئی $\phi=0$ سے $\phi=2\pi$ تک طے کرتی ہے۔

یوں M_{xy} کی قیمت

$$\begin{aligned}M_{xy}&=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\rho^2} z\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^2\frac{\rho^5}{2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^6}{12}\right]_0^{\rho^2}\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}\,\mathrm{d}\phi=\frac{32\pi}{3}\end{aligned}$$

اور M کی قیمت

$$\begin{aligned}M&=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\rho^2}\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^2\Big[z\Big]_0^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^2\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}4\,\mathrm{d}\phi=8\pi\end{aligned}$$



شکل 14.60: نلکی محدد میں تہرا تکمل کی حدوں کا تعین۔

ہو گی لہٰذا

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$$

ہو گا۔ وسطانی مرکز $(0, 0, 4/3)$ ہو گا جو ٹھوس جسم سے باہر ہے۔ □

نلکی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر تکمل

$$\iiint\limits_D f(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}H$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے نلکی محدد میں پہلے z، اس کے بعد ρ اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy پر اس کی تظلیل R کا خاکہ بنائیں۔ D اور R کی سرحدی سطحوں اور منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل 14.60-ا)۔

2. تکمل کی z حدیں: R میں علامتی نقطہ (ρ, ϕ) پر محور z کے متوازی ایک علامتی لکیر M کھینچیں جو بڑھ کر D میں $z = g_1(\rho, \phi)$ سے داخل اور $z = g_2(\rho, \phi)$ سے خارج ہو گی (شکل 14.60-ب)۔ یہی تکمل کی z حدیں ہوں گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے ایک لکیر L کھینچیں جو نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہو۔ یہ شعاع خطہ R میں $\rho = h_1(\phi)$ سے داخل اور $\rho = h_2(\phi)$ سے خارج ہو گی (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکمل کی ρ حدیں ہوں گی۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L خطہ R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ زاویہ $\phi = \alpha$ اور $\phi = \beta$ کے بیچ رہتی ہے (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D f(\rho, \phi, z) \, \mathrm{d}H = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\rho=h_1(\phi)}^{\rho=h_2(\phi)} \int_{z=g_1(\rho,\phi)}^{z=g_2(\rho,\phi)} f(\rho, \phi, z) \, \mathrm{d}z \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \tag{14.40}$$

کروی محدد

ایسے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں، وہ نصف چادر جن کا چول محور z ہو، اور وہ مخروط جن کا راس مبدا پر اور محور محددی نظام کے محور z پر ہو، کو کروی محدد (شکل 14.61) میں بیان کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ ان سطحوں کی مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔ اس نظام میں کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کے محدد (r_0, θ_0, ϕ_0)، آپس میں عمودی تین سطحوں $r = r_0$، $\theta = \theta_0$، $\phi = \phi_0$ کا نقطہ ملاپ ہو گا (شکل 14.62)۔

$$r = 4 \qquad \text{کرہ، جس کا رداس 4 اور مرکز مبدا پر ہے}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad \text{مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہوا مخروط جو مثبت } z \text{ محور کے ساتھ } \pi/3 \text{ زاویہ بناتا ہے}$$

$$\phi = \frac{\pi}{3} \qquad \text{نصف چادر جس کا چول محور } z \text{ ہے اور جو مثبت } x \text{ محور کے ساتھ } \pi/3 \text{ زاویہ بناتا ہے}$$

کروی محدد میں چھوٹے مستطیل حجم سے مراد وہ **کروی پچر**[17] ہے جس کو $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ تعین کرتے ہیں۔ یہ پچر تقریباً مستطیلی ہو گا جس کے ایک اطراف کی قوسی لمبائی $r\,\mathrm{d}\theta$، دوسرے طرف کی قوسی لمبائی $r \sin\theta \, \mathrm{d}\phi$ اور موٹائی $\mathrm{d}r$ ہو گی۔ یوں کروی محدد میں چھوٹے ٹکڑے کا حجم $\mathrm{d}H$ (شکل 14.63)

$$\mathrm{d}H = (\mathrm{d}r)(r \sin\theta \, \mathrm{d}\phi)(r \, \mathrm{d}\theta) = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{14.41}$$

ہو گا اور تہرا تکمل کی صورت درج ذیل ہو گی۔

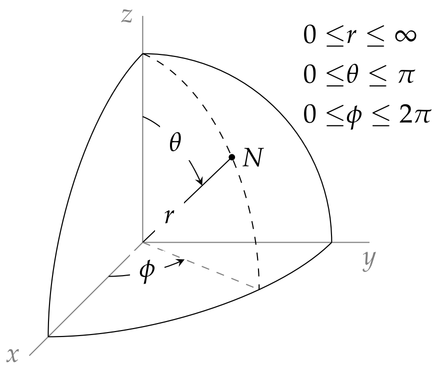
$$\iiint F(r, \theta, \phi) \, \mathrm{d}H = \iiint F(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

ہم عموماً پہلے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔ ہم صرف ان تکملات پر غور کریں گے جو z محور کے لحاظ سے اجسام طواف (یا ان کا حصہ) ہوں اور جن کے θ اور ϕ حدیں مستقل ہوں۔

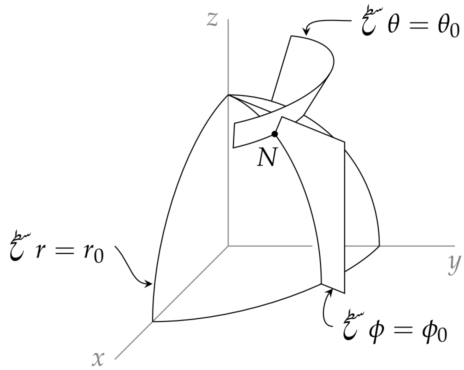
اس مستطیلی پچر کی سطحیں شکل 14.64 میں دکھائی گئی ہیں۔

---

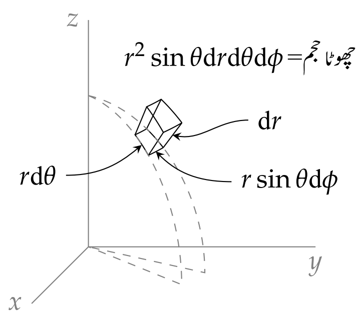
[17] spherical wedge



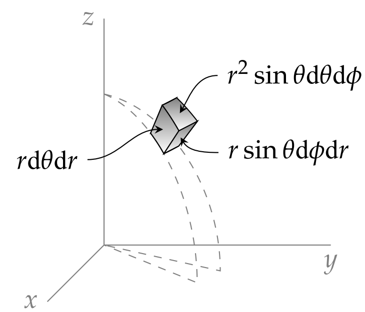
شکل 14.61: کروی محدد کی پیمائش ایک فاصلہ اور دو زاویات کی مدد سے کی جاتی ہے۔



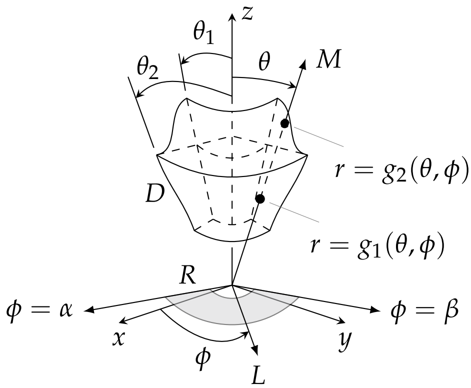
شکل 14.62: کروی محدد میں تین آپس میں عمودی سطحیں نقطہ N تعین کرتے ہیں۔

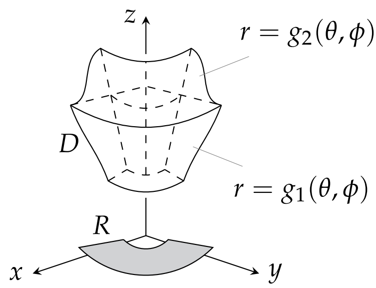


شکل 14.63: کروی محدد میں چھوٹا حجم۔



شکل 14.64: کروی محدد میں چھوٹی سطحیں۔





شکل 14.65: کروی محدد میں تہرا تکمل کے حدوں کی تلاش۔

کروی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر تکمل

$$\iiint\limits_D F(r, \theta, \phi)\,\mathrm{d}H$$

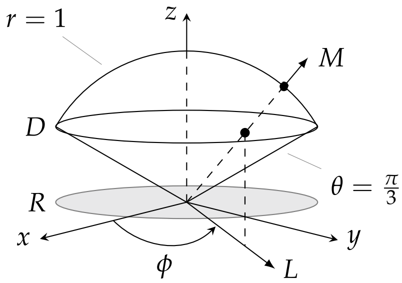
کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے r، اس کے بعد θ، اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy میں D کی تظلیل R کا خاکہ بنا کر D کی سرحدی سطحوں کی نشاندہی کریں (شکل 14.65)۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے ایک لکیر M کھینچیں جو مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ϕ بناتی ہو۔ ساتھ ہی R پر M کی تظلیل L کا خاکہ بنائیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بنائی گی۔ جیسے جیسے r بڑھے گا M خطہ D میں $r = g_1(\theta, \phi)$ سے داخل اور $r = g_2(\theta, \phi)$ سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی r حدیں ہوں گی۔

3. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے M مثبت محور z کے ساتھ $\theta = \theta_1$ سے $\theta = \theta_2$ تک زاویہ بنائے گی۔ یہی تکمل کی θ حدیں ہوں گی۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے L خطہ R پر جھاڑو کی طرح چلتے ہوئے $\phi = \alpha$ سے $\phi = \beta$ تک چلتی ہے۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔



شکل 14.66: کرہ اور مخروط کے بیچ خطہ۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D F(r,\theta,\phi)\,\mathrm{d}H=\int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r=g_1(\theta,\phi)}^{r=g_2(\theta,\phi)}F(r,\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

مثال 14.22: ٹھوس کرہ $r\le 1$ سے مخروط $\theta=\pi/3$ بالائی خطہ D کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا حجم تلاش کریں۔ حل: اس خطے کا حجم $\iiint\limits_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔ تکمل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: ہم D اور مستوی xy میں اس کی تظلیل R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 14.66)۔

2. تکمل کی r حدیں: ہم مثبت z محور کے ساتھ θ زاویہ پر مبدا سے شعاع M کھینچتے ہیں اور ساتھ ہی xy مستوی میں اس کی تظلیل L کھینچتے ہیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بناتا ہے۔ شعاع M خطہ D میں $(r=0$ سے داخل اور $r=1$ سے خارج ہو گا۔

3. تکمل کی θ حدیں: مخروط $\theta=\pi/3$ مثبت z محور کے ساتھ زاویہ $\pi/3$ بناتا ہے۔ یوں شعاع M زاویہ $\theta=0$ سے $\theta=\pi/3$ تک چل سکتی ہے۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: شعاع L خطہ R پر $\phi=0$ سے 2π تک چلتی ہے۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H&=\iiint\limits_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\
&=\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{1}{3}\cos\theta\Big]_0^{\pi/3}\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\Big)\,\mathrm{d}\phi=\frac{1}{6}(2\pi)=\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

□

مثال 14.23: مستقل کثافت $\delta = 1$ کا ایک ٹھوس جسم مثال 14.22 کے خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: کارتیسی محدد میں جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}H$$

ہو گا۔ کروی محدد میں $x^2 + y^2 = (r \sin\theta \cos\phi)^2 + (r \sin\theta \sin\phi)^2 = r^2 \sin^2\theta$ کی بنا جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (r^2 \sin^2\theta) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \iiint r^4 \sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

ہو گا جس کی قیمت مثال 14.22 کے خطہ کے لئے درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 r^4 \sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1 \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\Big]_0^{\pi/3}\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}\Big)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{24}\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

