احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

15.2 سمتی میدان، کام، دائری بہاو، اور بہاو

ان طبیعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر تکملات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر تکملات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لئے درکار کام اس طرح کے تکملات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات عبور کرتا ہوا سیال کے بہاو کی شرح بھی لکیری تکملات سے حاصل کی جاتی ہے۔

سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر **سمتی میدان**[2] سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ سہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=M(x,y,z)\boldsymbol{i}+N(x,y,z)\boldsymbol{j}+P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

استمراری جزوی تفاعل M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x,y)=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کا سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کی ہمراہ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے نا کہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب 12) کے لئے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبدا پر رکھا جاتا ہے جبکہ اس کا سر سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

میدان ڈھلوان

تعریف: قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ کے **میدان ڈھلوان**[3] سے مراد سمتیات ڈھلوان

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

کا میدان ہے۔

[2] vector field
[3] gradient field

□

مثال 15.5: تفاعل $f(x,y,z)=xyz$ کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

حل: تفاعل f کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان $\boldsymbol{F}=\nabla f=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ ہے۔ □

ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، ریاضیات، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

فضا میں منحنی کی ہمراہ قوت کا کام

فرض کریں فضا کے ایک خطہ میں سمتی میدان $\boldsymbol{F}=M(x,y,z)\boldsymbol{i}+N(x,y,z)\boldsymbol{j}+P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقناطیسی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطہ میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k},\quad a\le t\le b$$

ایسی صورت میں منحنی پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ ، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو، کے تکمل کو a تا b $\boldsymbol{F}$ کا کام کہتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$ پر a تا b قوت $\boldsymbol{F}=M(x,y,z)\boldsymbol{i}+N(x,y,z)\boldsymbol{j}+P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ کا کام W درج ذیل ہو گا۔

$$W=\int_{t=1}^{t=b}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s \tag{15.5}$$

□

مثبت محور x رخ مقدار $F(x)$ کی استمراری قوت کے کام کا کلیہ $W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ حصہ 6.8 میں اخذ کیا گیا۔ مساوات 15.5 کے حصول کے دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطع پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطع کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینی مجموعات کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لئے کہ تحدیدی تکمل کی قیمت کیا ہو گی، ہم قطع $[a,b]=$ کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطع $[t_k,t_{k+1}]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ قطع I کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کا سر نقطہ N_k پر ہو گا اور ذیلی قطع N_kN_{k+1} کی لمبائی Δs_k ہو گی۔ اگر منحنی پر $t=c_k$ کے مطابقتی نقطہ پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت $\boldsymbol{F}_k$ اور منحنی کا مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}_k$ ہو تب $t=c_k$ پر $\boldsymbol{T}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو $\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{T}_k$ ہو گا۔ منحنی کے قطع N_kN_{k+1} کی ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\text{(حرکت کے رخ قوت کا جزو)}\times\text{(طے فاصلہ)}=\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{T}_k\Delta s_k$$

منحنی کی ہمراہ $t = a$ تا $t = b$ کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

جیسا جیسا $[a, b]$ کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری تکمل کو پہنچتا ہے۔

$$\int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}s$$

اس تکمل سے حاصل عدد کی علامت، t بڑھانے سے حاصل پر چلنے کے، رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے $\boldsymbol{T}$ کا رخ الٹ ہو گا جس کی بنا $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ اور تکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

علامتیت اور قیمت کا حصول

تکمل کام (مساوات 15.5) کو لکھنے کے چھ طریقے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
W &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}s && \text{تعریف} \\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} && \text{مختصر تفریقی روپ} \\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t && \text{پھیلا کر } \mathrm{d}t \text{ شامل کیا گیا ہے} \\
&= \int_{t=a}^{t=b} \left(M\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t && \text{مقدار معلوم } t \text{ اور سمتی رفتار } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \text{ اجاگر کیے گئے} \\
&= \int_{t=a}^{t=b} \left(M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t && \text{جزوی تفاعل اجاگر کیے گئے} \\
&= \int_{t=a}^{t=b} M \, \mathrm{d}x + N \, \mathrm{d}y + P \, \mathrm{d}z && \mathrm{d}t \text{ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کی گئی}
\end{aligned} \tag{15.6}$$

مساوات 15.6 کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔

تکمل کام کی قیمت کا حصول

تکمل کام کی قیمت حاصل کرنے کے اقدام درج ذیل ہیں۔

1. منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت مقدار معلوم t کے تفاعل کی روپ میں لکھیں۔

2. تفرق $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

3. $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب لیں۔

4. $t = a$ سے $t = b$ تک تکمل کریں۔

مثال 15.6: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}, 0 \le t \le 1$ کی ہمراہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک $\boldsymbol{F} = (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں۔

حل:
پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت کا حصول۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}\\ &= (\underbrace{t^2 - t^2}_{0})\boldsymbol{i} + (t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= [(t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}]\cdot(\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k})\\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = 0$ تا $t = 1$ تکمل۔

$$\begin{aligned}\text{کام} = W &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\Big]_0^1 = \frac{29}{60}\end{aligned}$$

□

تکمل ہمراہ بہاو اور دائری بہاو

فرض کریں $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ میدان قوت کی بجائے فضا کے ایک خطہ (مثلاً پانی سے چلنے والے جنریٹر کا چرخی خانہ یا سمندری طاس) میں بہتا ہوا سیال کے سمتی رفتاری میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسی صورت میں منحنی کی ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل، منحنی کی ہمراہ سیال کا بہاو دے گا۔

تعریف: استمراری سمتی رفتاری میدان کے دائرہ کار میں ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ پر a سے b تک $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل، $t = a$ سے $t = b$ تک منحنی کا ہمراہ بہاو دے گا:

$$\text{ہمراہ بہاو} = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s \tag{15.7}$$

اس تکمل کو **تکمل ہمراہ بہاو**[4] کہتے ہیں۔ بند منحنی کی صورت میں اس بہاو کو منحنی کے گرد منحنی کی ہمراہ **دائری بہاو**[5] کہتے ہیں۔

□

تکمل ہمراہ بہاو کی قیمت بھی تکمل کام کی قیمت کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 15.7: ایک سیال کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ ہے۔ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ اس کی ہمراہ بہاو تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}$$

حل:
پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{k}$$

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1)\\ &= -\sin t\cos t + t\cos t + \sin t\end{aligned}$$

---

[4] flow integral
[5] circulation

چوتھا قدم: $t = a$ تا $t - b$ تکمل لیتے ہیں۔

$$\text{بہاو} = \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(-\sin t\cos t + t\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + \sin t\right]_0^{\pi/2} = \left(0+\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

□

مثال 15.8: میدان $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ کی ہمراہ دائرہ کے گرد دائری بہاو تلاش کریں۔

حل:

1. دائرہ پر $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = (\cos t - \sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$ ہو گا۔

2. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$

3. $\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\sin t\cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}$

4. دائری بہاو درج ذیل ہو گا۔

$$\text{دائری بہاو} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(1 - \sin t\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

□

مستوی منحنی کو عبور کرتا ہوا بہاو

مستوی xy میں ہموار بند منحنی C میں محیط خطہ سے سیال کے اخراج و دخول کی شرح C پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمودی اکائی سمتیہ کے رخ رفتاری میدان کے غیر سمتی جزو) کے لکیری تکمل سے حاصل ہو گی۔ اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاو (یا **نفاذ**) کہتے ہیں۔ برقی یا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں بھی اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا بہاو یا نفاذ کہیں گے اگرچہ ان میں کوئی بہتا ہوا سیال نہیں پایا جاتا ہے۔

تعریف: استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ کار میں ہموار مسطح بند منحنی C جس کا بیرونی رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہو کی صورت میں C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا **بہاو**[6] درج ذیل تکمل دے گا۔

$$C \text{ عبور کرتا ہوا } \boldsymbol{F} \text{ کا بہاو} = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{15.8}$$

□

منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاو (نفاذ) اور دائری بہاو میں فرق سے واقف ہونا ضروری ہے۔ منحنی C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کے بہاو سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمود کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ بند منحنی C کے گرد $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاو سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ (منحنی کے اکائی مماس کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ منحنی عبور کرتا ہوا بہاو سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل جبکہ دائری بہاو سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کا تکمل ہے۔ روز مرہ زندگی میں منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاو یعنی نفاذ کو مختصراً **بہاو** کہا جاتا ہے۔

مساوات 15.8 کے تکمل کی قیمت معلوم کرنے کی خاطر ہم مقدار معلوم روپ

$$x=g(t),\quad y=h(t),\quad a\le t\le b$$

سے ابتدا کرتے ہیں۔یوں t کی قیمت a سے b تک بڑھانے سے منحنی پر ایک سر سے دوسرے سر تک ٹھیک ایک بار چلا جائے گا۔ منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور کارتیسی محددی نظام کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{k}$ کا سمتی ضرب منحنی کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دے گا۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایسے دو سمتی ضرب $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}$ پائے جاتے ہیں۔ان میں کونسا بیرونی اکائی سمتیہ دے گا؟ مقدار معلوم t بڑھانے سے C پر چلنے کے رخ پر اس کا جواب منحصر ہو گا۔ اگر منحنی پر حرکت گھڑی وار ہو تب $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا جبکہ خلاف گھڑی حرکت کی صورت میں $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا۔ عموماً خلاف گھڑی حرکت کے لئے کلیات اخذ کیے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ ہو گا۔اگرچہ مساوات 15.8 میں دیے گئے تکمل کی قیمت منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر نہیں ہے، ہم خلاف گھڑی حرکت تصور کرتے ہوئے مساوات 15.8 کو حل کرنے کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔

ارکان کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}=\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}\Big)\times\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

---

[6] flux

اگر $\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$ ہو تب

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=M(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-N(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

لہٰذا

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\int_C\Big(M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\Big)\,\mathrm{d}s$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\oint_C M\,\mathrm{d}y-N\,\mathrm{d}x \tag{15.9}$$

یاد رہے کہ C پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے بند تکمل $\oint$ کی قیمت حاصل کی جائے گی۔ اس تکمل کے حصول کی خاطر ہم M ، $\mathrm{d}y$ ، N اور $\mathrm{d}x$ کو مقدار معلوم t کی روپ میں لکھ کر $t=a$ تا $t=b$ تکمل لیتے ہیں۔ ہمیں بہاو (نفاذ) تلاش کرنے کے لئے $\boldsymbol{n}$ یا $\mathrm{d}s$ جاننے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ منحنی C پر خلاف گھڑی ٹھیک ایک بار چلتے ہوئے کوئی بھی ہموار مقدار معلوم روپ $x=g(t)$ ، $y=h(t)$ ، جہاں $a\le t\le b$ ہو، استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال 15.9: مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=1$ کو پار کرتا ہوا $\boldsymbol{F}=(x-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$ کا بہاو (نفاذ) تلاش کریں۔

حل: مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j},\ 0\le t\le 2\pi$ دائرے پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے لہٰذا مساوات 15.9 حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} M&=x-y=\cos t-\sin t, & \mathrm{d}y&=\mathrm{d}(\sin t)=\cos t\,\mathrm{d}t\\ N&=x=\cos t, & \mathrm{d}x&=\mathrm{d}(\cos t)=-\sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \text{مساوات 15.9} \quad &=\int_C M\,\mathrm{d}y-N\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-\sin t\cos t+\cos t\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\Big]_0^{2\pi}=\pi \end{aligned}$$

دائرہ کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاو π ہے۔ چونکہ نتیجہ مثبت ہے لہٰذا دائرے سے کل بہاو کا رخ باہر کو ہو گا۔ دائرے میں دخول کی صورت میں نتیجہ منفی ہوتا۔ □

سوالات

سمتی میدان اور میدان ڈھلوان

سوال 15.1 تا سوال 15.4 میں تفاعل کے میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 15.1: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال 15.2: $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

سوال 15.3: $g(x,y,z) = e^z - \ln\sqrt{x^2+y^2}$

سوال 15.4: $g(x,y,z) = xy+yz+xz$

سوال 15.5: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $\boldsymbol{F}$ کی مقدار مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے مربع کا بالعکس تناسب ہو اور $\boldsymbol{F}$ کا رخ مبدا کے رخ ہو۔ (یہ میدان مبدا پر غیر معین ہے۔)

سوال 15.6: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $(0,0)$ پر $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہو جبکہ کسی دوسرے نقطہ (a,b) پر $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{a^2+b^2}$ ہو اور $\boldsymbol{F}$ دائرہ $x^2+y^2 = a^2+b^2$ کو گھڑی وار مماسی ہو۔

کام

سوال 15.7 تا سوال 15.12 میں $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام درج ذیل راہوں پر تلاش کریں۔

ا. سیدھی لکیر $C_1:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ب. قوسی راہ $C_2:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ج. راہ $C_3 \cup C_4$ جو $(0,0,0)$ تا $(1,1,0)$ اور $(1,1,0)$ تا $(1,1,1)$ خطی قطعات پر مشتمل ہے۔

سوال 15.7: $\boldsymbol{F} = 3y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

سوال 15.8: $\boldsymbol{F} = \frac{1}{1+x^2}\boldsymbol{j}$

سوال 15.9: $\boldsymbol{F} = \sqrt{z}\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \sqrt{y}\boldsymbol{k}$

سوال 15.10: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$

سوال 15.11: $\boldsymbol{F} = (3x^2-3x)\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 15.12: $\boldsymbol{F}=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$

سوال 15.13 تا سوال 15.16 میں بڑھتے t رخ $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

سوال 15.13: $\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-yz\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 1$

سوال 15.14: $\boldsymbol{F}=2y\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k},$
$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+\frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$

سوال 15.15: $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$

سوال 15.16: $\boldsymbol{F}=6z\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+12x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}+\frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$

لکیری تکمل اور مستوی میں سمتی میدان

سوال 15.17: نقطہ $(-1,1)$ سے $(2,4)$ تک منحنی $y=x^2$ پر $\int_C xy\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 15.18: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں پر $\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت خلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 15.19: نقطہ $(4,2)$ سے $(1,-1)$ تک منحنی $x=y^2$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 15.20: نقطہ $(1,0)$ سے $(0,1)$ تک اکائی دائرہ $x^2+y^2=1$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت خلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

جوابات