احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

اس حصہ میں سمتیات اور سہ بعدی محددی نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محددی مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محددی خلاء موزوں ہے۔ ہم محددی مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محددی خلاء پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور xy مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

11.1 مستوی میں سمتیات

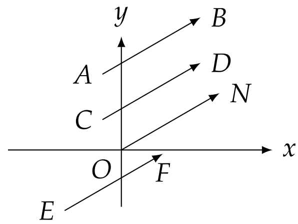
بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاو، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہو گی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہو گا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہو گا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہو گا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

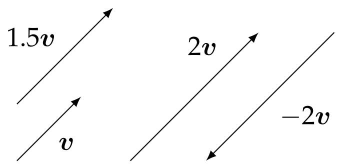
تیر دار لکیروں کو ہم سمت بند خطوط تصور کرتے اور **سمتیات** کہتے ہیں۔

تعریف : ایک مستوی میں سمت بند خط کو **سمتیہ**[1] کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

[1] vector



شکل 11.1: یکساں لمبائی اور یکساں رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 11.2: سمتیہ کے غیر سمتی مضرب۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً $\boldsymbol{v}$ ، سے ظاہر کیا جائے گا[2]۔نقطہ A سے نقطہ B تک تیر کو ہم $\overrightarrow{AB}$ لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل 11.1 میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{EF}$$

□

غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل 11.2)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی $50\,\%$ بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

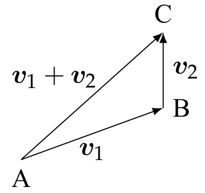
اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب مثبت c کی صورت میں $\boldsymbol{v}$ اور $c\boldsymbol{v}$ کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی c کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ **غیر سمتی**[3] کہلاتے ہیں جبکہ $c\boldsymbol{v}$ کے مضرب کو $\boldsymbol{v}$ کا **غیر سمتی مضرب**[4] کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے **صفر سمتیہ** $\mathbf{0}$ حاصل ہو گا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

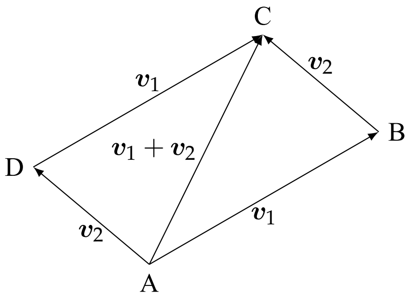
[2] قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان $\vec{v}$ یا نصف تیر کا نشان $\overrightharpoon{v}$ ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔)

[3] scalar

[4] scalar multiple



شکل 11.3: سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کا مجموعہ۔



شکل 11.4: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع یکساں لمبائی ہونے کی بنا $ABCD$ متوازی الاضلاع ہو گا۔

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر $\boldsymbol{v}_1$ کا نمائندہ، مثلاً A سے B تک، ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_1$ کے اختتامی نقطہ (سر) B پر $\boldsymbol{v}_2$ کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل 11.3 میں $\boldsymbol{v}_2 = \vec{BC}$ ہے۔ مجموعہ $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ اب $\boldsymbol{v}_1$ کے دم A سے $\boldsymbol{v}_2$ کے سر C تک سمتیہ ہو گا۔ یوں اگر

$$\boldsymbol{v}_1 = \vec{AB}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \vec{BC}$$

ہوں تب

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہٰذا اس عمل کو بعض اوقات **قاعدہ متوازی الاضلاع**[5] کہتے ہیں (شکل 11.4)۔

اجزاء

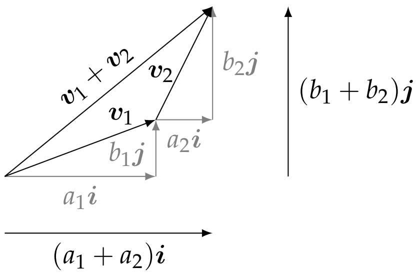
دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

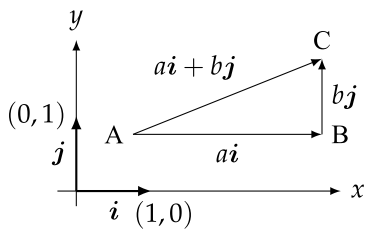
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

لکھنا ممکن ہو، سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کے اجزاء $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ میں تحلیل کیا گیا ہے۔

[5]parallelogram law



شکل 11.6: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔



شکل 11.5: اساس سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کو استعمال کر کے کسی بھی سمتیہ $\overrightarrow{AC}$ کو لکھا جا سکتا ہے۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں **اساسی**[6] سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت x محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(1,0)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{i}$ ہے۔ مثبت y محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(0,1)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{j}$ ہے۔ اب غیر سمتی a کے لئے محور x کے متوازی سمتیہ $a\boldsymbol{i}$ کی لمبائی $|a|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $a>0$ کے لئے دایاں اور $a<0$ کے لئے بایاں ہو گا۔ اس طرح غیر سمتی b کے لئے محور y کے متوازی سمتیہ $b\boldsymbol{j}$ کی لمبائی $|b|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $b>0$ کے لئے اوپر اور $b<0$ کے لئے نیچے ہو گا۔ شکل 11.5 میں سمتیہ $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AC}$ کو اجزاء $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$$

تعریف: اگر $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ ہو تب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء سمتیات $a\boldsymbol{i}$ اور $b\boldsymbol{j}$ ہوں گے۔ اعداد a اور b، اساسی سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

□

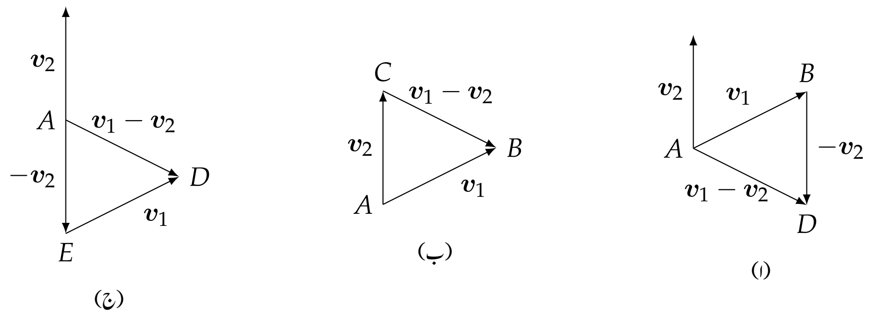
تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}=a'\boldsymbol{i}+b'\boldsymbol{j} \quad \Leftrightarrow \quad a=a', \quad b=b' \tag{11.1}$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

[6] basic



شکل 11.7: سمتیہ $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 11.6)۔

اگر $\boldsymbol{v}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{v}_2 = a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (a_1 + a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 + b_2)\boldsymbol{j}$$

مثال 11.2:

$$(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) + (5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = (2+5)\boldsymbol{i} + (-4+3)\boldsymbol{j} = 7\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

□

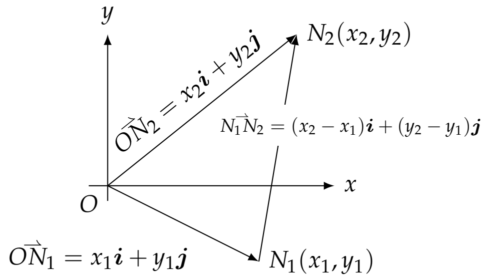
تفریق

ایک سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا منفی سمتیہ $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ ہو گا۔ اس کی لمبائی $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ہو گی البتہ اس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا مخالف ہو گا۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}_2$ کو سمتیہ $\boldsymbol{v}_1$ سے منفی کرنے کی خاطر ہم $-\boldsymbol{v}_2$ اور $\boldsymbol{v}_1$ کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم $\boldsymbol{v}_1$ کے سر سے $-\boldsymbol{v}_2$ کھینچ کر $\boldsymbol{v}_1$ کے دم سے $-\boldsymbol{v}_2$ کے سر تک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل 11.7-ا میں دکھایا گیا ہے جہاں

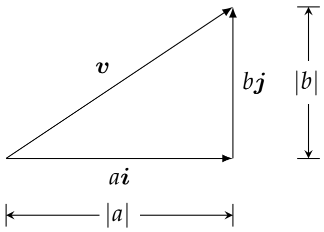
$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \boldsymbol{v}_1 + (-\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

اس کے علاوہ $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کے دم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_2$ کے سر سے $\boldsymbol{v}_1$ کے سر تک سمتیہ $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ ہو گا۔ یہ عمل شکل 11.7-ب میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$



شکل 11.8



شکل 11.9: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

مزید، $-\boldsymbol{v}_2$ کے سرے $\boldsymbol{v}_1$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 11.7-ج)۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (a_1 - a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 - b_2)\boldsymbol{j} \tag{11.2}$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

مثال 11.3:

$$(6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) - (3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}) = (6-3)\boldsymbol{i} + (2-(-5))\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$$

□

ہم نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $\overrightarrow{ON_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ کے اجزاء کو $\overrightarrow{ON_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$ کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔

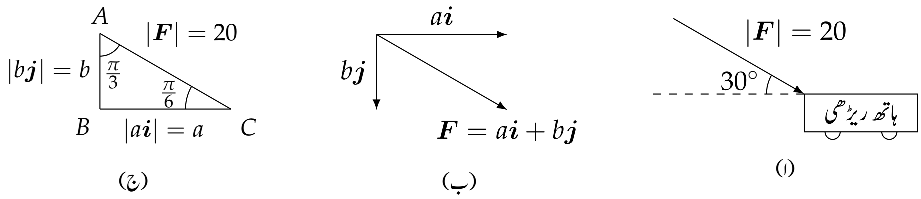
$N_1(x_1, y_1)$ سے $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\overrightarrow{N_1N_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} \tag{11.3}$$

مثال 11.4: نقطہ $N_1(3, 4)$ سے نقطہ $N_2(5, 1)$ تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\overrightarrow{N_1N_2} = (5-3)\boldsymbol{i} + (1-4)\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$$

□



شکل 11.10: ہاتھ ریڑھی (مثال 11.5)

مقدار

سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کی **لمبائی**[7] یا **مقدار**[8] $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے (شکل 11.9)۔ سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ میں دو انتصابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{11.4}$$

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ 30° زاویہ پر $20\,\mathrm{N}$ کی قوت $\boldsymbol{F}$ سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں (شکل 11.10-ا)۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتصابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتصابی جزو معلوم کریں۔

حل: ہم قوت $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ اور اس کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں (شکل 11.10-ب اور شکل 11.10-ج)۔ اس مثلث سے $a = 10\sqrt{3}$ اور $b = 10$ حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو $10\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ اور انتصابی جزو $-10\boldsymbol{j}$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{F} = 10\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$ ہو گا۔ انتصابی جزو کا رخ نیچے ہے لہٰذا یہ منفی ہے۔ □

غیر سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$c\boldsymbol{v} = c(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) = (ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j} \tag{11.5}$$

---

[7] length
[8] magnitude

سمتیہ $c\boldsymbol{v}$ کی لمبائی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ضرب $|c|$ ہو گا:

$$\begin{aligned}|c\boldsymbol{v}| &= \left|(ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j}\right| \\ &= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a^2+b^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2+b^2} \\ &= |c||\boldsymbol{v}|\end{aligned}$$

یوں اگر c غیر سمتی ہو اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب $|c\boldsymbol{v}| = |c||\boldsymbol{v}|$ ہو گا۔

مثال 11.6: اگر $c = -2$ اور $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}| &= |-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ |-2\boldsymbol{v}| &= \left|(-2)(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\right| = |6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||\boldsymbol{v}|\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ $\boldsymbol{0}$ کو ظاہر کرنے کے لئے 0 کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

$$|a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}| = \sqrt{a^2+b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

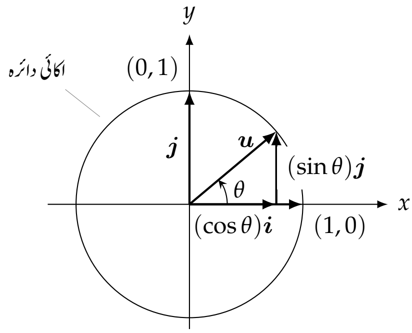
اکائی سمتیات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو **اکائی سمتیہ**[9] کہلائے گا۔ سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اکائی سمتیات ہیں۔

$$|\boldsymbol{i}| = |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}| = \sqrt{1^2+0^2} = 1, \quad |\boldsymbol{j}| = |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

---

[9] unit vector



شکل 11.11: مستوی میں ہر اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ جو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل 11.11)۔

$$\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} \tag{11.6}$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی للذا $\boldsymbol{u}$ بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا 2π کرنے سے $\boldsymbol{u}$ کا سر N مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

لمبائی اور رخ

اگر $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

$$\left|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\boldsymbol{v}| = 1$$

ہو گا للذا $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\boldsymbol{v}$ کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$$

یوں اگر $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

ا. $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ کو $\boldsymbol{v}$ کو رخ کہتے ہیں۔

ب. مساوات $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

حل:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v} \text{ کی لمبائی} && |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \\ &\boldsymbol{v} \text{ کا رخ} && \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j} \\ & && \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}}\underbrace{\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right)}_{\text{رخ}} \end{aligned}$$

□

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں $a \neq 0$ کی صورت میں سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کا ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گا (شکل 11.12)۔

کسی نقطہ پر ایک منحنی کو ایک سمتیہ تب **مماسی**[10] یا **عمودی**[11] ہو گا جب اس نقطہ پر منحنی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال 11.8: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

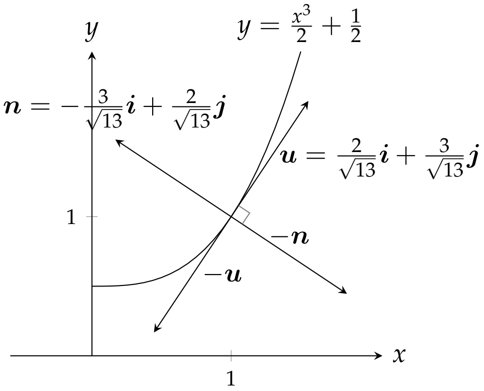
حل: ہم نقطہ $(1,0)$ پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل 11.13)۔

اس نقطہ پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

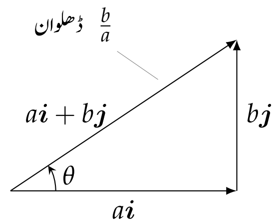
$$y' = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

---

tangent[10]
normal[11]



شکل 11.13: ایک نقطہ پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیہ (مثال 11.8)



شکل 11.12: اگر $a \neq 0$ ہو تب سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کی ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گی۔

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کی ڈھلوان $\frac{3}{2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی 1 ہو ہم $\boldsymbol{v}$ کو

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

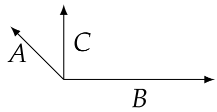
سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کی لمبائی 1 ہے اور یہ $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-\boldsymbol{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

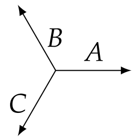
جو مخالف رخ ہے بھی $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جا سکتی ہے۔

نقطہ $(1,1)$ پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان $\boldsymbol{u}$ کی ڈھلوان کے بالعکس متناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم $\boldsymbol{u}$ کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

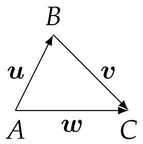
$$\boldsymbol{n} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}, \qquad -\boldsymbol{n} = \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$



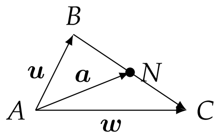
شکل 11.14



شکل 11.15



شکل 11.16



شکل 11.17

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں $(1,1)$ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ □

سوالات

جیومیٹری اور حساب

سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ د. $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$

جوابات: شکل 11.18

سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل 11.15 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $2\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}$ د. $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$

سوال 3 تا سوال 6 میں $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C}=\sqrt{3}\boldsymbol{i}-\pi\boldsymbol{j}$ لیں۔ نتائج کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

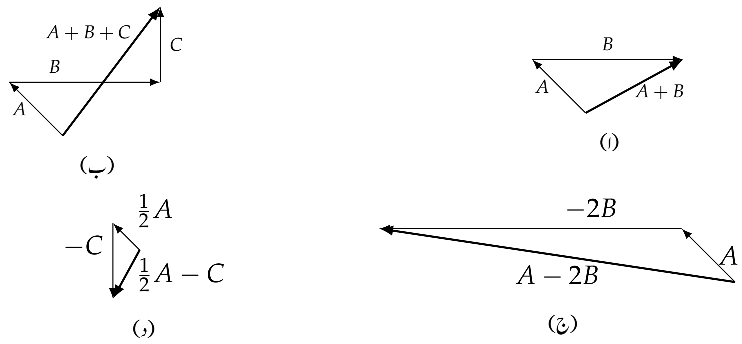
سوال 3: $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$
جواب: $4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$

سوال 4: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

سوال 5: $3\boldsymbol{A}-\frac{1}{\pi}\boldsymbol{C}$
جواب: $(6-\frac{\sqrt{3}}{\pi})\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}$

سوال 6: $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+32\boldsymbol{j}$

سوال 7: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں (شکل 11.16)۔



شکل 11.18

ا. $\boldsymbol{w}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. $\boldsymbol{v}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

جواب: (ا) $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (ب) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}$

سوال 8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے (شکل 11.17)۔ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیہ کو $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔ محددی سطح پر مبدا سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

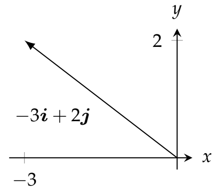
سوال 9: نقاط $N_1(5,7)$ اور $N_2(2,9)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.19

سوال 10: نقاط $N_1(1,2)$ اور $N_2(-3,5)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

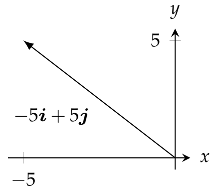
سوال 11: نقاط $A(-5,3)$ اور $B(-10,8)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.20

سوال 12: نقاط $A(-7,-8)$ اور $B(6,11)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔

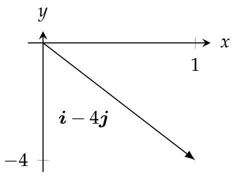
سوال 13: نقاط $N_1(1,3)$ اور $N_2(2,-1)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.21



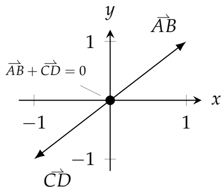
شکل 11.19



شکل 11.20



شکل 11.21



شکل 11.22

سوال 14: نقاط $N_3(1,3)$ اور N_4 کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_3N_4}$ تلاش کریں جہاں $N_1(2,-1)$ اور $N_2(-4,3)$ کو ملانے والے قطع کا وسطی نقطہ N_4 ہے۔

سوال 15: نقاط $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ اور $D(-2,2)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیات $\overrightarrow{CD}$ اور $\overrightarrow{AB}$ کا مجموعہ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.22

سوال 16: نقطہ A سے مبدا تک سمتیہ، جہاں $\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ اور $B(-2,5)$ ہیں۔

سوال 17: سمتیہ $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $A(2,9)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ B تلاش کریں۔
جواب: $(5,8)$

سوال 18: سمتیہ $\overrightarrow{NQ}=-6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $Q(3,3)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ N تلاش کریں۔

اکائی سمتیات

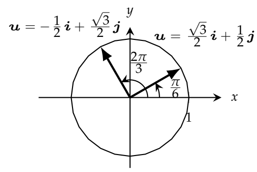
سوال 19 تا سوال 22 میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 19: زاویہ $\theta=\frac{\pi}{6}$ اور $\theta=\frac{2\pi}{3}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}=(\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔
جواب: شکل 11.23

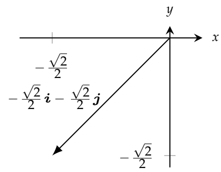
سوال 20: زاویہ $\theta=-\frac{\pi}{4}$ اور $\theta=-\frac{3\pi}{4}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}=(\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 21: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔
جواب: شکل 11.24

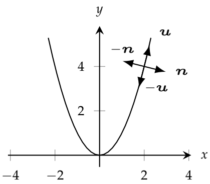
سوال 22: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔



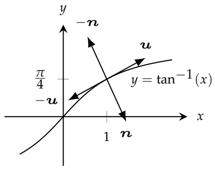
شکل 11.23



شکل 11.24



شکل 11.25



شکل 11.26

سوال 23 اور سوال 24 میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ اسی رخ تلاش کریں۔

سوال 23: $6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$
جواب: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

سوال 24: $-\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور اکائی سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہو گی۔)

سوال 25: $y = x^2, \quad (2,4)$
جواب: $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j}, \quad -\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} - \frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j},$
$\boldsymbol{n} = \frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j}, \quad -\boldsymbol{n} = -\frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j}$ شکل 11.25

سوال 26: $x^2 + 2y^2 = 6, \quad (2,1)$

سوال 27: $y = \tan^{-1} x, \quad (1, \frac{\pi}{4})$
جواب: $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}), \quad -\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}),$
$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}), \quad -\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}),$ شکل 11.26

سوال 28: $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (0,1)$

سوال 29 تا سوال 32 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

سوال 29: $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0, \quad (1,0)$
جواب: $\boldsymbol{u} = \pm\frac{1}{5}(-4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{v} = \pm\frac{1}{5}(3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})$

سوال 30: $x^2 - 6xy + 8y^2 - 2x - 1 = 0, \quad (1,1)$

سوال 31: $y = \int_0^x \sqrt{3 + t^4}\,\mathrm{d}t, \quad (0,0)$
جواب: $\boldsymbol{u} = \pm\frac{1}{2}(\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{v} = \pm\frac{1}{2}(-\sqrt{3}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$

سوال 32: $y = \int_e^x \ln(\ln t)\,\mathrm{d}t, \quad (e,0)$

لمبائی اور رخ

سوال 33 اور سوال 34 میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 33: $5\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$
جواب: $13(\frac{5}{13}\boldsymbol{i} + \frac{12}{13}\boldsymbol{j})$

سوال 34: $2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

سوال 35: سمتیہ $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔
جواب: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}, \quad -\frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

سوال 36: سمتیہ $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 2 ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں؟

سوال 37: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 6$ اور $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

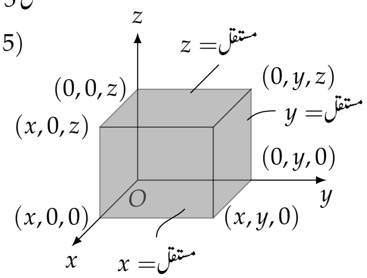
سوال 38: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 6$ اور $\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے رخ ایک دوسرے جیسے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

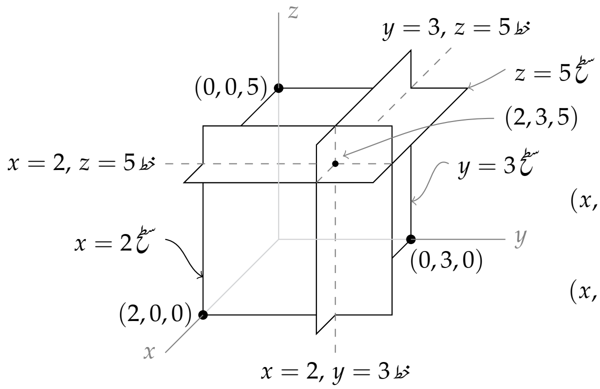
سوال 39: آپ ایک ریڑھی کو قوت $\boldsymbol{F}$ سے کھینچ رہے ہیں جس کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = 10\,\mathrm{N}$ ہے۔ زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ 30° ہے۔ اس قوت کے x اور y اجزاء تلاش کریں۔
جواب: $5\sqrt{3}\boldsymbol{i}, \quad 5\boldsymbol{j}$

سوال 40: پتنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ 45° زاویہ پر $5\,\mathrm{N}$ قوت سے کھینچتی ہے۔ اس قوت کے افقی اور انتصابی اجزاء تلاش کریں۔

سوال 41: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ ایسے غیر سمتیات α اور β کہ $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C}$ ہو۔
جواب: $\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$



شکل 11.27: دایاں ہاتھ کارتیسی نظام۔



شکل 11.28: سطح $x = 2$ ، $y = 3$ اور $z = 5$ نقطہ $(2, 3, 5)$ سے گزرتی تین خط تعین کرتے ہیں۔

سوال 42: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ لکھیں جہاں $\boldsymbol{A}_1$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کے متوازی اور $\boldsymbol{A}_2$ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کے متوازی ہے۔ (سوال 41 دیکھیں۔)

سوال 43: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شمال کی طرف $60°$ پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لئے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