□

محددی بدل کے کلیات

نلکی سے کارتیسی	کروی سے کارتیسی	کروی سے نلکی
$x = \rho\cos\phi$	$x = r\sin\theta\cos\phi$	$\rho = r\sin\theta$
$y = \rho\sin\phi$	$y = r\sin\theta\sin\phi$	$z = r\cos\theta$
$z = z$	$z = r\cos\theta$	$\phi = \phi$

مطابقتی چھوٹے حجم درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z && \text{کارتیسی}\\
&= \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi && \text{نلکی}\\
&= r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi && \text{کروی}
\end{aligned}$$

سوالات

نلکی محدد

سوال 14.253 تا سوال 14.258 میں تکمل کی قیمت نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 14.253: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.254: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{18-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.255: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2\pi}\int_0^{3+24\rho^2} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.256: $\int_0^{\pi}\int_0^{\phi/\pi}\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{3\sqrt{4-\rho^2}} z\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.257: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{1/\sqrt{2-\rho^2}} 3\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.258: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2} (\rho^2\sin^2\phi+z^2)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

اب تک ہم نلکی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب z ، ρ ، ϕ سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 14.259 تا سوال 14.262 کے تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

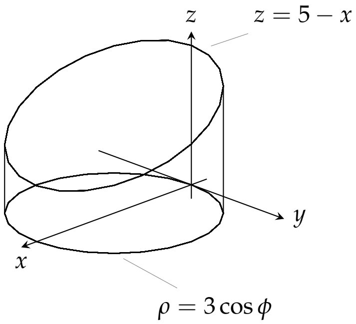
سوال 14.259: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.260: $\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\phi} 4\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

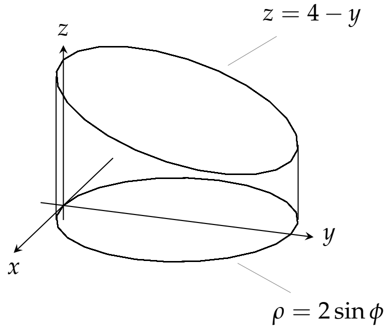
سوال 14.261: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2\phi+z^2)\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

سوال 14.262: $\int_0^2\int_{\rho-2}^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi} (\rho\sin\phi+1)\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 14.263: نیچے سے مستوی $z=0$ ، اوپر سے کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ ، اور اطراف سے بیلن $x^2+y^2=1$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔



شکل 14.68: خطہ برائے سوال 14.268



شکل 14.67: خطہ برائے سوال 14.267

ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 14.264: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، اوپر سے قطع مکافی $z = 2 - x^2 - y^2$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

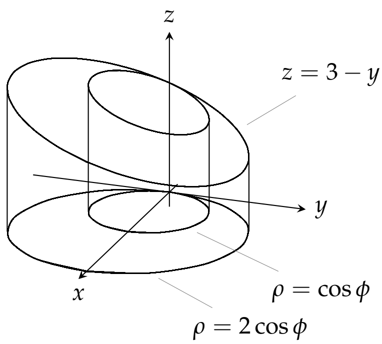
سوال 14.265: نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اطراف سے بیلن $\rho = \cos\phi$ ، اور اوپر سے قطع مکافی سطح $z = 3\rho^2$ میں ملفوف خطہ D کے لئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کرنے کے لئے کے تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

$$\iiint F(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

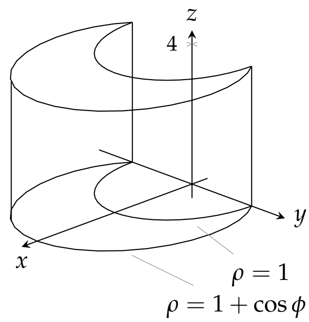
سوال 14.266: درج ذیل تکمل کو معادل نلکی محدد کے تکمل میں تبدیل کر اس کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.267 تا سوال 14.272 میں دیے گئے خطہ D پر تکمل $\iiint_D F(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے تہرا تکمل لکھیں۔



شکل 14.70: خطہ برائے سوال 14.270



شکل 14.69: خطہ برائے سوال 14.269

سوال 14.267: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 2\sin\phi$ اور سر مستوی $z = 4 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.67)۔

سوال 14.268: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 3\cos\phi$ اور سر مستوی $z = 5 - x$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.68)۔

سوال 14.269: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں قلب نما $\rho = 1 + \cos\phi$ کے اندر اور دائرہ $\rho = 1$ کے باہر اور سر مستوی $z = 4$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.69)۔

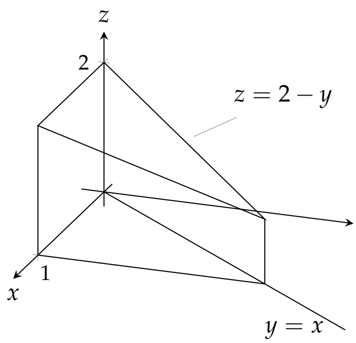
سوال 14.270: وہ ٹھوس قائمہ بیلن جس کا قاعدہ دائرہ $\rho = \cos\phi$ اور دائرہ $\rho = 2\cos\phi$ کے بیچ اور سر مستوی $z = 3 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.70)۔

سوال 14.271: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور x، لکیر $y = x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.71)۔

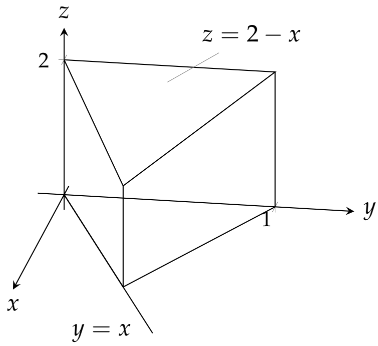
سوال 14.272: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور y، لکیر $y = x$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - x$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.72)۔

کروی محدد

سوال 14.273 تا سوال 14.278 میں کروی تکملات کی قیمت تلاش کریں۔



شکل 14.71: خطہ برائے سوال 14.271



شکل 14.72: خطہ برائے سوال 14.272

سوال 14.273: $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.274: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2}(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.275: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\theta)/2} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.276: $\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 5r^3\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.277: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\theta}^{2} 3r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

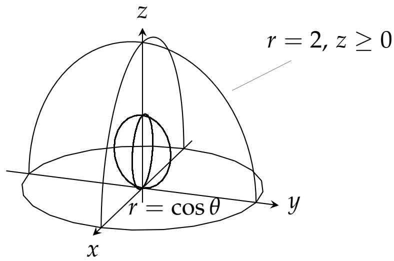
سوال 14.278: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

اب تک ہم کروی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔سوال 14.279 تا سوال 14.282 میں تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

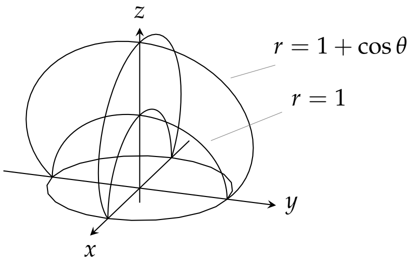
سوال 14.279: $\int_0^{2}\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$

سوال 14.280: $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2\csc\theta}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

سوال 14.281: $\int_0^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} 12r\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$



شکل 14.73: جسم برائے سوال 14.285



شکل 14.74: جسم برائے سوال 14.286

سوال 14.282: $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\csc\theta}^{2} 5r^4 \sin^3\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$

سوال 14.283: کروی محدد میں (ا) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ، (ب) $\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ ترتیب سے سوال 14.263 کے خطہ کے حجم کے تہرا تکمل لکھیں۔

سوال 14.284: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ کے بیچ خطہ D کے حجم کا تکمل کروی محدد میں(ا) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ، (ب) $\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ ترتیب کے لئے لکھیں۔

سوال 14.285 تا سوال 14.290 میں دئے گئے ٹھوس جس کے حجم کے کروی تکمل (ا) کی حدیں تلاش کریں۔ (ب) کروی تکمل حل کرتے ہوئے جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 14.285: کرہ $r = \cos\theta$ اور نصف کرہ $r = 2,\, z \geq 0$ کے بیچ ٹھوس جسم (شکل 14.73)۔

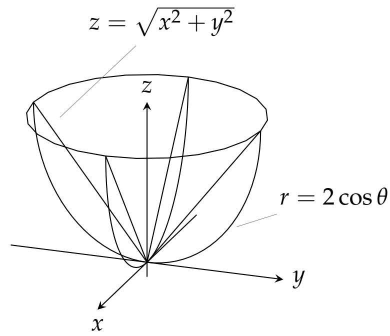
سوال 14.286: نیچے سے نصف کرہ $r = 1,\, z \geq 0$ اور اوپر سے سطح طواف قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ میں ملفوف ٹھوس جسم (شکل 14.74)۔

سوال 14.287: جسم طواف قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ میں ملفوف۔

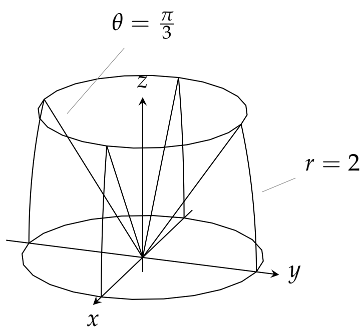
سوال 14.288: وہ بالائی خطہ جو سوال 14.287 کے جسم سے مستوی xy کاٹتا ہے۔

سوال 14.289: نیچے سے کرہ $r = 2\cos\theta$ اور اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ میں ملفوف جسم (شکل 14.75)۔

سوال 14.290: نیچے سے مستوی xy ، اوپر سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور اطراف سے کرہ $r = 2$ میں ملفوف جسم (شکل 14.76)۔



شکل 14.75: جسم برائے سوال 14.289



شکل 14.76: جسم برائے سوال 14.290

کارتیسی، نلکی اور کروی محدد

سوال 14.291: کرہ $r = 2$ کے حجم کا تہرا تکمل (ا) کروی، (ب) نلکی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔

سوال 14.292: ثُمن اول میں نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور اوپر سے کرہ $r = 3$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کا تہرا تکمل (ا) نلکی اور (ب) کروی محدد میں لکھیں۔ (ج) اس کے بعد اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.293: رداس 2 اکائیاں کے کرہ کو، کرہ سے مرکز سے 1 اکائی دور، مستوی دو ٹکڑوں میں کاٹتی ہے۔ چھوٹے ٹکڑے کے حجم کا تہرا تکمل (ا) کروی، (ب) نلکی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔ (د) اس ٹکڑے کا حجم کسی ایک تہرا تکمل کو حل کرتے ہوئے معلوم کریں۔

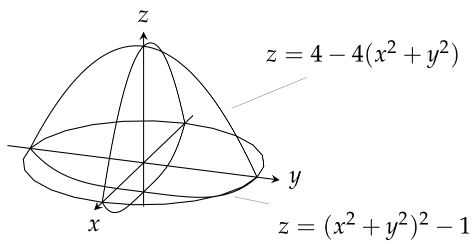
سوال 14.294: ٹھوس نصف کرہ $x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0$ کے جمودی معیار اثر I_z کو (ا) نلکی اور (ب) کروی محدد میں لکھیں۔ (ج) I_z کی قیمت تلاش کریں۔

حجم

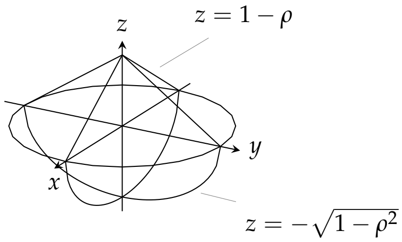
سوال 14.295 تا سوال 14.300 میں ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 14.295: اوپر سے $z = 4 - 4(x^2+y^2)$ اور نیچے سے $z = (x^2+y^2)^2 - 1$ میں ملفوف جسم (شکل 14.77)۔

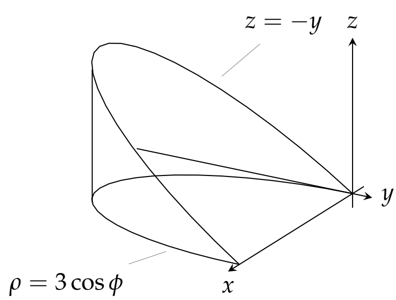
سوال 14.296: اوپر سے $z = 1 - \rho$ اور نیچے سے $z = -\sqrt{1-\rho^2}$ میں ملفوف جسم (شکل 14.78)۔



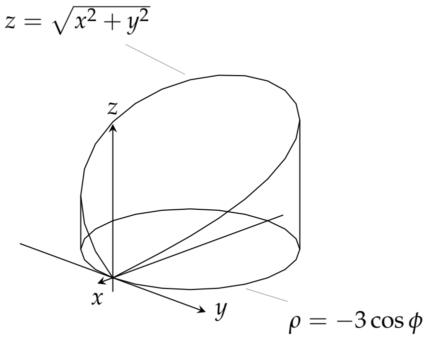
شکل 14.77: جسم برائے شکل 14.295



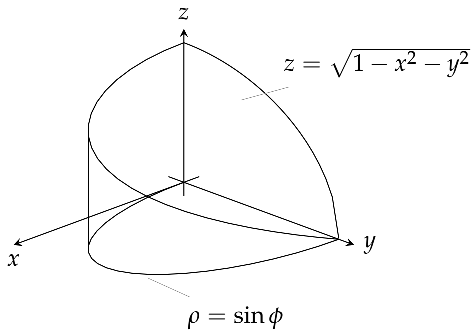
شکل 14.78: جسم برائے شکل 14.296



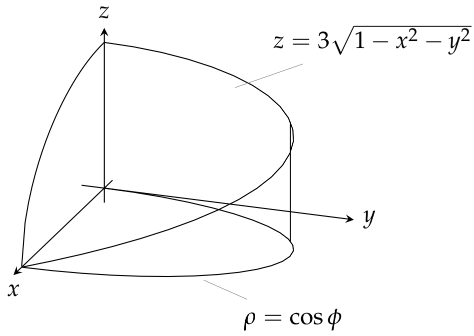
شکل 14.79: جسم برائے شکل 14.297



شکل 14.80: جسم برائے شکل 14.298



شکل 14.81: جسم برائے شکل 14.299



شکل 14.82: جسم برائے شکل 14.300

سوال 14.297: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = 3\cos\phi$ کا وہ حصہ جو مستوی $z = -y$ سے نیچے ہے (شکل 14.79)۔

سوال 14.298: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = -3\cos\phi$ کا وہ حصہ جو سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ سے نیچے ہے (شکل 14.80)۔

سوال 14.299: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = \sin\phi$ کا وہ حصہ جو سطح $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ سے نیچے ہے (شکل 14.81)۔

سوال 14.300: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = \cos\phi$ کا وہ حصہ جو مستوی $z = 3\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ سے نیچے ہے (شکل 14.82)۔

سوال 14.301: مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.302: ثُمن اول میں نصف مستویات $\phi = 0$ اور $\phi = \frac{\pi}{6}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.303: ٹھوس کرہ $r \leq 2$ سے مستوی $z = 1$ جو چھوٹا ٹکڑا کاٹتا ہے، اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.304: مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.305: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.306: نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ ، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 1 + x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.307: موٹی دیوار کے بیلن $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ سے مخروط $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$ جتنا حصہ کاٹتے ہیں، اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.308: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کے اندر اور بیلن $x^2 + y^2 = 1$ کے باہر خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.309: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.310: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $x + y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.311: اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 5 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = 4x^2 + 4y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.312: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے باہر، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 9 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.313: اس خطے کا حجم تلاش کریں جسے ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \leq 1$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ سے کاٹتا ہے۔

سوال 14.314: اوپر سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

اوسط قیمت

سوال 14.315: مستویات $z = -1$ اور $z = 1$ کے بیچ بیلن $\rho = 1$ میں تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.316: کرہ $\rho^2 + z^2 = 1$ (یعنی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) کے اندر تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.317: ٹھوس گیند $r \leq 1$ میں تفاعل $F(r, \theta, \phi) = r$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.318: بالائی نصف ٹھوس کرہ $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ میں تفاعل $F(r,\theta,\phi) = r\cos\theta$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

کمیت، معیار اثر، اور وسطانی مراکز

سوال 14.319: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے مخروط $z = \rho, \rho \geq 0$، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف مستقل کثافت کے ٹھوس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.320: ثمن اول میں اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$، نیچے سے مستوی $z = 0$، اور اطراف سے بیلن $x^2+y^2 = 4$ اور مستویات $x = 0$ اور $y = 0$ میں ملفوف خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.321: اس ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو سوال 14.286 میں دیا گیا ہے۔

سوال 14.322: اوپر سے کرہ $r = a$ اور نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.323: اوپر سے سطح $z = \sqrt{\rho}$، نیچے سے مستوی xy، اور اطراف سے بیلن $\rho = 4$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.324: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو نصف مستویات $\phi = -\pi/3, \rho \geq 0$ اور $\phi = \pi/3, \rho \geq 0$ ٹھوس گیند $\rho^2+z^2 \leq 1$ سے کاٹتے ہیں۔

سوال 14.325: قائمہ دائری موٹی دیوار کے بیلن کی اندرونی سطح بیلن $\rho = 1$ اور بیرونی سطح بیلن $\rho = 2$ ہیں۔اس کا نچلا سر مستوی $z = 0$ اور بالائی سر مستوی $z = 4$ میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.326: ایک قائمہ دائری بیلن کا رداس 1 اور قد 2 ہے۔ (ا) بیلن کے محور، (ب) بیلن کے وسطانی مرکز سے گزرتی ہوئے لکیر جو بیلن کے محور کو عمودی ہو، کے لحاظ سے بیلن کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.327: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ 1 اور قد 1 ہے۔مخروط کے راس سے گزرتی ہوئی لکیر جو مخروط کے محور کو عمودی ہے کے لحاظ سے مخروط کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.328: رداس a کے کرہ کا جمودی معیار اثر کرہ کے قطر کے لحاظ سے تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.329: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ a اور قد h ہے۔ اس کا جمودی معیار اثر مخروط کے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔ (اشارہ: مخروط کے محور کو محور z اور راس کو مبدا پر رکھیں۔)

سوال 14.330: ایک ٹھوس جسم اوپر سے قطع مکافی سطح $z = \rho^2$ ، نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$ ، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = \rho$ ہے۔

سوال 14.331: ایک ٹھوس جسم نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$ ، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = z^2$ ہے۔

سوال 14.332: ایک ٹھوس گیند کا رداس $r = a$ ہے اور کثافت (ا) $\delta(r, \theta, \phi) = r^2$ ، (ب) $\delta(r, \theta, \phi) = \rho = r \sin\theta$ ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس گیند کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.333: دکھائیں کہ ایک نیم ترخیمی سطح طواف $\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} \leq 1, z \geq 0$ کا وسطانی مرکز محور z پر قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہے۔ بالخصوص $h = a$ ایک ٹھوس نصف کرہ دیتا ہے۔ یوں ٹھوس نصف کرہ کا وسطانی مرکز قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہو گا۔

سوال 14.334: دکھائیں کہ ایک قائمہ دائری ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز محور پر قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا۔ (عمومی طور پر مخروط اور اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا)۔

سوال 14.335: رداس $\rho = a$ کا ایک قائمہ دائری بیلن مستویات $z = 0$ اور $z = h, h > 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس کی کثافت $\delta(\rho, \phi, z) = z + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.336: رداس R کے ایک سیارہ پر ہوا کی کثافت $\mu = \mu_0 e^{-ch}$ ہے جہاں سیارہ کی سطح سے بلندی h ہے جبکہ سیارہ کی سطح پر ہوا کی کثافت μ_0 ہے اور c ایک مثبت مستقل ہے۔ سیارہ میں ہوا کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.337: ایک سیارہ کا رداس R اور کمیت M ہے۔ اس کی کثافت کروی تشاکلی ہے جو سطح سے مرکز تک خطی بڑھتی ہے۔ سیارہ کی سطحی کثافت صفر لیتے ہوئے اس کے مرکز پر کثافت تلاش کریں۔

14.7 تکملات بالکثرت میں بدل

اس حصہ میں بارہا تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل سکھایا جائے گا۔ واحد تکمل کی طرح یہاں بھی پیچیدہ تکمل کو سادہ تکمل سے بدلا جاتا ہے۔ بدل سے متکمل یا تکمل کی حدوں یا ان دونوں کی سادہ روپ استعمال کی جاتی ہے۔

دوہرا تکملات میں بدل

ہم قطبی محدد د کی بدل کا استعمال حصہ 14.3 میں دیکھ چکے ہیں جو دہرا تکملات کی بدل، جس میں متغیرات کی تبدیلی کو خطے کی تبدیلی تصور کیا جاتا ہے، کی ایک مخصوص شکل ہے۔

فرض کریں مستوی uv کے خطہ G کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ مساوات

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

کے ذریعہ مستوی xy کے خطہ R میں بدلا جاتا ہے۔ ہم R کو اس بدل میں G کا **عکس**[18] اور G کو R کا **قبل عکس**[19] کہتے ہیں۔خطہ R کسی بھی تفاعل $f(x, y)$ کو خطہ G میں معین تفاعل $f(g(u, v), h(u, v))$ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خطہ R میں $f(x, y)$ کے تکمل کا خطہ G میں $f(g(u, v), h(u, v))$ کے تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

اس کا جواب: اگر g ، h اور f کے جزوی تفرقات استمراری ہوں اور $J(u, v)$ (جس پر جلد تبصرہ کیا جائے گا) صرف تنہا نقطوں پر صفر ہو (اگر صفر ہو بھی) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(g(u, v), h(u, v))\big|J(u, v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.42}$$

مذکورہ بالا مساوات میں $J(u, v)$ ، جو یعقوبی کہلاتا ہے، کی مطلق قیمت استعمال کی گئی۔

تعریف: **یعقوبی مقطع**[20] یا محددی بدل $x = g(u, v)$ ، $y = h(u, v)$ کے **یعقوبی**[21] سے مراد درج ذیل ہے:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{14.43}$$

□

یعقوبی کو

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

---

[18] image
[19] preimage
[20] یہ ریاضی دان کارل گستاف یعقوب یعقوبی کے نام سے منسوب ہے۔
[21] Jacobian

سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے جو ہمیں یاد دلاتا ہے کہ x اور y کی جزوی تفرقات سے یعقوبی (مساوات 14.43) حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.42 کی استخراج آپ کو اعلٰی احصاء کے نصاب میں ملے گی جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

قطبی محدد میں میں u اور v کی جگہ r اور θ ہوں گے لہٰذا $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لیتے ہوئے یعقوبی

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

ہو گا اور مساوات 14.42 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جو حصہ 14.3 کی مساوات 14.28 ہے۔

$$\begin{aligned} \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{اگر } r \geq 0 \text{ ہو} \end{aligned} \tag{14.44}$$

شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کس طرح مستطیل $G : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$ کو مساوات $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ایک چوتھائی دائرہ R ، جس کی سرحد ربع اول میں مستوی xy پر $x^2 + y^2 = 1$ ہے، میں بدلتے ہیں۔

