

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246	10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا
1261	10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277	10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291	10.6 قطبی محدود
1303	10.7 قطبی محدود میں ترسیم
1317	10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1319	10.8.1 دائرے

1331 ا ضمیمہ اول

1333 ب ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

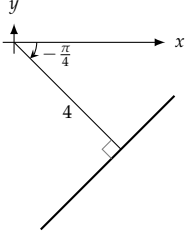
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

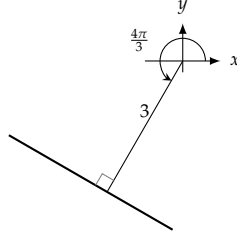
میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

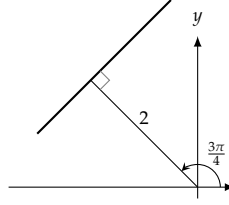
28 اکتوبر 2011



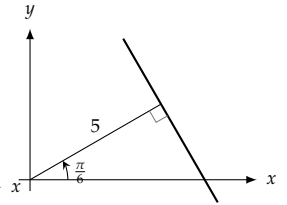
شکل 10.132: ترسیم سوال 4



شکل 10.131: ترسیم سوال 3



شکل 10.130: ترسیم سوال 2



شکل 10.129: ترسیم سوال 1

سوالات

خطوط

سوال 1 تا سوال 4 میں دیے خطوط کی قطبی اور کارتیسی مساوات تلاش کریں۔

سوال 1: خط شکل 10.129 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال 2: خط شکل 10.130 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال 3: خط شکل 10.131 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال 4: خط شکل 10.132 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

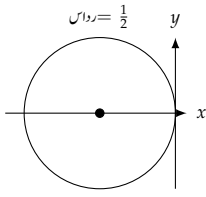
سوال 5 تا سوال 8 میں دی مساوات کو ترسیم کریں اور ان کی کارتیسی مساوات معلوم کریں۔

سوال 5: $r \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

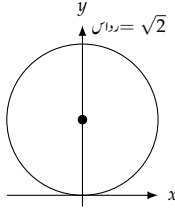
سوال 6: $r \cos(\theta + \frac{3\pi}{4}) = 1$

سوال 7: $r \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) = 3$

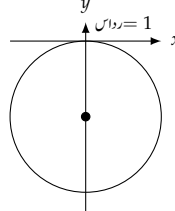
سوال 8: $r \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 2$



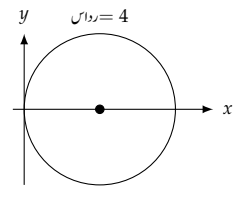
شکل 10.136: دائرہ سوال 16



شکل 10.135: دائرہ سوال 15



شکل 10.134: دائرہ سوال 14



شکل 10.133: دائرہ سوال 13

سوال 9 تا سوال 12 میں دی گئی کارتیسی مساوات کی قطبی روپ ($r \cos(\theta - \theta_0) = r_0$) تلاش کریں۔

سوال 9: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$

سوال 10: $\sqrt{3}x - y = 1$

سوال 11: $y = -5$

سوال 12: $x = -4$

سوال 13 تا سوال 16 میں دی گئی دائروں کی قطبی مساوات دریافت کریں۔

سوال 13: دائرہ شکل 10.133

سوال 14: دائرہ شکل 10.134

سوال 15: دائرہ شکل 10.135

سوال 16: دائرہ شکل 10.136

سوال 17 تا سوال 20 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔

سوال 17: $r = 4 \cos \theta$

سوال 18: $r = 6 \sin \theta$

سوال 19: $r = -2 \cos \theta$

سوال 20: $r = -8 \sin \theta$

سوال 21 تا سوال 28 کے قطبی مساوات معلوم کریں۔

سوال 21: $(x - 6)^2 + y^2 = 36$

سوال 22: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

سوال 23: $x^2 + (y - 5)^2 = 25$

سوال 24: $x^2 + (y + 7)^2 = 49$

سوال 25: $x^2 + 2x + y^2 = 0$

سوال 26: $x^2 - 16x + y^2 = 0$

سوال 27: $x^2 + y^2 + y = 0$

سوال 28: $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$

سنک اور ناظمہ سے مخروط خطے

سوال 29 تا سوال 36 میں مخروط حصوں کی سنک دی گئی ہے۔ مخروط حصے کا ایک ماسکہ مہدا پر واقع ہے اور اس کا مطابق ناظمہ بھی دیا گیا ہے۔ اس مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال 29: $e = 1, \quad x = 2$

سوال 30: $e = 1, \quad y = 2$

سوال 31: $e = 5, \quad y = -6$

سوال 32: $e = 2, \quad x = 4$

سوال 33: $e = \frac{1}{2}, \quad x = 1$

سوال 34: $e = \frac{1}{4}, \quad x = -2$

سوال 35: $e = \frac{1}{5}, \quad y = -10$

سوال 36: $e = \frac{1}{3}, \quad y = 6$

قطع مکانی اور ترخیم
سوال 37 تا سوال 44 کے قطع مکانی اور ترخیمات کو ترسیم کریں۔ مبداء پر واقع ماسکہ کا مطابقتی ناظمہ بھی ترسیم کریں۔ ہر مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال 37: $r = \frac{1}{1+\cos \theta}$

سوال 38: $r = \frac{6}{2+\cos \theta}$

سوال 39: $r = \frac{25}{1-5\cos \theta}$

سوال 40: $r = \frac{4}{2-2\cos \theta}$

سوال 41: $r = \frac{400}{16+8\sin \theta}$

سوال 42: $r = \frac{12}{3+3\sin \theta}$

سوال 43: $r = \frac{8}{2-2\sin \theta}$

سوال 44: $r = \frac{4}{2-\sin \theta}$

عدم مساوات کی ترسیمات

سوال 45 اور سوال 46 میں عدم مساوات کو ترسیم کریں۔

سوال 45: $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$

سوال 46: $-3 \cos \theta \leq r \leq 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 47 تا سوال 56 میں دیے گئے خط اور مخروط خطے ترسیم کریں۔

سوال 47: $r = 3 \sec(\theta - \frac{\pi}{3})$

سوال 48: $r = 4 \sec(\theta + \frac{\pi}{6})$

سوال 49: $r = 4 \sin \theta$

سوال 50: $r = -2 \cos \theta$

سوال 51: $r = \frac{8}{4 + \cos \theta}$

سوال 52: $r = \frac{8}{4 + \sin \theta}$

سوال 53: $r = \frac{1}{1 - \sin \theta}$

سوال 54: $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$

سوال 55: $r = \frac{1}{1 + 2 \sin \theta}$

سوال 56: $r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 57: حنیض شمسی اور اوج شمسی
ایک سیارہ اپنے سورج کے گرد ایک ترجیم پر گھومتا ہے جس کے نصف محور اکبر کی لمبائی a ہے۔

ا. دکھائیں کہ جب سیارہ سورج کے قریب تر ہو تب $r = a(1 - e)$ ہو گا اور جب یہ سورج سے دور تر ہو تب $r = a(1 + e)$ ہو گا۔

جدول 10.4: نظام شمسی میں سیاروں کی سنک اور نصف محور اکبر

سیارہ	نصف محور اکبر (فلکی اکائیاں)	سنک
عطارد	0.387	0.2056
زھرہ	0.7233	0.0068
زمین	1.000	0.0167
مرخ	1.524	0.0934
مشتری	5.203	0.0484
زحل	9.539	0.0543
یورانس	19.18	0.0460
نیپچون	30.06	0.0082
پلوٹو	39.44	0.2481

ب. جدول 10.4 کی مدد سے معلوم کریں کہ ہماری نظام شمسی میں ہر سیارہ سورج کے کتنے نزدیک اور اس سے کتنا دور ہو سکتا ہے۔

سوال 58: سیاروں کی مدار پر حرکت

ہم نے مثال 10.43 میں پلوٹو کے مدار کی قطبی مساوات معلوم کی۔ جدول 10.4 کی مدد سے دیگر سیاروں کے مدار کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 59: (الف) منحنیات $r = 4 \sin \theta$ اور $r = \sqrt{3} \sec \theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دونوں منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدود میں ظاہر کریں۔

سوال 60: (الف) منحنیات $r = 8 \cos \theta$ اور $r = 2 \sec \theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دونوں منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدود میں ظاہر کریں۔

سوال 61: ایک قطع مکانی کا ماسک $(0, 0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r \cos \theta = 4$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال 62: ایک قطع مکانی کا ماسک $(0, 0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 4$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال 63: خلائی مہندس

ترخیمی مدار کی سنک کا کلیہ خلائی مہندس درج ذیل لکھے گا

$$e = \frac{r_{\text{بندتر}} - r_{\text{بندز}}}{r_{\text{بندز}} + r_{\text{بندتر}}}$$

جہاں خلائی جہاز سے قوت کشش کے مرکز تک فاصلہ r ہے۔ یہ کلیہ کیوں قابل استعمال ہے؟

سوال 64: ترخیم کی ترسیم بذریعہ دھاگہ

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

