

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	
392	4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
423	ضمیمہ دوم	۱



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

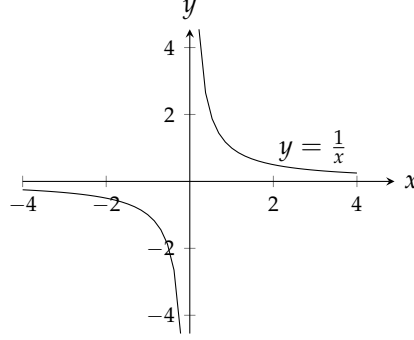
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 4.73: تفاعل  $y = \frac{1}{x}$  کی ترسیم۔

#### 4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا  $x \rightarrow \pm\infty$  پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔

$x \rightarrow \pm\infty$  پر حد

تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x}$  تمام  $x \neq 0$  کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بدترتج بدھتی  $x$  کے لئے  $\frac{1}{x}$  کی قیمت بدترتج گھٹے گی۔ منفی  $x$  جس کی مقدار بدترتج بدھتی ہو کے لئے  $\frac{1}{x}$  کی مقدار بدترتج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ  $x \rightarrow \pm\infty$  پر  $f(x) = \frac{1}{x}$  کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد  $\epsilon > 0$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $M$  موجود ہو کہ تمام  $x > M$  کے لئے  $|f(x) - L| < \epsilon$  ہو یعنی

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ  $x$  لامتناہی تک پہنچنے پر  $f(x)$  کا حد  $L$  ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔



2. اگر ہر عدد  $\epsilon > 0$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $N$  موجود ہو کہ تمام  $x < N$  کے لئے  $|f(x) - L| < \epsilon$  ہو یعنی

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ  $x$  منفی لامتناہی تک پہنچنے پر  $f(x)$  کا حد  $L$  ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

□

لامتناہی کو  $\infty$  سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$x \rightarrow \mp\infty$  پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل  $y = k$  اور مماثل تفاعل  $y = x$  کے حد حاصل کیے۔ اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو  $y = k$  اور  $y = x$  کی بجائے  $y = k$  اور  $y = \frac{1}{x}$  لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$(4.7) \quad \lim_{x \rightarrow \mp\infty} k = k, \quad \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

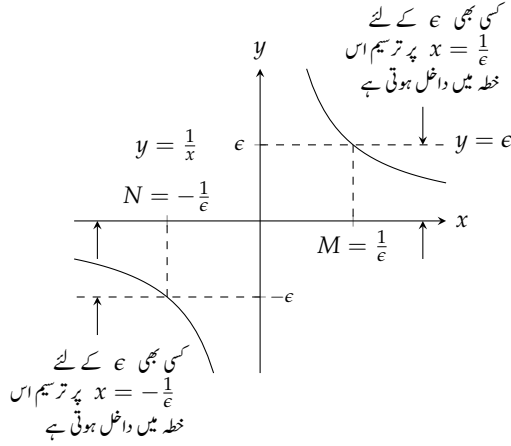
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ا.}$$

حل:

ا. فرض کریں  $\epsilon > 0$  دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد  $M$  تلاش کرنے ہے کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x > M, \implies \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  ثابت ہوتا ہے (شکل 74.4)۔



شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 20.4)

ب. فرض کریں  $\epsilon > 0$  دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد  $N$  تلاش کرنے ہے کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \implies \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

یا  $N = -\frac{1}{\epsilon}$  سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$  ثابت ہوتا ہے (شکل 74.4)۔

□

مسوات 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6:  $x \rightarrow \mp\infty$  پر حل کے خواص  
اگر  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = L$  اور  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = M$  ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ ( $L$  اور  $M$  حقیقی اعداد ہیں۔)

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) + g(x)] = L + M \quad \text{قاعدہ مجموعہ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) - g(x)] = L - M \quad \text{قاعدہ فرق:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M \quad \text{قاعدہ ضرب:}$$

4.5.  $x \rightarrow \mp\infty$  پر حد، مشتق اور غالب اجزاء

قاعدہ ضرب مستقل:  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} kf(x) = kL$

قاعدہ حاصل تقسیم:  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر  $m$  اور  $n$  عدد صحیح ہوں تب  $L^{m/n} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x)]^{m/n}$

یہ خواص بالکل مسئلہ 1.2 (صفحہ 113) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ} \\ &= 5 + 0 = 5 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

ب.

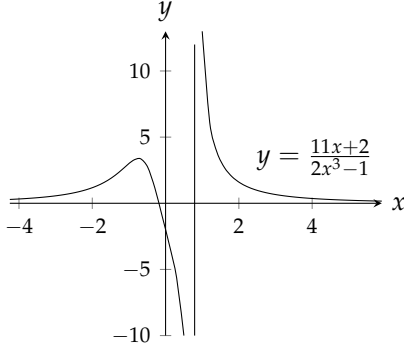
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

□

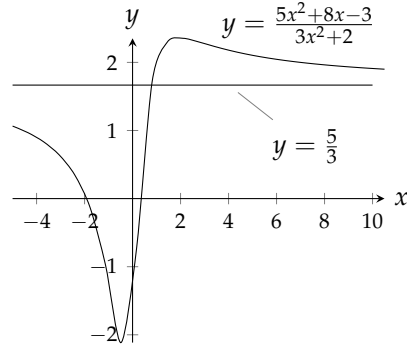
مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 75.4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