دھیان رہے کہ مساوات 14.44 کی دائیں ہاتھ میں قطبی محددی مستوی میں کسی خطہ پر $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ کا تکمل نہیں بلکہ کارتیسی r,θ مستوی کے خطہ G میں $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ اور r کے حاصل ضرب کا تکمل ہے۔

آئیں بدل کی دوسری مثال دیکھیں۔

مثال 14.24: مستوی uv میں موزوں خطہ پر بدل

$$u = \frac{2x - y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \tag{14.45}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x - y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

حل: ہم مستوی xy میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔

مساوات 14.42 استعمال کرنے کی خاطر ہمیں مستوی uv میں مطابقتی خطہ G اور بدل کا یعقوبی معلوم کرنے ہوں گے۔ انہیں دریافت کرنے کے لئے ہم مساوات 14.45 کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کرتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x = u + v, \quad y = 2v \tag{14.46}$$

اس کے بعد ہم R کی سرحدوں کی مساوات میں انہیں پر کر کے G کی سرحدیں دریافت کرتے ہیں۔

خطہ R کی سرحد کی xy مساواتیں	خطہ G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	uv مساواتوں کی سادہ صورت
$x=\frac{y}{2}$	$u+v=\frac{2v}{2}=v$	$u=0$
$x=\frac{y}{2}+1$	$u+v=\frac{2v}{2}+1=v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$

بدل کا یعقوبی (مساوات 14.46 سے) درج ذیل ہو گا۔

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v)\\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

ہم اب مساوات 14.42 استعمال کرنے کی تمام معلومات جانتے ہیں:

$$\begin{aligned}\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=y/2+1}\frac{2x-y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{v=0}^{v=2}\int_{u=0}^{u=1}u\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=\int_0^2\int_0^1(u)(2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_0^2\left[u^2\right]_0^1\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}v=2\end{aligned}$$

□

مثال 14.25: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}(y-2x)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل: ہم مستویxy میں تکمل کے خطہ R کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔ متکمل کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ بدل $u=x+y$ اور $v=y-2x$ استعمال کیا جائے جنہیں u اور v کی صورت میں x اور y کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x=\frac{u}{3}-\frac{v}{3},\quad y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}\tag{14.47}$$

ہم مساوات 14.47 سے مستوی uv میں خطہ G کی سرحدیں معلوم کرتے ہیں۔

R کی سرحد کی xy مساواتیں	G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	uv مساواتوں کی سادہ صورت
$x+y=1$	$\left(\frac{u}{3}-\frac{v}{3}\right)+\left(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}\right)=1$	$u=1$
$x=0$	$\frac{u}{3}-\frac{v}{3}=0$	$v=u$
$y=0$	$\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}=0$	$v=-2u$

مساوات 14.47 میں دیے بدل کا یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

ہم مساوات 14.42 سے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}(y-2x)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x&=\int_{u=0}^{u=1}\int_{v=-2u}^{v=u}u^{1/2}\,v^2\left|J(u,v)\right|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^1\int_{-2u}^{u}u^{1/2}\,v^2\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\left(\frac{1}{3}v^3\right)_{v=-2u}^{v=u}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,\mathrm{d}u=\int_0^1 u^{7/2}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{9}u^{9/2}\Big|_0^1=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

□

تہرا تکملات میں بدل

تہرا تکملات کے متغیرات کی تبدیلی کو تین بعدی خطہ کا بدل تصور کرنے والے ترکیب کی خصوصی صورتیں نلکی اور کروی محددی بدل ہیں۔ یہ ترکیب دوہرا تکملات کی ترکیب کی طرح ہے، بس اب ہم دو کی بجائے تین بعد میں کام کرتے ہیں۔

فرض کریں uvw فضا میں خطہ G کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ xyz فضا کے خطہ D میں درج ذیل روپ کی مساواتوں سے بدلا جاتا ہے۔

$$x=g(u,v,w),\quad y=h(u,v,w),\quad z=k(u,v,w)$$

تب D میں کسی بھی تفاعل $F(x,y,z)$ کو G میں معین تفاعل

$$F(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))=H(u,v,w)$$

تصور کیا جا سکتا ہے۔اگر g ، h اور k کے اول جزوی تفرقات استمراری ہوں تب D پر F کے تکمل کا G پر $H(u,v,w)$ کے تکمل کے ساتھ تعلق درج ذیل مساوات دیگی۔

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(u,v,w)\big|J(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \tag{14.48}$$

اس مساوات میں $J(u,v,w)$ کی مطلق قیمت استعمال کی گئی ہے جو درج ذیل **یعقوبی مقطع**[22] ہے۔

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \tag{14.49}$$

متغیرات کی تبدیلی کا کلیہ، جس کو مساوات 14.48 میں پیش کیا گیا ہے، پیچیدہ ہے اور دو بعدی صورت کی طرح، اس کی اشتقاق کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

نلکی محدد میں u ، v اور w کی جگہ ρ ، ϕ اور z ہوں گے۔کارتیسی $\rho\phi z$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں بدل درج ذیل مساوات دیں گی۔

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

اس بدل کا یعقوبی

$$\begin{aligned} J(\rho,\phi,z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho \end{aligned}$$

ہو گا۔یوں مساوات 14.48 درج ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(\rho,\phi,z)\big|\rho\big|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \tag{14.50}$$

جب بھی $\rho \geq 0$ ہو، ہم مطلق کی علامت سے چھٹکارا حاصل کر سکتے ہیں۔

کروی محدد میں u ، v اور w کی جگہ r ، θ اور ϕ ہوں گے۔کارتیسی $r\theta\phi$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں بدل درج ذیل مساوات دیں گی۔

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$

---

[22] Jacobian determinant

اس بدل کا یعقوبی

$$J(\rho,\phi,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{vmatrix}=r^2\sin\theta \tag{14.51}$$

ہو گا (سوال 14.354)۔یوں مساوات 14.48 درج ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_G H(r,\theta,\phi)\left|r^2\sin\theta\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.52}$$

کروی محدد میں $0\le\theta\le\pi$ کی بنا $\sin\theta$ کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے للہذا مطلق کی علامت لکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

آئیں بدل کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.26: درج ذیل بدل

$$u=(2x-y)/2,\quad v=y/2,\quad w=z/3 \tag{14.53}$$

استعمال کرتے ہوئے uvw فضا میں موزوں خطہ پر تکمل لے کر درج ذیل تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

$$\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=y/2+1}\Big(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

حل: ہم xyz فضا میں تکمل کے خطہ D کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔ یہاں سرحدی سطحیں مستویات ہیں۔

مساوات 14.48 استعمال کرنے کے لئے ہمیں uvw فضا میں مطابقتی خطہ G اور بدل کا یعقوبی جاننا ہو گا۔ ہم مساوات 14.53 کو x ، y اور z کے لئے u ، v اور w کی صورت میں حل کر کے

$$x=u+v,\quad y=2v,\quad z=3w \tag{14.54}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم D کی سرحدوں کی مساوات میں یہ قیمتیں پر کر کے G کی سرحدوں کی مساواتیں دریافت کرتے ہیں:

uvw مساواتوں کی سادہ صورتیں	G کی سرحدوں کی مطابقتی uvw مساواتیں	D کی سرحدوں کی xyz مساواتیں
$u=0$	$u+v=2v/2=v$	$x=y/2$
$u=1$	$u+v=2v/2+1=v+1$	$x=y/2+1$
$v=0$	$2v=0$	$y=0$
$v=2$	$2v=4$	$y=4$
$w=0$	$3w=0$	$z=0$
$w=1$	$3w=3$	$z=3$

ہم مساوات 14.54 استعمال کرتے ہوئے یعقوبی تلاش کرتے ہیں۔

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

ہم مساوات 14.48 استعمال کرنے کے لئے درکار تمام معلوم جان چکے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=y/2+1}\Big(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\int_0^2\int_0^1(u+w)\big|J(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&=\int_0^1\int_0^2\int_0^1(u+w)(6)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=6\int_0^1\int_0^2\Big[\frac{u^2}{2}+uw\Big]_0^1\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&=6\int_0^1\int_0^2\Big(\frac{1}{2}+w\Big)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=6\int_0^1\Big[\frac{v}{2}+vw\Big]_0^2\mathrm{d}w=6\int_0^1(1+2w)\,\mathrm{d}w\\
&=6\Big[w+w^2\Big]_0^1=6(2)=12\end{aligned}$$

□

سوالات

بدل محدد

سوال 14.338:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u=x-y,\quad v=2x+y$$

ب. مستوی xy میں تکونی خطہ جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,1)$ اور $(1,-2)$ ہیں کا عکس بدل $u=x-y$ ، $v=2x+y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.339:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u=x+2y,\quad v=x-y$$

ب. مستوی xy میں لکیر $y=0$ ، $y=x$ اور $x+2y=2$ کے بیچ تکونی خطے کا عکس بدل $u=x+2y$ ، $v=x-y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.340:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u=3x+2y,\quad v=x+4y$$

ب. مستوی xy میں محور x ، محور y اور لکیر $x+y=1$ کے بیچ تکونی خطے کا عکس بدل $u=3x+2y$ ، $v=x+4y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.341:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u=2x-3y,\quad v=-x+y$$

ب. مستوی xy میں $x=-3$ ، $x=0$ ، $y=x$ اور $y=x+1$ کے بیچ متوازی الاضلاع کا عکس بدل $u=2x-3y$ ، $v=-x+y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.342: درج ذیل بدل کے یعقوبی تلاش کریں۔

ا. $x=u\cos v,\quad y=u\sin v$

ب. $x=u\sin v,\quad y=u\cos v$

سوال 14.343: درج ذیل بدل کے یعقوبی تلاش کریں۔

ا. $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=w$

ب. $x=2u-1,\quad y=3v-4,\quad z=\frac{1}{2}(w-4)$

دوہرا تکملات

سوال 14.344: درج ذیل تکمل کی قیمت x اور y کے لحاظ سے تکمل لے کر حاصل کرتے ہوئے مثال 14.24 میں حاصل قیمت (2) کی تصدیق کریں۔

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.345: ربع اول میں لکیر $y=-2x+4$ ، $y=-2x+7$ ، $y=x-2$ اور $y=x+1$ کے بیچ خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت سوال 14.338 کا بدل استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

$$\iint\limits_R (2x^2-xy-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.346: ربع اول میں لکیر $y=-\frac{3}{2}x+1$ ، $y=-\frac{3}{2}x+3$ ، $y=-\frac{1}{4}x$ اور $y=-\frac{1}{4}x+1$ کے بیچ خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت سوال 14.340 کا بدل استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

$$\iint\limits_R (3x^2+14xy+8y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.347: درج ذیل تکمل کی قیمت سوال 14.341 کا خطہ R اور بدل استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

$$\iint\limits_R 2(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.348: ربع اول میں مستوی xy میں قطع زائد $xy=1$ ، $xy=9$ اور لکیر $y=x$ ، $y=4x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ بدل $x=u/v$ ، $y=uv$ جہاں $u>0$ ، $v>0$ ہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کو مستوی uv میں موزوں خطہ G پر ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔

$$\iint\limits_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

خطہ G پر اس uv تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.349: (ا) بدل $x = u$ ، $y = uv$ کا یعقوبی تلاش کریں اور خطہ $G : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq uv \leq 2$ کا مستوی uv میں خاکہ بنائیں۔ (ب) اس کے بعد مساوات 14.42 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کو G پر ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں تکملات کو حل کرتے ہوئے تکمل کی قیمتیں حاصل کریں۔

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} \, dy \, dx$$

سوال 14.350: مستوی xy میں ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$ کے بیچ خطہ پر مستقل کثافت کی پتلی چادر کی مبدا کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔ (اشارہ: بدل $x = ar\cos\theta$ ، $y = br\sin\theta$ استعمال کریں۔)

