

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

|     |                                       |     |
|-----|---------------------------------------|-----|
| 1   | ابتدائی معلومات                       | 1   |
| 1   | حقیقی اعداد اور حقیقی خط              | 1.1 |
| 15  | محدود، خطوط اور بڑھوتری               | 1.2 |
| 32  | تفاعل                                 | 1.3 |
| 54  | ترسیم کی منتقلی                       | 1.4 |
| 74  | تکوینیاتی تفاعل                       | 1.5 |
| 95  | حدود اور استمرار                      | 2   |
| 95  | تبدیلی کی شرح اور حد                  | 2.1 |
| 113 | حد تلاش کرنے کے قواعد                 | 2.2 |
| 126 | مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف | 2.3 |
| 146 | تصور حد کی توسیع                      | 2.4 |
| 165 | استمرار                               | 2.5 |
| 184 | مماسی خط                              | 2.6 |
| 199 | تفرق                                  | 3   |
| 199 | تفاعل کا تفرق                         | 3.1 |
| 221 | قواعد تفرق                            | 3.2 |
| 240 | تبدیلی کی شرح                         | 3.3 |
| 257 | تکوینیاتی تفاعل کا تفرق               | 3.4 |
| 277 | زنجیری قاعدہ                          | 3.5 |
| 294 | خفی تفرق اور نااطق قوت نما            | 3.6 |
| 310 | دیگر شرح تبدیلی                       | 3.7 |

|     |       |  |
|-----|-------|--|
| 325 | 4     | تفرق کا استعمال  |
| 325 | 4.1   | تفاعل کی انتہائی قیمتیں                                  |
| 340 | 4.2   | مسئلہ اوسط قیمت  |
| 356 | 4.3   | مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ              |
| 356 | 4.3.1 | پرکھ   |
| 368 | 4.4   | $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم                             |
| 391 | 4.5   | $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء   |
| 418 | 4.6   | بہترین بنانا   |
| 442 | 4.7   | خط بندی اور تفرقات                                       |
| 464 | 4.8   | ترکیب نیوٹن  |
| 477 | 5     | تکمل   |
| 477 | 5.1   | غیر قطعی تکملات  |
| 489 | 5.2   | تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی |
| 505 | 5.3   | تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق         |
| 516 | 5.4   | اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ                              |
| 534 | 5.5   | ریمان مجموعے اور قطعی تکملات                             |
| 561 | 5.6   | خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ                       |
| 578 | 5.7   | بنیادی مسئلہ   |
| 599 | 5.8   | قطعی تکمل میں بدل  |
| 605 | 5.9   | اعدادی تکمل  |
| 605 | 5.10  | قاعدہ ذوزرقہ   |
| 625 | 6     | تکمل کا استعمال  |
| 625 | 6.1   | منحنیات کے بیچ رقبہ                                      |
| 629 | 6.1.1 | تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد                               |
| 640 | 6.2   | تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش                                |
| 648 | 6.3   | اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا                          |
| 663 | 6.4   | تکلی چھلے  |
| 676 | 6.5   | مستوی منحنیات کی لمبائیاں                                |
| 687 | 6.6   | سطح طواف کا رقبہ   |
| 699 | 6.7   | معیار اثر اور مرکز کمیت                                  |
| 711 | 6.7.1 | وسطانی مرکز  |
| 716 | 6.8   | کام  |
| 731 | 6.9   | فشار سیال اور قوت سیال                                   |
| 740 | 6.10  | بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال                        |
| 755 | 7     | ماورائی تفاعل  |
| 756 | 7.1   | الٹ تفاعل اور ان کے تفرق                                 |

|     |                                    |      |
|-----|------------------------------------|------|
| 774 | قدرتی لوگار تھم                    | 7.2  |
| 792 | قوت نمائی تفاعل                    | 7.3  |
| 807 | $a^x$ اور $\log_a x$               | 7.4  |
| 818 | افزائش اور تنزل                    | 7.5  |
| 832 | قاعدہ لھوپیٹال                     | 7.6  |
| 848 | اضافی شرح نمو                      | 7.7  |
| 853 | 7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش        |      |
| 859 | الٹ نیکنویاتی تفاعل                | 7.8  |
| 875 | الٹ نیکنویاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل  | 7.9  |
| 892 | بدلولی تفاعل                       | 7.10 |
| 913 | یک رتبی تفرقی مساوات               | 7.11 |
| 931 | یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان | 7.12 |

|      |                           |  |
|------|---------------------------|--|
| 943  | 8 مکمل کے طریقے           |  |
| 943  | 8.1 مکمل کے بنیادی کلیات  |  |
| 959  | 8.2 مکمل بالخصص           |  |
| 964  | 8.2.1 بار بار استعمال     |  |
| 974  | 8.3 جزوی کسر              |  |
| 989  | 8.4 نیکنویاتی بدل         |  |
| 1000 | 8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر |  |
| 1017 | 8.6 غیر مناسب مکمل        |  |

|      |  |  |
|------|--|--|
| 1043 | 9 لاقتنای تسلسل                              |  |
| 1043 | 9.1 اعداد کی ترتیب کی حد                     |  |
| 1061 | 9.2 ترتیب کا حد تلاش کرنے کے مسئلے           |  |
| 1078 | 9.3 لاقتنای تسلسل                            |  |
| 1098 | 9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ |  |

|      |             |  |
|------|-------------|--|
| 1103 | ا ضمیمہ اول |  |
| 1105 | ب ضمیمہ دوم |  |



## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ

ہم تسلسل  $\sum a_n$  کے بارے میں دو سوالات کرتے ہیں:

ا. کیا یہ تسلسل مرکب ہے؟

ب. اگر تسلسل مرکب ہو تب اس کا مجموعہ کیا ہے؟

اس باب کا باقی بیشتر حصہ پہلے سوال کا جواب دے گا۔ حقیقتاً دوسرا سوال بھی اتنا ہی اہم ہے اور ہم اس پر بعد میں غور کریں گے۔

اس حصہ میں اور اگلے دو حصوں میں ایسے تسلسل پر غور کیا جائے گا جن میں منفی اجزاء نہیں پائے جاتے ہوں۔ اس شرط کی بنا ان تسلسل کے جزوی مجموعے غیر گھٹتے ترتیبات دیتے ہیں اور وہ غیر گھٹتے ترتیبات جو اوپر سے محدود ہوں ہر صورت مرکب ہوتے ہیں (مسئلہ 9.1)۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ ایک غیر منفی اجزاء والا تسلسل مرکب ہے، ہمیں صرف اتنا دکھانا ہو گا کہ اس تسلسل کے جزوی مجموعے اوپر سے محدود ہیں۔

ابتدا میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسے اس ترکیب سے ارتکاز کی تصدیق کرنے کے باوجود تسلسل کا مجموعہ نہ جاننا ایک عیب ہے۔ کیا بہتر ہوتا کہ ہم جزوی مجموعوں کے کلیات سے تسلسل کا مجموعہ بلا واسطہ تلاش کرتے۔ حقیقت میں ہمیں عموماً جزوی مجموعوں کے کلیات معلوم نہیں ہوں گے اور اسی بنا ہمیں دو قدمی طریقہ کار استعمال کرنا ہو گا جہاں پہلے قدم میں تسلسل کا ارتکاز جانا جاتا ہے اور دوسرے قدم میں مجموعے کی تخمینی قیمت تلاش کی جاتی ہے۔

### غیر گھٹتے جزوی مجموعے

فرض کریں کہ تمام  $n$  کے لئے  $a_n \geq 0$  ہو اور  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  لاتناہی تسلسل ہو۔ تب چونکہ  $s_{n+1} = s_n + a_n$  ہے لہذا ہر جزوی مجموعہ گزشتہ جزوی مجموعے سے بڑا یا اس کے برابر ہو گا:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots$$

اب جزوی مجموعے غیر گھٹتہ ترتیب بناتے ہیں اور مسئلہ 9.1 کے تحت یہ تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرکب ہو گا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

ضمنی نتیجہ 9.1: برائے مسئلہ 9.1 غیر منفی اجزاء کا تسلسل  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  صرف اور صرف اس صورت مرکب ہو گا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

مثال 9.28: ہارمونی تسلسل  
درج ذیل تسلسل کو ہارمونی تسلسل<sup>27</sup> کہتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

اس کے جزوی مجموعوں کی کوئی بالائی حد بندی نہیں پائی جاتی ہے لہذا یہ مرتکز تسلسل ہے۔ اس حقیقت کو جاننے کی خاطر ہم اجزاء کے گروہ بناتے ہیں۔

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots$$

پہلے دو اجزاء کا مجموعہ 1.5 ہے۔ اگلے دو اجزاء کا مجموعہ  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  ہے جو  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  سے بڑا ہے۔ اگلے چار اجزاء کا مجموعہ  $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$  ہے جو  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$  سے بڑا ہے۔ اگلے آٹھ اجزاء کا مجموعہ  $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$  ہے جو  $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$  سے بڑا ہے۔ اسی طرح اگلے سولہ اجزاء کا مجموعہ بھی  $\frac{1}{2}$  سے بڑا ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔ یوں جزوی  $\frac{1}{2^{n+1}}$  پر اختتام پذیر  $2^n$  اجزاء کا مجموعہ  $\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$  سے بڑا ہوگا۔ جزوی مجموعات کی ترتیب اوپر سے محدود نہیں ہے: اگر  $n = 2^k$  ہو تب جزوی مجموعہ  $s_n$  کی قیمت  $\frac{k}{2}$  سے بڑی ہوگی۔ ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔ □

دھیان رہے کہ ہارمونی تسلسل کا  $n$  واں جزوی  $\frac{1}{n}$  ہے جو 0 پر مرتکز ہے لیکن ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔ یوں ہارمونی تسلسل کے انفرج کو دریافت کرنے میں انفرج کا  $n$  ویں جزوی پرکھ ناکام ہوتا ہے۔

