احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

13.5 زنجیری قاعدہ

جب ہم فضا میں کسی منحنی $x = g(t),\ y = h(t),\ z = k(t)$ کے مختلف نقطوں پر درجہ حرارت $w = f(x, y, z)$ جاننا چاہتے ہوں، یا کسی مائع یا گیس میں کسی راہ پر دباو میں دلچسپی رکھتے ہوں، ہم f کو واحد متغیر t کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں۔ یوں t کی ہر قیمت کے لئے نقطہ $(g(t), h(t), k(t))$ پر حرارت کی قیمت مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ کی قیمت دے گی۔ اس راہ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی ہمیں t کے لحاظ سے f کا تفرق دیگا، بشرطیکہ ایسا تفرق موجود ہو۔

بعض اوقات ہم g ، h اور k کے کلیات کو f کے کلیہ میں پر کر کے t کے لحاظ سے f کا بلا واسطہ تفرق لے سکتے ہیں۔ لیکن زیادہ تر g ، h اور k کے کلیات اتنا پیچیدہ ہوتے ہیں یا ان کے کلیات با آسانی دستیاب نہیں ہوتے ہیں لہٰذا انہیں f میں پر کر کے t کے لحاظ سے f کا بلا واسطہ تفرق لینا ممکن نہیں ہو گا۔ ایسی صورتوں میں تفاعل کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہم زنجیری قاعدہ کی مدد لیتے ہیں۔ زنجیری قاعدہ کا روپ متغیرات کی تعداد پر منحصر ہو گا۔ ماسوائے اضافی متغیرات کے زنجیری قاعدہ عین حصہ 3.5 کے زنجیری قاعدہ کی طرح کام کرتا ہے۔

دو متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

ہم نے حصہ 3.5 میں زنجیری قاعدہ استعمال کیا جہاں $w = f(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل تھا اور $x = g(t)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل تھا۔ یوں w متغیر t کا قابل تفرق تفاعل تھا اور زنجیری قاعدہ کے تحت $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا تھا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

تفاعل $w = f(x, y)$ کے لئے ایسا کلیہ مسئلہ 13.5 پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 13.5: دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ
اگر $w = f(x, y)$ قابل تفرق ہو اور x ، y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب w متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{13.22}$$

ثبوت: ہم نے اتنا دکھانا ہو گا کہ اگر x اور y نقطہ $t = t_0$ پر قابل تفرق ہوں تب w بھی t_0 پر قابل تفرق ہو گا اور $N_0 = (x(t_0, y(t_0))$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} \tag{13.23}$$

ہم t کو t_0 سے $t_0+\Delta t$ منتقل کرنے سے پیدا بڑھوتری Δx ، Δy اور Δw لیتے ہیں۔ چونکہ f قابل تفرق ہے (حصہ 13.4 میں دی گئی تعریف ذہن میں رکھتے ہوئے)

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0} \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{13.24}$$

ہو گا، جہاں $\Delta x, \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ہوں گے۔ ہم مساوات 13.24 کے دونوں اطراف کو Δt سے تقسیم کر کے Δt کو صفر کے قریب پہنچا کر $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔ تقسیم سے

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

حاصل ہو گا اور Δt کو صفر کے قریب پہنچانے سے درج ذیل ملے گا۔

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t}\\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + 0\cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + 0\cdot \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\end{aligned}$$

یہ مساوات 13.23 کی تصدیق کرتی ہے لہٰذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

تفرق $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ میں حقیقی غیر تابع متغیر t اور تابع متغیر w ہے جبکہ x اور y درمیانی متغیرات ہیں جنہیں t قابو کرتا ہے۔ زنجیری قاعدہ کا درج ذیل روپ ہمیں مساوات 13.22 میں مختلف تفرقات کے حصول کا صحیح طریقہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

یوں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ نقطہ t_0 پر حاصل کیے جائیں گے۔ حقیقی غیر تابع متغیر کی قیمت t_0 ، درمیانی متغیرات x اور y کی x_0 اور y_0 قیمتیں تعین کرتا ہے۔ جزوی تفرقات $\frac{\partial w}{\partial x}$ اور $\frac{\partial w}{\partial y}$ نقطہ (x_0, y_0) پر حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 13.32: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے راہ $x = \cos t,\ y = \sin t$ پر درج ذیل کا تفرق $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ حاصل کریں۔

$$w = xy$$

نقطہ $t = \frac{\pi}{2}$ پر اس تفرق کی قیمت کیا ہو گی؟

حل: ہم مساوات 13.22 کا دایاں ہاتھ $w = xy$ ، $x = \cos t$ اور $y = \sin t$ لیتے ہوئے معلوم کرتے ہیں:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y = \sin t, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x = \cos t, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)\\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ ہم نے $x = \cos t$ اور $y = \sin t$ کو جزوی تفرقات $\frac{\partial w}{\partial x}$ اور $\frac{\partial w}{\partial y}$ میں پر کیا۔ یوں حاصل تفرق $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ کا اظہار غیر تابع متغیر t کی صورت میں کیا جاتا ہے (جس میں درمیانے متغیرات x اور y نہیں پائے جاتے ہیں۔)

اس مثال میں ہم حاصل نتیجہ کی تصدیق زیادہ بلا واسطہ طریقہ سے کر سکتے ہیں۔ ہم w کو t کا تفاعل لکھتے ہیں:

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

یوں

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{2}\sin 2t\Big) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2t = \cos 2t$$

ہو گا۔ دونوں صورتوں میں $t = \frac{\pi}{2}$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\Big(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\Big)_{t=\pi/2} = \cos(2\cdot\tfrac{\pi}{2}) = \cos\pi = -1$$

□

تین متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

ہم مساوات 13.22 کے ساتھ ایک جزو جمع کرتے ہوئے زنجیری قاعدہ حاصل کرتے ہیں۔

تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{13.25}$$

اس کا ثبوت مساوات 13.22 کی ثبوت کی طرح ہے، بس اب دو کی بجائے تین درمیانے متغیرات ہوں گے۔

مثال 13.33: پیچ دار منحنی پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی
درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

$$w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

نقطہ $t = 0$ پر اس تفرق کی قیمت کیا ہو گی؟

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} && \text{مساوات } 13.25\\
&= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1)\\
&= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1\\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t
\end{aligned}$$

یوں $t = 0$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2$$

□

سطح پر معین تفاعل کا زنجیری قاعدہ

اگر ہماری دلچسپی فضا میں ایک کرہ پر نقطہ (x, y, z) کے حرارت $w = f(x, y, z)$ سے ہو، ہم x ، y اور z کو متغیرات r اور s کے تفاعل تصور کر سکتے ہیں جو اس نقطہ کے عرض بلند اور طول بلند قیمتیں دیتے ہیں۔ اگر $x = g(r, s)$ ، $y = h(r, s)$ اور $z = k(r, s)$ ہوں تب ہم حرارت کو r اور s کا مرکز تفاعل

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))$$

تصور کر سکتے ہیں۔ موزوں حالات میں r اور s دونوں کے لحاظ سے w کے جزوی تفرقات موجود ہوں گے جنہیں درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دو غیر تابع متغیرات اور تین درمیانے متغیرات کا زنجیری قاعدہ

فرض کریں $w = f(x, y, z)$ ، $x = g(r, s)$ ، $y = h(r, s)$ اور $z = k(r, s)$ ہوں۔ اگر چاروں تفاعل قابل تفرق ہوں، تب r اور s کے لحاظ سے w کے جزوی تفرقات قابل پائے جائیں گے جنہیں درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{13.26}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \tag{13.27}$$

ہم s کو مستقل تصور کر کے اور r کو t لیتے ہوئے مساوات 13.26 کو مساوات 13.25 سے حاصل کر سکتے ہیں۔اسی طرح ہم r کو مستقل تصور کر کے اور s کو t لیتے ہوئے مساوات 13.27 کو مساوات 13.25 سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 13.34: درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial r}$ اور $\frac{\partial w}{\partial s}$ کو r اور s کی صورت میں لکھیں۔

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{x}, \quad y = r62 + \ln s, \quad z = 2r$$

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} && \text{مساوات } 13.26\\
&= (1)\Big(\frac{1}{s}\Big) + (2)(2r) + (2z)(2)\\
&= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r\\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} && \text{مساوات } 13.27\\
&= (1)\Big(-\frac{r}{s^2}\Big) + (2)\Big(\frac{1}{s}\Big) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}
\end{aligned}$$

□

اگر f تین کی بجائے دو متغیرات کا تفاعل ہو تب درمیانہ متغیر z نہیں پایا جائے گا لہٰذا مساوات 13.26 اور مساوات 13.27 میں ایک ایک جزو کم ہو گا۔

اگر $w = f(x, y)$ ، $x = g(r, s)$ اور $y = h(r, s)$ ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}
\end{aligned} \tag{13.28}$$

جوابات

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