سوال 14.351: مستوی xy میں $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر تفاعل $f(x, y) = 1$ کا تکمل لے کر ترخیم کا رقبہ πab حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس تکمل کو سیدھا حل کرنے کے لئے اس میں تکونیاتی تفاعل پر کرنا ہو گا۔ اس سے آسان طریقہ بدل $x = au$ ، $y = bv$ استعمال کرتے ہوئے تبدیل شدہ تکمل کی قیمت کا مستوی uv میں قرص $G : u^2 + v^2 \leq 1$ پر حصول ہے۔

سوال 14.352: درج ذیل تکمل کو پہلے مستوی uv میں خطہ G پر سوال 14.339 کے بدل سے تبدیل کرتے ہوئے حل کریں۔

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y)e^{(y-x)} \, dx \, dy$$

سوال 14.353: مستوی uv میں درج ذیل تکمل کو بدل $x = u + \frac{v}{2}$ ، $y = v$ کی مدد سے منتقل کریں۔ تبدیل شدہ تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{(2x-y)^2} \, dx \, dy$$

تہرا تکملات

سوال 14.354: کارتیسی $r\theta\phi$ فضا سے کارتیسی xyz فضا کے بدل کا یعقوبی مساوات 14.51 کا مقطع دیتا ہے۔ اس مقطع کو حل کر کے اس کی قیمت $r^2 \sin\theta$ حاصل کریں۔

سوال 14.355: متغیرات x ، y اور z کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے مثال 14.26 کا تکمل حل کریں۔

سوال 14.356: ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ: بدل $x = au$ ، $y = bv$ ، $z = cw$ لے کر فضا uvw میں موزوں خطہ پر تکمل کی قیمت تلاش کریں۔)

سوال 14.357: ٹھوس ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔(اشارہ: بدل $x=au$ ، $y=bv$ ، $z=cw$ لے کر فضا uvw میں موزوں خطہ پر تکمل کی قیمت تلاش کریں۔)

$$\iiint |xyz|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

سوال 14.358: فضا xyz میں خطہ D درج ذیل ہے۔

$$1\le x\le 2,\quad 0\le xy\le 2,\quad 0\le z\le 1$$

بدل

$$u=x,\quad v=xy,\quad w=3z$$

استعمال کر کے فضا uvw میں موزوں خطہ G پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iiint\limits_D (x^2y+3xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

سوال 14.359: یہ جانتے ہوئے کہ نصف کرہ کا مرکز کمیت کرہ کے قاعدہ سے سر جانب محور تشاکلی پر تین آٹھواں فاصلہ پر ہے، موزوں تکملات کو بدل کر دکھائیں کہ نصف ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\, z\ge 0$$

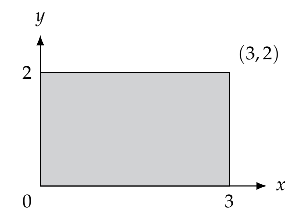
کا مرکز کمیت محور z پر قاعدہ سے راس جانب تین آٹھواں فاصلہ پر ہو گا۔ آپ کو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آنی چاہیے۔

سوال 14.360: واحد متغیر کے تکملات میں بدل کو کس طرح ترکیب بدل کی ایک خصوصی روپ تصور کیا جا سکتا ہے؟ ان میں یعقوبی کی قیمت کیا ہو گی؟ ایک مثال کی مدد سے وضاحت کریں۔

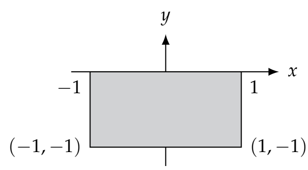
جوابات

حصہ 14.1 صفحہ 1679

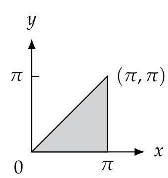
14.1) 16



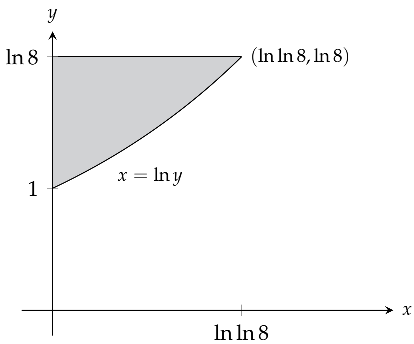
14.3) 1



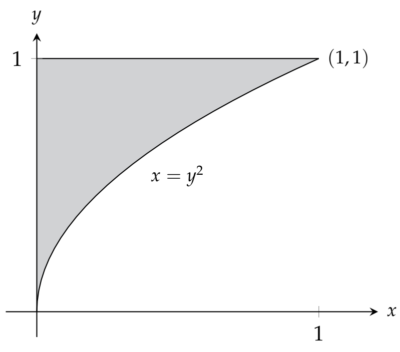
14.5) $\frac{\pi^2}{2}+2$



14.7) $8\ln 8-16+e$



14.9) $e-2$

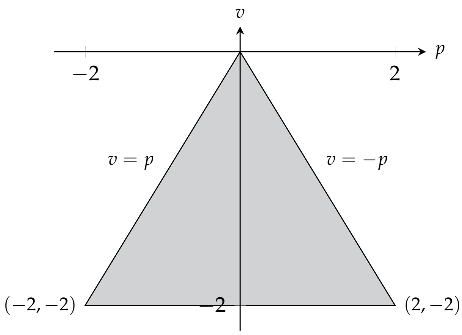


14.11) $\frac{3}{2}\ln 2$

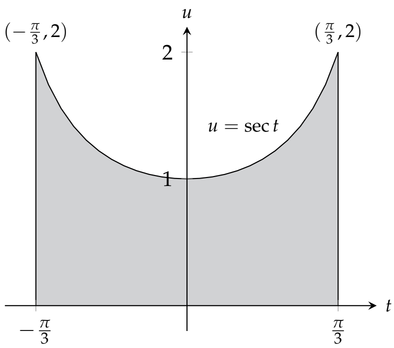
14.13) $\frac{1}{6}$

14.15) $-\frac{1}{10}$

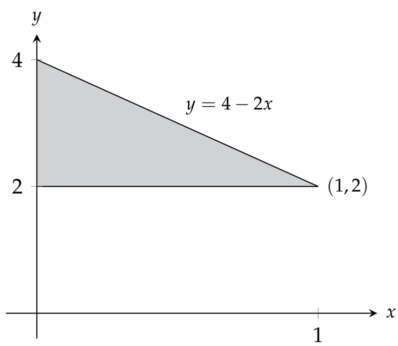
(14.17 8



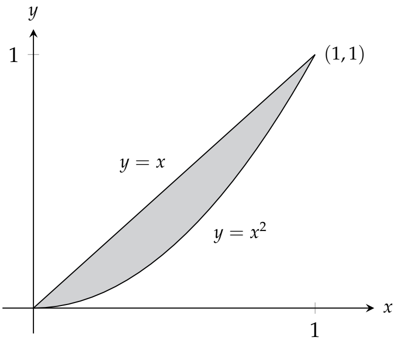
(14.19 2π



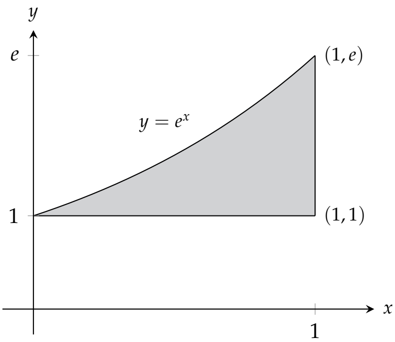
(14.21 $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$



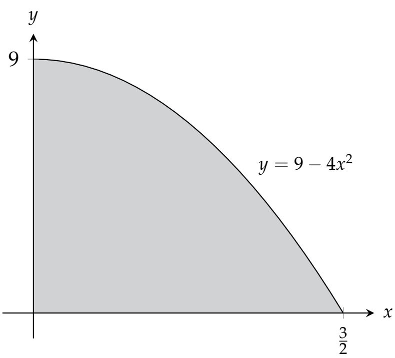
(14.23 $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$



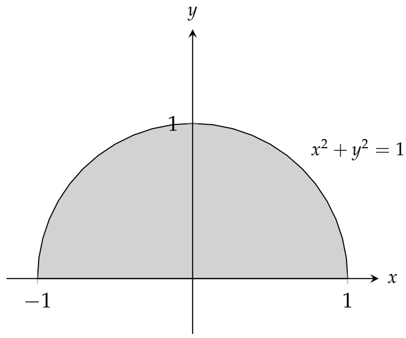
(14.25 $\int_1^e \int_{\ln y}^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$



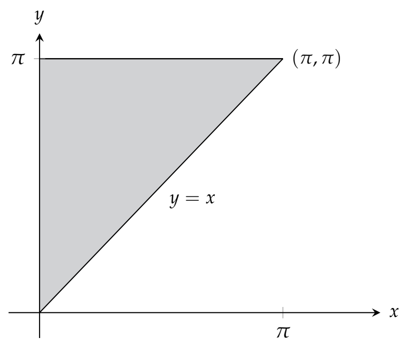
(14.27 $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$



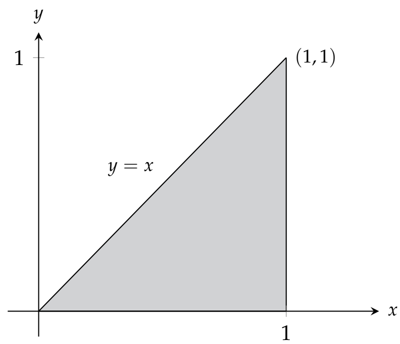
(14.29 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$



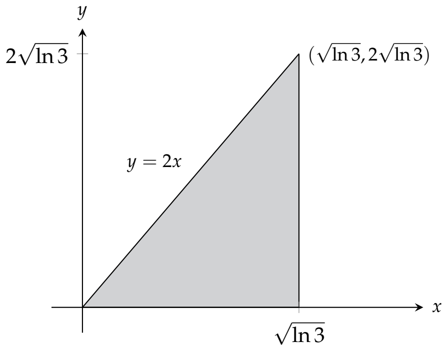
14.31) 2



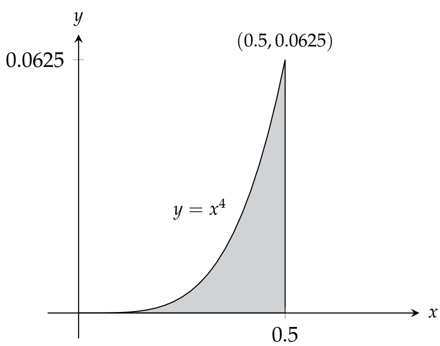
14.33) $\frac{e-2}{2}$



14.35) 2



14.37) $\frac{1}{80\pi}$



14.39) $-\frac{2}{3}$

14.41) $\frac{4}{3}$

14.43) $\frac{625}{12}$

14.45) 16

14.47) 20

14.49) $2(1+\ln 2)$

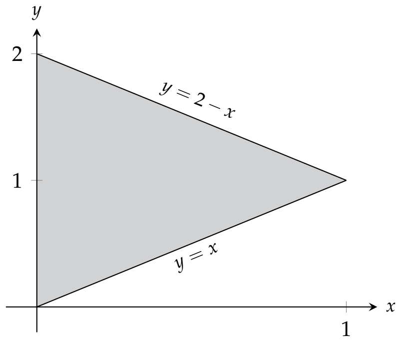
14.51) 1

14.53) π^2

14.55) $-\frac{1}{4}$

14.57) $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

14.59) $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{4}{3}$

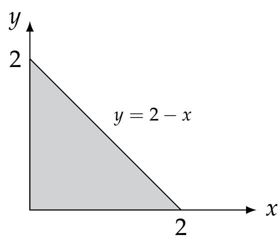


0.603 (14.67

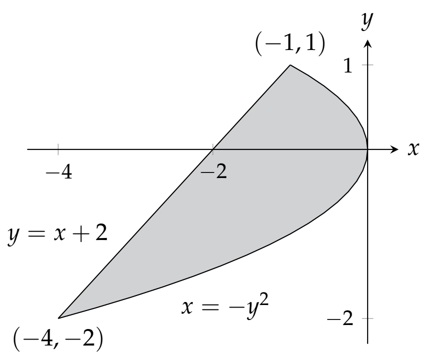
0.233 (14.69

حصہ 14.2 صفحہ 1695

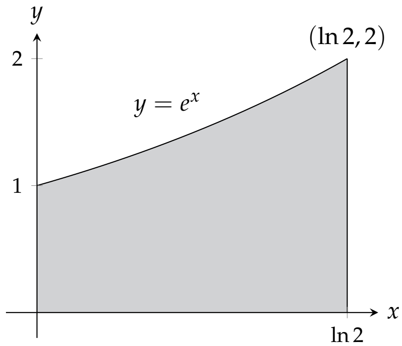
$\int_0^2 \int_0^{2-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2,\ \int_0^2 \int_0^{2-y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2$ (14.71