جواب: (ا) $(5\cos 60°, 5\sin 60°) = (\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ ،
(ب) $(5\cos 60 + 10\cos 315, 5\sin 60° + 10\sin 315°) = (\frac{5+\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2})$

سوال 44: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، شمال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد یہ مغرب سے $30°$ زاویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

سوال 45: مستوی میں $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہے جو y محور کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی ڈھلوان اور سمتیہ $-\boldsymbol{v}$ کی ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: $-\boldsymbol{v} = -a\boldsymbol{i} - b\boldsymbol{j}$ کی ڈھلوان $\frac{(-b)}{(-a)}$ ہے۔ یہی $\boldsymbol{v}$ کی بھی ڈھلوان ہے۔

11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات

ہم اب سہ بعدی کارتیسی محدد بیان کرتے ہیں اور فضا میں اپنا راستہ تلاش کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم فاصلہ کی تعریف جانیں گے، فضا میں سمتیات کے ساتھ کام کرنا (مستوی کے قواعد اب بھی لاگو ہوں گے، پس اب ایک محدد بڑھ جائے گا)، اور نقطوں کے سلسلہ کا مساوات اور عدم مساوات کے ساتھ تعلق سیکھیں گے۔

کارتیسی محدد

فضا میں نقطہ کی تلاش کے لئے تین آپس میں عمودی محددی محور استعمال کیے جاتے ہیں۔ شکل 11.27 میں محور Ox ، Oy اور Oz دایاں ہاتھ محددی نظام دیتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کے نظام میں، انگوٹھے کو باقی انگلیوں کے ساتھ زاویہ قائمہ پر رکھتے ہوئے، اگر آپ اپنے دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو مثبت x محور پر رکھ کر انہیں مثبت y محور کی جانب موڑیں تب آپ کا انگوٹھا مثبت z محور پر ہو گا۔

فضا میں نقطہ N سے گزرتی، محوروں کے قائمہ سطحیں ان محور کو اعداد (x, y, z) پر قطع کریں گی۔ یہی اعداد نقطہ N کے کارتیسی محدد ہوں گے۔

محور x پر نقطوں کے y اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محدد کی صورت $(x, 0, 0)$ ہو گی۔ اسی طرح محور y پر نقطوں کے x اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان نقطوں کے محدد کی صورت $(0, y, 0)$ ہو گی۔ محور z پر نقطوں کے x اور y محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محددی کی صورت $(0, 0, z)$ ہو گی۔

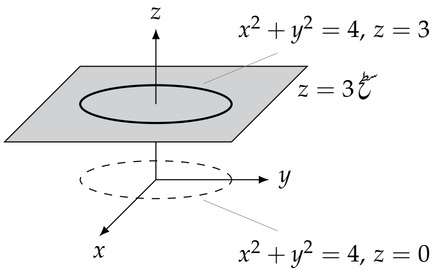
محور x کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا x محدد وہی ہو گا جس x محدد پر یہ سطح x محور کو قطع کرتا ہے۔ اس سطح پر نقطوں کے y اور z محدد کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح محور y کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک y محدد ہو گا اور محور z کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک z محدد ہو گا۔ ان سطحوں کی مساوات لکھتے ہوئے ہم اس مشترکہ محدد کی قیمت لکھتے ہیں۔ یوں مستوی $x = 2$ محور x کو عمودی ہے اور یہ مستوی محور x کو نقطہ $x = 2$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $y = 3$ محور y کو عمودی ہے اور اس کو نقطہ $y = 3$ پر قطع کرتا ہے۔مستوی $z = 5$ محور z کو عمودی ہے اور اس محور کو نقطہ $z = 5$ پر قطع کرتا ہے۔ شکل 11.28 میں مستوی $x = 2$ ، $y = 3$ اور $z = 5$ دکھائے گئے ہیں۔ ان کا مشترک نقطہ بھی دکھایا گیا ہے جہاں یہ تینوں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مستوی $x = 2$ اور $y = 3$ ایک دوسرے کو ایک لکیر پر قطع کرتے ہیں (شکل 11.28) جو محور z کے متوازی ہے۔ اس لکیر کو جوڑی مساوات $x = 2$ ، $y = 3$ ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ (x, y, z) صرف اور صرف اس صورت اس لکیر پر پایا جائے گا جب $x = 2$ اور $y = 3$ ہوں۔ اسی طرح مستوی $y = 3$ اور $z = 5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $y = 3$ ، $z = 5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور x کے متوازی ہو گی۔ مستوی $x = 2$ اور $z = 5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $x = 2$ ، $z = 5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور y کے متوازی ہو گی۔

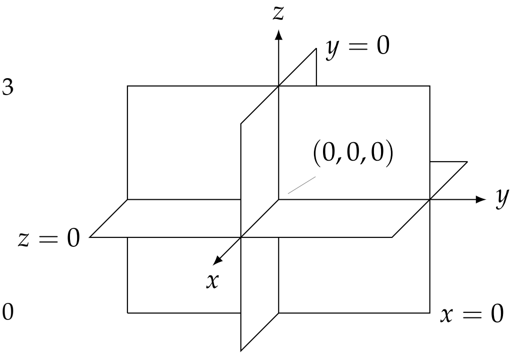
محددی محوروں کے بیچ **مستوی** xy [12] جس کی معیاری مساوات $z = 0$ ؛ **مستوی** yz جس کی معیاری مساوات $x = 0$ ؛ اور **مستوی** xz جس کی معیاری مساوات $y = 0$ ہے پائی جاتی ہیں۔ یہ تینوں مستوی مبدا $(0, 0, 0)$ پر آپس میں ملتے ہیں (شکل 11.29)۔

---

[12] xy-plane



شکل 11.30: بلند دائرہ (مثال 11.10)



شکل 11.29: سطح $x = 0$ ، $y = 0$ اور $z = 0$ فضا کو آٹھ ثمن میں تقسیم کرتے ہیں۔

تین **محددی مستوی**[13] $x = 0$ ، $y = 0$ اور $z = 0$ فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں **ثمن**[14] کہتے ہیں۔ وہ ثمن جس میں تمام محدد مثبت ہیں **پہلا ثمن**[15] کہلاتا ہے۔ باقی سات ثمن کو نام دینے کا کوئی روایتی طریقہ نہیں پایا جاتا ہے۔

چونکہ فضا کے کارتیسی محدد ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں لہٰذا ان محدد کو **مستطیلی محدد**[16] بھی کہتے ہیں۔

درج ذیل مثال میں ہم مساواتوں اور عدم مساواتوں کا خلا میں ہم پلہ نقطے تلاش کرتے ہیں۔

مثال 11.9:

---

[13] coordinate planes
[14] octant
[15] first octant
[16] rectangular coordinates

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$z \geq 0$	xy مستوی میں اور اس سے اوپر نصف فضا میں تمام نقطے۔
$x = -3$	مستوی x کو نقطہ $x = -3$ پر عمودی سطح۔ یہ سطح yz مستوی کے متوازی اور 3 اکائیاں اس کے پیچھے ہے۔
$z = 0, x \leq 0, y \geq 0$	مستوی xy کا ربع دوم۔
$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$	پہلا ثمن۔
$-1 \leq y \leq 1$	سطح $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔
$y = -2, z = 2$	وہ خط جس میں سطح $y = -2$ اور سطح $z = 2$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، یا وہ خط جو نقطہ $(0, -2, 2)$ سے گزرتا ہے اور محور x کے متوازی ہے۔

□

مثال 11.10: کون سے نقاط $N(x, y, z)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؟

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{اور} \quad z = 3$$

حل: یہ نقطے افقی سطح $z = 3$ میں پائے جاتے ہیں اور اس سطح میں یہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ بناتے ہیں۔ ہم ان نقطوں کو "سطح $z = 3$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 4$" یا مختصراً "دائرہ $x^2 + y^2 = 4, z = 3$" کہتے ہیں (شکل 11.30)۔ □

فضا میں سمتیات

سمت بند خطوط کا سلسلہ جو قوت، ہٹاو، اور سمتی رفتار ظاہر کرتے ہوں سمتیات کہلاتے ہیں، جیسے یہ مستوی میں کہلائے جاتے ہیں۔ سمتی مجموعہ، سمتی تفریق اور غیر سمتی ضرب کے وہی قواعد یہاں بھی کارآمد ہوں گے۔

مبدا سے نقاط $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ تک سمت بند خطوط **اساسی سمتیات** ہیں (شکل 11.31) جنہیں بالترتیب $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مبدا O سے عمومی نقطہ $N(x, y, z)$ تک **تعین گر سمتیہ**[17] $\boldsymbol{r}$ درج ذیل ہو گا۔

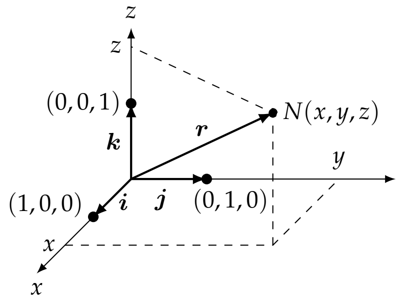
$$\boldsymbol{r} = \vec{ON} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{11.7}$$

تعریف: **فضا میں سمتیات کا مجموعہ اور تفریق**

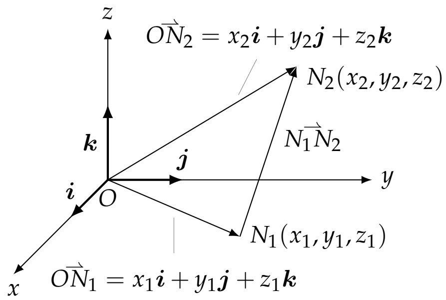
کسی بھی سمتیات $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (a_1 - b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 - b_3)\boldsymbol{k}$$

[17] position vector



شکل 11.31: فضا میں نقطے کا تعین گر سمتیہ۔



شکل 11.32: دو نقطوں کے بیچ سمتیہ۔

□

دو نقاط کے بیچ سمتیہ

ہم نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ $N_1\vec{N}_2$ کو

$$
\begin{aligned}
N_1\vec{N}_2 &= O\vec{N}_1 - O\vec{N}_2 \\
&= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\
&= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

لکھ سکتے ہیں جو N_1 اور N_2 کے محدد کی صورت میں ہے (شکل 11.32)۔

یوں نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$N_1\vec{N}_2 = = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \tag{11.8}$$

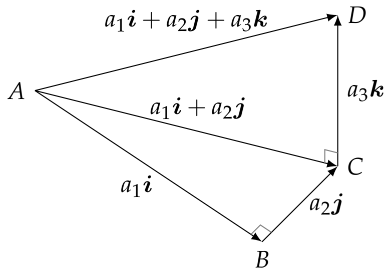
مقدار

جیسا ہم جانتے ہیں، سمتیہ کی مقدار اور سمت اس کے اہم خصوصیات ہیں۔ ہم مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے شکل 11.33 میں سمتیہ $a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ کی مقدار (لمبائی) کا کلیہ تلاش کرتے ہیں۔ مثلث ABC سے

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ہو گا لہٰذا مثلث ACD سے

$$|a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}| = \left|\vec{AD}\right| = \sqrt{\left|\vec{AC}\right|^2 + \left|\vec{CD}\right|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



شکل 11.33: قائمہ مثلث ABC اور ACD پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے $\vec{AD}$ کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔

ہو گا۔

یوں $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ کی مقدار (لمبائی) درج ذیل ہو گی۔

$$|\boldsymbol{A}|=|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{11.9}$$

غیر سمتی ضرب

تعریف: اگر c غیر سمتی اور $\boldsymbol{A}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$c\boldsymbol{A}=(ca_1)\boldsymbol{i}+(ca_2)\boldsymbol{j}+(ca_3)\boldsymbol{k}$$

□

مثال 11.11: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

□

اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3$ کو غیر سمتی c سے ضرب دیں تب، مستوی میں غیر سمتی ضرب کی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا، $c\boldsymbol{A}$ کی لمبائی $|c|$ ضرب $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی ہو گی:

$$\begin{aligned}
c\boldsymbol{A}&=ca_1\boldsymbol{i}+ca_2\boldsymbol{j}+ca_3\boldsymbol{k}\\
|c\boldsymbol{A}|&=\sqrt{(ca_1)^2+(ca_2)^2+(ca_3)^2}=\sqrt{c^2a_1^2+c^2a_2^2+c^2a_3^2}\\
&=|c|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=|c||\boldsymbol{A}|
\end{aligned} \tag{11.10}$$

مثال 11.12: سمتیہ $\boldsymbol{A}$ مثال 11.11 میں دیا گیا ہے۔ یوں

$$2\boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

کی لمبائی درج ذیل ہو گی:

$$\begin{aligned}\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (6)^2} &= \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56}\\ &= \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14} = 2|\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

فضا میں **صفر سمتیہ** سے مراد سمتیہ $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$ ہے۔ مستوی میں صفر سمتیہ کی طرح فضا میں $\boldsymbol{0}$ کی لمبائی صفر ہو گی اور اس کا کوئی رخ نہیں ہو گا۔

اکائی سمتیات

فضا میں اکائی سمتیہ کی لمبائی 1 ہو گی۔ اساسی سمتیات درج ذیل کی بنا اکائی سمتیات ہیں۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{i}| &= |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1\\ |\boldsymbol{j}| &= |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1\\ |\boldsymbol{k}| &= |0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1\end{aligned}$$

مقدار اور رخ

اگر $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ایک اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ وہی ہو گا جو $\boldsymbol{A}$ کا رخ ہے۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{11.11}$$

مثال 11.13: سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} && \text{مساوات 11.11}\\
&= \sqrt{14} \cdot \frac{\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}} && \text{مثال 11.11}\\
&= \sqrt{14}\Big(\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}\Big) = (\text{لمبائی } \boldsymbol{A}) \cdot (\text{رخ } \boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

□

مثال 11.14: نقطہ $N_1(1,0,1)$ سے نقطہ $N_2(3,2,0)$ تک سمتیہ کے رخ میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $\overrightarrow{N_1N_2}$ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے $\boldsymbol{u}$ حاصل کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{N_1N_2} &= (3-1)\boldsymbol{i} + (2-0)\boldsymbol{j} + (0-1)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\\
\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3\\
\boldsymbol{u} &= \frac{\overrightarrow{N_1N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 2aj - \boldsymbol{k}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

□

مثال 11.15: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 6 ہو۔

حل: ہم اس سمتیہ کے رخ اکائی سمتیہ کو 6 سے ضرب کر کے جواب حاصل کرتے ہیں:

$$
6\,\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{3} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}
$$

□

فضا میں فاصلہ

فضا میں نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ، سمتیہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ کی لمبائی $\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|$ ہو گی۔

نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{11.12}$$

مثال 11.16: نقاط $N_1(2, 1, 5)$ اور $N_2(-2, 3, 0)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| &= \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2 + (0-5)^2}\\ &= \sqrt{16+4+25}\\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

□

11.2.1 کرہ

ہم مساوات 11.12 استعمال کر کے اس کرہ کی مساوات لکھتے ہیں جس کا مرکز $N_0(x_0, y_0, z_0)$ اور رداس a ہو۔ نقطہ $N(x, y, z)$ اس صورت اس کرہ پر پایا جائے گا جب $a = \left|\overrightarrow{N_0N_1}\right|$ ہو یعنی:

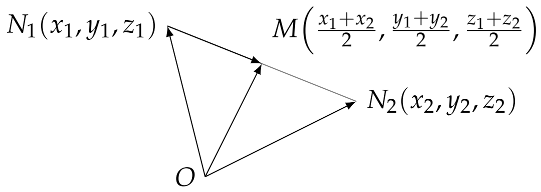
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

ایک کرہ جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) اور رداس a ہو کی معیاری مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \tag{11.13}$$

مثال 11.17: درج ذیل کرہ کا مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$



شکل 11.34: نقاط N_1 اور N_2 کے محدد کی اوسط قطع N_1N_2 کے وسطی نقطہ کے محدد ہوں گے۔

حل: ہم مستوی میں دائرے کا مرکز اور رداس حاصل کرنے کی طرح یہاں بھی x ، y اور z کے مربع مکمل کر کے معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کر کے مرکز اور رداس دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2+3x-4z+1&=0\\
(x^2+3x\quad)+y^2+(z^2-4z\quad)&=-1\\
\left(x^2+3x+(\tfrac{3}{2})^2\right)+y^2+\left(z^2-4z+(-\tfrac{4}{2})^2\right)&=-1+(\tfrac{3}{2})^2+(-\tfrac{4}{2})^2\\
(x+\tfrac{3}{2})^2+y^2+(z-2)^2&=-1+\tfrac{9}{4}+4=\tfrac{21}{4}
\end{aligned}$$

یہ مساوات 11.13 ہے لہٰذا $x_0=-\frac{3}{2}$ ، $y_0=0$ ، $z_0=2$ اور $a=\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہیں۔ یوں مرکز $(-\frac{3}{2},0,2)$ اور رداس $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہو گا۔ □

مثال 11.18:

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$x^2+y^2+z^2<4$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا اندرون۔
$x^2+y^2+z^2\le 4$	سطح $x^2+y^2+z^2=4$ اور اس کے اندرون پر مشتمل ٹھوس کرہ یا کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ میں محدود گیند۔
$x^2+y^2+z^2>4$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا بیرون۔
$x^2+y^2+z^2=4,\ z\le 0$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا نچلا نصف حصہ۔

□

وسطی نقاط

کسی بھی قطع کا وسطی نقطہ اوسط کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(x_1,y_1,z_1)$ اور $N_2(x_2,y_2,z_2)$ کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

اس کی وجہ درج ذیل ہے (شکل 11.34)۔

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{ON_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{ON_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON_2} - \overrightarrow{ON_1}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2}) \\ &= \frac{x_1+x_2}{2}\boldsymbol{i} + \frac{y_1+y_2}{2}\boldsymbol{j} + \frac{z_1+z_2}{2}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

مثال 11.19: نقطہ $N_1(3,-2,0)$ اور $N_2(7,4,4,)$ کو ملانے والی قطع کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (5,1,2)$$

□

سوالات

سلسلہ، مساوات اور عدم مساوات

سوال 1 تا سوال 12 میں ان نقطوں کے سلسلہ کی جیومیٹریائی تفصیل بیان کریں جو دی گئی جوڑی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 1: $x=2, \quad y=3$
جواب: محور z کے متوازی نقطہ $(2,3,0)$ سے گزرتا ہوا خط۔

سوال 2: $x=-1, \quad z=0$

سوال 3: $y=0, \quad z=0$
جواب: محور x

سوال 4: $x=1, \quad y=0$

سوال 5: $x^2+y^2=4, \quad z=0$
جواب: مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=4$

سوال 6: $x^2+y^2=4, \quad z=-2$

سوال 7: $x^2+z^2=4, \quad y=0$
جواب: مستوی xz میں دائرہ $x^2+z^2=4$

سوال 8: $y^2+z^2=1, \quad x=0$

سوال 9: $x^2+y^2+z^2=1, \quad x=0$
جواب: مستوی yz میں دائرہ $y^2+z^2=1$

سوال 10: $x^2+y^2+z^2=25, \quad y=-4$

سوال 11: $x^2+y^2+(z+3)^2=25, \quad z=0$
جواب: مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=16$

سوال 12: $x^2+(y-1)^2+z^2=4, \quad y=0$

سوال 13 تا سوال 18 میں ان نقاط کے سلسلہ کو جیومیٹریائی بیان کریں جو دی گئی عدم مساوات یا مساوات اور عدم مساوات کی جوڑی کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 13: (ا) $x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad z=0$ (ب) $x\geq 0, \quad y\leq 0, \quad z=0$
جواب: (ا) مستوی xy کا ربع اول۔ (ب) مستوی xy کا ربع چہارم۔

سوال 14:

ا. $0\leq x\leq 1$

ب. $0\leq x\leq 1, \quad 0\leq y\leq 1$

ج. $0\leq x\leq 1, \quad 0\leq y\leq 1, \quad 0\leq z\leq 1$

سوال 15:

ا. $x^2+y^2+z^2\leq 1$

ب. $x^2+y^2+z^2>1$

جواب: (ا) رداس 1 کا گیند جس کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ب) مبدا سے 1 اکائی سے زیادہ دور تمام نقاط۔

سوال 16: (ا) $x^2+y^2\le 1,\ z=0$ (ب) $x^2+y^2\le 1,\ z=3$ (ج) $x^2+y^2\le 1,$ جہاں z پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال 17: (ا) $x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$ (ب) $x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0$
جواب: (ا) رداس 1 کا نصف بالائی کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ب) رداس 1 کا نصف بالائی ٹھوس کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 18: (ا) $x=y,\ z=0$ (ب) $x=y,$ جہاں z پر کوئی شور لاگو نہیں ہے۔

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے سلسلہ کو ایک مساوات یا جوڑی مساوات سے ظاہر کریں۔

سوال 19: وہ مستوی جو (ا) نقطہ $(3,0,0)$ پر محور x، (ب) نقطہ $(0,-1,0)$ پر محور y، (ج) نقطہ $(0,0,-2)$ پر محور z کو عمودی ہے۔
جواب: (ا) $x=3$، (ب) $y=-1$، (ج) $z=-2$

سوال 20: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,2)$ پر (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کو عمودی ہے۔

سوال 21: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,1)$ پر (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی ہے۔
جواب: (ا) $z=1$، (ب) $x=3$، (ج) $y=-1$

سوال 22: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,0,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz میں پایا جاتا ہو۔

سوال 23: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,2,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی $y=2$ میں پایا جاتا ہو۔
جواب: (ا) $x^2+(y-2)^2=4,\ z=0$، (ب) $(y-2)^2+z^2=4,\ x=0$، (ج) $x^2+z^2=4,\ y=2$

سوال 24: وہ دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(-3,4,1)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی سطح میں پایا جاتا ہو۔

سوال 25: نقطہ $(1,3,-1)$ سے گزرتا خط جو (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کے متوازی ہو۔
جواب: (ا) $y=3,\ z=-1$، (ب) $x=1,\ z=-1$، (ج) $x=1,\ y=3$

سوال 26: فضا میں وہ نقطے معلوم کریں جن کا فاصلہ مبدا اور نقطہ $(0,2,0)$ سے یکساں ہو۔

سوال 27: وہ دائرہ معلوم کریں جس میں نقطہ $(1,1,3)$ سے گزرتا ہوا ایسا مستوی جو محور z کے عمودی ہو ایک ایسے دائرہ کو جا ملتا ہو جس کا رداس 5 اور مرکز $(0,0,0)$ ہو۔
جواب: $x^2+y^2+z^2=25,\ z=3$

سوال 28: فضا میں ان نقطوں کا سلسلہ جن کا فاصلہ $(0,0,1)$ سے 2 اور $(-1,0,0)$ سے 2 ہو۔

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے سلسلہ کی عدم مساوات پیش کریں۔

سوال 29: سطح $z=0$ اور $z=1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔
جواب: $0\le z\le 1$

سوال 30: پہلے ثمن میں محددی سطحوں اور سطحوں $x=2$ ، $y=2$ اور $z=2$ میں محدود ٹھوس مکعب۔

سوال 31: نصف فضا جو مستوی xy اور اس کے نیچے نقطوں پر مشتمل ہے۔
جواب: $z\le 0$

سوال 32: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو کا بالائی نصف حصہ۔

سوال 33: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز $(1,1,1)$ ہو کا (ا) اندرون، (ب) بیرون۔
جواب: (ا) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2<1$ ،
(ب) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>1$

سوال 34: رداس 1 اور 2 کے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں میں بند خطہ۔ (بند خطہ سے مراد ہے کہ کرہ کی سطحیں بھی اس خطہ میں شامل ہوں گی۔ کروی سطحوں کو شامل نہ کرنے کے لئے ہم آزاد خطے کی اصطلاح استعمال کرتے ہیں۔)

لمبائی اور رخ

سوال 35 تا سوال 44 میں دیے سمتیہ کو اس کی لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 35: $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$
جواب: $3(\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

سوال 36: $3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 37: $\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$
جواب: $9(\frac{1}{9}\boldsymbol{i}+\frac{4}{9}\boldsymbol{j}-\frac{8}{9}\boldsymbol{k})$

سوال 38: $9\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$

سوال 39: $5\boldsymbol{k}$

جواب: $5(\boldsymbol{k})$

سوال 40: $-4\boldsymbol{j}$

سوال 41: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}$

جواب: $1(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k})$

سوال 42: $\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$

سوال 43: $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$

جواب: $\sqrt{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k})$

سوال 44: $\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$

سوال 45: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	2	$\boldsymbol{i}$
(ب)	$\sqrt{3}$	$-\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(د)	7	$\frac{6}{7}\boldsymbol{i} - \frac{2}{7}\boldsymbol{j} + \frac{3}{7}\boldsymbol{k}$

جواب: (ا) $2\boldsymbol{i}$، (ب) $-\sqrt{3}\boldsymbol{k}$، (ج) $\frac{3}{10}\boldsymbol{j} + \frac{2}{5}\boldsymbol{k}$، (د) $6\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

سوال 46: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	7	$-\boldsymbol{j}$
(ب)	$\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}\boldsymbol{i}-\frac{4}{13}\boldsymbol{j}-\frac{12}{13}\boldsymbol{k}$
(د)	$a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$

سوال 47: سمتیہ $\boldsymbol{A}=12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔
جواب: $\frac{7}{13}(12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k})$

سوال 48: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی $\sqrt{5}$ ہو۔

سوال 49: سمتیہ $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 5 ہو۔
جواب: $-\frac{10}{7}\boldsymbol{i}+\frac{15}{7}\boldsymbol{j}-\frac{30}{7}\boldsymbol{k}$

سوال 50: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 3 ہو۔

سمتیات کا تعین بذریعہ نقاط، وسطی نقاط اور فاصلہ

سوال 51 تا سوال 56 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ،

ب. رخ $\overrightarrow{N_1N_2}$،

ج. قطع N_1N_2 کا وسطی نقطہ۔

سوال 51: $N_1(1,1,1), \quad N_2(3,3,0)$
جواب: (ا) 3، (ب) $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$، (ج) $(2,2,\frac{1}{2})$

سوال 52: $N_1(-1,1,5), \quad N_2(2,5,0)$

سوال 53: $N_1(1,4,5), \quad N_2(4,-2,7)$
جواب: (ا) 7، (ب) $\frac{3}{7}\boldsymbol{i}-\frac{6}{7}\boldsymbol{j}+\frac{2}{7}\boldsymbol{k}$، (ج) $(\frac{5}{2},1,6)$

سوال 54: $N_1(3,4,5), \quad N_2(2,3,4)$

سوال 55: $N_1(0,0,0), \quad N_2(2,-2,-2)$
جواب: (ا) $2\sqrt{3}$ ، (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$ ، (ج) $(1,-1,-1)$

سوال 56: $N_1(5,3,-2), \quad N_2(0,0,0)$

سوال 57: اگر $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ اور B نقطہ $(5,1,3)$ ہو تب نقطہ A تلاش کریں۔
جواب: $A(4,-3,5)$

سوال 58: اگر $\overrightarrow{AB} = -7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ اور A نقطہ $(-2,-3,6)$ ہو تب نقطہ B تلاش کریں۔

کرہ

سوال 59 تا سوال 62 میں کرہ کے رداس اور مراکز تلاش کریں۔

سوال 59: $(x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$
جواب: $C(-2,0,2), \quad a = 2\sqrt{2}$

سوال 60: $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = \frac{21}{4}$

سوال 61: $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 2$
جواب: $C(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}), \quad a = \sqrt{2}$

سوال 62: $x^2 + (y+\frac{1}{3})^2 + (z-\frac{1}{3})^2 = \frac{29}{9}$

سوال 63 تا سوال 66 میں کرہ کے رداس اور مراکز دیے گئے ہیں۔ ان کرہ کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 63: رداس $\sqrt{14}$ ، مرکز $(1,2,3)$
جواب: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

سوال 64: رداس 2 ، مرکز $(0,-1,5)$

سوال 65: رداس $\sqrt{3}$ ، مرکز $(-2,0,0)$
جواب: $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 3$

سوال 66: رداس 7 ، مرکز $(0,-7,0)$

سوال 67 تا سوال 70 میں دیے کرہ کے رداس اور مراکز دریافت کریں۔

سوال 67: $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$
جواب: $C(-2,0,2),\quad a=\sqrt{8}$

سوال 68: $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

سوال 69: $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=9$
جواب: $C(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}),\quad a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

سوال 70: $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$

سوال 71: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) محور z تک فاصلہ تلاش کریں۔
جواب: (ا) $\sqrt{y^2+z^2}$ ، (ب) $\sqrt{x^2+z^2}$ ، (ج) $\sqrt{x^2+y^2}$

سوال 72: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) سطح xy ، (ب) سطح yz ، (ج) سطح xz تک فاصلہ تلاش کریں۔

سمتیات اور جیومیٹری

سوال 73: نقاط $A(4,2,0)$ ، $B(1,3,0)$ اور $C(1,1,3)$ یکساں کثافت کے باریک مثلث کے راس ہیں۔

ا. نقطہ C سے AB کے وسطی نقطہ M تک سمتیہ تلاش کریں۔

ب. نقطہ C سے وسطانیہ CM پر C سے $\frac{2}{3}$ فاصلہ تک سمتیہ تلاش کریں۔

ج. مثلث ABC کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع کے محدد تلاش کریں۔

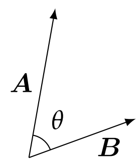
جواب: (ا) $\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ ، (ب) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ، (ج) $(2,2,1)$

سوال 74: ایک مثلث جس کے راس $A(1,-1,2)$ ، $B(2,1,3)$ اور $C(-1,2,-1)$ ہیں کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع تک مبدا سے سمتیہ تلاش کریں۔

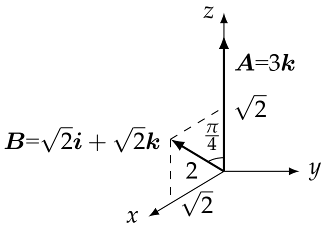
سوال 75: فضا میں چار الاضلاع کے راس A ، B ، C اور D ہیں۔ یہ چار الاضلاع ضروری نہیں کہ مستوی ہو۔ دکھائیں کہ مخالف اضلاع کے وسطانی نقطوں کو جوڑنے والے قطعات ایک دوسرے کو نصف میں قطع کرتے ہیں۔ (اشارہ: دکھائیں کہ ان قطعات کے وسطی نقاط یکساں ہیں۔)

سوال 76: منظم n کثیر الاضلاع کے مرکز سے اس کے راس تک سمتیات بنائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ ان سمتیات کا مجموعہ صفر ہو گا۔ (اشارہ: کثیر الاضلاع کو اپنے مرکز کے گرد گھمانے سے اس مجموعہ پر کیا اثر ہو گا؟)

سوال 77: فرض کریں ایک مثلث کے راس A ، B اور C ہیں جبکہ مطابقتی مخالف اضلاع کے وسطی نقاط a ، b اور c ہیں۔ دکھائیں کہ $\overrightarrow{Aa}+\overrightarrow{Bb}+\overrightarrow{Cc}=0$ ہو گا۔



شکل 11.35: سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ۔



شکل 11.36: سمتیات برائے مثال 11.20

11.3 ضرب نقطہ

ہم اب ضرب نقطہ پر غور کرتے ہیں جو سمتیات کو آپس میں ضرب دینے کے دو طریقوں میں سے ایک ہے۔ چونکہ ضرب نقطہ کا نتیجہ غیر سمتی ہوتا ہے لہٰذا ضرب نقطہ کو **غیر سمتی ضرب**[18] بھی کہتے ہیں۔

ضرب نقطہ

جب دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے ابتدائی نقاط کو ایک ہی نقطہ پر رکھا جائے تب ان سمتیات کے بیچ زاویہ $0 \leq \theta \leq \pi$ پایا جاتا ہے۔ یہ زاویہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ کہلاتا ہے۔

تعریف: سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب (ضرب نقطہ) سے مراد درج ذیل عدد ہے

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{11.14}$$

جہاں θ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ ہے (شکل 11.35)۔

□

الفاظ میں، $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی ضرب $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی ضرب اس زاویہ کا کوسائن جو ان سمتیات کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے ضرب نقطہ کو $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ نقطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ جس کی بنا یہ ضرب نقطہ کہلاتا ہے۔

مثال 11.20: سمتیات $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{k}$ کے ضرب نقطہ درج ذیل ہو گا (شکل 11.36)۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta=(3)(2)\cos\frac{\pi}{4}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

[18] scalar product

□

چونکہ غیر سمتی ضرب کی علامت $\cos\theta$ پر منحصر ہے لہٰذا غیر سمتی ضرب کا نتیجہ زاویہ حادہ کی صورت میں مثبت، زاویہ منفرجہ کی صورت میں منفی (اور زاویہ قائمہ کی صورت میں صفر ہو گا)۔

چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\cos 0 = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\,(1) = |\boldsymbol{A}|^2$$

یعنی

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{11.15}$$

ہو گا۔

11.3.1 حساب

کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کا حساب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء سے حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\\
&\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k},\\
&\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = (b_1 - a_1)\boldsymbol{i} + (b_2 - a_2)\boldsymbol{j} + (b_3 - a_3)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

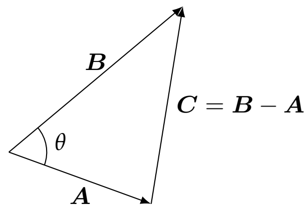
ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں کے لئے قاعدہ کوسائن درج ذیل ہو گا (شکل 11.37)۔

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{C}|^2 &= |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\\
|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta &= \frac{|\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{C}|^2}{2}
\end{aligned}$$

اس مساوات کا بایاں ہاتھ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ہے۔ ہم $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے اجزاء کا مربع لے کر مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت حاصل کرتے ہیں (مساوات 11.9)۔ یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{11.16}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا دو سمتیات کا غیر سمتی ضرب لینے کی خاطر ہم اس کے مطابقتی $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$ اور a اجزاء کو ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔



شکل 11.37: ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ ہوں پر قاعدہ کوسائن کے اطلاق سے مساوات 11.16 حاصل ہو گا۔

مساوات 11.14 کو θ کے لئے حل کر کے ان سمتیات کے بیچ زاویہ حاصل ہو گا۔

$$\theta = \cos^{-1}\Big(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\Big) \qquad \text{سمتیات کے بیچ زاویہ} \tag{11.17}$$

چونکہ الٹ کوسائن کی قیمت $[0, \pi]$ میں پائی جاتی ہے لہٰذا مساوات 11.17 خود بخود $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ دیتی ہے۔

مثال 11.21: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 11.17 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4\\
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3\\
|\boldsymbol{B}| &= \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7\\
\theta &= \cos^{-1}\Big(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\Big)\\
&= \cos^{-1}\Big(\frac{-4}{(3)(7)}\Big) = \cos^{-1}\Big(-\frac{4}{21}\Big) \approx 1.76 \ \text{ریڈیئن}
\end{aligned}$$

□

قواعد ضرب نقطہ

ہم ضرب نقطہ کی مساوات $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + c_1c_2$ سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{11.18}$$

دوسرے لفظوں میں، ضرب نقطہ **قابل تبادل**[19] ہے۔ ہم مساوات 11.16 سے یہ بھی دیکھتے ہیں کہ مستقل (یا غیر سمتی) عدد c کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$(c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{B})=c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{11.19}$$

اگر $\boldsymbol{C}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$ کوئی تیسرا سمتیہ ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

اس طرح ضرب نقطہ قانون تقسیم (درج ذیل) کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{11.20}$$

اس کو مساوات 11.18 کے ساتھ ملا کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{11.21}$$

مساوات 11.20 اور مساوات 11.21 ہمیں سمتیات کے مجموعوں کو، الجبرا کے قواعد کے مطابق، آپس میں ضرب دینے کی اجازت دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D} \tag{11.22}$$

عمودی سمتیات

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ تب **عمودی**[20] ہوں گے جب ان کے بیچ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہو۔ یوں $\cos\frac{\pi}{2}=0$ کی بنا عمودی سمتیات کے لئے $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ غیر صفر سمتیات ہوں اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta=0$ ہو تب $\cos\theta=0$ یعنی $\theta=\cos^{-1}0=\frac{\pi}{2}$ ہو گا۔

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ صرف اور صرف اس صورت عمودی ہوں گے جب $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ ہو۔

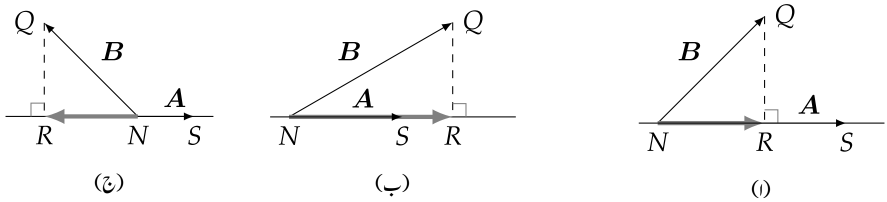
مثال 11.22: سمتیات $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ درج ذیل کی بنا عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(3)(0)+(-2)(2)+(1)(4)=0$$

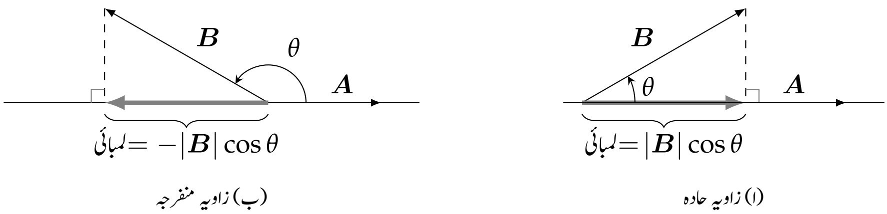
□

---

[19] commutative
[20] orthogonal



شکل 11.38: $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر سمتی تظلیل



شکل 11.39: $\boldsymbol{A}$ پر $\boldsymbol{B}$ کے تظلیل کی لمبائی

تظلیل سمتیہ

سمتیہ $\boldsymbol{B} = \overrightarrow{NQ}$ کا غیر صفر سمتیہ $\boldsymbol{A} = \overrightarrow{NS}$ پر تظلیل سمتیہ $\overrightarrow{NR}$ تعین کرنے کی خاطر Q سے (مبسوط) خط NS پر عمود گرایا جاتا ہے (شکل 11.38)۔ اس سمتیہ کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر سمتی تظلیل $\qquad \operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$

اگر $\boldsymbol{B}$ قوت کو ظاہر کرتا ہو، تب $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ اثر انداز ہونے والی قوت ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ حادہ ہو تب $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ اور رخ $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ہو گا (شکل 11.39)۔ اگر θ زاویہ منفرجہ ہو تب $\cos\theta < 0$ ہو گا اور $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی $-|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ اور رخ $-\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ہو گا۔ ان دونوں صورتوں میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} &= (|\boldsymbol{B}|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \\
&= \Big(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|}\Big)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \qquad\qquad |\boldsymbol{B}|\cos\theta = \tfrac{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta}{|\boldsymbol{A}|} = \tfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|} \\
&= \Big(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\Big)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}
\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} = \Big(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\Big)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \Big(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\Big)\boldsymbol{A} \tag{11.23}$$

عدد $|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ کو $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ کے رخ **غیر سمتی جزو** کہتے ہیں۔ درج ذیل کی بنا

$$|\boldsymbol{B}|\cos\theta = \boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{11.24}$$

ہم غیر سمتی جزو حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ کا ضرب نقطہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ کے ساتھ لیں گے۔ مساوات 11.23 کہتی ہے کہ $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل، $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی جزو ضرب رخ $\boldsymbol{A}$ کے برابر ہو گا۔

جہاں مساوات 11.23 کا پہلا حصہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کے اثر کی بات کرتی ہے، اس کا دوسرا حصہ حساب کے لئے موزوں ہے چونکہ یہ جذر سے چھٹکارا دیتا ہے۔

مثال 11.23: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ پر سمتی تظلیل تلاش کریں اور $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو تلاش کریں۔

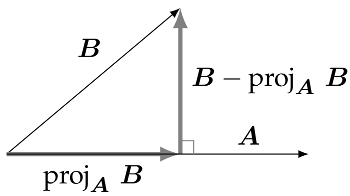
حل: ہم مساوات 11.23 استعمال کر کے سمتی تظلیل تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} &= \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \frac{6-6-4}{1+4+4}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\ &= -\frac{4}{9}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}) = -\frac{4}{9}\boldsymbol{i}+\frac{8}{9}\boldsymbol{j}+\frac{8}{9}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

ہم $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو مساوات 11.24 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|\cos\theta &= \boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = (6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot\Big(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\Big)\\ &= 2-2-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

□



شکل 11.40: سمتیہ B کو سمتیہ A کے عمودی اور متوازی سمتیات کا مجموعہ لکھنا۔

سمتیہ کو عمودی سمتیات کا مجموعہ لکھنا

میکانیات میں ہمیں عموماً ایک سمتیہ B کو سمتیہ A کے متوازی سمتیہ اور A کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ کی صورت میں لکھنا ہوتا ہے۔ ہم ایسا درج ذیل مساوات کی مدد سے کر سکتے ہیں (شکل 11.40)۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \mathrm{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B}) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{A}\ \text{کا متوازی}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{B} - \left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}\right)}_{\boldsymbol{A}\ \text{کا عمودی}} \end{aligned} \tag{11.25}$$

مثال 11.24: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

حل: ہم درج ذیل

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 6 - 1 = 5, \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = 9 + 1 = 10$$

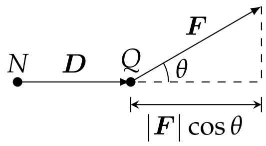
کو مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} + \left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}\right) &= \frac{5}{10}(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) + \left(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} - \frac{5}{10}(3 - \boldsymbol{j})\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\right) \end{aligned}$$

آپ تسلی کر لیں کہ دائیں ہاتھ پہلا جزو $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$ کے برابر ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرا جزو درج ذیل کی بنا $\boldsymbol{A}$ کو عمودی ہے۔

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\right)\cdot(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

□



شکل 11.41: ہٹاو $\boldsymbol{D}$ کے دوران مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام $(|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\boldsymbol{D}|$ ہو گا۔

کام

ہم نے حصہ 6.8 میں مستقل قوت F جو ایک جسم پر عمل کر کے اس کو قوت کے رخ d فاصلہ منتقل کرتی ہے کا کام کلیہ $W = Fd$ سے دریافت کیا۔ یہ کلیہ صرف اس صورت درست ہو گا جب قوت کا رخ اور حرکت کا رخ ایک ہوں۔ اگر مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ اور جسم کے ہٹاو $\boldsymbol{D} = \overrightarrow{NQ}$ کے رخ مختلف ہوں تب $\boldsymbol{D}$ کے رخ، $\boldsymbol{F}$ کا جزو کام کرے گا۔ اگر $\boldsymbol{F}$ اور $\boldsymbol{D}$ کے بیچ زاویہ θ ہو تب کام درج ذیل ہو گا (شکل 11.41)۔

$$\begin{aligned}
\text{کام} &= (\boldsymbol{D} \text{ کے رخ } \boldsymbol{F} \text{ کا غیر سمتی جزو})(\boldsymbol{D} \text{ کی لمبائی}) \\
&= (|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\boldsymbol{D}| \\
&= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

تعریف: ہٹاو $\boldsymbol{D} = \overrightarrow{NQ}$ کے دوران مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta \tag{11.26}$$

ہو گا جہاں ہٹاو اور قوت کے بیچ زاویہ θ ہے۔

□

کام کی اکائی نیوٹن ضرب میٹر ہے جس کو عموماً **جاول**[21] کہتے ہیں۔

مثال 11.25: اگر $|\boldsymbol{F}| = 40\,\mathrm{N}$ اور $|\boldsymbol{D}| = 3\,\mathrm{m}$ ہوں اور $\theta = 60^\circ$ ہو تب کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{کام} &= |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta \\
&= (40)(3)\cos 60^\circ \\
&= (120)(\tfrac{1}{2}) \\
&= 60\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

□

---

[21] joule

سوالات

سوال 1 تا سوال 10 میں درج ذیل دریافت کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ، $|\boldsymbol{A}|$ ، $|\boldsymbol{B}|$

ب. $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ کا کوسائن۔

ج. $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو۔

د. سمتیہ $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$

سوال 1: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\sqrt{5}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $-25,\ 5,\ 5$ ، (ب) -1 ، (ج) -5 ، (د) $-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\boldsymbol{k}$

سوال 2: $\boldsymbol{A}=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=5\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$

سوال 3: $\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $25,\ 15,\ 5$ ، (ب) $\frac{1}{3}$ ، (ج) $\frac{5}{3}$ ، (د) $\frac{1}{9}(10\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$

سوال 4: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 5: $\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $0,\ \sqrt{53}$ ، (ب) 0 ، (ج) 0 ، (د) 0

سوال 6: $\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال 7: $\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $2,\ \sqrt{34},\ \sqrt{3}$ ، (ب) $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ ، (ج) $\frac{2}{\sqrt{34}}$ ، (د) $\frac{1}{17}(5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$

سوال 8: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 9: $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $\sqrt{3}-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3$ ، (ب) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ، (ج) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ، (د) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

سوال 10: $\boldsymbol{A}=-5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+\sqrt{17}\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$

سوال 11: سمتیہ $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔
جواب: $(\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j})+(-\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$

سوال 12: سمتیہ $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 13: سمتیہ $\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔
جواب: $(\frac{14}{3}\boldsymbol{i}+\frac{28}{3}\boldsymbol{j}-\frac{14}{3}\boldsymbol{k})+(\frac{10}{3}\boldsymbol{i}-\frac{16}{3}\boldsymbol{j}-\frac{22}{3}\boldsymbol{k})$

سوال 14: سمتیہ $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ پہلے سے سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{i}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ ہے۔ اگر مساوات 11.25 میں $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}$ ہو تب کیا $\boldsymbol{B}_{\parallel,\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{B}_{\perp,\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ملتے ہیں۔ (متوازی اور عمودی اجزاء کو بالترتیب زیر نوشت $\|$ اور $\perp$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔)

جیومیٹری

سوال 15: مجموعات اور فرق۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ شکل 11.42 میں $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ اور $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ عمودی ہیں۔ کیا یہ محض ایک اتفاق ہے یا ہم توقع کر سکتے ہیں کہ کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ اور فرق عمودی ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: یکساں مقدار کے دو سمتیات کا مجموعہ اور تفریق ہر صورت ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہو گا۔

$$(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2=|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2$$

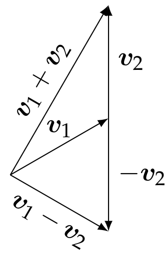
سوال 16: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے کا قطر AB ہے۔ نقطہ C دائرے پر پایا جاتا ہے (شکل 11.43)۔ دکھائیں کہ $\vec{CA}$ اور $\vec{CB}$ عمودی ہوں گے۔

سوال 17: دکھائیں کہ یکساں اضلاع کے متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔

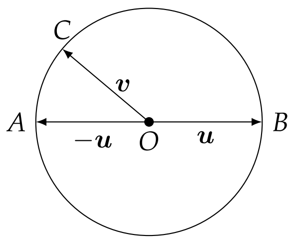
سوال 18: دکھائیں کہ مربع وہ واحد مستطیل ہے جس کے وتر عمودی ہوتے ہیں۔

سوال 19: ثابت کریں کہ ایک متوازی الاضلاع صرف اور صرف اس صورت مستطیل ہو گا جب اس کے وتروں کی لمبائی ایک جیسی ہو۔ ترکھان اس حقیقت کو عموماً استعمال کرتا ہے۔

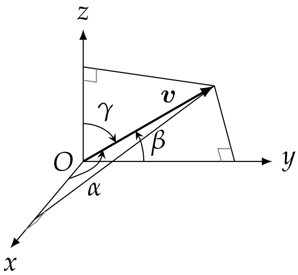
سوال 20: متوازی الاضلاع کے قریبی ضلع $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ ہیں۔ دکھائیں کہ ان کے مشترکہ راس سے مخالف راس تک وتر، سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل 11.42: سمتیات برائے سوال 15



شکل 11.43: دائرہ برائے سوال 16



شکل 11.44: زاویات رخ اور کوسائن رخ کی تعریف برائے سوال 22۔

سوال 21: ایک اہرام کے مربع قاعدہ $OABC$ کے ضلع کی لمبائی 1 اکائی ہے اور اہرام کی چوٹی D ہے۔ اہرام کا قد بھی 1 اکائی ہے۔ یوں نقطہ D ٹھیک وتر OB کے وسطی نقطہ کے سیدھا اوپر ہو گا۔ قطع $\vec{OB}$ اور $\vec{OD}$ کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔
جواب: $\tan^{-1}\sqrt{2}$

سوال 22: زاویات رخ اور کوسائن رخ
سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ کے زاویات رخ α ، β اور γ کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 11.44)۔

مثبت محور x اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ α ہے ($0 \le \alpha \le \pi$)،

مثبت محور y اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ β ہے ($0 \le \beta \le \pi$)،

مثبت محور z اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ γ ہے ($0 \le \gamma \le \pi$)۔

ا. درج ذیل

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\boldsymbol{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{|\boldsymbol{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{|\boldsymbol{v}|}$$

اور $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ دکھائیں۔ ان کوسائن کو **کوسائن رخ**[22] کہتے ہیں۔

ب. کوسائن رخ اور اکائی سمتیات۔ دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ ایک اکائی سمتیہ ہو تب a ، b اور c سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے کوسائن رخ ہوں گے۔

---

[22] direction cosines

سمتیات کے بیچ زاویے

سوال 23 تا سوال 26 میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 23: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: 0.75 ریڈیئن

سوال 24: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$

سوال 25: $\boldsymbol{A} = \sqrt{3}\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \sqrt{3}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
جواب: 1.77 ریڈیئن

سوال 26: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \sqrt{2}\boldsymbol{j} - \sqrt{2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 27 تا سوال 29 میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 27: مثلث ABC کے اندرونی زاویات۔ مثلث کے راس $A(-1,0,2)$ ، $B(2,1,-1)$ اور $C(1,-2,2)$ ہیں۔
جواب: $\underline{/A} \approx 1.24, \underline{/B} \approx 0.66, \underline{/C} \approx 1.24$

سوال 28: سمتیات $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}$ کے بیچ زاویہ۔

سوال 29: مکعب کے وتر اور مکعب کی ایک سطح کے وتر کے بیچ زاویہ۔ (اشارہ: ایسا مکعب استعمال کریں جس کے کنارے $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ ہوں۔)
جواب: 0.62 ریڈیئن

سوال 30: پانی کی نالی میں ایک جوڑ ہے۔اس جوڑ سے شمال رخ نالی کی ڈھلوان $10\,\%$ ہے جبکہ جوڑ سے مشرق رخ نالی کی ڈھلوان $20\,\%$ ہے۔ اس جوڑ پر نالی کے دو حصوں کے بیچ زاویہ کتنا ہو گا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 31:

ا. کسی بھی سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے لئے عدم مساوات $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ کو $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ کی مدد سے دکھائیں۔

ب. کیا کبھی $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ ہو سکتا ہے؟ اگر ہو سکتا ہے تب کب ایسا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) چونکہ $|\cos\theta|\leq 1$ ہوتا ہے لہٰذا $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}||\cos\theta|\leq|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|(1)=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ ہو گا۔ (ب) جب $|\cos\theta|=1$ ہو یا $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ غیر صفر سمتیات کی صورت میں مساوات تب درست ہو گا جب سمتیات متوازی ہوں یعنی جب $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ ہو۔

سوال 32: مستوی xy میں عمومی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ بنائیں۔ اب ان نقطوں (x,y) کی نشاندہی کریں جن پر $(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{v}=0$ ہو گا۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: اگر $\boldsymbol{u}_1$ اور $\boldsymbol{u}_2$ عمودی اکائی سمتیات ہوں اور $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{u}_1+b\boldsymbol{u}_2$ ہو تب $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1$ تلاش کریں۔
جواب: a

سوال 34: ضرب نقطہ میں مشترک اجزاء کی منسوخی
حقیقی اعداد کے ضرب میں اگر $ab_1=ab_2$ ہو اور a غیر صفر ہو تب دونوں اطراف a کو منسوخ کر کے $b_1=b_2$ لکھا جا سکتا ہے۔ کیا ضرب نقطہ میں ایسا کرنا ممکن ہو گا: یعنی اگر $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_2$ ہو تب کیا دونوں اطراف $\boldsymbol{A}$ منسوخ کر کے $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2$ لکھا جا سکتا ہے؟۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ آپس میں عمودی سمتیات ہیں۔ اب $\boldsymbol{D}=5\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C}$ لیں۔

ا. اگر $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ اکائی سمتیات ہوں تب $\boldsymbol{D}$ کی مقدار $|\boldsymbol{D}|$ تلاش کریں۔

ب. اگر $|\boldsymbol{A}|=2$ ، $|\boldsymbol{B}|=3$ اور $|\boldsymbol{C}|=4$ ہوں تب $|\boldsymbol{D}|$ کتنا ہو گا؟

جواب: (ا) $\sqrt{70}$ ، (ب) $\sqrt{568}$

سوال 36: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ آپس میں عمودی اکائی سمتیات ہیں۔ اگر $\boldsymbol{D}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}+\gamma\boldsymbol{C}$ ہو جہاں α ، β اور γ غیر سمتی ہیں تب دکھائیں کہ $\alpha=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}$ ، $\beta=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}$ اور $\gamma=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}$ ہوں گے۔

کام

سوال 37: قوت $\boldsymbol{F}=5\boldsymbol{k}$ (مقدار 5 نیوٹن) سیدھی لکیر پر مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک ایک جسم کو منتقل کرتا ہے (فاصلہ میٹر میں ہے)۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟
جواب: $5\,\mathrm{J}$

سوال 38: ایک ریل گاڑی کا انجن 6000 ٹن کمیت کی ریل گاڑی کو $602\,148\,\mathrm{N}$ قوت سے کھینچ سکتا ہے۔ ایک افقی سیدھی پٹڑی پر 605 کلو میٹر فاصلہ طے کر کے یہ انجن کتنا کام کرتا ہے؟

سوال 39: ایک بوجھ کو $20\,\mathrm{m}$ لمبی ڈھلوان پر $200\,\mathrm{N}$ قوت کھینچتی ہے۔افقی سطح کے ساتھ یہ قوت $30°$ کا زاویہ بناتی ہے۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟
جواب: $3464.10\,\mathrm{J}$

سوال 40: ایک کشتی کے بادبان پر ہوا $2000\,\mathrm{N}$ قوت لگاتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ قوت کا زاویہ $60°$ ہے۔ ایک کلومیٹر فاصل طے کرنے میں یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

مستوی میں خط کی مساواتیں

سوال 41: دکھائیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ لکیر $ax + by = c$ کو عمودی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ اس لکیر کی ڈھلوان، اس سمتیہ کی ڈھلوان کے بالعکس متناسب کا نفی ہے۔

سوال 42: دکھائی کہ سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ لکیر $bx - ay = c$ کے متوازی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ لکیر کی ڈھلوان اور سمتیہ کی ڈھلوان ایک دوسرے جیسے ہیں۔

سوال 43 تا سوال 46 میں سوال 41 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر $\boldsymbol{v}$ کے عمودی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبدا پر اس عمودی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 43: $N(2,1), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$
جواب: $x + 2y = 4$ شکل 11.45

سوال 44: $N(-1,2), \quad \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 45: $N(-2,-7), \quad \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
جواب: $-2x + y = -3$ شکل 11.46

سوال 46: $N(11,10), \quad \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

سوال 47 تا سوال 50 میں سوال 42 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبدا پر اس متوازی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 47: $N(-2,1), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
جواب: $x + y = -1$ شکل 11.47

سوال 48: $N(0,-2), \quad \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال 49: $N(1,2), \quad \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$
جواب: $2x - y = 0$ شکل 11.48

سوال 50: $N(1,3), \quad \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$

مستوی میں خطوط کے بیچ زاویے

دو مستوی خط جن کے بیچ زاویہ حادہ جو قائمہ نہ ہو وہی ہو گا جو ان خطوط کے عمودی دو سمتیات کے بیچ یا ان خطوط کے متوازی دو سمتیات کے بیچ ہو گا۔اس حقیقت کے ساتھ سوال 41 یا سوال 42 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے سوال 51 تا سوال 54 میں خطوط کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال 51: $3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$
جواب: $\frac{\pi}{4}$

سوال 52: $y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

سوال 53: $\sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$
جواب: $\frac{\pi}{6}$

سوال 54: $x + \sqrt{3}y = 1, \quad (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8$

سوال 55 اور سوال 56 میں خطوط کے بیچ ایک ریڈیئن کے سواں حصہ تک زاویہ حادہ تلاش کریں۔

سوال 55: $3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$
جواب: 0.14

سوال 56: $12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$

قابل تفرق منحنیات کے بیچ زاویہ

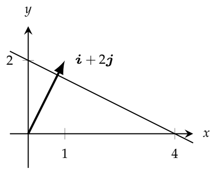
دو قابل تفرق منحنیات کے نقطہ تقاطع پر ان کے بیچ زاویہ سے مراد اس نقطہ پر منحنیات کے مماس کے بیچ زاویہ ہے۔ سوال 57 تا سوال 60 میں منحنیات کے بیچ زاویات دو نقاط تقاطع پر معلوم کریں۔ (آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔)

سوال 57: $y = \frac{3}{2} - x^2, \quad y = x^2$
جواب: $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ دونوں نقطوں پر۔

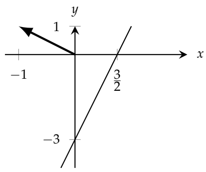
سوال 58: $x = \frac{3}{4} - y^2, \quad x = y^2 - \frac{3}{4}$

سوال 59: $y = x^3, \quad x = y^2$
جواب: نقطہ $(0,0)$ پر $\frac{\pi}{2}$؛ نقطہ $(1,1)$ پر $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{3\pi}{4}$

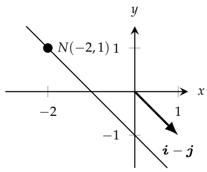
سوال 60: $y = -x^2, \quad y = \sqrt[3]{x}$



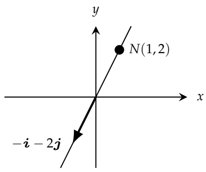
شکل 11.45



شکل 11.46



شکل 11.47



شکل 11.48

11.4 صلیبی ضرب

اس حصہ میں سمتیات کے ضرب کی دوسری قسم پر غور کیا جائے گا جس کو صلیبی ضرب کہتے ہیں۔ چونکہ صلیبی ضرب کا حاصل سمتی ہوتا ہے لہٰذا اس ضرب کو **سمتی ضرب**[23] بھی کہتے ہیں۔

برقیات، مقناطیسیات، صلیبی ضرب، حرکت سیال اور میکانیات مدار میں قوتوں کے اثرات پر غور میں صلیبی ضرب اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں صلیبی ضرب کے خواص پر غور کریں۔

دو سمتیات کا صلیبی ضرب

ہم خلا میں دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سے شروع کرتے ہیں۔ غیر متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سطح کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم **دائیں ہاتھ قاعدہ** سے اس سطح پر عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ منتخب کرتے ہیں۔ یوں سطح میں $\boldsymbol{A}$ سے $\boldsymbol{B}$ کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیاں، زاویہ θ موڑنے سے، انگوٹھا $\boldsymbol{n}$ کا رخ دے گا (شکل 11.49)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ $0 \le \theta \le \pi$ لیا جاتا ہے۔ ہم سمتی ضرب $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

تعریف:

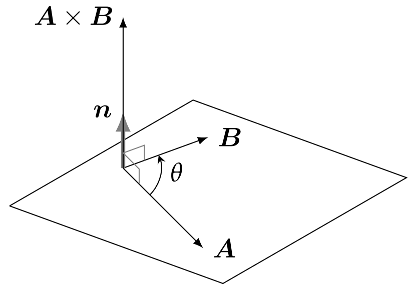
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta)\boldsymbol{n} \tag{11.27}$$

□

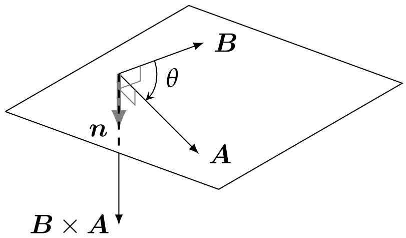
چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا غیر سمتی مضرب ہے لہٰذا یہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کو عمودی ہو گا۔ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب کو عموماً $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کا **صلیبی ضرب**[24] کہتے ہیں۔ صلیبی ضرب کو صلیب کے نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسی کی بنا یہ صلیبی ضرب کہلاتا ہے۔

---

[23] vector product
[24] cross product



شکل 11.49: صلیبی ضرب $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$



شکل 11.50: صلیبی ضرب $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

چونکہ 0 اور π کے سائن صفر ہوتے ہیں لہٰذا ہم مساوات 11.27 میں دو غیر صفر متوازی سمتیات کے صلیبی ضرب کی تعریف $\boldsymbol{0}$ لیں گے۔

اگر $\boldsymbol{A}$ یا $\boldsymbol{B}$ صفر ہو تب ہم $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کی قیمت صفر لیں گے۔ یوں دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ متوازی ہوں یا ان میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ اس طرح غیر صفر سمتیات کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب یہ متوازی ہوں۔

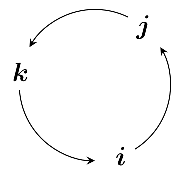
$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ بالمقابل $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

غیر صفر سمتی ضرب میں سمتیات کی ترتیب بدلنے سے حاصل ضرب کی سمت الٹ ہوتی ہے۔ اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{B}$ سے $\boldsymbol{A}$ کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیوں کو، زاویہ θ موڑیں، تب ہمارا انگوٹھا پہلے رخ کا مخالف رخ دے گا (یہاں پہلے رخ سے مراد $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کے حصول میں انگوٹھے کا رخ ہے)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ $0 \le \theta \le \pi$ لیا جاتا ہے۔ شکل 11.50 میں ان نتائج کو دکھایا گیا ہے۔ یوں تمام سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{11.28}$$

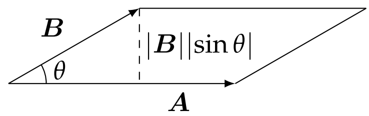
ضرب نقطہ کے برعکس صلیبی ضرب **ناقابل تبادل**[25] ہے۔

صلیبی ضرب کی تعریف $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی جوڑیوں پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جنہیں دکھائے گئے دائرے سے با آسانی یاد رکھا جا سکتا ہے۔



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} &= -(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} &= -(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} \\
\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} &= -(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{j}
\end{aligned} \tag{11.29}$$

[25] non commutative



شکل 11.51: متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ ضرب قد کے برابر ہوتا ہے۔

اکائی سمتیات کے ہم صلیبی ضرب صفر ہوں گے:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} &= (|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} &= (|\boldsymbol{j}||\boldsymbol{j}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} &= (|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0 \end{aligned}$$

صلیبی ضرب $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ متوازی الاضلاع کا رقبہ ہو گا

چونکہ $\boldsymbol{n}$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کی مقدار

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\sin\theta||\boldsymbol{n}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{11.30}$$

ہو گی جو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جس کے ضلع $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ $|\boldsymbol{A}|$ جبکہ اس کا قد $|\boldsymbol{B}\sin\theta|$ ہے (شکل 11.51)۔

قوت مروڑ

نقطہ N پر چول کے ساتھ سلاخ کا ایک سر منسلک ہے جس کے دوسرے سے پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کرتی ہے۔ چول سے سلاخ کے دوسرے سر تک ہٹاو کو سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ظاہر کرتا ہے (شکل 11.52)۔ قوت مروڑ کی مقدار سے مراد ہم $\boldsymbol{r}$ کی لمبائی ضرب قوت کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{r}$ کو عمودی ہے، لیتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار کو

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار} = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

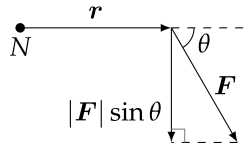
یا $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ قاعدہ سے حاصل اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ استعمال کرتے ہوئے قوت مروڑ سمتیہ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ} = (|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

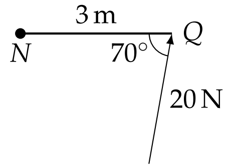
یاد رہے کہ (غیر صفر سمتیات کی صورت میں) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ تب $\boldsymbol{0}$ ہوتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ متوازی ہوں۔ قوت مروڑ کی تعریف عین اس حقیقت کے مطابق ہے۔ یوں اگر قوت عین سلاخ کے متوازی عمل کرے تب حاصل قوت مروڑ صفر ہو گا۔

مثال 11.26: قوت مروڑ کی مقدار شکل 11.53 میں درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \left|\vec{NQ}\times\boldsymbol{F}\right| &= \left|\vec{NQ}\right||\boldsymbol{F}|\sin 70^\circ && \text{11.30 مساوات}\\ &\approx (3)(20)(0.94)\\ &\approx 56.4\,\mathrm{N\,m} \end{aligned}$$



شکل 11.52: قوت مروڑ۔



شکل 11.53: قوت مروڑ (مثال 11.26)۔

□

قوانین تلازم اور تقسیم

صلیبی ضرب عام طور غیر تلازمی ہو گا چونکہ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے مستوی میں پایا جاتا ہے جبکہ $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ سمتیات $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے مستوی میں پایا جاتا ہے۔ اس کے باوجود درج ذیل قواعد مطمئن ہوتے ہیں۔

$$(r\boldsymbol{A})\times(s\boldsymbol{B})=(rs)(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \qquad \text{غیر سمتی قاعدہ تقسیم} \tag{11.31}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \qquad \text{سمتی قاعدہ تقسیم} \tag{11.32}$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A} \qquad \text{سمتی قاعدہ تقسیم} \tag{11.33}$$

مساوات 11.31 کی ایک مخصوص صورت درج ذیل ہے۔

$$(-\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times(-\boldsymbol{B})=-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{11.34}$$

غیر سمتی قاعدہ تقسیم ثابت کرنے کی خاطر مساوات 11.31 کے دونوں اطراف پر مساوات 11.27 عائد کر کے نتائج کا موازنہ کریں۔ سمتی قاعدہ تقسیم مساوات 11.32 کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس کی حقیقت کو یہاں تسلیم کرتے ہیں۔ اس کا ثبوت ضمیمہ ز میں پیش کیا گیا ہے۔ مساوات 11.33 کو مساوات 11.32 سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 11.32 کے دونوں اطراف کو -1 سے ضرب کر کے حاصل اجزاء کے مقام تبدیل کریں۔

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کا کلیہ بذریعہ مقطع

ہم $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کا حساب کارتیسی محددی نظام میں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سے کرنا چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

قواعد تقسیم اور $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کے قواعد ضرب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \times (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \\
&= a_1b_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + a_1b_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} \\
&\quad + a_2b_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + a_2b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + a_2b_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} \\
&\quad + a_3b_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + a_3b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + a_3b_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

مذکورہ بالا مساوات کا آخری حصہ قالب

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

کو کھول کر ملتا ہے۔

یوں اگر سمتیات $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{11.35}$$

مثال 11.27:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

□

مثال 11.28:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

$\square$

مثال 11.29:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\square$

مثال 11.30:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -5(1-3) - 3(2+4) + 1(6+4) = 10 - 18 + 10 = 2 \end{aligned}$$

$\square$

مثال 11.31: صلیبی ضرب $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ درج ذیل سمتیات کے لئے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

حل:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\ &= -2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} &= -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$\square$

مثال 11.32: ایک مستوی پر نقاط $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کو عمودی سمتیہ تلاش کریں۔

حل: سمتیات $\vec{PQ}$ اور $\vec{PR}$ اس سطح میں پائے جائیں گے۔ چونکہ سمتیہ $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ ان دونوں سمتیات کو عمودی ہے لہٰذا یہ مستوی کو بھی عمودی ہو گا۔ اجزاء کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\vec{PQ} &= (2-1)\boldsymbol{i} + (1+1)\boldsymbol{j} + (-1-0)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\
\vec{PR} &= (-1-1)\boldsymbol{i} + (1+1)\boldsymbol{j} + (2-0)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \\
\vec{PQ} \times \vec{PR} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\
&= 6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

□

مثال 11.33: ایک مثلث کے راس $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ ہیں۔ اس مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: سمتیات $\vec{PQ}$ اور $\vec{PR}$ جس متوازی الاضلاع کے ضلع ہوں اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left|\vec{PQ} \times \vec{PR}\right| &= |6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}| && \text{مثال 11.32} \\
&= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = 6\sqrt{2}
\end{aligned}$$

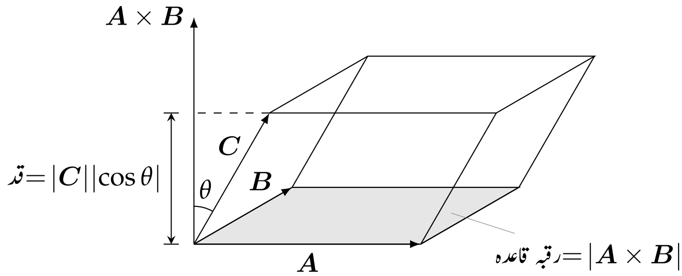
مثلث کا رقبہ اس کا نصف $3\sqrt{2}$ ہو گا۔ □

مثال 11.34: سطح $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ مستوی کو عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{n}$ کا رخ یہی سمتیہ دے گا۔ ہم اس سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کر کے عمودی اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{\left|\vec{PQ} \times \vec{PR}\right|} = \frac{6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$$

چونکہ سطح کے دو آپس میں مخالف رخ عمودی سمتیات پائے جاتے ہیں لہٰذا اس سطح کا دوسرا عمودی اکائی سمتیہ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$ ہو گا۔
□



شکل 11.54: مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ ضرب قد کے برابر ہو گا۔

غیر سمتی سہ ضرب

ضرب $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$ کو $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کا غیر سمتی سہ ضرب کہتے ہیں جہاں سمتیات کی ترتیب یہی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں (شکل 11.54) کہ غیر سمتی سہ ضرب کی مطلق قیمت

$$\left|(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\right| = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}||\cos\theta|$$

اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم دیتی ہے جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔ مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$ اور اس کے قد $|\boldsymbol{C}||\cos\theta|$ کا حاصل ضرب نقطہ

$$\begin{aligned} \text{حجم} &= (\text{رقبہ قاعدہ}) \cdot (\text{قد}) \\ &= |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{C}||\cos\theta| \\ &= \left|(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\right| \end{aligned}$$

ہو گا۔

سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی سطح کو شکل 11.54 میں قاعدہ دکھایا گیا ہے۔ ہم سمتیات $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کی سطح یا سمتیات $\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}$ کی سطح کو قاعدہ لے کر بھی حجم تلاش کر سکتے ہیں۔ چونکہ حجم اٹل قیمت ہے لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} \tag{11.36}$$

اب غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے لہٰذا مساوات 11.36 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \tag{11.37}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر سمتی سہ ضرب میں سمتیات کا مقام تبدیل کئے بغیر صلیبی ضرب اور نقطہ ضرب کے مقامات کو بدلا جا سکتا ہے۔

غیر سمتی سہ ضرب کی قیمت مقطع سے حاصل کی جا سکتی ہے:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}\cdot\Big[\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\Big]\\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{11.38}
$$

مثال 11.35: سمتیات $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{C}=7\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ ایک مستطیلی متوازی السطوح بناتے ہیں۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 3\\ 0 & 7 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3\\ 7 & -4\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0\\ 0 & 7\end{vmatrix}\\
&= -21-16+13=-23
\end{aligned}
$$

یوں حجم $\left|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right|=23$ ہو گا۔ □

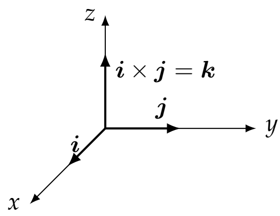
سوالات

حساب

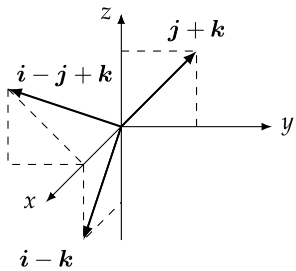
سوال 1 تا سوال 8 میں $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ (اگر معین ہو) کی لمبائیاں اور مقدار معلوم کریں۔

سوال 1: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$

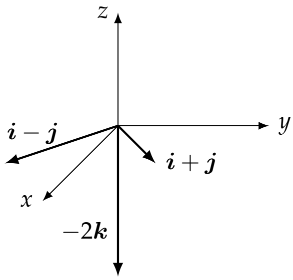
جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=3$ ، رخ $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$ ؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}|=3$ ، رخ $-\frac{2}{3}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$



شکل 11.55



شکل 11.56



شکل 11.57

سوال 2: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$

سوال 3: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$
جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=0$ ، کوئی رخ نہیں ہے؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}|=0$ کوئی رخ نہیں ہے۔

سوال 4: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

سوال 5: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{B}=-3\boldsymbol{j}$
جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=6$ ، رخ $-\boldsymbol{k}$ ؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}|=6$ ، رخ $\boldsymbol{k}$

سوال 6: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$

سوال 7: $\boldsymbol{A}=-8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=6\sqrt{5}$ ، رخ $\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$ ؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}|=6\sqrt{5}$ ، رخ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$

سوال 8: $\boldsymbol{A}=\frac{3}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 9 تا سوال 14 میں محددی محور کے مبدا پر $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ ترسیم کریں۔

