احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xi

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط . . . 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری . . . 14
1.3 تفاعل . . . 30
1.4 ترسیم کی منتقلی . . . 52
1.5 تکونیاتی تفاعل . . . 72

2 حدود اور استمرار 93
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد . . . 93
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد . . . 110
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف . . . 123
2.4 تصور حد کی توسیع . . . 143
2.5 استمرار . . . 163
2.6 مماسی خط . . . 181

3 تفرق 195
3.1 تفاعل کا تفرق . . . 195
3.2 قواعد تفرق . . . 217
3.3 تبدیلی کی شرح . . . 236
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق . . . 253
3.5 زنجیری قاعدہ . . . 274
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما . . . 291
3.7 دیگر شرح تبدیلی . . . 308

4 تفرق کا استعمال 323
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں . . . 323
4.2 مسئلہ اوسط قیمت . . . 337
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ . . . 353
4.3.1 پرکھ . . . 353
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم . . . 365
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء . . . 388
4.6 بہترین بنانا . . . 415
4.7 خط بندی اور تفرقات . . . 439
4.8 ترکیب نیوٹن . . . 460

5 تکمل 471
5.1 غیر قطعی تکملات . . . 471
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی . . . 483
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق . . . 499
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ . . . 511
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات . . . 527
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ . . . 555
5.7 بنیادی مسئلہ . . . 571
5.8 قطعی تکمل میں بدل . . . 592
5.9 اعدادی تکمل . . . 598
5.10 قاعدہ ذوزنقہ . . . 598

6 تکمل کا استعمال 617
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ . . . 617
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد . . . 621
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش . . . 632
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا . . . 639
6.4 نلکی چھلے . . . 654
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں . . . 667
6.6 سطح طواف کا رقبہ . . . 677
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت . . . 689
6.7.1 وسطانی مرکز . . . 701
6.8 کام . . . 706
6.9 فشار سیال اور قوت سیال . . . 720
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال . . . 730

7 ماورائی تفاعل 743
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق . . . 744

7.2 قدرتی لوگارتھم 762
7.3 قوت نمائی تفاعل 779
7.4 a^x اور $\log_a x$ 794
7.5 افزائش اور تنزل 805
7.6 قاعدہ لھوپیٹال 819
7.7 اضافی شرح نمو 835
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش 840
7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل 846
7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل 862
7.10 ہذلولی تفاعل 879
7.11 یک رتبی تفرقی مساوات 900
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان 918

8 تکمل کے طریقے 929
8.1 تکمل کے بنیادی کلیات 929
8.2 تکمل بالحصص 945
8.2.1 بار بار استعمال 950
8.3 جزوی کسر 959
8.4 تکونیاتی بدل 974
8.5 جدول تکمل اور کمپیوٹر 985
8.6 غیر مناسب تکمل 1002

9 لامتناہی تسلسل 1029
9.1 اعداد کی ترتیب کی حد 1029
9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے 1048
9.3 لامتناہی تسلسل 1064
9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ 1083
9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ 1093
9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ 1103
9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز 1115
9.8 طاقتی تسلسل 1129
9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل 1145
9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے 1156
9.11 طاقتی تسلسل کے استعمال 1175

10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد 1195
10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں 1195
10.2 سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی 1219

10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا 1229
10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول 1243
10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات 1259
10.6 قطبی محدد 1273
10.7 قطبی محدد میں ترسیم 1285
10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات 1299
10.8.1 دائرے 1300
10.9 قطبی محدد میں تکمل 1314

11 سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری 1327
11.1 مستوی میں سمتیات 1327
11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات 1344
11.2.1 کرہ 1351
11.3 ضرب نقطہ 1361
11.3.1 حساب 1362
11.4 صلیبی ضرب 1376
11.5 فضا میں خطوط اور مستوی 1391
11.6 نلکی اور مربع سطحیں 1405
11.7 نلکی اور کروی محدد 1424

12 سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت 1435
12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات 1435
12.2 گولا کے حرکت کی نمونہ کشی 1458
12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ 1468

جوابات 1473

ا ضمیمہ اول 1475

ب ضمیمہ دوم 1477

ج ضمیمہ تین 1479

د ضمیمہ چار 1481

ھ ضمیمہ پانچ 1483

و ضمیمہ چھ 1485

ز ضمیمہ سات 1487

ح	ضمیمہ آٹھ	1489
ط	ضمیمہ آٹھ	1491

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

قابل تفرق منحنیات جن کا پہلا اور دوسرا استمراری تفرق پایا جاتا ہو خلاء میں حرکت کو ظاہر کرنے کے لئے اہم ہیں۔ ان پر تفصیلاً غور کیا گیا ہے۔اس حصہ میں اور اگلے حصہ میں ہم ان کے چند ایسے خدوخال پر غور کریں گے جن کہ بنا ایسے منحنیات کی اہم ہیں۔

منحنی پر لمبائی قوس

ہموار فضائی منحنیات کی ایک خاص خاصیت یہ ہے کہ ان کی لمبائی قابل ناپ ہوتی ہے۔ یوں ہم منحنی پر کسی نقطہ کو ابتدائی نقطہ تصور کرتے ہوئے، ابتدائی نقطہ سے کسی بھی نقطہ N تک منحنی پر فاصلہ s ، سے نقطہ N کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔یہ محددی مستوی پر مبدا سے نقطہ کا فاصلہ دینے کے مترادف ہے۔ متحرک جسم کی سمتی رفتار اور اسراع پر غور کے لئے وقت ایک فطری متغیر ہے جبکہ s منحنی کی صورت پر غور کرنے کے لئے ایک فطری متغیر ہے۔ فضا میں حرکت پر غور کے دوران ان دونوں متغیرات کی ضرورت پیش آتی ہے۔

فضا میں ہموار منحنی پر فاصلہ ناپنے کی خاطر ہم مستوی میں منحنی کے کلیہ میں جزو z شامل کرتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ جس پر $t = a$ تا $t = b$ صرف ایک بار چلا جاتا ہو، کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{12.17}$$

□

مستوی منحنیات کی طرح، ہم فضا میں منحنی کی لمبائی معلوم کرتے ہوئے منحنی کی کوئی بھی مقدار معلوم مساوات، جو دیے گئے شرائط کو پورا کرتے ہوں، استعمال کر سکتے ہیں۔ اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 12.17 میں جذر، سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ ہے۔ یوں لمبائی قوس کا کلیہ مختصراً

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t \tag{12.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 12.12: درج ذیل پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

حل: پیچ دار منحنی $t=0$ سے $t=2\pi$ تک ایک چکر مکمل کرتی ہے۔اس حصہ کی لمبائی

$$\begin{aligned}L &= \int_a^b |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

ہو گی جو مستوی xy میں اس دائرہ کے لمبائی کا $\sqrt{2}$ گنّا ہے جس پر پیچ دار منحنی کھڑی ہے۔ □

اگر ہم ہموار منحنی C، جس کی مقدار معلوم مساوات کا متغیر t ہو، پر نقطہ N_0 کو ابتدائی نقطہ تصور کریں تب t کی ہر قیمت C پر ایک نقطہ $N(t) = (x(t), y(t), z(t))$ اور **سمت بند فاصلہ**

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \tag{12.19}$$

دے گی جو N_0 سے C پر چلتے ہوئے ناپا جائے گا۔ اگر $t > t_0$ ہو تب $N(t_0)$ سے $N(t)$ تک فاصلہ $s(t)$ ہو گا۔ اگر $t < t_0$ ہو تب $s(t)$، فاصلہ کے نفی کا برابر ہو گا۔ کی ہر ایک قیمت پر ایک نقطہ تعین کرتی ہے لہٰذا یوں s کے لحاظ سے C کی مقدار معلوم روپ حاصل ہوتی ہے۔ ہم کو منحنی کا **مقدار معلوم لمبائی قوس** کہتے ہیں جس کی قیمت بڑھتے t کے رخ بڑھتی ہے۔

ابتدائی نقطہ $N(t_0)$ لیتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \tag{12.20}$$

مثال 12.13: اگر $t_0 = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

پر t_0 سے t تک چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau && \text{مساوات 12.20} \\ &= \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{d}\tau && \text{مساوات 12.12 کی قیمتیں} \\ &= \sqrt{2}t\end{aligned}$$

یوں $s(2\pi) = 2\pi\sqrt{2}$، $s(-2\pi) = -2\pi\sqrt{2}$، وغیرہ، ہوں گے۔ □

مثال 12.14: ایک لکیر پر لمبائی
دکھائیں اگر $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیہ ہو، تب لکیر

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + (y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + (z_0 + tu_3)\boldsymbol{k}$$

پر، نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ جہاں $t = 0$ ہو گا، سے سمت بند لمبائی از خود t کے برابر ہو گی۔

حل:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_0 + tu_3)\boldsymbol{k} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t |\boldsymbol{u}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t 1\,\mathrm{d}\tau = t$$

□

ہموار منحنی پر رفتار

چونکہ مساوات 12.20 میں جذر کے اندر تفرقات استمراری (ہموار منحنی) ہیں احصاء کے بنیادی مسئلہ کے تحت s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\boldsymbol{v}(t)\right| \tag{12.21}$$

جیسا ہم توقع کریں گے، کسی بھی راہ پر ایک ذرے کی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی مقدار ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ اگرچہ s تعین کرنے میں ابتدائی نقطہ $N(t_0)$ کا کردار پایا جاتا ہے، $N(t_0)$ کا مساوات 12.21 میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ پر چلتے ہوئے جس رفتار سے ایک ذرہ فاصلہ طے کرتا ہے، اس کا ابتدائی نقطہ کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

ساتھ ہی اس بات کو ذہن نشین کریں کہ چونکہ تعریف کی رو سے ہموار منحنی کے لئے $|\boldsymbol{v}|$ غیر صفر ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہو گا۔ ہم ایک بار دوبارہ دیکھتے ہیں کہ s متغیر t کا بڑھتا تفاعل ہے۔

اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

چونکہ زیر بحث منحنیات کے لئے $0 < \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ہے لہٰذا s ایک ایک مطابقت رکھتا ہے اور اس کا الٹ پایا جائے گا جو t کو بطور s کا قابل تفرق تفاعل دے گا (حصہ 7.1)۔ اس الٹ کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.22}$$

یوں $\boldsymbol{r}$ متغیر s کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کے تفرق کو زنجیری قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{v}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.23}$$

مساوات 12.23 کہتی ہے کہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\boldsymbol{v}$ کے رخ ہے۔ ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ کو $\boldsymbol{r}$ کی منحنی راہ کا اکائی مماسی سمتیہ کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{T}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا اکائی مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.24}$$

□

جہاں بھی $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو وہاں اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ بھی t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، فضا میں اجسام کی حرکت پر غور میں مستعمل، **متحرک حوالہ چھوکٹے**[15]، کے تین اکائی سمتیات میں سے ایک اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔

مثال 12.15: درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} \qquad t > 0$$

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\boldsymbol{j}\\
&= (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j}\\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = t \qquad \text{ہے } |t| = t \text{ کی بنا } t > 0\\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{t} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

[15] reference frame

□

مثال 12.16: اکائی دائرہ

$$\boldsymbol{v} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$$

کے گرد گھڑی کے مخالف رخ حرکت

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$$

کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}$ ہے۔ □

سوالات

جوابات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