احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 4

تفرق کا استعمال

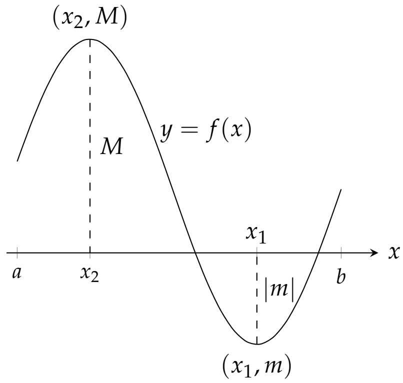
اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ ہم تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی کرتے ہیں اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کی صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ تکملی احصاء کی راہ ہموار کرتا ہے۔

4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں

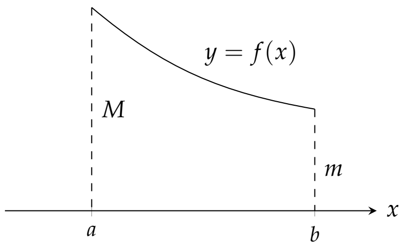
اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

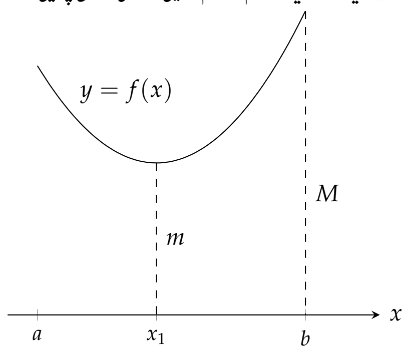
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کا اس دائرہ کار پر مطلق بلند تر قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت ہو گا جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں ان انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ تکمل احصاء کی نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔



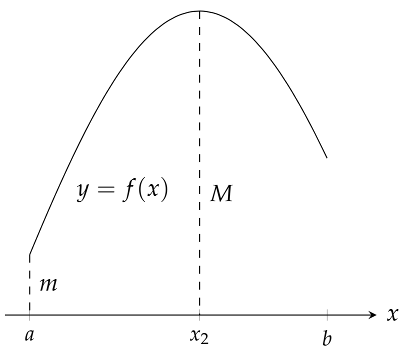
(ا) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔



(ب) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم آخری نقطوں پر ہے۔

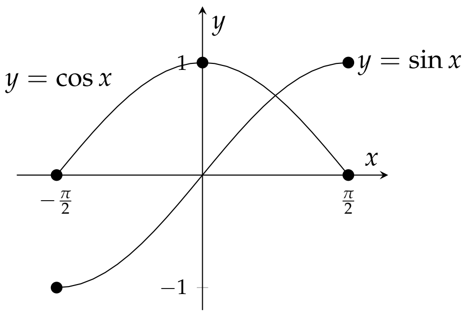


(ج) کم سے کم اندرونی نقطہ جبکہ زیادہ سے زیادہ آخری نقطہ ہے۔



(د) زیادہ سے زیادہ اندرونی نقطہ جبکہ کم سے کم آخری نقطہ پر ہے۔

شکل 4.1: زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔



شکل 4.2: ترسیم برائے مثال 4.1

مسئلہ 4.1: **استمراری تفاعل کا مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ**
بند دائرہ کار I کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل f کا I پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت M اور مطلق کم سے کم قیمت m پایا جائے گا۔یعنی I میں ایسا x_1 اور x_2 پایا جائے گا کہ $f(x_1) = m$ اور $f(x_2) = M$ ہوں اور I میں تمام x کے لئے $m \leq f(x) \leq M$ ہو (شکل 4.1)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہٰذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

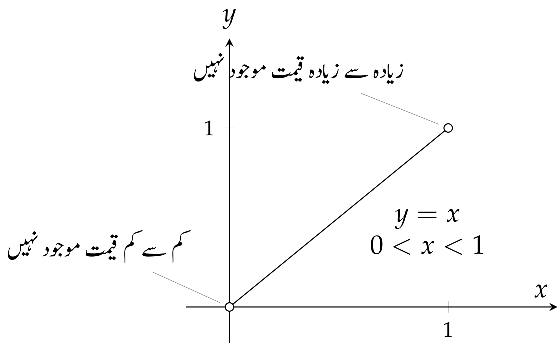
مثال 4.1: وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور دو بار کم سے کم قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔اسی وقفے پر تفاعل $g(x) = \sin x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور ایک بار کم سے کم قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل 4.2)۔ □

جیسا شکل 4.3 اور شکل 4.4 واضح کرتے ہیں مسئلہ 4.1 میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

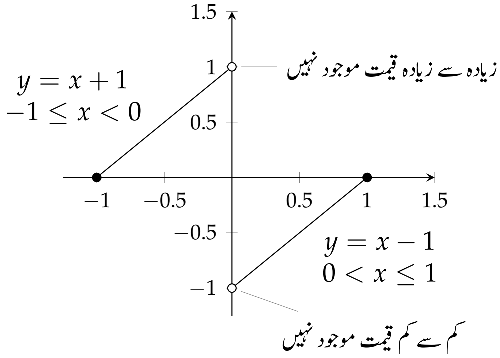
شکل 4.4 میں تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

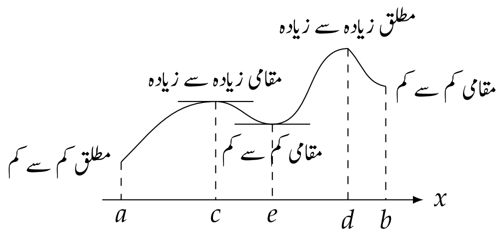
دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-1, 1]$ پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ $x = 0$ پر، جس کی بنا تفاعل کا نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی اس کی کوئی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔



شکل 4.3: کھلا وقفہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں ہے۔



شکل 4.4: واحد ایک نقطہ عدم استمرار کی بنا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں غیر یقینی ہو سکتے ہیں۔



شکل 4.5: مقامی اور مطلق انتہا۔

مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

شکل 4.5 میں تفاعل کے پانچ انتہا نقطے دکھائے گئے ہیں۔اس تفاعل کا کم سے کم نقطہ a پر ہے اگرچہ e پر بھی x کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے f کی قیمت کم ہے۔نقطہ c پر تفاعل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے جبکہ d پر اس کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔

تعریف: **مطلق انتہائی قیمتیں**
فرض کریں تفاعل f کا دائرہ کار D ہے۔نقطہ c پر تفاعل f کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تب پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \le f(c)$$

اور D میں c پر تب f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \geq f(c)$$

□

مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم کو مطلق **انتہا**[1] کہتے ہیں۔انہیں **عالمگیر**[2] انتہا بھی کہتے ہیں۔

ایک جیسے قاعدہ کے تفاعل کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

مثال 4.2:

	قاعدہ تفاعل	دائرہ کار D	مطلق انتہا
(ا)	$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	مطلق زیادہ سے زیادہ نہیں ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے
(ب)	$y = x^2$	$[0, 2]$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے
(ج)	$y = x^2$	$(0, 2]$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت موجود نہیں ہے
(د)	$y = x^2$	$(0, 2)$	کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے

شکل 4.6 دیکھیں۔

□

تعریف: **مقامی انتہا قیمت**

تفاعل f کا کھلے دائرہ کار D میں اندرونی نقطہ c پر اس صورت مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جب D میں کسی بھی کھلا وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں تمام x کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ c پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

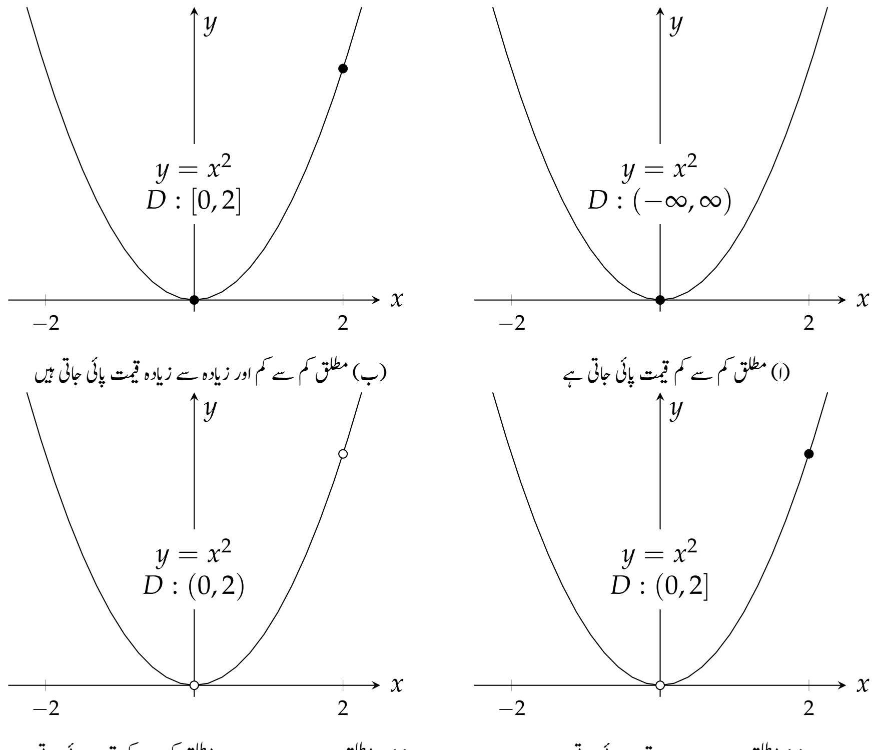
$$f(x) \geq f(c)$$

□

ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفہ کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔یوں آخری سر c پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلا وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل 4.5 میں تفاعل f کا c اور d پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ a ، e اور b پر اس کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہیں۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت بھی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اپنی پڑوس میں بھی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔یوں تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتوں کی جدول میں مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی کم سے کم قیمتوں کی جدول میں مطلق کم سے کم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

[1] extrema
[2] global



(ا) مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے

(ب) مطلق کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہیں

(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے

(د) نا مطلق زیادہ سے زیادہ اور نا مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے

شکل 4.6: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال 4.2)۔

انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھاتا ہے تفاعل کے انتہا کی حصول کے لئے صرف چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہو گی۔

مسئلہ 4.2: **یک درجی مسئلہ برائے مقامی انتہا** فرض کریں تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ c پر f کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو اور c پر f' معین ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت : یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر $f'(c)$ کی قیمت صفر ہو گی ہم دکھاتے ہیں کہ $f'(c)$ مثبت نہیں ہو سکتا ہے اور کہ $f'(c)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے۔صفر وہ واحد عدد ہے جو نا مثبت اور نا منفی ہے لہٰذا $f'(c)$ صفر ہو گا۔

فرض کریں کہ c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.7)۔ یوں c کے قریبی پڑوس میں تمام x پر $f(x) - f(c) \leq 0$ ہو گا۔چونکہ c اندرونی نقطہ ہے لہٰذا $f'(c)$ کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہو گی۔

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ $x = c$ پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور $f'(c)$ کے برابر ہیں۔ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔چونکہ c کے دائیں جانب $x - c > 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{4.1}$$

ہو گا۔اسی طرح c کے بائیں جانب $x - c < 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

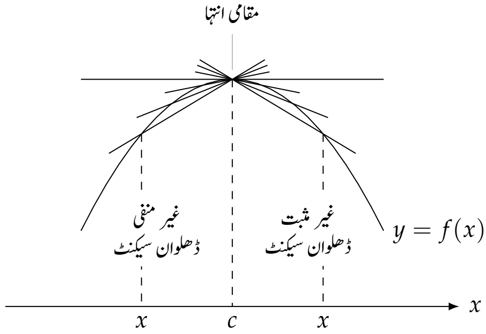
$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{4.2}$$

ہو گا۔مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کو ملا کر $f'(c) = 0$ ملتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے $f(x) \geq f(c)$ استعمال کرنا ہو گا جس سے مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب $f'(c) = 0$ ہو گا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔



شکل 4.7: اندرونی نقطہ پر مقامی انتہا پر ڈھلوان صفر ہو گی (مسئلہ 4.2)۔

1. اندرونی نقطہ جہاں $f' = 0$ ہو۔

2. اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین ہو۔

3. f کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل f کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین یا صفر ہو کو **نقطہ فاصل**[3] کہتے ہیں۔

□

خلاصہ
تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کی دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں۔

عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ 4.1 ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جا سکتا ہے کہ آیا نقطہ پر زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

[3] critical point

مثال 4.3: دائرہ کار $[-2,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔
حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا واحد نقطہ فاصل $f'(x) = 2x = 0$ یعنی $x = 0$ پر ہو گا۔ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل $x = 0$ اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 1$ پر دیکھنی ہوں گی۔

نقطہ فاصل پر قیمت	$f(0) = 0$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(-2) = 4$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(1) = 1$

تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 ہے جو نقطہ $x = -2$ پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے۔ □

سوال 1: دائرہ کار $[-2,1]$ پر تفاعل $g(t) = 8t - t^4$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔
حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہو گا جہاں $g'(t) = 0$ ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\ t^3 &= 2 \\ t &= 2^{1/3} \end{aligned}$$

ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں ہے۔یوں تفاعل کے مقامی انتہا قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی: (شکل 4.8)

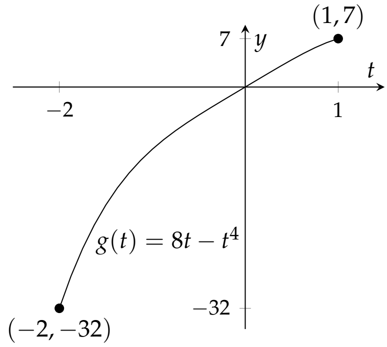
مطلق کم سے کم قیمت	$g(-2) = -32$
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت	$g(1) = 7$

سوال 2: تفاعل $h(x) = x^{2/3}$ کی $[-2,-3]$ پر مطلق انتہا تلاش کریں۔
حل: یک درجی تفرق

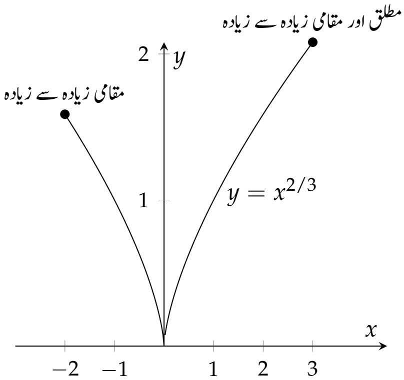
$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا ہے البتہ $x = 0$ پر یہ غیر معین ہے۔اس نقطہ پر اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 3$ پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

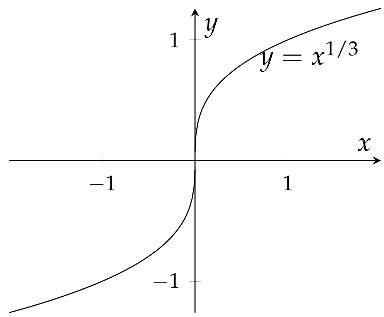
$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\ h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3} \end{aligned}$$



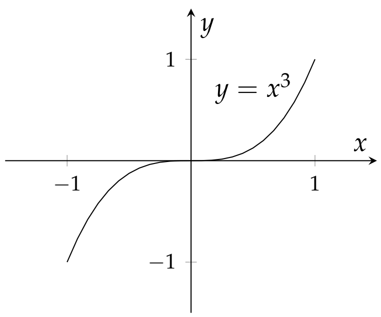
شکل 4.8: ترسیم برائے مثال 1



شکل 4.9: ترسیم برائے مثال 2



شکل 4.10: نقطہ فاصل $x = 0$ پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔



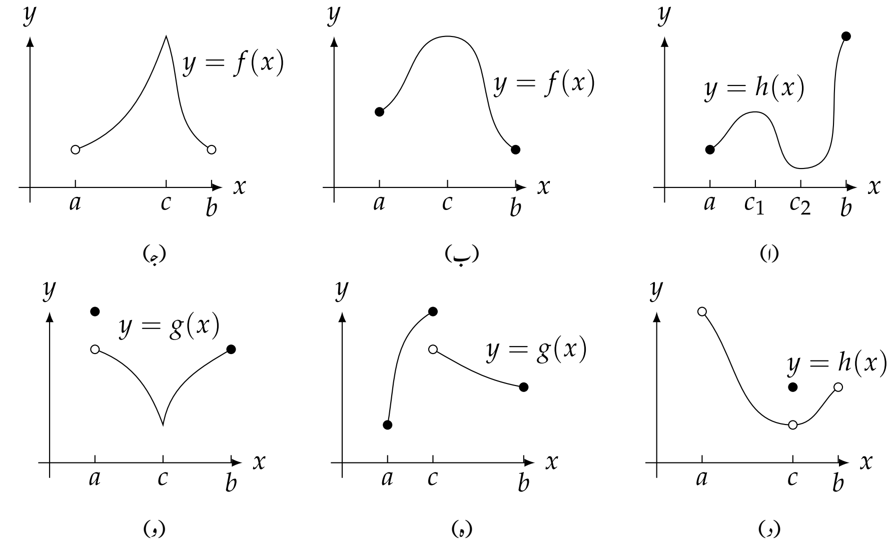
شکل 4.11: $x = 0$ پر $y = x^3$ کا کوئی انتہا نہیں پایا جاتا ہے اگرچہ اس نقطے پر $y' = 3x^2 = 0$ ہے۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $9^{1/3}$ ہے جو نقطہ $x = 3$ پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے (شکل 4.9)۔

اگرچہ تفاعل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں، ضروری نہیں ہے کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطہ پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل 4.10 اور شکل 4.11 اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

سوالات

ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول



شکل 4.12: اشکال برائے سوال 3 تا سوال 8

کیا سوال 3 تا سوال 8 میں $[a, b]$ کے بیچ تفاعل کے مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ سمجھائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ 4.1 میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 3: شکل 4.12-ا

سوال 4: شکل 4.12-ب

سوال 5: شکل 4.12-ج

سوال 6: شکل 4.12-د

سوال 7: شکل 4.12-ہ

سوال 8: شکل 4.12-و

بند وقفہ پر مطلق انتہا

سوال 9 تا سوال 24 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 9: $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

سوال 10: $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

سوال 11: $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

سوال 12: $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

سوال 13: $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$

سوال 14: $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

سوال 15: $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال 16: $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

سوال 17: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

سوال 18: $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

سوال 19: $f(\theta) = \sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

سوال 20: $f(x) = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

سوال 21: $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

سوال 22: $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

سوال 23: $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

سوال 24: $f(t) = |t - 5|, \quad -4 \le t \le 7$

سوال 25 تا سوال 28 میں تفاعل کی مطلق کم سے کم اور مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال 25: $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال 26: $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال 27: $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

سوال 28: $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال 29 تا سوال 29 میں دی گئے دائرہ کار پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال 29:

ا. $f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x \le 2$

ب. $g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < 2$

ج. $h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2$

د. $k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < \infty$

ہ. $l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty$

سوال 30:

ا. $f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \le x \le 1$

ب. $g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \le 1$

ج. $h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1$

د. $k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \le 1$

ہ. $l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 31: اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ نا قابل تفرق ہے نقطہ $x = 0$ پر f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔کیا یہ مسئلہ 4.2 کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ c ہو تب مسئلہ 4.2 کیوں نا قابل استعمال ہو گا؟

سوال 33: اگر جفت تفاعل $f(x)$ کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 34: اگر طاق تفاعل $g(x)$ کی مقامی کم سے کم قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب کیا $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونا کی صورت میں کیا ہو گا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 36: وقفہ $[0, 1]$ پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا $x = 0$ پر نا کوئی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 37 تا سوال 42 میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں $f' = 0$ ہو۔ بعض اوقات f' ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں f' غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ہ. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں اور جن نقطوں پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں تلاش کریں۔

سوال 37: $f(x) = x^4 - 8x62 + 4x + 2, \quad [-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}]$

سوال 38: $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-\frac{3}{4}, 3]$

سوال 39: $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

سوال 40: $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, \frac{10}{3}]$

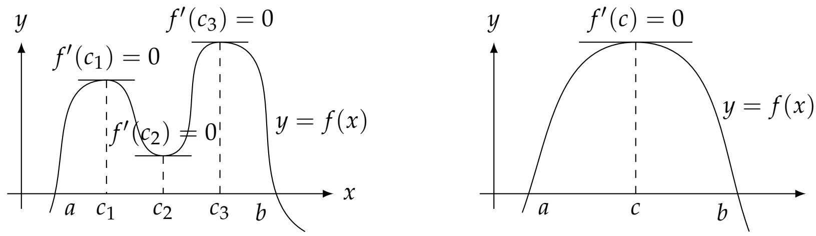
سوال 41: $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

سوال 42: $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2 مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لمحہ $t = 0$) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی t سیکنڈوں میں $s = 4.9t^2\,\mathrm{m}$ کا فاصل طے کرے گا۔اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لمحہ t پر اس جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گی۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کی اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ نتیجہ صریح کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 4.13: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل x محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل $f(x)$ محور x کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب $f(x)$ کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مشل رول $(1652 - 1719)$ کا 300 سال پرانا **مسئلہ رول** ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