□



شکل 4.76: ترسیم تقاطع اور حد (مثال 23.4)



شکل 4.75: ترسیم تقاطع اور حد (مثال 22.4)

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 76.4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{11}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$= \frac{0+0}{2-0} = 0$$

□

مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل 77.4

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{3}{x}}{7 + \frac{4}{x}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}$$

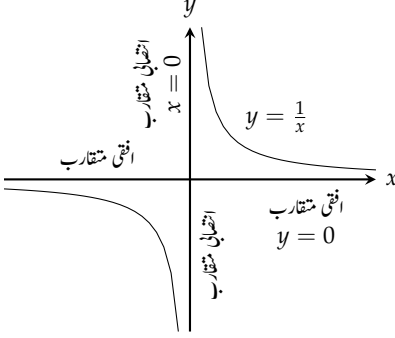
$$= -\infty$$

ا.

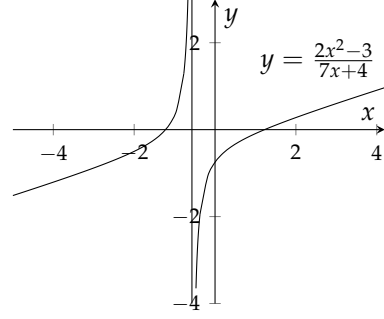
ب.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + \frac{7}{x}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$= \frac{\infty}{2} = \infty$$



شکل 4.78: محدودی محور قطع زائد  $y = \frac{1}{x}$  کے دونوں شاخوں کے مقارب ہیں۔



شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 24.4

□

مثال 22.4 تا مثال 24.4 سے  $x \rightarrow \pm\infty$  پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد  $\infty$  یا  $-\infty$  ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ  $f$  اور درجہ  $g$  ایک دوسرے کے برابر ہوں تب  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$  یعنی  $f$  اور  $g$  کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ  $f$  درجہ  $g$  سے کم ہو تب  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  ہو گا۔

ج. اگر درجہ  $f$  درجہ  $g$  سے زیادہ ہو تب  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$  ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$  کا اول عددی سر  $a_n$  ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

## افقی اور انحصالی متقارب

اگر مہداسے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصلہ صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا متقارب<sup>12</sup> کہتے ہیں۔

مثال 4.25: محدودی محور تفاعل  $y = \frac{1}{x}$  کے متقارب ہیں (شکل 78.4)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہیں لہذا  $x$  محور  $y = \frac{1}{x}$  کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ہیں لہذا  $y$  محور بھی  $y = \frac{1}{x}$  کا متقارب ہے۔

□

یاد رہے کہ  $x = 0$  پر نسب نما صفر ہے لہذا تفاعل غیر معین ہے۔

تعریف: تفاعل  $y = f(x)$  کا خط  $y = b$  اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

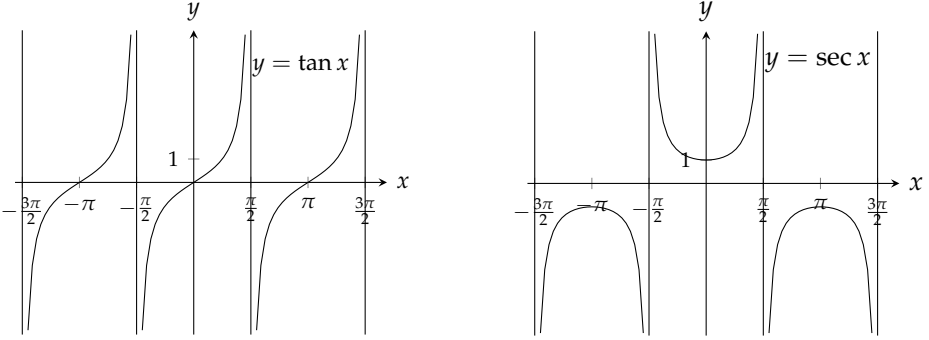
ہو۔

تفاعل  $y = f(x)$  کا خط  $x = a$  اس صورت انحصالی متقارب ہو گا جب

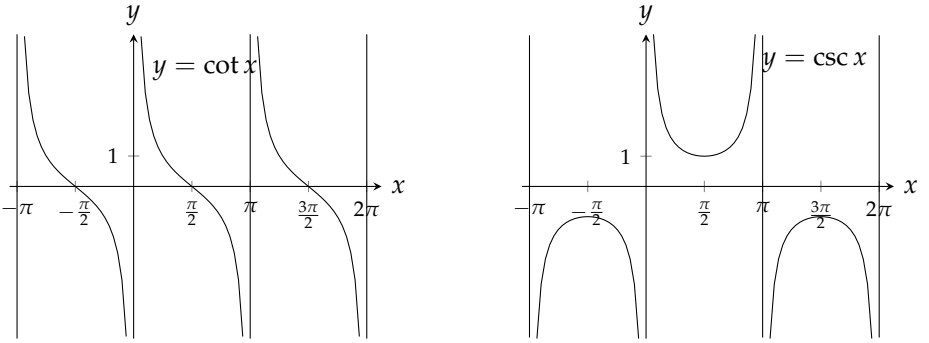
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

ہو۔

□



شکل 4.79: انتظامی مقارب (مثال 26.4)



شکل 4.80: انتظامی مقارب (مثال 26.4)

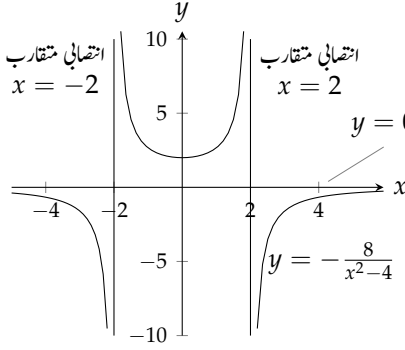
مثال 4.26:  $\frac{\pi}{2}$  کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں  $\cos x = 0$  ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتظامی مقارب پائے جاتے ہیں (شکل 79.4)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

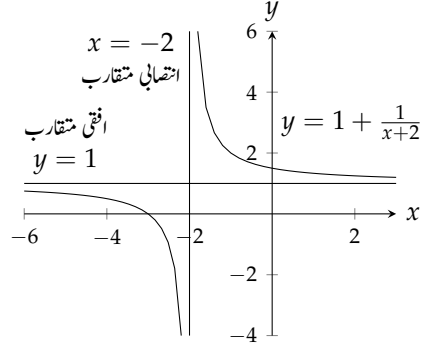
$\pi$  کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں  $\sin x = 0$  ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتظامی مقارب پائے جاتے ہیں (شکل 80.4)۔

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

□



شکل 4.82: انتصابی مقارب (مثال 28.4)



شکل 4.81: انتصابی مقارب (مثال 27.4)

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم  $x \rightarrow \mp\infty$  پر اور  $x \rightarrow -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے  $x+3$  اور  $x+2$  سے تقسیم کر کے

$$y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $\frac{1}{x}$  کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہوگی۔ یوں محدودی محور کی بجائے خط  $y = 1$  اور خط  $x = -2$  مقارب خط ہوں گے۔

□

مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا مقارب تلاش کریں۔

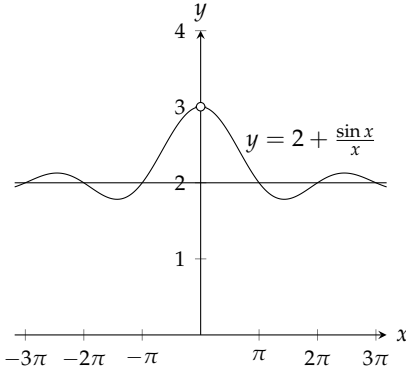
$$y = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

حل: ہم  $x \rightarrow \mp\infty$  اور  $x \rightarrow \mp 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

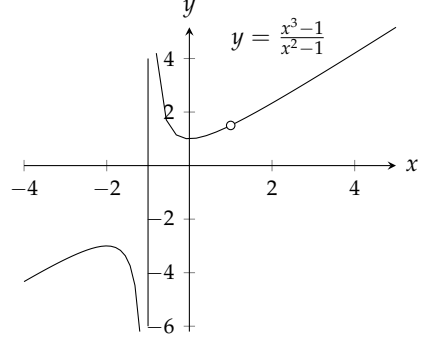
چونکہ  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0$  لہذا افقی مقارب خط  $y = 0$  ہے (شکل 82.4)۔ چونکہ  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  اور  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$  لہذا عمودی مقارب خط  $x = 2$  سے  $x = -2$  کی طرح بھی مقارب خط حاصل ہو گا۔

□





شکل 4.84: منحنی اپنے مقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کر سکتی ہے (مثال 30.4)۔



شکل 4.83: منحنی  $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$  کی  $x=1$  پر عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے لہذا اس کی صرف  $x=-1$  پر مقاربی خط ہو گا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

کا  $x = -1$  پر انتصابی مقارب پایا جاتا ہے لیکن  $x = 1$  پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$$

□

لکھا جاسکتا ہے لہذا عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے اور  $x \rightarrow 1$  پر تفاعل کا حد  $\frac{3}{2}$  ہے (شکل 83.4)۔

مسئلہ 4.2 (صفحہ 119 مسئلہ 7) بھی  $x \rightarrow \pm\infty$  پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال 4.30: مسئلہ 7 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم  $x \rightarrow 0$  جہاں نسب نما صفر ہو گا اور  $x \rightarrow \pm\infty$  پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  ہے لہذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

اور  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$  ہے لہذا مسئلہ پیچ کے تحت  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2$$

□

ہو گا لہذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط  $y = 2$  ہو گا (شکل 84.4)۔

### ترچھے متقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نا انقضی اور نا انتہائی ہو گا۔

مثال 4.31: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

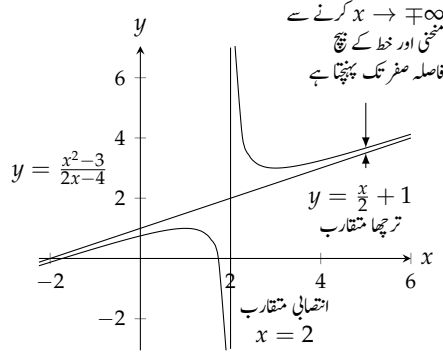
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

