

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
685	6.6	سطح طواف کا رقبہ
697	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
709	6.7.1	وسطانی مرکز
714	6.8	کام
729	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
738	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
753	7	ماورائی تفاعل
754	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

772	قدرتی لوگار تھم	7.2
790	قوت نمائی تفاعل	7.3
805	a^x اور $\log_a x$	7.4
816	افزائش اور تنزل	7.5
830	قاعدہ لھویٹال	7.6
846	اضافی شرح نمو	7.7

851 ا ضمیمہ اول

853 ب ضمیمہ دوم

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

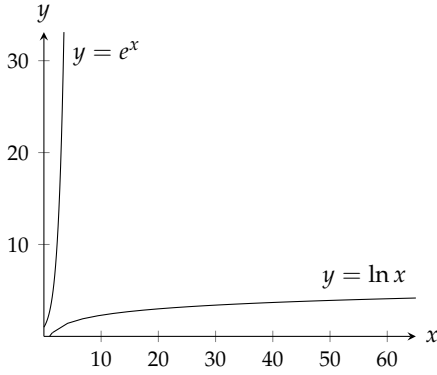
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

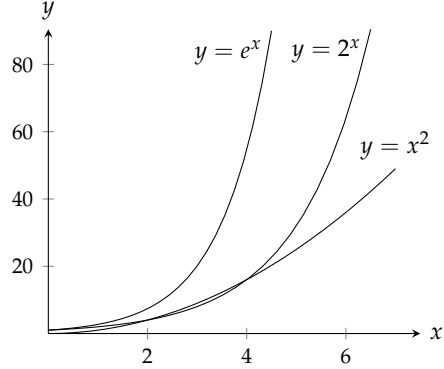
میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 7.38: $y = e^x$ اور $y = \ln x$ کا موازنہ



شکل 7.37: $y = e^x$ ، $y = 2^x$ اور $y = x^2$ کے تقاضے

7.7 اضافی شرح نمونہ

اس حصہ میں x کی بڑھتی قیمت پر x کے تقاضے کی شرح تبدیلی پر غور کیا جائے گا۔ ہم ان تقاضے پر غور کریں گے جو $x \rightarrow \infty$ کرنے سے آخر کار مثبت ہو کر مثبت ہی رہتے ہیں۔

اضافی شرح نمونہ

آپ نے دیکھا ہو گا کہ متغیر x بڑھانے سے کثیر رکنی اور ناقل تقاضے (جنہیں ہم نے باب 4 میں ترسیم کیا تھا) کے لحاظ سے قوت نما تقاضے، مثلاً 2^x اور e^x ، زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ قوت نما تقاضے یقیناً x کے لحاظ سے زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ آپ شکل 7.37 میں دیکھ سکتے ہیں کہ x بڑھانے سے x^2 کے لحاظ سے 2^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔ درحقیقت $x \rightarrow \infty$ کرنے سے تقاضے 2^x اور e^x کے بڑھنے کی شرح، x کے کسی بھی طاقت (مثلاً $x^{1000000}$) کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔

متغیر x بڑھاتے ہوئے تقاضے $y = e^x$ کے بڑھنے کی شرح کو سمجھنے کی خاطر تصور کریں کہ آپ اس تقاضے کو ترسیم کرتے ہیں جہاں محور کا پیمانہ 1 cm ہے۔ یوں $x = 1$ cm پر $y = e^1 \approx 3$ cm ہو گا۔ یوں $x = 6$ cm پر $y = e^6 \approx 403$ cm یعنی تقریباً 4 میٹر ہو گا جو کمرے کی چھت کے برابر ہو گا۔ اسی طرح $x = 10$ cm پر $y = e^{10} \approx 22026$ cm یعنی 220 m ہو گا جو شہر کے عموماً عمارتوں سے زیادہ بلند ہو گا۔ اگر $x = 24$ cm ہو تب y چاند تک آدھے فاصلہ سے زیادہ طے کر چکا ہو گا اور $x = 24$ cm پر y سورج کے قریب ترین ستارہ سے زیادہ دور ہو گا:

$$e^{43} \approx 4.73 \times 10^{18} \text{ cm}$$

$$= 4.73 \times 10^{13} \text{ km}$$

$$\approx 5 \text{ نوری سال}$$

اس کے باوجود x محور پر آپ مبدا سے صرف 43 cm فاصلہ پر ہوں گے۔

اس کے برعکس $x \rightarrow \infty$ کرنے سے لوگار تھمی تقابل $y = \log_2 x$ اور $y = \ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے کسی بھی مثبت طاقت کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گا۔ یوں محور کا پیمانہ 1 cm لیتے ہوئے مبدا سے صرف 43 cm بلندی تک پہنچنے کی خاطر آپ کو محور x پر 5 نوری سال دور جانا ہو گا (شکل 7.38)۔

قوت نما، کثیر رکنی اور لوگار تھمی تقابل کا ایک دوسرے کے ساتھ مذکورہ بالا موازنہ کو زیادہ درستگی سے بیان کرنے کی خاطر ہم ایک تعریف پیش کرتے ہیں۔ جب ہم کہتے ہیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرنے سے کسی بھی تقابل $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح سے تقابل $f(x)$ کے بڑھنے کی شرح زیادہ ہے تب اس سے مراد درج ذیل ہو گا۔

تعریف: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے بڑھنے کی شرح فرض کریں کافی بڑے x کے لئے $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔

ا. اگر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

یا، اس کا مماثل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ہو تب $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے g کے بڑھنے کی شرح، f کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی۔

ب. اگر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \quad L \text{ غیر صفر اور متناہی ہے}$$

ہو تب $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح کے برابر ہو گی۔

□

ان تعریف کے تحت تقابل $y = 2x$ تقابل $y = x$ سے زیادہ تیزی سے نہیں بڑھتا ہے۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

ہے جو غیر صفر اور تنہا ہی حد ہے۔ زیادہ تیزی سے بڑھنے کے عمومی مطلب کو ہم اس لئے نظر انداز کرتے ہیں کہ جب ہم کہیں کہ x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے بڑھنے کی شرح g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہے تب اس سے مراد " x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے لحاظ سے g کی قیمت قابل نظر انداز ہے"، لینا چاہیے۔

مثال 7.45: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے لحاظ سے e^x درج ذیل کی بنا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty \quad \text{قاعدہ لھوپیٹال دو مرتبہ استعمال کیا گیا}$$

□

مثال 7.46: (i) $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے 2^x کے لحاظ سے 3^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے چونکہ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

(ب) $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے قوت نما قائل کبھی بھی ایک شرح شے نہیں بڑھتے ہیں۔ اگر $a > b > 0$ ہو تب a^x کے بڑھنے کی شرح b^x کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty$$

□

مثال 7.47: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے بڑھنے کی شرح $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہوگی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$$

□

مثال 7.48: $x \rightarrow \infty$ کرنے سے $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے بڑھنے کی شرح سے کم ہوگی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

□

مثال 7.49: قوت نما تقابل کے برعکس $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے لوگار تھمی تقابل ایک جیسے شرح سے بڑھتے ہیں:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x / \ln a}{\ln x / \ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

□

یہ حد غیر صفر اور متناہی ہے۔

اگر $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، اور $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے gf کے بڑھنے کی شرح اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، تب $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہوگی۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g}{h} = L_2$$

یعنی

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{h} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

ہے۔ اگر L_1 اور L_2 غیر صفر اور متناہی ہوں تب $L_1 L_2$ بھی غیر صفر اور متناہی ہو گا۔

مثال 7.50: دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^2 + 5}$ اور $(2\sqrt{x} - 1)^2$ کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہے۔

حل: ہم دکھاتے ہیں کہ دونوں تقابل کے بڑھنے کی شرح یہی ہے جو تقابل x کی ہے:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = 4 \end{aligned}$$

□

یوں دونوں تقابل کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنے ہوگی۔

رتبہ

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

