احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 7

ماورائی تفاعل

ریاضیات میں بہت سے تفاعل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔ غالباً سب سے زیادہ جانی پہچانی الٹ تفاعل کی جوڑی $\ln x$ اور e^x ہے۔ موزوں وقفہ پر پابند تکونیاتی تفاعل کے اہم الٹ پائے جاتے ہیں۔ اسی طرح لوگار تھمی اور قوت نمائی تفاعل کے دیگر الٹ جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ ہذلولی تفاعل اور ان کے الٹ تفاعل کا استعمال آویزاں رسی، منتقلی حرکی توانائی، اور ہوا میں گرتے ہوئے جسم پر قوت رگڑ کے مسائل میں کام آتے ہیں۔ اس باب میں ان تمام تفاعل پر غور کیا جائے گا۔ ان مسئلوں کا بھی ذکر کیا جائے گا جنہیں یہ تفاعل حل کرنے میں مدد گار ثابت ہوتے ہیں۔

7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

اس حصہ میں ہم الٹ تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں اور ان کی کلیات، ترسیمات، اور الٹ جوڑیوں کے تفرق پر غور کرتے ہیں۔

ایک ایک تفاعل

تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو اپنی دائرہ کار کے ہر نقطہ کو اپنی سعت میں ایک قیمت مختص کرتا ہو۔ بعض تفاعل ایک ہی قیمت کو ایک سے زیادہ نقطوں کے لئے مختص کرتے ہیں۔ یوں -1 کا مربع اور 1 کا مربع 1 ہے؛ اسی طرح $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ اس کے برعکس دیگر تفاعل کسی ایک قیمت کو کبھی بھی دو بار مختص نہیں کرتے ہیں۔ مختلف اعداد کے جذر المربع اور جذر الکعب ہر صورت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔ ایسا تفاعل جس کے انفرادی نقطوں پر منفرد قیمت ہو کو ایک ایک تفاعل[1] کہتے ہیں۔

---

[1] one to one function

تعریف: دائرہ کار D پر تفاعل $f(x)$ تب ایک ایک ہو گا جب $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $f(x_1) \neq f(x_2)$ ہو۔

□

مثال 7.1: چونکہ کسی بھی غیر منفی اعداد کے لئے $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ ہے لہٰذا $f(x) = \sqrt{x}$ غیر منفی اعداد کے کسی بھی دائرہ کار پر یہ ایک ایک تفاعل ہے۔ □

مثال 7.2: چونکہ $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ ہے لہٰذا وقفہ $[0, \pi]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل نہیں ہے۔ اس کے برعکس چونکہ ربع اول میں تمام زاویوں کے سائن مختلف ہیں لہٰذا وقفہ $[0, \frac{\pi}{2}]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل ہے۔ □

ایک ایک تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے۔ اگر کسی تفاعل کی ترسیم کسی افقی لکیر کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہو تب یہ تفاعل y کی اس قیمت کو ایک سے زیادہ مرتبہ اختیار کرتا ہے لہٰذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہو گا (شکل 7.1)۔

افقی لکیر کا پرکھ
کوئی بھی تفاعل $y = f(x)$ صرف اور صرف اس صورت ایک ایک تفاعل ہو گا جب اس کی ترسیم ہر افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہو۔

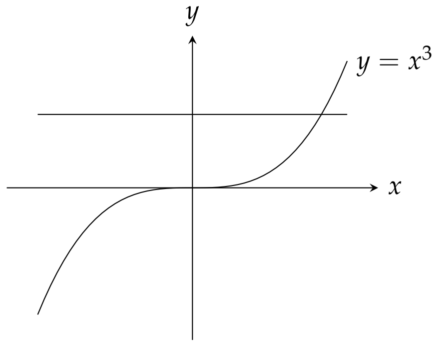
الٹ

چونکہ ایک ایک تفاعل کا ہر مخارج انفرادی مداخل سے آتا ہے لہٰذا ایک ایک تفاعل کو الٹ کرتے ہوئے ہر مخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجا جا سکتا ہے جس سے یہ مخارج حاصل ہوتا ہے (شکل 7.2)۔ ایک ایک تفاعل f کو الٹ کر کے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اس کو f کا الٹ[2] کہتے ہیں جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں f^{-1} میں -1 کو طاقت نہ سمجھا جائے: یعنی $f(x)^{-1}$ سے مراد $\frac{1}{f(x)}$ نہیں ہے۔ ہم f^{-1} کو "f کا الٹ" پڑھتے ہیں۔

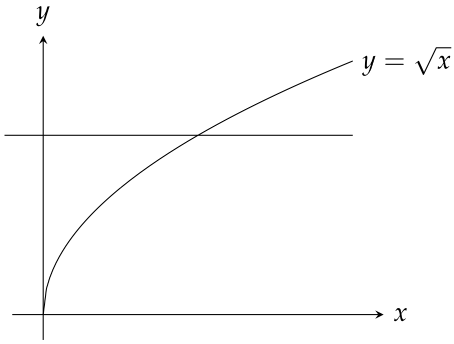
جیسا شکل 7.2 سے ظاہر ہے، f سے f^{-1} یا f^{-1} سے f حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی x کے لئے $f(x)$ حاصل کر کے اس $f(x)$ کا الٹ $f^{-1}(f(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جو x ہو گا۔ تفاعل $f^{-1}(f(x))$ یا تفاعل $f(f^{-1}(x))$ میں x پر کرنے سے واپس x ملتا ہے۔ ایسا تفاعل جو ہر عدد کو اسی عدد کے لئے مختص کرتا ہو شناختی تفاعل[3] کہلاتا ہے۔ یوں تفاعل f اور g کو ایک دوسرے کا الٹ تفاعل ہونے کے لئے پرکھا جا سکتا ہے۔ اگر $x = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ہو تب

---

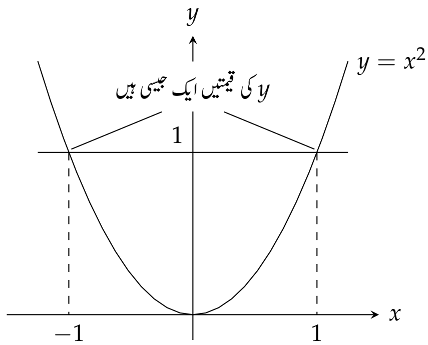
[2] inverse
[3] identity function



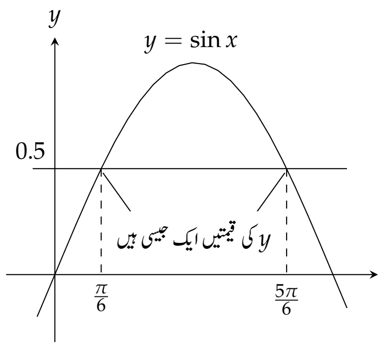
(ا) ایک ایک تفاعل۔



(ب) ایک ایک تفاعل۔

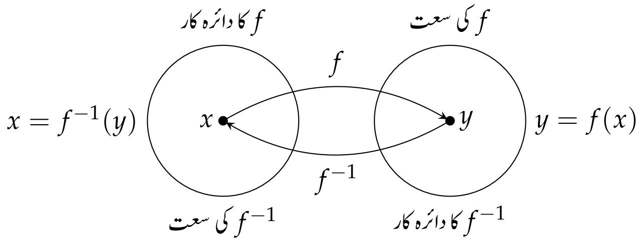


(ج) غیر ایک ایک تفاعل۔



(د) غیر ایک ایک تفاعل۔

شکل 7.1: ایک ایک تفاعل کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے جبکہ غیر ایک ایک تفاعل کی ترسیم، ایک یا ایک سے زیادہ افقی لکیروں کو ایک سے زیادہ بار قطع کرتی ہے۔



شکل 7.2: تفاعل f کا الٹ ہر مخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجتا ہے جہاں سے وہ آیا و۔

f اور g ایک دوسرے کے الٹ تفاعل ہوں گے ورنہ یہ ایک دوسرے کے الٹ تفاعل نہیں ہوں گے۔ اگر f اپنے دائرہ کار کا مکعب لیتا ہو تب g اس صورت f کا الٹ ہو گا اگر g جذر الکعب لیتا ہو ورنہ یہ f کا الٹ نہیں ہو گا۔

تفاعل f اور g ایک دوسرے کے الٹ صرف اور صرف اس صورت ہوں گے جب

$$f(g(x)) = x \quad \text{اور} \quad g(f(x)) = x$$

ہوں۔ایسی صورت میں $g = f^{-1}$ اور $f = g^{-1}$ ہوں گے۔

ایک تفاعل کا الٹ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب یہ ایک ایک تفاعل ہو۔ یوں بڑھتے تفاعل کا الٹ تفاعل ہو گا اور گھٹتے تفاعل کا بھی الٹ تفاعل ہو گا۔ جن تفاعل کا تفرق مثبت ہو وہ اپنے دائرہ کار میں بڑھتے ہیں لہٰذا ان کا الٹ ہو گا (صفحہ 352 پر مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3)۔اسی طرح جن تفاعل کا تفرق منفی ہو وہ اپنے دائرہ کار میں گھٹتے ہیں لہٰذا ان کا الٹ ہو گا۔

الٹ کی تلاش

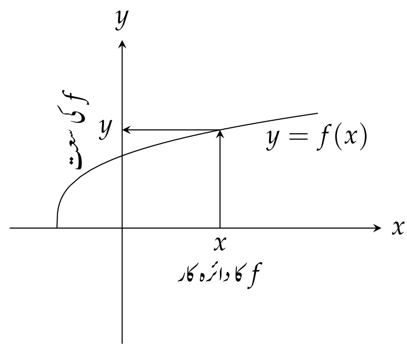
تفاعل کے الٹ کی ترسیم کا تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ فرض کریں ایک تفاعل کی ترسیم شکل کی طرح بڑھتا ہو، یعنی یہ بائیں سے دائیں اوپر اٹھتی ہو۔ کسی بھی x کے لئے ترسیم سے قیمت پڑھنے کے لئے ہم محور x پر نقطہ x سے شروع ہو کر محور y کے متوازی چل کر ترسیم تک پہنچتے ہیں اور یہاں سے محور x کے متوازی چل کر محور y تک پہنچ کر تفاعل کی قیمت y پڑھتے ہیں۔ہم اس عمل کو الٹ کرتے ہوئے y سے شروع کرتے ہوئے x پڑھ سکتے ہیں۔

تفاعل f کی ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم f^{-1} کی ترسیم میں مداخل مخارج جوڑیوں کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ اس ترسیم کو عمومی طرز پر دکھانے کی خاطر ہمیں ان جوڑیوں کا $45°$ کی لکیر $y = x$ میں عکس لینا ہو گا اور ساتھ ہی حرف x اور حرف y کا ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کرنا ہو گا۔ یوں غیر تابع متغیر، جس کو اب x کہتے ہیں، افقی محور پر دکھایا جائے گا اور تابع متغیر، جس کو اب y کہتے ہیں، کو انتصابی محور پر دکھایا جائے گا۔ تفاعل $f(c)$ اور $f^{-1}(x)$ کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

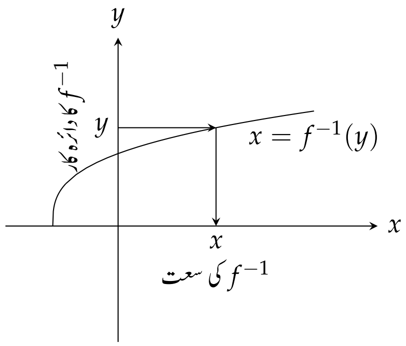
شکل 7.3 میں f^{-1} کو متغیر x کا تفاعل لکھنا دکھانا گیا ہے جس کو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

ا. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لئے حل کریں۔ یوں x کو y کی صورت میں لکھا جائے گا۔

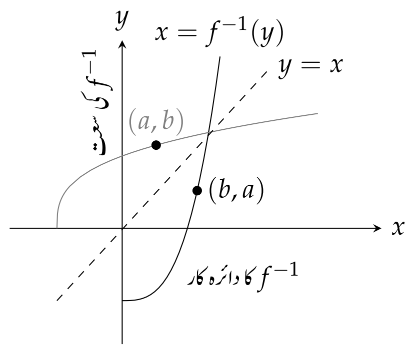
ب. جزو-ا میں حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کریں۔ یوں حاصل کلیہ $y = f^{-1}(x)$ ہو گا۔



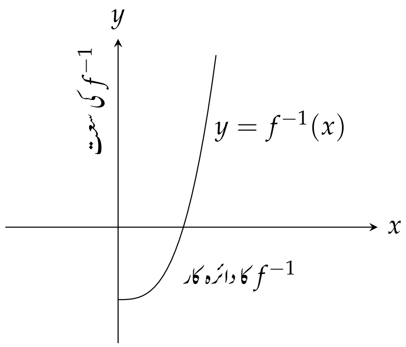
(ا) نقطہ x پر f کی قیمت جاننے کے لئے ہم x سے انتصابی رخ چلتے ہوئے ترسیم تک پہنچ کر افقی سمت محور y تک پہنچ کر درکار قیمت پڑھتے ہیں۔



(ب) تفاعل f کی ترسیم کو f^{-1} کی ترسیم تصور کیا جا سکتا ہے۔ وہ x جو y دیتا ہو کو تلاش کرنے کی خاطر، ہم y سے افقی رخ ترسیم تک اور پھر انتصابی رخ محور x تک پہنچ کر درکار x پڑھتے ہیں۔ f کا دائرہ کار f^{-1} کی سعت ہو گی جبکہ f کی سعت f^{-1} کا دائرہ کار ہو گا۔



(ج) تفاعل f^{-1} کو ترسیم کرنے کی خاطر ہم f کا لکیر $y = x$ میں عکس لیتے ہیں۔



(د) آخر میں ہم حرف x اور حرف y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ یوں متغیر x کے تفاعل f^{-1} کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.3: تفاعل f کے الٹ f^{-1} کی ترسیم۔

مثال 7.3: تفاعل $y = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ حاصل کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

حل: قدم ا: x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + 1 \\ 2y &= x + 2 \\ x &= 2y - 2 \end{aligned}$$

قدم ب: حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = 2x - 2$$

یوں تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ تفاعل $f^{-1}(x) = 2x - 2$ ہو گا۔

