

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
258	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
278	زنجیری قاعدہ	3.5
293	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
307	دیگر شرح تبدیلی	3.7

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

3.4 تکنونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقیاتی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں چھ تکنونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہوگی۔ چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہذا

$$\sin^2 \theta < \theta^2, \quad (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جاسکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

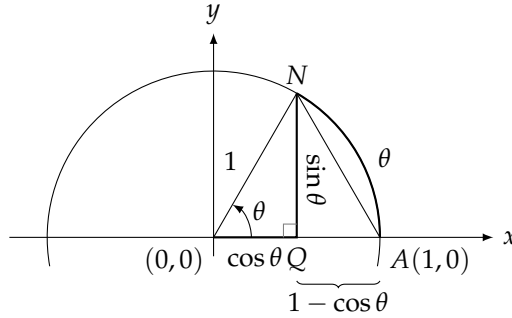
$$|\sin \theta| < |\theta|, \quad |1 - \cos \theta| < |\theta|$$

یعنی

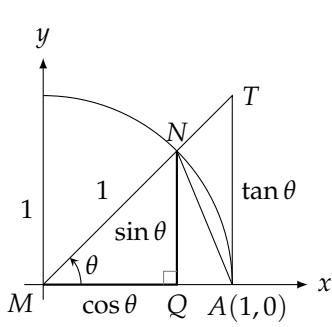
$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

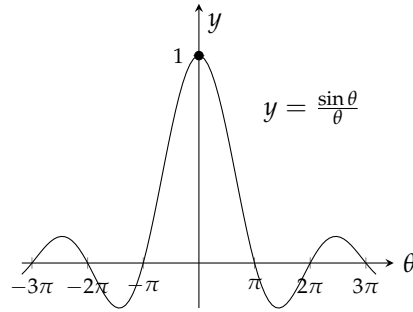
□



شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $\theta > 0$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$ لکھی جاسکتی ہے۔



شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4



شکل 3.45: تقابل $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیکش ریڈیئن میں ہے۔

مثال 3.27: دکھائیں کہ $\theta = 0$ پر $\sin \theta$ اور $\cos \theta$ استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

حل: $\theta \rightarrow 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ 3.4 سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔ □

تقابل $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیکش ریڈیئن میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta = 0$ پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 1$ ہو گا۔

مسئلہ 3.4:

$$(3.4) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ کی پیمائش ریڈین میں ہے})$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔ یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta MAN < \text{رقبہ خطہ } MAN < \Delta MAT$$

ہے۔ ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\sin \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$MAN \text{ رقبہ خطہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2}(1)^2 \theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\Delta MAT \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\tan \theta) = \frac{1}{2} \tan \theta$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$$

جس کو $\frac{1}{2} \sin \theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

حاصل ہو گا۔ اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

چونکہ $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$ ہے لہذا مسئلہ پتہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin \theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہذا $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم y محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔ اس تشاکلی کی بنا بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 148 پر مسئلہ 2.5 کے تحت $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم ٹکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر ٹکونیاتی حد تلاش کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ہے۔
حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \quad (\theta = \frac{h}{2}) \\ &= -(1)(0) = 0 \end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل $y = \sin \theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کو سائن تفاعل ہے۔

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$y = x^2 - \sin x : \quad \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق}) \\ = 2x - \cos x$$

ب.

$$y = x^2 \sin x : \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\ = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

ج.

$$y = \frac{\sin x}{x} : \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\ = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ہوتا ہے اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \quad (\text{تفرق کی تعریف}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \quad (\text{مثال 3.28 اور مسئلہ 3.4}) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

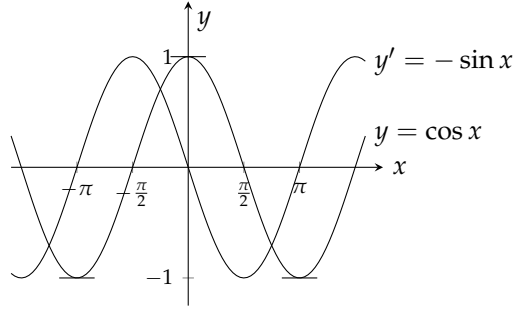
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x = -\pi, 0, \pi$) وہاں اس کا تفرق یعنی $y' = -\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔ اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

ا.

$$\begin{aligned} y &= 5x + \cos x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x \end{aligned}$$



شکل 3.47: $y = \cos x$ کی ڈھلوان تقابل $y' = -\sin x$ دیتی ہے۔

ب.

$$\begin{aligned}
 y &= \sin x \cos x \\
 \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
 &= \cos^2 x - \sin^2 x
 \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\
 &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
 &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
 &= \frac{1}{1 - \sin x}
 \end{aligned}$$

□

سادہ ہارمونئی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونئی حرکت کی ایک مثال ہے۔ اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔ لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5 \cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} s &= 5 \cos t && \text{ہم مقام} \\ v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = 5 \frac{d}{dt}(\cos t) = -5 \sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \frac{d}{dt}(\sin t) = -5 \cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں} \end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ s محور پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا محیط 5 ہے جبکہ اس کی تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کی تعدد ہے۔

2. تفاعل $\sin t$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہوگی جب $\cos t = 0$ ہوگا۔ یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہوگی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \pm 1$ ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع $a = -5 \cos t$ اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\cos t = 0$ ہوگا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔ کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہوگا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہوگا۔ اسراع کی مطلق قیمت مبداء سے دور ترین نقطہ پر زیادہ سے زیادہ ہوگی جہاں $\cos t = \pm 1$ ہوگا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔ گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{d^3s}{dt^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو جھٹکا³³ کہتے ہیں۔ اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب لمحہ t پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔ اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔ یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{dg}{dt} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) \\ = 5 \sin t$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\sin t = \pm 1$ ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \csc x &= \frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x\end{aligned}\tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔ سوال میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر $y = \sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
 y &= \sec x \\
 y' &= \sec x \tan x & (3.5 \text{ مساوات}) \\
 y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\
 &= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) & (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\
 &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
 \end{aligned}$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\frac{d}{dx}(3x + \cot x) = 3 + \frac{d}{dx}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{d}{dx}(2 \csc x) = 2 \frac{d}{dx}(\csc x) \\
 &= 2(-\csc x \cot x) = -2 \csc x \cot x
 \end{aligned}$$

□

تکوینیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکوینیاتی تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔ اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x

کی قیمت π کا عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تفاعل کے لئے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ہو گا۔ نتیجتاً ہم ٹکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \quad \text{مثال 3.36}$$

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ مطمئن ہوگی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \theta = x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1, \theta = 7x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1, \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں $x \rightarrow 0$ کرنا $\theta \rightarrow 0$ کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 3.37:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x} \quad (\text{تفاعل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے}) \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\ &= \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

ا.

ب.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) \quad (\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \\ &= \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{1}{\cos 0} \right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

\square

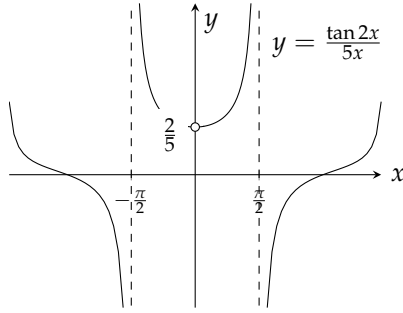
شکل 3.48 سے رجوع کریں۔

مثال 3.38: درج ذیل میں $\theta = t - \frac{\pi}{2}$ لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔ یوں $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ سے مراد $\theta \rightarrow 0$ ہو گا۔

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t - \frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

\square

احصاء کی میدان کے علاوہ تفاعل $\frac{\sin x}{x}$ دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔



شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $y = -10x + 3 \cos x$
جواب: $y' = -10 - 3 \sin x$

سوال 2: $y = \frac{2}{x} + 3 \sin x$

سوال 3: $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
جواب: $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

سوال 4: $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال 5: $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
جواب: $y' = 0$

سوال 6: $y = (\sin x + \cos x) \sec x$

سوال 7: $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

سوال 8: $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

سوال 9: $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

سوال 10: $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

3.4. ٹیکنیقیقی تفعل عل ٱٱ تففرق

سوال 11: $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

سوال 12: $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

سوال 13 تا سوال 16 میں $\frac{ds}{dt}$ تلاش کریں۔

سوال 13: $s = \tan t - t$

سوال 14: $s = t^2 - \sec t + 1$

سوال 15: $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$

سوال 16: $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

سوال 17 تا سوال 20 میں $\frac{dr}{d\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 17: $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$

سوال 18: $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$

سوال 19: $r = \sec \theta \csc \theta$

سوال 20: $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

سوال 21 تا سوال 24 میں $\frac{dp}{dq}$ تلاش کریں۔

سوال 21: $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

سوال 22: $p = (1 + \csc q) \cos q$

سوال 23: $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

سوال 24: $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

سوال 25: (i) $y = \csc x$ اور (ب) $y = \sec x$ کے لئے y'' تلاش کریں۔

سوال 26: (i) $y = -2 \sin x$ اور (ب) $y = 9 \cos x$ کے لئے $y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4}$ تلاش کریں۔

سوال 27 تا سوال 32 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{سوال 27:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)} \quad \text{سوال 28:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sec[\cos x + \pi \tan(\frac{\pi}{4 \sec x}) - 1] \quad \text{سوال 29:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x} \quad \text{سوال 30:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \quad \text{سوال 31:}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \theta}{\sin \theta}\right) \quad \text{سوال 32:}$$

سوال 33 تا سوال 48 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2} \theta}{\sqrt{2} \theta} \quad \text{سوال 33:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل}) \quad \text{سوال 34:}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{4y} \quad \text{سوال 35:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{\sin 3h} \quad \text{سوال 36:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} \quad \text{سوال 37:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\tan t} \quad \text{سوال 38:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x} \quad \text{سوال 39:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 6x^2 \cot x \csc 2x \quad \text{سوال 40:}$$

3.4. تکونیاتی تفاسل کا تفرق

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x \cos x}{\sin x \cos x} \quad \text{سوال 41:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x} \quad \text{سوال 42:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos t)}{1 - \cos t} \quad \text{سوال 43:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h} \quad \text{سوال 44:}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} \quad \text{سوال 45:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} \quad \text{سوال 46:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x} \quad \text{سوال 47:}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y} \quad \text{سوال 48:}$$

مماسی خطوط

سوال 49 تا سوال 52 میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔ تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

$$y = \sin x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi, 0, 3\pi/2 \quad \text{سوال 49:}$$

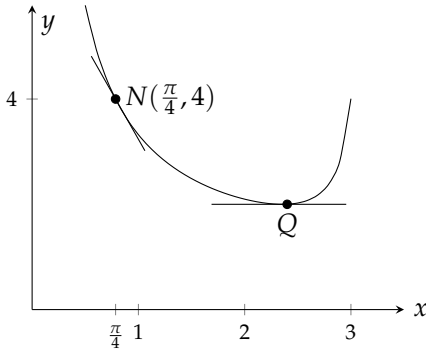
$$y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, 0, \pi/3 \quad \text{سوال 50:}$$

$$y = \sec x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, \pi/4 \quad \text{سوال 51:}$$

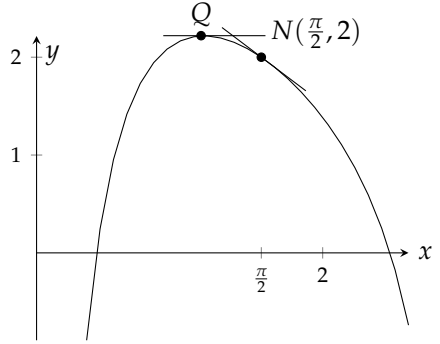
$$y = 1 + \cos x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi/3, 3\pi/2 \quad \text{سوال 52:}$$

کیا سوال 53 تا سوال 56 کا دائرہ کار $0 \leq x \leq 2\pi$ میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

$$y = x + \sin x \quad \text{سوال 53:}$$



شکل 3.50: $y = 1 + \sqrt{2} \csc x + \cot x$ تقاطع کی منحنی (سوال 60)



شکل 3.49: $y = 4 + \cot x - 2 \csc x$ تقاطع کی منحنی (سوال 59)

سوال 54: $y = 2x + \sin x$

سوال 55: $y = x - \cot x$

سوال 56: $y = x + 2 \cos x$

سوال 57: منحنی $y = \tan x$ پر $-\pi/2 < x < \pi/2$ کے پچھ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = 2x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 58: منحنی $y = \cot x$, $0 < x < \pi$ پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = -x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 59: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.49 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سوال 60: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.50 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سادہ ہارمونی حرکت

سوال 61 تا سوال 61 میں محوری لکیر s پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ $t = \pi/4$ سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال 61: $s = 2 - 2 \sin t$

سوال 62: $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال 63: کیا c کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

سوال 64: کیا b کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر (i) استمراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

سوال 65: $\frac{d^{999}}{dx^{999}}(\cos x)$ تلاش کریں۔

سوال 66: $\frac{d^{725}}{dx^{725}}(\sin x)$ تلاش کریں۔

سوال 67: x کے لحاظ سے $\sec x$ (i) اور $\csc x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

سوال 68: x کے لحاظ سے $\cot x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

کمپیوٹر کا استعمال

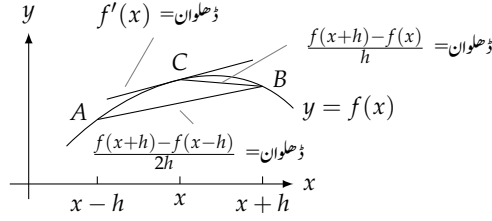
سوال 69: $-\pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \cos x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$ لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

اب $h = -1, -0.5, -0.3$ کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \rightarrow 0^+$ اور $h \rightarrow 0^-$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال 70: وسطی فرق حاصل تقسیم وسطی تفریقی حاصل تقسیم³⁴

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



شکل 3.51: فرمٹ تقریبی حاصل تقسیم سے وسطی تقریبی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

کو اعدادی تراکیب میں $f'(x)$ کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے یہ تقابل کا تفرق دیتی ہے جو h کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً فرمٹ تقریبی حاصل تقسیم³⁵

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سے بہتر ہوتا ہے (شکل 3.51)۔ (یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \sin x$ کا وسطی تقریبی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = \cos x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = \cos x$ اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔
(ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \cos x$ کا وسطی تقریبی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = -\sin x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = -\sin x$ اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 71: وسطی تقریبی حاصل تقسیم کے لئے انتہا بعض اوقات x پر ناقابل تفرق $f(x)$ کے لئے بھی وسطی تقریبی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کا $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = |x|$ لیں اور

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال 72: دائرہ کار $(-\pi/2, \pi/2)$ پر $y = \tan x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (i) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73: دائرہ کار $0 < x < \pi$ پر $y = \cot x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (i) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 74: وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر $y = \frac{\sin x}{x}$ ، $y = \frac{\sin 2x}{x}$ اور $y = \frac{\sin 4x}{x}$ کو اکٹھے ترسیم کریں۔ y محور کو یہ ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتا نظر آتی ہیں؟ کیا یہ ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے آپ $y = \frac{\sin 5x}{x}$ اور $y = \frac{\sin(-3x)}{x}$ کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟ k کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے $y = \frac{\sin kx}{x}$ سے کیا توقع کیا جاسکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 75: درجات بالقابل ریڈیئن x کو درجات میں ناپتے ہوئے $\sin x$ اور $\cos x$ کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$ کا اندازہ لگائیں۔ اس اندازے کا $\frac{\pi}{180}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا اس حد کی قیمت $\frac{\pi}{180}$ کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جاسکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

ج. اب $\sin x$ کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے $\sin x$ کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ه. بلند درجی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلہ جلد سامنے آتے ہیں۔ $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ کے لئے y'' اور y''' تلاش کریں۔

3.5 زنجیری قاعدہ

ہم $\sin x$ اور $x^2 - 4$ کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً $\sin(x^2 - 4)$ کا تفرق زنجیری قاعدہ³⁶ کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہو گا۔ احصاء میں تفرق کے حصول کے لئے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 3.39: تفاعل $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ حقیقتاً تفاعل $y = 2u$ اور $u = 3x - 5$ کا مرکب ہے۔ ان تینوں تفاعل کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟
حل: ان تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = 6, \quad \frac{dy}{du} = 2, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

چونکہ $6 = 2 \cdot 3$ ہے لہذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

□

کیا تعلق

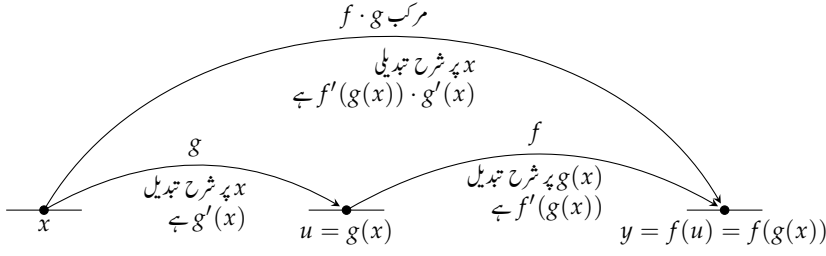
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ایک اتفاق ہے؟ اگر ہم تفرق کو شرح تبدیلی تصور کریں اور $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ ، u ہوں تب اگر u سے y دگنا تبدیل ہوتا ہو اور x سے y تین گنا تبدیل ہوتا ہو تب ہم توقع کریں گے کہ x سے y چھ گنا تبدیل ہو گا۔

آئیں دوسرا تفاعل لے کر دیکھیں۔

مثال 3.40: $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$ کو $y = u^2$ اور $u = 3x^2 + 1$ کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$



شکل 3.52: $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب x پر مرکب $f \cdot g$ کا تفرق دے گا۔

اور

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں اور ایک بار پھر درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

□

x پر مرکب تفاعل $f(g(x))$ کا تفرق $g(x)$ پر f کا تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔ اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل 3.52)۔

مسئلہ 3.5: زنجیری قاعدہ

اگر $u = g(x)$ پر $f(u)$ قابل تفرق ہو اور x پر $g(x)$ قابل تفرق ہو تب x پر مرکب تفاعل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(3.6) \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ہو گا۔ لیبنٹز طرز لکھائی میں اگر $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ ہوں تب

$$(3.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ہو گا جہاں $\frac{dy}{du}$ کو $u = g(x)$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدہ کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر $0 \rightarrow \Delta x$ کرتے ہوئے حد لینے سے زنجیری قاعدے کو ثابت نہیں کیا جاسکتا ہے چونکہ عین ممکن ہے کہ x میں تبدیل سے u میں تبدیل Δu صفر ہو۔ زنجیری قاعدہ اگلے باب میں ثابت کیا جائے گا۔

مثال 3.41: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: یہاں $y = f(g(x))$ یعنی $u = x^2 + 1$ اور $f(u) = \sqrt{u}$ ہیں۔ چونکہ f اور g کے تفرق

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ہیں لہذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

□

بابر، اندر قاعدہ

اگر $y = f(g(x))$ ہو تب مساوات 3.7 درج ذیل کہتی ہے

$$(3.8) \quad \frac{dy}{dx} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

جہاں دائیں طرف f کی اندرون کو نظر انداز کر کے جوں کا توں رکھ کر f کا تفرق لے کر اس کو f کی اندرون کے تفرق کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ یوں پہلے بیرونی تفاعل کا تفرق اور بعد میں اندرونی تفاعل کا تفرق لیا جاتا ہے۔

مثال 3.42:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sin}_{\text{بیرونی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{اندرون}} = \underbrace{\cos}_{\text{تفرق بیرونی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{اندرون نظر انداز}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{تفرق اندرون}}$$

□

زنجیری قاعدہ کا بار بار اطلاق

بعض اوقات ہم زنجیری قاعدہ کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

$$\text{مثال 3.43: } g(t) = \tan(5 - \sin 2t) \text{ کا تفرق تلاش کریں۔}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) \quad u = 5 - \sin 2t \text{ لے کر } \tan u \text{ کا تفرق} \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - (\cos 2t) \cdot \frac{d}{dt}(2t)) \quad u = 2t \text{ لے کر } 5 - \sin u \text{ کا تفرق} \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\ &= -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t) \end{aligned}$$

□

زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کے کلیات

تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔ اگر f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = f(u)$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال کے طور پر اگر u تغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور $y = u^n$ ہو جہاں n عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}(u^n) \cdot \frac{du}{dx} \\ &= nu^{n-1} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

قاعدہ 3.8: طاقت کا زنجیری قاعدہ

اگر $u(x)$ قابل تفرق ہو اور n عدد صحیح ہو تب u^n قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$(3.9) \quad \frac{d}{dx} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

مثال 3.44:

ا.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^5 x &= 5 \sin^4 x \frac{d}{dx} (\sin x) \\ &= 5 \sin^4 x \cos x \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (2x+1)^{-3} &= -3(2x+1)^{-4} \frac{d}{dx} (2x+1) \\ &= -3(2x+1)^{-4} (2) \\ &= -6(2x+1)^{-4} \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6 \cdot \frac{d}{dx} (5x^3 - x^4) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6 (5 \cdot 3x^2 - 4x^3) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3) \end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3x-2} \right) &= \frac{d}{dx} (3x-2)^{-1} \\ &= -1(3x-2)^{-2} \frac{d}{dx} (3x-2) \\ &= -1(3x-2)^{-2} (3) \\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2} \end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں تفاعل $\sin^5 x$ استعمال کیا گیا جو $(\sin x)^5$ لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

مثال 3.45: درجات بالمتقابل ریڈیئن $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ ان دونوں میں فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ ریڈیئن $180^\circ = \pi$ ہوتا ہے لہذا ریڈیئن $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos(x^\circ)$$

ہو گا۔ اسی طرح $\cos(x^\circ)$ کا تفرق $-\frac{\pi}{180} \sin(x^\circ)$ ہو گا۔

زاویہ کی ناپ درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کی ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا $\frac{\pi}{180}$ کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی زیادہ آسان ہو گی۔ □

مثال 3.46: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟

حل: ہم پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی s ہو تب اس کا حجم $H = s^3$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s اور H متغیر t (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کے راست متناسب ہے۔ یہ مفروضہ اس لئے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخل ہوتی ہے۔ یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{dH}{ds} = -k(6s^2), \quad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔ تناسب کا مستقل k مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً ارد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ ابتدائی حجم کو H_0 لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$H = s^3, \quad \frac{dH}{dt} = -k(6s^2)$$

$$H = H_0 \quad \text{at} \quad t = 0$$

$$H = \frac{3}{4}H_0 \quad \text{at} \quad t = 1 \text{ h}$$

اب ہمیں $H = 0$ پر t تلاش کرنا ہو گا۔ ہم $H = s^3$ کا تفرق زنجیری قاعدہ سے t کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{dH}{dt} = 3s^2 \frac{ds}{dt}$$

تبدیلی کی شرح $-k(6s^2)$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$3s^2 \frac{ds}{dt} = -6ks^2$$

$$\frac{ds}{dt} = -2k$$

حاصل کرتے ہیں۔ اطراف کی لمبائی مستقل شرح $2k$ سے کم ہو رہی ہے۔ یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی s_0 ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی $s_1 = s_0 - 2k$ ہو گی جس سے

$$2k = s_0 - s_1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پگھلنے کا وقت $2kt = s_0$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی:

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}} = (\frac{3}{4})^{1/3} \approx 0.91$$

ہے لہذا پگھلنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{1}{1 - 0.91} \approx 11 \text{ h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر $\frac{1}{4}$ حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لئے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتی۔ ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور اس کو مزید بہتر کس طرح بنایا جاسکتا ہے۔

سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ دیے گئے ہیں۔ $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$ تلاش کریں۔

سوال 1: $y = 6u - 9, \quad u = \frac{1}{2}x^4$

سوال 2: $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

سوال 3: $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$

سوال 4: $y = \cos u, \quad u = -\frac{x}{3}$

سوال 5: $y = \cos u, \quad u = \sin x$

سوال 6: $y = \sin u, \quad u = x - \cos x$

سوال 7: $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$

سوال 8: $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

سوال 9 تا سوال 18 میں قائل کو $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ صورت میں لکھ کر $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 9: $y = (2x + 1)^{-7}$

سوال 10: $y = (4 - 3x)^9$

سوال 11: $y = (1 - \frac{x}{7})^{-7}$

سوال 12: $y = (\frac{x}{2} - 1)^{-10}$

سوال 13: $y = (\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x})^4$

سوال 14: $y = (\frac{x}{5} + \frac{1}{5x})^5$

سوال 15: $y = \sec(\tan x)$

سوال 16: $y = \cos(\pi - \frac{1}{x})$

سوال 17: $y = \sin^3 x$

سوال 18: $y = 5 \cos^{-4} x$

سوال 19 تا سوال 38 میں متبادل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 19: $p = \sqrt{3-t}$

سوال 20: $q = \sqrt{2r-r^2}$

سوال 21: $s = \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \cos 5t$

سوال 22: $s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$

سوال 23: $r = (\csc \theta + \cot \theta)^{-1}$

سوال 24: $r = -(\sec \theta + \tan \theta)^{-1}$

سوال 25: $y = x^2 \sin^4 x + x \cos^{-2} x$

سوال 26: $y = \frac{1}{x} \sin^{-5} x - \frac{x}{3} \cos^3 x$

سوال 27: $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + (4 - \frac{1}{2x^2})^{-1}$

سوال 28: $y = (5-2x)^{-3} + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$

سوال 29: $y = (4x+3)^4(x+1)^{-3}$

سوال 30: $y = (2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

سوال 31: $h(x) = x \tan(2\sqrt{x}) + 7$

سوال 32: $k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$

سوال 33: $f(\theta) = \left(\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}\right)^2$

سوال 34: $g(t) = \left(\frac{1+\cot t}{\sin t}\right)^{-1}$

سوال 35: $r = \sin(\theta^2) \cos(2\theta)$

سوال 36: $r = \sec \sqrt{\theta} \tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$

سوال 37: $q = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$

سوال 38: $q = \cot\left(\frac{\sin t}{t}\right)$

سوال 39 تا سوال 48 میں $\frac{dy}{dt}$ تلاش کریں۔

سوال 39: $y = \sin^2(\pi t - 2)$

سوال 40: $y = \sec^2 \pi t$

سوال 41: $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$

سوال 42: $y = (1 + \cot(\frac{t}{2}))^{-2}$

سوال 43: $y = \sin(\cos(2t - 5))$

سوال 44: $y = \cos(5 \sin(\frac{t}{3}))$

سوال 45: $y = (1 + \tan^4(\frac{t}{12}))^3$

سوال 46: $y = \frac{1}{6}(1 + \cos^2(7t))^3$

سوال 47: $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$

سوال 48: $y = 4 \sin(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$

سوال 49 تا سوال 52 میں y'' تلاش کریں۔

سوال 49: $y = (1 + \frac{1}{x})^3$

سوال 50: $y = (1 - \sqrt{x})^{-1}$

سوال 51: $y = \frac{1}{9} \cot(3x - 1)$

سوال 52: $y = 9 \tan\left(\frac{x}{3}\right)$

تفرق کی اعدادی قیمتوں کا حصول

سوال 53 تا سوال 58 میں x کی دی گئی قیمت پر $(f \circ g)'$ تلاش کریں۔

سوال 53: $f(u) = u^5 + 1$, $u = g(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$

سوال 54: $f(u) = 1 - \frac{1}{u}$, $u = g(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = -1$

سوال 55: $f(u) = \cot \frac{\pi u}{10}$, $u = g(x) = 5\sqrt{x}$, $x = 1$

سوال 56: $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}$, $u = g(x) = \pi x$, $x = \frac{1}{4}$

سوال 57: $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}$, $u = g(x) = 10x^2 + x + 1$, $x = 0$

سوال 58: $f(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2$, $u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$, $x = -1$

سوال 59: فرض کریں کہ f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 2$ اور $x = 3$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	2π	5

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $2f(x)$, $x = 2$

ب. $f(g(x))$, $x = 2$

ج. $f(x) + g(x)$, $x = 3$

د. $\sqrt{f(x)}$, $x = 2$

ه. $f(x) \cdot g(x)$, $x = 3$

و. $1/g^2(x)$, $x = 3$

ز. $f(x)/g(x)$, $x = 2$

ح. $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, $x = 2$

سوال 60: فرض کریں کہ تفاعل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 0$ اور $x = 1$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$1/3$
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

$$x=0 \text{ } g(f(x)), \text{ } \therefore$$

$$5f(x) - g(x), x = 1 \text{ } \text{ا.}$$

$$f(x)g^3(x), x = 0 \text{ } \text{ب.}$$

$$(x^{11} + f(x))^{-2}, x = 1 \text{ } \text{و.}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)+1}, x = 1 \text{ } \text{ج.}$$

$$x=0 \text{ } f(x+g(x)), \text{ } \text{ز.}$$

$$f(g(x)), x = 0 \text{ } \text{د.}$$

سوال 61: اگر $s = \cos \theta$ اور $\frac{d\theta}{dt} = 5$ ہوں تب $\theta = 3\pi/2$ پر $\frac{ds}{dt}$ تلاش کریں۔

سوال 62: اگر $y = x^2 + 7x - 5$ اور $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$ ہوں تب $x = 1$ پر $\frac{dy}{dt}$ تلاش کریں۔

مرکب کئے کئی صورتیں

اگر مرکب تقابل کو مختلف انداز میں لکھنا ممکن ہو تب کیا ہوگا؟ کیا ہر صورت سے ایک جیسا تفرق حاصل ہوگا؟ زنجیری قاعدہ کہتا ہے کہ ایسا ہی ہوگا۔ اگلے دو سوالات میں اس عمل کو دیکھیں۔

سوال 63: تقابل $y = x$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

$$y = \frac{u}{5} + 7, \quad u = 5x - 35 \text{ } \text{ا.}$$

$$y = 1 + \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{x-1} \text{ } \text{ب.}$$

سوال 64: تقابل $y = x^{3/2}$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

$$y = u^3, \quad u = \sqrt{x} \text{ } \text{ا.}$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = x^3 \text{ } \text{ب.}$$

مماس اور ڈھلوان

سوال 65:

ا. $x = 1$ پر منحنی $y = 2 \tan(\pi x/4)$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 < x < 2$ پر منحنی کی ڈھلوان کی کم سے کم قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 66:

ا. مبداء پر $y = \sin 2x$ اور $y = -\sin \frac{x}{2}$ کے مماس کی مساواتیں تلاش کریں۔ کیا ان مماس کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا مبداء پر $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی مماسوں کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے جہاں مستقل $m \neq 0$ ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ج. کسی بھی دیے گئے m کے لئے $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی زیادہ سے زیادہ ڈھلوان کیا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $y = \sin x$ ایک چکر پورا کرتا ہے، تفاعل $y = \sin 2x$ دو چکر پورے کرتا ہے، تفاعل $y = \sin \frac{x}{2}$ آدھا چکر پورا کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ کیا اس وقفے پر تفاعل $y = \sin mx$ کے مکمل چکر اور مبداء پر تفاعل کی ڈھلوان کا آپس میں کوئی تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال 67: مشین کا بہت تیز چلنا ایک گاڑی کی انجن کا پشٹن³⁷ اوپر نیچے دوری حرکت کرتا ہے جس کو

$$s = A \cos(2\pi bt)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمحہ t پر پشٹن کا مقام s ہے جبکہ A اور b مثبت مستقل ہیں۔ حرکت کا حیظ A اور اس کی تعدد (ایک سیکنڈ میں اوپر نیچے حرکت کی گنتی) b ہے۔ تعدد دگنا کرنے سے پشٹن کی سمتی رفتار، اسراع اور جھٹکا پر کیا اثر ہوگا؟ (یہ جاننے کے بعد آپ سمجھ سکتے ہیں کہ مشین تیز چلانے سے کیوں خراب ہوتی ہے۔)

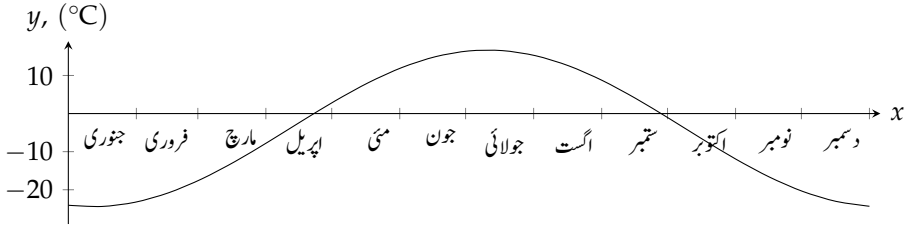
سوال 68: قطب شمالی کے نزدیک ایلاسکا کے ایک شہر میں درجہ حرارت ایلاسکا³⁸ کے ایک شہر میں پورے سال کے ہر دن کے اوسط درجہ حرارت کو شکل 3.53 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو درج ذیل تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$y = 20.56 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] - 3.89$$

ا. کس دن درجہ حرارت تیز ترین تبدیل ہوتا ہے؟

ب. ایک دن میں درجہ حرارت کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کتنی ہے؟

piston³⁷
alaska³⁸



شکل 3.53: اوسط درجہ حرارت

سوال 69: محور کلیپر پر ایک جسم کا مقام $s = \sqrt{1+4t}$ ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ لمحہ $t = 6$ s پر اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع کیا ہیں؟

سوال 70: ساکن حال کے t سیکنڈ بعد ایک گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = k\sqrt{s}$ ms⁻¹ ہے جہاں k مستقل اور ساکن مقام سے فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ جسم کی اسراع مستقل ہے۔

سوال 71: زمین کی فضا میں داخل ہونے والے شہاب ثاقب کی سمتی رفتار \sqrt{s} کے بالعکس متناسب ہے جہاں s زمین کی وسط سے شہاب ثاقب کا فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ شہاب ثاقب کی اسراع s^2 کے بالعکس متناسب ہے۔

سوال 72: x محور پر حرکت کرنے والے ایک ذرہ کی سمتی رفتار $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ہے۔ دکھائیں کہ اس ذرہ کی اسراع $f(x)f'(x)$ ہے۔

سوال 73: لٹکن کا دوری عرصہ بالمقابل درجہ حرارت ایک لٹکن جس کی لمبائی L ہو کا دوری عرصہ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ہو گا جہاں لٹکن کے مقام پر ثقلی اسراع کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں T کی اکائی سیکنڈ اور L کی اکائی میٹر ہے۔ اگر لٹکن کسی دھات سے بنا ہو تب اس کی لمبائی درجہ حرارت کے ساتھ درج ذیل کلیہ کے تحت تبدیل ہوگی

$$\frac{dL}{du} = kL$$

جہاں درجہ حرارت کو u سے ظاہر کیا گیا ہے اور k مستقل ہے۔ دکھائیں کہ حرارت کے ساتھ دوری عرصہ تبدیل ہونے کی شرح $\frac{kT}{2}$ ہوگی۔

سوال 74: اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = |x|$ ہوں تب مرکبات

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{اور} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

دونوں $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں اگرچہ $x = 0$ پر g از خود قابل تفرق نہیں ہے۔ کیا یہ زنجیری قاعدہ کے مترادف ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 75: فرض کریں $x = 1$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(1)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے۔ اگر $x = 1$ پر $y = f(g(x))$ کے متحلی کا مماس افقی ہو تب کیا $x = 1$ پر g کے مماس یا $u = g(1)$ پر f کے مماس کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 76: فرض کریں کہ $x = -5$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(-5)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے اور $(f \circ g)'(-5)$ منفی ہے۔ کیا $g'(-5)$ اور $f'(g(-5))$ کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے۔

زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اگلے دو سوالات میں دیے گئے تفاعل x^n کے لئے دکھائیں کہ طاقی قاعدہ $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ مطمئن ہوتا ہے۔

$$\text{سوال 77: } x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$\text{سوال 78: } x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 79: $y = \sin 2x$ کا تفرق وقفہ $-2 \leq x \leq 3.5$ کے لئے تفاعل $y = 2 \cos 2x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.2$ کے لئے

$$y = \frac{\sin 3(x+h) - \sin 2x}{h}$$

ترسیم کریں۔ کی دیگر (بشمول منفی) قیمتوں کے لئے بھی اس کو ترسیم کریں۔ $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال 80: درج ذیل کثیر رکنی کو شکل 3.54 میں دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر تقریباً دندان موج $s = g(t)$ نظر آتا ہے۔

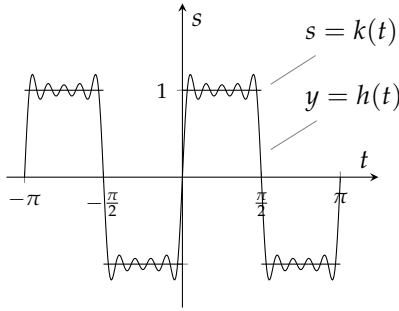
$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662 \cos 2t - 0.07074 \cos 6t - 0.02546 \cos 10t - 0.01299 \cos 14t$$

جہاں دندان موج معین ہو وہاں اس کثیر رکنی کا تفرق دندان موج کی تفرق کو کتنا خوش اسلوبی سے ظاہر کرتا ہے؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

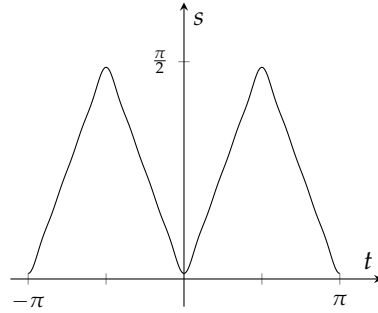
ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{dg}{dt}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. تلاش کر کے ترسیم کریں۔ $\frac{df}{dt}$

ج. کہاں پر $\frac{dg}{dt}$ کو $\frac{df}{dt}$ بہتر ظاہر کرتا ہے؟ کہاں خراب ترین ظاہر کرتا ہے؟ تکنیکی تفاعل سے عموماً مختلف تفاعل کو ظاہر کیا جاتا ہے البتہ جیسے اگلا سوال میں ظاہر ہو گا اصل تفاعل کے تفرق کو عموماً ان کثیر رکنی کے تفرق سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔



شکل 3.55: سیڑھی تفاعل $s = k(t)$ کا $s = h(t)$ کثیر رکنی سے اظہار (سوال 81)



شکل 3.54: دندان موج کا کثیر رکنی سے اظہار (سوال 80)

سوال 81: گزشتہ سوال میں دندان موج کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا جہاں ہم نے دیکھا کہ دندان موج کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر کرتا ہے۔ آئیں اب ایسا تفاعل دیکھیں جس کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے البتہ تفاعل کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر نہیں کرتا ہے۔ شکل 3.55 میں سیڑھی تفاعل کو درج ذیل کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$s = h(t) = 1.2732 \sin 2t + 0.4244 \sin 6t + 0.25465 \sin 10t + 0.18186 \sin 14t + 0.14147 \sin 18t$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ کثیر رکنی کا تفرق ہر گز سیڑھی تفاعل کا تفرق نہیں دیتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

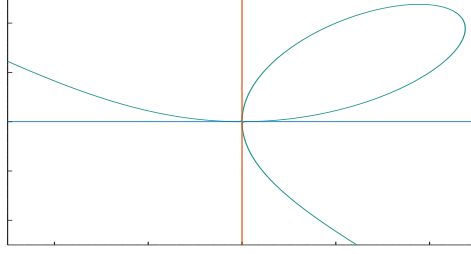
ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{dk}{dt}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. $\frac{dh}{dt}$ ترسیم کریں۔

ج. نتائج کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

3.6 خفی تفرق اور مناطق قوت نما

بعض اوقات مساوات $F(x, y) = 0$ کو $y = f(x)$ روپ میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ اس کے باوجود ہم $\frac{dy}{dx}$ کو خفی تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اس حصہ میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا اور اس کے ذریعہ طاقتی قاعدہ کو وسعت دیتے ہوئے تمام مناطق تفاعل کو شامل کیا جائے گا۔



شکل 3.56: خفی معنی $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ جس کو پتا بھی کہتے ہیں۔

خفی تفرق

چونکہ مساوات $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ درحقیقت تین تفاعل $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ اور $y = f_3(x)$ کا ملاپ ہے جو ماسوائے نقطہ M اور A کے قابل تفرق ہیں لہذا اس کے ترسیم کا تقریباً ہر نقطہ پر انہی طرح معین ڈھلوان پایا جاتا ہے (شکل 3.56)۔ خفی تفاعل کا تفرق لینے کی خاطر y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے قواعد برائے قوت نما، طاقت، مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور زنجیری قاعدہ زیر استعمال لائے جاتے ہیں۔ اس کے بعد $\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کرتے ہوئے کسی بھی نقطہ (x, y) پر تفرق حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اس ترکیب کو خفی تفرق³⁹ کہتے ہیں۔

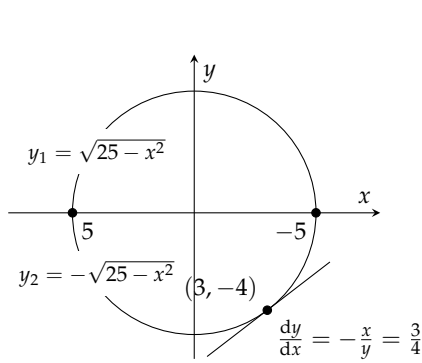
مثال 3.47: $y^2 = x$ ہے۔ $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔
 حل: مساوات $y^2 = x$ درحقیقت دو تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کو ظاہر کرتی ہے جہاں جذر کی مثبت قیمت لی جاتی ہے۔ ہم $x > 0$ کے لئے ان دونوں تفاعل کا تفرق لینا جانتے ہیں۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

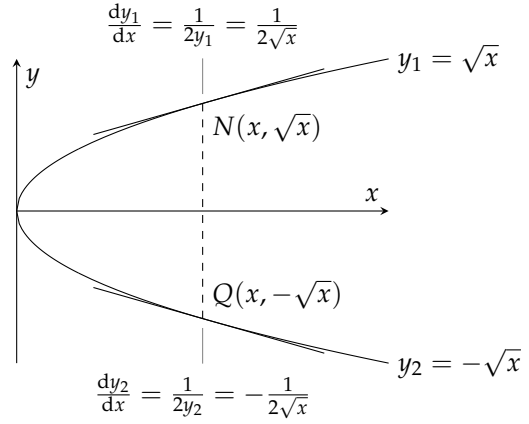
آئیں اب اس مساوات کو دو تفاعل میں تقسیم کیے بغیر اس کا تفرق حاصل کریں۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں $f(x) = y^2$ لکھ کر $\frac{df}{dx} = 2y$ لکھا جا سکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

زنجیری قاعدہ



شکل 3.58: ترسیم برائے مثال 3.48



شکل 3.57: ترسیم برائے مثال 3.47

ہو گا۔ یہ کلیہ دونوں صریح تقابل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کا تفرق دیتا ہے۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

مثال 3.48: نقطہ $(3, -4)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.58)۔
حل: دائرہ در حقیقت دو قابل تفرق تقابل $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ اور $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ نقطہ $(3, -4)$ تقابل y_2 پر پایا جاتا ہے لہذا ہم صریحاً ڈھلوان تلاش کر سکتے ہیں:

$$(3.10) \quad \left. \frac{dy_2}{dx} \right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

ہم دائرے کی مساوات کا x کے لحاظ سے خفی تفرق

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

لے کر $(3, -4)$ پر ڈھلوان کی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

دھیان رہے کہ مساوات 3.10 صرف x محور کے نیچے جوابات دیتی ہے جبکہ درج بالا تمام نقطوں پر قابل استعمال ہے۔ خفی تفرق کی قیمت عموماً x اور y دونوں پر منحصر ہوتی ہے جبکہ صریحاً حاصل تفرق کے کلیہ میں صرف x درکار ہو گا۔ □

دیگر خفی تفاعل کا تفرق بھی درج بالا دو مثالوں کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف تفرق کے قواعد استعمال کرتے ہیں۔

مثال 3.49: $2y = x^2 + \sin y$ کے لئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} 2y &= x^2 + \sin y \\ \frac{d}{dx}(2y) &= \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y) \\ &= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y) \\ 2\frac{dy}{dx} &= 2x + \cos y \frac{dy}{dx} \\ 2\frac{dy}{dx} - \cos y \frac{dy}{dx} &= 2x \\ \frac{dy}{dx}(2 - \cos y) &= 2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{2 - \cos y} \end{aligned}$$

□

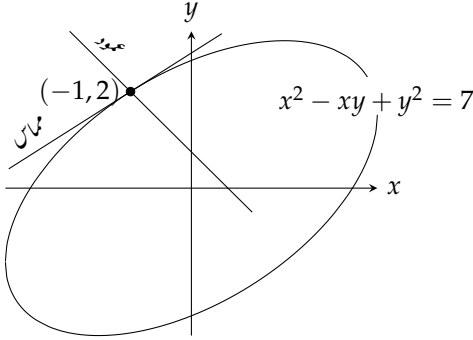
خفی تفرق چار اقدام پر مشتمل ہے۔

1. y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کو تفرق کے قواعد کے مطابق تفرق کریں۔

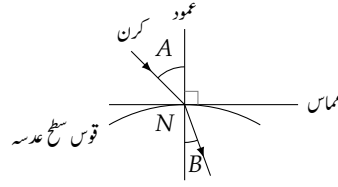
2. $\frac{dy}{dx}$ والے اجزاء کو ایک طرف اکٹھا کریں۔

3. $\frac{dy}{dx}$ کو تجزی کریں۔

4. $\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کریں۔



شکل 3.60: تزییات برائے مثال 3.50



شکل 3.59: عدسہ میں کرن داخل ہوتے ہوئے عمود کی طرف جھکتی ہے۔

عدسہ، مماس اور عمودی خطوط

روشنی کی کرن عدسہ میں نقطہ N پر داخل ہوتے ہوئے سمت تبدیل کرتی ہے (شکل 3.59)۔ مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی خط کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ N پر منحنی کے مماس کے ساتھ قائمہ خط کو **عمودی**⁴⁰ کہتے ہیں۔ اس خط کو N پر منحنی کا **عمود** کہتے ہیں۔

عدسہ کی سطح پر تبصرہ عموماً دو درجی منحنیات کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ ان منحنیات کے مماس اور عمود کو خفی تفرق سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.50: نقطہ $(-1, 2)$ پر منحنی $x^2 - xy + y^2 = 7$ کا مماس اور عمود تلاش کریں (شکل 3.60)۔
حل: ہم خفی تفرق سے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$2x - (x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx}) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y - x) \frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

نقطہ $(x, y) = (-1, 2)$ پر ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(-1,2)} = \left. \frac{y - 2x}{2y - x} \right|_{(-1,2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$

$(-1, 2)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{4}{5}(x - (-1))$$

$$y = \frac{4}{5} + \frac{14}{5}$$

اسی طرح منحنی کا عمود نقطہ $(-1, 2)$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 - \frac{5}{4}(x - (-1))$$

$$y = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}$$

□

خفی تفرق سے بلند درجی تفرق کا حصول

خفی تفرق سے بلند درجی تفرق حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.51: $2x^3 - 3y^2 = 7$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔
حل: ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق حاصل کرتے ہوئے پہلے $\frac{dy}{dx}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$2x^3 - 3y^2 = 7$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y} \quad (y \neq 0 \text{ اگر})$$

ہم اب مساوات $x^2 - yy' = 0$ کا تفرق لیتے ہوئے y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(yy') = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x - y'y' - yy'' = 0$$

$$yy'' = 2x - (y')^2$$

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(y')^2}{y} \quad (y \neq 0 \text{ اگر})$$

ہم آخر میں $y' = \frac{x^2}{y}$ پر کرتے ہوئے x اور y کی روپ میں y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(x^2/y)^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \quad (y \neq 0 \text{ اگر})$$

□

قابل تفرق تفاعل کے ناطق طاقت

ہم جانتے ہیں کہ طاقتی قاعدہ

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

عدد صحیح n کے لئے درست ہے۔ ہم اب دکھاتے ہیں کہ یہ قاعدہ کسی بھی ناطق عدد کے لئے درست ہے۔

مسئلہ 3.6: ناطق طاقت کے لئے طاقتی قاعدہ

اگر ناطق عدد ہو تب x^{n-1} کے دائرہ کار کے ہر اندرونی نقطہ x پر x^n قابل تفرق ہوگا اور یہ تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ثبوت: فرض کریں p اور q عدد صحیح ہیں جہاں $q > 0$ اور $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ ہے۔ تب

$$y^q = x^p$$

ہو گا۔ یہ مساوات اور کے طاقتوں کا ملاپ ہے لہذا (اس حصہ کے ابتدا میں اعلیٰ مسئلہ کے تحت) y متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں (جن کے لئے ہمارے پاس قاعدہ طاقت ہے) ہم خفی مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے سکتے ہیں:

$$qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

اب اگر $y \neq 0$ ہو تب دونوں اطراف کو qy^{q-1} سے تقسیم کیا جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{(p/q)})^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1} \end{aligned}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.52:

ا.

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{تفاعل } x \geq 0 \text{ جبکہ تفرق } x > 0 \text{ کے لئے معین ہے}$$

ب.

$$\frac{d}{dx}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5} \quad \text{تفاعل تمام } x \text{ جبکہ تفرق } x \neq 0 \text{ کے لئے معین ہے}$$

□

طاقق قاعدہ کی ایک روپ جس میں زنجیری قاعدہ ضم ہے کہتا ہے کہ اگر n ناطق عدد ہو اور x پر u قابل تفرق ہو اور $(u(x))^{n-1}$ معین ہو تب x پر u^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$(3.11) \quad \frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

مثال 3.53:

ا.

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2)^{1/4} = \frac{1}{4} (1 - x^2)^{-3/4} (-2x)$$

تفاعل وقفہ $[-1, 1]$ جبکہ تفرق وقفہ $(-1, 1)$ پر معین ہے۔

ب.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} \frac{d}{dx} (\cos x) \\ &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} (-\sin x) \\ &= \frac{1}{5} \sin x (\cos x)^{-6/5} \end{aligned}$$

□

سوالات

ناطق طاقتوں کا تفرق

سوال 1 تا سوال 10 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $y = x^{9/4}$

سوال 2: $y = x^{-3/5}$

سوال 3: $y = \sqrt[3]{2x}$

سوال 4: $y = \sqrt[4]{5x}$

سوال 5: $y = 7\sqrt{x+6}$

سوال 6: $y = -2\sqrt{x-1}$

سوال 7: $y = (2x+5)^{-1/2}$

سوال 8: $y = (1-6x)^{2/3}$

سوال 9: $y = x(x^2+1)^{1/2}$

سوال 10: $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

سوال 11 تا سوال 18 میں پہلا تفرق تلاش کریں۔

سوال 11: $s = \sqrt[7]{t^2}$

سوال 12: $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

سوال 13: $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$

سوال 14: $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

سوال 15: $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

سوال 16: $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

سوال 17: $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

سوال 18: $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

خفی تفرق

سوال 19 تا سوال 32 میں $\frac{dy}{dx}$ کو خفی تفرق کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 19: $x^2y + xy^2 = 6$

3.6. خفی تفرق اور ناظم قوت نم

سوال 20: $x^3 + y^3 = 18xy$

سوال 21: $2xy + y^2 = x + y$

سوال 22: $x^3 - xy + y^3 = 1$

سوال 23: $x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$

سوال 24: $(3xy + 7)^2 = 6y$

سوال 25: $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

سوال 26: $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

سوال 27: $x = \tan y$

سوال 28: $x = \sin y$

سوال 29: $x + \tan(xy) = 0$

سوال 30: $x + \sin y = xy$

سوال 31: $y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$

سوال 32: $y^2 \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

سوال 33 تا سوال 36 میں $\frac{dr}{d\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 33: $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

سوال 34: $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

سوال 35: $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$

سوال 36: $\cos r + \cos \theta = r\theta$

بلند درجی تفرق

سوال 37 تا سوال 42 میں خفی تفرق کی مدد سے پہلے $\frac{dy}{dx}$ اور بعد میں $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔

سوال 37: $x^2 + y^2 = 1$

سوال 38: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

سوال 39: $y^2 = x^2 + 2x$

سوال 40: $y^2 - 2x = 1 - 2y$

سوال 41: $2\sqrt{y} = x - y$

سوال 42: $xy + y^2 = 1$

سوال 43: نقطہ $(2, 2)$ پر $x^3 + y^3 = 16$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 44: نقطہ $(0, -1)$ پر $xy + y^2 = 1$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ڈھلوان، مماس اور عمود

سوال 45 تا سوال 46 میں دیے گئے نقطوں پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 45: $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$

سوال 46: $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$, $(1, 0)$, $(1, -1)$

سوال 47 تا سوال 56 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا نقطہ مماس پر پایا جاتا ہے اور اس نقطے پر مماس کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 47: $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$

سوال 48: $x^2 + y^2 = 25$, $(3, -4)$

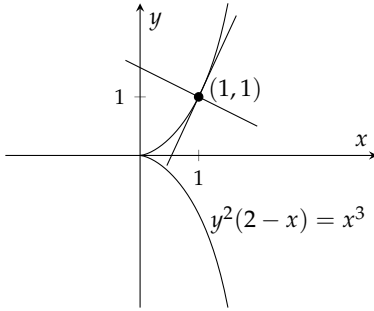
سوال 49: $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$

سوال 50: $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, $(-2, 1)$

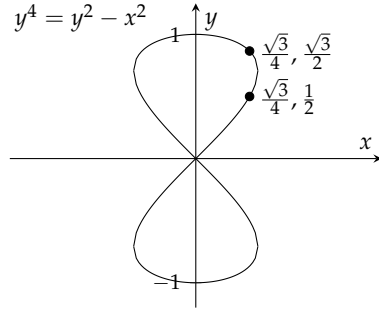
سوال 51: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$, $(-1, 0)$

سوال 52: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5$, $(\sqrt{3}, 2)$

سوال 53: $2xy + \pi \sin y = 2\pi$, $(1, \pi/2)$



شکل 3.62: منحنی برائے سوال 60



شکل 3.61: منحنی آٹھ (سوال 59)

سوال 54: $x \sin 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

سوال 55: $y = 2 \sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$

سوال 56: $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0, \pi)$

سوال 57: x محور کو $x^2 + xy + y^2 = 7$ دو نقطوں پر قطع کرتی ہے۔ ان نقطوں کو تلاش کریں اور دکھائیں کہ ان نقطوں پر منحنی کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔ ان مماس کی ڈھلوان کیا ہو گی؟

سوال 58: منحنی $x^2 + y^2 + xy = 7$ پر وہ نقطے تلاش کریں جہاں (i) مماس x محور کے متوازی ہے، (ب) مماس y محور کے متوازی ہے۔ دوسرے جزو میں $\frac{dy}{dx}$ غیر معین جبکہ $\frac{dx}{dy}$ معین ہے۔ ان نقطوں پر $\frac{dx}{dy}$ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 59: منحنی آٹھ نقطہ $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ اور $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ پر $y^4 = y^2 - x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.61)۔

سوال 60: نقطہ $(1, 1)$ پر $y^2(2-x) = x^3$ کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں (شکل 3.62)۔

سوال 61: چار نقطوں $(-3, 2)$ ، $(-3, -2)$ ، $(3, 2)$ اور $(3, -2)$ پر $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 62:

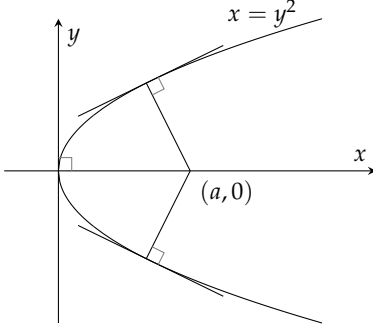
ا. نقطہ $(4, 2)$ اور $(2, 4)$ پر پتا $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.56)۔

ب. مبداء کے علاوہ پتے کا مماس کس نقطے پر افقی ہے؟

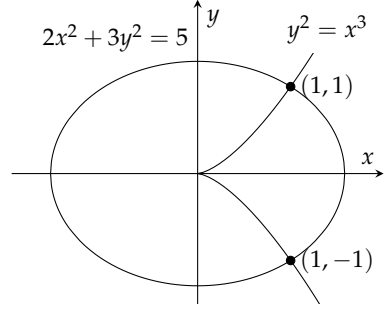
ج. کس نقطے پر پتے کا مماس انتصابی ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 63: اگر $f''(x) = x^{-1/3}$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے درست ہوں گے؟



شکل 3.64: منحنی برائے سوال 67



شکل 3.63: ترسیم برائے سوال 64

$$f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3} \text{ ج۔}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3 \text{ ا۔}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6 \text{ د۔}$$

$$f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7 \text{ ب۔}$$

سوال 64: کیا نقطہ $(1, 1)$ اور $(1, -1)$ پر $2x^2 + 3y^2 = 5$ اور $y^2 = x^3$ کے مماس میں کوئی خاصیت پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل 3.63)۔

سوال 65: نقطہ $(1, 1)$ پر منحنی $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ کا مماس اس منحنی کو کس دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے؟

سوال 66: منحنی $xy + 2x - y = 0$ کا ایسا عمود تلاش کریں جو $2x + y = 0$ کے متوازی ہو۔

سوال 67: دکھائیں کہ اگر نقطہ $(a, 0)$ سے قطع مکانی $x = y^2$ تک تین عمود بنانا ممکن ہو تب $a > \frac{1}{2}$ ہو گا۔ تیسرا عمود x محور ہے۔ a کی کس قیمت کے لئے باقی دو عمود آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں (شکل 3.64)؟

سوال 68: مثال 3.52 اور مثال 3.53-1 میں کس جیومیٹری کی بنا دائرہ کار کے حدود تعین ہوتے ہیں؟

سوال 69 اور سوال 70 میں پہلے y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں اور اس کے بعد x کو y کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dx}{dy}$ تلاش کریں۔ کیا $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{dx}{dy}$ کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ کیا آپ اس تعلق کو منحنی کی ترسیم کی مدد سے جیومیٹری کے ذریعہ سمجھا سکتے ہیں؟

$$xy^3 + x^2y = 6 \text{ سوال 69:}$$

$$x^3 + y^2 = \sin^2 y \text{ سوال 70:}$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 71:

ا. مخفی $x^4 + 4y^2 = 1$ کا $\frac{dy}{dx}$ عمومی طریقہ اور مخفی طریقہ سے حاصل کریں۔ کیا دونوں جوابات ایک دوسرے جیسے ہیں؟
 ب. مساوات $x^4 + 4y^2 = 1$ کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تمام حاصل تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے $x^4 + 4y^2 = 1$ کی مکمل ترسیم کھینچیں۔ اب ساتھ ہی ان تفاعل کے ایک درجی تفرق کے ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا $x^4 + 4y^2 = 1$ کی ترسیم کو دیکھ کر آپ اس کے تفرق کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا مساوات کے تفرق کی تقسیم کو دیکھ کر آپ مساوات کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 72:

ا. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کا تفرق $\frac{dy}{dx}$ دو طریقوں سے تلاش کریں۔ پہلی بار مساوات کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تفرق حاصل کریں جبکہ دوسری بار مخفی طریقہ استعمال کریں۔ کیا دونوں بار ایک جیسے جوابات حاصل ہوتے ہیں؟

ب. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کو y کے لئے حل کریں۔ تمام حاصل تفاعل کا ترسیم کھینچ کر مساوات $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کی مکمل ترسیم حاصل کریں۔ اب تفاعل کے ایک درجی تفرق کا ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا آپ مساوات کی ترسیم کو دیکھ کر اس کے تفرق کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا آپ تفرق کی ترسیم کو دیکھ کر مساوات کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73 تا سوال 80 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. کمپیوٹر پر مساوات کو ترسیم کریں۔ تصدیق کریں کہ نقطہ N مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. مخفی طریقہ سے تفرق $\frac{dy}{dx}$ کا کلیہ حاصل کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کی قیمت تلاش کریں۔

ج. N پر ڈھلوان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے اس نقطہ پر مماس کی مساوات حاصل کریں۔ مماس اور مساوات کو اکٹھے ترسیم کریں۔

سوال 73: $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad N(2, 1)$

سوال 74: $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad N(1, 1)$

سوال 75: $y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad N(0, 1)$

سوال 76: $y^3 + \cos(xy) = x^2, \quad N(1, 0)$

سوال 77: $x + \tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2, \quad N(1, \pi/2)$

سوال 78: $xy^3 + \tan(x+y) = 1, \quad N(\pi/4, 0)$

سوال 79: $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad N(1, 1)$

سوال 80: $x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad N(1, 0)$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