سوال 9: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}$
جواب: شکل 11.55

سوال 10: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}$

سوال 11: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: شکل 11.56

سوال 12: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

سوال 13: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
جواب: شکل 11.57

سوال 14: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}$

سوال 15 تا سوال 18 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. اس مثلث کا رقبہ تلاش کریں جس کے راس نقاط P ، Q اور R ہوں۔

ب. سطح PQR کا ایک عمودی اکائی سمتیہ تلاش کریں۔

سوال 15: $P(1,-1,2), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$
جواب: (ا) $2\sqrt{6}$ ، (ب) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$

سوال 16: $P(1,1,1), \quad Q(2,1,3), \quad R(3,-1,1)$

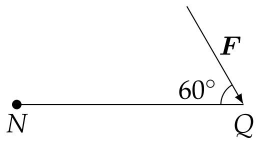
سوال 17: $P(2,-2,1), \quad Q(3,-1,2), \quad R(3,-1,1)$
جواب: (ا) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، (ب) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$

سوال 18: $P(-2,2,0), \quad Q(0,1,-1), \quad R(-1,2,-2)$

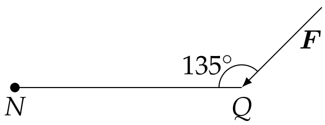
سوال 19: سمتیات $\boldsymbol{A} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{C} = -15\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ لیں۔ ان میں کون سے سمتیات (اگر ہوں) (ا) عمودی (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ا) نہیں (ب) $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$

سوال 20: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{D} = -\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i} - \pi\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$ لیں۔ کون سے سمتیات (اگر ہوں) (ا) عمودی اور (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 21 اور سوال 22 میں N پر $\boldsymbol{F}$ کا قوت مروڑ تلاش کریں جہاں $\left|\overrightarrow{NQ}\right| = 80\,\mathrm{cm}$ اور $\boldsymbol{F} = 30\,\mathrm{N}$ ہیں۔



شکل 11.58: خاکہ برائے سوال 21



شکل 11.59: خاکہ برائے سوال 22

سوال 21: خاکہ شکل 11.58 میں دیا گیا ہے۔
جواب: $4\sqrt{3}\,\mathrm{N\,m}$

سوال 22: خاکہ شکل 11.59 میں دیا گیا ہے۔

سوال 23 تا سوال 26 میں دکھائیں کہ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$ ہے۔ اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم تلاش کریں جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

سوال 23: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{k}$
جواب: 8

سوال 24: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال 25: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$
جواب: 7

سوال 26: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 27: درج ذیل میں کون سے حل صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$

ب. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|$

ج. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$

د. $\boldsymbol{A}\times(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

ھ. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$

و. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

ز. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}=0$

ح. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

جواب: (ا) درست، (ب) بعض اوقات درست، (ج) درست، (د) درست، (ہ) بعض اوقات درست، (و) درست ، (ز) درست ،(ح) درست

سوال 28: درج ذیل میں کون سے ہر صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$

ب. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$

ج. $(-\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

د. $(c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{B})=c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ جہاں c مستقل ہے۔

ھ. $c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times(c\boldsymbol{B})$ جہاں c مستقل ہے۔

و. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2$

ز. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{A}=0$

ح. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

سوال 29: سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

ا. $\boldsymbol{B}$ پر $\boldsymbol{A}$ کا سمتی تظلیل۔

ب. $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

ج. $\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

د. اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

جواب: (ا) $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}$، (ب) $\pm\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$، (ج) $\pm(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$، (د) $\left|(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\right|$

سوال 30: سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

ا. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ کو عمودی سمتیہ۔

ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

ج. ایک سمتیہ جس کی لمبائی $|\boldsymbol{A}|$ اور جو $\boldsymbol{B}$ کے رخ ہو۔

د. اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

سوال 31: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ سمتیات ہیں۔ درج ذیل میں کن کا معنی ہے اور کن کا کوئی معنی نہیں ہے؟

ا. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$

ب. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

ج. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

د. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

جواب: (ا) ہاں، (ب) نہیں، (ج) ہاں، (د) نہیں

سوال 32: دکھائیں کہ ماسوائے انحطاطی صورت $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے مستوی میں $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ پایا جائے گا جبکہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ پایا جائے گا۔ انحطاطی صورت کسے کہتے ہیں؟

سوال 33: صلیبی ضرب میں منسوخی
کیا $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ا) نہیں۔ ضروری نہیں کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ برابر ہوں۔ مثال کے طور پر $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\neq-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ ہے لیکن

$$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{i}\times(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$$

سوال 34: دوگنا منسوخی
کیا $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ ، $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

مستوی میں رقبہ

سوال 35 تا سوال 38 میں متوازی الاضلاع کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 35: $A(1,0), \quad B(0,1), \quad C(-1,0), \quad D(0,-1)$
جواب: 2

سوال 36: $A(0,0), \quad B(7,3), \quad C(9,8), \quad D(2,5)$

سوال 37: $A(-1,2), \quad B(2,0), \quad C(7,1), \quad D(4,3)$
جواب: 13

سوال 38: $A(-6,0), \quad B(1,-4), \quad C(3,1), \quad D(-4,5)$

سوال 39 تا سوال 42 میں مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 39: $A(0,0), \quad B(-2,3), \quad C(3,1)$
جواب: $\frac{11}{2}$

سوال 40: $A(-1,-1), \quad B(3,3), \quad C(2,1)$

سوال 41: $A(-5,3), \quad B(1,-2), \quad C(6,-2)$
جواب: $\frac{25}{2}$

سوال 42: $A(-6,0), \quad B(10,-5), \quad C(-2,4)$

سوال 43: مستوی xy میں ایک مثلث کے راس $(0,0)$ ، (a_1,a_2) اور (b_1,b_2) ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ معلوم کریں۔ اپنے کام کی وضاحت کریں۔

جواب: اگر $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ ہوں تب

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا مثلث کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر xy مستوی میں گھڑی کے الٹ رخ $\boldsymbol{A}$ سے $\boldsymbol{B}$ چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہو تب $(+)$ علامت جبکہ گھڑی کے رخ چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہونے کی صورت میں $(-)$ علامت استعمال ہو گی۔

سوال 44: ایک مثلث کے راس (a_1,a_2) ، (b_1,b_2) اور (c_1,c_2) ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ اخذ کریں۔

11.5 فضا میں خطوط اور مستوی

اس حصہ میں غیر سمتی ضرب اور سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے فضا میں خطوط، قطعات اور مستوی کے مساوات لکھنا سکھایا جائے گا۔

فضا میں خطوط اور قطعات

فرض کریں فضا میں نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا اور سمتیہ $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ کے متوازی ایک خط L ہے۔ تب L ان تمام نقطوں $N(x, y, z)$ کا سلسلہ ہو گا جن کے لئے $\overrightarrow{N_0N}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی ہو۔ یعنی L پر N صرف اور صرف اس صورت پایا جائے گا جب $\overrightarrow{N_0N}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا غیر سمتی مضرب ہو۔

سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا متوازی خط جو نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا ہو کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\overrightarrow{N_0N} = t\boldsymbol{v}, \quad -\infty < t < \infty \tag{11.39}$$

مساوات 11.39 کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر لکھتے ہوئے تین غیر سمتی مساوات حاصل ہوں گے جن میں مقدار معلوم t پایا جائے گا:

$$\begin{aligned} (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k} &= t(A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}) && \text{اتساع مساوات 11.39} \\ x - x_0 = tA, \quad y - y_0 = tB, \quad z - z_0 &= tC && \text{مطابقتی اجزاء} \end{aligned}$$

ان مساوات سے وقفہ $-\infty < t < \infty$ پر سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتے خط کی درج ذیل معیاری مقدار معلوم مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$x = x_0 + tA, \quad y = y_0 + tB, \quad z = z_0 + tC, \quad -\infty < t < \infty \tag{11.40}$$

مثال 11.36: سمتیہ $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ کے متوازی خط جو نقطہ $(-2, 0, 4)$ سے گزرتا ہو کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: دی گئی معلومات کو مساوات 11.40 میں پر کر کے خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x = -2 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 4 - 2t$$

□

مثال 11.37: نقطہ $N(-3, 2, -3)$ اور $Q(1, -1, 4)$ سے گزرتے ہوئے خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: ان نقطوں کے بیچ خط کا متوازی سمتیہ

$$\overrightarrow{NQ} = (1-(-3))\boldsymbol{i} + (-1-2)\boldsymbol{j} + (4-(-3))\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$$

ہے جس کو مساوات 11.40 میں $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$ کے ساتھ لیتے ہوئے مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t = 0$ پر $x = -3 + 4(0) = -3$ ، $y = 2 - 3(0) = 2$ اور $z = -3 + 7(0) = -3$ یعنی ابتدائی نقطہ $(-3, 2, -3)$ حاصل ہوتا ہے۔ہم نقطہ $Q(1, -1, 4)$ کو بھی ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے درج ذیل مساوات حاصل ہو گا۔

$$x = 1 + 4t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 4 + 7t$$

اب $t = 0$ پر $x = 1$ ، $y = -1$ اور $z = 4$ یعنی ابتدائی نقطہ $(1, -1, 4)$ حاصل ہوتا ہے۔درج بالا دونوں مساوات درست ہیں۔ ان کے ابتدائی نقطے مختلف ہیں۔ □

دو نقطوں کے بیچ خطی قطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کرنے کی خاطر ہم پہلے ان نقطوں کے بیچ خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم قطع کے آخری سروں پر t کی قیمتیں تلاش کر کے t کو ان قیمتوں کے بیچ بند وقفہ پر رہنے کا پابند بناتے ہیں۔ خط کی مساوات بشمول پابند وقفہ قطع کی مقدار معلوم مساوات ہو گی۔

مثال 11.38: نقطہ $N(-3, 2, -3)$ اور $Q(1, -1, 4)$ کے بیچ قطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے نقاط N اور Q سے گزرتے ہوئے خط کی مساوات تلاش کرنی ہو گی۔ ہم مثال 11.37 میں اس کو حاصل کر چکے ہیں:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t \tag{11.41}$$

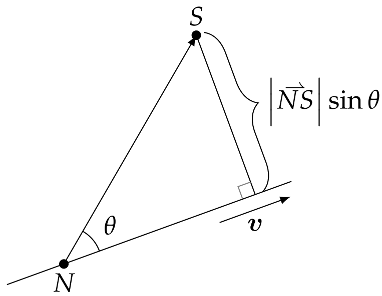
درج ذیل نقطہ $t = 0$ پر نقطہ $N(-3, 2, -3)$ اور $t = 1$ پر نقطہ $Q(1, -1, 4)$ دیتا ہے۔

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

مساوات 11.41 بشمول $0 \le t \le 1$ کی پابندی قطع کی مقدار معلوم مساوات ہو گی:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t, \quad 0 \le t \le 1$$

□



شکل 11.60: نقطہ S سے سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ۔

فضا میں ایک نقطہ سے ایک خط تک فاصلہ

نقطہ S سے سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ d جاننے کی خاطر ہم اس خط کے عمودی قطع $\overrightarrow{NS}$ کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔ شکل 11.60 سے واضح ہے کہ یہ لمبائی $\left|\overrightarrow{NS}\right| \sin\theta$ یعنی $\frac{\left|\overrightarrow{NS}\times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}$ ہو گی۔

لکیر سے نقطے کا فاصلہ
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|} \tag{11.42}$$

مثال 11.39: نقطہ $S(1,1,5)$ سے درج ذیل لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

$$L: \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2t$$

حل: ہم $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کے متوازی لکیر L جو $N(1,3,0)$ سے گزرتی ہو کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اب

$$\overrightarrow{NS} = (1-1)\boldsymbol{i} + (1-3)\boldsymbol{j} + (5-0)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

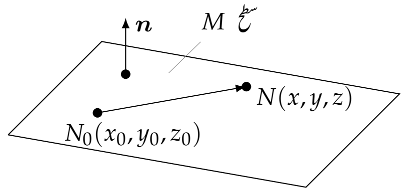
اور

$$\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

لیتے ہوئے مساوات 11.42 درج ذیل فاصلہ دیتی ہے۔

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\sqrt{1+25+4}}{1+1+4} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

□



شکل 11.61: سطح میں نقاط N_0 اور N کے بیچ سمتی قطع اور سطح کا قائمہ سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

فضا میں مستوی کی مساوات

فرض کریں سطح M نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا ہے اور اس سطح کو سمتیہ $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ قائمہ ہے۔ تب ان تمام نقطوں $N(x, y, z)$ کا سلسلہ، جن کے لئے $\overrightarrow{N_0N}$ اور $\boldsymbol{n}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں، M ہو گا (شکل 11.61)۔ یعنی N صرف اور صرف اس صورت M پر واقع ہو گا جب $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{N_0N} = 0$ ہو۔ یہ مساوات

$$(A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}) \cdot [(x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}] = 0$$

یا

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

کے مترادف ہے۔

نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا ہوا اور $\boldsymbol{n}$ کو عمودی سطح کی مساوات

سمتی مساوات
$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{N_0N} = 0 \tag{11.43}$$

اجزائی مساوات
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{11.44}$$

مثال 11.40: نقطہ $N(-3, 0, 7)$ سے گزرتا سطح جو $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کو عمودی ہو کی مساوات تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} 5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) &= 0 && \text{مساوات 11.43} \\ 5x + 15 + 2y - z + 7 &= 0 \\ 5x + 2y - z &= -22 \end{aligned}$$

□

آپ مثال 11.40 میں دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے عددی سر مساوات $5x + 2y - z = -22$ میں x، y اور z کے عددی سر کی طور پر ابھرتے ہیں۔ ایسا واقعاتی طور پر نہیں ہوا بلکہ مساوات 11.44 کو $Ax + By + Cz = D$ لکھنا ممکن ہے جہاں $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ ہو گا۔ یوں

$$A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} \quad \text{اور} \quad Ax + By + Cz = D$$

ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

مثال 11.41: تین نقطے سطح تعین کرتے ہیں
نقاط $A(0,0,1)$، $B(2,0,0)$ اور $C(0,3,0)$ سے گزرتے ہوئے مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم ان نقاط کو استعمال کرتے ہوئے سطح کا عمودی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

ہم اس عمودی سمتیہ کے اجزاء اور (سطح پر کسی بھی) نقطہ $(0,0,1)$ کو مساوات 11.44 میں پر کر کے مستوی کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3(x-0) + 2(y-0) + 6(z-1) &= 0 \\ 3x + 2y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

□

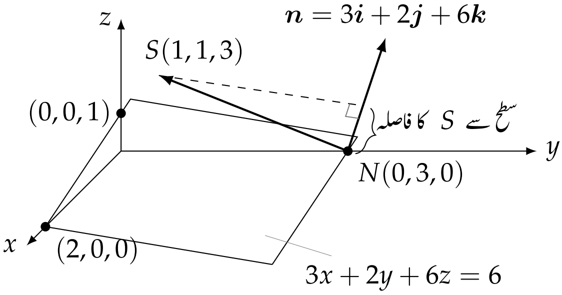
مثال 11.42: سطح اور لکیر کی انقطاع
وہ نقطہ دریافت کریں جہاں خط

$$x = \frac{8}{3} + 2t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + t$$

مستوی $3x + 2y + 6z = 6$ کو قطع کرتا ہو۔

حل: نقطہ

$$\left(\frac{8}{3} + 2t, -2t, 1 + t\right)$$



شکل 11.62: نقطہ S سے سطح تک فاصلہ $\overrightarrow{NS}$ کی $\boldsymbol{n}$ پر سمتیہ تظلیل کی لمبائی کے برابر ہو گا۔

اس سطح میں پایا جاتا ہے جو مستوی کی (درج ذیل) مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\begin{aligned}
3\Big(\frac{8}{3} + 2t\Big) + 2(-2t) + 6(1+t) &= 6\\
8 + 6t - 4t + 6 + 6t &= 6\\
8t &= -8\\
t &= -1
\end{aligned}$$

نقطہ تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$(x,y,z)|_{t=-1} = \Big(\frac{8}{3} - 2, 2, 1-1\Big) = \Big(\frac{2}{3}, 2, 0\Big)$$

□

مثال 11.43: نقطہ سے مستوی تک فاصلہ
نقطہ $S(1,1,3)$ سے سطح $3x + 2y + 6z = 6$ تک فاصلہ کتنا ہے؟

حل: ہم مستوی میں نقطہ N تلاش کر کے سمتیہ $\overrightarrow{NS}$ کا $\boldsymbol{n}$ پر تظلیل معلوم کر کے فاصلہ حاصل کرتے ہیں (شکل 11.62)۔

مساوات $3x + 2y + 6z = 6$ کے سددی سروں سے درج ذیل عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

مستوی کی مساوات سے مستوی میں نقاط حاصل کرتے ہیں۔ ان میں محوری قطعات معلوم کرنا بہت آسان ہوتا ہے۔ اگر ہم قطع y کو N لیں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NS} &= (1-0)\boldsymbol{i} + (1-3)\boldsymbol{j} + (3-0)\boldsymbol{k}\\
&= \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}\\
|\boldsymbol{n}| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7
\end{aligned}$$

نقطہ S سے سطح تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
d &= \left|\vec{NS} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right| \\
&= \left|(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{2}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)\right| \\
&= \left|\frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{18}{7}\right| = \frac{17}{7}
\end{aligned}
$$

□

سطحوں کے بیچ زاویات؛ خطوط تقاطع

دو متقاطع سطحوں کے بیچ زاویہ سے مراد ان کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ حادہ ہے (شکل 11.63)۔

مثال 11.44: سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ کے بیچ زاویہ دریافت کریں۔

حل: ان سطحوں کے عمودی سمتیات درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{n}_1 = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

ان کے بیچ زاویہ درج ذیل ہو گا۔

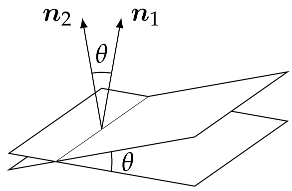
$$
\begin{aligned}
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n_1}|\boldsymbol{n}_2||}\right) && \text{مساوات } 11.17 \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) \\
&\approx 1.38 \text{ ریڈیئن}
\end{aligned}
$$

□

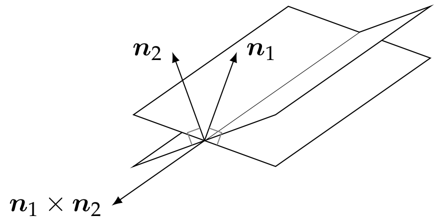
مثال 11.45: سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ کے خط تقاطع کی مساوات تلاش کریں۔

حل: سطحوں کے عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}_1$ ، $\boldsymbol{n}_2$ خط تقاطع کے عمودی ہوں گے لہٰذا خط تقاطع اور $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے (شکل 11.64)۔ اس کو دوسری نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ خط تقاطع کے متوازی ہو گا۔ موجودہ مثال میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$$



شکل 11.63: دو سطحوں کے بیچ زاویہ، ان سطحوں کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 11.64: سطحوں کا خط تقاطع کا سطحوں کے عمودی سمتیات کے ساتھ تعلق۔

سمتیہ $14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$ کا ہر غیر صفر غیر سمتی مضرب بھی درست جواب ہو گا۔ □

مثال 11.46: اس لکیر کی مساوات تلاش کریں جس پر سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

حل: ہم اس لکیر کے متوازی خط کی مساوات اور لکیر پر ایک نقطہ تلاش کر کے مساوات 11.40 استعمال کرتے ہیں۔

ہم مثال 11.45 میں خط تقاطع کا متوازی خط $\boldsymbol{v} = 14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$ تلاش کر چکے ہیں۔ خط پر نقطہ معلوم کرنے کی خاطر ہم دونوں سطحوں کا کوئی بھی مشترک نقطہ لے سکتے ہیں۔ یوں $z = 0$ لے کر دونوں سطحوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کر کے نقطہ $(3, -1, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔یوں خط تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$x = 3 + 14t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 15t$$

□

سوالات

خطوط اور خطی قطعات

سوال 1 تا سوال 12 میں خطوط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال 1: سمتیہ $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کا متوازی اور نقطہ $N(3, -4, -1)$ سے گزرتا خط۔

سوال 2: نقاط $N(1, 2, -1)$ اور $Q(-1, 0, 1)$ سے گزرتا خط۔

سوال 3: نقاط $N(-2, 0, 3)$ اور $Q(3, 5, -2)$ سے گزرتا خط۔

سوال 4: نقاط $N(1,2,0)$ اور $Q(1,1,-1)$ سے گزرتا خط۔

سوال 5: سمتیہ $2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کا متوازی اور مبدا سے گزرتا خط۔

سوال 6: نقطہ $N(3,-2,1)$ سے گزرتا اور لکیر $x=1+2t,\ y=2-t,\ z=3t$ کا متوازی خط۔

سوال 7: محور z کا متوازی لکیر $(1,1,1)$ کا متوازی خط۔

سوال 8: نقطہ $(2,4,5)$ سے گزرتا اور سطح $3x+7y-5z=21$ کا قائمہ خط۔

سوال 9: نقطہ $(0,-7,0)$ سے گزرتا اور سطح $x+2y+2z=13$ کا قائمہ خط۔

سوال 10: نقطہ (2,3,0) سے گزرتا خط جو سمتیات $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ کا قائمہ ہو۔

سوال 11: محور x

سوال 12: محور z

سوال 13 تا سوال 20 میں دیے گئے نقطوں کے بیچ قطعات کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ محددی محور کھینچ کر قطعات دکھائیں ۔ بڑھتے ہوئے t کے رخ کی نشاندہی کریں۔

سوال 13: $(0,0,0)$، $(1,1,3/2)$

سوال 14: $(0,0,0)$، $(1,0,0)$

سوال 15: $(1,0,0)$، $(1,1,0)$

سوال 16: $(1,1,0)$، $(1,1,1)$

سوال 17: $(0,1,1)$، $(0,-1,1)$

سوال 18: $(0,2,0)$، $(3,0,0)$

سوال 19: $(2,0,2)$، $(0,2,0)$

سوال 20: $(1,0,-1)$، $(0,3,0)$

سطحیں

سوال 21 تا سوال 28 میں سطحیں کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 21: نقطہ $N_0(0,2,-1)$ سے گزرتا سمتیہ $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کا عمودی سطح۔

سوال 22: نقطہ $(1,-1,3)$ سے گزرتا سمتیہ $3x + y + z = 7$ کا متوازی سطح۔

سوال 23: نقاط $(1,1,-1)$ ، $(2,0,2)$ اور $(0,-2,1)$ سے گزرتا سطح۔

سوال 24: نقاط $(2,4,5)$ ، $(1,5,7)$ اور $(-1,6,8)$ سے گزرتا سطح۔

سوال 25: نقطہ $N_0(2,4,5)$ سے گزرتا لکیر $x = 5 + t,\, y = 1 + 3t,\, z = 4t$ کا قائمہ سطح۔

سوال 26: نقطہ $A(1,-2,1)$ سے گزرتا ہوا سطح جو مبدا سے A تک سمتیہ کا قائمہ ہو۔

سوال 27: خطوط $x = 2t + 1,\, y = 3t + 2,\, z = 4t + 3$ اور $x = s + 2,\, y = 2s + 4,\, z = -4s - 1$ کا نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

سوال 28: خطوط $x = t,\, y = -t + 2,\, z = t + 1$ اور $x = 2s + 2,\, y = s + 3,\, z = 5s + 6$ کا نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

سوال 29 اور سوال 30 میں مقطع خطوط سطح تعین کرتے ہیں۔ اس سطح کو تلاش کریں۔

سوال 29:

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x = -1 + t,\, y = 2 + t,\, z = 1 - t,\, -\infty < t < \infty \\ L_2 &: \quad x = 1 - 4s,\, y = 1 + 2s,\, z = 2 - 2s,\, -\infty < s < \infty \end{aligned}$$

سوال 30:

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x = t,\, y = 3 - 3t,\, z = -2 - t,\, -\infty < t < \infty \\ L_2 &: \quad x = 1 + s,\, y = 4 + s,\, z = -1 + s,\, -\infty < s < \infty \end{aligned}$$

سوال 31: سطحیں $2x + y - z = 3,\ x + 2y + z = 2$ کے خط تقاطع کا قائمہ سطح جو نقطہ $N_0(2, 1, -1)$ سے گزرتا ہو تلاش کریں۔

سوال 32: سطح $4x - y + 2z = 7$ کا قائمہ اور نقاط $N_1(1, 2, 3)$ ، $N_2(3, 2, 1)$ سے گزرتا سطح تلاش کریں۔

فاصلہ

سوال 33 تا سوال 38 میں نقطہ اور لکیر کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔

سوال 33: $x = 4t,\ y = -2t,\ z = 2t \quad : (0, 0, 12)$

سوال 34: $x = 5 + 3t,\ y = 5 + 4t,\ z = -3 - 5t \quad : (0, 0, 0)$

سوال 35: $x = 2 + 2t,\ y = 1 + 6t,\ z = 3 \quad : (2, 1, 3)$

سوال 36: $x = 2t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2t \quad : (2, 1, -1)$

سوال 37: $x = 4 - t,\ y = 3 + 2t,\ z = -5 + 3t \quad : (3, -1, 4)$

سوال 38: $x = 10 + 4t,\ y = -3,\ z = 4t \quad : (-1, 4, 3)$

سوال 39 تا سوال 44 میں نقطہ سے لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

سوال 39: $x + 2y + 2z = 13, \quad (2, -3, 4)$

سوال 40: $3x + 2y + 6z = 6, \quad (0, 0, 0)$

سوال 41: $4y + 3z = -12, \quad (0, 1, 1)$

سوال 42: $2x + y + 2z = 4, \quad (2, 2, 3)$

سوال 43: $2x + y + 2z = 4, \quad (0, -1, 0)$

سوال 44: $-4x + y + z = 4, \quad (1, 0, -1)$

سوال 45: سطح $x + 2y + 6z = 1$ سے سطح $x + 2y + 6z = 10$ تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 46: لکیر $x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$ سے سطح $x + 2y + 6z = 10$ تک فاصلہ معلوم کریں۔

زاویات

سوال 47 اور ا سوال 48 میں سطحوں کے بیچ زاویات تلاش کریں۔ آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

سوال 47: $x + y = 1, \quad 2x + y - 2z = 2$

سوال 48: $5x + y - z = 10, \quad x - 2y + 3z = -1$

سوال 49 تا سوال 52 میں سطحوں کے بیچ زاویہ حادہ کو کیلکولیٹر کی مدد سے تلاش کریں۔ جواب ایک ریڈیئن کے سواں حصہ تک درست ہو۔

سوال 49: $2x + 2y + 2z = 3, \quad 2x - 2y - z = 5$

سوال 50: $x + y + z = 1, \quad z = 0$

سوال 51: $2x + 2y - z = 3, \quad x + 2y + z = 2$

سوال 52: $4y + 3z = -12, \quad 3x + 2y + 6z = 6$

مقطع خطوط اور سطحیں

سوال 53 تا سوال 56 میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں دی گئی لکیر سطح کو مس کرتی ہے۔

سوال 53: $x = 1 - t,\ y = 3t,\ z = 1 + t; \quad 2x - y + 3z = 6$

سوال 54: $x = 2,\ y = 3 + 2t,\ z = -2 - 2t; \quad 6x + 3y - 4z = -12$

سوال 55: $x = 1 + 2t,\ y = 1 + 5t,\ z = 3t; \quad x + y + z = 2$

سوال 56: $x = -1 + 3t,\ y = -2,\ z = 5t; \quad 2x - 3z = 7$

سوال 57 تا سوال 60 میں سطحوں کے خط تقاطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

سوال 57: $x + y + z = 1, \quad x + y = 2$

سوال 58: $3x - 6y - 2z = 3, \quad 2x + y - 2z = 2$

سوال 59: $x - 2y + 4z = 2, \quad x + y - 2z = 5$

سوال 60: $5x - 2y = 11, \quad 4y - 5z = -17$

فضا میں دو ہمسطحی خطوط متوازی ہوں گے، یا ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔ غیر ہمسطحی خطوط ایک دوسرے کے غیر متوازی ہوں گے اور یہ ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔ سوال 61 اور سوال 62 میں تین لکیریں دی گئی ہیں۔ ایک وقت میں دو خطوط لیتے ہوئے دیکھیں آیا یہ متوازی ہیں، ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں یا یہ غیر ہمسطحی ہیں؟

سوال 61:

$$\begin{aligned}
L_1: &\quad x = 3 + 2t,\ y = -1 + 4t,\ z = 2 - t,\ -\infty < t < \infty \\
L_2: &\quad x = 1 + 4s,\ y = 1 + 2s,\ z = -3 + 4s,\ -\infty < s < \infty \\
L_3: &\quad x = 3 + 2r,\ y = 2 + r,\ z = -2 + 2r,\ -\infty < r < \infty
\end{aligned}$$

سوال 62:

$$\begin{aligned}
L_1: &\quad x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t,\ -\infty < t < \infty \\
L_2: &\quad x = 2 - s,\ y = 3s,\ z = 1 + s,\ -\infty < s < \infty \\
L_3: &\quad x = 5 + 2r,\ y = 1 - r,\ z = 8 + 3r,\ -\infty < r < \infty
\end{aligned}$$

نظریہ اور مثالیں

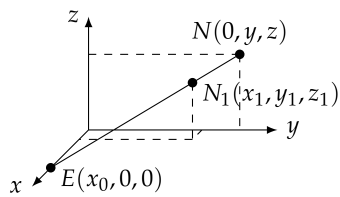
سوال 63: نقطہ $N_1(2,-4,7)$ سے گزرتا خط جو $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کے متوازی ہو کی مقدار معلوم مساوات کو مساوات 11.40 کی مدد سے دریافت کریں۔اس کے بعد نقطہ $N_2(3,-2,0)$ اور سمتیہ $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} - \frac{3}{2}\boldsymbol{k}$ استعمال کرتے ہوئے اس کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

سوال 64: نقطہ $N_1(4,1,5)$ سے گزرتی $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کی قائمہ سطح کی مساوات کو مساوات 11.44 کی مدد سے حاصل کریں۔ اب نقطہ $N_2(3,-2,0)$ اور عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}_2 = -\sqrt{2}\boldsymbol{i} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{j} - \sqrt{2}\boldsymbol{k}$ استعمال کرتے ہوئے اس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 65: وہ نقاط تلاش کریں جن پر لکیر $x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$ محوری مستوی کو مس کرتی ہو۔ جواب تک پہنچنے کے لئے اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال 66: سطح $z = 3$ میں اس خط کی مساوات تلاش کریں جو $\boldsymbol{i}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن اور $\boldsymbol{i}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{3}$ ریڈیئن زاویہ بناتا ہو۔ اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال 67: کیا خط $x = 1 - 2t,\ y = 2 + 5t,\ z = -3t$ سطح $2x + y - z = 8$ کا متوازی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل 11.65: تظلیل (سوال 73)

سوال 68: آپ کس طرح بتا سکتے ہیں کہ سطح $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ اور سطح $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ ایک دوسرے کے متوازی یا قائمہ ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 69: دو سطحوں کا خط تقاطع $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + 2t$ ہے۔ ان سطحوں کی مساوات تلاش کریں۔ مساوات کی صورت $Ax + By + Cz = D$ ہو۔

سوال 70: وہ سطح دریافت کریں جس مبدا سے گزرتا ہو اور سطح $2x + 3y + z = 12$ کا قائمہ ہو۔ آپ کیسے جانتے ہیں کہ یہ سطحیں ایک دوسرے کے قائمہ ہیں؟

سوال 71: غیر صفر اعداد a ، b اور c کے لئے $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ کی ترسیم ایک سطح ہو گی۔ کن سطحوں کی مساوات ایسی ہو گی؟

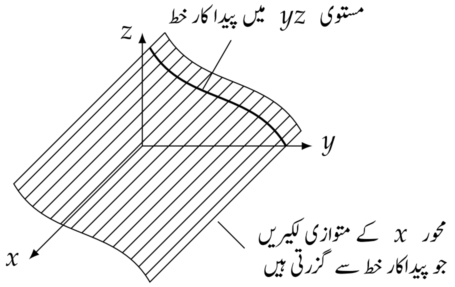
سوال 72: فرض کریں L_1 اور L_2 غیر تقاطع، غیر متوازی خطوط ہیں۔ کیا کوئی غیر صفر سمتیہ ان دونوں کا قائمہ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 73: کمپیوٹر تصویر کشی
ہم تین بعدی اجسام کو عموماً ایک مستوی پر ظاہر کرتے ہیں۔ فرض کریں آپ کی آنکھ $E(x_0, 0, 0)$ پر ہے اور ہم نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ کو مستوی yz پر ظاہر کرنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم E سے N_1 تک شعاع استعمال کرتے ہوئے N_1 کی تظلیل مستوی پر بناتے ہیں۔ یوں مستوی ہر N_1 بطور $N(0, y, z)$ نظر آئے گا۔ ہمیں بطور ترسیمی تخلیق کار معلوم E اور N_1 سے y اور z حاصل کرنا ہے (شکل 11.65)۔

ا. $\vec{EN}$ اور $\vec{EN_1}$ کے تعلق کی سمتی مساوات لکھیں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے y اور z کو x_0 ، x_1 ، y_1 اور z_1 کی صورت میں لکھیں۔

ب. جزو-ا میں حاصل نتائج کو پرکھنے کی خاطر $x_1 = 0$ اور $x_1 = x_0$ پر y اور z کا رویہ دیکھیں اور $x_0 \to \infty$ کرتے ہوئے دیکھیں کیا ہوتا ہے۔



شکل 11.66: پیداکار خط اور نلکی

سوال 74: کمپیوٹر تصویر کشی کے ایک مسئلہ پر غور کرتے ہیں۔ آپ کی آنکھ $(4,0,0)$ پر ہے۔ آپ مثلث چادر کو دیکھ رہے ہیں جس کے راس $(1,0,1)$ ، $(1,1,0)$ اور $(-2,2,2)$ ہیں۔ نقطہ $(1,0,0)$ سے $(0,2,2)$ تک قطع اس چادر کو چھیر کر گزرتا ہے۔ اس قطع کا کون سا حصہ نظر سے اوجھل ہو گا؟

11.6 نلکی اور مربع سطحیں

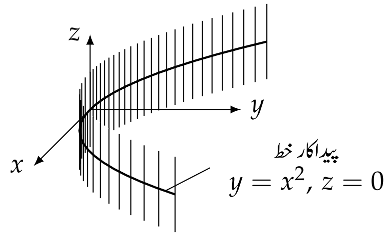
واحد متغیر کے تفاعل کی احصاء میں ہم نے خطوط سے شروع کیا اور خطوط کے بارے میں اپنا علم استعمال کرتے ہوئے مستوی قوسین کا مطالعہ کیا۔ ہم نے مماس پر غور کیا اور دیکھا کہ کسی بھی قابل تفرق منحنی کے چھوٹے حصہ کو خطی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خاص اہمیت کے حامل منحنیات میں مخروطی قطعات، اور دو درجی منحنیات شامل ہیں جنہیں متغیر x اور y کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل کی احصاء کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اسی طرح کی راہ پر چلتے ہیں۔ ہم دو بعدی سطح سے شروع کر کے اس سطح کے بارے میں اپنا علم استعمال کر کر فضا میں تین بعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔ خاص اہمیت کے حامل سطحوں میں نلکیاں اور دو درجی سطحیں شامل ہیں جنہیں x ، y ، z کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں دو بعدی سطحوں پر غور کیا گیا۔ اس حصہ میں ہم تین بعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔

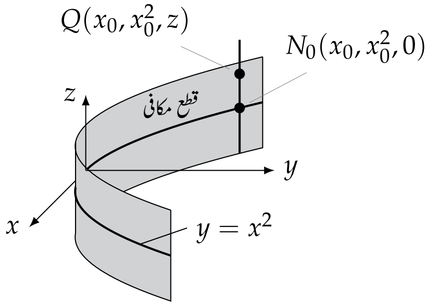
نلکی

نلکی[26] سے مراد وہ سطح ہے جو (ا) ان تمام لکیروں پر مشتمل ہو جو فضا میں کسی دی گئی لکیر کے متوازی ہوں اور (ب) جو دی گئی مستوی منحنی سے گزرتی ہوں۔ اس منحنی کو نلکی کی **پیداکار منحنی**[27] کہتے ہیں (شکل 11.66)۔ ٹھوس جیومیٹری میں جہاں نلکی سے مراد دائری نلکی ہوتی ہے،

[26] cylinder
[27] generating curve



(ا) مستوی xy میں قطع مکافی $y = x^2$ سے گزرتے خط جو محور z کے متوازی ہیں۔



(ب) نلکی پر ہر نقطہ کے محدد (x_0, x_0^2, z) طرز کے ہیں لہٰذا ہم اس کو نلکی $y = x^2$ کہتے ہیں۔

شکل 11.67: اشکال برائے مثال 11.47

پیداکار منحنی ایک دائرہ ہو گی، لیکن یہاں ہم کسی بھی قسم کی پیداکار منحنی کی اجازت دیں گے۔ ہماری (درج ذیل) پہلی مثال میں نلکی کو قطع مکافی پیدا کرتا ہے۔

نلکی یا دیگر تین بعدی سطحوں کو ترسیم کرتے ہوئے یا قلم و کاغذ سے ان کا خاکہ بناتے ہوئے ان سطحوں کا محددی سطحوں کے متوازی سطحوں کے ساتھ خط تقاطع کو دیکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ ان منحنیات کو **عمودی تراش**[28] کہتے ہیں۔

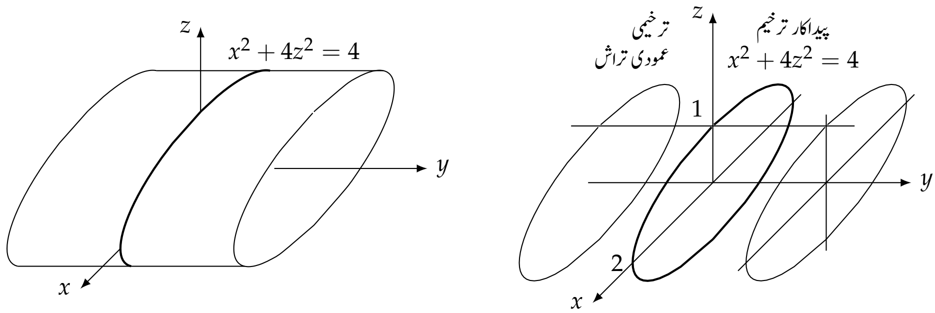
مثال 11.47: قطع مکافی نلکی $y = x^2$
محور z کے متوازی لکیروں سے حاصل اس نلکی کی مساوات تلاش کریں جو قطع مکافی $y = x^2,\ z = 0$ سے گزرتی ہیں (شکل 11.67-ا)۔

حل: فرض کریں مستوی xy میں قطع مکافی $y = x^2$ پر نقطہ $N_0(x_0, x_0^2, 0)$ پایا جاتا ہو۔ تب کسی بھی z کے لئے چونکہ نقطہ $Q(x_0, x_0^2, z)$ محور z کے متوازی لکیر $x = x_0,\ y = x_0^2$، جو نقطہ N_0 سے گزرتی ہے، پر پایا جائے گا لہٰذا Q اس نلکی پر پایا جائے گا (شکل 11.67-ب)۔

اس طرح z کی قیمت سے قطع نظر اس سطح پر پائے جانے والے تمام نقاط مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کریں گے۔ یوں $y = x^2$ اس نلکی کی مساوات ہو گی۔ اس کی بنا ہم اس نلکی کو "نلکی $y = x^2$" کہتے ہیں۔ □

ہم مثال 11.47 سے دیکھ سکتے ہیں کہ مستوی xy میں کوئی بھی منحنی $f(x, y) = c$ محور z کے متوازی نلکی دے گی اور اس نلکی کی مساوات $f(x, y) = c$ ہو گی۔ مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ایک قائمہ نلکی بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر

[28] cross section



شکل 11.68: محور y کے متوازی لکیریں جو سطح xz میں پائی جاتی ہوں اور ترخیمی $x^2 + 4z^2 = 4$ سے گزرتی ہوں، ترخیمی نلکی $x^2 + 4z^2 = 4$ پیدا کرتی ہیں۔ محور y کے عمودی سطحیں اس نلکی سے ترخیمی عمودی تراش کاٹتی ہیں۔ یہ نلکی پوری محور y پر پائی جائے گی۔

مشتمل ہے جو مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ سے گزرتے ہیں۔ مساوات $x^2 + 4y^2 = 9$ ایک ترخیمی نلکی بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر مشتمل ہے جو مستوی xy میں ترخیم $x^2 + 4y^2 = 9$ سے گزرتے ہیں۔

اسی طرح مستوی xz میں کوئی بھی منحنی $g(x,z) = c$ محور y کے متوازی ایک نلکی دیتی ہے جس کی مساوات $g(x,z) = c$ ہو گی (شکل 11.68)۔ کوئی بھی مساوات $h(y,z) = c$ محور x کے متوازی نلکی دیتی ہے اور اس نلکی کی مساوات بھی $h(y,z) = c$ ہو گی (شکل 11.69)۔

تین کارتیسی محوروں میں سے کسی بھی دو محوروں پر مبنی مساوات ایک نلکی دیتی ہے جو تیسری کارتیسی محور کے متوازی ہو گی۔

مربع سطحیں

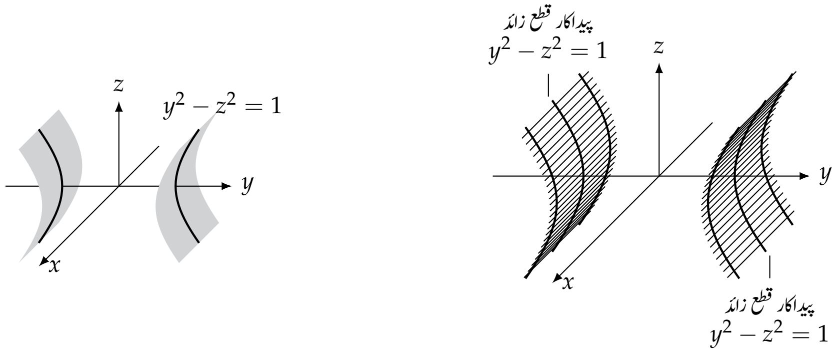
مربع سطح سے مراد فضا میں x ، y اور z کی دو درجی مساوات کی ترسیم ہے جس کی عمومی مساوات درج ذیل ہے

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

جہاں A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، J اور K مستقل ہیں۔ اس مساوات کی سادہ صورت، حصہ 10.3 میں دو بعدی صورت کی طرح، گھمانے اور منتقلی سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ مربع سطح کی مساوات میں ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے۔ ہم صرف سادہ مساوات پر غور کریں گے۔ اگرچہ نلکی کی تعریف یہ نہیں کہتی ہے البتہ اشکال مربع سطحوں کی بھی مثالیں ہیں۔ ہم اب ترخیمی سطحوں (جن میں کرہ شامل ہے)، قطع مکافی سطحوں، مخروطی سطحوں اور قطع زائد سطحوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 11.48: **ترخیمی سطح**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11.45}$$



شکل 11.69: محور x کے متوازی اور مستوی yz میں پائی جانے والی وہ لکیریں جو قطع زائد $y^2 - z^2 = 1$ سے گزرتی ہوں، قطع زائد نلکی $y^2 - z^2 = 1$ پیدا کرتی ہیں۔ محور x کے عمودی سطحیں اس سے قطع زائد کاٹتی ہیں۔

محددی محوروں کو $(\mp a, 0, 0)$ ، $(0, \mp b, 0)$ اور $(0, 0, \mp c)$ پر مس کرتا ہے (شکل 11.70)۔ یہ اس مستطیل ڈبہ $|x| \le a$ ، $|y| \le b$ ، $|z| \le c$ کے اندر پایا جاتا ہے۔ چونکہ اس سطح کی تعریفی مساوات میں متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے لہٰذا یہ سطح تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا۔

تینوں محددی سطحوں کا اس سطح کے ساتھ منحنی تقاطع، ترخیمات ہوں گی۔ مثال کے طور پر محددی مستوی $z = 0$ اس سطح کو درج ذیل ترخیم پر قطع کرتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad z = 0$$

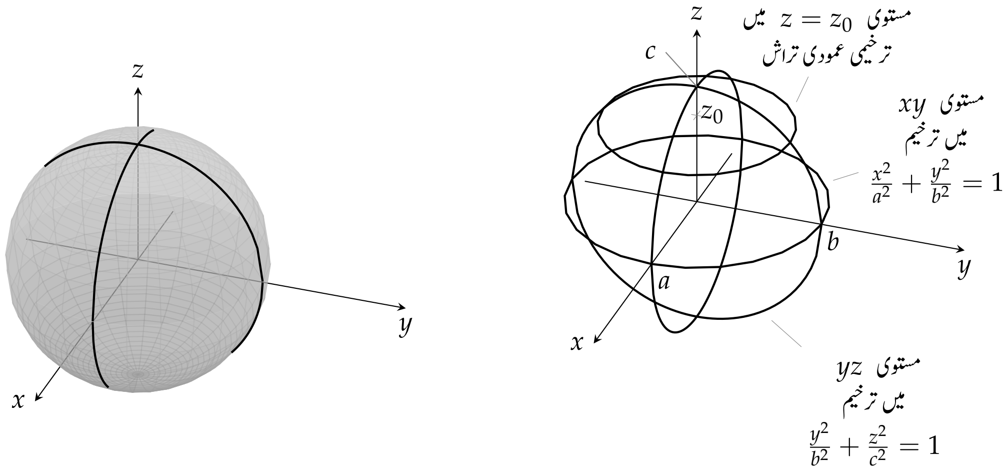
سطح $z = z_0, |z_0| < c$ اس سطح سے درج ذیل ترخیمی حصہ کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2(1 - z_0^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - z_0^2/c^2)} = 1$$

اگر نصف محور a ، b اور c میں کوئی دو ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ **ترخیمی سطح طواف** ہو گا۔ اگر تینوں ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ سطح کرہ ہو گا۔ □

فنیات فضا میں ذہنی تصویر کشی

فضا میں سطحوں کی تصویر کشی کمپیوٹر کی مدد سے کی جا سکتی ہے۔ یہ مختلف دو بعدی سطحوں میں لکیریں کھینچ سکتا ہے۔ کمپیوٹر اشکال کو فضا میں گھمانے کا نظارہ پیش کر سکتا ہے گویا آپ جسم کو ہاتھ میں گھما رہے ہوں۔ کمپیوٹر اس کا خیال رکھتا ہے کہ اجسام کا سامنے حصہ نظر آئے جب کے اس کا پچھلا حصہ آنکھوں سے اوجھل رہے۔ عمومی طور پر کمپیوٹر کو سطحوں کی مقدار معلوم مساوات درکار ہوں گی۔



شکل 11.70: ترخیمی سطح

مثال 11.49: سطح $x = 0$ اور سطح $y = 0$ کے لحاظ سے **ترخیمی قطع مکافی سطح**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \tag{11.46}$$

تشاکلی ہو گا (شکل 11.71)۔ صرف مبدا پر محوری تقاطع پایا جاتا ہے۔ مستقل c کی علامت تعین کرتی ہے کہ یہ مکمل سطح xy سے نیچے یا اس سے اوپر پایا جائے گا۔ محددی سطح اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x = 0: &\quad z = \frac{c}{b^2}y^2 \ \text{مکافی قطع} \\
y = 0: &\quad z = \frac{c}{a^2}x^2 \ \text{مکافی قطع} \\
z = 0: &\quad (0,0,0) \ \text{نقطہ}
\end{aligned} \tag{11.47}$$

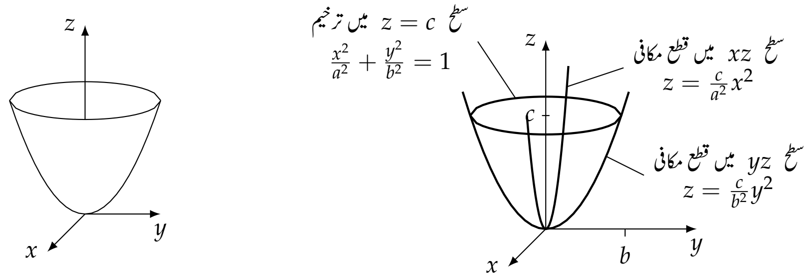
مستوی xy سے اوپر ہر سطح $z = z_0$ اسے درج ذیل ترخیم میں کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

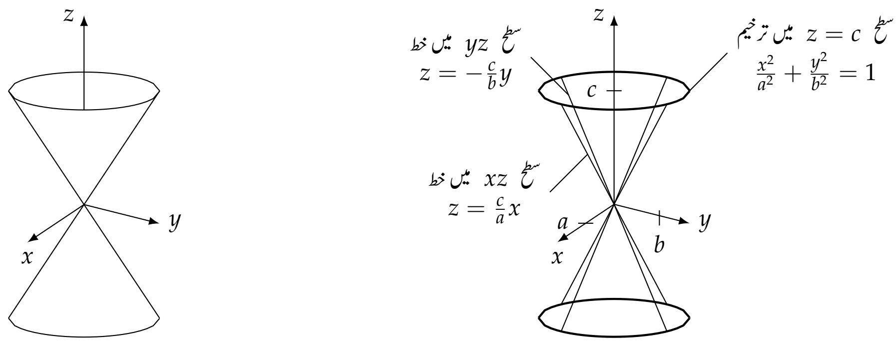
□

مثال 11.50: **دائری قطع مکافی سطح یا قطع مکافی سطح طواف**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a = b^2} = \frac{z}{c} \tag{11.48}$$



شکل 11.71: ترخیمی سطح (مثال 11.49)



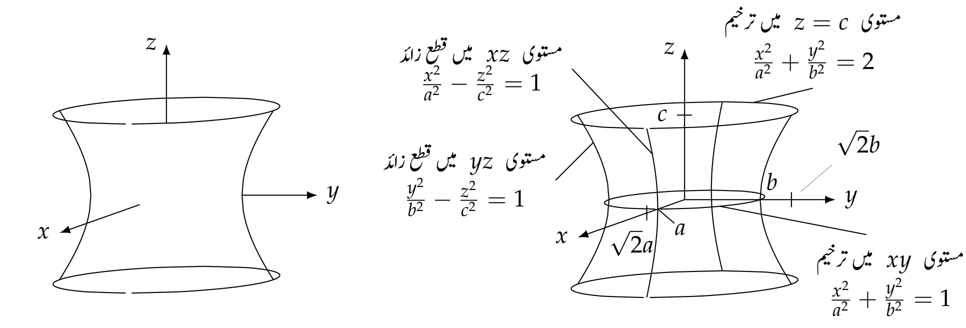
شکل 11.72: ترخیمی مخروط (مثال 11.51)

کو مساوات 11.46 میں $a = b$ پر کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ محور z کے عمودی سطحوں کی عمودی تراش سے دائرے حاصل ہوں گے جن کا مرکز محور z پر ہو گا۔ان سطحوں کی عمودی تراش جن میں محور z پایا جاتا ہو، مماثل قطع مکافی ہوں گی جن کا مشترک ماسکہ $(0,0,\frac{a^2}{4c})$ ہو گا۔

دائری قطع مکافی سطحوں سے حصے تراش کر بطور ریڈیو دور بین، مصنوعی سیارے کے تعاقب کار، اور خورد امواج ریڈیو کے اینٹینا استعمال کئے جاتے ہیں۔ □

مثال 11.51: **ترخیمی مخروط**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \tag{11.49}$$



شکل 11.73: یک چادری قطع زشائد سطح

تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل 11.72)۔ محددی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$x=0:\qquad z=\pm\frac{c}{b}y \quad \text{خط} \tag{11.50}$$

$$y=0:\qquad z=\pm\frac{c}{a}x \quad \text{خط} \tag{11.51}$$

$$z=0:\qquad (0,0,0) \quad \text{نقطہ}$$

مستوی xy سے اوپر اور اس سے نیچے سطحیں $z=z_0$، اس سے ترخیمات کاٹتے ہیں جن کے مراکز محور z پر اور راس مساوات 11.50 اور مساوات 11.51 میں دی گئی خطوط پر پائے جاتے ہیں۔

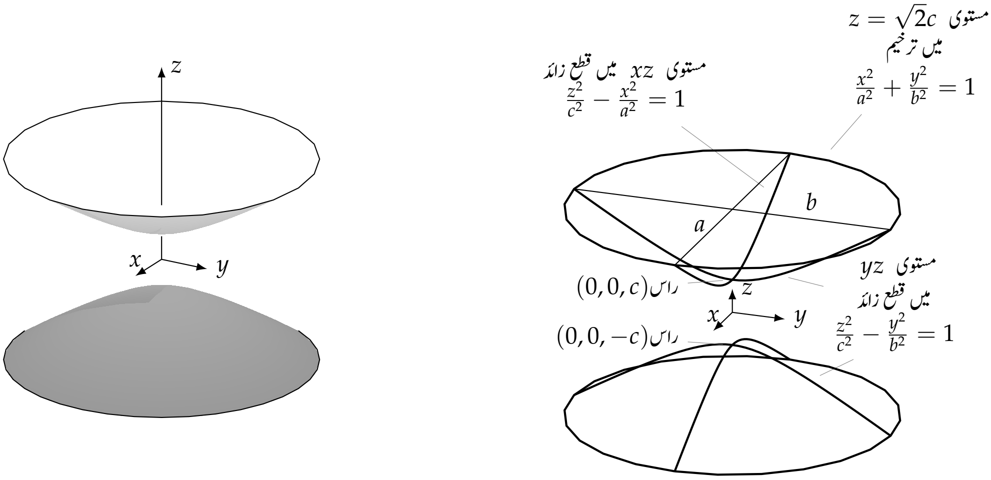
اگر $a=b$ ہو تب یہ مخروط ایک قائمہ دائری مخروط ہو گا۔ □

مثال 11.52: یک چادری قطع زائد سطح

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{11.52}$$

تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا (شکل 11.73)۔ محددی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x=0:&\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{قطع زائد}\\
y=0:&\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{قطع زائد}\\
z=0:&\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{قطع زائد}
\end{aligned} \tag{11.53}$$



شکل 11.74: دو چادری قطع مکافی

سطح $z=z_0$ اس کو ترخیم میں کاٹتا ہے جس کا مرکز محور z پر اور راسیں مساوات 11.53 میں دی گئی قطع مکافی میں سے ایک پر پائی جاتی ہیں۔

یہ پوری سطح آپس میں جڑی ہوئی ہے یعنی اس سطح پر چل کر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچا جا سکتا ہے۔ اسی لئے اس کو یک چادری قطع مکافی سطح کہتے ہیں۔ اگلی مثال میں دو چادر کی سطح پائی جاتی ہے۔

اگر $a=b$ ہو تب یہ قطع زائد سطح ایک سطح طواف ہو گا۔ □

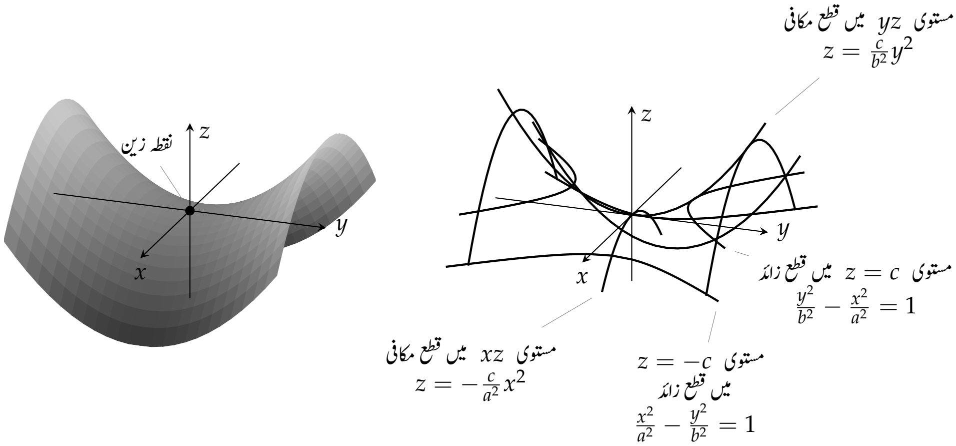
مثال 11.53: دو چادری قطع مکافی سطح

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{11.54}$$

تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل 11.74)۔ سطح $z=0$ اس کو قطع نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت ایک افقی سطح اس صورت اس کو قطع کرتا ہے جب $|z|\geq c$ ہو۔ قطع زائد حصوں

$$x=0:\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad\qquad y=0:\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

کے راس اور ماسکے محور z پر پائے جاتے ہیں۔ یہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہے۔ پہلا حصہ سطح $z=c$ سے اوپر اور دوسرا حصہ سطح $z=-c$ سے نیچے پایا جاتا ہے۔ اسی لئے اس کو دو چادری سطح کہتے ہیں۔



شکل 11.75: قطع زائد قطع مکافی سطح

مساوات 11.52 اور مساوات 11.54 میں منفی اجزاء کی تعداد ایک جیسی نہیں ہے۔ دونوں صورتوں میں منفی اجزاء کی تعداد اور چادروں کی تعداد ایک جیسی ہے۔ مساوات 11.52 یا مساوات 11.54 میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 پر کرنے سے ترخیمی مخروط کی مساوات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

حاصل ہوتی ہے (مساوات 11.49)۔ قطع زائد سطحیں اس مخروط کے متقارب ہیں۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mp 1$$

مستوی xy میں خط

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

کے متقارب ہیں۔ $\square$

مثال 11.54: قطع زائد قطع مکافی سطح

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad c > 0 \tag{11.55}$$

سطح $x = 0$ اور سطح $y = 0$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل 11.75)۔ قطع زائد قطع مکافی کی ان سطحوں کے ساتھ تقاطع درج ذیل ہوں گے۔

$$x = 0: \qquad z = \frac{c}{b^2}y^2 \text{ مکافی قطع} \tag{11.56}$$

$$y = 0: \qquad z = -\frac{c}{a^2}x^2 \text{ مکافی قطع} \tag{11.57}$$

سطح $x = 0$ میں قطع مکافی مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہے۔ سطح $y = 0$ میں قطع مکافی مبدا سے نیچے رخ کھلتا ہے۔

قطع زائد قطع مکافی کو $z = z_0 > 0$ سے کاٹنے سے قطع زائد

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}$$

حاصل ہو گا جس کا محور ماسکہ، محددی محور y کے متوازی ہو گا جبکہ اس کے راس مساوات 11.56 کی قطع مکافی پر ہوں گے۔ اگر z_0 منفی ہو تب محور ماسکہ، محددی محور x کے متوازی ہو گا اور راس مساوات 11.57 کی قطع مکافی پر ہو گا۔

مبدا کے قریب اس سطح کی صورت نقطہ ساکن کی طرح ہو گی۔ مستوی yz میں اس سطح پر چلتے ہوئے مبدا، کم سے کم نقطہ نظر آئے گا۔ مستوی xz میں اس سطح پر چلتے ہوئے مبدا، زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ نظر آئے گا۔ ایسے نقطہ کو سطح کا **کم زیادہ**[29] نقطہ یا **نقطہ زین**[30] کہتے ہیں۔ □

مائع آئینہ دور بین

دائری برتن میں مائع ڈال کر برتن کو عمودی محور کے گرد گھمانے سے سطح مائع افقی نہیں رہتا بلکہ یہ قطع مکافی سطح طواف کی صورت اختیار کرتا ہے جو بطور انعکاسی دور بین کے ابتدائی آئینہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ صدی کی ابتدا میں ایسا آئینہ استعمال کرتے ہوئے دور بین بنانے کی ناکام کوششیں کی گئیں۔ ناکامی کی وجہ مائع کی سطح پر نا ختم ہونے والی لہریں اور رفتار میں تبدیلی کی بنا ماسکہ کی تبدیلی تھی۔ آج کل ان مشکلات کو حل کرنا ممکن ہے اور گھومنے کی رفتار کو انتہا کی حد تک برقرار رکھا جا سکتا ہے۔

انہیں تصورات کو استعمال کرتے ہوئے مائع شیشہ کو ایک رفتار پر گھومتے ہوئے برتن میں آہستہ آہستہ ٹھنڈا ہونے دیا جاتا ہے حتیٰ کہ وہ ٹھوس ہو جائے۔ اس طرح بڑے سے بڑا آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔

---

[29] minimax
[30] saddle point

سوالات

سطحوں کی مساوات پہچانیے

سوال 1 تا سوال 12 میں سطحوں کی مساوات دی گئی ہیں۔ ان کے اشکال کو (ا) تا (ز) میں پہچانیے۔ سطح کی قسم (قطع مکافی سطح، قطع زائد سطح، وغیرہ) بھی پہچانیے۔

سوال 1: $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

سوال 2: $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$

سوال 3: $9y^2 + z^2 = 16$

سوال 4: $y^2 + z^2 = x^2$

سوال 5: $x = y^2 - z^2$

سوال 6: $x = -y^2 - z^2$

سوال 7: $x^2 + 2z^2 = 8$

سوال 8: $z^2 + x^2 - y^2 = 1$

سوال 9: $x = z^2 - y^2$

سوال 10: $z = -4x^2 - y^2$

سوال 11: $x^2 + 4z^2 = y^2$

سوال 12: $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$

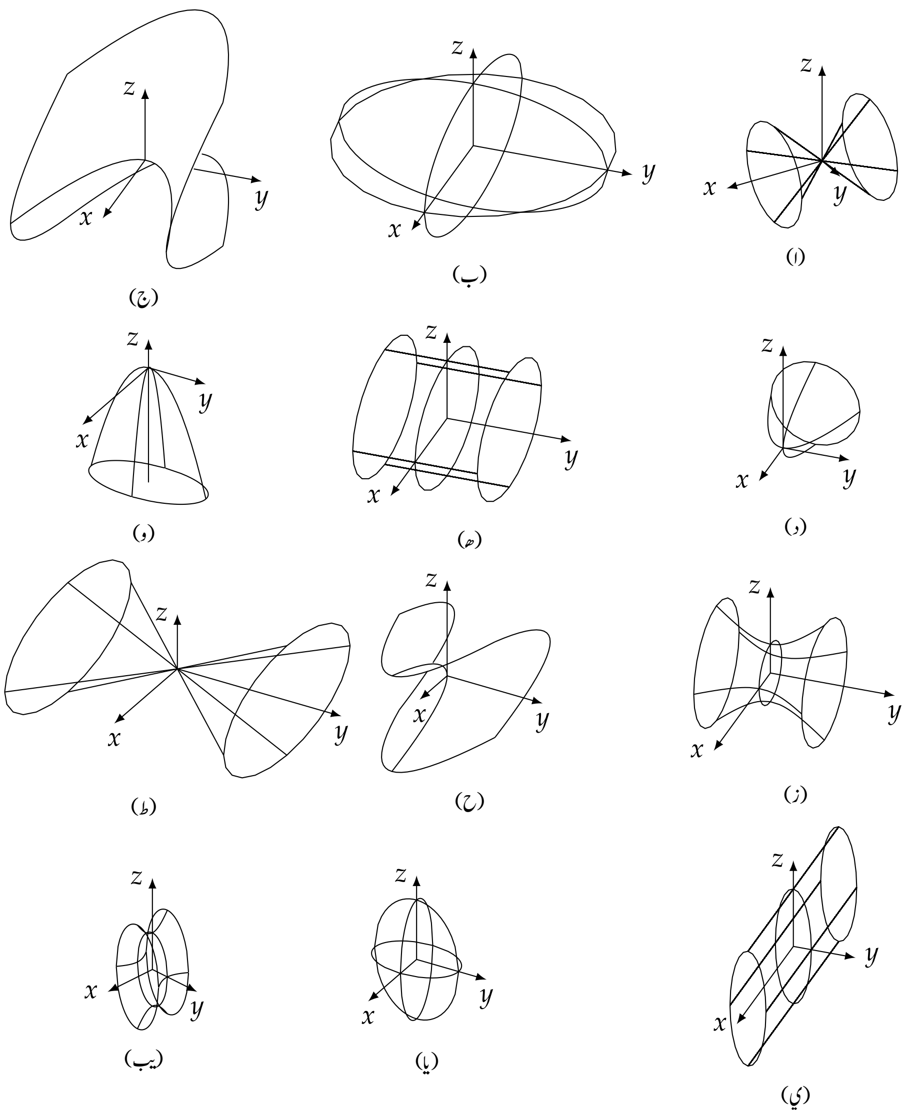
خاکہ

سوال 13 تا سوال 76 میں سطحوں کا خاکہ کھینچیں۔

نلکیاں

سوال 13: $x^2 + y^2 = 4$

سوال 14: $x^2 + z^2 = 4$


(ا)
(ب)
(ج)
(د)
(ه)
(و)
(ز)
(ح)
(ط)
(ی)
(یا)
(یب)

سوال 15: $z = y^2 - 1$

سوال 16: $x = y^2$

سوال 17: $x^2 + 4z^2 = 16$

سوال 18: $4x^2 + y^2 = 36$

سوال 19: $z^2 - y^2 = 1$

سوال 20: $yz = 1$

ترخیمی سطحیں

سوال 21: $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

سوال 22: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

سوال 23: $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

سوال 24: $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

قطع مکافی سطحیں

سوال 25: $z = x^2 + 4y^2$

سوال 26: $z = x^2 + 9y^2$

سوال 27: $z = 8 - x^2 - y^2$

سوال 28: $z = 18 - x^2 - 9y^2$

سوال 29: $x = 4 - 4y^2 - z^2$

سوال 30: $y = 1 - x62 - z^2$

ترخیمات

سوال 31: $x^2 + y^2 = z^2$

سوال 32: $y^2 + z^2 = x^2$

سوال 33: $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

سوال 34: $9x^2 + 4y^2 = 36z^2$

قطع زائد سطحیں

سوال 35: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

سوال 36: $y^2 + z^2 - x^2 = 1$

سوال 37: $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$

سوال 38: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

سوال 39: $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

سوال 40: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$

سوال 41: $x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

سوال 42: $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

قطع زائد قطع مکافی سطحیں

سوال 43: $y^{-}x^2 = z$

سوال 44: $x^2 - y^2 = z$

مختلف سطحیں

سوال 45: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

سوال 46: $4x^2 + 4y^2 = z^2$

سوال 47: $z = 1 + y^2 - x^2$

سوال 48: $y^2 - z^2 = 4$

سوال 49: $y = -(x^2 + z^2)$

سوال 50: $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

سوال 51: $16x^2 + 4y^2 = 1$

سوال 52: $z = x^2 + y^2 + 1$

سوال 53: $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

سوال 54: $x = 4 - y^2$

سوال 55: $x^2 + z^2 = y$

سوال 56: $z^2 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

سوال 57: $x^2 + z^2 = 1$

سوال 58: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

سوال 59: $16y^2 + 9z^2 = 4x^2$

سوال 60: $z = x^2 - y^2 - 1$

سوال 61: $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$

سوال 62: $4x^2 + 9z^2 = y^2$

سوال 63: $x^2 + y^2 - 16z^2 = 16$

سوال 64: $z^2 + 4y^2 = 9$

سوال 65: $z = -(x^2 + y^2)$

سوال 66: $y^2 - x^2 - z^2 = 1$

سوال 67: $x^2 - 4y^2 = 1$

سوال 68: $z = 4x^2 + y^2 - 4$

سوال 69: $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$

سوال 70: $z = 1 - x^2$

سوال 71: $x^2 + y^2 = z$

سوال 72: $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$

سوال 73: $yz = 1$

سوال 74: $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

سوال 75: $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$

سوال 76: $4z^2 - x^2 - y^2 = 4$

نظریہ اور مثالیں

سوال 77: (ا) سطح $z = c$ ترخیمی سطح

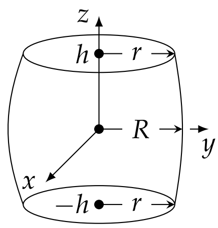
$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

سے رقبہ S کاٹتا ہے۔ اس رقبہ کو متغیر c کا تفاعل لکھیں۔ (ایک ترخیم جس کے نصف محور a اور b ہوں کا رقبہ πab ہوتا ہے۔)
(ب) محور z کے عمودی ٹکیاں لیتے ہوئے جزو-ا میں ترخیمی سطح کا حجم تلاش کریں۔ (ج) اب ترخیم ی سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

کا حجم تلاش کریں۔ کیا آپ کا کلیہ $a = b = c$ کی صورت میں کرہ کا حجم دیتا ہے۔

سوال 78: محور z کے عمودی سطحیں ترخیمی سطح کے دونوں سروں سے برابر حصے کاٹ کر دکھائی گئی ڈرمی پیدا کرتی ہیں۔ محور کے قائمہ عمودی تراش دائری ہیں۔ ڈرمی کا قد $2h$، وسطی رداس R اور سروں کے رداس r ہیں۔ ڈرمی کے حجم کا کلیہ تلاش کریں۔ اب دو باتوں کی تصدیق کریں۔ کیا ڈرمی کے اطراف سیدھا کرنے سے آپ کا کلیہ، قد $2h$ اور رداس R کے نلکی کا حجم دیتا ہے؟ کیا $r = 0$ اور $h = R$ کی صورت میں، جب ڈرمی کی شکل ایک کرہ مانند ہو گی، آپ کا کلیہ کرہ کا حجم دیتا ہے؟



سوال 79: سطح $z = h$ قطع مکافی سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سے ایک حصہ کاٹتا ہے۔ دکھائیں کہ اس حصے کا حجم، حصہ کے قاعدہ کا نصف ضرب قد کے برابر ہو گا۔ (شکل 11.71 میں $h = c$ کے لئے یہ حصہ دکھایا گیا ہے۔)

سوال 80: (ا) سطح $z = 0$ اور سطح $z = h, h > 0$ اور قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) حاصل حجم کو h، S_0 اور S_h کی صورت میں لکھیں۔ قطع زائد سے سطح $z = 0$ اور $z = h$ جن حصوں کو کاٹتے ہیں، ان کے رقبے S_0 اور S_h ہیں۔ (ج) دکھائیں کہ اس حجم کو

$$H = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_h)$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں قطع زائد سے سطح $z = \frac{h}{2}$ جو حصہ کاٹتا ہے، اس کا رقبہ S_m ہے۔

سوال 81: سطح $y=y_1$ اور سطح $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$ کا خط تقاطع، قطع مکافی ہو گا۔ اس قطع مکافی کا راس اور ماسکہ تلاش کریں۔

سوال 82: آپ درج ذیل مساوات میں $z=0$ لے کر مستوی xy میں منحنی حاصل کرتے ہیں۔

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Jz+K=0$$

یہ منحنی کیسی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 83: اب تک ہم دیکھتے آ رہے ہیں کہ کسی بھی محددی سطح کے متوازی سطح اور مربع سطح کا خط تقاطع، ترخیمی ہوتا ہے۔ کیا یہ محض اتفاق تھا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 84: ایک سطح جو کسی بھی محددی سطح کا متوازی نہیں ہے، مربع سطح کو قطع کرتا ہے۔ ان کا خط تقاطع کیسا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 85 تا سوال 88 میں دی گئی وقفہ پر سطحوں کو ترسیم کریں۔ اگر ممکن ہو، سطحوں کے مختلف تحلیل پیش کریں۔

سوال 85: $z=y^2,\quad -2\le x\le 2,\quad -0.5\le y\le 2$

سوال 86: $z=1-y^2,\quad -2\le x\le 2,\quad -2\le y\le 2$

سوال 87: $z=x^2+y^2,\quad -3\le x\le 3,\quad -3\le y\le 3$

سوال 88: $z=x^2+2y^2$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

- $-3\le x\le 3,\quad -3\le y\le 3$
- $-1\le x\le 1,\quad -2\le y\le 3$
- $-2\le x\le 2,\quad -2\le y\le 2$
- $-2\le x\le 2,\quad -1\le y\le 1$

سوال 89 تا سوال 94 کو ترسیم کریں۔ سطح کی صورت سے اس کی قسم دریافت کریں۔

سوال 89: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$

سوال 90: $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$

سوال 91: $5x^2 = z^2 - 3y^2$

سوال 92: $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{9} + z$

سوال 93: $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$

سوال 94: $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

11.7 نلکی اور کروی محدد

اس حصہ میں فضا کے دو نئے محددی نظام متعارف کرائے جائیں گے جو نلکی محدد اور کروی محدد کہلاتے ہیں۔ نلکی محدد میں نلکی کی مساوات سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ کروی محدد میں کرہ اور ترخیم کی مساوات سادہ صورت اختیار کرتی ہیں۔ ہم نلکی محدد میں سیاروں کی مدار پر اگلی باب میں غور کریں گے۔

نلکی محدد

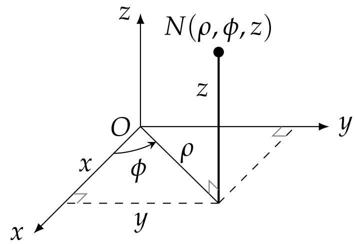
ہم xy مستوی میں قطبی محدد کے ساتھ محور z شامل کر کے فضا کی نلکی محدد حاصل کرتے ہیں۔ہم یہاں قطبی محدد کا رداس ρ اور زاویہ ϕ لکھیں گے [31]۔ یوں فضا میں ہر نقطہ کو ایک یا ایک سے زیادہ تین اعداد کی جوڑی (ρ, ϕ, z) مختص کی جا سکتی ہے (شکل 11.77)۔

تعریف: **نلکی محدد**[32] فضا میں نقطہ N کو تین مرتب اعداد (ρ, ϕ, z) سے ظاہر کرتا ہے جہاں

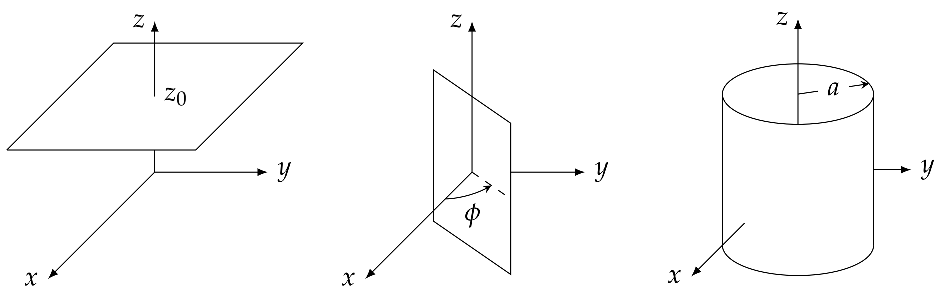
1. ρ اور ϕ مستوی xy میں نقطہ N کے قائمہ تطلیل کے قطبی محدد ہیں،

2. z اس نقطہ کا کارتیسی انتصابی محدد ہے۔

[31] تاکہ ہم r اور θ کو کروی محدد کے لئے استعمال کر سکیں
[32] cylindrical coordinates



شکل 11.77: فضا میں نقطہ کے نلکی محدد ρ ، ϕ اور z ہوں گے۔



(ا) نلکی $\rho = a$ کی سطح میں ϕ اور z تبدیل ہوتے ہیں۔

(ب) مستوی $\phi = \phi_0$ میں ρ اور z تبدیل ہوتے ہیں۔

(ج) مستوی $z = z_0$ میں ρ اور ϕ تبدیل ہوتی ہیں۔

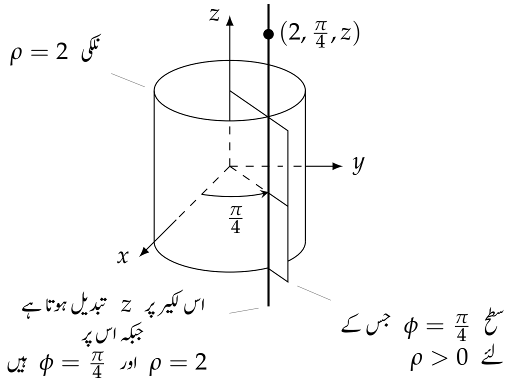
شکل 11.78: نلکی محدد میں مستقل محدد محددی مساواتیں نلکی اور سطح کو جنم دیتی ہیں۔

□

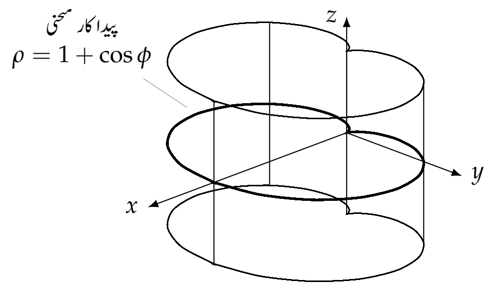
کارتیسی محدد x ، y ، z اور نلکی محدد ρ ، ϕ ، z کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$
\begin{gathered}
x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = z \\
\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\phi = \frac{y}{x}
\end{gathered}
\tag{11.58}
$$

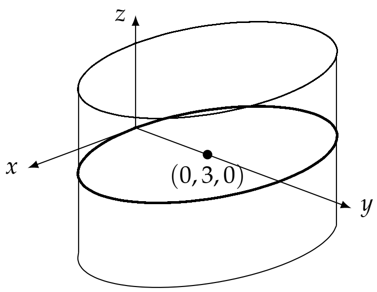
نلکی محدد میں مساوات $\rho = a$ نا صرف xy مستوی میں ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے بلکہ یہ ایک z محور کے گرد ایک نلکی کو بھی ظاہر کرتی ہے (شکل 11.78-ا)۔ محور z کو $\rho = 0$ ظاہر کرتی ہے۔ مساوات $\phi = \phi_0$ اس سطح کو ظاہر کرتی ہے جس میں محور z پایا جاتا ہے اور جو مثبت محور x کے ساتھ زاویہ ϕ_0 بناتا ہے۔ کارتیسی محدد کی طرح اب بھی مساوات $z = z_0$ ایک سطح کو ظاہر کرتی ہے جو محور z کے ساتھ قائمہ ہے۔



شکل 11.79: وہ نقطے جن کے پہلے دو نلکی محدد $\rho = 2$ اور $\phi = \frac{\pi}{4}$ ہوں ایک لکیر کو ظاہر کرتے ہیں جو z محدد کے متوازی ہے۔



شکل 11.80: قلب نما مساوات $\rho = 1 + \cos\phi$ فضا میں نلکی کو ظاہر کرتی ہے جس کا عمودی تراش محور z کو قائمہ ہے (مثال 11.56)۔



شکل 11.81: نلکی نما برائے مثال 11.58

مثال 11.55: کون سے نقاط درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$\rho = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

حل: یہ نقطے اس لکیر کو ظاہر کرتے ہیں جہاں نلکی $\rho = 2$ سطح $\phi = \frac{\pi}{4}$ کو قطع کرتی ہے اور جہاں ρ مثبت ہے (شکل 11.79)۔ یہ لکیر نقطہ $(2, \frac{\pi}{4}, 0)$ سے گزرتی ہے اور محور z کے متوازی ہے۔ □

مثال 11.56: سطح $\rho = 1 + \cos\phi$ ترسیم کریں۔

حل: اس مساوات میں صرف ρ اور ϕ متغیرات پائے جاتے ہیں جبکہ z متغیر اس میں نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں یہ مساوات ایک ایسی نلکی سطح کو ظاہر کرتی ہے جو، مستوی $\rho\phi$ میں قلب نما منحنی، $\rho = 1 + \cos\phi$ سے گزرتی ہے اور محور z کے متوازی ہے۔ ہم

کارتیسی x ، y ، z محور کھینچ کر ان کے قائمہ چند عمودی تراش ترسیم کرتے ہیں۔ ان عمودی تراش کو متوازی لکیروں سے ملا کر سطح حاصل ہو گی (شکل 11.80)۔ □

مثال 11.57: سطح $z = \rho^2$ کی کارتیسی مساوات تلاش کر کے سطح کو پہچانئے۔

حل: مساوات 11.58 سے $z = \rho^2 = x^2 + y^2$ حاصل ہوتا ہے جو دائری قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کی مساوات ہے۔ □

سوال 1: دائری نلکی $4x^2 + 4y^2 = 9$ کی مساوات نلکی محدد میں دریافت کریں۔

حل: یہ نلکی ان نقطوں پر مشتمل ہے جن کا محور z سے فاصلہ $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2}$ ہے لہٰذا نلکی محدد میں اس سطح کی مساوات $\rho = \frac{3}{2}$ ہو گی۔ آئیں اس کو باضابطہ حاصل کریں۔

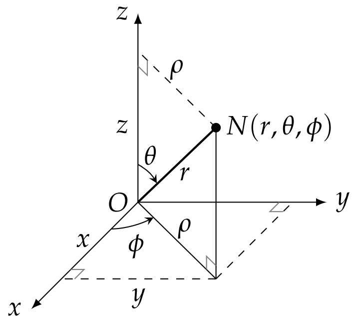
$$
\begin{aligned}
4x^2 + 4y^2 &= 9 \\
4(\rho\cos\phi)^2 + 4(\rho\sin\phi)^2 &= 9 && \text{مساوات } 11.58 \\
4\rho^2\cos^2\phi + 4\rho^2\sin^2\phi &= 9 \\
4\rho^2 &= 9 && \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \\
\rho^2 &= \frac{9}{4} \\
\rho &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

مثال 11.58: نلکی $x^2 + (y-3)^2 = 9$ کی مساوات نلکی محدد میں معلوم کریں (شکل 11.81)۔

حل: مساوات 11.58 استعمال کرتے ہوئے نلکی محدد میں مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2 + (y-3)^2 &= 9 \\
(\rho\cos\phi)^2 + (\rho\sin\phi - 3)^2 &= 9 && \text{مساوات } 11.58 \\
\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi + 9 - 6\rho\sin\phi &= 9 \\
\rho^2 &= 6\rho\sin\phi \\
\rho &= 6\sin\phi && \text{درکار مساوات}
\end{aligned}
$$

□



شکل 11.82: کروی محدد r ، ϕ ، θ اور کارتیسی محدد x ، y ، z کا تعلق۔

کروی محدد

کروی محدد میں نقطہ N کو زاویوں اور لمبائی سے تعین کیا جاتا ہے (شکل 11.82)۔ نقطہ N کا پہلا محدد $r = \left|\overrightarrow{ON}\right|$ ہے جو مبدا O سے N تک فاصلہ دیتا ہے۔ نلکی محدد کے ρ کے برعکس r ہر صورت غیر منفی ہو گا۔ دوسرا محدد θ ہے جو $\overrightarrow{ON}$ کا مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ہے جو وقفہ $[0, \pi]$ پر رہنے کا پابند ہے۔ تیسرا محدد ϕ ہے جو عین نلکی محدد ϕ ہے۔

تعریف: **کروی محدد**[33] فضا میں نقطہ N کو تین مرتب اعداد (r, θ, ϕ) سے ظاہر کرتا ہے جہاں

1. مبدا سے N تک فاصلہ r ہے،

2. مثبت محور z کے ساتھ $\overrightarrow{ON}$ کا زاویہ θ ہے ($0 \leq \theta \leq \pi$)،

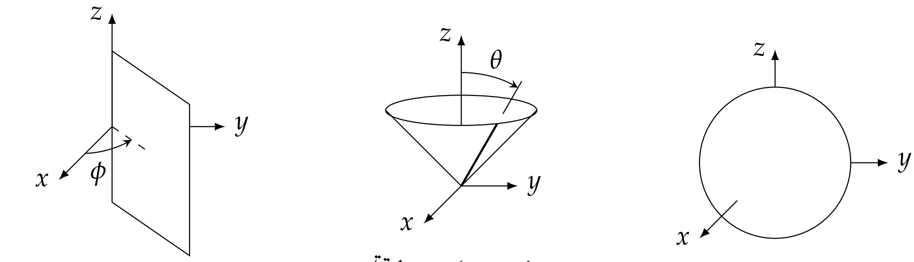
3. ϕ نلکی محدد کا زاویہ ہے۔

□

رداس a کے کرہ کی کروی محدد میں مساوات $r = a$ ہو گی جہاں کرہ کا مرکز مبدا پر ہے (شکل 11.83-ا)۔ مساوات $\theta = \theta_0$ ایک ترخیم کو ظاہر کرتی ہے جس کا راس مبدا پر ہے اور جس کا محور z محور پر ہے۔(ہم ترخیم کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے مستوی xy کو ترخیم $\theta = \frac{\pi}{2}$ تصور کرتے ہیں۔) اگر θ کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ سے زیادہ ہو تب ترخیم نیچے رخ کھلتا ہے۔ کروی محدد میں بالکل نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ اس سطح کو ظاہر کرتی ہے جس میں محور z شامل ہو اور جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ_0 بناتا ہو۔

---

[33] spherical coordinates



(ا) مستقل رداس کرہ دیتا ہے۔

(ب) مثبت محور z کے ساتھ مستقل زاویہ ترخیم دیتا ہے۔

(ج) مثبت محور x کے ساتھ مستقل زاویہ انتصابی سطح دیتا ہے۔

شکل 11.83: مستقل کروی محدد سے حاصل سطحیں۔

کروی محدد کے کارتیسی اور نلکی محدد کے ساتھ تعلقات درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\rho = r\sin\theta, \quad x &= \rho\cos\phi = r\sin\theta\cos\phi,\\
z = r\cos\theta, \quad y &= \rho\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi,\\
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}
\end{aligned}
\tag{11.59}
$$

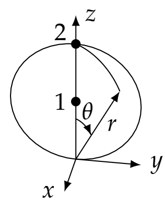
مثال 11.59: درج ذیل کرہ کی کروی مساوات تلاش کریں (شکل 11.84)۔

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$$

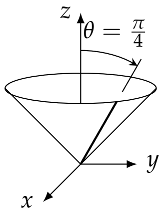
حل: ہم مساوات 11.59 استعمال کرتے ہوئے x ، y اور z کی کروی قیمتیں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+(z-1)^2 &= 1\\
r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + (r\cos\theta-1)^2 &= 1 && \text{مساوات 11.59}\\
r^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}_{1} + r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 &= 1\\
r^2\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1} &= 2r\cos\theta\\
r^2 &= 2r\cos\theta\\
r &= 2\cos\theta
\end{aligned}
$$

□



شکل 11.84: کرہ برائے مثال 11.59



شکل 11.85: ترخیم برائے مثال 11.60

مثال 11.60: ترخیم $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کی کروی مساوات تلاش کریں (شکل 11.85)۔

حل: پہلا حل جیومیٹری استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ ترخیم محور z کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور مستوی yz کے ربع اول کو خط $z = y$ میں قطع کرتا ہے۔ یوں مثبت z محور اور ترخیم کے بیچ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ہو گا۔ ترخیم ان نقطوں پر مبنی ہے جن کے کروی محدد θ کی قیمت $\frac{\pi}{4}$ ہے لہٰذا اس کی مساوات $\theta = \frac{\pi}{4}$ ہو گی۔

دوسرا حل الجبرا استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ ہم مساوات 11.59 استعمال کر کے یہی نتیجہ دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
r\cos\theta &= \sqrt{r^2 \sin^2\theta} && \text{مثال 11.59} \\
r\cos\theta &= r\sin\theta && r \geq 0, \sin\theta \geq 0 \\
\cos\theta &= \sin\theta \\
\theta &= \frac{\pi}{4} && 0 \leq \theta \leq \pi
\end{aligned}
$$

□

سوالات

جوابات

حصہ 11.5 صفحہ 1400

1) $x = 3 + t,\ y = -4 + t,\ z = -1 + t$

3) $x = -2 + 5t,\ y = 5t,\ z = 3 - 5t$

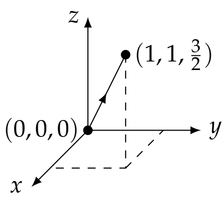
5) $x = 0,\ y = 2t,\ z = t$

7) $x = 1,\ y = 1,\ z = 1 + t$

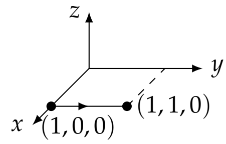
9) $x = t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2t$

11) $x = t,\ y = 0,\ z = 0$

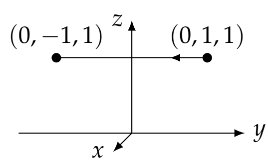
13) $x = t,\ y = t,\ z = 3/2t,\ 0 \leq t \leq 1$



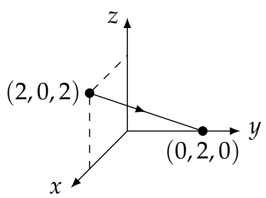
15) $x = 1,\ y = 1 + t,\ z = 0,\ -1 \leq t \leq 0$



17) $x = 0,\ y = 1 - 2t,\ z = 1,\ 0 \leq t \leq 1$



19) $x = 2 - 2t,\ y = 2t,\ z = 2 - 2t,\ 0 \leq t \leq 1$



21) $3x - 2y - z = -3$

23) $7x - 5y - 4z = 6$

25) $x + 3y + 4z = 34$

27) $(1, 2, 3),\ -20x + 12y + z = 7$

29) $y + z = 3$

31) $x - y + z = 0$

33) $2\sqrt{30}$

35) 0

37) $\frac{9\sqrt{42}}{7}$

39) 3

41) $19/5$

43) $5/3$

45) $9/\sqrt{41}$

47) $\pi/4$

49) 1.76 ریڈیئن

51) 0.82 ریڈیئن

53) $(3/2, -3/2, 1/2)$

55) $(1, 1, 0)$

57) $x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = -1$

59) $x = 4,\ y = 3 + 6t,\ z = 1 + 3t$

61) L_1 اور L_2 متقاطع ہیں؛ L_2 اور L_3 متوازی ہیں؛ L_1 اور L_3 غیر ہمسطحی ہیں۔

63) $x = 2 + 2t,\ y = -4 - t,\ z = 7 + 3t;\ x = -2 - t,\ y = -2 + t/2,\ z = 1 - 3/2t$

65) $(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}),\ (-1, 0, -3),\ (1, -1, 0)$

69) بہت سارے مختلف جوابات ممکن ہیں۔ ان میں سے ایک جواب ہے:
$x + y = 3,\ 2y + z = 7$

71) ماسوائے ان سطحوں کے جو مبدا سے گزرتے ہوں یا جو محددی محور کے متوازی ہوں تمام سطحوں کو $x/a + y/b + z/c = 1$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

حصہ 11.6 صفحہ 1416

1) شکل 11.76ب

3) شکل 11.76ي

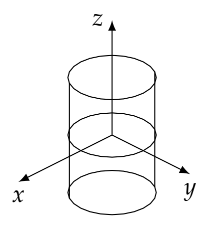
5) شکل 11.76ج

7) شکل 11.76ھ

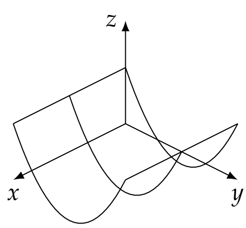
9) شکل 11.76ح

11) شکل 11.76ط

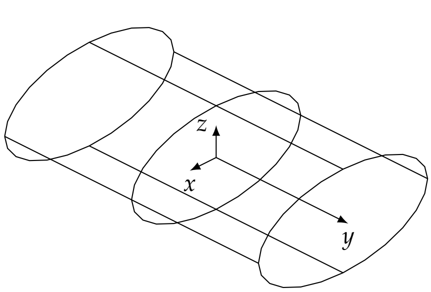
13) $x^2 + y^2 = 4$



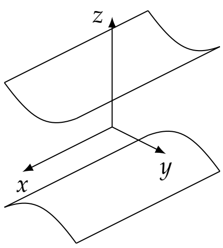
15) $z = y^2 - 1$



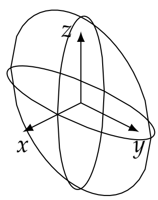
17) $x^2 + 4z^2 = 16$



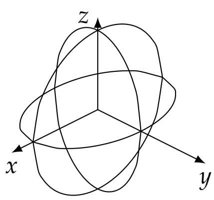
19) $z^2 - y^2 = 1$



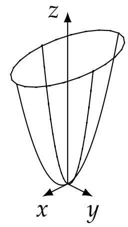
21) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$



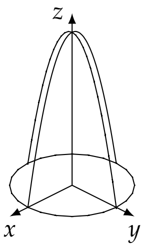
23) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$



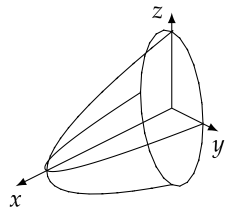
25) $z = x^2 + 4y^2$



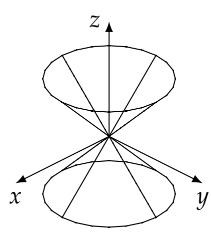
27) $z = 8 - x^2 - y^2$



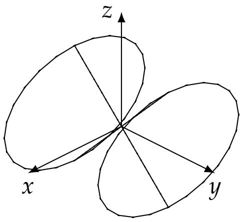
29) $x = 4 - 4y^2 - z^2$



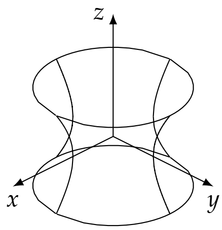
31) $x^2 + y^2 = z^2$



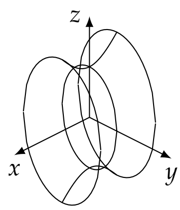
33) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$



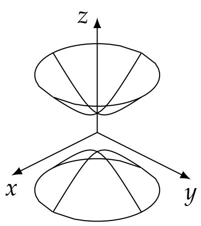
35) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$



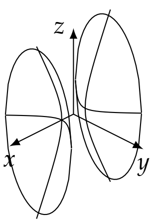
37) $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$



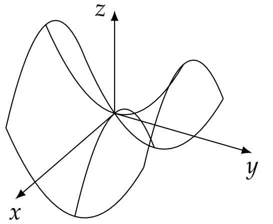
39) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$



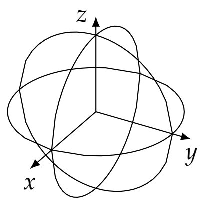
41) $x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$



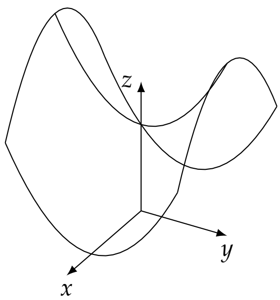
43) $y^2 - x^2 = z$



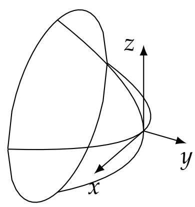
45) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$



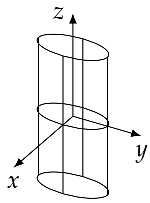
47) $z = 1 + y^2 - x^2$



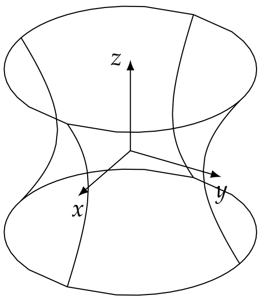
49) $y = -x^2 - z^2$



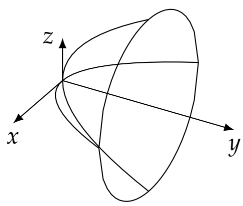
51) $16x^2 + 4y^2 = 1$



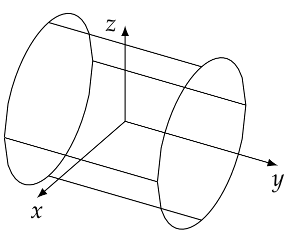
53) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$



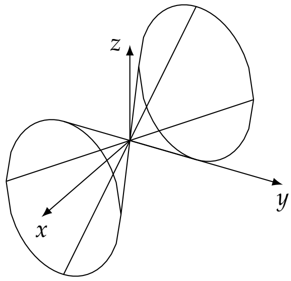
55) $x^2 + z^2 = y$



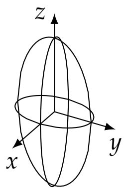
57) $x^2 + z^2 = 1$



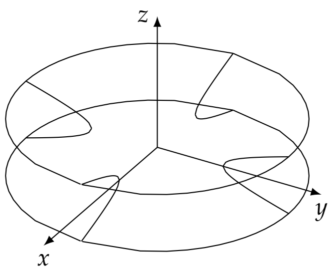
59) $16y^2 + 9z^2 = 4x^2$



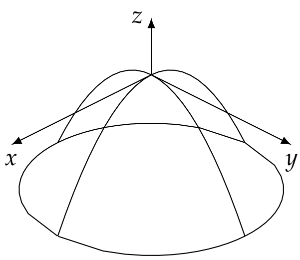
$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ (61



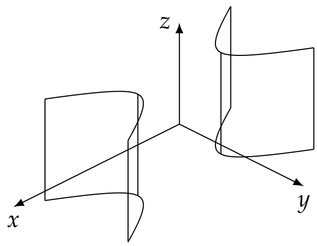
$x^2 + y^2 - 16z^2 = 16$ (63



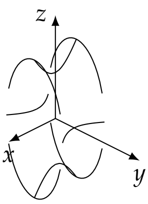
$z = -x^2 - y^2$ (65



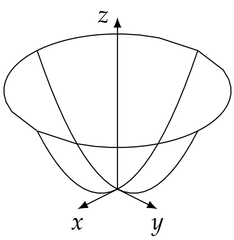
$x^2 - 4y^2 = 1$ (67



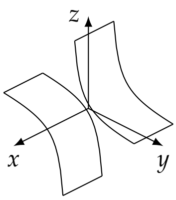
$4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$ (69



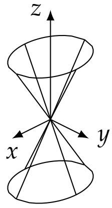
$x^2 + y^2 = z$ (71



$yz = 1$ (73



$9x^2 + 16y^2 = 4z^2$ (75



77) (ا) $\frac{2\pi(9-c^2)}{9}$، (ب) 8π، (ج) $\frac{4\pi abc}{3}$

81) راس $(0, y_1, cy_1^2/b^22)$ ،
ماسکہ $(0, y_1, cy_1^2/b^2 - a^2/(4c))$

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