اس کی تصدیق کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ آیا دونوں مرکب تفاعل شناختی تفاعل دیتے ہیں:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \\ f(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x \end{aligned}$$

□

مثال 7.4: تفاعل $y = x^2,\ x \geq 0$ کا الٹ تلاش کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

حل: قدم ا: دیے گئے مساوات کو حل کر کے x کو y کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{x^2} = |x| = x \end{aligned}$$

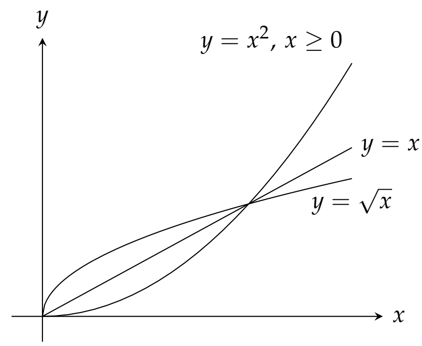
$x \geq 0$ کی بنا $|x| = x$ ہو گا

قدم ب: جزو-ا میں حاصل نتیجہ میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

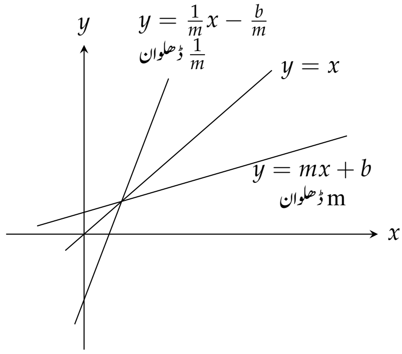
$$y = \sqrt{x}$$

یوں تفاعل $y = x^2,\ x \geq 0$ کا الٹ $y = \sqrt{x}$ ہو گا (شکل 7.4)۔

یہاں دھیان رہے کہ پابند تفاعل $y = \sqrt{x},\ x \geq 0$ ایک ایک تفاعل ہے لہٰذا اس کا الٹ پایا جاتا ہے جبکہ تفاعل $y = x^2$ ایک غیر پابند تفاعل ہے جو ایک ایک تفاعل نہیں ہے لہٰذا اس کا الٹ نہیں پایا جاتا ہے۔ □



شکل 7.4: تفاعل $y=\sqrt{x}$ اور $y=x^2,\ x\geq 0$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں (مثال 7.4)۔



شکل 7.5: لکیر $y=x$ میں منعکس غیر انتصابی لکیروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

کمپیوٹر کا استعمال

تفاعل $y=f(x)$ کا الٹ تفاعل نہایت آسانی سے درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے ترسیم کیا جا سکتا ہے۔

$$x(t)=f(t),\quad y(t)=t$$

آپ تفاعل اور تفاعل کے الٹ کو ساتھ ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں:

$$x_1(t)=t,\quad y_1(t)=f(t) \qquad \text{تفاعل}$$
$$x_2(t)=f(t),\quad y_2(t)=t \qquad \text{تفاعل کا الٹ}$$

اس سے بھی زیادہ بہتر ہو گا کہ تفاعل، تفاعل کا الٹ اور شناختی تفاعل $y=x$ کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں جہاں شناختی تفاعل درج ذیل ہو گا۔

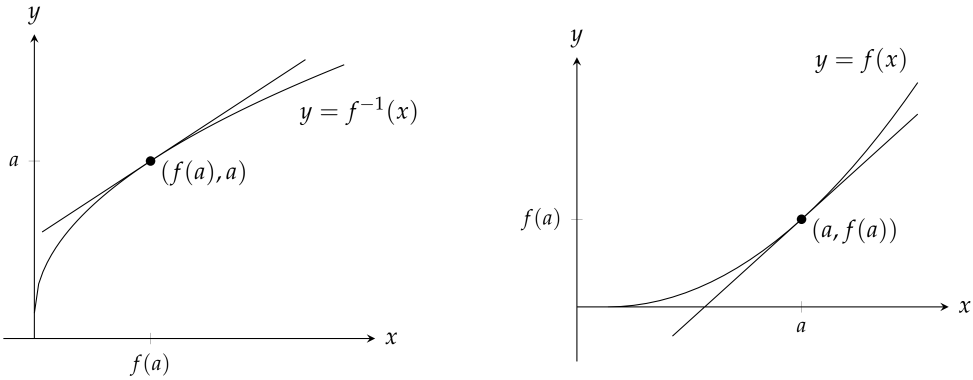
$$x_3(t)=t,\quad y_3(t)=t \qquad \text{شناختی تفاعل}$$

تفاعل $y=\frac{x^5}{x^2+1}$ اور $y=x+\cos x$ کے ساتھ ان کے الٹ تفاعل اور شناختی تفاعل ایک ساتھ ترسیم کر کے دیکھیں۔ ترسیم میں x اور y محور کے اکائی فاصلے برابر نظر آنے چاہیے تا کہ لکیر $y=x$ کے لحاظ سے تفاعل اور اس کا الٹ تشاکلی نظر آئیں۔

قابل تفرق تفاعل کے الٹ کے تفرق

تفاعل $f(x)=\frac{x}{2}+1$ اور اس کے الٹ $f^{-1}(x)=2x-2$ (مثال 7.3) کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x-2)=2$$



شکل 7.6: الٹ تفاعل کے مطابقتی نقطوں پر ڈھلوان ایک دوسرے کا بالعکس متناسب $\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a} = \left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{f(a)}$ ہو گا۔

یہ تفرقات ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہیں۔ تفاعل f کی ترسیم لکیر $y = \frac{x}{2} + 1$ اور f^{-1} کی ترسیم لکیر $y = 2x - 2$ ہے۔ ان لکیروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہیں (شکل 7.5)۔

یہ نتیجہ کسی مخصوص تفاعل کے لئے نہیں ہے۔ لکیر $y = x$ میں کسی بھی غیر افقی یا غیر انتصابی لکیر کے عکس کا ڈھلوان اس لکیر کے ڈھلوان کے بالعکس متناسب ہو گا۔ یوں اگر دیے گئے لکیر کا ڈھلوان $m \neq 0$ (شکل 7.5) ہو تب منعکس لکیر کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہو گا۔

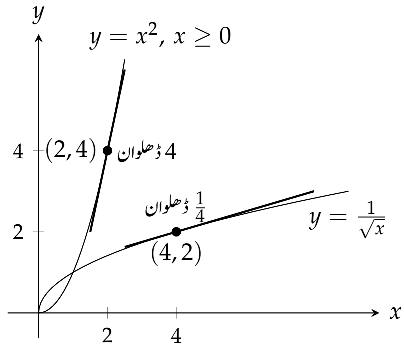
تفاعل اور اس کے الٹ کے ڈھلوانوں کا بالعکس متناسب تعلق دیگر تفاعل کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ اگر نقطہ $(a, f(a))$ پر $y = f(x)$ کا ڈھلوان $f'(a) \neq 0$ ہو تب مطابقتی نقطہ $(f(a), a)$ پر $y = f^{-1}(x)$ کا ڈھلوان $\frac{1}{f'(a)}$ ہو گا (شکل 7.6)۔ یوں نقطہ $f(a)$ پر f^{-1} کا تفرق، نقطہ a پر f کے تفرق کا بالعکس متناسب ہو گا۔ یہ تعلق اس صورت درست ہو گا جب f درج ذیل مسئلہ میں پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط اعلیٰ احصاء سے حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 7.1: الٹ تفاعل کے تفرق کا قاعدہ
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہو اور I پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کبھی بھی صفر نہ ہو، تب وقفہ $f(I)$ کے ہر نقطہ پر f^{-1} قابل تفرق ہو گا۔ کسی ایک مخصوص نقطہ $f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا تفرق نقطہ a پر تفرق $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کا بالعکس متناسب ہو گا:

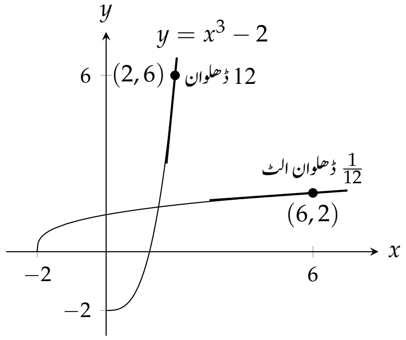
$$\left(\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}} \tag{7.1}$$

اس کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \tag{7.2}$$



شکل 7.7: نقطہ $(4,2)$ پر $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کا تفرق نقطہ $(2,4)$ پر $f(x) = x^2$ کے تفرق کا بالعکس متناسب ہو گا (مثال 7.5)۔



شکل 7.8: نقطہ $x = 2$ پر $f(x) = x^3 - 2$ کا تفرق ہمیں نقطہ $x = 6$ پر f^{-1} کا تفرق دیتا ہے (مثال 7.6)۔

مثال 7.5: تفاعل $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ اور اس کے الٹ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x, \quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$$

نقطہ $(4,2)$ لکیر $y = x$ کی دوسری طرف نقطہ $(2,4)$ کا عکس ہے (شکل 7.7)۔ان نقطوں پر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= 2x = 2(2) = 4 && \text{نقطہ } (2,4) \text{ پر}\\
\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}x} && \text{نقطہ } (4,2) \text{ پر}
\end{aligned}$$

□

بعض اوقات f^{-1} کا کلیہ نہ جانتے ہوئے بھی مساوات 7.1 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی مخصوص قیمتیں تلاش کی جا سکتی ہیں۔

مثال 7.6: مان لیں $f(x) = x^3 - 2$ ہے۔ $f^{-1}(x)$ کا کلیہ دریافت کیے بغیر نقطہ $x = 6 = f(2)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: (شکل 7.8)

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = \left.3x^2\right|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12} \qquad \text{مساوات } 7.1$$

□

مسئلہ 7.1 کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ اگر $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور ہم x کی قیمت میں معمولی تبدیلی $\mathrm{d}x$ لائیں تب y میں مطابقتی تبدیلی تخمیناً

$$\mathrm{d}y = f'(a)\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ y کی تبدیلی، x کی تبدیلی کے تقریباً $f'(a)$ گنّا ہو گی اور x کی تبدیلی، y کی تبدیلی کے تقریباً $\frac{1}{f'(a)}$ گنّا ہو گی۔

سوالات

ایک ایک تفاعل کی نشاندہی

سوال 1 تا سوال 6 میں تفاعل کے ترسیم دیے گئے ہیں۔ ان میں ایک ایک تفاعل کی نشاندہی کریں۔

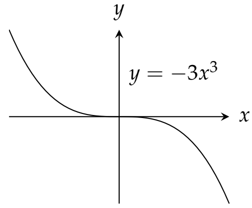
سوال 1: ترسیم شکل 7.9 میں دی گئی ہے۔
جواب: ایک ایک

سوال 2: ترسیم شکل 7.10 میں دی گئی ہے۔

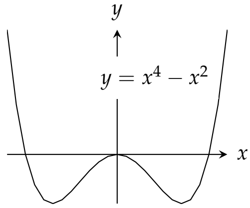
سوال 3: ترسیم شکل 7.11 میں دی گئی ہے۔
جواب: غیر ایک ایک

سوال 4: ترسیم شکل 7.12 میں دی گئی ہے۔

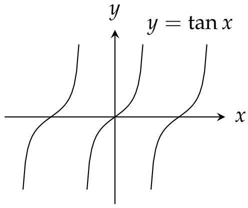
سوال 5: ترسیم شکل 7.13 میں دی گئی ہے۔
جواب: ایک ایک



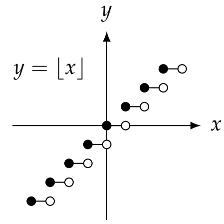
شکل 7.9: ترسیم سوال 1



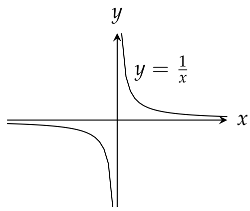
شکل 7.10: ترسیم سوال 2



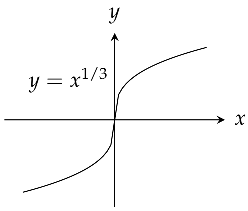
شکل 7.11: ترسیم سوال 3



شکل 7.12: ترسیم سوال 4



شکل 7.13: ترسیم سوال 5



شکل 7.14: ترسیم سوال 6

سوال 6: ترسیم شکل 7.14 میں دی گئی ہے۔

الٹ تفاعل کی ترسیم

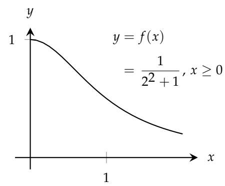
سوال 7 تا سوال 10 میں $y=f(x)$ کی ترسیم دی گئی ہے۔ اس کو نقل کر کے لکیر $y=x$ بھی بنائیں۔ لکیر $y=x$ کے لحاظ سے تشاکلی استعمال کرتے ہوئے $y=f^{-1}(x)$ ترسیم کریں۔ (f^{-1} کا کلیہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔) f^{-1} کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔

سوال 7: تفاعل کی ترسیم شکل 7.15 میں دی گئی ہے۔
جواب: دائرہ کار $[0,1)$ ، سعت $[0,\infty)$ ، شکل 7.19

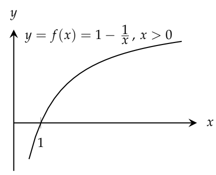
سوال 8: تفاعل کی ترسیم شکل 7.16 میں دی گئی ہے۔

سوال 9: تفاعل کی ترسیم شکل 7.17 میں دی گئی ہے۔
جواب: دائرہ کار $[-1,1]$ ، سعت $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ ، شکل 7.20

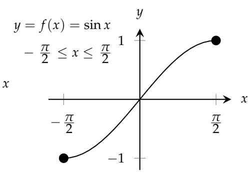
سوال 10: تفاعل کی ترسیم شکل 7.18 میں دی گئی ہے۔



