

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
862	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نکتہ بنائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327 . . . . .	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیت
1344 . . . . .	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424 . . . . .	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435 . . . . .	12	سستی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سستی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1468 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1476 . . . . .	12.4	اٹخا، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1497 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1543 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1560 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1576 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1581 . . . . .		جوابات
1583 . . . . .	ا	ضمیمہ اول
1585 . . . . .	ب	ضمیمہ دوم
1587 . . . . .	ج	ضمیمہ تین

1589	د ضمیمہ چار
1591	ه ضمیمہ پانچ
1593	و ضمیمہ چھ
1595	ز ضمیمہ سات
1597	ح ضمیمہ آٹھ
1599	ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 13.5 زنجیری قاعدہ

جب ہم فضا میں کسی متغی  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ,  $z = k(t)$  کے مختلف نقطوں پر درجہ حرارت  $w = f(x, y, z)$  جانتا چاہتے ہوں، یا کسی مائع یا گیس میں کسی راہ پر دباؤ میں دلچسپی رکھتے ہوں، ہم  $f$  کو واحد متغیر  $t$  کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں۔ یوں  $t$  کی ہر قیمت کے لئے نقطہ  $(g(t), h(t), k(t))$  پر حرارت کی قیمت مرکب تفاعل  $f(g(t), h(t), k(t))$  کی قیمت دے گی۔ اس راہ پر  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کی شرح تبدیلی ہمیں  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کا تفرق دیگا، بشرطیکہ ایسا تفرق موجود ہو۔

بعض اوقات ہم  $g$ ,  $h$  اور  $k$  کے کلیات کو  $f$  کے کلیہ میں پر کر کے  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کا بلا واسطہ تفرق لے سکتے ہیں۔ لیکن زیادہ تر  $g$ ,  $h$  اور  $k$  کے کلیات اتنا پیچیدہ ہوتے ہیں یا ان کے کلیات با آسانی دستیاب نہیں ہوتے ہیں لہذا انہیں  $f$  میں پر کر کے  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کا بلا واسطہ تفرق لینا ممکن نہیں ہو گا۔ ایسی صورتوں میں تفاعل کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہم زنجیری قاعدہ کی مدد لیتے ہیں۔ زنجیری قاعدہ کا روپ متغیرات کی تعداد پر منحصر ہو گا۔ ماسوائے اضافی متغیرات کے زنجیری قاعدہ میں حصہ 3.5 کے زنجیری قاعدہ کی طرح کام کرتا ہے۔

## دو متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

ہم نے حصہ 3.5 میں زنجیری قاعدہ استعمال کیا جہاں  $w = f(x)$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل تھا اور  $x = g(t)$  متغیر  $t$  کا قابل تفرق تفاعل تھا۔ یوں  $w$  متغیر  $t$  کا قابل تفرق تفاعل تھا اور زنجیری قاعدہ کے تحت  $\frac{dw}{dt}$  کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جاسکتا تھا۔

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}$$

تفاعل  $w = f(x, y)$  کے لئے ایسا کلیہ مسئلہ 13.5 پیش کرتا ہے۔

## مسئلہ 13.5: دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

اگر  $w = f(x, y)$  قابل تفرق ہو اور  $x$ ,  $y$  متغیر  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب  $w$  متغیر  $t$  کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور  $\frac{dw}{dt}$  درج ذیل ہو گا۔

$$(13.22) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ثبوت: ہم نے اتنا دکھانا ہو گا کہ اگر  $x$  اور  $y$  نقطہ  $t = t_0$  پر قابل تفرق ہوں تب  $w$  بھی  $t_0$  پر قابل تفرق ہو گا اور  $N_0 = (x(t_0), y(t_0))$  پر درج ذیل ہو گا۔

$$(13.23) \quad \left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$

ہم  $t$  کو  $t_0$  سے  $t_0 + \Delta t$  منتقل کرنے سے پیدا ہوتی  $\Delta x$ ،  $\Delta y$  اور  $\Delta w$  لیتے ہیں۔ چونکہ  $f$  قابل تفرق ہے (حصہ 13.4 میں دی گئی تعریف ذہن میں رکھتے ہوئے)

$$(13.24) \quad \Delta w = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{N_0} \Delta x + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{N_0} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

ہو گا، جہاں  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  کرنے سے  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$  ہوں گے۔ ہم مساوات 13.24 کے دونوں اطراف کو  $\Delta t$  سے تقسیم کر کے  $\Delta t$  کو صفر کے قریب پہنچا کر  $\frac{dw}{dt}$  حاصل کرتے ہیں۔ تقسیم سے

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{N_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{N_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

حاصل ہو گا اور  $\Delta t$  کو صفر کے قریب پہنچانے سے درج ذیل ملے گا۔

$$\begin{aligned} \left( \frac{dw}{dt} \right)_{t_0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} \\ &= \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{N_0} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{t_0} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{N_0} \left( \frac{dy}{dt} \right)_{t_0} + 0 \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_{t_0} + 0 \cdot \left( \frac{dy}{dt} \right)_{t_0} \end{aligned}$$

یہ مساوات 13.23 کی تصدیق کرتی ہے لہذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

تفرق  $\frac{dw}{dt}$  میں حقیقی غیر تابع متغیر  $t$  اور تابع متغیر  $w$  ہے جبکہ  $x$  اور  $y$  درمیانی متغیرات ہیں جنہیں  $t$  قابو کرتا ہے۔ زنجیری قاعدہ کا درج ذیل روپ ہمیں مساوات 13.22 میں مختلف تفرقات کے حصول کا صحیح طریقہ دیتا ہے۔

$$\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)$$

یوں  $\frac{dx}{dt}$  اور  $\frac{dy}{dt}$  نقطہ  $t_0$  پر حاصل کیے جائیں گے۔ حقیقی غیر تابع متغیر کی قیمت  $t_0$ ، درمیانی متغیرات  $x$  اور  $y$  کی  $x_0$  اور  $y_0$  قیمتیں تعین کرتا ہے۔ جزوی تفرقات  $\frac{\partial w}{\partial x}$  اور  $\frac{\partial w}{\partial y}$  نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 13.32: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے راہ  $x = \cos t$ ،  $y = \sin t$  پر درج ذیل کا تفرق  $\frac{dw}{dt}$  حاصل کریں۔

$$w = xy$$

نقطہ  $t = \frac{\pi}{2}$  پر اس تفرق کی قیمت کیا ہو گی؟

حل: ہم مساوات 13.22 کا دایاں ہاتھ  $w = xy$  ،  $x = \cos t$  اور  $y = \sin t$  لیتے ہوئے معلوم کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= y = \sin t, & \frac{\partial w}{\partial y} &= x = \cos t, & \frac{dx}{dt} &= -\sin t, & \frac{dy}{dt} &= \cos t \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ ہم نے  $x = \cos t$  اور  $y = \sin t$  کو جزوی تفرقات  $\frac{\partial w}{\partial x}$  اور  $\frac{\partial w}{\partial y}$  میں پر کیا۔ یوں حاصل تفرق  $\frac{dw}{dt}$  کا اظہار غیر تابع متغیر  $t$  کی صورت میں کیا جاتا ہے (جس میں درمیانے متغیرات  $x$  اور  $y$  نہیں پائے جاتے ہیں۔)

اس مثال میں ہم حاصل نتیجہ کی تصدیق زیادہ بلا واسطہ طریقہ سے کر سکتے ہیں۔ ہم  $w$  کو  $t$  کا تفاعل لکھتے ہیں:

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

یوں

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2t = \cos 2t$$

ہو گا۔ دونوں صورتوں میں  $t = \frac{\pi}{2}$  پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left( \frac{dw}{dt} \right)_{t=\pi/2} = \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos \pi = -1$$

□

تین متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

ہم مساوات 13.22 کے ساتھ ایک جزو جمع کرتے ہوئے زنجیری قاعدہ حاصل کرتے ہیں۔

تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

$$(13.25) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

اس کا ثبوت مساوات 13.22 کی ثبوت کی طرح ہے، بس اب دو کی بجائے تین درمیانے متغیرات ہوں گے۔

مثال 13.33: پتچ دار منحنی پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی درج ذیل لیتے ہوئے  $\frac{dw}{dt}$  تلاش کریں۔

$$w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

نقطہ  $t = 0$  پر اس تفرق کی قیمت کیا ہوگی؟

حل:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} && \text{مساوات 13.25} \\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t \end{aligned}$$

یوں  $t = 0$  پر درج ذیل ہوگا۔

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2$$

□

سطح پر معین تفاعل کا زنجیری قاعدہ

اگر ہماری دلچسپی فضا میں ایک کرہ پر نقطہ  $(x, y, z)$  کے حرارت  $w = f(x, y, z)$  سے ہو، ہم  $x$ ،  $y$  اور  $z$  کو متغیرات  $r$  اور  $s$  کے تفاعل تصور کر سکتے ہیں جو اس نقطہ کے عرض بلند اور طول بلند قیمتیں دیتے ہیں۔ اگر  $x = g(r, s)$ ،  $y = h(r, s)$  اور  $z = k(r, s)$  ہوں تب ہم حرارت کو  $r$  اور  $s$  کا مرکز تفاعل

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))$$

تصور کر سکتے ہیں۔ موزوں حالات میں  $r$  اور  $s$  دونوں کے لحاظ سے  $w$  کے جزوی تفرقات موجود ہوں گے جنہیں درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

دو غیر تابع متغیرات اور تین درمیانے متغیرات کا زنجیری قاعدہ

فرض کریں  $w = f(x, y, z)$ ،  $x = g(r, s)$ ،  $y = h(r, s)$  اور  $z = k(r, s)$  ہوں۔ اگر چاروں تفاعل قابل تفرق ہوں، تب  $r$  اور  $s$  کے لحاظ سے  $w$  کے جزوی تفرقات قابل پائے جائیں گے جنہیں درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(13.26) \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$(13.27) \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$



ہم  $s$  کو مستقل تصور کر کے اور  $r$  کو  $t$  لیتے ہوئے مساوات 13.26 کو مساوات 13.25 سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اسی طرح ہم  $r$  کو مستقل تصور کر کے اور  $s$  کو  $t$  لیتے ہوئے مساوات 13.27 کو مساوات 13.25 سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 13.34: درج ذیل لیتے ہوئے  $\frac{\partial w}{\partial s}$  اور  $\frac{\partial w}{\partial r}$  کو  $r$  اور  $s$  کی صورت میں لکھیں۔

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{x}, \quad y = r62 + \ln s, \quad z = 2r$$

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \quad \text{مساوات 13.26}$$

$$= (1) \left( \frac{1}{s} \right) + (2)(2r) + (2z)(2)$$

$$= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad \text{مساوات 13.27}$$

$$= (1) \left( -\frac{r}{s^2} \right) + (2) \left( \frac{1}{s} \right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$$

□

اگر  $f$  تین کی بجائے دو متغیرات کا تفاعل ہو تب درمیانہ متغیر  $z$  نہیں پایا جائے گا لہذا مساوات 13.26 اور مساوات 13.27 میں ایک ایک جزو کم ہو گا۔

اگر  $w = f(x, y)$ ،  $x = g(r, s)$  اور  $y = h(r, s)$  ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$(13.28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned}$$

جوابات



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



ضمیمہ ج

ضمیمہ تین





ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چھ



ضمیمہ ز

ضمیمہ سات





ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

