

# احصاء اور تحليلي علم الهندسه

(جلد اول)

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامسيٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

7.2	قدرتی لوگار تھم	762
7.3	قوت نمائی تفاعل	779
7.4	$\log_a x$ اور $a^x$	794
7.5	افزائش اور تنزل	805
7.6	قاعدہ لھوپیٹال	819
7.7	اضافی شرح نمو	835
7.7.1	ترتیبی اور شمائی تلاش	840
7.8	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	846
7.9	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	862
7.10	بدلولی تفاعل	879
7.11	یک رتبی تفرقی مساوات	900
7.12	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	918

8	تکمل کے طریقے	929
8.1	تکمل کے بنیادی کلیات	929
8.2	تکمل بالخص	945
8.2.1	بار بار استعمال	950
8.3	جزوی کسر	959
8.4	نکتہ بنائی بدل	974
8.5	جدول تکمل اور کمپیوٹر	986
8.6	غیر مناسب تکمل	1003

9	لا متناہی تسلسل	1029
9.1	اعداد کی ترتیب کی حد	1029
9.2	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	1048
9.3	لا متناہی تسلسل	1064
9.4	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	1083
9.5	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	1093
9.6	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	1103
9.7	بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	1115
9.8	طاققی تسلسل	1129
9.9	ٹیبلر اور مکملارن تسلسل	1145
9.10	ٹیبلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلل کے اندازے	1156
9.11	طاققی تسلسل کے استعمال	1175

10	مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	1195
10.1	مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	1195
10.2	سک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	1220

1230 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1286 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301 . . . . .	10.8.1	دائرے
1315 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1345 . . . . .	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353 . . . . .	11.2.1	کرہ
1363 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1364 . . . . .	11.3.1	حساب
1378 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1393 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426 . . . . .	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1478 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1499 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1545 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1562 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1594 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1640 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1657 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1665	14 تکمل بالکثرت
1665 . . . . .	14.1 دوہرا نکملات
1685 . . . . .	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701 . . . . .	14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712 . . . . .	14.4 کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727 . . . . .	14.5 تعین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736 . . . . .	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756 . . . . .	14.7 نکملات بالکثرت میں بدل

1771	15 سستی میدان میں تکمل
1771 . . . . .	15.1 خطی تکمل
1774 . . . . .	15.1.1 جمع پذیری

1769	جوابات
1853	ا ضمیمہ اول
1855	ب ضمیمہ دوم
1857	ج ضمیمہ تین
1859	د ضمیمہ چار
1861	ه ضمیمہ پانچ
1863	و ضمیمہ چھ
1865	ز ضمیمہ سات
1867	ح ضمیمہ آٹھ
1869	ط ضمیمہ آٹھ
1871	ی نکملات کا مختصر جدول





## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

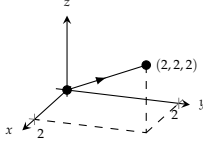
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

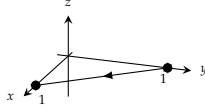
میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

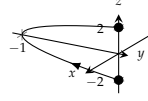
28 اکتوبر 2011



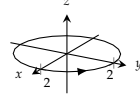
شکل 15.9



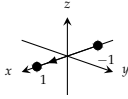
شکل 15.8



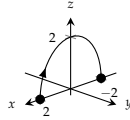
شکل 15.7



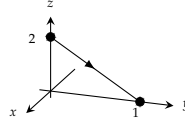
شکل 15.6



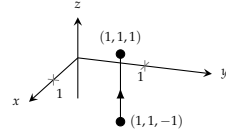
شکل 15.13



شکل 15.12



شکل 15.11



شکل 15.10

### سوالات

#### سمتی مساوات کے ترسیات

سوال 15.1 تا سوال 15.8 میں دی گئی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل 15.6 تا شکل 15.13 میں تلاش کریں۔

سوال 15.1:  $r(t) = ti + (1-t)j, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 15.2:  $r(t) = i + j + tk, \quad -1 \leq t \leq 1$

سوال 15.3:  $r(t) = (2 \cos t)i + (2 \sin t)j, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 15.4:  $r(t) = ti, \quad -1 \leq t \leq 1$

سوال 15.5:  $r(t) = ti + tj + tk, \quad 0 \leq t \leq 2$

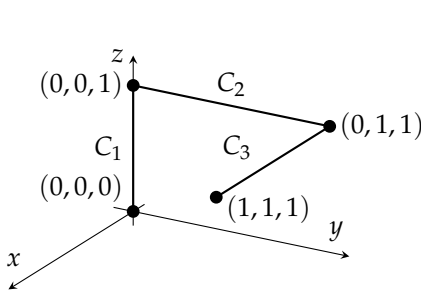
سوال 15.6:  $r(t) = tj + (2-2t)k, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 15.7:  $r(t) = (t^2 - 1)j + 2tk, \quad -1 \leq t \leq 1$

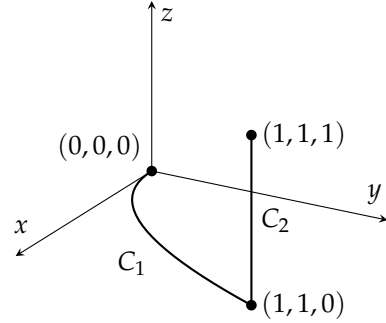
سوال 15.8:  $r(t) = (2 \cos t)i + 2 \sin tk, \quad 0 \leq t \leq \pi$

#### فضائی منحنیات پر متکمل کے قیمتے کا حصول

سوال 15.9: متکمل  $\int_C (x+y) ds$  کی قیمت حاصل کریں جہاں  $C$  نقطہ  $(0, 1, 0)$  و  $(1, 0, 0)$  خط مستقیم  $x = t$  ،  $y = (1-t)$  ،  $z = 0$  ہے۔



شکل 15.15: ٹکڑوں میں خطی راہ برائے سوال 15.16



شکل 15.14: راہ برائے مکمل (سوال 15.15)

سوال 15.10: مکمل  $\int_C (x - y + z - 2) ds$  کی قیمت حاصل کریں جہاں  $C$  نقطہ  $(0, 1, 1)$  تا  $(1, 0, 1)$  خط مستقیم  $z = 1$ ،  $y = (1 - t)$ ،  $x = t$  ہے۔

سوال 15.11: مکمل  $\int_C (xy + y + z) ds$  کی قیمت منحنی  $r(t) = 2ti + tj + (2 - 2t)k$ ،  $0 \leq t \leq 1$  پر حاصل کریں۔

سوال 15.12: منحنی  $r(t) = 4 \cos t i + 4 \sin t j + 3t k$ ،  $-2\pi \leq t \leq 2\pi$  پر مکمل  $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$  کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 15.13: تقابل  $f(x, y, z) = x + y + z$  کا مکمل  $(1, 2, 3)$  تا  $(0, -1, 1)$  خط مستقیم قطع پر تلاش کریں۔

سوال 15.14: تقابل  $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2 + y^2 + z^2}$  کا مکمل منحنی  $r(t) = ti + tj + tk$ ،  $1 \leq t \leq \infty$  پر تلاش کریں۔

سوال 15.15: تقابل  $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$  کا مکمل  $(0, 0, 0)$  تا  $(1, 1, 1)$  درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل 15.14)۔

$$C_1: r(t) = ti + t^2j, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: r(t) = i + j + tk, \quad 0 \leq t \leq 1$$

سوال 15.16: تقابل  $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$  کا مکمل  $(0, 0, 0)$  تا  $(1, 1, 1)$  درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل 15.15)۔

$$C_1: r(t) = tk, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: r(t) = tj + k, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: r(t) = ti + j + k, \quad 0 \leq t \leq 1$$

سوال 15.17: تقابل  $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$  کا مکمل راہ  $0 < a \leq t \leq b$   $r(t) = ti + tj + tk$  پر تلاش کریں۔

سوال 15.18: تقابل  $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + z^2}$  کا مکمل درج ذیل دائری راہ پر تلاش کریں۔

$$r(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)k, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

مسطح منحنیات پر لکھیں

سوال 15.19 تا سوال 15.22 میں  $f$  کا مکمل دی گئی منحنی پر تلاش کریں۔

سوال 15.19:  $f(x, y) = \frac{x^3}{y}$ ,  $C: y = \frac{x^2}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 2$

سوال 15.20:  $f(x, y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $C: y = \frac{x^2}{2}$ , تک  $(0, 0)$  سے  $(1, \frac{1}{2})$

سوال 15.21: ربع اول میں  $(2, 0)$  سے  $(0, 2)$  تک  $f(x, y) = x + y$ ,  $C: x^2 + y^2 = 4$

سوال 15.22: ربع اول میں  $(0, 2)$  سے  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  تک  $f(x, y) = x^2 - y$ ,  $C: x^2 + y^2 = 4$

کمیت اور معیار

سوال 15.23: ایک پتلی تار جس کی کثافت  $\delta = \frac{3}{2}t$  ہے منحنی  $r(t) = (t^2 - 1)j + 2tk$ ,  $0 \leq t \leq 1$  کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 15.24: ایک پتلی تار جس کی کثافت  $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y+2}$  ہے منحنی  $r(t) = (t^2 - 1)j + 2tk$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کر کے اس پر مرکز کمیت دکھائیں۔

سوال 15.25: منحنی  $r(t) = \sqrt{2}tj + (4 - t^2)k$ ,  $0 \leq t \leq 1$  کے ساتھ ساتھ ایک پتلی تار پائی جانے والی تار کی کثافت (i)  $\delta = 3t$ , (ب)  $\delta = 1$  ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 15.26: ایک پتلی تار جس کی کثافت  $\delta = 3\sqrt{5+t}$  ہے منحنی  $r(t) = ti + 2tj + \frac{2}{3}t^{3/2}k$ ,  $0 \leq t \leq 2$  کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 15.27: مستوی  $xy$  میں دائرہ  $x^2 + y^2 = a^2$  پر مستقل کثافت  $\delta$  کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ محور  $z$  کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 15.28: مستوی  $yz$  میں لکیری قطع  $r(t) = tj + (2 - 2t)k, 0 \leq t \leq 1$  پر مستقل کثافت کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ تینوں محدود محوروں کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 15.29: مستقل کثافت  $\delta$  کی ایک پتلی تار پچھرا منحنی  $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk, 0 \leq t \leq 2\pi$  کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔  $I_z$  اور  $R_z$  تلاش کریں۔ (ب) فرض کریں مستقل کثافت  $\delta$  کی ایک دوسری پتلی تار، جس کی لمبائی دگنی ہے ( $0 \leq t \leq 4\pi$ )، اسی منحنی  $r(t)$  کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ بغیر حل کیے بتائیں کہ آیا اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار پہلی تار سے مختلف ہوں گے؟ اپنی جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 15.30: منحنی  $r(t) = (t \cos t)i + (t \sin t)j + (\frac{2\sqrt{2}}{3})t^{3/2}k, 0 \leq t \leq 1$  کے ساتھ ساتھ مستقل کثافت  $\delta = 1$  کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ اس کی  $I_z$  اور  $R_z$  تلاش کریں۔

سوال 15.31:  $I_z$  اور  $R_z$  مثال 15.4 کی محراب کے لئے تلاش کریں۔

سوال 15.32: ایک پتلی تار جس کی کثافت  $\delta = \frac{1}{t+1}$  ہے منحنی  $r(t) = ti + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}j + \frac{t^2}{2}k, 0 \leq t \leq 2$  کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کثیت اور محدود محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

### کمپیوٹر کا استعمال

سوال 15.33 تا سوال 15.36 میں کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام سے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

ا. راہ  $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$  کے لئے  $ds = |v(t)| dt$  دریافت کریں۔

ب. متکمل  $|v(t)| f(g(t), h(t), k(t))$  کو مقدار معلوم  $t$  کا تفاعل لکھیں۔

ج. مکمل  $\int_C f ds$  کی قیمت مساوات 15.3 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 15.33:  $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y}$ ;  $r(t) = ti + t^2j + 3t^2k, 0 \leq t \leq 2$

سوال 15.34:  $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}$ ;  $r(t) = ti + \frac{1}{3}t^2j + \sqrt{t}k, 0 \leq t \leq 2$

سوال 15.35:  $f(x, y, z) = x\sqrt{y} - 3z^2$ ;  $r(t) = \cos 2ti + \sin 2tj + 5tk, 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 15.36:  $f(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$ ;  $r(t) = r(t) = \cos 2ti + \sin 2tj + t^{5/2}k, 0 \leq t \leq 2\pi$

## جوابات

15.4 (شکل 15.13)  
15.5 (شکل 15.9)  
15.6 (شکل 15.11)  
15.7 (شکل 15.7)  
15.8 (شکل 15.12)

حصہ 15.1 صفحہ 1778  
15.1 (شکل 15.8)  
15.2 (شکل 15.10)  
15.3 (شکل 15.6)