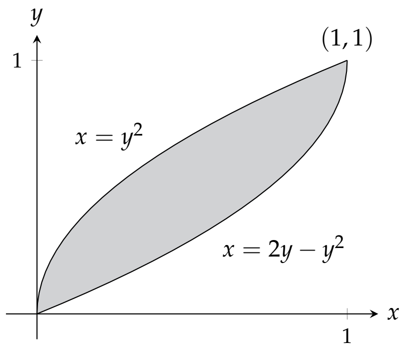
$\int_{-2}^{1} \int_{y-2}^{-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{9}{2}$ (14.73



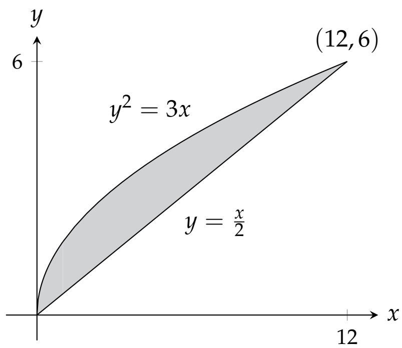
$\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$ (14.75



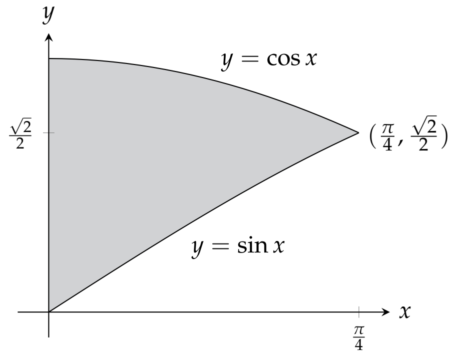
$\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$ (14.77



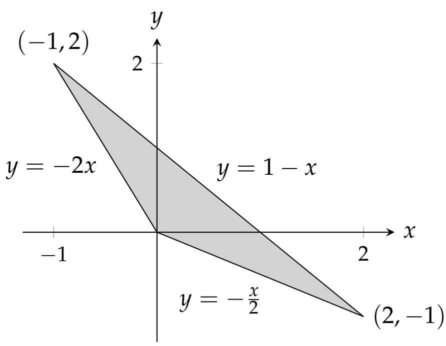
12 (14.79



$\sqrt{2} - 1$ (14.81



14.83) $\frac{3}{2}$



14.85) (ا) 0 ، (ب) $\frac{4}{\pi^2}$

14.87) $\frac{8}{3}$

14.89) $\bar{x} = \frac{5}{14}, \bar{y} = \frac{38}{35}$

14.91) $\bar{x} = \frac{64}{35}, \bar{y} = \frac{5}{7}$

14.93) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}$

14.95) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$

14.97) $\bar{x} = \frac{\pi}{2}, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

14.99) $\bar{x} = -1, \bar{y} = \frac{1}{4}$

14.101) $I_x = \frac{64}{105}, R_x = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$

14.103) $\bar{x} = \frac{3}{8}, \bar{y} = \frac{17}{16}$

14.105) $\bar{x} = \frac{11}{3}, \bar{y} = \frac{14}{27}, I_y = 432, R_y = 4$

14.107) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{13}{31}, I_y = \frac{7}{5}, R_y = \sqrt{\frac{21}{31}}$

14.109) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{7}{10}, I_x = \frac{9}{10}, I_y = \frac{3}{10}$

$I_0 = \frac{6}{5}, R_x = \frac{3\sqrt{6}}{10}, R_y = \frac{3\sqrt{2}}{10}, R_0 =$ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

14.111) $40\,000(1 - e^{-2}) \ln(\frac{7}{2}) \approx 43\,329$

14.113) $0 < a \leq \frac{5}{2}$

14.115) $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$

14.117) (ا) $\frac{3}{2}$ ، (ب) ایک جیسے ہیں۔

14.123) (ا) $(\frac{7}{5}, \frac{31}{10})$ ، (ب) $(\frac{19}{7}, \frac{18}{7})$ ، (ج) $(\frac{9}{2}, \frac{19}{8})$ ، (د) $(\frac{11}{4}, \frac{43}{16})$

14.125) مشترک سرحد پر ہونے کے لئے $h = a\sqrt{2}$ ، مثلث کے اندر ہونے کے لئے $h > a\sqrt{2}$

حصہ 14.3 صفحہ 1707

14.127) $\frac{\pi}{2}$

14.129) $\frac{\pi}{8}$

14.131) πa^2

14.133) 36

14.135) $(1 - \ln 2)\pi$

14.137) $(2\ln 2 - 1)(\pi/2)$

14.139) $\frac{\pi}{2} + 1$

14.141) $\pi(\ln(4) - 1)$

14.143) $2(\pi - 1)$

14.145) 12π

14.147) $\frac{3\pi}{8} + 1$

14.149) 4

14.151) $6\sqrt{3} - 2\pi$

14.153) $\bar{x} = \frac{5}{6}, \bar{y} = 0$

14.155) $\frac{2a}{3}$

14.157) $\frac{2a}{3}$

14.159) 2π

14.161) $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$

14.163) (ا) $\sqrt{\pi/2}$ ، (ب) 1

14.165) $\pi \ln 4$ نہیں

14.167) $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$

حصہ 14.4 صفحہ 1720

14.173) 1

(14.175 $\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$
$\int_0^2\int_0^{1-y/2}\int_0^{3-3x-3y/2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$
$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{2-2x-2z/3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$
$\int_0^3\int_0^{1-z/3}\int_0^{2-2x-2z/3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$
$\int_0^2\int_0^{3-3y/2}\int_0^{1-y/2-z/3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$
$\int_0^3\int_0^{2-2z/3}\int_0^{1-y/2-z/3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ تمام
تکملات کا جواب 1 ہے۔

(14.177 $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$
$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$
$\int_{-2}^2\int_4^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \quad +$
$\int_{-2}^2\int_{y^2}^4\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$
$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad +$
$\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$
$\int_{-2}^2\int_4^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \quad +$
$\int_{-2}^2\int_{x^2}^4\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$
$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad +$
$\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}zS$ تمام
تکملات کا جواب 16π ہے۔

(14.179 1
(14.181 1
(14.183 $\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1)$
(14.185 18
(14.187 $\frac{7}{6}$
(14.189 0
(14.191 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$
(14.193 ا. $\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$
ب. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$
ج. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$
د. $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$
ہ. $\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_0^{1-y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
(14.195 $\frac{2}{3}$
(14.197 $\frac{20}{3}$
(14.199 1
(14.201 $\frac{16}{3}$
(14.203 $8\pi-\frac{32}{3}$
(14.205 2
(14.207 4π
(14.209 $\frac{31}{3}$
(14.211 1
(14.213 $2\sin 4$
(14.215 4
(14.217 $a=3$ یا $a=\frac{13}{3}$

حصہ 14.6 صفحہ 1745

(14.253 $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$
(14.255 $\frac{17\pi}{5}$
(14.257 $\pi(6\sqrt{2}-8)$
(14.259 $\frac{3\pi}{10}$
(14.261 $\frac{\pi}{3}$
(14.263 (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi \quad +$
$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$
(ج) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$
(14.265 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\phi}\int_0^{3\rho^2}F(\rho,\phi,z)\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(14.267 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\int_0^{4-\rho\sin\phi}F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(14.269 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\phi}\int_0^4F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(14.271 $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}\int_0^{2-\rho\sin\phi}F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(14.273 π^2
(14.275 $\pi/3$
(14.277 5π
(14.279 2π
(14.281 $(\frac{8-5\sqrt{2}}{2})\pi$
(14.283 (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \;+$
$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\pi/6}^{\sin^{-1}(1/r)} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi +$
$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi/6} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$
(14.285 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{31\pi}{6}$
(14.287 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{8\pi}{3}$

(14.289 $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{3}$

(14.291 (ا) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(ج) $8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(14.293 (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\theta}^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
(ب) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt3}\int_1^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
(ج) $\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
(د) $\frac{5\pi}{3}$

(14.295 $8\pi/3$

(14.297 $9/4$

(14.299 $(3\pi-4)/18$

(14.301 $\frac{2\pi a^3}{3}$

(14.303 $\frac{5\pi}{3}$

(14.305 $\pi/2$

(14.307 $\frac{4(2\sqrt2-1)\pi}{3}$

(14.309 16π

(14.311 $5\pi/2$

(14.313 $\frac{4\pi(8-3\sqrt3)}{3}$

(14.315 $2/3$

(14.317 $3/4$

(14.319 $\bar x=\bar y=0,\ \bar z=3/8$

(14.321 $(\bar x,\bar y,\bar z)=(0,0,3/8)$

(14.323 $\bar x=\bar y=0,\ \bar z=5/6$

(14.325 $I_z=30\pi,\ R_z=\sqrt{\frac52}$

(14.327 $I_x=\pi/4$

(14.329 $\frac{a^4h\pi}{10}$

(14.331 (ا) $(\bar x,\bar y,\bar z)=(0,0,4/5),\ I_z=\pi/12$
(ب) $R_z=\sqrt{1/3}$ $(\bar x,\bar y,\bar z)=(0,0,5/6)$
$I_z=\pi/14,\ R_z=\sqrt{5/14}$

(14.335 $(\bar x,\bar y,\bar z)=(0,0,\frac{2h^2+3h}{3h+6})$
$I_z=\frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4},\ R_z=\frac{a}{\sqrt2}$

(14.337 $\frac{3M}{\pi R^3}$

حصہ 14.7 صفحہ 1763

(14.338 (ا) $x=\frac{u+v}{3},\ y=\frac{v-2u}{3};\ \frac13$
(ب) تکونی خطہ جس کی سرحدیں $u=0$ ، $v=0$ اور $u+v=3$ ہیں۔

(14.340 (ا) $x=\frac15(2u-v),\ y=\frac{1}{10}(3v-u);\ \frac{1}{10}$
(ب) تکونی خطہ جس کی سرحدیں $u=3v$ ، $v=2u$ اور $3u+v=10$ ہیں۔

(14.342 (ا) $\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u$
(ب) $\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-u$

(14.346 $\frac{64}{5}$

(14.348 $\int_1^2\int_1^3(u+v)\frac{2u}{v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 8+\frac{52}{3}\ln2$

(14.350 $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$

(14.352 $\frac13(1+\frac{3}{e^2})\approx0.4687$

(14.356 $\frac{4\pi abc}{3}$

(14.358 $\int_0^3\int_0^2\int_1^2(\frac{v}{3}+\frac{vw}{3u})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=2+\ln8$

فرہنگ

absolute value, 6
acceleration, 239, 1442
adiabatic process, 714
aerofoil, 611
alaska, 288
algebraic, 743
algorithm, 840
angioplasty, 448
angle of inclination, 20
aphelion, 1306
aspect ratio, 15
astroid, 1257
asymptote, 394
asymptotes, 1204
autocatalyst, 435
average, 518, 562
axis, 57, 1196
    focal, 1204
    major, 1200
    minor, 1200
    negative-x, 14
    of revolution, 639
    positive-x, 14

basic, 1332
bifurcation value, 1047
binomial
    series, 1176
bound
    least upper, 1038
    lower, 1044
    upper, 1038
boundary, 4, 1518, 1520
    point, 1520
    points, 4
bounded, 1519
    from above, 1038
    from below, 1044

cam, 1288
cardioid, 1288
catalyst, 435
catenary, 898
center, 54, 441, 1195
    of curvature, 1482
centroid, 701, 1694, 1730
chain rule, 274
chaos theory, 207
charge
    electron, 719
circle, 54, 1195
    of curvature, 1482
closed, 4, 1518, 1520
    ball, 1519
commutative, 1366
    non, 1380
concave
    down, 366
    up, 366
conjugate expression, 114
constant
    arbitrary, 472
    gravitational, 1500
    rate, 806

- continuity
  - at a point, 1440
  - uniform, 535
- continuous, 1440, 1533
  - at a point, 1533
  - left, 165
  - on interval, 171
  - right, 165
- continuous extension, 170
- contour
  - line, 1521
- convergence
  - interval, 1134
  - radius, 1134
- convergent, 1006, 1033
  - absolute, 1118
  - conditional, 1118
- converges, 533
- coordinate
  - axis, 14
  - pair, 14
  - x, 14
  - y, 14
- coordinates
  - rectangular, 1347
- cosines
  - law, 83
- critical point, 330
- cross section, 1408
- curvature, 1478
- curve
  - integral, 488
  - level, 1520
- cycloid, 1248
- cylinder, 1408
- cylindrical coordinates, 1426

- dashpot, 956
- decreasing, 344
- deltoid, 1259
- dependent variable, 31
- derivative, 186, 195
  - directional, 1601
  - first, 229
  - first order, 229
  - partial, 1545, 1546
  - second, 229
  - second order, 229
- descriminant, 1628
- difference
  - centered quotient, 271
- difference quotient, 186
  - Fermat's, 271
- differentiable, 196, 1563
- differential, 1568
  - equation, 484
  - total, 1568
- differential equation
  - first order, 900
  - linear, 902
  - separable, 901
  - solution, 900
  - standard form, 902
- differentiation
  - logarithmic, 768
- direction
  - cosines, 1373
- directrix, 1196
- discontinuity
  - infinite, 165
  - jump, 163
  - oscillating, 165
- discriminant, 1235
- displacement, 237, 731
- divergent, 1006, 1033
- domain, 30, 1516
  - natural, 33
- dominant, 243, 400
- dominates, 400

- eccentricity, 1220
- electron, 719

least integer, 40
real valued, 1516
sine integral, 1024

Gamma function, 1025
gene, 243
generating
curve, 1408
region, 639
genetics, 243
global, 326
graph, 1520
dot, 242
gyration, 1685
radius, 1689

half angle formulae, 83
half life, 810
half-open, 4
helium, 317
hyperbola, 1202
center, 1204
hypocycloid, 1257

Ibn Sahl's law, 422
identity function, 746
image, 1752
pre, 1752
implicit
differentiation, 291
increasing, 344
increments, 15
independent variable, 31
index
summation, 528
inflation, 809
initial point, 1244
initial value
problem, 484
instantaneous
rate of change, 96
integrable, 533

ellipse, 1198
ellipsoid, 1207
elliptic
integral, 1270
energy
kinetic, 719
equation
general linear, 24
point-slope, 22
slope-intercept, 23
error, 1572
escape velocity, 915
Euler's
constant, 1093
formula, 1164
Euler's method, 918
even, 38
extended function, 170
exterior, 56
extrema, 326

factorials, 1035
Fermat's principle, 421
Fibonacci numbers, 1036
finite sum, 511
fixed point, 180, 1054
focal
length, 1196
focus, 1196
fossil bone, 819
fractals, 672
free fall, 239
frustum, 677
function
composite, 37
error, 1024
greatest integer, 40
hyperbolic, 897
identity, 746
integer ceiling, 40
integer floor, 40

law
Hooke's, 709
parallelogram, 1331
Leibniz's
formula, 1183
lemniscate, 1290
limit, 1033, 1439, 1530
left-handed, 143
right-handed, 143
two-sided, 144
limits, 96
line
regression, 1638
linear
equations, 24
standard approximation, 441
linear approximation
standard, 1564
linearization, 441, 1564
Lissajous figures, 1272
logarithm
common, 796

marginal
cost of production, 244
marginals, 243
mass
center, 694
center of, 690
maxima, 1002
maximum
local, 1627
mean, 562
arithmetic, 350
geometric, 350
mean life
nucleus, 817
method
partial fractions, 959
Picard's, 1053
minimax, 1417

integral
definite, 533
double, 1666
indefinite, 472, 1447
iterated, 1669
line, 1763
repeated, 1669
triple, 1713
integrand, 472
integration
by parts, 945
constant of, 472
factor, 903
tabular, 952
variable, 472
intercept
x, 23
y, 23
interest
continuous compound, 809
interior, 4, 56, 1518, 1520
point, 1520
points, 4
intermediate form, 819
intersection, 9
interval, 3
finite, 3
infinite, 4
inverse, 746
involute, 1256
irreducible, 962
iteration
path, 1054

Jacobian, 1752
determinant, 1756
jerk, 261
joule, 706, 1370

Lagrange
multiplier, 1645
multipliers' method, 1645

interval, 1244
parametric
curve, 237
equations, 1244
representation, 238
parametrization, 1244
partial fractions, 959
partition, 531
path, 1438
perihelion, 1306, 1502
period, 81
periodic, 81
pH, 797
piston, 288
plane
xy, 1346
planes
coordinate, 1347
point
boundary, 1517
critical, 1625
inflection, 367
interior, 163, 1517
left end, 163
right end, 163
saddle, 1625, 1627
pole, 1274
pressure, 720
product
cross, 1379
property
intermediate value, 171

quadrants, 15
quadratic
approximation, 1156
curves, 1230

radioactive, 810
radioactive decay, 810
radius, 54, 1195
of curvature, 1482

minimum
local, 1627
molecule, 973
moment
first, 1689
polar, 1690
second, 1689

newton
law of cooling, 813
nonelementary, 991
norm, 532
normal, 294, 1338
numbers
irrational, 3
natural, 3
rational, 3
real, 1
numerical
method, 918
solution, 918

octant, 1347
first, 1347
odd, 39
one to one, 744
open, 4, 1518, 1520
ball, 1519
operators, 1660
orbit
geostationary, 1510
geosynchronous, 1510
orbital period, 1507
origin, 14, 1274
orthogonal, 1366

Pappus
formula, 1700
Pappus's formula, 1735
Pappus's theorem, 735
parabola, 18, 57, 1196
parameter, 1244

nondecreasing, 1037
nonincreasing, 1043
sub, 1036
tail, 1037
series
alternating, 1115
alternating harmonic, 1115
center, 1129
coefficients, 1129
convergence, 1066
divergence, 1066
geometric, 1066
harmonic, 1084
infinite, 1065
Maclaurin, 1147
nth term, 1066
power, 1129
Taylor, 1147
sets, 3
Simpson
rule, 604
simulation, 491
slope, 19
smooth, 1260, 1442
curve, 668
piecewise, 1442
snow flake, 296
solid of revolution, 639
solution
general, 485
particular, 485
speed, 239
spherical
wedge, 1741
spherical coordinates, 1430
spring constant, 709
stainless steel, 717
standard
position, 73
step
size, 598
range, 30, 1516
range finder, 309
real
line, 1
valued function, 32
variables, 32
recessive, 243
recursion
formula, 1035
reduction formulae, 989
reference frame, 1473
removabel, 163
revolution
surface, 677
Richter scale, 796
Riemann
sum, 532
root, 173
rule
constant multiple, 219
Delesse's, 734
differential of constant, 217
power, 218
product, 223
quotient, 226
reciprocal, 235
sum, 220

saddle point, 1417
scalar, 1330
functions, 1439
product, 1363
scalar multiple, 1330
search
binary, 840
sequential, 840
secant, 95
sensitive, 242, 1047
sensitivity, 234, 242
sequence, 1030
infinite, 1030

dependent, 1516
dummy, 537
independent, 1516
input, 1516
output, 1516
vector, 1329
binormal, 1484
function, 1438
length, 1335
magnitude, 1335
position, 1348, 1438
product, 1378
unit, 1336
vector-valued
function, 1438
velocity, 1442
average, 237
vertex, 57, 1196
vertices, 1204
voltage
peak, 579
volume, 1714

zero, 173

steps, 598
subintervals, 531
sum
lower, 534
summation
lower limit, 528
upper limit, 528
surface, 1520
level, 1522

tangent, 96, 1338
Taylor's
formula, 1157
terminal point, 1244
terms, 528
test
comparison, 1094
direct comparison, 1012
extrinsic, 1103
intrinsic, 1103
limit comparison, 1013
theorem
mean value, 339
perpendicular axis, 1690
Rolle's, 337
sandwich, 116
time constant, 916
TNT, trinitrotoluene, 452
torque, 689
system, 689
torsion, 1478, 1485
torus, 654, 737
transcendental, 743
tree diagram, 1581

unbounded, 1519
union, 9
unit
circle, 72
unit circle, 17

variable

آزادانہ گرنا، 239

ابتدائی قیمت
مسئلہ، 484
ابتدائی نقطہ، 1244
اختتامی نقطہ، 1244
ارتکاز
رداس، 1134
وقفہ، 1134
اساسی، 1332
استمرار
نقطہ پر، 1440
یکساں، 535
استمراری، 1440، 1533
بائیں، 165
دائیں، 165
نقطہ پر، 1533
وقفہ پر، 171
استمراری توسیع، 170
اسراع، 239، 1442
اشتراک، 9
اصول
فغما، 421

اعداد
حقیقی، 3
غیر ناطق، 3
ناطق، 3

اعدادی
ترکیب، 918
حل، 918
اعداد ضربیہ، 1035
افراط زر، 809
اکائی
دائرہ، 72
اکائی دائرہ، 17
الٹ، 746
الجبرائی، 743
الخوارزم
کمپیوٹر، 840
انتہا، 326
انجیوپلاسٹی، 448
انحنا، 1478
اندرسہ، 654، 737
اندرون، 4، 56، 1518، 1520
اندرونی
نقطہ، 1520
اندرونی نقطے، 4
اوج شمسی، 1306
اوسط، 518
حسابی، 350
ہندسی، 350
اوسط زندگی
مرکزہ، 817
اوسط قیمت، 562
ایک ایک تفاعل، 744
ایلاسکا، 288

بار، 719
بارودی مواد، 452
برف
روئی، 296
برقیہ
منفی، 719
بڑھتا، 344
بڑھوتری، 15
بند، 4، 1518، 1520
گیند، 1519
بیرون، 56

پرکھ
اندرونی، 1103
بلا واسطہ تقابلی، 1012
تقابل حد، 1013
تقابلی، 1094
پسٹن، 288
پیداکار
منحنی، 1408
پیداکار خطہ، 639
پیما
رکٹر، 796
فاصلہ، 309

