

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی کمالات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی کمالات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ڈورنقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
685	6.6	سطح طواف کا رقبہ
697	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
709	6.7.1	وسطانی مرکز
715	6.8	کام
721	۱	ضمیمہ اول
723	ب	ضمیمہ دوم

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

6.8 کام

روزمرہ زندگی میں کام سے مراد وہ عمل ہے جو جسمانی یا ذہنی قوت سے سرانجام دیا جائے۔ سائنس میں کام کی تعریف اس سے مختلف ہے۔ اس حصہ میں کام کی سائنسی تعریف پیش کی جائے گی اور کام کی قیمت کا حصول سکھایا جائے گا۔

مستقل قوت اور کام

جب کوئی جسم جس پر مستقل قوت F عمل کرتی ہو، قوت کی سمت میں سیدھی لکیر پر فاصلہ d حرکت کرے تب ہم (سائنسی طور پر) کہتے ہیں کہ قوت F اس جسم پر کام W کرتی ہے:

$$(6.29) \quad W = Fd$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائنس میں لفظ کام کی معنی روزمرہ زندگی میں استعمال معنی سے مختلف ہے۔ اگر آپ کسی گاڑی کو سڑک پر دکھا لگا کر ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کریں تب آپ کی روزمرہ خیال کے مطابق آپ نے کام کیا اور مساوات 6.29 کے تحت بھی آپ نے کام کیا۔ اس کے برعکس اگر آپ پورا دن گاڑی کو دکھا لگاتے رہیں لیکن گاڑی اپنی جگہ سے حرکت نہ کرے تب اگرچہ آپ کا خیال ہو گا کہ آپ نے بہت کام کیا لیکن مساوات 6.29 کے تحت آپ نے کوئی کام نہیں کیا۔

مساوات 6.29 سے واضح ہے کہ قوت کی اکائی کو فاصلہ کی اکائی سے ضرب دینے سے کام کی اکائی حاصل ہوگی۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں قوت کی اکائی نیوٹن N اور فاصلہ کی اکائی میٹر m ہے لہذا اس نظام میں کام کی اکائی نیوٹن میٹر $N \cdot m$ ہوگی جس کو خصوصی نام جاول¹⁶ دیا گیا ہے اور جس کو J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 6.30: فرض کریں آپ 80 kg کمیت کو 30 cm بلندی تک اٹھاتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے آپ درج ذیل کام کرتے ہیں۔

$$W = Fd = (80)(9.8)(0.3) = 235.2 \text{ J}$$

□

متغیر قوت اور کام

اگر آپ پانی کی ایسی بالٹی کو اٹھائیں جس سے پانی چپکتا ہو تب لاگو قوت کی قیمت بلندی کے ساتھ تبدیل ہوگی۔ ایسی صورت میں قوت کا کلیہ $W = Fd$ تبدیل کرتے ہوئے مکمل کا استعمال ضروری ہو گا جو قوت کی تبدیلی کا حساب رکھ سکے۔

فرض کریں کہ محور x سے اس لکیر کو ظاہر کرنا ممکن ہے جس پر قوت عمل کرتی ہے اور قوت کی مقدار F کو فاصلہ x کا استمراری تفاعل تصور کیا جاسکتا ہے۔ ہم وقفہ $x = a$ تا $x = b$ پر قوت کے کام کو معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ اگر ذیلی وقفہ چھوٹا ہو تب x_{k-1} سے x_k تک کے فاصلہ میں استمراری قوت F کی تبدیلی (استمراری ہونے کی بنا) بہت کم ہوگی جس کو رد کیا جاسکتا ہے۔ یوں x_{k-1} سے x_k تک حرکت کے دوران کام کی قیمت تخمیناً $F(c_k)\Delta x_k$ ہوگی۔ یوں درج ذیل ریمان مجموعہ $x = a$ سے $x = b$ تک قوت F کا کام دے گا۔

$$(6.30) \quad \sum_{k=1}^n F(c_k)\Delta x_k$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہو ویسے ویسے یہ تخمین مزید بہتر ہوگی لہذا ہم $x = a$ سے $x = b$ تک F کے مکمل کو a سے b تک قوت F کے کام کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: محور x پر $x = a$ سے $x = b$ تک لاگو متغیر قوت $F(x)$ درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$(6.31) \quad W = \int_a^b F(x) dx$$

□

کام کی اکائی جاوول J ہے۔

مثال 6.31: قوت $F(x) = \frac{1}{x^2}$ N محور x پر $x = 1$ m تا $x = 10$ m عمل کرتی ہے۔ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}$$

□

مثال 6.32: گاؤں میں کنواں سے پانی نکالنے کے لئے بوکا استعمال کیا جاتا ہے۔ کھوہ کی گہرائی 20 m، خالی بوکا کی کیت 2 kg اور رسی کی کیت 0.1 kg m^{-1} ہے۔ بوکا میں ابتدائی طور پر 10 L پانی ہوتا ہے۔ چونکہ بوکا سے پانی رستا ہے لہذا جتنی دیر میں بوکے کو نیچے سے اوپر کھینچا جاتا ہے اتنی دیر میں بوکا خالی ہو جاتا ہے۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔ درج ذیل کام معلوم کریں۔

ا. صرف پانی بلند کرنے کا کام۔

ب. پانی اور بوکا بلند کرنے کا کام۔

ج. پانی، بوکا اور رسی بلند کرنا کا کام۔

حل:

