

احصاء اور تحليلي علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

7.2	قدرتی لوگار تھم	762
7.3	قوت نمائی تفاعل	779
7.4	$\log_a x$ اور a^x	794
7.5	افزائش اور تنزل	805
7.6	قاعدہ لھوپیٹال	819
7.7	اضافی شرح نمو	835
7.7.1	ترتیبی اور شمائی تلاش	840
7.8	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	846
7.9	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	862
7.10	بدلولی تفاعل	879
7.11	یک رتبی تفرقی مساوات	900
7.12	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	918

8	تکمل کے طریقے	929
8.1	تکمل کے بنیادی کلیات	929
8.2	تکمل بالخص	945
8.2.1	بار بار استعمال	950
8.3	جزوی کسر	959
8.4	نکتہ بنائی بدل	974
8.5	جدول تکمل اور کمپیوٹر	986
8.6	غیر مناسب تکمل	1003

9	لا متناہی تسلسل	1029
9.1	اعداد کی ترتیب کی حد	1029
9.2	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	1048
9.3	لا متناہی تسلسل	1064
9.4	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	1083
9.5	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	1093
9.6	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	1103
9.7	بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	1115
9.8	طاققی تسلسل	1129
9.9	ٹیبلر اور مکملارن تسلسل	1145
9.10	ٹیبلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	1156
9.11	طاققی تسلسل کے استعمال	1175

10	مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	1195
10.1	مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	1195
10.2	سک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	1220

1230	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274	10.6	قطبی محدود
1286	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301	10.8.1	دائرے
1315	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329	11.1	مستوی میں سمتیات
1345	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353	11.2.1	کرہ
1363	11.3	ضرب نقطہ
1364	11.3.1	حساب
1378	11.4	صلیبی ضرب
1393	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1478	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1499	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530	13.2	حد اور استمرار
1545	13.3	جزوی تفرقات
1562	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579	13.5	زنجیری قاعدہ
1594	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631	13.8.1	نتیجہ
1640	13.9	لیگرینج ضاربین
1657	13.10	کلیہ نیلر

1665	14	تکمل بالکثرت
1665	14.1	دوہرا نکملات
1685	14.2	رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701	14.3	دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712	14.4	کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727	14.5	تین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736	14.6	تکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756	14.7	نکملات بالکثرت میں بدل
1771	15	سستی میدان میں نکمل
1771	15.1	لکیری نکمل
1774	15.1.1	جمع پذیری
1781	15.2	سستی میدان، کام، دائری بہاو، اور بہاو
1798	15.3	راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان
1813		جوابات
1853	ا	ضمیمہ اول
1855	ب	ضمیمہ دوم
1857	ج	ضمیمہ تین
1859	د	ضمیمہ چار
1861	ه	ضمیمہ پانچ
1863	و	ضمیمہ چھ
1865	ز	ضمیمہ سات
1867	ح	ضمیمہ آٹھ
1869	ط	ضمیمہ آٹھ
1871	ي	نکملات کا مختصر جدول

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 15

سمتی میدان میں تکمل

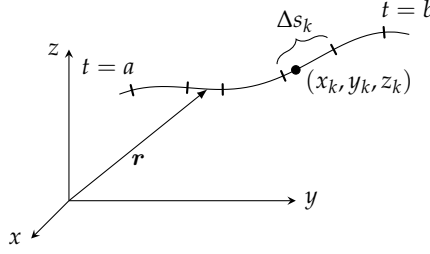
ایکے جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقاطیبت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاؤ پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

15.1 لکیری تکمل

جب فضا میں تقابل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$, $a \leq t \leq b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تقابل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگ۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تقابل کے مکمل کو قوس کے ساتھ f کا لکیری تکمل¹ کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، لکیری تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تقابل کا سادہ تقابل ہو گا۔

لکیری تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان کمالات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاؤ کا حساب کرتے ہیں۔

line integral¹



شکل 15.1: منحنی $r = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ کو $t = a$ اور $t = b$ کے بیچ توپوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہے۔

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تقابل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ ، $a \leq t \leq b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کی، متناہی تعداد کی توپوں میں، خانہ بندی کرتے ہیں (شکل 15.1)۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہوگی۔ ہم ہر قوسچہ پر ایک نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(15.1) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

اگر f استمراری ہو اور g ، h ، اور k کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات 15.1 کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a تا b اس قوسچہ پر f کا مکمل کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس مکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(15.2) \quad \int_C f(x, y, z) ds \quad "C \text{ پر } f \text{ کا مکمل}"$$

ہموار منحنیات پر مکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \leq t \leq b$ پر $r(t)$ ہموار ہو ($\frac{dr}{dt}$ استمراری ہو اور کبھی بھی 0 نہ ہو) تب ہم ds کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $ds = |v(\tau)| d\tau$ لکھا جاسکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t |v(\tau)| d\tau \quad \text{حصہ 12.3 کی مساوات 12.20 میں } t_0 = a$$

اُعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے مکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |v(t)| dt$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمیل کی قیمت دیگا۔

لکیری تکمیل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تفاعل f کا تکمیل لینے کے لئے

ا. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

ب. درج ذیل تکمیل کی قیمت حاصل کریں۔

$$(15.3) \quad \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |\mathbf{v}(t)| \, dt$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمیل C کی لمبائی دیگا۔

مثال 15.1: مبدا سے نقطہ $(1, 1, 1)$ تک قطع پر $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ تکمیل کریں (شکل 15.2)۔

حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

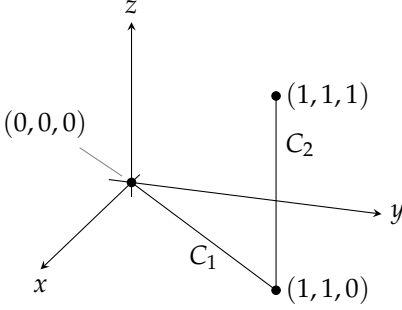
$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی 0 نہیں ہو سکتا ہے لہذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمیل درج ذیل ہو گا۔

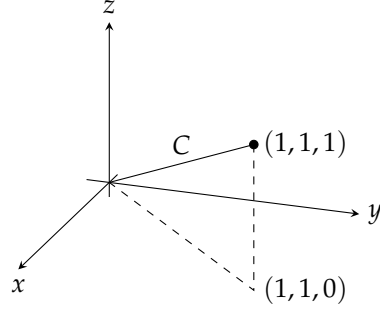
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) \, ds &= \int_0^1 f(t, t, t)(\sqrt{3}) \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3} \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) \, dt = \sqrt{3} [t^2 - t^3]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

مساوات 15.3

□



شکل 15.3: تکمل کی راہ (مثال 15.2)۔



شکل 15.2: تکمل کی راہ (مثال 15.1)۔

15.1.1 جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1, C_2, \dots, C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکرار کا مجموعہ ہو گا:

$$(15.4) \quad \int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds + \dots + \int_{C_n} f \, ds$$

مثال 15.2: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ C_1 اور C_2 پر چل کر پہنچا جاتا ہے (شکل 15.3)۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم C_1 اور C_2 کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds && \text{مساوات 15.4} \\ &= \int_0^1 f(t, t, 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 f(1, 1, t) (1) \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t) (1) \, dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

یہاں مثال 15.1 اور مثال 15.2 کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔ اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ مکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا مکمل لینے کے لئے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ مکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ سوم، مثال 15.1 میں C اور مثال 15.2 میں $C_1 \cup C_2$ پر مکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر مکملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے مکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیت کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

$$\text{کمیت: } M = \iiint_D \delta(x, y, z) dH$$

محدی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x \delta ds, \quad M_{xz} = \int_C y \delta ds, \quad M_{xy} = \int_C z \delta ds$$

مرکز کمیت کے محدود:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) \delta ds & I_y &= \int_C (x^2 + z^2) \delta ds \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta ds & I_L &= \int_C r^2 \delta ds \end{aligned}$$

جہاں L لکیر سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

$$\text{لکیر } L \text{ کے لحاظ سے رداس دور: } R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

مثال 15.3: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پایا جاتا ہے (شکل 15.4)۔

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس اسپرنگ کی کثافت مستقل قائل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کیت اور مرکز کیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشکلی کی بنا اس کا مرکز کیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $|v(t)|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} |v(t)| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4 \sin 4t)^2 + (4 \cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M = \int_{\text{پیچدار}} \delta \, ds = \int_0^{2\pi} (1) \sqrt{17} \, dt = 2\pi \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2) \delta \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t) (1) (\sqrt{17}) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{17} \, dt = 2\pi \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi \sqrt{17}}{2\pi \sqrt{17}}} = 1$$

□ دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس نیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔

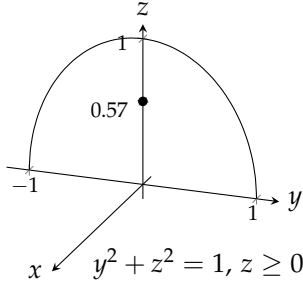
مثال 15.4: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ پر ایک دہلا پتلا محراب پایا جاتا ہے (شکل 15.5)۔ محراب کے نقطہ (x, y, z) پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کیمی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

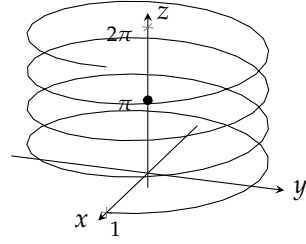
$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

لکھتے ہوئے \bar{z} دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

$$|v(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$



شکل 15.5: محراب کا مرکز کیت (مثال 15.4)۔



شکل 15.4: اسپرنگ برائے مثال 15.3

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 M &= \int_C \delta \, ds = \int_C (2 - z) \, ds = \int_0^\pi (2 - \sin t) \, dt = 2\pi - 2 \\
 M_{xy} &= \int_0^C z \delta \, ds = \int_C z(2 - z) \, ds = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t) \, dt \\
 &= \int_0^\pi (2 \sin t - \sin^2 t) \, dt = \frac{8 - \pi}{2} \\
 \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
 \end{aligned}$$

□

یوں مرکز کیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔

سوالات

سمت مساوات کے ترسیات

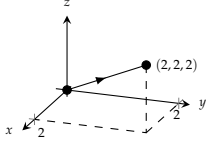
سوال 1 تا سوال 8 میں دی گئی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل 15.6 تا شکل 15.13 میں تلاش کریں۔ سوال 1: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 2: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$

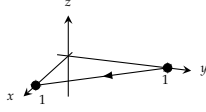
سوال 3: $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 4: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}, \quad -1 \leq t \leq 1$

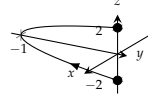
سوال 5: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$



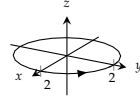
شکل 15.9



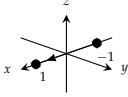
شکل 15.8



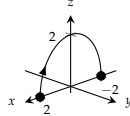
شکل 15.7



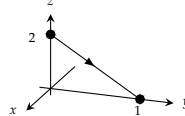
شکل 15.6



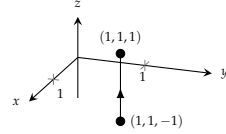
شکل 15.13



شکل 15.12



شکل 15.11



شکل 15.10

سوال 6: $r(t) = tj + (2 - 2t)k$, $0 \leq t \leq 1$

سوال 7: $r(t) = (t^2 - 1)j + 2tk$, $-1 \leq t \leq 1$

سوال 8: $r(t) = (2 \cos t)i + 2 \sin tk$, $0 \leq t \leq \pi$

فضائی منحنیات پر تکمل کے قیمتے کا حصول

سوال 9: تکمل $\int_C (x + y) ds$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0, 1, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ خط مستقیم $x = t$ ، $z = 0$ ، $y = (1 - t)$ ہے۔

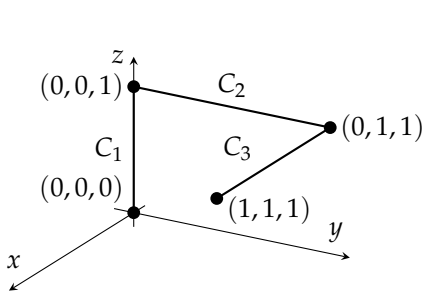
سوال 10: تکمل $\int_C (x - y + z - 2) ds$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0, 1, 1)$ تا $(1, 0, 1)$ خط مستقیم $x = t$ ، $y = (1 - t)$ ، $z = 1$ ہے۔

سوال 11: تکمل $\int_C (xy + y + z) ds$ کی قیمت منحنی $r(t) = 2ti + tj + (2 - 2t)k$ ، $0 \leq t \leq 1$ پر حاصل کریں۔

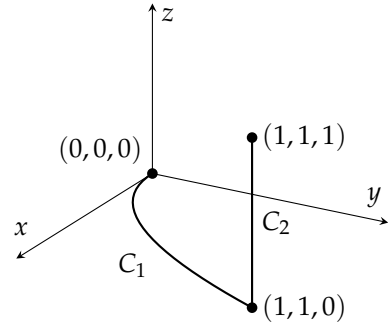
سوال 12: منحنی $r(t) = 4 \cos t i + 4 \sin t j + 3tk$ ، $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ پر تکمل $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 13: تقابل $f(x, y, z) = x + y + z$ کا تکمل $(1, 2, 3)$ تا $(0, -1, 1)$ خط مستقیم قطع پر تلاش کریں۔

سوال 14: تقابل $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2 + y^2 + z^2}$ کا تکمل منحنی $r(t) = ti + tj + tk$ ، $1 \leq t \leq \infty$ پر تلاش کریں۔



شکل 15.15: ٹکڑوں میں خطی راہ برائے سوال 16



شکل 15.14: راہ برائے مکمل (سوال 15)

سوال 15: تقابل $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا مکمل $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل 15.14)۔

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

سوال 16: تقابل $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا مکمل $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل 15.15)۔

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

سوال 17: تقابل $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ کا مکمل راہ $0 < a \leq t \leq b$ پر $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ تلاش کریں۔

سوال 18: تقابل $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + z^2}$ کا مکمل درج ذیل دائری راہ پر تلاش کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

مسطح مغنیات پر لکیری نکلاتے
سوال 19 تا سوال 22 میں f کا مکمل دی گئی مغنی پر تلاش کریں۔

سوال 19: $f(x, y) = \frac{x^3}{y}, \quad C: y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

سوال 20: $f(x, y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad C: y = \frac{x^2}{2}, \quad (0, 0) \text{ سے } (1, \frac{1}{2})$

سوال 21: ربع اول میں $(2, 0)$ سے $(0, 2)$ تک $f(x, y) = x + y, \quad C: x^2 + y^2 = 4$

سوال 22: ربع اول میں $(0, 2)$ سے $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ تک $f(x, y) = x^2 - y, \quad C: x^2 + y^2 = 4$

کمیت اور معیار اثر

سوال 23: ایک پتلی تار جس کی کشافت $\delta = \frac{3}{2}t$ ہے منحنی $r(t) = (t^2 - 1)j + 2tk, 0 \leq t \leq 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 24: ایک پتلی تار جس کی کشافت $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y+2}$ ہے منحنی $r(t) = (t^2 - 1)j + 2tk, -1 \leq t \leq 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کر کے اس پر مرکز کمیت دکھائیں۔

سوال 25: منحنی $r(t) = \sqrt{2}tj + (4 - t^2)k, 0 \leq t \leq 1$ کے ساتھ ساتھ ایک پتلی تار پائی جانے والی تار کی کشافت $\delta = 3t$ ، (ب) $\delta = 1$ ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 26: ایک پتلی تار جس کی کشافت $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ہے منحنی $r(t) = ti + 2tj + \frac{2}{3}t^{3/2}k, 0 \leq t \leq 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 27: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر مستقل کشافت δ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 28: مستوی yz میں لکیری قطع $r(t) = tj + (2 - 2t)k, 0 \leq t \leq 1$ پر مستقل کشافت کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ تینوں محدودی محوروں کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 29: مستقل کشافت δ کی ایک پتلی تار پچھڑا منحنی $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk, 0 \leq t \leq 2\pi$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ (ا) I_z اور R_z تلاش کریں۔ (ب) فرض کریں مستقل کشافت δ کی ایک دوسری پتلی تار، جس کی لمبائی دگنی ہے ($0 \leq t \leq 4\pi$)، اسی منحنی $r(t)$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ بغیر حل کیے بتلائیں کہ آیا اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار پہلی تار سے مختلف ہوں گے؟ اب انہیں حل کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 30: منحنی $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + (\frac{2\sqrt{2}}{3})t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$ کے ساتھ ساتھ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ اس کی I_z اور R_z تلاش کریں۔

سوال 31: I_z اور R_z مثال 15.4 کی محراب کے لئے تلاش کریں۔

سوال 32: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{1}{t+1}$ ہے منحنی $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت اور محدود محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 33 تا سوال 36 میں کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام سے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

ا. راہ $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ کے لئے $ds = |\mathbf{v}(t)| dt$ دریافت کریں۔

ب. متکمل $|v(t)| f(g(t), h(t), k(t))$ کو مقدار معلوم t کا تفاعل لکھیں۔

ج. مکمل $\int_C f ds$ کی قیمت مساوات 15.3 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 33: $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$

سوال 34: $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$

سوال 35: $f(x, y, z) = x\sqrt{y} - 3z^2$; $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 36: $f(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$; $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} + t^{5/2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

15.2 سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ

ان طبعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر کھملات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر کھملات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لئے درکار کام اس طرح کے کھملات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات عبور کرتا ہوا سیال کے بہاؤ کی شرح بھی لکیری کھملات سے حاصل کی جاتی ہے۔

سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر سمتی میدان² سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ سہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$$

استمراری جزوی تفاعل M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کا سمتی رفقاری سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کی ہمراہ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفقاری سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل 15.16 تا شکل 15.20 میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے تاکہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب 12) کے لئے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبداء پر رکھا جاتا ہے جبکہ اس کا سر سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

میدان ڈھلوان

تعریف: قابل تفرق تفاعل $f(x, y, z)$ کے میدان ڈھلوان³ سے مراد سمتیات ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

کا میدان ہے۔

□

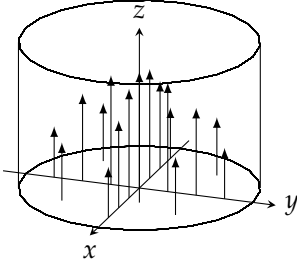
مثال 15.5: تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

□

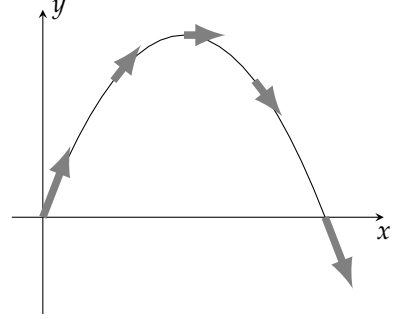
حل: تفاعل f کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان $F = \nabla f = yz i + xz j + xy k$ ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، ریاضیات، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

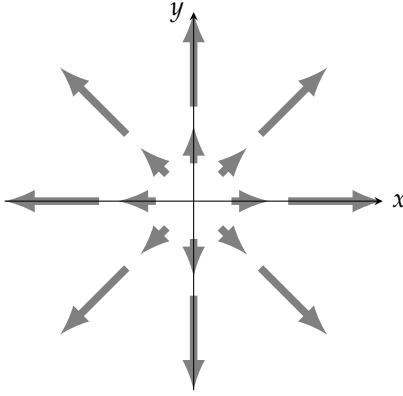
vector field²
gradient field³



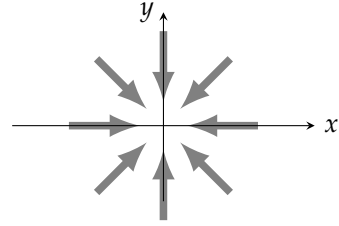
شکل 15.17: لمبی نالی میں سیال کی حرکت۔ سمتیات $v = (a^2 - \rho^2)k$ کی دم مستوی xy میں اور سر قسط مکانی $z = a^2 - \rho^2$ پر پائے جاتے ہیں۔



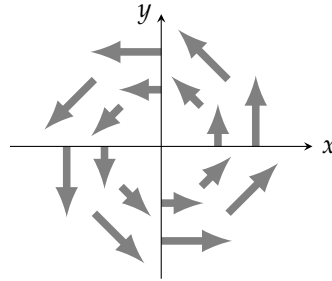
شکل 15.16: گول انداز کے سمتی رفتاری سمتیات $v(t)$ سمتی میدان دیتے ہیں۔



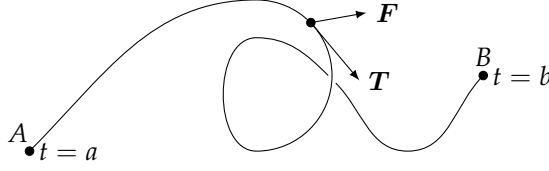
شکل 15.19: مستوی میں مختلف نقاط پر ردائی میدان $F = xi + yj$ جہاں تیردار لکیر کی دم اس نقطہ پر رکھی جاتی ہے جہاں کا سمتیہ درکار ہو۔



شکل 15.18: ثقلی میدان $F = -\frac{GM(xi+yj+zk)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ میں سمتیات۔



شکل 15.20: اکائی سمتیات $F = \frac{-yi+xj}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کا چکری میدان۔



شکل 15.21: ہموار راہ $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ پر A سے B تک استمراری قوت F کا کام $t = a$ تا $t = b$ راہ کی ہمراہ $F \cdot T$ کا مکمل ہو گا۔

فضا میں منحنی کی ہمراہ قوت کا کیا ہوا کام

فرض کریں فضا کے ایک خطہ میں سمتی میدان $F = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$ ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقیاتیسی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطہ میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

$$r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k, \quad a \leq t \leq b$$

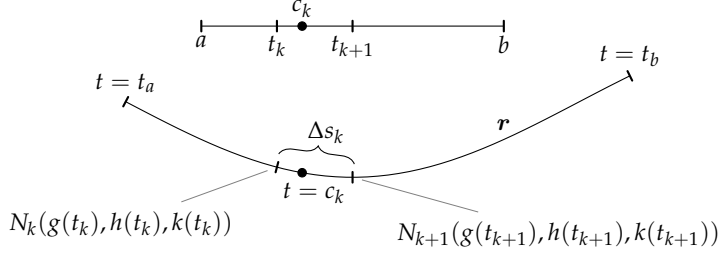
ایسی صورت میں منحنی پر $F \cdot T$ ، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ F کا غیر سمتی جزو، کے مکمل کو a تا b F کا کیا ہوا کام کہتے ہیں (شکل 15.21)۔

تعریف: ہموار منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ پر a تا b قوت $F = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$ کا کیا ہوا کام W درج ذیل ہو گا۔

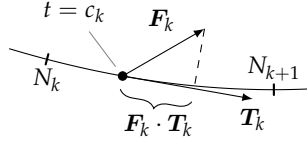
$$(15.5) \quad W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T \, ds$$

□

ثبت محور x رخ مقدار $F(x)$ کی استمراری قوت کے کام کا کلیہ $W = \int_a^b F(x) \, dx$ حصہ 6.8 میں اخذ کیا گیا۔ مساوات 15.5 کے حصول کے دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطعہ پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطعہ کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینی مجموعات کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لئے کہ تحدیدی مکمل کی قیمت کیا ہوگی، ہم قطعہ $[a, b]$ کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطعہ $[t_k, t_{k+1}]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ قطعہ I کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ r کا سر نقطہ N_k پر ہوگا اور ذیلی قطعہ $N_k N_{k+1}$ کی لمبائی Δs_k ہوگی (شکل 15.22)۔ اگر منحنی پر $t = c_k$ کے مطابقی نقطہ پر F کی قیمت F_k اور منحنی کا مماسی سمتیہ T_k ہو تب $t = c_k$ پر T کے رخ F کا غیر سمتی جزو $F_k \cdot T_k$ ہوگا (شکل 15.23)۔ منحنی کے قطعہ $N_k N_{k+1}$ کی ہمراہ F کا کیا ہوا کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔



شکل 15.22: مقدار معلوم وقفہ $a \leq t \leq b$ کی ہر خانہ بندی منحنی $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ کی خانہ بندی پیدا کرتی ہے۔



شکل 15.23: گزشتہ شکل کے قطع $N_k N_{k+1}$ کو بڑا کر کے $t = c_k$ کے مطابقتی نقطہ پر اکائی مماسی سمتیہ \mathbf{T} اور قوت سمتیہ \mathbf{F} دکھائے گئے ہیں۔

$$(\text{حرکت کے رخ قوت کا جزو}) \times (\text{طے فاصلہ}) = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k$$

منحنی کی ہمراہ $t = a$ تا $t = b$ کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k$$

جیسا جیسا $[a, b]$ کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری تکمل کو پہنچتا ہے۔

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

اس تکمل سے حاصل عدد کی علامت، t بڑھانے سے حاصل پر چلنے کے، رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے \mathbf{T} کا رخ الٹ ہو گا جس کی بنا $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ اور تکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

علامتیت اور قیمت کا حصول

مکمل کام (مساوات 15.5) کو لکھنے کے چھ طریقے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds && \text{تعریف} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} && \text{مختصر تفریقی روپ} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt && \text{پھیلا کر } dt \text{ شامل کیا گیا ہے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \left(M \frac{dg}{dt} + N \frac{dh}{dt} + P \frac{dk}{dt} \right) dt && \text{مقدار معلوم } t \text{ اور سمتی رفتار } \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ اجاگر کیے گئے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dt && \text{جزوی تفاعل اجاگر کیے گئے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} M dx + N dy + P dz && dt \text{ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کی گئی}
 \end{aligned}
 \tag{15.6}$$

مساوات 15.6 کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔

مکمل کام کی قیمت کا حصول

مکمل کام کی قیمت حاصل کرنے کے اقدام درج ذیل ہیں۔

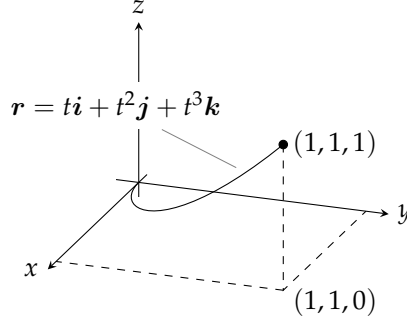
1. منحنی پر \mathbf{F} کی قیمت مقدار معلوم t کے تفاعل کی روپ میں لکھیں۔

2. تفرق $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ تلاش کریں۔

3. \mathbf{F} اور $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ کا غیر سمتی ضرب لیں۔

4. $t = a$ سے $t = b$ تک مکمل کریں۔

مثال 15.6: منحنی $0 \leq t \leq 1$ پر $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ کی ہمراہ $(0, 0, 0)$ سے $(1, 1, 1)$ تک $\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$ کا کام تلاش کریں (شکل 15.24)۔



شکل 15.24: معنی برائے مثال 15.6

حل:
پہلا قدم: معنی پر F کی قیمت کا حصول۔

$$\begin{aligned} F &= (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k} \\ &= \underbrace{(t^2 - t^2)}_0\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k} \end{aligned}$$

دوسرا قدم: $\frac{dr}{dt}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

تیسرا قدم: F اور $\frac{dr}{dt}$ کا غیر سمتی ضرب۔

$$\begin{aligned} F \cdot \frac{dr}{dt} &= [(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}] \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8 \end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = 0$ تا $t = 1$ تک۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9 \right]_0^1 = \frac{29}{60} \end{aligned}$$

□

تکمل ہمراہ بہاو اور دائری بہاو

فرض کریں $F = Mi + Nj + Pk$ میدان قوت کی بجائے فضا کے ایک خط (مثلاً پانی سے چلنے والے جزیئر کا چرخی خانہ یا سمندری طاس) میں بہتا ہوا سیال کے سمتی رفتاری میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسی صورت میں منحنی کی ہمراہ $F \cdot T$ کا تکمل، منحنی کی ہمراہ سیال کا بہاو دے گا۔

تعریف: استراری سمتی رفتاری میدان کے دائرہ کار میں ہموار منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$, $a \leq t \leq b$ پر $F \cdot T$ کا تکمل، $t = a$ سے $t = b$ تک منحنی کا ہمراہ بہاو دے گا:

$$(15.7) \quad \text{ہمراہ بہاو} = \int_a^b F \cdot T \, ds$$

اس عمل کو تکمل ہمراہ بہاو⁴ کہتے ہیں۔ بند منحنی کی صورت میں اس بہاو کو منحنی کے گرد منحنی کی ہمراہ دائری بہاو⁵ کہتے ہیں۔

□

تکمل ہمراہ بہاو کی قیمت بھی تکمل کام کی قیمت کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 15.7: ایک سیال کا سمتی رفتاری میدان $F = xi + zj + yk$ ہے۔ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ اس کی ہمراہ بہاو تلاش کریں۔

$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

حل: پہلا قدم: منحنی پر F کی قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$F = xi + zj + yk = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$$

دوسرا قدم: $\frac{dr}{dt}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{dr}{dt} = (-\sin t)i + (\cos t)j + k$$

تیسرا قدم: غیر سمتی ضرب $F \cdot \frac{dr}{dt}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} F \cdot \frac{dr}{dt} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1) \\ &= -\sin t \cos t + t \cos t + \sin t \end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = a$ تا $t = b$ تک مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{بہاؤ} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} (-\sin t \cos t + t \cos t + \sin t) dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + \sin t \right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

مثال 15.8: میدان $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ کا دائرہ $0 \leq t \leq 2\pi$ کی $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ ہمراہ دائرہ کے گرد دائری بہاؤ تلاش کریں۔

حل:

$$1. \text{ دائرہ پر } \mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$2. \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$3. \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1$$

$$4. \text{ دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔}$$

$$\begin{aligned} \text{دائری بہاؤ} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt \\ &= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

□

مستوی منحنی کو عبور کرتا ہوا بہاؤ

مستوی xy میں ہموار بند منحنی C میں محیط خطہ سے سیال کے اخراج و دخول کی شرح C پر $F \cdot n$ (منحنی کے بیرونی عمودی اکائی سمتیہ کے رخ رفتاری میدان کے غیر سمتی جزو) کے لکیری مکمل سے حاصل ہو گی۔ اس مکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا F کا بہاؤ (یا نفاذ) کہتے ہیں۔ برقی یا مقناطیسی میدان F کی صورت میں بھی اس مکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا بہاؤ یا نفاذ کہیں گے اگرچہ ان میں کوئی بہتا ہوا سیال نہیں پایا جاتا ہے۔

تعریف: استراری سطحی میدان $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ کے دائرہ کار میں ہموار سطح بند منحنی C جس کا بیرونی رخ عمودی اکائی سمتیہ n ہو کی صورت میں C کو عبور کرتا ہوا F کا بہاؤ⁶ درج ذیل مکمل دے گا۔

$$(15.8) \quad C = \int_C F \cdot n \, ds$$

عبور کرتا ہوا F کا بہاؤ

□

منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ (نفاذ) اور دائری بہاؤ میں فرق سے واقف ہونا ضروری ہے۔ منحنی C کو عبور کرتا ہوا F کے بہاؤ سے مراد منحنی پر $F \cdot n$ (منحنی کے بیرونی عمود کے رخ F کے غیر سمتی جزو) کا مکمل ہے۔ بند منحنی C کے گرد F کے دائری بہاؤ سے مراد منحنی پر $F \cdot T$ (منحنی کے اکائی مماس کے رخ F کے غیر سمتی جزو) کا مکمل ہے۔ منحنی عبور کرتا ہوا بہاؤ سے مراد F کے عمودی جزو کا مکمل جبکہ دائری بہاؤ سے مراد F کے مماسی جزو کا مکمل ہے۔ روزمرہ زندگی میں منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ یعنی نفاذ کو مختصراً بہاؤ کہا جاتا ہے۔

مساوات 15.8 کے مکمل کی قیمت معلوم کرنے کی خاطر ہم مقدار معلوم روپ

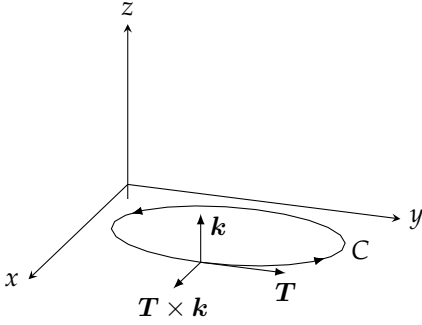
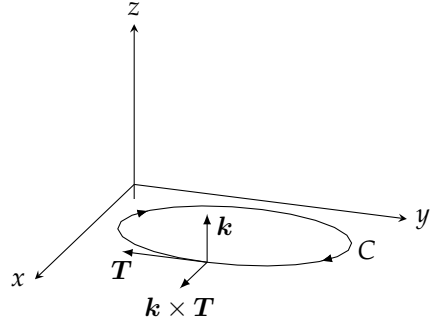
$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b$$

سے ابتدا کرتے ہیں۔ یوں t کی قیمت a سے b تک بڑھانے سے منحنی پر ایک سرے سے دوسرے سر تک ٹھیک ایک بار چلا جائے گا۔ منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ T اور کارٹیزی محدودی نظام کے اکائی سمتیہ k کا سمتی ضرب منحنی کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ n دے گا۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایسے دو سمتی ضرب $T \times k$ اور $k \times T$ پائے جاتے ہیں۔ ان میں کونسا بیرونی اکائی سمتیہ دے گا؟ مقدار معلوم t بڑھانے سے C پر چلنے کے رخ پر اس کا جواب منحصر ہو گا۔ اگر منحنی پر حرکت گھڑی وار ہو تب $k \times T$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا جبکہ خلاف گھڑی حرکت کی صورت میں $T \times k$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا (شکل 15.25)۔ عموماً خلاف گھڑی حرکت کے لئے کلیات اخذ کیے جاتے ہیں۔ یوں $n = T \times k$ ہو گا۔ اگرچہ مساوات 15.8 میں دیے گئے مکمل کی قیمت منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر نہیں ہے، ہم خلاف گھڑی حرکت تصور کرتے ہوئے مساوات 15.8 کو حل کرنے کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔

ارکان کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$n = T \times k = \left(\frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j \right) \times k = \frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j$$

flux⁶

(ب) خلاف گھڑی حرکت کے لئے $T \times k$ باہر رخ ہو گا۔(i) گھڑی وار حرکت کے لئے $k \times T$ باہر رخ ہو گا۔

شکل 15.25: ہموار منحنی C ، جو بڑھتے t کی صورت میں xy میں خلاف گھڑی حرکت کرتی ہو، کا باہر رخ اکائی سمتیہ $n = T \times k$ ہو گا۔

اگر $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ ہو تب

$$F \cdot n = M(x, y) \frac{dy}{ds} - N(x, y) \frac{dx}{ds}$$

لہذا

$$\int_C F \cdot n \, ds = \int_C \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.9) \quad \int_C F \cdot n \, ds = \oint_C M \, dy - N \, dx$$

یاد رہے کہ C پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے بند تکمیل \oint کی قیمت حاصل کی جائے گی۔ اس تکمیل کے حصول کی خاطر ہم M ، dy ، N اور dx کو مقدار معلوم t کی روپ میں لکھ کر $t = a$ تا $t = b$ تکمیل لیتے ہیں۔ ہمیں بہاؤ (نفاذ) تلاش کرنے کے لئے n یا ds جاننے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ منحنی C پر خلاف گھڑی ٹھیک ایک بار چلتے ہوئے کوئی بھی ہموار مقدار معلوم روپ $x = g(t)$ ، $y = h(t)$ ، جہاں $a \leq t \leq b$ ہو، استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مثال 15.9: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو پار کرتا ہوا $F = (x - y)i + xj$ کا بہاؤ (نفاذ) تلاش کریں۔

حل: مقدار معلوم روپ $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ دائرے پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے لہذا مساوات 15.9 حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیے جاسکتے ہیں۔

$$M = x - y = \cos t - \sin t,$$

$$N = x = \cos t,$$

$$dy = d(\sin t) = \cos t \, dt$$

$$dx = d(\cos t) = -\sin t \, dt$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} &= \int_C M dy - N dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t) dt \quad \text{مساوات 15.9} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

دائرہ کو عبور کرتا ہوا F کا بہاؤ π ہے۔ چونکہ نتیجہ مثبت ہے لہذا دائرے سے کل بہاؤ کا رخ باہر کو ہو گا۔ دائرے میں دخول کی صورت میں نتیجہ منفی ہوتا۔ □

سوالات

سمتی میدان اور میدان ڈھلوان

سوال 1 تا سوال 4 میں تقابل کے میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

سوال 2: $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

سوال 3: $g(x, y, z) = e^z - \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 4: $g(x, y, z) = xy + yz + xz$

سوال 5: مستوی میں سمتی میدان کا ایسا کلیہ $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ پیش کریں کہ F کی مقدار مبدا سے (x, y) تک فاصلہ کے مربع کا بالعموم متناسب ہو اور F کا رخ مبدا کے رخ ہو۔ (یہ میدان مبدا پر غیر معین ہے۔)

سوال 6: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ پیش کریں کہ $(0, 0)$ پر $F = 0$ ہو جبکہ کسی دوسرے نقطہ (a, b) پر $|F| = \sqrt{a^2 + b^2}$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو میدان گھڑی وار مماسی ہو۔

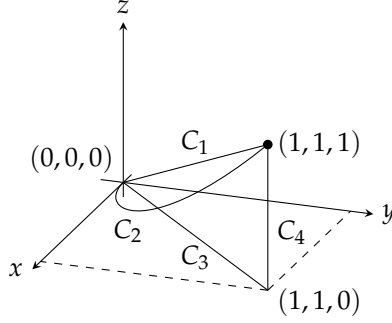
کام

سوال 7 تا سوال 12 میں $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ قوت F کا کام درج ذیل راہوں پر تلاش کریں (شکل 15.26)۔

ا. سیدھی لکیر $C_1: r(t) = ti + tj + tk, 0 \leq t \leq 1$

ب. قوسی راہ $C_2: r(t) = ti + t^2j + t^4k, 0 \leq t \leq 1$

ج. راہ $C_3 \cup C_4$ جو $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ اور $(1, 1, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ خطی قطعات پر مشتمل ہے۔



شکل 15.26

سوال 7: $F = 3yi + 2xj + 4zk$

سوال 8: $F = \frac{1}{1+x^2}j$

سوال 9: $F = \sqrt{z}i - 2xj + \sqrt{y}k$

سوال 10: $F = xyi + yzj + xzk$

سوال 11: $F = (3x^2 - 3x)i + 3zj + k$

سوال 12: $F = (y + z)i + (z + x)j + (x + y)k$

سوال 13 تا سوال 16 میں بڑھتے t رخ F کا کام تلاش کریں۔

سوال 13: $F = xyi + yj - yzk, r(t) = ti + t^2j + tk, 0 \leq t \leq 1$

سوال 14: $F = 2yi + 3xj + (x + y)k, r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + \frac{t}{6}k, 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 15: $F = zi + xj + yk, r(t) = (\sin t)i + (\cos t)j + tk, 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 16: $F = 6zi + y^2j + 12xk, r(t) = (\sin t)i + (\cos t)j + \frac{t}{6}k, 0 \leq t \leq 2\pi$

لیکھی شکل اور مستوی میں سمتی میدان

سوال 17: نقطہ $(-1, 1)$ سے $(2, 4)$ تک منحنی $y = x^2$ پر $\int_C xy dx + (x + y) dy$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 18: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں پر $\int_C (x-y) dx + (x+y) dy$ کی قیمت خلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 19: نقطہ $(4,2)$ سے $(1,-1)$ تک منفی $x = y^2$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ کے لئے $\int_C \mathbf{F} \cdot T ds$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 20: نقطہ $(1,0)$ سے $(0,1)$ تک اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتی میدان $\mathbf{F} = yi - xj$ کے لئے $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 21: نقطہ $(1,1)$ سے $(2,3)$ تک سیدھی لکیر پر قوت $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال 22: تقابل $f(x,y) = (x+y)^2$ کی ڈھلوان کا کام دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ پر خلاف گھڑی نقطہ $(2,0)$ سے چلتے ہوئے ایک پیکر کے لئے تلاش کریں۔

سوال 23: میدان $\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ اور $\mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ کی دائری بہاو درج ذیل منحنيات کی ہمراہ تلاش کریں اور ان منحنيات کو عبور کرتا ہوا بہاو تلاش کریں۔

ا. دائرہ $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

ب. ترخیم $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (4 \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 24: دائرہ $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ کو عبور کرتا ہوا بہاو درج ذیل میدان کے لئے حاصل کریں۔

$$\mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_2 = 2x\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$$

سوال 25 تا سوال 28 میں نصف دائری قوس $\mathbf{r}_1(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$ اور قطع $\mathbf{r}_2(t) = a\mathbf{i}$, $-a \leq t \leq a$ پر مشتمل نصف دائری راہ کی ہمراہ بہاو اور اس کو عبور کرتا ہوا بہاو، میدان \mathbf{F} کے لئے تلاش کریں۔

سوال 25: $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

سوال 26: $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

سوال 27: $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

سوال 28: $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

سوال 29: سمتی رفتاری میدان $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - (x^2+y^2)\mathbf{j}$ کے بہاو کے مکمل کی قیمت درج ذیل راہ کی ہمراہ مستوی xy میں نقطہ $(1,0)$ سے $(-1,0)$ تک تلاش کریں۔

ا. دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کا بالائی نصف حصہ۔

ب. نقطہ $(1, 0)$ تا $(-1, 0)$ لکیری قطع۔

ج. نقطہ $(1, 0)$ تا $(0, -1)$ اور اس کے بعد $(0, -1)$ سے $(-1, 0)$ تک لکیری قطع۔

سوال 30: ایک مثلث، جس کے راس $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ اور $(-1, 0)$ ہیں، سے خارجی بہاؤ سوال 29 کے میدان کے لئے تلاش کریں۔

سوال 31: مستوی میں میدان $F = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}i + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}j$ بج افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال 32: ردا سی میدان $F = xi + yj$ بج افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال 33: (i) مستوی xy میں میدان $G = P(x, y)i + Q(x, y)j$ تلاش کریں جس کی قیمت نقطہ $(a, b) \neq (0, 0)$ پر $\sqrt{a^2 + b^2}$ رخ خلاف گھڑی اور دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو۔ نقطہ $(0, 0)$ پر میدان غیر معین ہے۔ (ب) میدان G اور پکری میدان $F = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}i + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}j$ کے تعلق کیا پایا جاتا ہے؟

سوال 34: (i) مستوی xy میں ایسا میدان $G = P(x, y)i + Q(x, y)j$ تلاش کریں جو $(a, b) \neq (0, 0)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو، اس کی مطلق قیمت اکائی ہو اور اس کا رخ گھڑی وار ہو۔ (ب) میدان G اور پکری میدان $F = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}i + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}j$ کے تعلق کیا پایا جاتا ہے؟

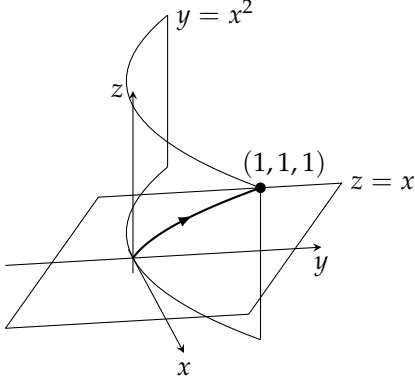
سوال 35: مستوی xy میں ایسا میدان $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ تلاش کریں جو $(x, y) \neq (0, 0)$ پر مبداء کے رخ ہو اور اس کی مطلق قیمت اکائی ہو۔ نقطہ $(0, 0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

سوال 36: مستوی xy میں ایسا میدان $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ تلاش کریں جو $(x, y) \neq (0, 0)$ پر مبداء کے رخ ہو اور $|F|$ کی قیمت (i) مبداء سے (x, y) تک فاصلہ کے برابر ہو، (ب) مبداء سے (x, y) تک فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو۔ نقطہ $(0, 0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

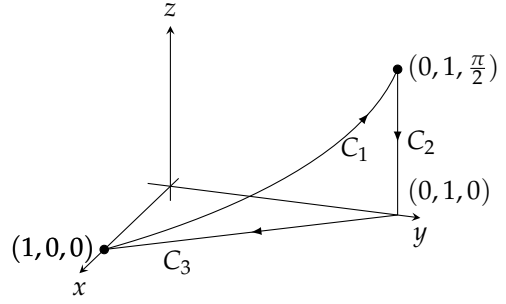
فضا میں راہ کے ہمراہ تکتل بہاؤ

سوال 37 تا سوال 40 میں فضا کے کسی خطہ میں سمتی رفتاری میدان F سیال کے بہاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ دی گئی مضمنی کی ہمراہ بہاؤ، بڑھتے t کے رخ تلاش کریں۔

سوال 37: $F = -4xyi + 8yj + 2k$, $r(t) = ti + t^2j + k$, $0 \leq t \leq 2$



شکل 15.28



شکل 15.27

سوال 38: $F = x^2i + yzj + y^2k$, $r(t) = 3tj + 4tk$, $0 \leq t \leq 1$

سوال 39: $F = (x - z)i + xk$, $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)k$, $0 \leq t \leq \pi$

سوال 40: $F = -yi + xj + 2k$, $r(t) = (-2 \cos t)i + (2 \sin t)j + 2tk$, $0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 41: t رخ چلتے ہوئے درج ذیل تین عدد بند راہ پر $F = 2xi + 2zj + 2yk$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں (شکل 15.27)۔

$$\begin{aligned} C_1: \quad r(t) &= (\cos t)i + (\sin t)j + tk, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ C_2: \quad r(t) &= j + \frac{\pi}{2}(1 - t)k, & 0 \leq t \leq 1 \\ C_3: \quad r(t) &= ti + (1 - t)j, & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

سوال 42: مستوی $2x + 3y - z = 0$ اور بیلیں $x^2 + y^2 = 12$ ایک دوسرے کو تزخیم C پر قطع کرتے ہیں۔ بغیر کوئی مکمل حل کیے دکھائیں کہ میدان $F = xi + yj + zk$ کا C پر دونوں رخ چلتے ہوئے دائری بہاؤ صفر کے برابر ہے۔

سوال 43: فضا میں ایک سیال کے بہاؤ کا سمتی رفتاری میدان $F = xyi + yj - yzk$ ہے۔ بیلیں $y = x^2$ اور مستوی $z = x$ کی تقاطع لکیر کی ہمراہ نقطہ $(0, 0, 0)$ سے $(1, 1, 1)$ تک بہاؤ تلاش کریں (شکل 15.28)۔ (اشارہ: $t = x$ کو مقدار معلوم لیں۔)

سوال 44: میدان $F = \nabla(xy^2z^3)$ کا بہاؤ درج ذیل کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. اوپر سے دیکھ کر گھڑی وار ایک بار چکر لگاتے ہوئے سوال 42 میں دی گئی C کی ہمراہ۔

ب. نقطہ $(1, 1, 1)$ تا $(2, 1, -1)$ لکیری قطع کی ہمراہ۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: فرض کریں $a \leq t \leq b$ کے لئے $f(t)$ قابل تفرق اور مثبت ہے۔ مزید $\mathbf{F} = yi$ ہے جبکہ راہ $\mathbf{r}(t) = ti + f(t)j$ ، $a \leq t \leq b$ کو C ظاہر کرتی ہے۔ کیا محور t ، لکیر $t = a$ ، $t = b$ اور ترسیم f کے چھ رقبہ اور مکمل کام $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ کا ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 46: ایک ذرہ نقطہ $(a, f(a))$ سے $(b, f(b))$ تک ہموار منحنی $y = f(x)$ پر حرکت کرتا ہے۔ محرک قوت ہر نقطہ پر مبداء سے دوری کے رخ ہے جبکہ اس کی مطلق قیمت مستقل k ہے۔ دکھائیں کہ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$\int_C \mathbf{F} \cdot T ds = k \left[\sqrt{b^2 + (f(b))^2} - \sqrt{a^2 + (f(a))^2} \right]$$

کمپیوٹر کا استعمال سوال 47 تا سوال 52 میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے دی گئی راہ پر قوت \mathbf{F} کا کام تلاش کریں۔

ا. راہ $\mathbf{r}(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ کے لئے $d\mathbf{r}$ تلاش کریں۔

ب. راہ کی ہمراہ قوت \mathbf{F} کی قیمت تلاش کریں۔

ج. مکمل $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 47: $\mathbf{F} = xy^6i + 3x(xy^5 + 2)j$; $\mathbf{r}(t) = 2 \cos ti + \sin tj$, $0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 48: $\mathbf{F} = \frac{3}{1+x^2}i + \frac{2}{1+y^2}aj$; $\mathbf{r}(t) = \cos ti + \sin tj$, $0 \leq t \leq \pi$

سوال 49: $\mathbf{F} = (y + yz \cos xyz)i + (x^2 + xz \cos xyz)j + (z + xy \cos xyz)k$; $\mathbf{r}(t) = 2 \cos ti + 3 \sin tj + k$, $0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 50: $\mathbf{F} = 2xyi - y^2j + ze^xk$;

$\mathbf{r}(t) = -ti + \sqrt{t}j + 3tk$, $0 \leq t \leq 4$

سوال 51: $\mathbf{F} = (2y + \sin x)i + (z^2 + \frac{1}{3} \cos y)j + x^4k$;

$\mathbf{r}(t) = \sin ti + \cos tj + \sin 2tk$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

سوال 52: $\mathbf{F} = x^2yi + \frac{1}{3}x^3j + xyk$;

$\mathbf{r}(t) = \cos ti + \sin tj + (2 \sin^2 t - 1)k$, $0 \leq t \leq 2\pi$

15.3 راہ سے آزادی، تفاعل مخفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کیت یا پار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے ناکہ منتقلی کی راہ پر۔ اس حصہ میں مکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں مکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ D پر معین میدان F ایک ذرہ کو D میں نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتا ہے۔ عموماً مکمل کام $\int F \cdot dr$ کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہوگی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں مکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوگی ناکہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر D میں تمام A اور B کے لئے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ D میں $\int F \cdot dr$ راہ سے آزاد ہے اور D پر F بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ D پر F کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ D میں ہر دو نقطوں A اور B کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر مکمل کام $\int_A^B F \cdot dr$ کی قیمت ایک جیسی ہے۔ تب مکمل $\int F \cdot dr$ خطہ D میں راہ سے آزاد⁷ ہو گا اور میدان F خطہ D پر بقائی⁸ ہو گا۔

□

عملی زندگی میں عموماً میدان F صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب D پر $F = \nabla f$ ہو جہاں f ایک غیر سستی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل f کو F کا مخفی قوتہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر D پر میدان F معین ہو اور $F = \nabla f$ ہو جہاں f خطہ D پر ایک غیر سستی تفاعل ہو تب f کو F کا مخفی قوتہ تفاعل⁹ کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوتہ ایک غیر سستی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوتہ ایک غیر سستی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان F کا مخفی قوتہ تفاعل f جاننے کے بعد F کی دائرہ کار میں تمام کمالات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔

$$(15.10) \quad \int_A^B F \cdot dr = \int_A^B \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$$

path independent⁷
conservative⁸
potential function⁹

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق f' کی طرح ∇f کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لئے فرض کریں تب مساوات 15.10 کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

کا مطابق سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً، D پر بقائی F کی صورت میں D میں ہر بند راہ پر مکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات 15.10 اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل متغیر، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **مکروویو** میں ¹⁰ ہموار ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ 12.1 کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ F کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرقات پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد $F = \nabla f$ کی صورت میں مخفی قوتہ تفاعل f کے مدغم تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان F کے خواص پر غور کے دوران آفتاب انگیز ثابت ہو گا۔

ہم فضا میں D کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں D میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ D **تعلق (دار)**¹¹ خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جاسکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

بقائی میدان میں لکیری کمالات

بقائی میدان میں لکیری کمالات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جاسکتی ہیں۔ اس نتیجہ کے تحت مکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہوگی تاکہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ 15.1: **لکیری کمالات کا بنیادی مسئلہ**

1. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ D میں سمتی میدان $F = Mi + Nj + Pk$ کے اجزاء استمراری ہیں۔ تب صرف اور صرف اس صورت جب D میں تمام نقاط A اور B کے لئے مکمل $\int_A^B F \cdot dr$ کی قیمت، D کے اندر رہتے ہوئے A اور B کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل f موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$F = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

¹⁰ piecewise smooth
¹¹ connected

2. اگر مکمل کی قیمت A اور B کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب مکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: کہ $F = \nabla f$ سے مراد مکمل کی قیمت کا راہ سے آزاد ہونا ہے
فرض کریں D میں A اور B دو نقطے ہیں اور D میں A سے B تک ہموار راہ درج ذیل ہے۔

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

منحنی کی ہمراہ t کے لحاظ سے C قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ (15.11) \quad &= \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{aligned}$$

زنجیری قاعدہ

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \frac{df}{dt} dt \\ &= f(g(t), h(t), k(t)) \Big|_a^b = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

مساد 15.11

اس طرح مکمل کام کی قیمت A اور B پر f کی قیمتوں پر منحصر ہو گی ناکہ ان کے بیچ راہ پر۔ یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔

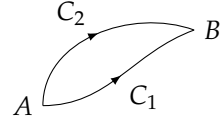
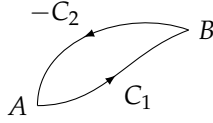
□

مثال 15.10: نقاط $(-1, 3, 9)$ اور $(1, 6, -4)$ کے بیچ ہموار منحنی C پر چلتے ہوئے درج ذیل ہٹائی میدان کا کم تلاش کریں۔

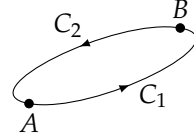
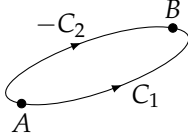
$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla(xyz)$$

حل: $f(x, y, z) = xyz$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} & \mathbf{F} &= \nabla f \\ &= f(B) - f(A) & \text{مسئلہ 15.1 کا جزو دوم} \\ &= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3 \end{aligned}$$



شکل 15.29: دو نقطوں کے بیچ دو راہ میں سے ایک راہ کا رخ تبدیل کرتے ہوئے بند راہ حاصل کی جاسکتی ہے۔



شکل 15.30: بند راہ پر نقاط A اور B کی صورت میں ایک طرف راہ کا رخ تبدیل کر کے نقاط کے بیچ دو راہ حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

□

مسئلہ 15.2: درج ذیل فقرے معادل ہیں۔

ا. خطہ D میں ہر بند راہ پر $\int F \cdot dr = 0$ ہے۔

ب. خطہ D پر میدان F بقائی ہے۔

ثبوت: جزو-ا ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ D میں کسی بھی دو نقاط A اور B کے بیچ کسی بھی دو راہوں C1 اور C2 پر $F \cdot dr$ کے کمالات کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ ہم شکل 15.29 میں C2 کا رخ الٹ کر کے B سے A تک راہ کو -C2 لکھتے ہیں۔ راہ C1 اور راہ -C2 مل کر بند راہ C دیتے ہیں۔ اب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{-C_2} F \cdot dr = \int_C F \cdot dr = 0$$

یوں C1 اور C2 پر مکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔

□

ثبوت: جزو۔

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ ہر بند راہ C پر $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ کا مکمل صفر ہے۔ ہم C پر کسی دو نقطوں A اور B کا انتخاب کر کے C کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں: نقطہ A سے B تک ٹکڑے کو C_1 اور نقطہ B سے A تک ٹکڑے کو C_2 لیتے ہوئے خلاف گھڑی مکمل درج ذیل ہو گا (شکل 15.30)۔

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

□

مسئلہ 15.1 اور مسئلہ 15.2 کے نتائج کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D \text{ میں کسی بھی بند راہ پر } \mathbf{F} = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad D \text{ پر } \mathbf{F} \text{ بقائی ہے} \quad \Leftrightarrow \quad D$$

یہ جانتے ہوئے کہ بقائی میدان میں کیری مکملات کا حل کتنا آسان ہے، دو سوالات پیدا ہوتے ہیں:

1. ہمیں کیسے جان سکتے ہیں کہ میدان \mathbf{F} بقائی ہے؟

2. بقائی میدان \mathbf{F} کا مطابقتی مخفی قوتہ تفاعل f کیسے دریافت کیا جاسکتا ہے (جہاں $\mathbf{F} = \nabla f$ ہو گا)۔

بقائی میدان کا مخفی قوتہ تفاعل کا حصول

بقائی میدان کا پرکھ درج ذیل ہے۔

بقائی میدان کا اجزائی پرکھ

میدان $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ جس کے اجزائی تفاعل کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$(15.12) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

□

ثبوت پرکھ: ہم دکھاتے ہیں کہ بقائی F کے لئے مساوات 15.12 ہر صورت مطمئن ہو گا۔ ایسا مخفی قوہ تفاعل f پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$F = Mi + Nj + Pk = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial z} \end{aligned}$$

استراری ہونے کی بدولت مدغم جزوی
تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے

مساوات 15.12 کے باقی دو اجزاء بھی اسی طرح ثابت کیے جاسکتے ہیں۔

ثبوت کا دوسرا حصہ، جس سے مراد لیا جاسکتا ہے کہ مساوات 15.12 کہتی ہے کہ F بقائی ہو گا، مسئلہ سٹوکس کا نتیجہ ہے۔

□

یہ جانتے ہوئے کہ F بقائی ہے، ہم عموماً مخفی قوہ تفاعل f دریافت کرنا چاہیں گے جو مساوات $\nabla f = F$ یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k = Mi + Nj + Pk$$

کو f کے لئے حل کرنے سے حاصل ہو گا۔ ہم درج ذیل تین مساوات کا مکمل لے کر ایسا کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

مثال 15.11: دکھائیں کہ $F = (e^x \cos y + yz)i + (xz - e^x \sin y)j + (xy + z)k$ بقائی ہے اور اس کا مخفی قوہ تفاعل f تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ کا اطلاق

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یہ مساوات مل کر ہمیں بتاتے ہیں کہ ایسا f پایا جاتا ہے جو $\nabla f = \mathbf{F}$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ہم درج ذیل مساواتوں کے تکملات سے f کو تلاش کرتے ہیں۔

$$(15.13) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z$$

ہم بائیں سے شروع کرتے ہوئے y اور z کو مستقل تصور کر کے پہلی مساوات کا مکمل x کے لحاظ سے لیتے ہیں:

$$(15.14) \quad f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z)$$

ہم نے مکمل کے مستقل کو $g(y, z)$ لکھا ہے چونکہ اس کی قیمت y اور z کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

یوں $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ہو گا لہذا g کی قیمت صرف z پر منحصر ہو گی۔ اس طرح مساوات 15.14 درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial z}$ معلوم کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial z}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z$$

$$\frac{dh}{dz} = z \quad \text{یعنی}$$

متغیر z کے ساتھ مکمل لیتے ہیں:

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

یوں مستقل C کی لامتناہی ممکنہ منفرد قیمتیں منتخب کر کے F کے لامتناہی تعداد کے مخفی قوتہ تفاعل حاصل ہوں گے۔ □

مثال 15.12: دکھائیں کہ $F = (2x - 3)j - zj + (\cos z)k$ غیر بقائی ہے۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ استعمال کر کے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں لہذا F غیر بقائی ہو گا۔ پرکھ کے باقی اجزاء کو دیکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔ □

قطعی تفرقی روپ

جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، مکمل کام اور مکمل دائری بہاد کا اظہار "تفرقی" روپ

$$\int_A^B M dx + N dy + P dz$$

میں کرنا زیادہ مناسب ثابت ہوتا ہے (حصہ 15.2)۔ جہاں $M dx + N dy + P dz$ تفاعل f کا تفریقی روپ ہو وہاں ان کمالات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے۔ چونکہ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_A^B M dx + N dy + P dz &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

مسئلہ 15.1

یوں واحد متغیر کے قابل تفرقی تفاعل کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_A^B df = f(B) - f(A)$$

تعریف: روپ $M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$ کو **تفرقی روپ**¹² کہتے ہیں۔ فضا میں دائرہ کار D پر تفرقی روپ اس صورت قطعی تفرقی ہو گا جب پورے D میں کسی غیر سمتی تفاعل f درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$M dx + N dy + P dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

□

دھیان رہے کہ D میں $Df = Mdx + Ndy + Pdz$ کی صورت میں D پر f کا میدان ڈھلوان $F = \nabla f$ ہوگا۔ اسی طرح اگر $F = \nabla f$ ہو تب روپ $Mdx + Ndy + Pdz = df$ قطعی تفرقی ہوگا۔ یوں F کے بقائی ہونا کا پرکھ ہی اس روپ کے قطعی تفرقی ہونے کا پرکھ ہوگا۔

قطعی تفرقہ پرکھ برائے $Mdx + Ndy + Pdz = df$ تفرقی روپ $Mdx + Ndy + Pdz = df$ صرف اور صرف درج ذیل صورت قطعی تفرقی ہوگا۔

$$(15.15) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یہ اس بات کا معادل ہے کہ میدان $F = Mi + Nj + Pk$ بقائی ہے۔

□

مثال 15.13: دکھائیں کہ $y dx + x dy + 4 dz$ قطعی تفرقی ہے اور درج ذیل مکمل کی قیمت قطع $(1, 1, 1)$ تا $(2, 3, -1)$ پر حاصل کریں۔

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y dx + x dy + 4 dz$$

حل: ہم $M = y$ ، $N = x$ اور $P = 4$ لے کر مساوات 15.15 میں دیا گیا پرکھ بروئے کار لاتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ان مساوات کے تحت $y dx + x dy + 4 dz$ قطعی تفرقی ہے لہذا

$$y dx + x dy + 4 dz = df$$

ہوگا جہاں f کوئی غیر سمتی تفاعل ہے اور مکمل کی قیمت $f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1)$ ہوگی۔

ہم درج ذیل مساوات کے کلمات لیتے ہوئے تفاعل f تلاش کرتے ہیں۔

$$(15.16) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4$$

بائیں ہاتھ سے پہلی مساوات کا مکمل درج ذیل دے گا۔

(15.17)

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z)$$

اس کا y تفرق لے کر دوسری مساوات کے برابر ٹھراتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{یعنی}$$

یہاں g صرف متغیر z پر منحصر ہے لہذا مساوات 15.17 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

(15.18)

$$f(x, y, z) = xy + h(z)$$

مساوات 15.16 کی تیسرے جزو کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{\partial h}{\partial z} = 4$$

$$h(z) = 4z + C \quad \text{یعنی}$$

یوں

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C$$

ہو گا اور مکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3$$

□

سوالات

بقائی میدان کے پرکھ

سوال 1 تا سوال 6 میں کون سے میدان بقائی اور کون سے غیر بقائی ہیں؟

$$F = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \quad \text{سوال 1:}$$

$$F = (y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k} \quad \text{سوال 2:}$$

$$F = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - y\mathbf{k} \quad \text{سوال 3:}$$

سوال 4: $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

سوال 5: $\mathbf{F} = (y + z + \mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k})$

سوال 6: $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \sin y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

مختفی قوه تفاعل کے تلاش
سوال 7 تا سوال 12 میں میدان \mathbf{F} کا مختفی قوه تفاعل f تلاش کریں۔

سوال 7: $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$

سوال 8: $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

سوال 9: $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$

سوال 10: $\mathbf{F} = (y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$

سوال 11: $\mathbf{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\mathbf{i} + \left(\sec^2(x + y) + \frac{y}{y^2 + z^2}\right)\mathbf{j} + \frac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$

سوال 12: $\mathbf{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)\mathbf{k}$

لکیر کے مکمل کے قیمتوں کا حصول
سوال 13 تا سوال 22 میں دکھائیں کہ مکمل قطعی تفرقی ہے۔ اس کے بعد لکیری مکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 13: $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x \, dx + 2y \, dy + 2z \, dz$

سوال 14: $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$

سوال 15: $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy \, dx + (x^2 - z^2) \, dy - 2yz \, dz$

سوال 16: $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x \, dx - y^2 \, dy - \frac{4}{1+z^2} \, dz$

سوال 17: $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x \, dx + \cos y \sin x \, dy + dz$

$$\text{سوال 18: } \int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2 \cos y \, dx + \left(\frac{1}{y} - 2x \sin y \right) dy + \frac{1}{z} dz$$

$$\text{سوال 19: } \int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2 \, dx + \frac{z^2}{y} dy + 2z \ln y \, dz$$

$$\text{سوال 20: } \int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x \ln y - yz) \, dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz \right) dy - xy \, dz$$

$$\text{سوال 21: } \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{dx}{y} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{y}{z^2} dz$$

$$\text{سوال 22: } \int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x \, dx + 2y \, dy + 2z \, dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

سوال 23: نقطہ $(1, 1, 1)$ سے $(2, 3, -1)$ تک قطع کی مقدار معلوم مساواتیں دریافت کر کے اس پر میدان $F = yi + xj + 4k$ کی لکیری مکمل

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y \, dx + x \, dy + 4 \, dz$$

کی قیمت تلاش کریں۔ چونکہ F بقائی میدان ہے لہذا مکمل کی قیمت راہ سے بے نیاز ہوگی۔ درج ذیل لکیری مکمل مثال 15.13

سوال 24: نقطہ $(0, 0, 0)$ سے $(0, 3, 4)$ تک قطع C کی ہمراہ درج ذیل مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_C x^2 \, dx + yz \, dy + \frac{y^2}{2} \, dz$$

نظریہ، عمل استعمال اور مثالیں

دیکھائیں کہ سوال 25 اور سوال 26 میں مکمل کی قیمت راہ A تا B پر منحصر نہیں ہے۔

$$\text{سوال 25: } \int_A^B z^2 \, dx + 2y \, dy + 2xz \, dz$$

$$\text{سوال 26: } \int_A^B \frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

سوال 27 اور سوال 28 میں F کو ∇f روپ میں لکھیں۔

$$\text{سوال 27: } F = \frac{2x}{y} i + \left(\frac{1-x^2}{y^2} \right) j$$

$$\text{سوال 28: } F = (e^x \ln y) i + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z \right) j + (y \cos z) k$$

سوال 29: نقطہ $(1, 0, 0)$ سے $(1, 0, 1)$ تک درج ذیل راہ کی ہمراہ $F = (x^2 + y) i + (y^2 + x) j + ze^z k$ کا کام تلاش کریں۔

ا. کیری قطع $0 \leq z \leq 1$ ، $y = 0$ ، $x = 1$

ب. پچھڑا مٹھی $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + \frac{t}{2\pi}k$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$

ج. محور x پر $(1, 0, 0)$ سے $(0, 0, 0)$ کے بعد $(0, 0, 0)$ سے $(1, 0, 1)$ تک قطع مکانی $z = x^2$ ، $y = 0$

سوال 30: قوت $F = e^{yz}i + (xze^{yz} + z \cos y)j + (xye^{yz} + \sin y)k$ کا کام نقطہ $(1, 0, 1)$ تا $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$ درج ذیل راہ کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. کیری قطع $0 \leq t \leq 1$ ، $z = 1 - t$ ، $y = \frac{\pi t}{2}$ ، $x = 1$

ب. نقطہ $(1, 0, 1)$ سے مبداء تک قطع اور اس کے بعد مبداء سے $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$ تک قطع۔

ج. نقطہ $(1, 0, 1)$ تا $(1, 0, 0)$ قطع کے بعد محور x پر $(1, 0, 0)$ سے مبداء اور آخر میں قطع مکانی $y = \frac{\pi x^2}{2}$ ، $z = 0$

سوال 31: مستوی xy میں $(-1, 1)$ تا $(1, 1)$ راہ C ، نقطہ $(-1, 1)$ تا $(0, 0)$ اور نقطہ $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ قطعات پر مشتمل ہے جبکہ $F = \nabla(x^3y^2)$ ہے۔ مکمل $\int_C F \cdot dr$ کی قیمت درج ذیل دو طریقوں سے تلاش کریں۔

ا. راہ C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ اس کو استعمال کر کے مکمل کی قیمت حاصل کریں۔

ب. اس حقیقت کو برائے کار لائیں کہ F کا مخفی قوتہ تقابل $f(x, y) = x^3y^2$ ہے۔

سوال 32: مستوی xy میں درج ذیل راہ C کی ہمراہ $\int_C 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy$ کی قیمت تلاش کریں۔

ا. نقطہ $(1, 0)$ تا $(0, 1)$ قطع مکانی $y = (x - 1)^2$

ب. نقطہ $(-1, \pi)$ تا $(1, 0)$ کیری قطع

ج. ستارہ نما $r(t) = (\cos^3 t)i + (\sin^3 t)j$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ پر نقطہ $(1, 0)$ سے خلاف گھڑی واپس نقطہ $(1, 0)$ تک۔

سوال 33: ثقلی میدان $F = -GmM \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ کا مخفی قوہ تفاعل تلاش کریں۔

سوال 34: مبدا سے s_1 اور s_2 فاصلوں پر بالترتیب نقاط N_1 اور N_2 پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ سوال 33 کے ثقلی میدان میں N_1 سے N_2 تک ایک ذرہ کو منتقل کرنے کے لئے $GmM \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right)$ کام درکار ہو گا۔

سوال 35: (i) روپ $(ay^2 + 2czx) dx + y(bx + cz) dy + (ay^2 + cx^2) dz$ قطعی تفرقی ہونے کی صورت میں مستقل a ، b اور c کا تعلق تلاش کریں۔ (ب) b اور c کی کن قیمتوں کے لئے درج ذیل میدان ڈھلوان ہو گا؟

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$$

سوال 36: فرض کریں $\mathbf{F} = \nabla f$ بقائی سمتی میدان ہے اور $g(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ہے۔ دکھائیں کہ $\nabla g = \mathbf{F}$ ہو گا۔

سوال 37: آپ کو دو نقطوں کے بیچ وہ راہ تلاش کرنی ہے جس پر چلتے ہوئے \mathbf{F} کم سے کم کام کرے گا۔ آپ جانتے ہیں کہ \mathbf{F} بقائی ہے۔ آپ کا جواب کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 38: آپ تجرباتی طور جانتے ہیں کہ A سے B تک راہ C_1 کی ہمراہ \mathbf{F} کا کام راہ C_2 کی ہمراہ کام کا نصف ہے۔ آپ \mathbf{F} کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

15.4 مستوی میں مسئلہ گرین

ہم اب ایک ایسا مسئلہ پیش کرتے ہیں جو مستوی میں خطہ کی سرحد کی ہمراہ اور اس کو عبور کرتے ہوئے داب نا پذیر سیال کی بہاؤ کے سچے تعلق پیش کرتا ہے۔

جوابات

$$\mathbf{F} = \frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{j}, k > 0 \quad (5)$$

$$\frac{9}{2} \text{ (ج)}, \frac{13}{3} \text{ (ب)}, \frac{9}{2} \text{ (ا)} \quad (7)$$

$$0 \text{ (ج)}, -\frac{1}{5} \text{ (ب)}, \frac{1}{3} \text{ (ا)} \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \text{ (ج)}, \frac{3}{2} \text{ (ب)}, 2 \text{ (ا)} \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \quad (13)$$

$$-\pi \quad (15)$$

$$\frac{207}{12} \quad (17)$$

$$-\frac{39}{2} \quad (19)$$

$$\frac{25}{6} \quad (21)$$

$$\text{(ا) دائری بہاول 0، دائری بہاول دوم } 2\pi \text{، بہاول اول } 2\pi \text{،} \quad (23)$$

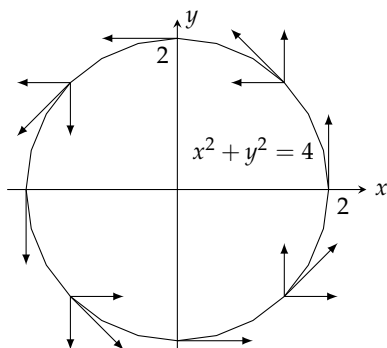
$$\text{بہاول دوم 0: (ب) دائری بہاول اول 0، دائری بہاول دوم } 8\pi$$

$$\text{، بہاول اول } 8\pi \text{، بہاول دوم 0}$$

$$\text{دائری بہاول 0، بہاول } a^2\pi \quad (25)$$

$$\text{دائری بہاول } a^2\pi \text{، بہاول 0} \quad (27)$$

$$1 \text{ (ج)}, 0 \text{ (ب)}, -\frac{\pi}{2} \text{ (ا)} \quad (29)$$



(31)

$$\mathbf{G} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad (ا) \quad (33)$$

$$\mathbf{G} = \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{F} \text{ (ب)}$$

حصہ 15.1 صفحہ 1777

$$\text{شکل 15.8} \quad (1)$$

$$\text{شکل 15.10} \quad (2)$$

$$\text{شکل 15.6} \quad (3)$$

$$\text{شکل 15.13} \quad (4)$$

$$\text{شکل 15.9} \quad (5)$$

$$\text{شکل 15.11} \quad (6)$$

$$\text{شکل 15.7} \quad (7)$$

$$\text{شکل 15.12} \quad (8)$$

$$\sqrt{2} \quad (9)$$

$$\frac{13}{2} \quad (11)$$

$$3\sqrt{14} \quad (13)$$

$$\frac{1}{6}(5\sqrt{5}+9) \quad (15)$$

$$\sqrt{3}\ln\frac{b}{a} \quad (17)$$

$$\frac{10\sqrt{5}-2}{3} \quad (19)$$

$$8 \quad (21)$$

$$2\sqrt{2}-1 \quad (23)$$

$$\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ (ب)}, 4\sqrt{2}-1 \text{ (ا)} \quad (25)$$

$$R_z = a \text{، } I_z = 2\pi\delta a^3 \quad (27)$$

$$\text{: } R_z = 1 \text{، } I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta \text{ (ا)} \quad (29)$$

$$R_z = 1 \text{، } I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta \text{ (ب)}$$

$$R_z = 1 \text{، } I_z = 2\pi-2 \quad (31)$$

حصہ 15.2 صفحہ 1792

$$\nabla f = \frac{-xi-yj-zk}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (1)$$

$$\nabla g = -\frac{2x}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{2y}{x^2+y^2}\mathbf{j} + e^z\mathbf{k} \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = x \ln x - x + \tan(x + y) + \frac{1}{2} \ln(y^2 + z^2) + C \quad (11)$$

$$49 \quad (13)$$

$$-16 \quad (15)$$

$$1 \quad (17)$$

$$9 \ln 2 \quad (19)$$

$$0 \quad (21)$$

$$-3 \quad (23)$$

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{x^2 - 1}{y} \right) \quad (27)$$

$$1 \text{ (ج)}, 1 \text{ (ب)}, 1 \text{ (ا)} \quad (29)$$

$$2 \text{ (ب)}, 2 \text{ (ا)} \quad (31)$$

$$f(x, y, z) = \frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad (33)$$

$$c = b = 2 \text{ (ب)}, c = b = 2a \text{ (ا)} \quad (35)$$

$$(37) \text{ چونکہ میدان ہائمی ہے لہذا کام راہ پر منحصر نہیں ہو گا۔}$$

$$\mathbf{F} = \frac{-xi - yj}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (35)$$

$$48 \quad (37)$$

$$\pi \quad (39)$$

$$0 \quad (41)$$

$$\frac{1}{2} \quad (43)$$

$$1807 \text{ صفحہ} \quad 15.3 \text{ حصہ}$$

$$(1) \text{ ہائمی}$$

$$(3) \text{ غیر ہائمی}$$

$$(5) \text{ غیر ہائمی}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C \quad (7)$$

$$f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C \quad (9)$$