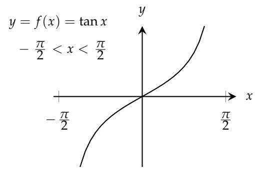
شکل 7.15: ترسیم سوال 7



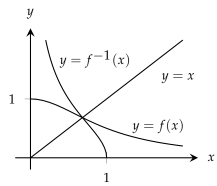
شکل 7.16: ترسیم سوال 8



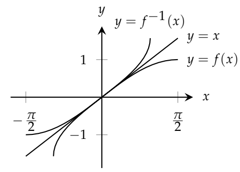
شکل 7.17: ترسیم سوال 9



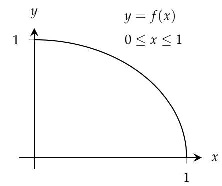
شکل 7.18: ترسیم سوال 10



شکل 7.19: ترسیم جواب 7



شکل 7.20: ترسیم جواب 9



شکل 7.21: ترسیم جواب 11

سوال 11: (ا) تفاعل $f(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟ (ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی الٹ ہے۔ (یاد رہے کہ $x \geq 0$ کی صورت میں $\sqrt{x^2} = x$ ہوتا ہے۔)
جواب: لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ شکل 7.21

سوال 12: (ا) تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟ (ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی الٹ ہے۔

الٹ تفاعل کے کلیات

سوال 13 تا سوال 18 میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f اور f^{-1} کی ترسیمات بھی دکھائی گئی ہیں۔ f^{-1} کا کلیہ تلاش کریں۔

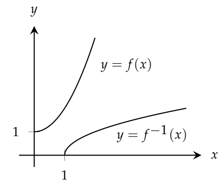
سوال 13: $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$ ترسیم شکل 7.22 میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 14: $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$ ترسیم شکل 7.23 میں دی گئی ہے۔

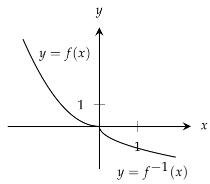
سوال 15: $f(x) = x^3 - 1$ ترسیم شکل 7.24 میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

سوال 16: $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$ ترسیم شکل 7.25 میں دی گئی ہے۔

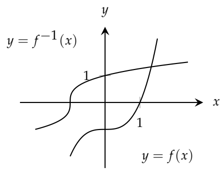
سوال 17: $f(x) = (x+1)^2, \quad x \geq -1$ ترسیم شکل 7.26 میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$



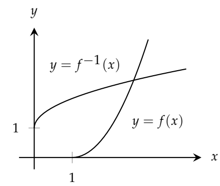
شکل 7.22: ترسیم سوال 13



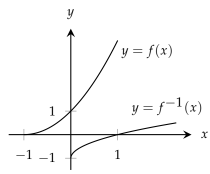
شکل 7.23: ترسیم سوال 14



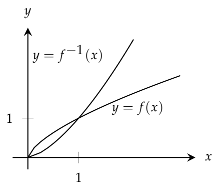
شکل 7.24: ترسیم سوال 15



شکل 7.25: ترسیم سوال 16



شکل 7.26: ترسیم سوال 17



شکل 7.27: ترسیم سوال 18

سوال 18: $f(x)=x^{2/3}, \quad x\geq 0$ ترسیم شکل 7.27 میں دی گئی ہے۔

سوال 19 تا سوال 24 میں تفاعل $y=f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f^{-1} دریافت کریں اور اس کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔ تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$ ہے۔

سوال 19: $f(x)=x^5$
جواب: $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$ دائرہ کار $-\infty<x<\infty$ ، سعت $-\infty<y<\infty$

سوال 20: $f(x)=x^4, \quad x\geq 0$

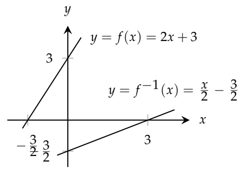
سوال 21: $f(x)=x^3+1$
جواب: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$ دائرہ کار $-\infty<x<\infty$ ، سعت $-\infty<y<\infty$

سوال 22: $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}$

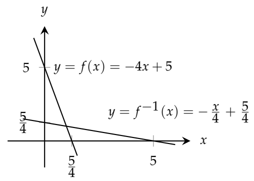
سوال 23: $f(x)=\frac{1}{x^2}, \quad x>0$
جواب: $f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ دائرہ کار $x>0$ ، سعت $y>0$

سوال 24: $f(x)=\frac{1}{x^3}, \quad x\neq 0$

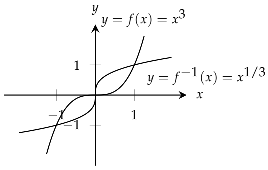
الٹ تفاعل کے تفرق
سوال 25 تا سوال 28 میں درج ذیل اقدام کریں۔



شکل 7.28: ترسیم جواب 25



شکل 7.29: ترسیم جواب 27



شکل 7.30: ترسیم جواب 29

ا. $f^{-1}(x)$ تلاش کریں۔

ب. f اور f^{-1} کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج. نقطہ $x = a$ پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور نقطہ $x = f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت حاصل کریں۔ تصدیق کریں کہ ان نقطوں پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)}$ ہو گا۔

سوال 25: $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$
جواب: (ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$، (ب) شکل 7.28، (ج) $2, \frac{1}{2}$

سوال 26: $f(x) = \frac{x}{5} + 7, \quad a = -1$

سوال 27: $f(x) = 5 - 4x, \quad a = \frac{1}{2}$
جواب: (ا) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$، (ب) شکل 7.29، (ج) $-4, -\frac{1}{4}$

سوال 28: $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

سوال 29:

1. دکھائیں کہ $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔
2. f اور g ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(1, 1)$ اور $(-1, -1)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ میں تشاکلی نظر آنی چاہیے۔
3. نقاط $(1, 1)$ اور $(-1, -1)$ پر f اور g کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)
4. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

جواب: (ب) شکل 7.30، (ج) $(1,1)$ پر f کی ڈھلوان 3 ہے؛ $(1,1)$ پر g کی ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے؛ $-1,-1$ پر f کی ڈھلوان 3 اور $(-1,-1)$ پر g ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ (د) $x=0$ پر $y=x^3$ کا مماس $y=0$ ہے؛ $x=0$ پر $y=\sqrt[3]{x}$ کا مماس $x=0$ ہے۔

سوال 30:

1. دکھائیں کہ $h(x)=\frac{x^3}{4}$ اور $k(x)=(4x)^{1/3}$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

2. h اور k ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y=x$ میں تشاکلی نظر آنی چاہیے۔

3. نقاط $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ پر h اور k کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

4. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال 31: مان لیں $f(x)=x^3-3x^2-1,\ x\geq 2$ ہے۔ نقطہ $x=-1=f(3)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $\frac{1}{9}$

سوال 32: مان لیں $f(x)=x^2-4x-5,\ x>2$ ہے۔ نقطہ $x=0=f(5)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 33: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y=f(x)$ کا الٹ پایا جاتا ہے اور f کی ترسیم نقطہ $(2,4)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ نقطہ $x=4$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: 3

سوال 34: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y=g(x)$ کا الٹ پایا جاتا ہے اور g کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان 2 ہے۔ مبدا پر g^{-1} کی ترسیم کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 35:

ا. تفاعل $f(x)=mx$ کا الٹ تلاش کریں جہاں m غیر صفر مستقل ہے۔

ب. تفاعل $y=f(x)$ کی ترسیم مبدا سے گزرتی لکیر ہے جس کی ڈھلوان m غیر صفر ہے۔ اس تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

جواب: (ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{m}$ ، (ب) f^{-1} کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے اور اس کی ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے۔

سوال 36: دکھائیں کہ $f(x) = mx + b$ ، جہاں m اور b مستقل ہیں اور $m \neq 0$ ہے، کا الٹ ایک لکیر ہے جس کی ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے اور جو محور y کو $-\frac{b}{m}$ پر قطع کرتی ہے۔

سوال 37:

ا. تفاعل $f(x) = x + 1$ کا الٹ تلاش کریں۔ f اور اس کا الٹ ایک ساتھ ترسیم کریں۔ لکیر $y = x$ کو بھی شامل کریں۔

ب. تفاعل $f(x) = x + b$ کا الٹ تلاش کریں جہاں b مستقل ہے۔ f^{-1} کی ترسیم کا f کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

ج. لکیر $y = x$ کے متوازی تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟

جواب: (ا) $f^{-1}(x) = x - 1$ ، (ب) $f^{-1}(x) = x - b$ ، f^{-1} کی ترسیم f کی ترسیم کے متوازی ہے۔ f^{-1} اور f کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے مخالف اطراف پر اور اس لکیر سے برابر فاصلہ پر ہیں۔ (ج) ترسیمات ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے اور لکیر $y = x$ کے مخالف اطراف اور برابر فاصلہ پر ہوں گے۔

سوال 38:

ا. تفاعل $f(x) = -x + 1$ کا الٹ معلوم کریں۔ لکیر $y = -x + 1$ اور لکیر $y = x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان لکیروں کے بیچ زاویہ کتنا ہے۔

ب. تفاعل $f(x) = -x + b$ کا الٹ معلوم کریں جہاں b مستقل ہے۔ لکیر $y = -x + b$ اور لکیر $y = x$ کے مابین زاویہ کتنا ہے؟

ج. لکیر $y = x$ کے عمودی تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

بڑھتا ہوا اور گھٹتا ہوا تفاعل

سوال 39: اگر وقفہ I میں کسی دو نقطوں x_1 اور x_2 پر

$$x_2 > x_1 \quad \implies f(x_2) > f(x_1)$$

ہو تب I پر تفاعل $f(x)$ بڑھتا ہو گا (حصہ 4.2)۔ اسی طرح درج ذیل صورت میں I پر $f(x)$ گھٹتا ہو گا۔

$$x_2 > x_1 \quad \implies f(x_2) < f(x_1)$$

دکھائیں کہ بڑھتے تفاعل اور گھٹتے تفاعل ایک ایک تفاعل ہیں یعنی دکھائیں کہ I میں کسی بھی دو نقطوں x_1 اور x_2 کے لئے $x_2 \neq x_1$ سے مراد $f(x_2) \neq f(x_1)$ ہو گا۔

سوال 40 تا سوال 44 میں سوال 39 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دیے تفاعل کا اپنے وقفہ پر الٹ پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 40: $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{6}$

سوال 41: $f(x) = 27x^3$
جواب: بڑھتا، لہٰذا ایک ایک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{9}x^{-2/3}$

سوال 42: $f(x) = 1 - 8x^3$

سوال 43: $f(x) = (1-x)^3$
جواب: گھٹتا، لہٰذا ایک ایک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{3}x^{-2/3}$

سوال 44: $f(x) = x^{5/3}$

نظریہ اور استعمال

سوال 45: اگر $f(x)$ ایک ایک ہو تب $g(x) = -f(x)$ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 46: اگر ایک ایک اور غیر صفر ہو تب $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 47: فرض کریں کہ g کی سعت، f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہے لہٰذا مرکب تفاعل $f \circ g$ معین ہے۔ اگر f اور g ایک ایک ہوں تب $f \circ g$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر مرکب تفاعل $f \circ g$ ایک ایک ہو تب کیا g لازماً ایک ایک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ مثبت، استمراری ور بڑھتا تفاعل ہے۔ ترسیم کی تاویل کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}\,\mathrm{d}x = bf(b) - af(a)$$

سوال 50: مستقل a ، b ، c اور d پر مسلط وہ شرائط تلاش کریں جو ناطق تفاعل

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

کا الٹ ممکن بناتے ہیں۔

سوال 51: اگر ہم $f^{-1}(x)$ کی جگہ $g(x)$ لکھیں تب مساوات 7.1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \quad \implies g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

اس میں a کی جگہ x پر کرنے سے

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

ملتا ہے جو زنجیری قاعدہ یاد دلاتی ہے۔ یقیناً درج بالا اور زنجیری قاعدے کے بیچ تعلق پایا جاتا ہے۔

فرض کریں f اور g قابل تفرق اور ایک دوسرے کے الٹ ہیں لہٰذا $(f \circ g)(x) = x$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے کر $(f \circ g)'(x)$ کو f اور g کے تفرق کی صورت میں لکھ کر دیکھیں کیا حاصل ہوتا ہے؟ (مسئلہ 7.1 کو دیکھنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔)

سوال 52: ترکیب چھلا اور ترکیب خول کی مساوات
فرض کریں وقفہ $a \le x \le b$ پر f قابل تفرق ہے جہاں $a > 0$ ہے اور f کا قابل تفرق الٹ f^{-1} پایا جاتا ہے۔ تفاعل f، لکیر $x = a$ اور لکیر $y = f(b)$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ترکیب چھلا اور ترکیب خول اس جسم کے حجم کے کلیات ایک جیسا نتیجہ دیتی ہیں:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \left((f^{-1}(y))^2 - a^2\right) \mathrm{d}y = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس مساوات کو ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل متعارف کریں۔

$$C(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi\Big((f^{-1}(y))^2 - a^2\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$K(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $[a,b]$ کے کسی نقطہ پر $C(t)$ اور $K(t)$ کی قیمتیں ایک جیسی ہیں اور $[a,b]$ پر ان کے تفرق بھی ایک جیسے ہیں۔ صفحہ 506 پر سوال 56 کے نتیجہ کے مطابق $[a,b]$ میں تمام t کے لئے $C(t) = K(t)$ ہو گا۔ بالخصوص $C(b) = K(b)$ ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 53 تا سوال 60 میں آپ چند تفاعل اور ان کے الٹ پر غور کریں گے۔ اس کے علاوہ دیے گئے نقطہ پر ان کے تفرق اور خطی تخمینی تفاعل غور کریں گے۔ ان سوالات میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ پر تفاعل $y = f(x)$ اور اس کا تفرق ترسیم کریں۔ بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ اس وقفہ پر f ایک ایک ہے۔

ب. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لئے حل کر کے حاصل الٹ تفاعل کو g سے ظاہر کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر f کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

د. لکیر $y = x$ کے دوسری جانب تشاکلی نقطہ $(f(x_0), x_0)$ پر g کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے اس مماسی لکیر کی ڈھلوان معلوم کریں۔

ہ. تفاعل f ، g ، لکیر $y = x$ ، دونوں مماسی خط اور نقطہ $(x_0, f(x_0))$ اور $(f(x_0), x_0)$ کو جوڑنے والا سیدھا خط ترسیم کریں۔ آپ کو جو تشاکلی نظر آتی ہے اس پر تبصرہ کریں؟

سوال 53: $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

سوال 54: $y = \frac{3x+2}{2x-11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال 55: $y = \frac{4x}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال 56: $y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال 57: $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$