حل: ہم  $x \rightarrow \pm\infty$  پر اور  $x \rightarrow 2$  ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔  $x^2 - 3$  کو  $2x - 4$  سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

چونکہ  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  اور  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$  ہیں لہذا  $x = 2$  دو طرفہ متقارب ہے۔  
 $x \rightarrow \pm\infty$  پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور  $f(x) \rightarrow \frac{x}{2} + 1$  تک پہنچتی ہے۔ یوں  $y = \frac{x}{2} + 1$  دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل 85.4)۔

□



شکل 4.85: ترچھا مقارب (مثال 31.4)

مقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1$$

$x$  کی بڑی قیمتوں کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{2x - 4}$$

2 کے قریب  $x$  کی قیمتوں کے لئے

بڑی  $x$  پر  $f$  کا رویہ  $y = \frac{x}{2} + 1$  ہو گا جہاں  $\frac{1}{2x-4}$  قابل نظر انداز ہو گا۔  $x = 2$  کے قریب  $\frac{1}{2x-4}$  تفاعل  $f$  کا غالب جزو ہو گا لہذا  $x = 2$  کے قریب  $f$  کا رویہ  $\frac{1}{2x-4}$  کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ  $x$  کی بڑی مطلق مقدار پر  $\frac{x}{2} + 1$  کا غلبہ<sup>13</sup> ہے جبکہ  $x = 2$  کے قریب  $\frac{1}{2x-4}$  غالب<sup>14</sup> ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

dominates<sup>13</sup>  
dominant<sup>14</sup>

مثال 4.32: درج ذیل ترتیم کریں۔

$$y = \frac{x^3 + 1}{x}$$

حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاؤ، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔

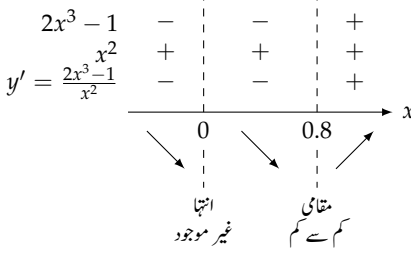
دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(4.8) \quad y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$|x|$  کی بری قیمت کے لئے  $y \approx x^2$  اور  $x = 0$  کے قریب  $y \approx \frac{1}{x}$  ہو گا۔ مساوات 4.8 میں  $x = 0$  پر انتہائی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔  
تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاؤ۔ ایک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

نقطہ  $x = 0$  پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔



$$2x - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - 1 = 0$$

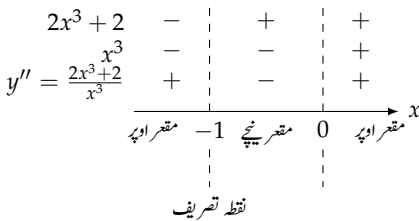
$$x^3 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8$$

چوتھا قدم: مقعر۔ دور رتبی تفرق

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 + 2}{x^3}$$

نقطہ  $x = 0$  پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

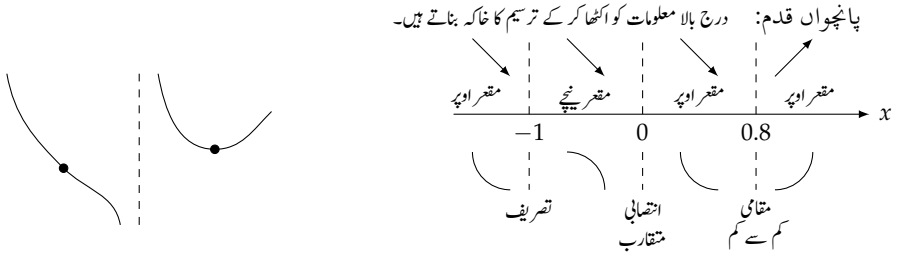


$$2 + \frac{2}{x^3} = 0$$

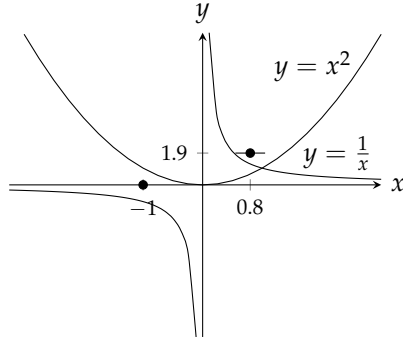
$$2x^3 + 2 = 0$$

$$x^3 = -1$$

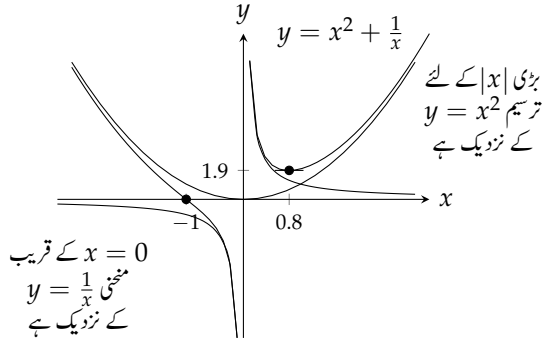
$$x = -1$$



چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل  $y = f(x)$  ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تفاعل کی نشاندہی کریں۔  
کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟
3. غالب اجزاء تلاش کریں۔  
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔
4. متقارب خطوط اور قابل ہماو عدم استمرار تلاش کریں۔  
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟  
 $x \rightarrow \mp\infty$  کرنے سے کیا ہوتا ہے؟
5.  $f'$  حاصل کرتے ہوئے  $f' = 0$  کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاؤ دریافت کریں۔
6.  $f''$  سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔
7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔
8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدود، پر  $f$  کی قیمت تلاش کریں۔
9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

### سوالات

سوال 1 تا سوال 6 میں (i)  $x \rightarrow \infty$  پر (ب)  $x \rightarrow -\infty$  پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 1:  $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

سوال 2:  $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 3:  $g(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$

سوال 4:  $g(x) = \frac{1}{8 - \frac{5}{x^2}}$

سوال 5:  $h(x) = \frac{-5 + \frac{7}{x}}{3 - \frac{1}{x^2}}$

سوال 6:  $h(x) = \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال 7 تا سوال 10 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$

سوال 8:  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\cos \theta}{3\theta}$

سوال 9:  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

سوال 10:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

ناطق تفاعل کی حد  
سوال 11 تا سوال 24 میں دیے ناطق تفاعل کی (i)  $x \rightarrow \infty$  اور (ب)  $x \rightarrow -\infty$  پر حد تلاش کریں۔

سوال 11:  $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

سوال 12:  $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال 13:  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

سوال 14:  $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال 15:  $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

سوال 16:  $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال 17:  $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

سوال 18:  $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

$$f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x} \quad \text{سوال 19:}$$

$$g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6} \quad \text{سوال 20:}$$

$$g(x) = \frac{x^4}{x^3+1} \quad \text{سوال 21:}$$

$$h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6} \quad \text{سوال 22:}$$

$$h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x} \quad \text{سوال 23:}$$

$$h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9} \quad \text{سوال 24:}$$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت  
ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔  
نسب نما میں  $x$  کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 25 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7} \quad \text{سوال 25:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \quad \text{سوال 26:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} \quad \text{سوال 27:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} \quad \text{سوال 28:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}} \quad \text{سوال 29:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4} \quad \text{سوال 30:}$$



قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال 31 تا سوال 34 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہذا کارتیسی محدود پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔ (ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

$$\text{سوال 31: } f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\text{سوال 32: } f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

$$\text{سوال 33: } f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{سوال 34: } f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

تفاعل کی ایجاد

سوال 35 تا سوال 38 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

$$\text{سوال 35: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

$$\text{سوال 36: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \infty$$

$$\text{سوال 37: } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$$

$$\text{سوال 38: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} k(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = -\infty$$

ناطق تفاعل کی ترسیم

سوال 39 تا سوال 66 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ مقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

$$\text{سوال 39: } y = \frac{1}{x-1}$$

سوال 40:  $y = \frac{1}{x+1}$

سوال 41:  $y = \frac{1}{2x+4}$

سوال 42:  $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 43:  $y = \frac{x+3}{x+2}$

سوال 44:  $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 45:  $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

سوال 46:  $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 47:  $y = \frac{x^2-1}{x}$

سوال 48:  $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 49:  $y = \frac{x^4+1}{x^2}$

سوال 50:  $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 51:  $y = \frac{1}{x^2-1}$

سوال 52:  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 53:  $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$

سوال 54:  $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

سوال 55:  $y = \frac{x^2}{x-1}$

سوال 56:  $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 57:  $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

$$y = -\frac{x^2-4}{x+1} \quad \text{سوال 58}$$

$$y = \frac{x^2-x+1}{x-1} \quad \text{سوال 59}$$

$$y = -\frac{x^2-x+1}{x-1} \quad \text{سوال 60}$$

$$y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2} \quad \text{سوال 61}$$

$$y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2} \quad \text{سوال 62}$$

$$y = \frac{x}{x^2-1} \quad \text{سوال 63}$$

$$y = \frac{x-1}{x^2(x-2)} \quad \text{سوال 64}$$

$$y = \frac{8}{x^2+4} \quad \text{سوال 65}$$

$$y = \frac{4x}{x^2+4} \quad \text{سوال 66}$$

کمپیوٹر کا استعمال  
سوال 67 تا سوال 72 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

$$y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 67}$$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 68}$$

$$y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}} \quad \text{سوال 69}$$

$$y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \quad \text{سوال 70}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 71}$$

$$y = -\cos\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 72}$$

اجزاء کی ترسیمات

سوال 73 تا سوال 76 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

$$\text{سوال 73: } y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{سوال 74: } y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{سوال 75: } y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{سوال 76: } y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

نظریہ اور مثالیں

$$\text{سوال 77: } f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} \text{ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا } c \text{ پایا جاتا ہے کہ } f(c) \text{ کی قیمت درج ذیل ہو۔}$$

$$\text{ا. } -2 \quad \text{ب. } \cos 3 \quad \text{ج. } 5\,000\,000$$

$$\text{سوال 78: } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) \text{ تلاش کریں۔}$$

$$\text{سوال 79: تشریحی۔ فرض کریں وقفہ } x > 0 \text{ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ } x < 0 \text{ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟}$$

$$\text{سوال 80: تشریحی۔ فرض کریں وقفہ } x < 0 \text{ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ } x > 0 \text{ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟}$$

$$\text{سوال 81: فرض کریں } f(x) \text{ اور } g(x) \text{ کثیر رکنی ہیں اور } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2 \text{ ہے۔ کیا } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

$$\text{سوال 82: فرض کریں } f(x) \text{ اور } g(x) \text{ کثیر رکنی ہیں۔ اگر } g(x) \text{ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ کی ترسیم کا متقارب ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔}$$

$$\text{سوال 83: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔}$$

$$\text{سوال 84: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔}$$

$$\text{سوال 85:}$$

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی  $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$  (مثال 30.4) متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ  $x \rightarrow \infty$  پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل  $f(x)$  کی مثال پیش کریں۔

$$(1) \quad x > 0 \text{ پر } f \text{ قابل تفرق ہے۔}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \text{ غیر موجود ہے۔}$$

سوال 86: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = x + 1 + \frac{5}{x + 2}$$

جس کی ترجمانی متقارب  $y = x + 1$  ہے۔

اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو  $x$  سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = \frac{x + 3 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

ملتا ہے جس کی متقارب  $y = x + 3$  ہے۔

ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 87 اور سوال 88 میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے  $x \rightarrow \mp\infty$  پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 87: اگر  $f$  کی قیمت مستقل ہو  $f(x) = k$  تب  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$  ہو گا۔

سوال 88: اگر  $f$  کی قیمت مستقل ہو  $f(x) = k$  تب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$  ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے  
سوال 89 تا سوال 92 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

$$y = -\frac{x^2-4}{x+1} \quad \text{سوال 89}$$

$$y = \frac{x^2+x-6}{2x-2} \quad \text{سوال 90}$$

$$y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1} \quad \text{سوال 91}$$

$$y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2} \quad \text{سوال 92}$$

سوال 93 تا سوال 98 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔ تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

$$y = x^3 + \frac{3}{x} \quad \text{سوال 93}$$

$$y = x^3 - \frac{3}{x} \quad \text{سوال 94}$$

$$y = 2 \sin x + \frac{1}{x} \quad \text{سوال 95}$$

$$y = 2 \cos x - \frac{1}{x} \quad \text{سوال 96}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 3 \sin 2x \quad \text{سوال 97}$$

$$y = (x-1)^{11} + 2 \sin 2\pi x \quad \text{سوال 98}$$

سوال 99 اور سوال 100 کا تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا.  $x \rightarrow 0^+$  اور  $x \rightarrow 0^-$  پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب.  $x \rightarrow \pm\infty$  پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج.  $x \rightarrow 1$  اور  $x \rightarrow -1$  پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$y = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2/3} \quad \text{سوال 99}$$

$$y = \frac{3}{2} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2/3} \quad \text{سوال 100}$$

$$y = -\frac{x^3-2}{x^2+1} \quad \text{سوال 101: تفاعل کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔}$$

$$ا. \quad -9 \leq x \leq 9 \quad ب. \quad -90 \leq x \leq 90 \quad ج. \quad -900 \leq x \leq 900$$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہوگی۔ جزو-ب میں مبداء کے قریب کچھ ہوگا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین  $y = -x$  کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 102: تقابل  $y = \frac{x^{2/3}}{x^2 - 1}$  کو وقفہ  $-2 \leq x \leq 2$  پر ترسیم کریں۔  $x = -1$  اور  $x = 1$  کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبداء پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبداء کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبداء پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا  
بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تقابل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta \quad (\theta = \frac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جاسکتا ہے۔ سوال 108 تا سوال 103 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تاکہ ترسیم پر حد کو دیکھا جاسکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

$$\text{سوال 103: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{سوال 104: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{سوال 105: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5}$$

$$\text{سوال 106: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$$

$$\text{سوال 107: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) \left(\cos \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{سوال 108: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos \frac{1}{x}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$$

## اصلاح

کسی چیز کی اصلاح سے مراد کسی اس چیز کی کسی خاصیت کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ بنانا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل پر کم تر لاگت آتی ہے؟ 30 cm قطر لکڑے سے کتنی مضبوط ترین شہتیر حاصل کی جاسکتی ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرتے ہیں۔

## کاروبار اور صنعتی مثالیں

مثال 4.33: دھاتی چادر کا استعمال

ایک چکور چادر جس کا ضلع 30 cm ہے کے کونوں سے چھوٹے چکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہوگا؟

حل: شکل 86.4 میں کٹا ہوا چادر دکھایا گیا ہے۔ کٹے ہوئے چکور کا ضلع  $x$  سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم  $H$  مربع سنٹی میٹر

$$H(x) = x(30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

ہوگا۔ چونکہ چادر کے ضلع 30 cm ہے لہذا  $0 \leq x \leq 15$  ہوگا جو تفاعل  $H$  کا دائرہ کار ہے۔

شکل 87.4 میں حجم بالمتقابل  $x$  دکھایا گیا ہے جس کے تحت  $x = 0$  اور  $x = 15$  پر حجم صفر ہوگا۔ زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خاطر  $x$  کے لحاظ سے  $H$  کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dx} = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x - 15)(x - 5) = 0,$$

یوں  $x = 5$  اور  $x = 15$  ملتا ہے جن میں سے صرف  $x = 5$  دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر  $H$  کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$H(5) = 2000,$$

نقطہ فاصل

$$H(0) = 0, \quad H(15) = 0$$

آخری نقطہ

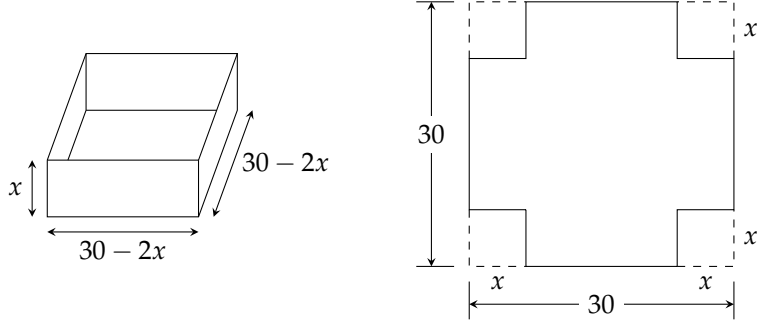
□

یوں زیادہ سے زیادہ حجم  $2000 \text{ cm}^3$  ہے جو 5 cm ضلع چکور کاٹنے سے ملے گا۔

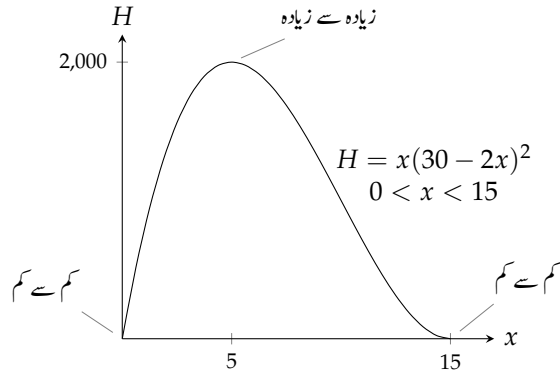
مثال 4.34: بیلن

آپ کو ایک لٹریل بیلن کا بلیٹی ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔





شکل 4.86: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال 33.4)۔



شکل 4.87: حجم بالقابل  $x$  (مثال 33.4)۔

حل: ٹین ڈبے کی لمبائی  $h$  اور اس کا رداس  $r$  لیتے ہیں (شکل 88.4)۔ اگر  $h$  اور  $r$  کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$(4.9) \quad H = \pi r^2 * h = 1000 \quad (\text{ایک لٹر} = 1000 \text{ cm}^3)$$

درکار ہے۔ کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال میں ٹین کے ضیاع کو شامل کیا گیا ہے) ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ ٹین میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$(4.10) \quad S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{ٹین کے دوسرے}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{ٹین کی دیوار}}$$

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ  $\pi r^2 h = 1000$  کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مساوات 4.10 میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات 4.9 اور مساوات 4.10 کو ملا کر ایک متغیر کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات 4.9 کو  $h$  کے لئے حل کرتے ہوئے

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

اس کو مساوات 4.10 میں پر کرتے ہوئے  $h$  سے چکارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$r$  کی چھوٹی قیمت کے لئے  $\frac{2000}{r}$  جزو غالب ہو گا جس کی بنا  $S$  کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نکلی یا پائپ نما ہو گا۔  $r$  کی بڑی قیمت کے لئے  $2\pi r^2$  جزو غالب ہو گا جس کی بنا  $S$  کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چھٹی صورت کا ہو گا۔  $r$  کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ کم سے کم حاصل ہو گا۔

$S$  اپنے پورے دائرہ کار  $(0, r)$  میں قابل تفرق ہے لہذا کم سے کم  $S$  قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے نقطہ فاصل  $r$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 = 2000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

تفرق

تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$r$  کے لئے حل کریں

نقطہ فاصل

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے کہ  $S$  کی کم سے کم قیمت کتنی ہے اور کہاں پائی جاتی ہے۔ چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں ہے لہذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے ہیں لہذا ہمیں  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$  کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہو گا۔ ہم تفاعل کا دور تہی تفرق

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r}$$

$$\frac{d^2 S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^2}$$

پر غور کرتے ہیں جو  $S$  کی پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل 88.4)۔ یوں پورے دائرہ کار پر  $S$  کی ترتیم اوپر مقعر ہوگی اور  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$  پر  $S$  کی قیمت کم سے کم ہوگی۔ جب

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

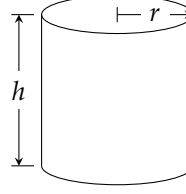
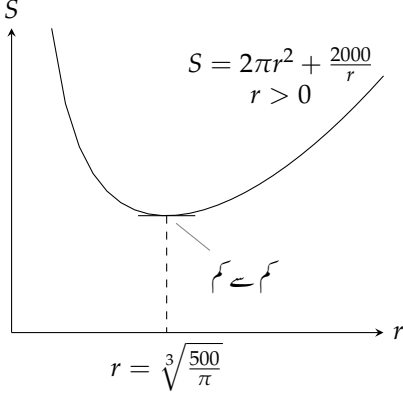
ہو۔ اس کے تحت کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42 \text{ cm}, \quad h \approx 10.84 \text{ cm}$$

□

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

1. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلوم دی گئی ہے؟ کون سی نہیں دی گئی ہے؟ کیا مطلوب ہے؟
2. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔
3. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلہ میں ہر تعلق کو مساوات کی صورت میں لکھیں۔
4. نا معلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نا معلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کہیں مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔
5. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتہی اور دور تہی تفرق سے نقطہ فاصل (جہاں  $f' = 0$  یا غیر معین ہوگا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔



شکل 4.88: ٹین کا ڈبہ (مثال 34.4)

### ریاضیات سے چند مثالیں

مثال 4.35: اعداد کا حاصل ضرب  
ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں کی ان کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔

حل: اگر پہلا عدد  $x$  ہو تب دوسرا عدد  $20 - x$  ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔  $f$  کا دائرہ کار بند وقفہ  $0 \leq x \leq 20$  ہے۔

ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر  $f$  کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

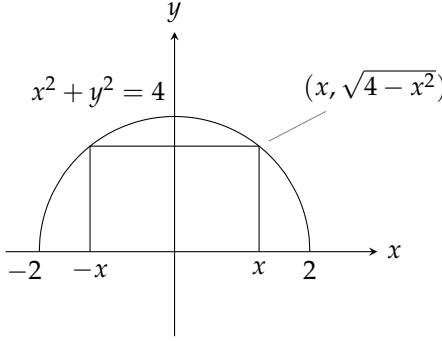
پورے وقفہ  $0 \leq x \leq 20$  پر معین ہے اور صرف  $x = 10$  پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$

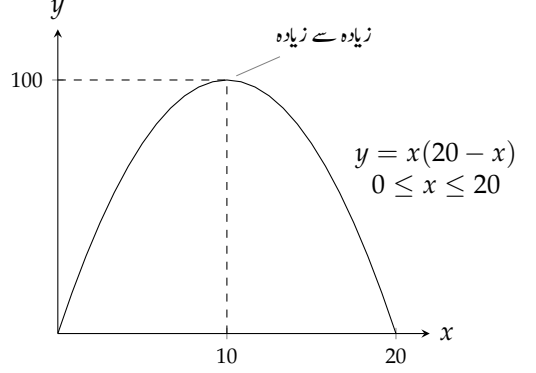
$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

ہیں۔ یوں  $f(10) = 100$  زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی اور درکار اعداد 10 اور  $(20 - 10) = 10$  ہوں گے (شکل 89.4)۔

□



شکل 4.90: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال 36.4)۔



شکل 4.89:  $x$  اور  $(20-x)$  کے حاصل ضرب کی زیادہ سے زیادہ قیمت 100 ہے (مثال 35.4)۔

مثال 4.36: جیومیٹری  
رد اس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

حل: نصف دائرے کو کارتیسی محدود کے مبداء پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل 90.4 میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا  $x$  پر ہے۔ ہم مستطیل کے اضلاع اور رقبہ  $S$  کو  $x$  کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$2x, \quad \sqrt{4-x^2}, \quad \text{رقبہ: } 2x\sqrt{4-x^2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $x$  (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ  $0 \leq x \leq 2$  میں پائی جاتی ہے۔

ہمیں استمراری تفاعل

$$S = 2x\sqrt{4-x^2}$$

کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت وقفہ  $[0, 2]$  پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر  $S$  کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل  $S$  کا تفرق

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

نقطہ  $x = 2$  پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4-x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

دونوں اطراف کو  $\sqrt{4-x^2}$  سے ضرب دیں

$x = -\sqrt{2}$  اور  $x = \sqrt{2}$  میں سے صرف  $x = \sqrt{2}$  تفاعل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔  
دائرہ کار کی آخری نقطوں اور اس اگوتے نقطہ فاصل پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$$

نقطہ فاصل پر قیمت

$$S(0) = 0, \quad S(2) = 0$$

آخری نقطوں پر قیمت

یوں مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ 4 ہے جب اس کی لمبائی  $2x = 2\sqrt{2}$  اور چوڑائی  $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$  ہوگی۔ □

### پیشہ دفعا اور قانون ابن سہل

خلا میں روشنی کی رفتار  $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  ہے۔ ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے (تقریباً اس کے  $\frac{2}{3}$  تیز)۔

بصریات میں اصول فغما<sup>15</sup> کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

مثال 4.37: ہوا میں روشنی کی رفتار  $c_1$  اور پانی میں روشنی کی رفتار  $c_2$  لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ الف سے پانی میں نقطہ ب تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ ہوا اور پانی کا سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل: ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو  $x$  محور پر رکھتے ہوئے الف تا ب وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہوگا۔ □

above example the Complete

Fermat's principle<sup>15</sup>

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