تابع متغیر، 31

تابکار، 810
تابکاری تحلیل، 810
تخفیف
کلیات، 989
ناقابل، 962
تدویر، 1248
فلک، 1257
ترتیب، 1030
ذیلی، 1036
غیر بڑھتا، 1043
لامتناہی، 1030
نیچے سے محدود، 1044
ترخیمی
تکمل، 1270
ترخیم، 1198
ترخیمی سطح، 1207
ترسیم، 1520
نقطہ، 242
ترکیب
پکاغ، 1053
جزوی کسری، 959
ترکیب یولر، 918
تسلسل
ارتکاز، 1066
انفراج، 1066
بدلتا، 1115
بدلتا ہارمونی، 1115
ٹیلر، 1147
ثنائی، 1176
جزو، 1066
دم، 1037
طاقتی، 1129
غیر گھٹتا، 1037
لامتناہی، 1065
مکلارن، 1147
ہارمونی، 1084
ہندسی، 1066
تعین گر
سمتیہ، 1438
تفاعل
بڑا ترین عدد صحیح، 40
حقیقی قیمت، 1516
خلل، 1024
سائن تکمل، 1024
شناختی، 746
عددی صحیح چھت، 40
عددی صحیح زمین، 40
کم ترین عدد، 40
مرکب، 37
ہذلولی، 897
تفرق، 186، 195
این رتبی، 229
پہلا، 229
تین رتبی، 229
جزوی، 1545، 1546
دو رتبی، 229
دوسرا، 229
رتبہ اول، 229
رتبہ دوم، 229
رخی، 1601
قابل، 196، 1260
یک رتبی، 229
تفرقی
مساوات، 484
تفرقی مساوات
حل، 900
خطی، 902
قابل علیحدگی، 901
معیاری روپ، 902
یک رتبی، 900
تفریق، 1568
کل، 1568
تفریقی
وسطی حاصل تقسیم، 271
تقاطع، 9
تکمل
اعادہ، 1669
بارہا، 1669
بالحصص، 945

- ترخیمی، 1270
- تہرا، 1713
- جدولی، 952
- جزو، 903
- خطی، 1763
- دوہرا، 1666
- غیر بنیادی، 991
- غیر قطعی، 472، 1447
- قابل، 533
- قطعی، 533
- کا مستقل، 472
- متغیر، 472
- تکونی عدم مساوات، 7
- تلاش
  - ترتیبی، 840
- تناسب پہلو، 15
- توالی
  - راہ، 1054
  - کلیہ، 1035
- توانائی
  - حرکی، 719
- تیزابیت، 797

- ٹیلر
  - کلیہ، 1157

- ثمن، 1347
  - پہلا، 1347
- ثنائی
  - تسلسل، 1176
- ثنائی تلاش، 840

- جاذب، 956
- جاول، 706، 1370
- جذر، 173
- جزوی کسر، 959
- جسم طواف، 639
- جفت، 38
- جنیات، 243
- جوڑی دار تعلق، 114
- جھٹکا، 261
- جین، 243

- حد، 96، 1033، 1439، 1530
  - بائیں ہاتھ، 143
  - دائیں ہاتھ، 143
  - دو طرفہ، 144
- حل
  - عمومی، 485
  - مخصوص، 485
- حاشیہ، 243
- حاشیہ لاگت، 244
- حاشیہ لاگت پیداوار، 244
- حاصل تقسیم
  - تفریقی، 186
- حجریہ ہڈی، 819
- حجم، 1714
- حد بندی
  - بالائی، 1038
  - زیریں، 1044
  - کم سے کم بالائی، 1038
- حرارت نا گزر عمل، 714
- حرکت
  - دواری، 1685
- حساس، 242، 1047
- حساسیت، 234، 242
- حضیض شمس، 1502
- حضیض شمسی، 1306
- حقیقی
  - اعداد، 1
  - خط، 1
  - قیمت تفاعل، 32
  - متغیرات، 32
- حوالہ چھوکٹ، 1473

- خط
  - ارتفاع، 1521
- خاصیت
  - متوسط قیمت، 171
- خانہ بندی، 531
- خطی
  - مساوات، 24

معیاری تخمین، 441
خط بند
تفاعل، 1564
خط بندی، 441
خط رجعت، 1638
خطی تخمین
معیاری، 1564
خفی
تفرق، 291
خلل، 1572

دائرہ، 54، 1195
انحنا، 1482
دائرہ کار، 30، 1516
قدرتی، 33
دباو، 720
چوٹی، 579
در پیچیدہ، 1256
دوار، 1685
رداس، 1689
دو چشمہ، 1290
دو درجی
تخمین، 1156
منحنیات، 1230
دوری، 81
دوری عرصہ، 81، 1507
دو لختی نقطہ، 1047

ڈھلوان، 19، 184

راس، 57، 1196، 1204
راہ، 1438
ربعات، 15
رجعت
خط، 1638
رداس، 54، 1195
انحنا، 1482
دوار، 1689
رداس ارتکاز
صفر، 1134
لامتناہی، 1134
رفتار، 239
رکٹر پیمائش، 796
روک، 956
ریمان
مجموعہ، 532

زاویہ میلان، 20
زنجیری قاعدہ، 274
زیادہ سے زیادہ
مقامی، 1627

سالمہ، 973
ستارہ نما، 1257
سرحدی
نقطہ، 1520
نقطے، 4
سرحد، 4، 1518، 1520
سطح، 1520
طواف، 677
سعت، 30، 1516
سگما علامتی اظہار، 528
سلسلہ، 3
سمتی
تفاعل، 1438
ضرب، 1378
سمتیہ، 1329
اساس، 1348
اکائی، 1336
تعین گر، 1348
دوہری عمودی، 1484
صفر، 1351
لمبائی، 1335
مقدار، 1335
سمتی رفتار، 1442
اوسط، 237
سمتی قیمت تفاعل، 1438
سمسن
قاعدہ، 604
سنک، 1220
سود در سود
مسلسل، 809
سیکنٹ، 95

شکل شجرہ، 1581
شناختی تفاعل، 746

صفر، 173
صلیبی
ضرب، 1379

ضرب
سمتی، 1378
صلیبی، 1379
غیر سمتی، 1363

طاقت
ہائیڈروجن، 797
طاق، 39
طاقتی تسلسل، 1129
مرکز، 1129
طواف
سطح، 677

عالمگیر، 326
عاملین، 1660
عددی سر، 1129
عدم استمرار
ارتعاشی، 165
چھلانگ، 163
لا متناہی، 165
عکس، 1752
قبل، 1752
عمل انگیز، 435
خود، 435
عمودی، 294، 1338، 1366
تراش، 1408

غالب، 243، 400
غلبہ، 400
غیر بنیادی تکمل، 991
غیر تابع متغیر، 31
غیر سمتی، 1330
تفاعل، 1439
ضرب، 1363
مضرب، 1330

غیر محدود، 1519
غیر معین روپ، 819

فبونیکی اعداد، 1036
فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم، 271
فشار، 720
فلک تدویر، 1257
فولاد
بے زنگ، 717

قابل تبادل، 1366
نا، 1380
قابل تفرق، 1563
قابل ہٹاو، 163
قاعدہ
بالعکس متناسب، 235
تفرق مستقل، 217
حاصل تقسیم، 226
حاصل ضرب، 223
دولس، 734
طاقت، 218
متوازی الاضلاع، 1331
مجموعہ، 220
مستقل مضرب، 219
قانون
ہک، 709
قانون انعطاف
ابن سھل، 422
قانون ٹھنڈک
نیوٹن، 813
قدم، 598
لمبائی، 598
قطع
ایکس، 23
وائے، 23
قطب، 1274
قطب نما، 1288
قطعی
تکمل، 533
قطع زائد، 1202
مرکز، 1204

قطع مکافی، 18، 57، 1196
قوت مروڑ، 689
نظام، 689

کروی
پچر، 1741
کروی محدد، 1430
کلیہ
پاپس، 1700، 1735
توالی، 1035
کلیات
تخفیف، 989
کم زیادہ، 1417
کم سے کم
مقامی، 1627
کمیت، 1689
مرکز، 690
کوسائن
رخ، 1373
قاعدہ، 83
کھلا، 4، 1518، 1520
گیند، 1519
کیم، 1288

گریزی رفتار، 915
گنج غیر ہموار منحنیات، 672
گھٹتا، 344
گیما تفاعل، 1025

لساجس اشکال، 1272
لمحاتی
شرح تبدیلی، 96
لوگارتھم
عام، 796
لوگارتھمی تفرق، 768
لیبنٹز
کلیہ، 1183
لیزم، 898
لیگرینج
ضارب، 1645
ضاربین کی ترکیب، 1645

ماسکہ، 1196، 1202
طول، 1196
ماورائی، 743
مبدا، 14، 1274
متغیر
تابع، 1516
خارجی، 1516
داخلی، 1516
غیر تابع، 1516
نقلی، 537
متقارب، 394، 1204
متکمل، 472
متناہی مجموعہ، 511
مثلثی، 1259
مجموعہ
ارکان، 528
زیریں، 534
مجموعی سلسلہ
اشاری، 528
بالائی حد، 528
زیریں حد، 528
محدد
ایکس، 14
مستطیل، 1347
وائے، 14
محددی جوڑی، 14
محددی محور، 14
محدود، 1519
اوپر سے، 1038
محور، 57، 1196
اصغر، 1200
اکبر، 1200
طواف، 639
ماسکہ، 1204
مثبت ایکس، 14
منفی ایکس، 14
مخروط مقطوع، 677
مدار
ہم عصر، 1510

مرتکز، 1006، 1033
مشروط، 1118
مطلق، 1118
مرکز، 54، 1195
انحنا، 1482
کمیت، 694
وسطانی، 1694، 1730
مرکوز، 533
مروڑ، 1478، 1485
مساوات
ڈھلوان-قطع، 23
عمومی خطی، 24
نقطہ-ڈھلوان، 22
مستقل
اختیاری، 472
تجاذبی، 1500
شرحی، 806
مستقلہ اسپرنگ، 709
مستوی
ایکس وائے، 1346
محددی، 1347
مسئلہ
اوسط قیمت، 339
بیچ، 116
پاپس، 735
رول، 337
عمودی محور، 1690
مطلق قیمت، 6
معیاری
مقام، 73
معیار، 532
معیار اثر
اول، 1689
دوم، 1689
قطبی، 1690
مغلوب، 243
مقدار معلوم، 1244
ترسیم، 237
روپ، 238، 1438
روپ دینا، 1244
مساوات، 1244
وقفہ، 1244
مقررہ نقطہ، 180، 1054
مقعر
اوپر، 366
نیچے، 366
مقیاس لچک، 709
مماس، 96، 184، 1338
ممیز، 1235، 1628
منحنی
تکمل، 488
حل، 488
کمتر وقتی، 1250
یکساں وقتی، 1250
منفرج، 1006، 1033
میکسما، 1002

ناظمہ، 1196
نصف زاویہ
کلیات، 83
نصف زندگی، 810
نصف کھلا، 4
نظریہ
ابتری، 207
نقطہ
اندرونی، 163، 1517
بائیں سر، 163
تصریف، 367
دائیں سر، 163
زین، 1625، 1627
سرحدی، 1517
فاصل، 1625
نقطہ زین، 1417
نقطہ فاصل، 330
نقل اتارنا، 491
نلکی، 1408
نلکی محدد، 1426

وسط، 441
وسطانی مرکز، 701
وسیع تفاعل، 170
وقتی مستقل، 916

وقفہ، 3
ذیلی، 531
لا متناہی، 4
متناہی، 3

ہٹاو، 237، 731
ہم قد
سطح، 1522
منحنی، 1520
ہموار، 1260، 1442
ٹکڑوں میں، 1442
منحنی، 668
ہوائی پترا، 611
ہیلیم، 317

یعقوبی، 1752
مقطع، 1756
یولر
کلیہ، 1164
مستقل، 1093