سوال 58: $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

سوال 59: $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال 60: $y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

سوال 61 اور سوال 62 میں درج بالا تمام اقدام بروئے کار لاتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر خفی تفاعل تفاعل کو حل کر کے $y = f(x)$ اور $x = f^{-1}(y)$ حاصل کریں۔

سوال 61: $y^{1/3} - 1 = (x+2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 62: $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

7.2 قدرتی لوگارتھم

علم حساب اور سائنس میں اہم ترین تفاعل اور الٹ کی جوڑی قدرتی لوگارتھم $\ln x$ اور قوت نما تفاعل e^x کی جوڑی ہے۔ تفاعل e^x کی وضاحت $\ln x$ سے ہوتی ہے لہٰذا ہم پہلے $\ln x$ متعارف کرتے ہیں۔لوگارتھم نے پہلے علم حساب میں بہتری پیدا کی۔ لوگارتھم کی خوبیوں نے سترھویں صدی میں آفاقی میکانیات کا حساب اور ساحل سے دور راہ تلاش کرنا ممکن بنایا۔ اگرچہ آج کل پیچیدہ حساب کمپیوٹر کی مدد سے کیا جاتا ہے، بہر حال لوگارتھم کی خوبیاں آج بھی اتنی ہی اہمیت رکھتی ہیں۔

قدرتی لوگارتھمی تفاعل

مثبت عدد x کے قدرتی لوگارتھم کو $\ln x$ لکھا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل تکمل دیتا ہے۔

$$\ln x = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$$ قدرتی لوگارتھمی تفاعل کی تعریف

اگر $x > 1$ ہو تب $t = 1$ سے $t = x$ تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبہ $\ln x$ ہو گا (شکل 7.31)۔ اگر $0 < x < 1$ ہو تب x سے 1 تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبے کا منفی $\ln x$ ہو گا۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل وقفہ $x \leq 0$ کے لئے غیر معین ہے۔ لوگارتھمی تفاعل کی تعریف سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$$ بالائی اور زیریں حد ایک جیسے ہیں

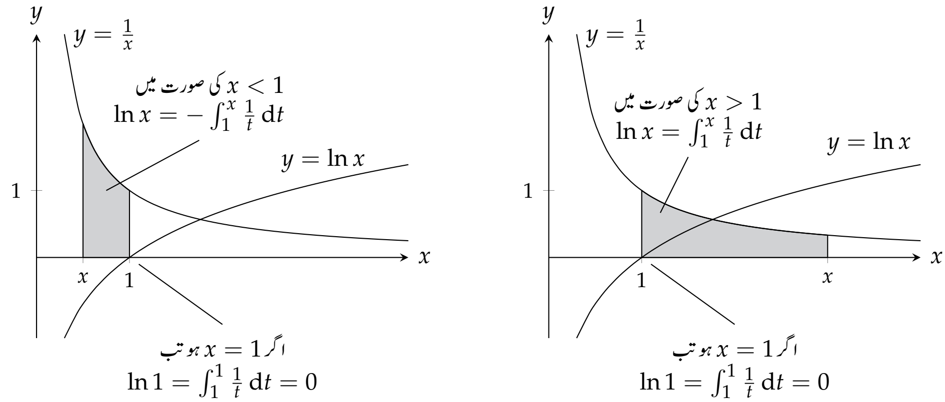
دھیان رہے کہ ہم شکل 7.31 میں $y = \frac{1}{x}$ ترسیم کرتے ہیں لیکن تکمل میں $y = \frac{1}{t}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہر متغیر کو x لکھنے سے

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

لکھا جائے گا جہاں x کے دو مختلف معنی ہیں۔ اسی لئے ہم تکمل میں متغیر کو تبدیل کرتے ہوئے t لکھتے ہیں۔

x کی مختلف قیمتوں کے لئے تین اعشاریہ درست قدرتی لوگارتھمی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	0	0.05	0.5	1	2	3	4	10
$\ln x$	غیر معین	-3.00	-0.69	0	0.69	1.10	1.39	2.30



شکل 7.31: تفاعل $y = \frac{1}{x},\ x > 0$ اور قدرتی لوگارتھمی تفاعل $y = \ln x$ کا تعلق۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل $x > 1$ کے لئے مثبت اور $x < 1$ کے لئے منفی ہے۔

قدرتی لوگارتھمی تفاعل کا تفرق

احصاء کے بنیادی مسئلہ کے جزو اول (مسئلہ 5.3) سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا x کی ہر مثبت قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x}$$

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u کی قیمتیں مثبت ہوں، تا کہ $\ln u$ معین ہو، تب تفاعل $y = \ln u$ پر زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

کی اطلاق سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ملتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u > 0 \tag{7.3}$$

مثال 7.7:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$$

□

آپ نے مثال 7.7 میں دیکھا کہ تفاعل $y = \ln 2x$ کا تفرق وہی ہے جو تفاعل $y = \ln x$ کا ہے۔ درحقیقت کسی بھی تفاعل $y = \ln ax$ کے لئے درست ہے جہاں a کوئی عدد ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln ax = \frac{1}{ax}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax) = \frac{1}{ax}(ax) = \frac{1}{x} \tag{7.4}$$

مثال 7.8: اگر مساوات 7.3 میں $u = x^2 + 3$ پر کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$

□

خواص لوگارتھم

کمپیوٹر کی ایجاد سے پہلے علم حساب میں سب سے زیادہ بہتری لوگارتھم کے سر ہے[4]۔ لوگارتھم کی وہ خوبیاں جن کی بدولت حساب میں بہتری پیدا ہوئی جدول 7.1 میں دی گئی ہیں۔ ان خواص کی بنا مثبت اعداد کے ضرب کی جگہ جمع اور مثبت اعداد کی تقسیم کی جگہ تفریق استعمال ہونے لگا۔ اس کے علاوہ طاقت کی جگہ ضرب استعمال کیا جانے لگا۔ وقتی طور پر ہم جزو د میں طاقت n کو ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔ اس کی وضاحت جزو د کے ثبوت کے دوران ہو گی۔

[4] اسکاچی ریاضی دان جان نیپر نے سولہویں صدی میں لوگارتھم ایجاد کیا۔ انہوں نے اپنی زندگی کے آخری بیس برس لوگارتھمی جدول مکمل کرنے میں صرف کیے

جدول 7.1: خواص قدرتی لوگارتھم

کسی بھی اعداد $a > 0$ اور $x > 0$ کے لئے۔		
الف	قاعدہ ضرب	$\ln ax = \ln a + \ln x$
ب	قاعدہ حاصل تقسیم	$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
ج	قاعدہ بالعکس تناسب	$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
د	قاعدہ طاقت	$\ln x^n = n \ln x$

مثال 7.9:

$$\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8 \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 \qquad \text{بالعکس تناسب}$$

$$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2 \qquad \text{طاقت}$$

□

مثال 7.10:

$$\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4 \sin x) \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3) \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x \qquad \text{بالعکس تناسب}$$

$$\ln \sqrt[3]{x+1} = \ln(x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln(x+1) \qquad \text{طاقت}$$

