

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ذوزنقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
685	6.6	سطح طواف کا رقبہ
697	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
709	6.7.1	وسطانی مرکز
714	6.8	کام
729	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
738	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
753	7	ماورائی تفاعل
754	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

772	قدرتی لوگار تھم	7.2
790	قوت نمائی تفاعل	7.3
805	$\log_a x$ اور a^x	7.4
817	افزائش اور تنزل	7.5

819	ضمیمہ اول	ا
821	ضمیمہ دوم	ب

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

الجبرائی حساب

سوال 1 تا سوال 4 میں ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

سوال 1:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 5^{\log_5 7} & \text{ب. } 8^{\log_8 \sqrt{2}} & \text{ج. } 1.3^{\log_{1.3} 75} \\ \text{د. } \log_3 \sqrt{3} & \text{ه. } \log_4 16 & \text{و. } \log_4 \left(\frac{1}{4}\right) \end{array}$$

سوال 2:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 2^{\log_2 3} & \text{ب. } 10^{\log_{10} (1/2)} & \text{ج. } \pi^{\log_{\pi} 7} \\ \text{د. } \log_{121} 11 & \text{ه. } \log_{11} 121 & \text{و. } \log_3 \left(\frac{1}{9}\right) \end{array}$$

سوال 3:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 2^{\log_4 x} & \text{ب. } 9^{\log 3x} & \text{ج. } \log_2 (e^{(\ln 2)(\sin x)}) \end{array}$$

سوال 4:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 25^{\log_5 (3x^2)} & \text{ب. } \log_e (e^x) & \text{ج. } \log_4 (2^{e^x \sin x}) \end{array}$$

سوال 5 اور سوال 6 میں نسبت کو قدرتی لوگار تھمی صورت میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 5:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } \frac{\log_2 x}{\log_3 x} & \text{ب. } \frac{\log_2 x}{\log_8 x} & \text{ج. } \frac{\log_x a}{\log_{x^2} a} \end{array}$$

سوال 6:

$$\frac{\log_a b}{\log_b a} \quad \text{ج}$$

$$\frac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x} \quad \text{ب}$$

$$\frac{\log_9 x}{\log_3 x} \quad \text{ا}$$

سوال 7 تا سوال 10 میں دی گئی مساوات حل کریں۔

$$3^{\log_3(7)+2^{\log_2(5)}} = 5^{\log_5(x)} \quad \text{سوال 7:}$$

$$8^{\log_8(3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)} \quad \text{سوال 8:}$$

$$3^{\log_3(x^2)=5e^{\ln x}} - 3 \cdot 10^{\log_{10}(2)} \quad \text{سوال 9:}$$

$$\ln e + 4^{-2\log_4(x)} = \frac{1}{x} \log_{10}(100) \quad \text{سوال 10:}$$

سوال 11 تا سوال 38 میں دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

$$y = 2^x \quad \text{سوال 11:}$$

$$y = 3^{-x} \quad \text{سوال 12:}$$

$$y = 5^{\sqrt{s}} \quad \text{سوال 13:}$$

$$y = 2^{s^2} \quad \text{سوال 14:}$$

$$y = x^\pi \quad \text{سوال 15:}$$

$$y = t^{1-e} \quad \text{سوال 16:}$$

$$y = (\cos \theta)^{\sqrt{2}} \quad \text{سوال 17:}$$

$$y = (\ln \theta)^\pi \quad \text{سوال 18:}$$

$$y = 7 \sec \theta \ln 7 \quad \text{سوال 19:}$$

$$y = 3^{\tan \theta} \ln 3 \quad \text{سوال 20:}$$

$$y = 2^{\sin 3t} \quad \text{سوال 21:}$$

$$y = 5^{-\cos 2t} \quad \text{سوال 22:}$$

سوال 23: $y = \log_2 5\theta$

سوال 24: $y = \log_3(1 + \theta \ln 3)$

سوال 25: $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

سوال 26: $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

سوال 27: $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$

سوال 28: $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

سوال 29: $y = \log_3 \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\ln 3} \right)$

سوال 30: $y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2} \right)^{\ln 5}}$

سوال 31: $y = \theta \sin(\log_7 \theta)$

سوال 32: $y = \log_7 \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{e^{\theta 2^{\theta}}} \right)$

سوال 33: $y = \log_5 e^x$

سوال 34: $y = \log_2 \left(\frac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}} \right)$

سوال 35: $y = 3^{\log_2 t}$

سوال 36: $y = 3 \log_8 (\log_2 t)$

سوال 37: $y = \log_2 (8t^{\ln 2})$

سوال 38: $y = t \log_3 (e^{(\sin t)(\ln 3)})$

لوگاریتھمی تفرق

سوال 39 تا سوال 46 میں y کا لوگاریتھمی تفرق دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے معلوم کریں۔

سوال 39: $y = (x+1)^x$

$$y = x^{(x+1)} \quad \text{سوال 40:}$$

$$y = (\sqrt{t})^t \quad \text{سوال 41:}$$

$$y = t^{\sqrt{t}} \quad \text{سوال 42:}$$

$$y = (\sin x)^x \quad \text{سوال 43:}$$

$$y = x^{\sin x} \quad \text{سوال 44:}$$

$$y = x^{\ln x} \quad \text{سوال 45:}$$

$$y = (\ln x)^{\ln x} \quad \text{سوال 46:}$$

تکمل

سوال 47 تا سوال 56 میں تکمل تلاش کریں۔

$$\int 5^x dx \quad \text{سوال 47:}$$

$$\int (1.3)^x dx \quad \text{سوال 48:}$$

$$\int_0^1 2^{-\theta} d\theta \quad \text{سوال 49:}$$

$$\int_{-2}^0 5^{-\theta} d\theta \quad \text{سوال 50:}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} x 2^{(x^2)} dx \quad \text{سوال 51:}$$

$$\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{سوال 52:}$$

$$\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \sin t dt \quad \text{سوال 53:}$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t dt \quad \text{سوال 54:}$$

$$\int_2^4 x^{2x} (1 + \ln x) dx \quad \text{سوال 55:}$$

$$\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} dx \quad \text{سوال 56:}$$

سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے مکمل حل کریں۔

$$\int 3x^{\sqrt{3}} dx \quad \text{سوال 57:}$$

$$\int x^{\sqrt{2}-1} dx \quad \text{سوال 58:}$$

$$\int_0^3 (\sqrt{2} + 1)x^{\sqrt{2}} dx \quad \text{سوال 59:}$$

$$\int_1^e x^{(\ln 2)-1} dx \quad \text{سوال 60:}$$

سوال 61 تا سوال 70 میں دیے گئے مکمل حل کریں۔

$$\int \frac{\log_{10} x}{x} dx \quad \text{سوال 61:}$$

$$\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x} dx \quad \text{سوال 62:}$$

$$\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x} dx \quad \text{سوال 63:}$$

$$\int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x} dx \quad \text{سوال 64:}$$

$$\int_0^2 \frac{\log_2 (x+2)}{x+2} dx \quad \text{سوال 65:}$$

$$\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x} dx \quad \text{سوال 66:}$$

$$\int_0^9 \frac{2 \log_{10}(x+1)}{x+1} dx \quad \text{سوال 67:}$$

$$\int_2^3 \frac{2 \log_2 (x-1)}{x-1} dx \quad \text{سوال 68:}$$

$$\int \frac{dx}{x \log_{10} x} \quad \text{سوال 69:}$$

$$\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2} \quad \text{سوال 70:}$$

سوال 71 تا سوال 74 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_1^{\ln x} \frac{1}{t} dt, \quad x > 1 \quad \text{سوال 71:}$$

سوال 72: $\int_1^{e^x} \frac{1}{t} dt$

سوال 73: $\int_1^{1/x} \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$

سوال 74: $\frac{1}{\ln a} \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$

نظریہ اور استعمال

سوال 75: منحنی $y = \frac{2x}{1+x^2}$ اور محور x پر $-2 \leq x \leq 2$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 76: منحنی $y = 2^{1-x}$ اور محور x پر $-1 \leq x \leq 1$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 77: انسانی خون کا pH انسانی خون کے pH کی قیمت 7.37 سے 7.44 تک ہوتی ہے۔ انسانی خون میں برق پادہ $[H_3O^+]$ کے مطابقتی حدود تلاش کریں۔

سوال 78: دماغی سیال کا pH دماغی سیال میں $[H_3O^+]$ کا گھٹنا پن تقریباً $4.8 \times 10^{-8} \text{ mol L}^{-1}$ ہے۔ اس سیال کا pH تلاش کریں۔

سوال 79: افزائش کار (ایکپلی فائر) سے حاصل صدا کو جزو k سے ضرب دے کر اس سطح صدا کو 10 dB مزید بلند کیا جاتا ہے۔ جزو k کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 80: ایک افزائش کار صدا کی شدت کو 10 سے ضرب دیتا ہے۔ صدا میں کتنے dB کا اضافہ پیدا ہوگا؟

سوال 81: کسی بھی محلول میں $[H_3O^+]$ اور $[OH^-]$ کی گھٹنا پن کا حاصل ضرب 10^{-14} ہوتا ہے۔

ا. $[H_3O^+]$ کی کیا قیمت گھٹنا پن کی مجموعی $S = [H_3O^+] + [OH^-]$ کو کم سے کم کرتی ہے؟

ب. اس محلول کی pH تلاش کریں جس میں S کی قیمت کم سے کم ہو۔

ج. $[H_3O^+]$ اور $[OH^-]$ کی کون سی نسبت S کو کم سے کم بناتی ہے؟

سوال 82: کیا $\log_a b$ کی قیمت $\frac{1}{\log_b a}$ کے برابر ہو سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 83: مساوات $x^2 = 2^x$ کے دو حل $x = 2$ اور $x = 4$ ہیں جبکہ اس کا تیسرا حل بھی پایا جاتا ہے۔ ترسیم کی مدد سے تیسرا حل تلاش کریں۔

سوال 84: کیا $x > 0$ کے لئے $x^{\ln 2}$ اور $2^{\ln x}$ ایک دوسرے کے برابر ہو سکتے ہیں؟ دونوں متقابل ترسیم کرتے ہوئے بتائیں کیا ہوتا ہے۔

سوال 85: 2^x کی خط بندی

(i) نقطہ $x = 0$ پر $f(x) = 2^x$ کی خط بندی دریافت کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ پور و پور کریں۔ (ب) وقفہ $-3 \leq x \leq 3$ اور وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے متقابل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 86: $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی

(i) نقطہ $x = 3$ پر $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ تک پور و پور کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq x \leq 8$ اور $2 \leq x \leq 8$ کے لئے متقابل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

دیگر اساس کے ساتھ حساب کتاب

سوال 87: عموماً کیلو لیٹروں میں $\log_{10} x$ اور $\ln x$ پائے جاتے ہیں۔ دیگر اساس کے لوگار تھم تلاش کرنے کی خاطر ہم درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$$

کیلو لیٹر استعمال کرتے ہوئے 5 اعشاریہ درستی تک (i) $\log_3 8$ ، (ب) $\log_7 0.5$ ، (ج) \log_{2-17} ، (د) $\log_{0.5} 7$ تلاش کریں۔ درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے $\ln x$ تلاش کریں۔ (و) $\log_{10} x = 2.3$ ، (ز) $\log_2 x = 1.4$ ، (ح) $\log_{10} x = -0.7$ ، (ط) $\log_2 x = -1.5$

سوال 88: تبدیلی پیانہ

(i) دکھائیں کہ اساس 10 لوگار تھم کو اساس 2 لوگار تھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

(ب) دکھائیں کہ اساس a لوگار تھم کو اساس b لوگار تھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

7.5 افزائش اور تنزل

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

