

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1261 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1303 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1317 . . . . .	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1319 . . . . .	10.8.1	دائرے
1333 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں مکمل

1347	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1347 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیت

1351 ا ضمیمہ اول

1353 ب ضمیمہ دوم

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 11

# سمتیاں اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

اس حصہ میں سمتیاں اور سہ بعدی محدود نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محدود مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محدود خلا موزوں ہے۔ ہم محدود مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محدود خلا پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور  $xy$  مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

### 11.1 مستوی میں سمتیاں

بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاؤ، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہوگی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہوگا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاؤ بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہوگا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہوگا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر کے اس نشان کو سمتیہ کہتے ہیں۔

تعریف: ایک مستوی میں کسی مخصوص رخ خط کو سمتیہ<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً  $v$ ، سے ظاہر کیا جائے گا<sup>2</sup>۔ نقطہ  $A$  سے نقطہ  $B$  تک تیر  $\vec{AB}$  لکھا جائے گا۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{OP} = \vec{EF}$$

□

### غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی 50% بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

اگر  $c$  غیر صفر حقیقی عدد اور  $v$  ایک سمتیہ ہو تب مثبت  $c$  کی صورت میں  $v$  اور  $cv$  کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی  $c$  کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی<sup>3</sup> کہلاتے ہیں جبکہ  $cv$  کے مضرب کو  $v$  کا غیر سمتی مضرب<sup>4</sup> کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ 0 حاصل ہو گا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ 0 کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

<sup>1</sup>vector

<sup>2</sup>قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان  $\vec{v}$  یا نصف تیر کا نشان  $\vec{v}$  ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔

<sup>3</sup>scalar

<sup>4</sup>scalar multiple

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر  $v_1$  کا نمائندہ، مثلاً  $A$  سے  $B$  تک، ترسیم کر کے  $v_1$  کے اختتامی نقطہ  $B$  پر  $v_2$  کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل میں  $\vec{BC} = v_2$  ہے۔ مجموعہ  $v_1 + v_2$  اب  $v_1$  کے ابتدائی نقطہ  $A$  سے  $v_2$  کے اختتامی نقطہ  $C$  تک کا سمتیہ ہو گا۔ یوں اگر

$$v_1 = \vec{AB}, \quad v_2 = \vec{BC}$$

ہوں تب

$$v_1 + v_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں  $v_1 + v_2$  متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع<sup>5</sup> کہتے ہیں۔

اجزاء

دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ  $v$  کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

$$v = v_1 + v_2$$

لکھنا ممکن ہو، سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  سمتیہ  $v$  کے اجزاء کہلائیں گے۔ ہم یہ بھی کہیں گے کہ ہم سمتیہ  $v$  کا اظہار اس کے اجزاء  $v_1$  اور  $v_2$  سے کر رہے ہیں۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں اساسی<sup>6</sup> سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت  $x$  محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ  $(0, 0)$  سے نقطہ  $(1, 0)$  تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت  $i$  ہے۔ مثبت  $y$  محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ  $(0, 0)$  سے نقطہ  $(0, 1)$  تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت  $j$  ہے۔ اب غیر سمتی  $a$  کے لئے محور  $x$  کے متوازی سمتیہ  $ai$  کی لمبائی  $|a|$  ہوگی جبکہ اس کا رخ  $a > 0$  کے لئے دایاں اور  $a < 0$  کے لئے بائیں ہوگا۔ اس طرح غیر سمتی  $b$  کے لئے محور  $y$  کے متوازی سمتیہ  $bj$  کی لمبائی  $|b|$  ہوگی جبکہ اس کا رخ  $b > 0$  کے لئے اوپر اور  $b < 0$  کے لئے نیچے ہوگا۔ شکل میں سمتیہ  $v = \vec{AC}$  کا اظہار اجزاء  $i$  اور  $j$  سے کیا گیا ہے:

$$v = ai + bj$$

تعریف: اگر  $v = ai + bj$  ہو تب  $i$  اور  $j$  کے رخ سمتیہ  $v$  کے اجزاء سمتیات  $ai$  اور  $bj$  ہوں گے۔ اعداد  $a$  اور  $b$  اساسی سمتیات  $i$  اور  $j$  کے رخ سمتیہ  $v$  کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

□

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$(11.1) \quad ai + bj = a'i + b'j \Leftrightarrow a = a', \quad b = b'$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب  $i$  اور  $j$  کے رخ ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء آپس میں ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر  $v_1 = a_1i + b_1j$  اور  $v_2 = a_2i + b_2j$  ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول





ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