مسئلہ 4.3: **مسئلہ رول**[4]

فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $y = f(x)$ استمراری ہے اور وقفہ کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

$$f(a) = f(b) = 0$$

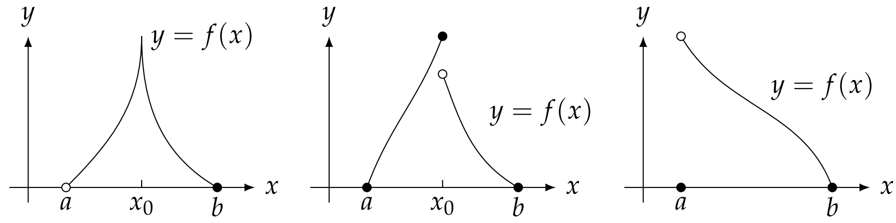
تب (a, b) میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ c ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل 4.13)۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: چونکہ f استمراری ہے لہٰذا $[a, b]$ پر f کے مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

1. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' ہو۔
2. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' غیر معین ہو۔
3. تفاعل کے دائرہ کار کی آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں a اور b ہیں۔

[4] Rolle's theorem



(ا) ایک آخری نقطہ پر غیر استمراری

(ب) اندرونی نقطہ پر غیر استمراری

(ج) $[a, b]$ پر استمراری لیکن کسی اندرونی نقطہ پر نا قابل تفرق

شکل 4.14: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر f کا تفرق پایا جاتا ہے. یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ c پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ 4.2 کے تحت $f'(c) = 0$ ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت دونوں a یا b پر پائے جاتے ہوں تب f مستقل ہو گا۔یوں $f' = 0$ ہو گا لہٰذا وقفے کے کسی بھی نقطے کو c لیا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

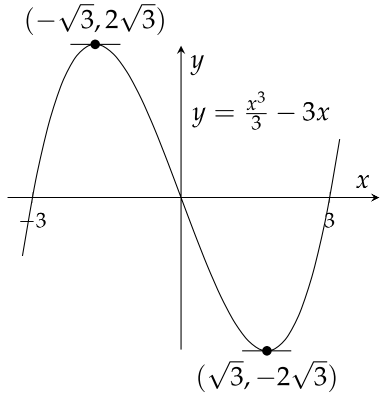
□

مسئلہ 4.3 میں دیے شرائط لازمی ہیں۔اگر صرف ایک نقطہ پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترسیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل 4.14)۔

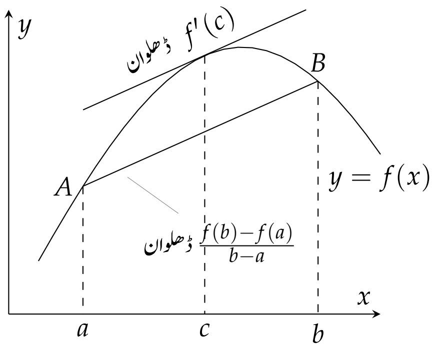
مثال 4.4: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ $[-3, 3]$ کے ہر نقطہ پر استمراری ہے اور $(-3, 3)$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے۔

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

چونکہ $f(-3) = f(3) = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ رول کے تحت $a = -3$ اور $b = 3$ کھلا وقفہ کے بیچ کم سے کم ایک نقطہ پر $f' = 0$ ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں $f'(x) = x^2 - 3$ دو نقطوں $x = \sqrt{3}$ اور $x = -\sqrt{3}$ پر صفر کے برابر ہے (شکل 4.15)۔ □



شکل 4.15: ترسیم برائے مثال 4.4



شکل 4.16: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا مماس قطع AB کے متوازی ہو گا۔

مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترچھی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل 4.16)۔ قطع AB کے متوازی نقطہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کی ڈھلوان قطع کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

مسئلہ 4.4: **مسئلہ اوسط قیمت** فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر $y = f(x)$ استمراری ہے اور اس کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہے تب (a, b) میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

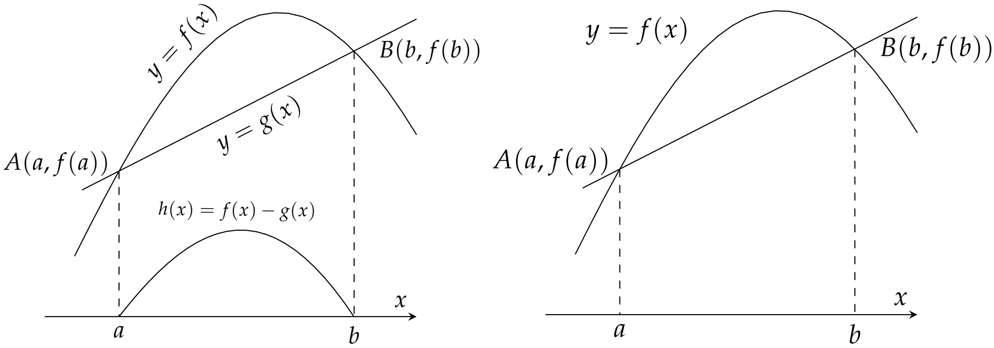
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{4.3}$$

