

احصاء اور تحليلي علم الهندسه

(جلد اول)

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامسٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

7.2	قدرتی لوگار تھم	762
7.3	قوت نمائی تفاعل	779
7.4	$\log_a x$ اور a^x	794
7.5	افزائش اور تنزل	805
7.6	قاعدہ لھوپیٹال	819
7.7	اضافی شرح نمو	835
7.7.1	ترتیبی اور شمائی تلاش	840
7.8	الٹ نیکونائی تفاعل	846
7.9	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	862
7.10	ہذلولی تفاعل	879
7.11	یک رتبی تفرقی مساوات	900
7.12	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	918

8	تکمل کے طریقے	929
8.1	تکمل کے بنیادی کلیات	929
8.2	تکمل بالخص	945
8.2.1	بار بار استعمال	950
8.3	جزوی کسر	959
8.4	نیکونائی بدل	974
8.5	جدول تکمل اور کمپیوٹر	986
8.6	غیر مناسب تکمل	1003

9	لا متناہی تسلسل	1029
9.1	اعداد کی ترتیب کی حد	1029
9.2	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	1048
9.3	لا متناہی تسلسل	1064
9.4	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	1083
9.5	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	1093
9.6	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	1103
9.7	بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	1115
9.8	طاققی تسلسل	1129
9.9	ٹیبلر اور مکملارن تسلسل	1145
9.10	ٹیبلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	1156
9.11	طاققی تسلسل کے استعمال	1175

10	مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	1195
10.1	مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	1195
10.2	سک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	1220

1230	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274	10.6	قطبی محدود
1286	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301	10.8.1	دائرے
1315	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329	11.1	مستوی میں سمتیات
1345	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353	11.2.1	کرہ
1363	11.3	ضرب نقطہ
1364	11.3.1	حساب
1378	11.4	صلیبی ضرب
1393	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1478	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1499	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530	13.2	حد اور استمرار
1545	13.3	جزوی تفرقات
1562	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579	13.5	زنجیری قاعدہ
1594	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631	13.8.1	نتیجہ
1640	13.9	لیگرینج ضاربین
1657	13.10	کلیہ نیلر

1665	14	تکمل بالکثرت
1665	14.1	دوہرا نکملات
1685	14.2	رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701	14.3	دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712	14.4	کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727	14.5	تین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736	14.6	تکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756	14.7	نکملات بالکثرت میں بدل
1771	15	سستی میدان میں تکمل
1771	15.1	لکیری تکمل
1774	15.1.1	جمع پذیری
1781	15.2	سستی میدان، کام، دائری بہاو، اور بہاو
1798	15.3	راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان
1801		جوابات
1853	ا	ضمیمہ اول
1855	ب	ضمیمہ دوم
1857	ج	ضمیمہ تین
1859	د	ضمیمہ چار
1861	ه	ضمیمہ پانچ
1863	و	ضمیمہ چھ
1865	ز	ضمیمہ سات
1867	ح	ضمیمہ آٹھ
1869	ط	ضمیمہ آٹھ
1871	ي	نکملات کا مختصر جدول

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

15.3 راہ سے آزادی، تفاعل مخفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کیت یا پار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے ناکہ منتقلی کی راہ پر۔ اس حصہ میں مکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں مکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ D پر معین میدان F ایک ذرہ کو D میں نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتا ہے۔ عموماً مکمل کام $\int F \cdot dr$ کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہوگی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں مکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوگی ناکہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر D میں تمام A اور B کے لئے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ D میں $\int F \cdot dr$ راہ سے آزاد ہے اور D پر F بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ D پر F کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ D میں ہر دو نقطوں A اور B کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر مکمل کام $\int_A^B F \cdot dr$ کی قیمت ایک جیسی ہے۔ تب مکمل $\int F \cdot dr$ خطہ D میں راہ سے آزاد⁷ ہو گا اور میدان F خطہ D پر بقائی⁸ ہو گا۔

□

عملی زندگی میں عموماً میدان F صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب D پر $F = \nabla f$ ہو جہاں f ایک غیر سمتی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل f کو F کا مخفی قوتہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر D پر میدان F معین ہو اور $F = \nabla f$ ہو جہاں f خطہ D پر ایک غیر سمتی تفاعل ہو تب f کو F کا مخفی قوتہ تفاعل⁹ کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوتہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوتہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان F کا مخفی قوتہ تفاعل f جاننے کے بعد F کی دائرہ کار میں تمام کمالات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔

$$(15.10) \quad \int_A^B F \cdot dr = \int_A^B \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$$

path independent⁷
conservative⁸
potential function⁹

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق f' کی طرح ∇f کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لئے فرض کریں تب مساوات 15.10 کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

کا مطابق سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً، D پر بقائی F کی صورت میں D میں ہر بند راہ پر مکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات 15.10 اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل متغیر، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **مکروویو** میں ¹⁰ ہموار ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ 12.1 کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ F کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرقات پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد $F = \nabla f$ کی صورت میں مخفی قوت تفاعل f کے مدغم تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان F کے خواص پر غور کے دوران آفتاب انگیز ثابت ہو گا۔

ہم فضا میں D کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں D میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ D **تعلق (دار)**¹¹ خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جاسکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

بقائی میدان میں لکیری کمالات

بقائی میدان میں لکیری کمالات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جاسکتی ہیں۔ اس نتیجہ کے تحت مکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہوگی تاکہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ 15.1: **لکیری کمالات کا بنیادی مسئلہ**

1. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ D میں سمتی میدان $F = Mi + Nj + Pk$ کے اجزاء استمراری ہیں۔ تب صرف اور صرف اس صورت جب D میں تمام نقاط A اور B کے لئے مکمل $\int_A^B F \cdot dr$ کی قیمت، D کے اندر رہتے ہوئے A اور B کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل f موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$F = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

¹⁰ piecewise smooth
¹¹ connected

2. اگر مکمل کی قیمت A اور B کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب مکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: کہ $F = \nabla f$ سے مراد مکمل کی قیمتے کا راہ سے آزاد ہونا ہے

فرض کریں D میں A اور B دو نقطے ہیں اور D میں A سے B تک ہموار راہ $C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ ہے۔ منحنی کی ہمراہ t کے لحاظ سے C قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$(15.11) \quad = \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \frac{df}{dt} dt \\ &= f(g(t), h(t), k(t)) \Big|_a^b = f(B) - f(A) \end{aligned} \quad \text{مساوات 15.11}$$

اس طرح مکمل کام کی قیمت A اور B پر f کی قیمتوں پر منحصر ہو گی ناکہ ان کے بیچ راہ پر۔ یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔

□

مثال 15.10: نقاط $(-1, 3, 9)$ اور $(1, 6, -4)$ کے بیچ ہموار منحنی C پر چلتے ہوئے درج ذیل ہتائی میدان کا کم تلاش کریں۔

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla(xyz)$$

حل: $f(x, y, z) = xyz$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} & \mathbf{F} &= \nabla f \\ &= f(B) - f(A) & \text{مسئلہ 15.1 کا جزو دوم} \\ &= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3 \end{aligned}$$

□

جوابات