□

ثبوت: برائے $\ln ax = \ln a + \ln x$

اس کا دلیل عجیب اور عمدہ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\ln ax$ کا تفرق اور $\ln x$ کا تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں (مساوات 7.4)۔ مسئلہ اوسط قیمت کے ضمنی نتیجہ دوم (صفحہ 4.2) کہتا ہے کہ ان تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا:

$$\ln ax = \ln x + C \qquad C \text{ مستقل} \tag{7.5}$$

اب صرف یہ دکھانا باقی ہے کہ C اور $\ln a$ ایک دوسرے کے برابر ہیں۔

مساوات 7.5 x کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے درست ہے لہٰذا یہ $x = 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\ln(a \cdot 1) &= \ln 1 + C \\
\ln a &= 0 + C && \ln 1 = 0 \\
C &= \ln a && \text{ترتیب دی گئی ہے}
\end{aligned}$$

مساوات 7.5 میں $C = \ln a$ پر کرنے سے ہمیں درکار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\ln ax = \ln a + \ln x \tag{7.6}$$

□

ثبوت: برائے $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
ہم مساوات 7.6 کو دو بار استعمال کر کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 7.6 میں a کی جگہ $\frac{1}{x}$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1}{x} + \ln x &= \ln\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \\
&= \ln 1 = 0
\end{aligned}$$

ملتا ہے لہٰذا

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

ہو گا۔ مساوات 7.6 میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned}
\ln \frac{a}{x} &= \ln\left(a \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{x} \\
&= \ln a - \ln x
\end{aligned}$$

ملتا ہے۔

□

ثبوت : برائے $\ln x^n = n \ln x$ جہاں n ناطق ہے
تمام مثبت x قیمتوں کے لئے درج ذیل ہو گا۔ (درج ذیل میں یاد رہے کہ ہم نے طاقتی قاعدہ صرف ناطق اعداد کے لئے ثابت کیا ہے۔)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x^n &= \frac{1}{x^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) && \text{مساوات 7.3 میں } u = x^n\\ &= \frac{1}{x^n}nx^{n-1} && \text{یہاں } n \text{ کا ناطق ہونا ضروری ہے}\\ &= n\cdot\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n\ln x)\end{aligned}$$

چونکہ $\ln x^n$ اور $n \ln x$ کے تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں لہٰذا

$$\ln x^n = n\ln x + C \qquad C \text{ مستقل}$$

ہو گا جس میں $x = 1$ پر کرنے سے $C = 0$ ملتا ہے۔

□

اگرچہ ہم نے غیر ناطق n کے لئے قاعدہ $\ln x^n = n \ln x$ ثابت نہیں کیا ہے، یہ قاعدہ غیر ناطق اعداد کے لئے بھی درست ہے لہٰذا اس کو بغیر فکر استعمال کریں۔

$\ln x$ کی ترسیم اور سعت

چونکہ $x > 0$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$ ہے لہٰذا $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ اس کا دور تبی تفرق، $-\frac{1}{x^2}$ ، منفی ہے لہٰذا $\ln x$ کی ترسیم نیچے مقعر ہے۔

اعدادی تراکیب سے $\ln 2$ کی قیمت تقریباً 0.69 حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\ln 2^n = n\ln 2 > n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{n}{2}$$

اور

$$\ln 2^{-n} = -n\ln 2 < -n\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\frac{n}{2}$$

ہوں گے۔ ان سے درج ذیل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

$\ln x$ کا دائرہ کار مثبت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے جبکہ $\ln x$ کی سعت پوری حقیقی لکیر ہے۔

لوگارتھمی تفرق

حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور طاقت پر مبنی مثبت تفاعل کا تفرق لینے سے پہلے تفاعل کا لوگارتھم لینا سودمند ثابت ہوتا ہے۔ لوگارتھم لیتے ہوئے ہم جدول 7.1 کے قواعد استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں جس کا تفرق نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل کو لوگارتھمی تفرق[5] کہتے ہیں۔

مثال 7.11: تفاعل $y=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1},\ x>1$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

حل: ہم دونوں اطراف کا قدرتی لوگارتھم لے کر جدول 7.1 کے قواعد سے سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \\
&= \ln\Big((x^2+1)(x+3)^{1/2}\Big) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
&= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) && \text{قاعدہ ضرب} \\
&= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ طاقت}
\end{aligned}
$$

اب ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔ (بائیں ہاتھ مساوات 7.3 استعمال کرتے ہیں۔)

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

اس کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لئے حل کرتے ہیں:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\Big(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\Big)$$

آخر میں ہم y کی قیمت پر کرتے ہیں:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\Big(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\Big)$$

□

[5] logarithmic differentiation

تفاعل $y = f(x) > 0$ کا لوگارتھمی تفرق

کسی بھی تفاعل کا لوگارتھمی تفرق درج ذیل اقدام سے حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln f(x) && \text{دونوں اطراف لوگارتھم لیں} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && \text{دونوں اطراف تفرق لیں} \\
\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && \text{بائیں ہاتھ مساوات 7.3} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ \text{کے لئے حل کریں} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && y = f(x)\ \text{پر کریں}
\end{aligned}
$$

تکمل $\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$

مساوات 7.3 سے تکمل کا کلیہ

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln u + C \qquad C\ \text{مستقل} \tag{7.7}$$

ملتا ہے جہاں u مثبت قابل تفرق تفاعل ہے۔ منفی u کی صورت میں کیا ہو گا؟ اگر u منفی ہو تب $-u$ مثبت ہو گا لہٰذا

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{(-u)}\,\mathrm{d}(-u) \\
&= \ln(-u) + C && \text{مساوات 7.7 میں } u \text{ کی جگہ } -u
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 7.7 اور مساوات 7.8 میں دائیں ہاتھ کو $\ln|x| + C$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں دونوں مساوات کو

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C \tag{7.9}$$

میں ضم کیا جا سکتا ہے جہاں u غیر صفر قابل تفرق تفاعل ہے۔

ہم درج ذیل جانتے ہیں

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

اور $n=-1$ کے لئے مساوات 7.9 کی طرف دیکھ سکتے ہیں۔

مساوات 7.9 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|f(x)\right| + C$$

جہاں $f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے جس کی علامت پورے دائرہ کار پر تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

مثال 7.12:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_{-5}^{-1} && u = x^2-5\\ &= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5\end{aligned}$$

□

مثال 7.13:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_1^5 \frac{2}{u}\,\mathrm{d}u && u = 3+2\sin\theta\\ &= 2\ln|u|\Big|_1^5\\ &= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5\end{aligned}$$

□

$\tan x$ اور $\cot x$ کے تکمل

ہمیں مساوات 7.9 کی مدد سے $\tan x$ اور $\cot x$ کا تکمل لے سکتے ہیں۔ ٹینجنٹ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \tan x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{u} && u = \cos x\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C && \text{7.9 مساوات}\\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C && \text{قاعدہ بالعکس متناسب}\\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

کوٹینجنٹ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cot x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} && u = \sin x\\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C\end{aligned}$$

اس طرح درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\int \tan u \,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$
$$\int \cot u \,\mathrm{d}u = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc x| + C$$

مثال 7.14:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \tan 2x \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u \,\mathrm{d}u && u = 2x\\ &= \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

□

سوالات

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم