احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ

ہم تسلسل $\sum a_n$ کے بارے میں دو سوالات کرتے ہیں:

ا. کیا یہ تسلسل مرتکز ہے؟

ب. اگر تسلسل مرتکز ہو تب اس کا مجموعہ کیا ہے؟

اس باب کا باقی بیشتر حصہ پہلے سوال کا جواب دے گا۔ حقیقتاً دوسرا سوال بھی اتنا ہی اہم ہے اور ہم اس پر بعد میں غور کریں گے۔

اس حصہ میں اور اگلے دو حصوں میں ایسے تسلسل پر غور کیا جائے گا جن میں منفی اجزاء نہیں پائے جاتے ہوں۔ اس شرط کی بنا ان تسلسل کے جزوی مجموعے غیر گھٹتے ترتیبات دیتے ہیں اور وہ غیر گھٹتے ترتیبات جو اوپر سے محدود ہوں ہر صورت مرتکز ہوتے ہیں (مسئلہ 9.1)۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ ایک غیر منفی اجزاء والا تسلسل مرتکز ہے، ہمیں صرف اتنا دکھانا ہو گا کہ اس تسلسل کے جزوی مجموعے اوپر سے محدود ہیں۔

ابتدا میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسے اس ترکیب سے ارتکاز کی تصدیق کرنے کے باوجود تسلسل کا مجموعہ نہ جاننا ایک عیب ہے۔ کیا بہتر ہوتا کہ ہم جزوی مجموعوں کے کلیات سے تسلسل کا مجموعہ بلا واسطہ تلاش کرتے۔ حقیقت میں ہمیں عموماً جزوی مجموعوں کے کلیات معلوم نہیں ہوں گے اور اسی بنا ہمیں دو قدمی طریقہ کار استعمال کرنا ہو گا جہاں پہلے قدم میں تسلسل کا ارتکاز جانا جاتا ہے اور دوسرے قدم میں مجموعے کی تخمینی قیمت تلاش کی جاتی ہے۔

غیر گھٹتے جزوی مجموعے

فرض کریں کہ تمام n کے لئے $a_n \geq 0$ ہو اور $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لامتناہی تسلسل ہو۔ تب چونکہ $s_{n+1} = s_n + a_n$ ہے لہٰذا ہر جزوی مجموعہ گزشتہ جزوی مجموعے سے بڑا یا اس کے برابر ہو گا:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots$$

اب جزوی مجموعے غیر گھٹتا ترتیب بناتے ہیں اور مسئلہ 9.1 کے تحت یہ تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

ضمنی نتیجہ 9.1: برائے مسئلہ 9.1 غیر منفی اجزاء کا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

مثال 9.28: ہارمونی تسلسل
درج ذیل تسلسل کو ہارمونی تسلسل[27] کہتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

اس کے جزوی مجموعوں کی کوئی بالائی حد بندی نہیں پائی جاتی ہے لہٰذا یہ مرتکز تسلسل ہے۔ اس حقیقت کو جاننے کی خاطر ہم اجزاء کے گروہ بناتے ہیں۔

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\cdots$$

پہلے دو اجزاء کا مجموعہ 1.5 ہے۔اگلے دو اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ ہے جو $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہے۔ اگلے چار اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ ہے جو $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہے۔ اگلے آٹھ اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$ ہے جو $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہے۔ اسی طرح اگلے سولہ اجزاء کا مجموعہ بھی $\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ یوں جزو $\frac{1}{2^{n+1}}$ پر اختتام پذیر 2^n اجزاء کا مجموعہ $\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو گا۔ جزوی مجموعات کی ترتیب اوپر سے محدود نہیں ہے: اگر $n=2^k$ ہو تب جزوی مجموعہ s_n کی قیمت $\frac{k}{2}$ سے بڑی ہو گی۔ ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔
□

دھیان رہے کہ ہارمونی تسلسل کا n واں جزو $\frac{1}{n}$ ہے جو 0 پر مرتکز ہے لیکن ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔یوں ہارمونی تسلسل کے انفراج کو دریافت کرنے میں انفراج کا n ویں جزو پرکھ ناکام ہوتا ہے۔

تکملی پرکھ

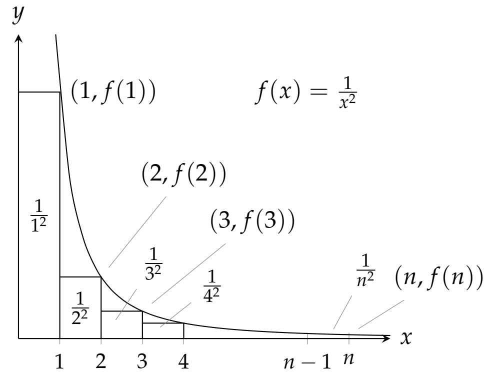
ہم ہارمونی تسلسل سے تعلق رکھنے والے ایک تسلسل، جس کا n واں جزو $\frac{1}{n^2}$ ہے، کو استعمال کرتے ہوئے تکملی پرکھ کو متعارف کرتے ہیں۔

مثال 9.29: کیا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

حل: ہم $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کی ارتکاز دریافت کرتے ہیں۔ موازنہ کرنے کی خاطر ہم تسلسل کے اجزاء کو تفاعل $f(x)=\frac{1}{x^2}$ کی قیمتیں تصور کرتے ہیں اور ان قیمتوں کو منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ کے نیچے مستطیل رقبے تصور کرتے ہیں۔

---
[27] harmonic series



شکل 9.20: رقبہ کا موازنہ (مثال 9.29)

جیسا شکل 9.20 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
&< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&< 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&< 1 + 1 = 2 && \text{(مثال 8.45)}
\end{aligned}$$

یوں $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کے جزوی مجموعات اوپر سے (2 تک) محدود ہیں لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ اس تسلسل کا مجموعہ درحقیقت $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$ ہے۔ □

تکملی پرکھ

فرض کریں $\{a_n\}$ مثبت اجزاء کی ترتیب ہے۔ مزید فرض کریں کہ $a_n = f(n)$ ہے جہاں تمام $x \geq N$ کے لئے (N مثبت عدد صحیح ہے) متغیر x کا f استمراری، مثبت اور گھٹتا تفاعل ہے۔ تب تسلسل $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ اور تکمل $\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

ثبوت: ہم $N = 1$ کے لئے پہلے اس پرکھ کو ثابت کرتے ہیں۔ عمومی N کے لئے ثبوت اسی طرح کا ہے۔

ہم اس مفروضہ سے شروع کرتے ہیں کہ تمام n کے لئے f گھٹتا تفاعل اور $f(n) = a_n$ ہیں۔ یوں شکل-الف میں وہ مستطیل جن کے رقبے $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ہیں کا مجموعی رقبہ، $x = 1$ تا $x = n + 1$ ترسیم $y = f(x)$ کے نیچے رقبہ سے

زیادہ ہے یعنی:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

شکل-ب میں مستطیلوں کو ہر نقطہ کے بائیں جانب بنایا گیا ہے۔ اگر ہم وقتی طور پر پہلی مستطیل، جس کا رقبہ a_1 ہے، کو نظر انداز کریں تب درج ذیل ہو گا۔

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

اگر ہم a_1 کو بھی شامل کریں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

ان نتائج سے

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ متناہی ہو تب دائیں عدم مساوات کے تحت $\sum a_n$ متناہی ہو گا۔ اگر $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ لامتناہی ہو تب بائیں عدم مساوات کے تحت $\sum a_n$ لامتناہی ہو گا۔

یوں تسلسل اور تکمل دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

□

دھیان رہے کہ ارتکاز کی صورت میں تکمل اور تسلسل کی قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں جیسا مثال 9.29 میں دیکھا گیا جہاں $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ اور $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$ تھے۔

مثال 9.30: دکھائیں کہ p تسلسل

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{9.16}$$

جہاں p حقیقی مستقل ہے، $p > 1$ کی صورت میں مرتکز جبکہ $p \le 1$ کی صورت میں منفرج ہو گا۔

حل: اگر $p > 1$ ہو تب $f(x) = \frac{1}{x^p}$ متغیر x کا مثبت گھٹتا تفاعل ہو گا۔ اب چونکہ

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\Big[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b \\
&= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\big(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\big) \\
&= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}
\end{aligned}$$

ہے لہٰذا تکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

اگر $p < 1$ ہو تب $1 - p > 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p} - 1) = \infty$$

تکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

اگر $p = 1$ ہو تب درج ذیل منفرج (ہارمونی) تسلسل پایا جائے گا۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

یوں $p > 1$ لے ارتکاز لیکن $p < 1$ اور $p = 0$ کے لئے انفراج پایا جاتا ہے۔ □

سوالات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم