احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 9

لامتناہی تسلسل

اس باب میں ہم ایک حیران کن کلیہ اخذ کرتے ہیں جس کی مدد سے بہت سارے تفاعل کو "لامتناہی کثیر رکنی" کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا اور ساتھ ہی کثیر رکنی کے ارکان حذف کر کے کثیر رکنی کو متناہی بنانے سے پیدا خلل بھی جان پائیں گے۔ ان تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔ قابل تفرق تفاعل کو تخمینی طور پر کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں مدد دینے کے علاوہ طاقتی تسلسل دیگر مواقع پر بھی کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ غیر بنیادی تکمل کی قیمت کے حصول کے علاوہ حراری توانائی کی منتقلی، ارتعاش، کیمیائی نفوذ اور ترسیل اشارات کے تفرقی مساوات کے حل میں یہ موثر کردار ادا کرتے ہیں۔ آپ یہاں وہ ان تفاعل کے بارے میں سیکھ پائیں گے جو سائنس اور انجینئری میں بہت زیادہ استعمال ہوتے ہیں۔

9.1 اعداد کی ترتیب کی حد

غیر رسمی طور پر ترتیب سے مراد مرتب چیزوں کا سلسلہ ہے۔ اس باب میں ہمیں اعداد کی ترتیب سے غرض ہو گا۔ ترکیب نیوٹن سے حاصل اعداد کی ترتیب $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ یا (ہلکے ون کوچ کے) برفانی روئی کے کثیر الاضلاع کی ترتیب $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ ہم دیکھ چکے ہیں۔ ان ترتیبوں کی حد پائی جاتی ہے، البتہ بہت سارے اہم ترتیبوں کے حد نہیں پائے جاتے ہیں۔

تعریف اور علامتیت

ہم 3 کے ہر عدد صحیح مضرب کو ایک مقام مختص کر کے ایک فہرست بنا سکتے ہیں:

دائرہ کار	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
سعت	3	6	9		$3n$	

پہلا عدد 3 ، دوسرا 6 ، تیسرا 9 ، وغیرہ، وغیرہ ہیں۔ مختص کرنے کا عمل ایک تفاعل ہے جو n ویں مقام کو $3n$ مختص کرتا ہے۔ ترتیب کی بناوٹ کا بنیادی تصور یہی ہے۔ ایک تفاعل ہمیں بتاتا ہے کہ کس مقام پر کونسا عدد ہو گا۔

تعریف: ایک تفاعل جس کا دائرہ کار کسی عدد صحیح n_0 کے برابر یا اس سے بڑے عدد صحیح پر مشتمل اعداد کا سلسلہ ہو لامتناہی ترتیب[1] (یا ترتیب[2]) کہلاتا ہے۔

□

عموماً $n_0 = 1$ ہوتا ہے اور ترتیب کا دائرہ کار مثبت اعداد صحیح پر مشتمل ہو گا۔ البتہ بعض اوقات ہم تسلسل کو کسی دوسرے عدد صحیح سے شروع کرنا چاہتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن میں ہم $n_0 = 0$ لیتے ہیں۔ اگر ہم n اضلاع پر مشتمل کثیر الاضلاع کی ترتیب کی بات کریں تب ہم $n_0 = 3$ منتخب کرنا چاہیں گے۔

ترتیب کی تعریف کسی بھی تفاعل کی طرح کی جاتی ہے (مثال 9.1 اور شکل 9.1 تا شکل 9.6)، مثلاً:

$$a(n) = \sqrt{n}, \quad a(n) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{n-1}{n}$$

یہ ظاہر کرنے کی خاطر کہ دائرہ کار عدد صحیح ہے، ہم حرف n استعمال کرتے ہیں ناکہ دیگر غیر تابع متغیر کے لئے مستعمل حروف x ، y ، z ، t ، وغیرہ۔ مذکورہ بالا کی طرح تعریفی قاعدہ میں کلیات عموماً مثبت عدد صحیح سے زیادہ بڑے دائرہ کار کے لئے درست ہوتے ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے یہ بعض اوقات سود مند ثابت ہوتا ہے۔

عدد $a(n)$ ترتیب کا n واں جزو یا اشاریہ n والا جزو ہو گا۔ اگر $a(n) = \frac{n-1}{n}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

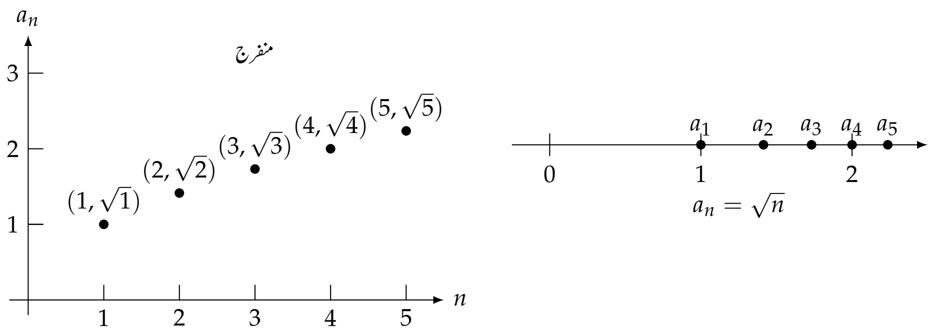
پہلا جزو	دوسرا جزو	تیسرا جزو		n واں جزو
$a(1) = 0$	$a(2) = \frac{1}{2}$	$a(3) = \frac{2}{3}$	$\cdots$	$a(n) = \frac{n-1}{n}$

اشاریہ علامت استعمال کرتے ہوئے ہم $a(n)$ کو a_n لکھتے ہیں۔ اشاریہ علامتی روپ میں یہی ترتیب درج ذیل لکھی جائے گی۔

پہلا جزو	دوسرا جزو	تیسرا جزو		n واں جزو
$a_1 = 0$	$a_2 = \frac{1}{2}$	$a_3 = \frac{2}{3}$	$\cdots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$

ترتیب پر تبصرہ کرتے ہوئے ہم عموماً n ویں جزو کے کلیہ کے ساتھ ساتھ چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں۔

infinite sequence[1]
sequence[2]



شکل 9.1: جزو a_n آخر کار ہر عدد صحیح سے بڑھتا ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرج ہے۔

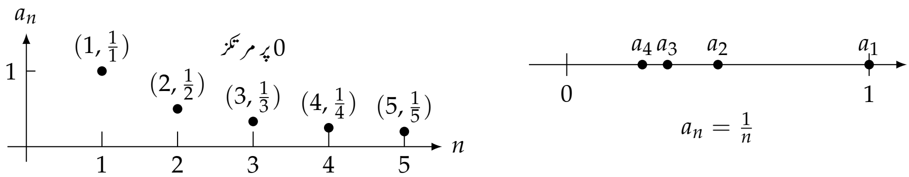
مثال 9.1:

جس ترتیب کا تعریفی کلیہ درج ذیل ہو	اس کے لئے ہم درج ذیل لکھتے ہیں
$a_n = \sqrt{n}$	$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots$
$a_n = \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$
$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$
$a_n = \frac{n-1}{n}$	$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$
$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$	$0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right), \cdots$
$a_n = 3$	$3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots$

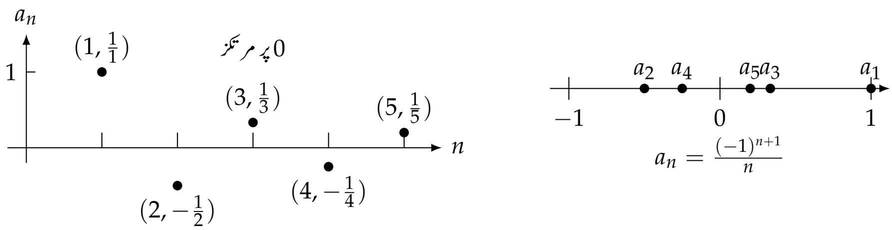
ان تمام ترتیبوں کو دو مختلف انداز میں شکل 9.1 تا شکل 9.6 میں دکھایا گیا ہے۔ □

