

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1261	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291	10.6	قطبی محدود
1303	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1317	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1319	10.8.1	دائرے
1333	10.9	قطبی محدود میں مکمل

1347	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1347	11.1	مستوی میں سمتیت
1364	11.2	کار تیمی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1372	11.2.1	کرہ
1382	11.3	ضرب نقطہ
1383	11.3.1	حساب

1397 ا ضمیمہ اول

1399 ب ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

سوال 1 تا سوال 10 میں درج ذیل دریافت کریں۔

$$A \cdot B, |A|, |B|$$

ب. A اور B کے بیچ زاویہ کا کوسائن۔

ج. A کے رخ B کا غیر سمتی جزو۔

$$\text{proj}_A B$$

$$\text{سوال 1: } A = 2i - 4j + \sqrt{5}k, \quad B = -2i + 4j - \sqrt{5}k$$

$$\text{سوال 2: } A = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k, \quad B = 5i + 12j$$

$$\text{سوال 3: } A = 10i + 11j - 2k, \quad B = 3j + 4k$$

$$\text{سوال 4: } A = 2i + 10j - 11k, \quad B = 2i + 2j + k$$

$$\text{سوال 5: } A = -2i + 7j, \quad B = k$$

$$\text{سوال 6: } A = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}j - k$$

$$\text{سوال 7: } A = 5j - 3k, \quad B = i + j + k$$

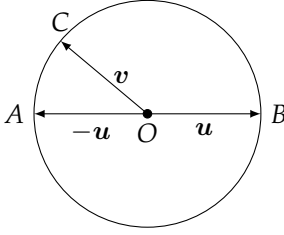
$$\text{سوال 8: } A = i = k, \quad B = i + j + k$$

$$\text{سوال 9: } A = -i + j, \quad B = \sqrt{2}i + \sqrt{3}j + 2k$$

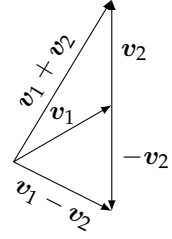
$$\text{سوال 10: } A = -5i + j, \quad B = 2i + \sqrt{17}j + 10k$$

سوال 11: سمتیہ $B = 3j + 4k$ کو سمتیہ $A = i + j$ کے عمودی سمتیہ اور A کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 12: سمتیہ $B = j + k$ کو سمتیہ $A = i + j$ کے عمودی سمتیہ اور A کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔



شکل 11.43: دائرہ برائے سوال 16



شکل 11.42: سمتیات برائے سوال 15

سوال 13: سمتیہ $B = 8i + 4j - 12k$ کو سمتیہ $A = i + 2j - k$ کے عمودی سمتیہ اور A کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 14: سمتیہ $B = i + (j + k)$ پہلے سے سمتیہ i کے متوازی سمتیہ اور i کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ ہے۔ اگر مساوات 11.25 میں $A = i$ ہو تب کیا $B_{\parallel A} = i$ اور $B_{\perp A} = j + k$ ملتے ہیں۔ (متوازی اور عمودی اجزاء کو بالترتیب زیر نوشت \parallel اور \perp سے ظاہر کیا جاتا ہے۔)

جیومیٹری

سوال 15: مجموعات اور فرق۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ شکل 11.42 میں $v_1 + v_2$ اور $v_1 - v_2$ عمودی ہیں۔ کیا یہ محض ایک اتفاق ہے یا ہم توقع کر سکتے ہیں کہ کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ اور فرق عمودی ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

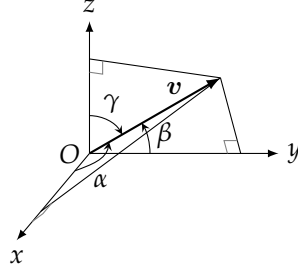
سوال 16: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے کا قطر AB ہے۔ نقطہ C دائرے پر پایا جاتا ہے (شکل 11.43)۔ دکھائیں کہ \vec{CA} اور \vec{CB} عمودی ہوں گے۔

سوال 17: دکھائیں کہ یکساں اضلاع کے متوازی اضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔

سوال 18: دکھائیں کہ مربع وہ واحد مستطیل ہے جس کے وتر عمودی ہوتے ہیں۔

سوال 19: ثابت کریں کہ ایک متوازی الاضلاع صرف اس صورت مستطیل ہو گا جب اس کے وتر کی لمبائی ایک جیسی ہو۔ ترکھان اس حقیقت کو عموماً استعمال کرتا ہے۔

سوال 20: متوازی الاضلاع کے قریبی ضلع u اور v ہیں۔ دکھائیں کہ ان کے مشترکہ راس سے مخالف راس تک وتر، u اور v کے بیچ زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل 11.44: زاویات رخ اور کوسائن رخ کی تعریف۔

سوال 21: ایک اہرام کے مربع قاعدہ $OABC$ کے ضلع کی لمبائی 1 اکائی ہے اور اہرام کی چوٹی D ہے۔ اہرام کا قد بھی 1 اکائی ہے۔ یوں نقطہ D ٹھیک وتر OB کے وسطی نقطہ کے سیدھا اوپر پایا جاتا ہے۔ قطع \vec{OB} اور \vec{OD} کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال 22: زاویات رخ اور کوسائن رخ $v = ai + bj + ck$ کے زاویات رخ α ، β اور γ کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 11.44)۔

مثبت محور x اور v کے بیچ زاویہ α ہے $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ ،

مثبت محور y اور v کے بیچ زاویہ β ہے $(0 \leq \beta \leq \pi)$ ،

مثبت محور z اور v کے بیچ زاویہ γ ہے $(0 \leq \gamma \leq \pi)$ ۔

ا. درج ذیل

$$\cos \alpha = \frac{a}{|v|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|v|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|v|}$$

اور $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ دکھائیں۔ ان کوسائن کو کوسائن رخ²¹ کہتے ہیں۔

ب. کوسائن رخ اور اکائی سمتیات۔ دکھائیں کہ اگر $v = ai + bj + ck$ ایک اکائی سمتیہ ہو تب a ، b اور c سمتیہ v کے کوسائن رخ ہوں گے۔

سمتیات کے بیچ زاویے
سوال 23 تا سوال 26 میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

²¹direction cosines

سوال 23: $A = 2i + j, \quad B = i + 2j - k$

سوال 24: $A = 2i - 2j + k, \quad B = 3i + 4k$

سوال 25: $A\sqrt{3}i - 7j, \quad B = \sqrt{3}i + j - 2k$

سوال 26: $A = i + \sqrt{2}j - \sqrt{2}k, \quad B = -i + j + k$

سوال 27 تا سوال 29 میں سکیلولیر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 27: مثلث ABC کے اندرونی زاویات۔ مثلث کے راس $A(-1, 0, 2)$ ، $B(2, 1, -1)$ اور $C(1, -2, 2)$ ہیں۔

سوال 28: سمتیات $A = 2i + 2j + k$ اور $B = 2i + 10j - 11k$ کے بیچ زاویہ۔

سوال 29: مکعب کے وتر اور مکعب کی ایک سطح کے وتر کے بیچ زاویہ۔ (اشارہ: ایسا مکعب استعمال کریں جس کے کنارے i ، j اور k ہوں۔)

سوال 30: پانی کی نالی میں ایک جوڑ ہے۔ اس جوڑ سے شمال رخ نالی کی ڈھلوان 10% ہے جبکہ جوڑ سے مشرق رخ نالی کی ڈھلوان 20% ہے۔ اس جوڑ پر نالی کے دو حصوں کے بیچ زاویہ کتنا ہو گا؟

نظریہ اور مثالیں
سوال 31:

ا. کسی بھی سمتیات u اور v کے لئے عدم مساوات $|u \cdot v| \leq |u||v| \cos \theta$ کو $u \cdot v = |u||v| \cos \theta$ کی مدد سے دکھائیں۔

ب. کیا کبھی $|u \cdot v| = |u||v|$ ہو سکتا ہے؟ اگر ہو سکتا ہے تب کب ایسا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: مستوی xy میں عمومی سمتیہ v بنائیں۔ اب ان نقطوں (x, y) کی نشاندہی کریں جن پر $(xi + yj) \cdot v = 0$ ہو گا۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: اگر u_1 اور u_2 عمودی اکائی سمتیات ہوں اور $v = au_1 + bu_2$ ہو تب $v \cdot u_1$ تلاش کریں۔

سوال 34: ضرب نقطہ میں مشترک اجزاء کی منسوخی حقیقی اعداد کے ضرب میں اگر $ab_1 = ab_2$ ہو اور a غیر صفر ہو تب دونوں اطراف a کو منسوخ کر کے $b_1 = b_2$ لکھا جاسکتا ہے۔ کیا ضرب نقطہ میں ایسا کرنا ممکن ہو گا: یعنی اگر $A \cdot B_1 = A \cdot B_2$ ہو تب کیا دونوں اطراف A منسوخ کر کے $B_1 = B_2$ لکھا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35: فرض کریں A ، B اور C آپس میں عمودی سمتیات ہیں۔ اب $D = 5A - 6B + 3C$ لیں۔

ا. اگر A ، B اور C اکائی سمتیات ہوں تب D کی مقدار $|D|$ تلاش کریں۔

ب. اگر $|A| = 2$ ، $|B| = 3$ اور $|C| = 4$ ہوں تب $|D|$ کتنا ہو گا؟

سوال 36: فرض کریں A ، B اور C آپس میں عمودی اکائی سمتیات ہیں۔ اگر $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$ ہو جہاں α ، β اور γ غیر سمتی ہیں تب دکھائیں کہ $\alpha = D \cdot A$ ، $\beta = D \cdot B$ اور $\gamma = D \cdot C$ ہوں گے۔

کام

سوال 37: قوت $F = 5k$ (مقدار 5 نیوٹن) سیدھی کلیپر پر مبدا سے نقطہ $(1, 1, 1)$ تک ایک جسم کو منتقل کرتا ہے (فاصلہ میٹر میں ہے)۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

سوال 38: ایک ریل گاڑی کا انجن 6000 ٹن کمیت کی ریل گاڑی کو 602148 N قوت سے کھینچ سکتا ہے۔ ایک افقی سیدھی پٹری پر 605 کلو میٹر فاصلہ طے کر کے یہ انجن کتنا کام کرتا ہے؟

سوال 39: ایک بوجھ کو 20 m لمبی ڈھلوان پر 200 N قوت کھینچتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ یہ قوت 30° کا زاویہ بناتی ہے۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

سوال 40: ایک کشتی کے بادبان پر ہوا 2000 N قوت لگاتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ قوت کا زاویہ 60° ہے۔ ایک کلو میٹر فاصل طے کرنے میں یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

مستوی میں خط کی مساواتیں

سوال 41: دکھائیں کہ سمتیہ $v = ai + bj$ لکیر $ax + by = c$ کو عمودی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ اس لکیر کی ڈھلوان، اس سمتیہ کی ڈھلوان کے بالکس تناسب کا نفی ہے۔

سوال 42: دکھائی کہ سمتیہ $v = ai + bj$ لکیر $bx - ay = c$ کے متوازی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ لکیر کی ڈھلوان اور سمتیہ کی ڈھلوان ایک دوسرے جیسے ہیں۔

سوال 43 تا سوال 46 میں سوال 41 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر v کے عمودی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مہدا پر اس عمودی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 43: $N(2, 1), v = i + 2j$

سوال 44: $N(-1, 2), v = -2i - j$

سوال 45: $N(-2, -7), v = -2i + j$

سوال 46: $N(11, 10), v = 2i - 3j$

سوال 47 تا سوال 50 میں سوال 42 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر v کے متوازی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مہدا پر اس متوازی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 47: $N(-2, 1), v = i - j$

سوال 48: $N(0, -2), v = 2i + 3j$

سوال 49: $N(1, 2), v = -i - 2j$

سوال 50: $N(1, 3), v = 3i - 2j$

مستوی میں خطوط کے بیچ زاویے

دو مستوی خط جن کے بیچ زاویہ حادہ جو قائمہ نہ ہو وہی ہو گا جو ان خطوط کے عمودی دو سمتیات کے بیچ یا ان خطوط کے متوازی دو سمتیات کے بیچ ہو گا۔ اس حقیقت کے ساتھ سوال 41 یا سوال 42 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے سوال 51 تا سوال 54 میں خطوط کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

$$\text{سوال 51: } 3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$$

$$\text{سوال 52: } y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$$

$$\text{سوال 53: } \sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$$

$$\text{سوال 54: } x + \sqrt{3}y = 1, \quad (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8$$

سوال 55 اور سوال 56 میں خطوط کے بیچ ایک ریڈیئن کے سواں حصہ تک زاویہ حادہ تلاش کریں۔

$$\text{سوال 55: } 3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$$

$$\text{سوال 56: } 12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$$

قابل تفرق منحنیات کسے بیچ زاویہ دو قابل تفرق منحنیات کے نقطہ تقاطع پر ان کے بیچ زاویہ سے مراد اس نقطہ پر منحنیات کے مماس کے بیچ زاویہ ہے۔ سوال 57 تا سوال 60 میں منحنیات کے بیچ زاویات دو نقاط تقاطع پر معلوم کریں۔ (آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔)

$$\text{سوال 57: } y = \frac{3}{2} - x^2, \quad y = x^2$$

$$\text{سوال 58: } x = \frac{3}{4} - y^2, \quad x = y^2 - \frac{3}{4}$$

$$\text{سوال 59: } y = x^3, \quad x = y^2$$

$$\text{سوال 60: } y = -x^2, \quad y = \sqrt[3]{x}$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