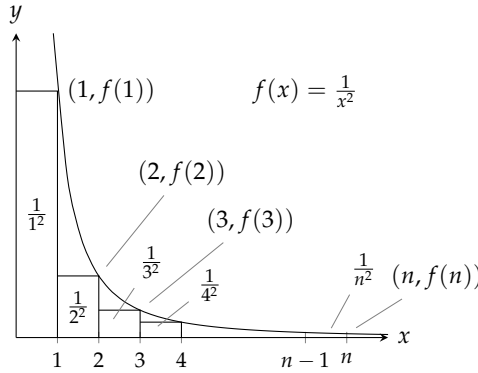
تکمیلی پرکھ

ہم ہارمونی تسلسل سے تعلق رکھنے والے ایک تسلسل، جس کا  $n$  واں جزوی  $\frac{1}{n^2}$  ہے، کو استعمال کرتے ہوئے تکمیلی پرکھ کو متعارف کرتے ہیں۔

مثال 9.29: کیا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

حل: ہم  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$  کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  کی ارتکاز دریافت کرتے ہیں۔ موازنہ کرنے کی خاطر ہم تسلسل کے اجزاء کو تقابل  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  کی قیمتیں تصور کرتے ہیں اور ان قیمتوں کو مغنی  $y = \frac{1}{x^2}$  کے نیچے مستطیل رقبے تصور کرتے ہیں۔



شکل 9.20: رقبہ کا موازنہ (مثال 9.29)

جیسا شکل 9.20 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
 &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
 &< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \\
 &< 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \\
 &< 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

(مثال 8.45)

یوں  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$  کے جزوی مجموعات اوپر سے (2 تک) محدود ہیں لہذا یہ تسلسل مرکب ہو گا۔ اس تسلسل کا مجموعہ درحقیقت  $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$  ہے۔ □

تکملی پرکھ

فرض کریں  $\{a_n\}$  مثبت اجزاء کی ترتیب ہے۔ مزید فرض کریں کہ  $a_n = f(n)$  ہے جہاں تمام  $x \geq N$  کے لئے  $N$  مثبت عدد صحیح ہے) متغیر  $x$  کا  $f$  استمراری، مثبت اور گھٹتا تھاقل ہے۔ تب تسلسل  $\sum_{n=N}^\infty a_n$  اور عمل  $\int_N^\infty f(x) dx$  دونوں مرکب یا دونوں منفرد ہوں گے۔

ثبوت: ہم  $N = 1$  کے لئے پہلے اس پرکھ کو ثابت کرتے ہیں۔ عمومی  $N$  کے لئے ثبوت اسی طرح کا ہے۔

ہم اس مفروضہ سے شروع کرتے ہیں کہ تمام  $n$  کے لئے  $f$  گھٹتا تھاقل اور  $f(n) = a_n$  ہیں۔ یوں شکل-الف میں وہ مستطیل جن کے رقبے  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ہیں کا مجموعی رقبہ،  $x = 1$  تا  $x = n + 1$  ترسیم  $y = f(x)$  کے نیچے رقبہ سے

زیادہ ہے یعنی:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

شکل-ب میں مستطیلوں کو ہر نقطہ کے بائیں جانب بنایا گیا ہے۔ اگر ہم وقتی طور پر پہلی مستطیل، جس کا رقبہ  $a_1$  ہے، کو نظر انداز کریں تب درج ذیل ہو گا۔

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx$$

اگر ہم  $a_1$  کو بھی شامل کریں تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx$$

ان نتائج سے

$$(9.15) \quad \int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر  $\int_1^\infty f(x) dx$  متناہی ہو تب دائیں عدم مساوات کے تحت  $\sum a_n$  متناہی ہو گا۔ اگر  $\int_1^\infty f(x) dx$  لامتناہی ہو تب بائیں عدم مساوات کے تحت  $\sum a_n$  لامتناہی ہو گا۔

یوں تسلسل اور مکمل دونوں مرکب یا دونوں منفرد ہوں گے۔

□

دھیان رہے کہ ارتکاز کی صورت میں مکمل اور تسلسل کی قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں جیسا مثال 9.29 میں دیکھا گیا جہاں  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  اور  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$  تھے۔

مثال 9.30: دکھائیں کہ  $p$  تسلسل

$$(9.16) \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

جہاں  $p$  حقیقی مستقل ہے،  $p > 1$  کی صورت میں مرکب جبکہ  $p \leq 1$  کی صورت میں منفرد ہو گا۔

حل: اگر  $p > 1$  ہو تب  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  متغیر  $x$  کا مثبت گھٹتا تھاقل ہو گا۔ اب چونکہ

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^\infty x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{1-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

ہے لہذا مکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

اگر  $p < 1$  ہو تب  $1 - p > 0$  ہو گا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1) = \infty$$

مکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

اگر  $p = 1$  ہو تب درج ذیل منفرج (ہارمونی) تسلسل پایا جائے گا۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

□

یوں  $p > 1$  لے ارتکاز لیکن  $p < 1$  اور  $p = 0$  کے لئے انفراج پایا جاتا ہے۔

سوالات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول





ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