ا. صرف پانی: پانی اٹھانے کے لئے درکار قوت پانی کے وزن جتنا ہو گا جو ابتدا میں $98 \text{ N} = (9.8)(10)$ اور آخر میں صفر ہے۔ یوں مبداء کو کتوں کی تہہ میں رکھتے ہوئے قوت کو

$$F(x) = 98 \left(\frac{20-x}{20} \right) = 98 \left(1 - \frac{x}{20} \right) = 98 - 4.9x \text{ N}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x) dx \\ &= \int_0^{20} (98 - 4.9x) dx = \left[98x - \frac{4.9x^2}{2} \right]_0^{20} = 1960 - 980 = 980 \text{ J} \end{aligned}$$

ب. صرف بوکا: صرف بوکا اٹھانے کے لئے درکار کام مساوات 6.29 کے تحت $392 \text{ J} = (2)(9.8)(20)$ ہو گا۔ یوں پانی اور بوکا دونوں کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 = 1372 \text{ J}$$

ج. پانی، بوکا اور رسی: مبداء سے x بلندی پر پانی، بوکا اور رسی کی کیت کو $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل درکار قوت حاصل ہوتی ہے۔

$$F(x) = \underbrace{(98 - 4.9x)}_{\text{پانی کا متغیر وزن}} + \underbrace{(19.6)}_{\text{بوکا کا مستقل وزن}} + \underbrace{(0.1)(9.8)(20-x)}_{\text{رسی کا متغیر وزن}}$$

صرف رسی کو اوپر کھینچنے کا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{20} (0.1)(9.8)(20-x) dx = \int_0^{20} (19.6 - 0.98x) dx \\ &= \left[19.6x - \frac{0.98x^2}{2} \right]_0^{20} = 392 - 196 = 196 \text{ J} \end{aligned}$$

یوں پانی، بوکا اور رسی تینوں کو کھینچنے کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 + 196 = 1568 \text{ J}$$

□

قانون ہک برائے اسپرنگ

قانون ہک¹⁷ کے تحت کسی بھی اسپرنگ کی قدرتی لمبائی کو تان کر یا دبا کر x اکائیاں تبدیل کرنے کے لئے درکار قوت لمبائی x کے راست تناسب ہوگی:

$$(6.32) \quad F = kx$$

مستقلہ اسپرنگ k جو اسپرنگ کی خاصیت ہے کو مقیاس چمک¹⁸ کہتے ہیں۔ مقیاس چمک کو قوت فی اکائی لمبائی میں ناپا جاتا ہے۔ جب تک لاگو قوت اسپرنگ کی دھاتی تار کو بگاڑ نہ دے قانون ہک (مساوات 6.32) بہترین نتائج دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ لاگو قوت اسپرنگ کو خراب نہیں کرتی ہے۔

مثال 6.33: ایک اسپرنگ کس کا مقیاس چمک $k = 8 \text{ N m}^{-1}$ ہے کی لمبائی کو 1 m سے تبدیل کر کے 0.8 m کیا جاتا ہے۔ درکار کام تلاش کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کو محور x پر پڑا ہوا تصور کرتے ہیں۔ اسپرنگ کا ایک سر مبدا پر ہے جبکہ اس کا دوسرا سر $x = 1$ پر باندھا ہوا ہے۔ یوں ہم قوت کو $F = 8x$ لکھ سکتے ہیں جہاں x کی قیمت 0 تا 0.2 m ہوگی۔ درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^{0.2} 8x \, dx = \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^{0.2} = 0.16 \text{ J}$$

□

مثال 6.34: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی 1 m ہے کو 24 N قوت سے تان کر 1.8 m لمبا کیا جاتا ہے۔

ا. مقیاس چمک k تلاش کریں۔

ب. اسپرنگ کی لمبائی کو 2 m تبدیل کرنے کے لئے درکار کام تلاش کریں۔

ج. اسپرنگ کی لمبائی میں 45 N کی قوت کتنی تبدیلی پیدا کرے گی؟

حل:

ا. مقیاس چمک: قیاس چمک کو مساوات 6.32 سے حاصل کرتے ہیں۔ اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی 0.8 m ہے۔

$$24 = k(0.8) \implies k = \frac{24}{0.8} = 30 \text{ N m}^{-1}$$

Hooke's law¹⁷
spring constant¹⁸

ب. کام: ہم اسپرنگ کو چھت سے یوں آویزاں تصور کرتے ہیں کہ اس کا آزاد سر $x = 0$ پر ہو۔ اسپرنگ کی لمبائی کو اس کی قدرتی لمبائی سے x میٹر زیادہ کرنے کے لئے درکار قوت $F = kx$ ہوگی جو اسپرنگ کو نیچے رخ کھینچے گی۔ یوں $x = 0$ سے $x = 2 \text{ m}$ تک کھینچنے کے لئے کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^2 30x \, dx = \left. \frac{30x^2}{2} \right|_0^2 = 60 \text{ J}$$

ج. لمبائی میں تبدیلی: ہم مساوات $F = 30x$ میں $F = 45$ ڈال کر x تلاش کرتے ہیں۔

$$45 = 30x \implies x = \frac{45}{30} = 1.5 \text{ m}$$

یوں اسپرنگ کی کل لمبائی $1 + 1.5 = 2.5 \text{ m}$ ہوگی۔

□

ٹینکی سے پانی کی نکاسی

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