ثبوت: ہم f کی ترسیم پر دو نقطوں $A(a, f(a))$ اور $B(b, f(b))$ کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل 4.17-ا)۔ یہ لکیر درج ذیل تفاعل کی ترسیم ہو گی۔

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \text{(نقطہ ڈھلوان صورت)} \tag{4.4}$$

نقطہ x پر f اور g کے بیچ انتصابی فاصلہ

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned} \tag{4.5}$$



(ا) وقفہ $[a,b]$ پر f اور قطع AB کے ترسیم۔

(ب) $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ افقی فاصلہ $h(x)$ ہے۔

شکل 4.17: مسئلہ اوسط قیمت۔

ہو گا۔ شکل 4.17-ب میں f ، g اور h دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل h وقفہ $[a,b]$ پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل h وقفہ $[a,b]$ پر استمراری اور (a,b) پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفہ پر f اور g استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ f اور g دونوں نقطہ A اور B سے گزرتے ہیں لہٰذا $h(a)=h(b)=0$ ہے۔ یوں (a,b) میں کسی نقطہ c پر $h'(x)=0$ ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات 4.3 میں درکار ہے۔

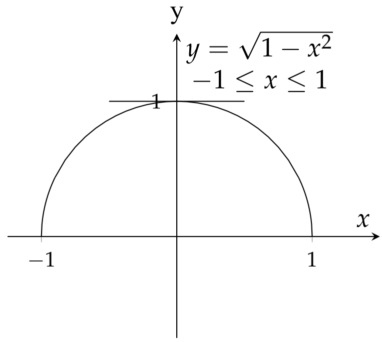
مساوات 4.3 کی تصدیق کی خاطر ہم x کے لحاظ سے مساوات 4.5 کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں $x=c$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
h'(x) &= f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} && (\text{تفرق})\\
h'(c) &= f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} && (x=c)\\
0 &= f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} && (h'(c)=0)\\
f'(c) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

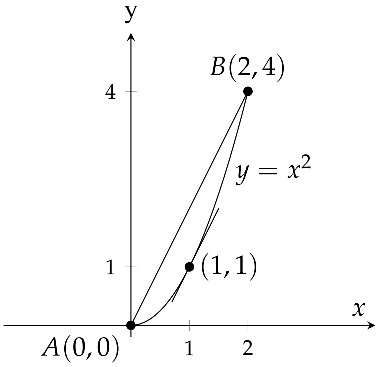
یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ a یا b پر f کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں ہے البتہ ان نقطوں پر f کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل 4.18)۔ ہم عموماً c کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ، c موجود ہے۔ اگلی مثال کی طرح



شکل 4.18: اگرچہ $y=\sqrt{1-x^2}$ نقطہ -1 اور 1 پر نا قابل تفرق ہے یہ $[-1,1]$ پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔



شکل 4.19: نقطہ $c=1$ پر مماس قطع AB کے متوازی ہے (مثال 4.5)

بعض اوقات ہم c کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذونادر ہو گا۔

مثال 4.5: وقفہ $0\le x\le 2$ پر تفاعل $f(x)=x^2$ استمراری ہے اور $0<x<2$ پر یہ قابل تفرق ہے (شکل 4.19)۔ چونکہ $f(0)=0$ اور $f(2)=4$ ہیں لہٰذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ c پر تفرق $f'(x)=2x$ کی قیمت لازماً $\frac{4-0}{2-0}=2$ ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم $2x=2$ کو حل کرتے ہوئے $x=c=1$ حاصل کر پاتے ہیں۔ $\square$

طبعی تشریح

اگر ہم $[a,b]$ پر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ کو f کی اوسط تبدیلی اور $f'(c)$ کو لمحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لمحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال 4.6: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ان 8 سیکنڈوں کے لئے گاڑی کی اوسط رفتار $\frac{120}{8}=15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی لمحہ رفتار پیما ٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔ $\square$

نتائج صریح اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا نتیجہ صریح اس کا جواب دیتا ہے۔

نتیجہ صریح 4.1: صفر تفرق کے تفاعل مستقل ہوں گے
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = 0$ ہو تب I میں تمام x پر $f(x) = C$ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ I پر تفاعل f کی قیمت مستقل ہو تب I پر f قابل تفرق ہو گا اور I میں تمام x پر $f'(x) = 0$ ہو گا۔ نتیجہ صریح اس کا الٹ پیش کرتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ I پر f کی قیمت مستقل ہے۔ہم I میں ہر دو نقطوں x_1 اور x_2 پر $f(x_1) = f(x_2)$ دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں x_1 اور x_2 وقفہ I میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بائیں سے دائیں جانب ہے لہٰذا $x_1 < x_2$ ہو گا۔یوں $[x_1, x_2]$ پر f مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔یوں x_1 اور x_2 کے بیچ کسی نقطہ c پر

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

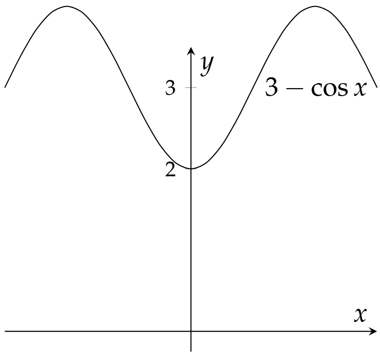
ہو گا۔چونکہ پورے I پر $f' = 0$ ہے لہٰذا اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

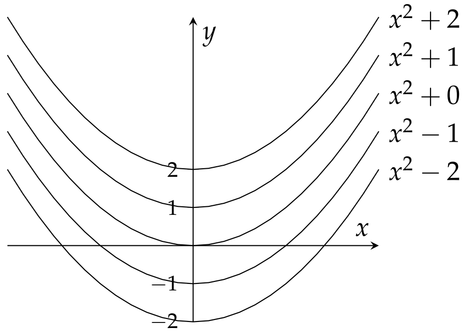
□

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا ہم اسراع سے پیچھے کی طرف چلتے ہوئے رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں۔یہ کا جواب اگلا نتیجہ صریح پیش کرتا ہے۔

نتیجہ صریح 4.2: ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = g'(x)$ ہو تب ایسا مستقل C موجود ہو گا کہ I میں تمام x پر $f(x) = g(x) + C$ ہو۔



شکل 4.21: ترسیم برائے مثال 4.7



شکل 4.20: نتیجہ صریح 4.2 کہتا ہے کہ ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں صرف انتصابی فرق پایا جاتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح: I میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق $h=f-g$ کا تفرق

$$h'(x)=f'(x)-h'(x)=0$$

ہو گا۔یوں نتیجہ صریح 4.1 کے تحت I پر $h(x)=C$ ہو گا۔یوں $f(x)-g(x)=C$ یا $f(x)=g(x)+C$ ہو گا۔

□

نتیجہ صریح 4.2 کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا مستقل فرق ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ $(-\infty,\infty)$ پر $f(x)=x^2$ کا تفرق $2x$ ہے۔ایسا دوسرا تفاعل جس کا $(-\infty,\infty)$ پر تفرق $2x$ ہو کا کلیہ لازماً x^2+C ہو گا (شکل 4.20)۔

مثال 4.7: ایسا تفاعل $f(x)$ تلاش کریں جس کا تفرق $\sin x$ ہو اور جو نقطہ $(0,2)$ سے گزرتا ہو۔
حل: چونکہ $g(x)=-\cos x$ کا تفرق بھی $\sin x$ ہے لہٰذا $f(x)=-\cos x+C$ ہو گا۔دیا گیا نقطہ اس میں پر کرتے ہوئے مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$f(0)=-\cos(0)+C=2 \quad\implies\quad C=3$$

یوں درکار تفاعل $f(x)=-\cos x+3$ ہے (شکل 4.21)۔ □

اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاو کا حصول

سطح زمین کے قریب جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار v ایسا تفاعل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ $g(t) = 9.8t$ کا تفرق 9.8 ہے لہٰذا نتیجہ صریح 4.2 کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر جسم ساکن ہو گا لہٰذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \quad \implies \quad C = 0$$

ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تفاعل $v(t) = 9.8t$ ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $h(t) = 4.9t^2$ کا تفرق $9.8t$ ہے لہٰذا نتیجہ صریح 4.2 کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ چونکہ لمحہ $t = 0$ پر ہٹاو صفر ہے لہٰذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \quad \implies \quad C = 0$$

یعنی $s(t) = 4.9t^2$ ہو گا۔

کسی تفاعل کی شرح تبدیلی سے تفاعل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

بڑھتا تفاعل اور گھٹتا تفاعل

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا نتیجہ صریح جو اس کا جواب دیتا ہے کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تفاعل کا تفرق مثبت اور گھٹے ہوئے تفاعل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف: فرض کریں وقفہ I پر تفاعل f معین ہے اور اس وقفہ پر x_1 اور x_2 کوئی بھی دو نقطے ہیں۔

1. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو تب I پر f **بڑھتا**[5] تفاعل کہلاتا ہے۔

[5] increasing

2. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) > f(x_2)$ ہو تب I پر f **گھٹتا**[6] تفاعل کہلاتا ہے۔

□

نتیجہ صریح 4.3: بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کا پہلا تفرقی پرکھ
فرض کریں $[a, b]$ پر f استمراری اور (a, b) پر f قابل تفرق ہے۔

اگر (a, b) کے ہر نقطہ پر $f' > 0$ ہو تب $[a, b]$ پر f بڑھتا ہے۔

اگر (a, b) کے ہر نقطہ پر $f' < 0$ ہو تب $[a, b]$ پر f گھٹتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح: فرض کریں $[a, b]$ میں x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں جہاں $x_1 < x_2$ ہے۔ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر مسئلہ اوسط قیمت تفاعل f کے لئے کہتا ہے کہ

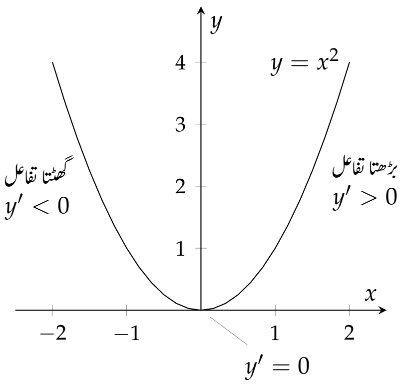
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{4.6}$$

ہو گا جہاں x_1 اور x_2 کے بیچ c ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ $x_2 - x_1$ مثبت قیمت ہے لہٰذا مساوات 4.6 کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہو گی جو $f'(c)$ کی ہے۔ یوں (a, b) پر مثبت $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_2) > f(x_1)$ ہو گا جبکہ (a, b) پر منفی $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو گا۔

□

مثال 4.8: وقفہ $(-\infty, 0)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x < 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f گھٹے گا۔ وقفہ $(0, \infty)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x > 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f بڑھے گا (شکل 4.22)۔ □

[6] decreasing



شکل 4.22: ترسیم برائے مثال 4.8

سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں c کی تلاش

سوال 1 تا سوال 4 میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لئے c کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

سوال 1: $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$

سوال 2: $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

سوال 3: $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

سوال 4: $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال

سوال 5 تا سوال 8 میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5: $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

سوال 6: $f(x) = x^{4/5}, \quad [0,1]$

سوال 7: $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad [0,1]$

سوال 8:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

سوال 9: درج ذیل تفاعل $x = 0$ اور $x = 1$ پر صفر کے برابر ہے اور $(0,1)$ پر قابل تفرق ہے لیکن (a,b) پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ $(0,1)$ پر کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10: وقفہ $[0,2]$ پر a ، m اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے درج ذیل تفاعل مسئلہ اوسط قیمت کی قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال 11:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کے یک درجی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

1. $y = x^2 - 4$
2. $y = x^2 + 8x + 15$
3. $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$
4. $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x-9)(x-24)$

ب. مسئلہ رول کی مدد سے ثابت کریں کہ $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ کے ہر دو صفر کے بیچ $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 12: فرض کریں کہ وقفہ $[a, b]$ میں f''' استمراری ہے اور اس وقفہ پر f کے تین صفر پائے جاتے ہیں۔دکھائیں کہ اس وقفہ پر f'' کا کم سے کم ایک صفر پایا جائے گا۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال 13: دکھائیں کہ اگر پورے $[a, b]$ پر $f'' > 0$ ہو تب $[a, b]$ میں f' کا زیادہ سے زیادہ ایک صفر پایا جائے گا۔اگر $[a, b]$ پر $f'' < 0$ ہو تب کیا ہو گا؟

سوال 14: دکھائیں کہ کعبی کثیر رکنی کے صفروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ممکن ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 15: دکھائیں کہ دو گھنٹوں کی صفر میں کسی لمحہ پر گاڑی کا رفتار پیا ضرور دو گھنٹوں کی اوسط رفتار دکھائے گا۔

سوال 16: تبدیلی درجہ حرارت برف سے حرارت پیا کو نکال کر ابلتے ہوئے پانی میں رکھنے سے اس کا درجہ حرارت 14 سیکنڈوں میں $-19\,^{\circ}\mathrm{C}$ سے بڑھ کر $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ اس دوران درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح کسی لمحے پر $8.5\,^{\circ}\mathrm{C\,s^{-1}}$ ضرور ہو گی۔

سوال 17: فرض کریں کہ وقفہ $[0, 1]$ پر قابل تفرق تفاعل f کا تفرق کبھی صفر نہیں ہوتا ہے۔دکھائیں کہ $f(0 \neq f(1)$ ہو گا۔

سوال 18: دکھائیں کہ a اور b کی کسی بھی قیمتوں کے لئے $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ ہو گا۔

سوال 19: فرض کریں $[a, b]$ پر f قابل تفرق ہے اور $f(b) < f(a)$ ہے۔کیا $[a, b]$ پر f' کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟

سوال 20: فرض کریں $[a, b]$ پر f اور g قابل تفرق ہیں اور $f(a) = g(a)$ اور $f(b) = g(b)$ ہیں۔دکھائیں کہ a اور b کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں f اور g کی ترسیمات کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال 21: فرض کریں x کی ہر قیمت کے لئے f قابل تفرق ہے۔مزید فرض کریں کہ $f(1) = 1$ ہے اور $(-\infty, 1)$ پر $f' < 0$ ہے اور $(1, \infty)$ پر $f' > 0$ ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام x پر $f(x) \geq 1$ ہو گا۔

ب. کیا $f'(1) = 0$ لازماً ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 22: فرض کریں $f(x)=px^2+qx+r$ بند وقفہ $[a,b]$ پر معین ہے۔دکھائیں کہ (a,b) میں ٹھیک ایک نقطہ c پر f مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ پر پورا اترتا ہے۔

سوال 23: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x)=\sin x\sin(x+2)-\sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 24: اگر دو تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک جیسی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک جیسے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

سوال 25:

ا. دکھائیں کہ تفاعل $g(x)=\frac{1}{x}$ اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھٹتا ہے۔

ب. اگر جزو (ا) کا نتیجہ درست ہو تب $g(1)=1$ کس طرح $g(-1)=-1$ سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال 26: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ میں تفاعل f معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر f پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$\text{کم سے کم } f' \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \text{زیادہ سے زیادہ } f'$$

جہاں کم سے کم f' اور زیادہ سے زیادہ f' سے مراد $[a,b]$ پر بالترتیب f' کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

سوال 27: اگر $0\leq x\leq 0.1$ پر $f'(x)=1/(1+x^4\cos x)$ ہو اور $f(0)=1$ ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 28: اگر $0\leq x\leq 0.1$ پر $f'(x)=1/(1-x^4)$ ہو اور $f(0)=2$ ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 29: ہندسی اوسط دو مثبت اعداد a اور b کی **ہندسی اوسط**[7] سے مراد عدد $\sqrt{ab}$ ہے۔دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ میں مثبت اعداد کے وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ کے لئے c کی قیمت $\sqrt{ab}$ ہے۔

---

[7] geometric mean

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم