

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں مکمل
1327 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1344 . . . . .	11.2	کار تہی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424 . . . . .	11.7	تنگی اور کردی محدود
1435 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولا کی حرکت کی نمونہ کشی
1468 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1476 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1497 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1543 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1560 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1592 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1600 . . . . .	13.7	رہی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں

1611

جوابات

1613

۱ ضمیمہ اول

1615	ب ضمیمہ دوم
1617	ج ضمیمہ تین
1619	د ضمیمہ چار
1621	ه ضمیمہ پانچ
1623	و ضمیمہ چھ
1625	ز ضمیمہ سات
1627	ح ضمیمہ آٹھ
1629	ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

### 13.7 رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں

ہم حصہ 13.5 سے جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل  $f(x, y)$  منحنی  $x = g(t), y = h(t)$  کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے  $t$  کے لحاظ سے شرح تبدیلی درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

نقطہ  $N_0(x_0, y_0) = N_0(g(t_0), h(t_0))$  پر یہ مساوات بڑھتی  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کی شرح تبدیلی دیتی ہے، جو دیگر چیزوں کے ساتھ منحنی پر چلنے کے رخ پر بھی منحصر ہے۔ یہ مشاہدہ اس صورت خصوصاً اہم ہو گا جب یہ منحنی ایک سیدھی لکیر ہو اور نقطہ  $N_0$  سے منحنی پر اکائی سمتیہ  $u$  کے رخ چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس  $t$  ہو۔ چونکہ تب  $u$  کے رخ  $f$  کے دائرہ کار میں فاصلہ کے لحاظ سے  $f$  کی شرح تبدیلی  $\frac{df}{dt}$  ہوگی۔ ہم  $u$  تبدیل کرتے ہوئے نقطہ  $N_0$  پر، فاصلہ کے لحاظ سے  $f$  کی مختلف رخ میں شرح تبدیلی دریافت کر سکتے ہیں۔ ان رخی تفرقات<sup>41</sup> کی سائنس، انجینئری اور ریاضیات میں کارآمد تشریحات کی جاتی ہیں۔ اس حصہ میں ان کی قیمت دریافت کرنے کا کلیہ اخذ کیا جائے گا جس کے بعد فضا میں سطحوں کی مماسی سطحیں اور عمودی سطحیں تلاش کی جائیں گی۔

#### مستوی میں رخی تفرقات

فرض کریں مستوی  $xy$  میں پورے خطہ  $R$  میں تفاعل  $f(x, y)$  معین ہے،  $N_0(x_0, y_0)$  خطہ  $R$  میں ایک نقطہ ہے، اور  $u = u_1 i + u_2 j$  ایک اکائی سمتیہ ہے۔ تب  $u$  کے متوازی نقطہ  $N_0$  سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

اکائی سمتیہ  $u$  کے رخ نقطہ  $N_0$  سے فاصلہ کو مقدار معلوم  $s$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم نقطہ  $N_0$  پر  $u$  کے رخ  $f$  کی شرح تبدیلی  $\frac{df}{ds}$  سے حاصل کرتے ہیں۔

تعریف: نقطہ  $N_0(x_0, y_0)$  پر اکائی سمتیہ  $u = u_1 i + u_2 j$  کے رخ  $f$  کا تفرق درج ذیل عدد ہو گا

$$(13.41) \quad \left( \frac{df}{ds} \right)_{u, N_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

رخی تفرق کو درج ذیل سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(D_u f)_{N_0}$$

$$N_0 \text{ پر } u \text{ کے رخ } f \text{ کا تفرق}$$

<sup>41</sup>directional derivative

مثال 13.40: نقطہ  $N_0(1, 2)$  پر اکائی سمتیہ  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$  کے رخ درج ذیل کا تفرق تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

حل:

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, N_0} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} & \text{مساوات 13.41} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1 \cdot 2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) - 3}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{5s}{\sqrt{2}} + s^2}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 0\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

نقطہ  $N_0(1, 2)$  پر  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$  کے رخ  $f(x, y) = x^2 + xy$  کی تبدیلی کی شرح  $\frac{5}{\sqrt{2}}$  ہے۔ □

رخی تفرق کی جیومیٹریائی تشریح

مساوات  $z = f(x, y)$  فضا میں ایک سطح  $S$  کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر  $z_0 = f(x_0, y_0)$  ہو تب نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  سطح  $S$  پر واقع ہو گا۔ اکائی سمتیہ  $\mathbf{u}$  کے متوازی انتظامی مستوی، جو  $N(x, y)$  اور  $N_0(x_0, y_0)$  سے گزرتا ہو،  $S$  کو مماسی  $C$  میں قطع کرے گا۔ اکائی سمتیہ  $\mathbf{u}$  کے رخ  $f$  کی شرح تبدیلی  $N$  پر  $C$  کے مماس کی ڈھلوان ہو گی۔

دھیان رہے کہ جب  $\mathbf{u} = \mathbf{i}$  ہو،  $N_0$  پر رخی تفرق  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ہو گا جس کی قیمت  $(x_0, y_0)$  پر حاصل کی جائے گی۔ اسی طرح جب  $\mathbf{u} = \mathbf{j}$  ہو،  $N_0$  پر رخی تفرق  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ہو گا جس کی قیمت  $(x_0, y_0)$  پر حاصل کی جائے گی۔ رخی تفرق ان دو جزوی تفرقات کو عمومی بناتا ہے۔ ہم اب  $\mathbf{i}$  اور  $\mathbf{j}$  کے علاوہ کسی بھی رخ  $\mathbf{u}$ ، تفاعل  $f$  کی تبدیلی شرح جان سکتے ہیں۔

حساب

جیسا آپ جانتے ہیں، تفرق کی تعریف بطور حد سے کسی بھی تفرق کا حصول اتنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ رخی تفرق کی تعریف سے بھی رخی تفرق کا حصول مشکل کام ہے۔ آئیں رخی تفرق کا زیادہ آسان کلیہ اخذ کریں۔ ہم خط

$$(13.42) \quad x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

سے شروع کرتے ہیں جو نقطہ  $N_0(x_0, y_0)$  سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساوات ہے جس میں اکائی سمتیہ  $u = u_1 i + u_2 j$  کے رخ بڑھتا ہوا  $s$  مقدار معلوم لمبائی قوس ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{ds}\right)_{u, N_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0} \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0} \frac{dy}{ds} && \text{زنجیری قاعدہ} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0} \cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0} \cdot u_2 && \text{مساوات 13.42 سے } \frac{dx}{ds} = u_1 \text{ اور } \frac{dy}{ds} = u_2 \end{aligned}$$

(13.43)

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0} i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0} j\right]}_{N_0 \text{ پر } f \text{ کی ڈھلوان}} \cdot \underbrace{[u_1 i + u_2 j]}_{u \text{ کا رخ}}$$

تعریف: نقطہ  $N_0(x_0, y_0)$  پر  $f(x, y)$  کا سمتیہ ڈھلوان (ڈھلوان) درج ذیل سمتیہ ہو گا

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

جس کی قیمت  $N_0$  پر  $f$  کے رخنی تفرق سے حاصل کی جائے گی۔

□

سمتی ڈھلوان  $\nabla f$  کو "ڈھلوان  $f$ " پڑھتے ہیں۔ علامت  $\nabla$  یونانی حرف "نیبلا" ہے۔

مساوات 13.43 کہتی ہے کہ  $N_0$  پر  $u$  کے رخ  $f$  کا تفرق  $N_0$  پر  $f$  کی ڈھلوان اور  $u$  کا حاصل ضرب ہو گا۔

مسئلہ 13.6: اگر  $N_0(x_0, y_0)$  پر  $f(x, y)$  کے جزوی تفرقات معین ہوں تب  $N_0$  پر  $u$  کے رخ  $f$  کا تفرق،  $N_0$  پر  $f$  کی ڈھلوان اور  $u$  کا غیر سمتی ضرب ہو گا:

$$(13.44) \quad \left(\frac{df}{ds}\right)_{u, N_0} = (\nabla)_{N_0} \cdot u$$

مثال 13.41: نقطہ  $(2, 0)$  پر  $A = 3i - 4j$  رخ  $f(x, y) = xe^{xy} + \cos(xy)$  کا رخنی تفرق تلاش کریں۔

حل: ہم  $A$  کی لمبائی سے  $A$  کو تقسیم کرتے ہوئے  $A$  کے رخ اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$u = \frac{A}{|A|} = \frac{A}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$$

نقطہ  $(2, 0)$  پر  $f$  کے جزوی تفرقات

$$f_x(2, 0) = (e^y - y \sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$

$$f_y(2, 0) = (xe^y - x \sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2 \cdot 0 = 2$$

ہوں گے لہذا نقطہ  $(2, 0)$  پر  $f$  کی ڈھلوان

$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2, 0)\mathbf{i} + f_y(2, 0)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

ہو گی۔ نقطہ  $(2, 0)$  پر  $\mathbf{A}$  رخ  $f$  کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{u}}f)|_{(2,0)} &= \nabla f|_{(2,0)} \cdot \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1 \end{aligned}$$

□

رُخی تفرقات کے خواص

رُخی تفرق کے کلیہ

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

کی قیمت تلاش کرنے سے درج ذیل خواص دریافت ہوتے ہیں:

رُخی تفرق  $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| \cos \theta$  کے خواص

1. تفاعل  $f$  اس صورت تیز ترین بڑھتا ہے جب  $\cos \theta = 1$  ہو، یعنی جب  $\mathbf{u}$  اور  $\nabla f$  ایک ہی رخ ہوں۔ اس طرح، اپنے دائرہ کار میں، نقطہ  $N$  پر سمتیہ ڈھلوان  $\nabla f$  کے رخ،  $f$  تیز ترین بڑھتا ہے۔ اس رخ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|$$

2. اسی طرح  $-\nabla f$  کے رخ  $f$  تیز ترین گھٹتا ہے۔ اس رخ تفرق  $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi) = -|\nabla f|$  ہو گا۔

3. ڈھلوان کے عمودی کسی بھی رخ  $\mathbf{u}$  کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ ایسے رخ  $\theta$  کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  ہو گی لہذا درج ذیل ہو گا:

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0$$



جیسا ہم دیکھیں گے، یہ خواص تین بعدی فضا میں بھی کارآمد ہوں گی۔

مثال 13.42: نقطہ  $(1, 1)$  پر وہ رخ تلاش کریں جس رخ تقابل  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$  (i) تیز ترین بڑھتا ہو، (ب) تیز ترین گھٹتا ہو، (ج) میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی ہو۔

حل: (i) یہ تقابل نقطہ  $(1, 1)$  پر  $\nabla f$  کے رخ تیز ترین بڑھے گا۔ اس نقطہ پر ڈھلوان

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (xi + yj)_{(1,1)} = i + j$$

ہے لہذا تیز ترین بڑھنے کا رخ درج ذیل اکائی سمتیہ دیگا۔

$$u = \frac{i + j}{|i + j|} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

(ب) یہ تقابل  $-\nabla f$  رخ تیز ترین گھٹے گا۔ یہ رخ درج ذیل ہو گا۔

$$-u = -\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

(ج) نقطہ  $(1, 1)$  پر صفر تبدیلی کا رخ  $\nabla f$  کو عمودی ہو گا۔ یہ رخ درج ذیل ہوں گے۔

$$n = -\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j, \quad -n = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

□

ہم قد منحني کے ڈھلوان اور مماس

اگر ہموار منحني  $r = g(t)i + h(t)j$  پر قابل تفرق تقابل  $f(x, y)$  کی قیمت مستقل ہو (جس کی بنا یہ منحني،  $f$  کی ہم قد منحني ہو گی)، تب  $f(g(t), h(t)) = 0$  ہو گا۔ دونوں اطراف کا  $t$  کے لحاظ سے تفرق درج ذیل مساوات دیگا:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(g(t), h(t)) &= \frac{d}{dt}(c) \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} &= 0 \quad \text{زنجیری قاعدہ} \\ (13.45) \quad \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt}i + \frac{dh}{dt}j\right)}_{\frac{dr}{dt}} &= 0 \end{aligned}$$

مساوات 13.45 کہتی ہے کہ مماسی سمتیہ  $\frac{dr}{dt}$  کو  $\nabla f$  عمودی ہوگا، لہذا  $\nabla f$  نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر منحنی کو عمودی ہوگا۔

تفاعل  $f(x, y)$  کے دائرہ کار میں ہر نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $f$  کی ڈھلوان نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر ہم قد منحنی کو عمودی ہوگی۔

ہم اس مشاہدہ کی بنا ہم قد منحنیات کی مماسات کی دریافت کر سکتے ہیں۔ یہ ڈھلوان کو عمودی خطوط ہوں گے۔ نقطہ  $N_0(x_0, y_0)$  سے گزرتا ہوا، سمتیہ  $N = Ai + Bj$  کو عمودی خط کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

اگر  $N$  ڈھلوان  $(\nabla f)_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j$  ہو تب اس مساوات کی صورت درج ذیل ہوگی۔

$$(13.46) \quad f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

مثال 13.43: نقطہ  $(-2, 1)$  پر درج ذیل ترتیم کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

حل: یہ ترتیم درج ذیل تفاعل کی ہم قد منحنی ہے۔

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

نقطہ  $(-2, 1)$  پر  $f$  کی ڈھلوان

$$\nabla f|_{(-2, 1)} = \left( \frac{x}{2}i + 2yj \right)_{(-2, 1)} = -i + 2j$$

ہوگی لہذا مماسی خط کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} (-1)(x + 2) + (2)(y - 1) &= 0 & \text{مساوات 13.46} \\ x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

□

## تین متغیرات کا تفاعل

ہم دو متغیرات کلیات کے ساتھ جزو  $z$  شامل کر کے تین متغیرات کلیات حاصل کرتے ہیں۔ فضائیں قابل تفرق تفاعل  $f(x, y, z)$  اور اکائی سمتیہ  $u = u_1i + u_2j + u_3k$  کے لئے ہم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3 \quad \text{اور}$$

لکھیں گے۔ رخ تفرق اب بھی

$$D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| |u| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

ہو گا لہذا دو متغیرات کے خواص (جن کا ہم ذکر کر چکے ہیں)، تین متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔ کسی بھی نقطہ پر  $\nabla f$  رخ تفاعل تیز ترین بڑھتا ہے اور  $-\nabla f$  رخ تیز ترین گھٹتا ہے، جبکہ  $\nabla f$  کے عمودی کسی بھی رخ، تفرق صفر ہو گا۔

مثال 13.44: (ب) نقطہ  $(N_0(1, 1, 0))$  پر  $A = 2i - 3j + 6k$  رخ  $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$  کا تفرق تلاش کریں۔ (ب) نقطہ  $N_0$  پر  $f$  کس رخ تیز ترین بڑھتا ہے؟ اس رخ شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

حل: (ب) سمتیہ  $A$  کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے اس کے رخ اکائی سمتیہ  $u$  تلاش کرتے ہیں۔

$$|A| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$u = \frac{A}{|A|} = \frac{2}{7}i - \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k$$

نقطہ  $N_0$  پر جزوی تفرقات

$$f_x = 3x^2 - y^2 \Big|_{(1,1,0)} = 2, \quad f_y = -2xy \Big|_{(1,1,0)} = -2, \quad f_z = -1 \Big|_{(1,1,0)} = -1$$

ہوں گے لہذا  $N_0$  پر  $f$  کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla f \Big|_{(1,1,0)} = 2i - 2j - k$$

نقطہ  $N_0$  پر  $A$  کے رخ  $f$  کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$D_u f \Big|_{(1,1,0)} = \nabla f \Big|_{(1,1,0)} \cdot u = (2i - 2j - k) \cdot \left( \frac{2}{7}i - \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k \right)$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

(ب) تقابل تیز ترین  $\nabla f = 2i - 2j - k$  رخ بڑھتا ہے اور  $-\nabla f = -2i + 2j + k$  رخ تیز ترین گھٹتا ہے۔ ان رخ تبدیلی کی شرح بالترتیب درج ذیل ہوں گی۔

$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$-|\nabla f| = -3$$

□

مماسی مستوی اور عمودی خطوط کی مساواتیں

اگر قابل تفرق تقابل  $f$  کی ہم قد منحنی  $f(x, y, z) = c$  پر  $r = g(t)i + h(t)j + k(t)k$  ایک ہموار منحنی ہو تب  $f(g(t), h(t), k(t)) = 0$  ہو گا۔ دونوں اطراف کا  $t$  کے لحاظ سے تفرق درج ذیل دیگا:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(g(t), h(t), k(t)) &= \frac{d}{dt}(c) \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dk}{dt} &= 0 \quad \text{زنجیری قاعدہ} \\ (13.47) \quad \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k \right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left( \frac{dg}{dt}i + \frac{dh}{dt}j + \frac{dk}{dt}k \right)}_{\frac{dr}{dt}} &= 0 \end{aligned}$$

منحنی کے ساتھ ساتھ ہر نقطہ پر  $\nabla f$ ، منحنی کی سمتیہ رفتار کو عمودی ہو گا۔

آئیں اب نقطہ  $N_0$  سے گزرتی منحنی تک اپنے آپ کو محدود رکھتے ہیں۔ نقطہ  $N_0$  پر تمام سمتیات رفتار،  $N_0$  پر  $\nabla f$  کو عمودی ہوں گے لہذا منحنی کے تمام مماسی خط اس مستوی میں پائے جائیں گے جو  $N_0$  پر  $\nabla f$  کو عمودی ہو۔ اس مستوی کو ہم  $N_0$  پر سطح کا مماسی مستوی کہتے ہیں۔ نقطہ  $N_0$  سے گزرتا ہوا ایسا خط جو اس مستوی کو عمودی ہو،  $N_0$  پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

تعریف: نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  پر  $\nabla f|_{N_0}$  کا عمودی مستوی، نقطہ  $N_0$  پر ہم قد منحنی  $f(x, y, z) = c$  کا مماسی مستوی ہو گا۔

نقطہ  $N_0$  پر  $\nabla f|_{N_0}$  کا متوازی خط، نقطہ  $N_0$  پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

□

یوں حصہ 11.5 کے تحت، مماسی مستوی اور عمودی خط کی بالترتیب مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$(13.48) \quad f_x(N_0)(x - x_0) + f_y(N_0)(y - y_0) + f_z(N_0)(z - z_0) = 0$$

$$(13.49) \quad x = x_0 + f_x(N_0)t, \quad y = y_0 + f_y(N_0)t, \quad z = z_0 + f_z(N_0)t$$

مثال 13.45: نقطہ  $N_0(1, 2, 4)$  پر درج ذیل کا مماسی مستوی اور عمودی خط دریافت کریں۔

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \quad \text{دائری قطع مکانی}$$

حل: نقطہ  $N_0$  پر  $f$  کی ڈھلوان کو عمودی سطح، نقطہ  $N_0$  پر مستوی ہو گا۔ ڈھلوان

$$\nabla f|_{N_0} = (2xi + 2yj + k)_{(1,2,4)} = 2i + 4j + k$$

ہے لہذا مستوی درج ذیل ہو گا۔

$$2x + 4y + z = 14 \quad \text{یعنی} \quad 2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0$$

$N_0$  نقطہ پر سطح کا عمودی خط درج ذیل ہو گا۔

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 4 + t$$

□

مثال 13.46: بیانی سطح

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

اور مستوی

$$g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$$

ایک ترخیم  $T$  میں ملتے ہیں۔ نقطہ  $N_0(1, 1, 3)$  پر  $T$  کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: نقطہ  $N_0$  پر مماسی خط  $\nabla f$  اور  $\nabla g$  دونوں کو عمودی لہذا  $v = \nabla f \times \nabla g$  کو متوازی ہو گا۔ نقطہ  $N_0$  کے محدود اور  $v$  کے اجزاء ہمیں مماسی خط کی مساوات دیتے ہیں۔ ہمارے پاس درج ذیل ہے۔

$$\nabla f_{(1,1,3)} = (2xi + 2yj)_{(1,1,3)} = 2i + 2j$$

$$\nabla g_{(1,1,3)} = (i + k)_{(1,1,3)} = i + k$$

$$v = (2i + 2j) \times (i + k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2j - 2k$$

مماسی خط درج ذیل ہو گا۔

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3 - 2t$$

□

سطح  $z = f(x, y)$  کا مماسی مستوی

نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  پر سطح  $z = f(x, y)$  کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔ اس نقطہ پر  $z_0 = f(x_0, y_0)$  ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات  $z = f(x, y)$  کو  $f(x, y) - z = 0$  لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سطح  $z = f(x, y)$  درحقیقت تفاعل  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$  کا صفر ہم قد مستوی ہو گا۔ تفاعل  $F$  کے جزوی تفرقات

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - z) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - z) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y) - z) = 0 - 1 = -1$$

ہوں گے۔ نقطہ  $N_0$  پر مماسی مستوی کا کلیہ

$$F_x(N_0)(x - x_0) + F_y(N_0)(y - y_0) + F_z(N_0)(z - z_0) = 0$$

یوں درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$(13.50) \quad f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0)$$

مثال 13.47: نقطہ  $(0, 0, 0)$  پر سطح  $z = x \cos y - ye^x$  کا مماسی مستوی تلاش کریں۔

حل: ہم جزوی تفرقات معلوم کر کے مساوات 13.50 استعمال کریں گے:

$$f_x(0, 0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1$$

$$f_y(0, 0) = (-x \sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1$$

یوں مماسی مستوی

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0 \quad \text{مساوات 13.50}$$

یعنی درج ذیل ہو گا۔

$$x - y - z = 0$$

□

بڑھوتری اور فاصلہ



جوابات





ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



ضمیمہ ج

ضمیمہ تین



ضمیمہ د

ضمیمہ چار





ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چ



ضمیمہ ز

ضمیمہ سات



ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ





ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