علامتیت

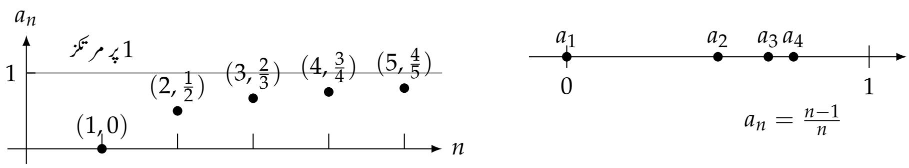
جس ترتیب کا n واں جزو a_n ہو اس ترتیب کو ہم $\{a_n\}$ سے ظاہر کرتے ہیں جو ترتیب a اشاریہ n پڑھا جاتا ہے۔ مثال 9.1 میں دوسری ترتیب $\{\frac{1}{n}\}$ ہے جو ترتیب ایک بٹہ تین پڑھا جاتا ہے۔ آخری ترتیب $\{3\}$ ہے جو مستقل ترتیب 3 کہلائے گی۔



شکل 9.2: جزو $a_n = \frac{1}{n}$ بتدریج n بڑھنے سے گھٹتے ہوئے 0 کے قریب پہنچتے ہیں لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ صفر کو مرتکز ہے۔

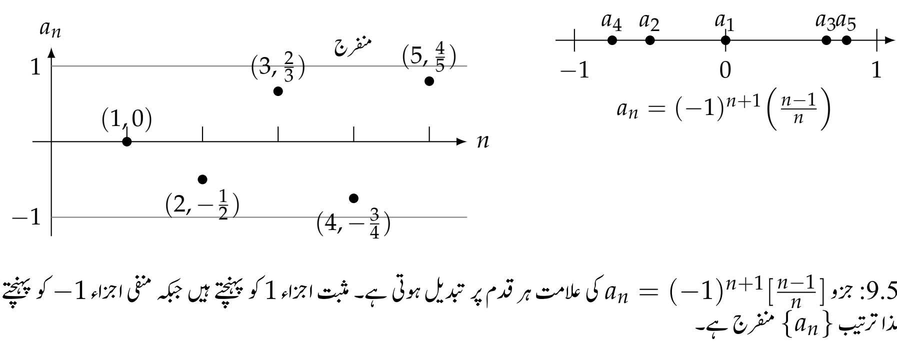


شکل 9.3: جزو $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ کی علامت ہر مرتبہ تبدیل ہوتی ہے لیکن اس کی قیمت 0 پر مرتکز ہے۔

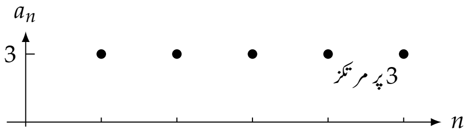


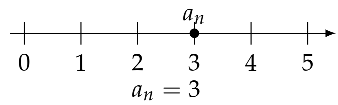
شکل 9.4: جیسے جیسے n بڑھتا ہے جزو $a_n = \frac{n-1}{n}$ بتدریج 1 تک پہنچتا ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ مرتکز ہے 1 پر۔

3 -



شکل 9.5: جزو $a_n = (-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]$ کی علامت ہر قدم پر تبدیل ہوتی ہے۔ مثبت اجزاء 1 کو پہنچتے ہیں جبکہ منفی اجزاء -1 کو پہنچتے ہیں لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرج ہے۔





شکل 9.6: مستقل اجزاء $a_n = 3$ کی قیمت 3 ہی رہتی ہے للذا ترتیب $\{a_n\}$ کی قیمت 3 پر مرتکز ہے۔

ارتکاز اور انفراج

آپ نے شکل 9.1 تا شکل 9.6 میں دیکھا کہ مثال 9.1 میں دیے گئے ترتیبات ایک جیسا رویہ نہیں رکھتے ہیں۔ متغیر n کی قیمت بڑھانے سے ترتیبات $\{\frac{1}{n}\}$ ، $\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$ اور $\{\frac{n-1}{n}\}$ میں ہر ایک کی قیمت کسی ایک منفرد تحدیدی قیمت تک پہنچتی ہے جبکہ ترتیب $\{3\}$ ابتدا سے تحدیدی قیمت پر ہے۔ اس کے برعکس $\{(-1)^{n+1}\frac{(n-1)}{n})\}$ کے اجزاء دو مختلف قیمتوں، -1 اور 1 ، پر جمع ہوتے ہیں جبکہ $\{\sqrt{n}\}$ کے اجزاء بتدریج بڑھتے جاتے ہیں۔

ان ترتیبات میں امتیاز کرنے کی خاطر جو n بڑھانے سے کسی ایک منفرد قیمت L تک پہنچتی ہیں اور جو کسی منفرد قیمت تک نہیں پہنچتی ہیں، ہم ان ترتیبات کو جو n بڑھانے سے کسی ایک منفرد قیمت L تک پہنچتی ہو کو مرتکز کہتے ہیں۔ ارتکاز کی باضابطہ تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت عدد ϵ کے لئے ایسا مطابقتی عدد صحیح N پایا جاتا ہو کہ ہر n کے لئے

$$n > N, \quad \implies \quad |a_n - L| < \epsilon$$

ہو تب ترتیب $\{a_n\}$ عدد L پر مرتکز[3] ہو گی۔ اگر ایسا کوئی عدد L موجود نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $\{a_n\}$ منفرج[4] ہے۔

اگر $\{a_n\}$ عدد L پر مرتکز ہو تب ہم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ یا مختصراً $a_n \to L$ لکھتے ہیں اور L کو اس ترتیب کا حد[5] کہتے ہیں (شکل 9.7)۔

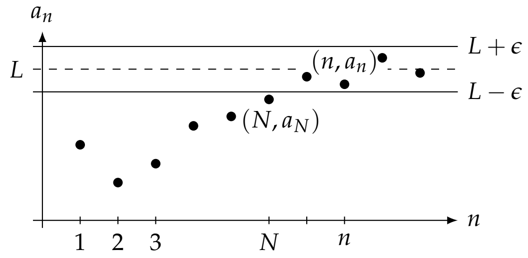
□

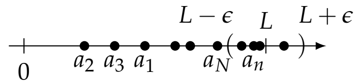
مثال 9.2: تعریف کی پرکھ
درج ذیل دکھائیں۔

$$\text{(الف)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{(ب)} \quad \lim_{n\to\infty} k = k \qquad (k \text{ مستقل})$$

convergent[3]
divergent[4]
limit[5]





شکل 9.7: اگر نقاط (n, a_n) کی لکیر $y = L$ افقی متقارب ہو تب $a_n \to L$ ہو گا۔ اس شکل میں a_N کے بعد تمام a_n کا خط L سے فاصلہ ϵ سے کم ہے۔

حل: (الف) فرض کریں ہمیں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم نے دکھانا ہو گا کہ ایک ایسا عدد صحیح N پایا جاتا ہے کہ ہر n کے لئے

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$$

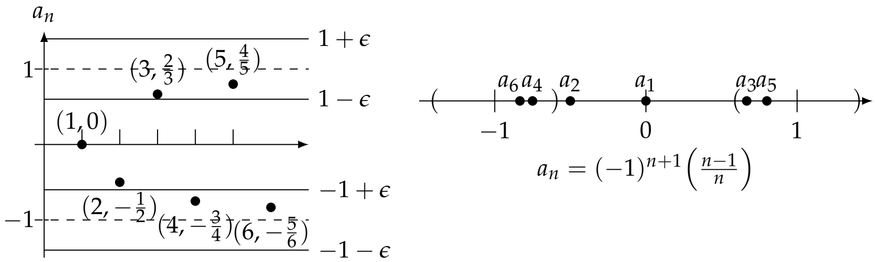
ہو گا۔ یہ اس صورت ممکن ہو گا اگر $\frac{1}{n} < \epsilon$ یا $n > \frac{1}{\epsilon}$ ہو۔ اگر $\frac{1}{\epsilon}$ سے N کوئی بھی بڑا عدد صحیح ہو تب کسی بھی $n > N$ کے لئے درج بالا درست ہو گا۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ ہے۔
(ب) فرض کریں ہمیں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم نے دکھانا ہو گا کہ ایک ایسا عدد صحیح N پایا جاتا ہے کہ ہر n کے لئے

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad |k - k| < \epsilon$$

ہو گا۔ چونکہ $k - k = 0$ ہوتا ہے لہٰذا درج بالا کسی بھی مثبت عدد صحیح N کے لئے درست ہو گا۔ یوں ثابت ہوا کہ کسی بھی مستقل k کے لئے $\lim_{n\to\infty} k = k$ ہو گا۔ □

مثال 9.3: دکھائیں کہ $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ ہے۔

حل: ہم مثبت عدد ϵ کو 1 سے کم چنتے ہیں تا کہ شکل 9.8 میں $y = -1$ اور $y = 1$ پر پٹیاں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپیں۔ اگر کسی مخصوص N سے کسی بھی بڑے n کے لئے شکل 9.8 میں نقطے بالائی پٹی میں پائے جاتے ہوں تب یہ ترتیب 1 پر مرتکز ہو گی۔ حقیقت میں جیسا ہی کوئی پہلا نقطہ (n, a_n) بالائی پٹی کے اندر آتا ہے، اس کے بعد $(n+1, a_{n+1})$ سے شروع کرتے ہوئے ہر متبادل نقطہ نچلی پٹی میں پایا جاتا ہے۔ یوں ترتیب کسی صورت 1 پر مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔ اسی طرح یہ ترتیب -1 پر بھی مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ ترتیب کے اجزاء -1 یا 1 کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں لہٰذا یہ کسی دوسرے نقطے کے قریب نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا یہ ترتیب منفرج ہے۔ □



شکل 9.8: تسلسل $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ منفرج ہے (مثال 9.3)

ترتیب $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ کا رویہ $\{\sqrt{n}\}$ کے رویے سے مختلف ہے۔ ترتیب $\{\sqrt{n}\}$ کے منفرج ہونے کی وجہ یہ ہے کہ یہ ہر حقیقی عدد L سے تجاوز کرتا ہے۔اس رویے کو ہم

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$$

لکھتے ہیں۔لامتناہی حد سے یہاں ہمارا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ n بڑھانے سے a_n اور لامتناہی کے بیچ فرق کم ہوتا ہے۔ کہنے کا مطلب صرف اتنا ہے کہ n بڑھانے سے a_n بہت بڑا ہو جاتا ہے۔

تکراری تعریف

اب تک ہم n سے بلا واسطہ a_n تلاش کرتے آ رہے ہیں اگرچہ ترتیب کی عموماً تکراری تعریف پیش کی جاتی ہے جہاں

ا. ابتدائی جزو یا اجزاء کی قیمتیں دی جاتی ہیں اور

ب. کلیہ توالی[6] سے ہر جزو کو گزشتہ اجزاء کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔

کمپیوٹر پروگرام اور تفرقی مساوات کے اعدادی حل کے طریقوں میں توالی کلیات عموماً پائے جاتے ہیں۔

مثال 9.4: تواتر سے ترتیب کی بناوٹ

ا. $a_1=1$ اور $a_n=a_{n-1}+1$ کا فقرہ مثبت اعداد کی ترتیب $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1=1$ لیتے ہوئے $a_2=a_1+1=1+1=2$ ، $a_3=a_2+1=2+1=3$ ، وغیرہ، ہو گا۔

[6]recursion formula

جدول 9.1: قوت نما سے فبونیکی اعداد زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔

$n!$	e^n	n
1	3	1
120	148	5
3 628 800	22 026	10
2.4×10^{18}	4.9×10^8	20

ب. a_1 اور $a_n = n \cdot a_{n-1}$ کا فقرہ اعداد ضربیہ[7] کی ترتیب $1, 2, 6, 24, \cdots, n!, \cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1 = 1$ لیتے ہوئے $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$ ، $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$ ، $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$ وغیرہ، ہو گا۔

ج. $a_1 = 1$ ، $a_2 = 1$ اور $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ کا فقرہ فبونیکی اعداد[8] کی ترتیب $1, 1, 2, 3, 5, \cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1 = 1$ اور $a_2 = 1$ لیتے ہوئے $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ ، $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$ ، $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ ، وغیرہ، ہو گا۔

د. جیسا ہم ترکیب نیوٹن کی اطلاق سے جانتے ہیں کہ $x_0 = 1$ اور $x_{n+1} = x_n - \left[\frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}\right]$ کا فقرہ ایسی ترتیب کی تعریف پیش کرتا ہے جو مساوات $\sin x - x^2 = 0$ کے حل پر مرتکز ہوتی ہے۔

□

علامت $n!$ (جس کو n کا ضربیہ عدد کہتے ہیں) سے مراد 1 سے n تک اعداد صحیح کا حاصل ضرب $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ ہو گا لہٰذا

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120$$

ہوں گے۔ہم $0!$ کی تعریف 1 لیتے ہیں۔

جیسا جدول 9.1 میں دکھایا گیا ہے قوت نما سے بھی زیادہ تیزی سے فبونیکی اعداد بڑھتے ہیں۔

[7] factorials
[8] Fibonacci numbers

ذیلی ترتیبات

اگر ایک ترتیب کے اجزاء اسی ترتیب سے دوسری ترتیب میں پائے جاتے ہوں تب ہم پہلی ترتیب کو دوسری ترتیب کی ذیلی ترتیب[9] کہتے ہیں۔

مثال 9.5: مثبت اعداد صحیح کی ترتیب کی ذیلی ترتیبات

ا. جفت اعداد صحیح کی ذیلی ترتیب $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

ب. طاق اعداد صحیح کی ذیلی ترتیب $1, 3, 5, \cdots 2n-1, \cdots$

ج. اعداد مفرد کی ذیلی ترتیب $2, 3, 5, 7, 11, \cdots$

□

ذیلی ترتیبات کی اہمیت کے دو وجوہات ہیں۔

ا. اگر تسلسل $\{a_n\}$ مستقل L کو مرتکز ہو تب اس کے تمام ذیلی ترتیبات بھی L پر مرکوز ہوں گی۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ ایک تسلسل مرتکز ہے تب اس کے کسی مخصوص ذیلی تسلسل سے حد کی تلاش یا اس کا تخمینہ لگانا زیادہ آسان ثابت ہو سکتا ہے۔

ب. اگر $\{a_n\}$ کا کوئی بھی ذیلی تسلسل منفرج ہو یا اس کے کسی دو ذیلی ترتیبات کے حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب $\{a_n\}$ منفرج ہو گا۔ مثال کے طور پر تسلسل $\{(-1)^n\}$ منفرج ہو گا چونکہ طاق اجزاء کی ذیلی تسلسل $-1, -1, -1, \cdots$ کی حد -1 ہے جبکہ جفت اجزاء کی ذیلی تسلسل $1, 1, 1, \cdots$ کی حد 1 ہے جو ایک مختلف حد ہے۔

ذیلی تسلسل کی مدد سے ارتکاز کو ایک نئی نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ کسی اشاریہ N کے بعد تمام اجزاء کو تسلسل کی دم[10] کہتے ہیں جو ایک ذیلی تسلسل ہو گی۔ یوں سلسلہ $\{a_n | n \geq N\}$ میں سے کسی ایک کو دم کہا جا سکتا ہے۔ یوں $a_n \to L$ کی جگہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ L کے ارد گرد ϵ وقفہ میں تسلسل کی دم پائی جائے گی۔

کسی بھی تسلسل کی ارتکاز یا انفراج کا تسلسل کی ابتدا کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔ تسلسل کی ارتکاز یا انفراج صرف تسلسل کی دم پر منحصر ہو گی۔

---

[9] subsequence
[10] tail

محدود غیر گھٹتا تسلسل

تعریف: ایسا تسلسل جو تمام n کے لئے $a_n \leq a_{n+1}$ خاصیت رکھتا ہو غیر گھٹتا تسلسل[11] کہلاتا ہے۔

□

مثال 9.6: غیر گھٹتا تسلسل

ا. قدرتی اعداد کا تسلسل $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

ب. تسلسل $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

ج. مستقل تسلسل $\{3\}$

□

غیر گھٹتا تسلسل کی دو قسمیں ہیں۔ پہلی قسم کے اجزاء آخر کار ہر متناہی حد بندی سے بڑھ جاتے ہیں جبکہ دوسری قسم کے اجزاء کسی مخصوص حد بندی سے تجاوز نہیں کرتے ہیں۔

تعریف: اگر ایک ایسا عدد M موجود ہو کہ تمام n کے لئے $a_n \leq M$ ہوں تب تسلسل $\{a_n\}$ کی بالائی حد بندی[12] M ہو گی۔ ہم کہتے ہیں کہ تسلسل $\{a_n\}$ اوپر سے محدود[13] ہے۔ اگر M سے کم کوئی بھی عدد، $\{a_n\}$ کی بالائی حد بندی نہ ہو، تب M کو $\{a_n\}$ کی کم سے کم بالائی حد بندی[14] کہتے ہیں۔

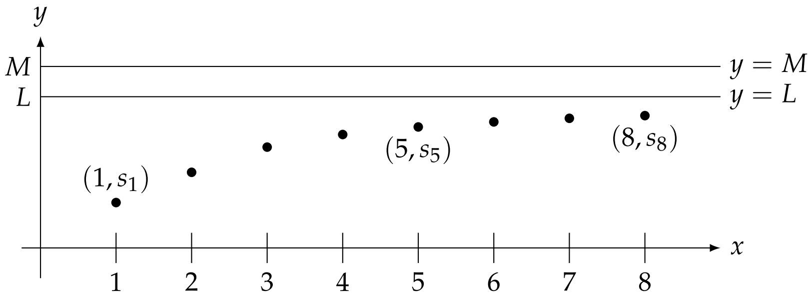
□

مثال 9.7:

ا. تسلسل $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ کی کوئی بالائی حد بندی نہیں پائی جاتی ہے۔

---

[11] nondecreasing sequence
[12] upper bound
[13] bounded from above
[14] least upper bound



شکل 9.9: اگر غیر گھٹتے تسلسل کی بالائی حد بندی M ہو تب اس کے حد $L \leq M$ بھی ہوں گے۔

ب. تسلسل $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ اوپر سے محدود ہے اور اس کی بالائی حد بندی $M = 1$ ہے۔کوئی بھی عدد جو 1 سے چھوٹا ہو اس تسلسل کی بالائی حد بندی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا اس تسلسل کی کم سے کم بالائی حد بندی 1 ہے۔

□

ایسے غیر گھٹتا تسلسل کی کم سے کم بالائی حد بندی ضرور پایا جائے گا جو اوپر سے محدود ہو۔ یہ حقیقت، جس کو ہم یہاں ثابت نہیں کریں گے، حقیقی اعداد کی مکملیت کی خاصیت کی بنا ہے۔ البتہ ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر L کم سے کم بالائی حد بندی ہو تب تسلسل L پر مرتکز ہو گا۔

فرض کریں ہم $(1, s_1), (2, s_2), \cdots, (n, s_n), \cdots$ نقطوں کو xy مستوی میں ترسیم کرتے ہیں۔ اگر اس تسلسل کی بالائی حد بندی M ہو تب یہ تمام نقطے لکیر $y = M$ کے نیچے پائے جائیں گے (شکل 9.9)۔ لکیر $y = L$ سب سے نچلی ایسی لکیر ہو گی۔ نقاط (n, s_n) میں سے کوئی بھی اس لکیر سے اوپر نہیں ہو گا اگرچہ اس سے نیچے لکیر $y = L - \epsilon$ سے چند نقطے ضرور اوپر ہوں گے، جہاں ϵ مثبت عدد ہے۔ یہ ترتیب درج ذیل وجوہات کی بنا L پر مرتکز ہو گی:

ا. تمام n کے لئے $s_n \leq L$ ہو گا اور

ب. کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے کم سے کم ایک ایسا عدد N موجود ہو گا جس کے لئے $s - N > L - \epsilon$ ہو گا۔

مزید $\{s_n\}$ غیر گھٹتا ہے لہٰذا

$$s_n \geq s_N > L - \epsilon \qquad \text{تمام } n \geq N \text{ کے لئے}$$

ہو گا۔ یوں N کے بعد تمام اعداد s_n کا L سے فاصلہ عدد ϵ سے کم ہو گا۔یہی وہ شرط ہے جس کی بنا تسلسل s_n کی حد L ہو گی۔

مسئلہ 9.1: غیر گھٹتا تسلسل کا مسئلہ
حقیقی اعداد کا ایک غیر گھٹتا تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب یہ تسلسل اوپر سے محدود ہو۔ اگر ایک غیر گھٹتا تسلسل مرتکز ہو، یہ اپنے کم سے کم بالائی حد بندی پر مرتکز ہو گا۔

سوالات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم