احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

5.9 اعدادی تکمل

ہم نے دیکھا کہ $f(x)$ کے الٹ تفرق $F(x)$ کے کلیہ سے قطعی تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $F(b)-F(a)$ حاصل کی جا سکتی ہے۔ بعض اوقات الٹ تفرق معلوم کرنا مشکل ہوتا ہے بلکہ بعض تفاعل، مثلاً $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم یہ نہیں کہہ رہے ہیں کہ $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کے کلیات اب تک کوئی حاصل کرنے میں کامیاب نہیں ہوا بلکہ ہم کہہ رہے ہیں کہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ان تفاعل کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

ہم جب بھی قطعی تکمل کی قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کرنے میں ناکام ہوں، ہم اعدادی تراکیب، مثلاً قاعدہ ذوزنقہ یا قاعدہ سمسن بروئے کار لاتے ہیں جن پر اس حصہ میں غور کیا جائے گا۔

5.10 قاعدہ ذوزنقہ

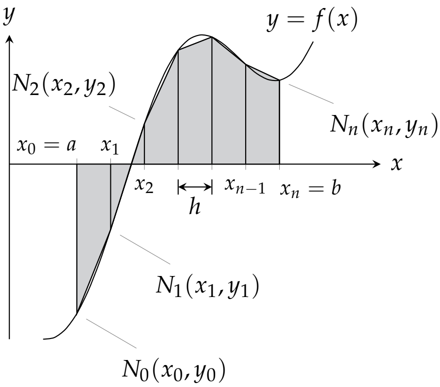
جب کسی تفاعل جس کی قطعی تکمل کی قیمت درکار ہو کے متکمل f کا الٹ تفرق ہم دریافت نہ کر سکیں تب ہم تکمل کے وقفہ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ پر f کو تخمیناً موزوں کثیر رکنی سے ظاہر کر کے ان کثیر رکنیوں کا تکمل لے کر تمام جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں جو تکمل کی تخمینی قیمت کے برابر ہو گا۔ کسی بھی خانہ بندی کے لئے جتنی زیادہ درجے کے کثیر رکنی منتخب کی جائیں حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ کسی بھی درجے کی کثیر رکنی کے لئے جتنی باریک خانہ بندی کی جائے حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا حتٰی کے ہم پور و پور خلل یا حذفی خلل اتنا بڑھ جائے کہ مزید باریک خانہ بندی سے حاصل جواب کی درستگی کم ہونا شروع ہو جائے۔

کم درجے کی کثیر رکنی سے بھی اچھے نتائج حاصل ہوتے ہیں بلکہ مستقیم قطعات (درجہ 1 کثیر رکنی) بھی بہترین تخمین دیتے ہیں پس ان کی تعداد کافی ہونی چاہیے۔ اس کی وجہ سمجھنے کے لئے فرض کریں ہم f کے وقفہ $[a,b]$ کو $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n قطعات میں تقسیم کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑتے ہیں (شکل 5.64)۔ لمبائی $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ کو لمبائی قدم[32] کہتے ہیں جس کو یہاں Δx کی بجائے h سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ n قدموں[33] کی تعداد ہے۔ ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں سے تقسیمی نقطوں تک انتصابی لکیریں کھینچنے سے متعدد ذوزنقہ حاصل ہوتے ہیں جو منحنی اور x محور کے بیچ خطہ کی تخمین ہوں گے۔ ہم ان ذوزنقہ کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں جہاں x محور سے اوپر رقبہ کو مثبت جبکہ اس سے نیچے رقبہ کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔

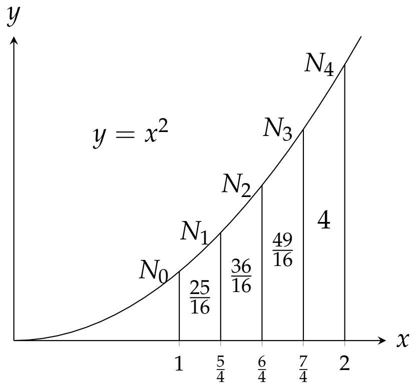
$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(y_0+y_1)h + \frac{1}{2}(y_1+y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h \\
&= h(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) \\
&= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)
\end{aligned}$$

---

[32] step size
[33] steps



شکل 5.64: ذوزنقہ قاعدہ برائے اعدادی تکمل۔



شکل 5.65: ذوزنقہ قاعدہ تفاعل $y = x^2$ کا رقبہ کچھ زیادہ دیتا ہے۔

یہاں $y_0 = f(a)$ ، $y_1 = f(x_1)$ ، $\cdots$ ، $y_{n-1} = f(x_{n-1})$ اور $y_n = f(x_n)$ ہیں۔

قاعدہ 5.1: ذوزنقہ قاعدہ
تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کو تخمیناً درج ذیل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (جہاں n ذیلی وقفوں کی لمبائی قدم $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $y_k = f(x_k)$ ہے)۔

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{5.34}$$

مثال 5.51: تکمل $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ کو ذوزنقہ قاعدہ سے $n = 4$ لے کر حل کریں۔ اصل رقبہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

حل: ہم وقفہ $[1, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک وقفہ کی لمبائی $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ہو گی۔ ان ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں پر تفاعل $y = x^2$ کی قیمت درج ذیل ہے۔

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

اب $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.34 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
T &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \\
&= \frac{1}{8}(1 + 2(\tfrac{25}{16}) + 2(\tfrac{36}{16}) + 2(\tfrac{49}{16}) + 4) = \frac{75}{32} \\
&= 2.343\,75
\end{aligned}$$

تکمل کی اصل قیمت درج ذیل ہے۔

$$\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.\bar{3}$$

یہاں تخمینی قیمت اصل قیمت سے زیادہ ہے۔ در حقیقت تمام ذوزنقے مطابقتی خطہ میں کچھ زیادہ رقبہ گھیرتا ہے (شکل 5.65)۔ □

ذوزنقہ تخمین میں قابو خلل

مختلف تفاعل کے ترسیم کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لمبائی قدم h کم کرنے سے چونکہ ذوزنقہ تفاعل پر بہتر بیٹھتا ہے لہٰذا ذوزنقہ تخمین میں خلل

$$E_T = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - T \tag{5.35}$$

کم ہو گی۔اعلٰی احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر f کا دہرا تفرق استمراری ہو تب یقینی طور پر ایسا ہی ہو گا۔

ذوزنقہ قاعدہ میں اندازہ خلل
اگر f'' استمراری ہو اور $[a, b]$ پر $|f''|$ کی قیمت کا بالائی حد M ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M \tag{5.36}$$

اگرچہ نظریہ کہتا ہے کہ ہر صورت M کی کم ترین قیمت پائی جائے گے عموماً حقیقت میں یہ قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم عام طور پر M کی بہتر سے بہتر اندازاً قیمت معلوم کر کے اسی سے $|E_T M|$ حاصل کرتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا اچھا نہیں لگتا ہے لیکن یہ طریقہ چلتا ہے۔ کسی بھی M کے لئے $|E_T|$ کی قیمت کم کرنے کی خاطر ہم h کو چھوٹا کرتے ہیں۔

مثال 5.52: تکمل $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x$ کی تخمینی قیمت مثال 5.51 میں حاصل کی گئی۔ اس تخمینی قیمت میں خلل کا بالائی حد تلاش کریں۔

حل: وقفہ $2 \leq x \leq 1$ پر $f(x) = x^2$ کا دہرا تفرق $f''(x) = 2$ ہے جس کی قیمت اٹل ہے لہٰذا ہم $M = 2$ لے سکتے ہیں۔اب $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ سے مساوات 5.36 درج ذیل دیتی ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2(2) = \frac{1}{96}$$

ہم $\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$ سے $T = \frac{75}{32}$ منفی کر کے یہی خلل $\left|\frac{7}{3} - \frac{75}{32}\right| = \left|-\frac{1}{96}\right|$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں ہم خلل کی بالکل درست مطلق قیمت حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ ایسا ہر بار نہیں ہو گا۔ □

مثال 5.53: ذوزنقہ قاعدہ میں $n = 10$ قدم لیتے ہوئے درج ذیل تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x$$

حل: $a = 0$ ، $b = \pi$ اور $h = \frac{\pi - 0}{10}$ سے

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M = \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 M = \frac{\pi^3}{1200}M$$

ملتا ہے جہاں $[0, \pi]$ پر $f(x) = x \sin x$ کے دہرا تفرق کا کوئی بھی بالائی حد بندی ہو سکتا ہے۔چونکہ

$$f''(x) = 2\cos x - x \sin x$$

کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left|f''(x)\right| &= |2\cos x - x \sin x| \\
&\leq 2|\cos x| + |x||\sin x| && \text{تکونی عدم مساوات } |a+b| \leq |a| + |b| \\
&\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi && |\sin x| \text{ اور } |\cos x| \text{ ایک سے بڑھ نہیں سکتے ہیں}
\end{aligned}$$

ہم $M = 2 + \pi$ لیتے ہیں۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200}M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133 \qquad \text{بطور حفاظت اوپر کو پورا کیا گیا ہے}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا خلل کسی صورت بھی 0.133 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ زیادہ درست جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم M کی بہتر قیمت تلاش کرنے کی بجائے زیادہ قدم لیں گے، مثلاً $n = 100$ قدم لیتے ہوئے $h = \frac{1\pi}{100}$ ہو گا جس سے خلل کم ہو کر درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{100}\right)^2 M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{120\,000} < 0.001\,33 = 1.33 \times 10^{-3}$$

□

مثال 5.54: جیسا ہم باب میں دیکھیں گے $\ln 2$ کی قیمت درج ذیل تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

ذوزنقہ قاعدہ سے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے خلل کو 10^{-4} سے کم رکھنے کی خاطر ہمیں کتنے قدم منتخب کرنے ہوں گے۔

حل: قدموں کی تعداد n یعنی ذیلی وقفوں کی تعداد منتخب کرنے کی خاطر ہم مساوات 5.36 بروئے کار لاتے ہیں۔یوں

$$b - a = 2 - 1 = 1, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

سے

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} h^2 \Big| f''(x) \Big|_{\text{بلند تر}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \left| \frac{2}{x^3} \right|_{\text{بلند تر}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وقفہ $[1,2]$ پر $\left|f''\right|_{\text{بلند تر}}$ درکار ہے۔

یہ وہ شاذونادر موقع ہے جب ہم $\left|f''\right|_{\text{بلند تر}}$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ وقفہ $[1,2]$ پر $y = \frac{2}{x^3}$ کی قیمت $y = 2$ سے گھٹ کر $y = \frac{1}{4}$ ہوتی ہے۔یوں

$$|E_T| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

ہو گا لہٰذا خلل کی مطلق قیمت 10^{-3} سے تب کم ہو گی جب $\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$ ہو جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6n^2} &< 10^{-4} \\
\frac{10^4}{6} &< n^2 && \text{دونوں اطراف کو } 10^4 n^2 \text{ سے ضرب کریں} \\
\frac{100}{\sqrt{6}} &< |n| && \text{جذر لیں} \\
\frac{100}{\sqrt{6}} &< n && n \text{ مثبت ہے} \\
40.83 &< n && \text{حفاظتی طور پر اور کو پورا کیا گیا ہے۔}
\end{aligned}$$

عدد 40.83 سے بڑا پہلا عدد صحیح 41 ہے۔ یوں $n = 41$ یا اس سے بھی زیادہ ذیلی وقفے لیتے ہوئے ذوزنقہ ترکیب سے $\ln 2$ کی قیمت میں خلل کو یقینی طور پر 10^{-4} سے کم رکھا جا سکتا ہے۔ □

سمسن قاعدہ

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم