احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 8

تکمل کے طریقے

ہم نے دیکھا کہ چیزوں کی ناپ اور روز مرہ زندگی کے اعمال کی نمونہ کشی تکمل کو جنم دیتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ الٹ تفرق سے تکمل کو حل کیا جا سکتا ہے۔کسی عمل کی نمونہ کشی میں زیادہ گہرائی تک جانے سے زیادہ پیچیدہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ اس طرح کے پیچیدہ تکمل کو کس طرح سادہ صورت دی جا سکتی ہے جن کے ساتھ کام کرنا آسان ہو۔ اس باب میں ہم انجانے تکمل سے جانے پہچانے تکمل کا حصول سیکھیں گے جنہیں جدول سے دیکھا جا سکتا ہے یا جس کو کمپیوٹر سے حل کیا جا سکتا ہے۔

8.1 تکمل کے بنیادی کلیات

ہم نے حصہ 5.1 میں دیکھا کہ غیر قطعی تکمل کو حل کرنے کے لئے اس کے الٹ تفرق کے ساتھ مستقل جمع کرنا ہو گا۔ جدول 8.1 میں ان تکمل کی بنیادی روپ درج کی گئی ہے جنہیں اب تک ہم حل کرتے آ رہے ہیں۔ زیادہ تکملات کا جدول کتاب کی آخر میں پیش کیا گیا ہے جس پر حصہ میں غور کیا جائے گا۔

جدول 8.1: تکمل کے بنیادی کلیات

شمار	کلیہ
1	$\int \mathrm{d}u = u + C$
2	$\int k\,\mathrm{d}u = ku + C \quad$ (k عدد ہے)
3	$\int (\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) = \int \mathrm{d}u + \int \mathrm{d}v$
4	$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
5	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
6	$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C$
7	$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C$
8	$\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C$
9	$\int \csc^2 u\,\mathrm{d}u = -\cot u + C$
10	$\int \sec u \tan u\,\mathrm{d}u = \sec u + C$
11	$\int \csc u \cot u\,\mathrm{d}u = -\csc u + C$
12	$\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln\lvert\cos u\rvert + C = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
13	$\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln\lvert\sin u\rvert + C = -\ln\lvert\csc u\rvert + C$
14	$\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C$
15	$\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
16	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
17	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
18	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left\lvert\frac{u}{a}\right\rvert + C$

الجبرائی طریقہ

ہمیں عموماً تکمل کو جانی پہچانی معیاری روپ میں لکھنا ہو گا۔

مثال 8.1: سادہ روپ حاصل کرنے کا بدل
تکمل $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} && u = x^2-9x+1 \\
&= \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C && \text{جدول 8.1 کلیہ 4 میں } n=-1/2 \\
&= 2u^{1/2} + C \\
&= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C
\end{aligned}$$

□

مثال 8.2: تکمیل مربع
تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x-x^2}}$ حل کریں۔

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہوئے زیر جذر کو لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}
8x-x^2 &= -(x^2-8x) = -(x^2-8x+16-16) \\
&= -(x^2-8x+16)+16 = 16-(x-4)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-(x-4)^2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} && a=4, u=(x-4) \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C && \text{جدول 8.1 کلیہ 16} \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{x-4}{4}) + C
\end{aligned}$$

□

مثال 8.3: طاقت پھیلا کر تماثل کا استعمال
تکمل $\int (\sec x \tan x)^2 \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم متکمل کو پھیلاتے ہیں۔

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x$$

بائیں ہاتھ پہلے دو اجزاء کا تکمل ہم جانتے ہیں البتہ $\tan^2 x$ کا کچھ کرنا ہو گا۔ ہم درج ذیل تماثل کے ذریعہ اس کو جانی پہچانی روپ میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \implies \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int (\sec x + \tan x)^2 \, dx &= \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \sec^2 x - 1) \, dx \\
&= 2 \int \sec^2 dx + 2 \int \sec x \tan x \, dx - \int 1 \, dx \\
&= 2 \tan x + 2 \sec x - x + C
\end{aligned}$$

□

مثال 8.4: جذر سے چھٹکارا
تکمل $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x} \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم تماثل

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \implies 1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$$

میں $\theta = 2x$ پر کر کے

$$1 + \cos 4x = 2 \cos^2 2x$$

لکھتے ہیں۔یوں درج ذیل ہو گا جہاں تیسرے قدم پر وقفہ $[0, \frac{\pi}{4}]$ پر $\cos 2x \geq 0$ کی بنا $|\cos 2x| = \cos 2x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \sqrt{u^2} = |u| \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}\,\frac{\sin 2x}{2}\bigg|_0^{\pi/4} \\
&= \sqrt{2}\Big[\frac{1}{2} - 0\Big] = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

□

مثال 8.5: غیر مناسب کسر کی مناسب کسر میں تبدیلی
تکمل $\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: متکمل غیر مناسب کسر (نسب نما کی طاقت، شمار کنندہ کی طاقت سے زیادہ یا اس کے برابر ہے) ہے۔ اس کا تکمل لینے سے پہلے ہم پہلے تقسیم کر کے حاصل تقسیم اور باقی حاصل کرتے ہیں جو مناسب کسر ہو گا:

$$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \frac{6}{3x+2}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \Big(x - 3 + \frac{6}{3x+2}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x+2| + C$$

□

یہ ضروری نہیں ہے کہ غیر مناسب کسر کو بذریعہ تقسیم مناسب کسر میں تبدیل کرنے سے ہمیں ایسا تکمل حاصل ہو جسے ہم سیدھا تکمل کر سکیں۔ ایسی صورت پر حصہ میں غور کیا جائے گا۔

مثال 8.6: ایک کسر کی علیحدگی
تکمل $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم متکمل کو دو علیحدہ کسر لکھتے ہیں۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

بائیں ہاتھ پہلے نئے تکمل میں ہم $u = 1 - x^2$ ، $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ اور $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= 3\int \frac{(-1/2)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u\\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1\end{aligned}$$

دوسرا نیا تکمل معیاری روپ میں ہے لہٰذا

$$2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sin^{-1} x + C_2$$

ہو گا۔یوں پورا تکمل درج ذیل ہو گا جہاں $C_1 + C_2 = C$ لکھا گیا ہے۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -3\sqrt{1-x^2} + 2\sin^{-1} x + C$$

□

مثال 8.7: اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب
تکمل $\int \sec x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}\int \sec x\,\mathrm{d}x &= \int (\sec x)(1)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \qquad\qquad u = \tan x + \sec x\\ &= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

جدول 8.2: سیکنٹ اور کوسیکنٹ کے کلیات تکمل

شمار	کلیہ
1	$\int \sec u \,\mathrm{d}u = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
2	$\int \csc u \,\mathrm{d}u = -\ln\lvert\csc u + \cot u\rvert + C$

□

ہم مثال 8.7 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے سیکنٹ اور ٹینجنٹ کی جگہ کوسیکنٹ اور کوٹینجنٹ لیتے ہوئے کوسیکنٹ کے تکمل کا کلیہ معلوم کر سکتے ہیں (سوال 95)۔

تکمل کو بنیادی کلیہ کی روپ میں لکھنے کا طریقے

طریقہ	مثال
سادہ روپ بذریعہ بدل	$\dfrac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$
تکمیل مربع	$\sqrt{8x-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{16-(x-4)^2}$
تکونیاتی تماثل	$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x\tan x + \tan^2 x$
	$= \sec^2 x + 2\sec x\tan x + (\sec^2 x - 1)$
	$= 2\sec^2 x + 2\sec x\tan x - 1$
جذر سے چھٹکارا	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\lvert\cos 2x\rvert$
غیر مناسب سے مناسب کسر کا حصول	$\dfrac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \dfrac{6}{3x+2}$
کسر کی علیحدگی	$\dfrac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب	$\sec x = \sec x \cdot \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$
	$= \dfrac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}$

سوالات

بنیادی بدل

سوال 1 تا سوال 36 میں بدل کی استعمال سے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 1: $\int \frac{16x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{8x^2+1}}$

جواب: $2\sqrt{8x^2+1}+C$

سوال 2: $\int \frac{3\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+3\sin x}}$

سوال 3: $\int 3\sqrt{\sin v}\cos v\,\mathrm{d}v$

جواب: $2(\sin v)^{3/2}+C$

سوال 4: $\int \cot^3 y\csc^2 y\,\mathrm{d}y$

سوال 5: $\int_0^1 \frac{16x\,\mathrm{d}x}{8x^2+2}$

جواب: $\ln 5$

سوال 6: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\tan z}\,\mathrm{d}z$

سوال 7: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

جواب: $2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

سوال 8: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x}}$

سوال 9: $\int \cot(3-7x)\,\mathrm{d}x$

جواب: $-\frac{1}{7}\ln\left|\sin(3-7x)\right|+C$

سوال 10: $\int \csc(\pi x-1)\,\mathrm{d}x$

سوال 11: $\int e^\theta\csc(e^\theta+1)\,\mathrm{d}\theta$

جواب: $-\ln\left|\csc(e^\theta+1)+\cot(e^\theta+1)\right|+C$

سوال 12: $\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 13: $\int \sec \frac{t}{3} \, \mathrm{d}t$
جواب: $3 \ln \left| \sec \frac{t}{3} + \tan \frac{t}{3} \right| + C$

سوال 14: $\int x \sec(x^2 - 5) \, \mathrm{d}x$

سوال 15: $\int \csc(s - \pi) \, \mathrm{d}s$
جواب: $-\ln \left| \csc(s - \pi) + \cot(s - \pi) \right| + C$

سوال 16: $\int \frac{1}{\theta^2} \csc \frac{1}{\theta} \, \mathrm{d}\theta$

سوال 17: $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2x e^{x^2} \, \mathrm{d}x$
جواب: 1

سوال 18: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(y) e^{\cos y} \, \mathrm{d}y$

سوال 19: $\int e^{\tan v} \sec^2 v \, \mathrm{d}v$
جواب: $e^{\tan v} + C$

سوال 20: $\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$

سوال 21: $\int 3^{x+1} \, \mathrm{d}x$
جواب: $\frac{e^{x+1}}{\ln 3} + C$

سوال 22: $\int \frac{2^{\ln x}}{x} \, \mathrm{d}x$

سوال 23: $\int \frac{2^{\sqrt{w}}}{2\sqrt{w}} \, \mathrm{d}w$
جواب: $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2} + C$

سوال 24: $\int 10^{2\theta} \, \mathrm{d}\theta$

سوال 25: $\int \frac{9 \, \mathrm{d}u}{1 + 9u^2}$
جواب: $3 \tan^{-1} 3u + C$

سوال 26: $\int \frac{4 \, \mathrm{d}x}{1 + (2x+1)^2}$

سوال 27: $\int_0^{1/6} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9x^2}}$
جواب: $\frac{\pi}{18}$

سوال 28: $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}$

سوال 29: $\int \frac{2s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}}$
جواب: $\sin^{-1} s^2 + C$

سوال 30: $\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

سوال 31: $\int \frac{6\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{25x^2-1}}$
جواب: $6\sec^{-1}\lvert 5x\rvert + C$

سوال 32: $\int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-9}}$

سوال 33: $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$
جواب: $\tan^{-1} e^x + C$

سوال 34: $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{e^{2y}-1}}$

سوال 35: $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\cos(\ln x)}$
جواب: $\ln(2+\sqrt{3})$

سوال 36: $\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x+4x\ln^2 x}$

تکمیل مربع

سوال 37 تا سوال 42 میں مربع مکمل کر کے اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 37: $\int_1^{2} \frac{8\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$
جواب: 2π

سوال 38: $\int_2^{4} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-6x+10}$

سوال 39: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$
جواب: $\sin^{-1}(t-2) + C$

سوال 40: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\theta-\theta^2}}$

سوال 41: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$
جواب: جب $\lvert x+1\rvert > 1$ تب $\sec^{-1}\lvert x+1\rvert + C$

سوال 42: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

تکونیاتی تماثل

سوال 43 تا سوال 46 میں تکونیاتی تماثل اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 43: $\int (\sec x + \cot x)^2 \,\mathrm{d}x$
جواب: $\tan x - 2\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert - \cot x - x + C$

سوال 44: $\int (\csc x - \tan x)^2 \,\mathrm{d}x$

سوال 45: $\int \csc x \sin 3x \,\mathrm{d}x$
جواب: $x + \sin 2x + C$

سوال 46: $\int (\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x) \,\mathrm{d}x$

غیر مناسب کسر

سوال 47 تا سوال 52 میں غیر مناسب کسر سے مناسب کسر کے حصول اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 47: $\int \frac{x}{x+1} \,\mathrm{d}x$
جواب: $x - \ln\lvert x+1\rvert + C$

سوال 48: $\int \frac{x^2}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$

سوال 49: $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{2x^3}{x^2-1} \,\mathrm{d}x$
جواب: $7 + \ln 8$

سوال 50: $\int_{-1}^{3} \frac{4x^2-7}{2x+3} \,\mathrm{d}x$

سوال 51: $\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4} \,\mathrm{d}t$
جواب: $2t^2 - t + 2\tan^{-1}(\frac{t}{2}) + C$

سوال 52: $\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5}\,\mathrm{d}\theta$

کسر کی علیحدگی

سوال 53 تا سوال 56 میں کسر علیحدہ کر کے بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 53: $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$

سوال 54: $\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

سوال 55: $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\sqrt{2}$

سوال 56: $\int_0^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب

سوال 57 تا سوال 62 میں اکائی کی ایک روپ سے ضرب اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 57: $\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\tan x - \sec x + C$

سوال 58: $\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

سوال 59: $\int \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\ln\lvert 1+\sin\theta\rvert + C$

سوال 60: $\int \frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 61: $\int \frac{1}{1-\sec x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\cot x + x + \csc x + C$

سوال 62: $\int \frac{1}{1-\csc x}\,\mathrm{d}x$

جذر سے چھٹکارا

سوال 63 تا سوال 70 میں جذر سے چھٹکارے کے بعد تکمل حل کریں۔

سوال 63: $\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x$
جواب: 4

سوال 64: $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

سوال 65: $\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2t}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\sqrt{2}$

سوال 66: $\int_{-\pi}^{0}\sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$

سوال 67: $\int_{-\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: 2

سوال 68: $\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 69: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2 y}\,\mathrm{d}y$
جواب: $\ln\left|\sqrt{2}+1\right|-\ln\left|\sqrt{2}-1\right|$

سوال 70: $\int_{-\pi/4}^{0}\sqrt{\sec^2 y-1}\,\mathrm{d}y$

مختلف قسم کے تکمل

سوال 71 تا سوال 82 میں کوئی بھی موزوں طریقہ استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔

سوال 71: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(\csc x-\cot x)^2\,\mathrm{d}x$
جواب: $4-\frac{\pi}{2}$

سوال 72: $\int_0^{\pi/4}(\sec x+4\cos x)^2\,\mathrm{d}x$

سوال 73: $\int\cos\theta\csc(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\ln\left|\csc(\sin\theta)+\cot(\sin\theta)\right|+C$

سوال 74: $\int(1+\frac{1}{x})\cot(x+\ln x)\,\mathrm{d}x$

سوال 75: $\int(\csc x-\sec x)(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\ln\lvert\sin x\rvert+\ln\lvert\cos x\rvert+C$

سوال 76: $\int (\csc x + \sec x)(\tan x + \cot x)\,\mathrm{d}x$

سوال 77: $\int \frac{6\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y}(1+y)}$
جواب: $12\tan^{-1}(\sqrt{y}) + C$

سوال 78: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2-1}}$

سوال 79: $\int \frac{7\,\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$
جواب: $\sec^{-1}\left|\frac{x-1}{7}\right| + C$

سوال 80: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

سوال 81: $\int \sec^2 t \tan(\tan t)\,\mathrm{d}t$
جواب: $\ln\left|\sec(\tan t)\right| + C$

سوال 82: $\int \frac{\tan\theta}{2\sec\theta+1}$

تکونیاتی طاقت
سوال 83:

ا. حل کریں: $\int \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$ (اشارہ: $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$)

ب. حل کریں: $\int \cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta$

ج. بغیر حل کیے بتائیں کہ آپ $\int \cos^9\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

جواب: (ا) $\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$ (ب) $\sin\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta + \frac{1}{5}\sin^5\theta + C$
(ج) $\int \cos^9\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^8\theta(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int (1-\sin^2\theta)^4(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$

سوال 84:

ا. حل کریں: $\int \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta$ (اشارہ: $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$)

ب. حل کریں $\int \sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta$

ج. حل کریں: $\int \sin^7\theta\,\mathrm{d}\theta$

د. بغیر حل کیے بتائیں آپ $\int \sin^{13}\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

سوال 85:

ا. $\int \tan^3\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔ (اشارہ: $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$)

ب. $\int \tan^5\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan\theta^3\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \tan^7\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan\theta^5\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \tan^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan^{2k-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

جواب:

ا. $\int \tan^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta - \int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + \ln\lvert\cos\theta\rvert + C$

ب. $\int \tan^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\tan^4\theta\,\mathrm{d}\theta - \int \tan^3\theta\,\mathrm{d}\theta$

ج. $\int \tan^7\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{6}\tan^6\theta - \int \tan^5\theta\,\mathrm{d}\theta$

د. $\int \tan^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2k}\tan^{2k}\theta - \int \tan^{2k-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$

سوال 86:

ا. $\int \cot^3\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot\theta\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔ (اشارہ: $\cot^2\theta = \sec^2\theta - 1$)

ب. $\int \cot^5\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot\theta^3\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \cot^7\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot\theta^5\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \cot^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot^{2k-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

نظریہ اور استعمال

سوال 87: بالائی جانب $y = 2\cos x$ اور زیریں جانب $y = \sec x, \ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ میں گھیرے ہوئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $2\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})$

سوال 88: ایک تکونی خطہ کا بالائی سرحد $y = \csc x$ ، نچلا سرحد $y = \sin x, \ \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$ اور بایاں سرحد $x = \frac{\pi}{6}$ ہیں۔ اس خطہ کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 89: محور x کے گرد سوال 87 کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: π^2

سوال 90: محور x کے گرد سوال 88 کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 91: منحنی $y = \ln(\cos x), \ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ کی لمبائی معلوم کریں۔
جواب: $\ln(2 + \sqrt{3})$

سوال 92: منحنی $y = \ln(\sec x), \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

سوال 93: محور x ، قوس $y = \sec x$ ، لکیر $x = -\frac{\pi}{4}$ اور $x = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 0, \ \bar{y} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2}+3)}$

سوال 94: محور x ، قوس $y = \csc x$ ، لکیر $x = \frac{\pi}{6}$ اور $x = \frac{5\pi}{6}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 95: تفاعل $\csc x$ کا تکمل
سیکنٹ اور ٹینجنٹ کی جگہ کوسیکنٹ اور کوٹینجنٹ استعمال کرتے ہوئے مثال 8.7 کی طرز پر درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

سوال 96: دکھائیں کہ تکمل

$$\int \left((x^2 - 1)(x + 1)\right)^{-2/3} \mathrm{d}x$$

کو درج ذیل تمام طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. $u = \frac{1}{x+1}$ د. $u = \tan^{-1}(\frac{x-1}{2})$ ز. $u = (\frac{x-1}{x+1})^k$

ب. $u = \tan^{-1} x$ ہ. $u = \cos^{-1} x$

ج. $u = \tan^{-1} \sqrt{x}$ و. $u = \cosh^{-1} x$

جہاں جزو-ز میں $k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1$ ہو سکتا ہے۔

8.2 تکمل بالحصص

تکمل بالحصص کی ترکیب سے تکمل

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.1}$$

جس میں f بار بار قابل تفرق اور g بار بار قابل تکمل ہو کو کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے۔ درج ذیل تکمل

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x$$

اس قسم کا ایک تکمل ہے جہاں $f(x) = x$ دو بار تفرق کے بعد صفر ہو جاتا ہے جبکہ $g(x) = e^x$ کا تکمل بار بار لیا جا سکتا ہے۔ تکمل بالحصص کی ترکیب درج ذیل قسم کے تکمل پر بھی قابل اطلاق ہے

$$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$$

جس میں ہر دو بار تفرق اور ہر دو بار تکمل کے بعد وہی f اور g دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔

اس حصہ میں تکمل بالحصص پر غور کیا جائے گا اور اس کا استعمال سکھایا جائے گا۔

تکمل بالحصص کا کلیہ

تکمل بالحصص[1] کا کلیہ قاعدہ ضرب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

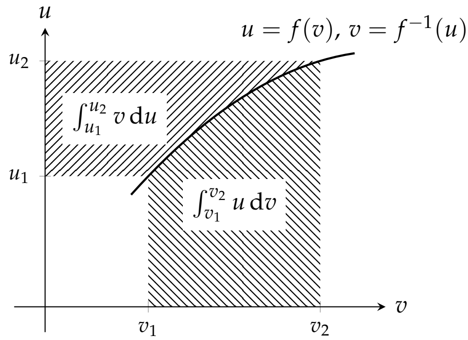
سے حاصل ہوتا ہے جس کو تفریقی روپ

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$

یا

$$u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u$$

[1] integration by parts



شکل 8.1: بڑے مستطیل سے چھوٹا مستطیل منفی کرنے سے $u_2v_2 - u_1v_1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\int v\,\mathrm{d}u$ منفی کرنے سے $\int u\,\mathrm{d}v$ حاصل ہو گا۔

میں لکھ کر تکمل لینے سے درج ذیل کلیہ اخذ ہوتا ہے۔

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \qquad \text{کلیہ تکمل بالحصص} \tag{8.2}$$

تکمل بالحصص کا کلیہ ایک تکمل، $\int u\,\mathrm{d}v$ کو دوسرے تکمل، $\int v\,\mathrm{d}u$ ، کی صورت میں بیان ہے۔ u اور v کی صحیح انتخاب سے دوسرا تکمل حل کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ یہی اس کلیہ کی اہمیت کا سبب ہے۔ جب ہمیں کسی تکمل کو حل کرنے میں ناکامی ہو، ہم اس کو دوسرے تکمل میں تبدیل کر کے توقع کرتے ہیں کہ ہم اس نئے تکمل کو حل کر پائیں گے۔

قطعی تکمل کے لئے مساوی کلیہ درج ذیل ہے جس کو شکل 8.1 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{v_1}^{v_2} u\,\mathrm{d}v = (u_2v_2 - u_1v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v\,\mathrm{d}u \tag{8.3}$$

تکمل بالحصص کب اور کیسا استعمال ہو گا

کب: اگر بدل سے مسئلہ حل نہ ہو تب تکمل بالحصص سے مسئلہ حل کرنے کی کوشش کریں۔

کیسے: دیے گئے تکمل $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ کو تکمل $\int u\,\mathrm{d}v$ کی صورت میں لکھیں جہاں $\mathrm{d}x$ بشمول متکمل کا کچھ حصہ $\mathrm{d}v$ ہو۔

u اور $\mathrm{d}v$ کا انتخاب: کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ دائیں ہاتھ ایک نیا تکمل دیتا ہے۔ اگر یہ نیا تکمل بائیں ہاتھ تکمل سے زیادہ پیچیدہ ہو تب u اور $\mathrm{d}v$ کا از سر نو انتخاب کریں۔

مثال 8.8: تکمل $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم تکمل بالحصص کے کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ میں

$$\begin{aligned} u &= x, \quad \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x, \quad v = \sin x \end{aligned}$$ $cos x$ کا سادہ ترین الٹ تفرق

لیتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

□

آئیں مثال 8.8 میں u اور $\mathrm{d}v$ کے مختلف انتخابات پر غور کرتے ہیں۔

مثال 8.9: دوبارہ مثال 8.8 پر غور کرتے ہیں درج ذیل تکمل

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

میں ہم انتخاب درج ذیل چار ممکنہ طریقوں سے کر سکتے ہیں۔

ا. $u = 1, \quad \mathrm{d}v = x\cos x\,\mathrm{d}x$

ب. $u = x, \quad \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$

ج. $u = x\cos x, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$

د. $u = \cos x, \quad \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$

آئیں ان پر باری باری غور کریں۔

چونکہ ہمیں $\mathrm{d}v = x\cos x\,\mathrm{d}x$ کا تکمل معلوم نہیں ہے لہٰذا انتخاب-ا کارآمد نہیں ہو گا۔
جیسا ہم نے مثال 8.8 میں دیکھا، انتخاب-ب کارآمد ہے۔
انتخاب-ج درج ذیل دیتا ہے

$$\begin{aligned} u &= x\cos x, & \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= (\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x, & v &= x \end{aligned}$$

لہٰذا نیا تکمل

$$\int v\,\mathrm{d}u = \int (x\cos x - x^2\sin x)\,\mathrm{d}x$$

ہو گا جو دیے گئے تکمل سے زیادہ مشکل ہے۔
انتخاب-د درج ذیل دے گا

$$\begin{aligned} u &= \cos x, & \mathrm{d}v &= x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= -\sin x\,\mathrm{d}x, & v &= \tfrac{x^2}{2} \end{aligned}$$

لہٰذا نیا تکمل

$$\int v\,\mathrm{d}u = -\int \frac{x^2}{2}\sin x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ یہ تکمل بھی دیے گئے تکمل سے زیادہ پیچیدہ ہے۔

خلاصہ: یاد رہے کہ ہمارا مقصد $\int u\,\mathrm{d}v$ سے تکمل بالحصص کے ذریعہ نیا نسبتاً سادہ تکمل کا حصول ہے۔ بعض اوقات تکمل بالحصص ایسا کرنے میں ناکام ہو گا۔ □

مثال 8.10: ربع اول میں منحنی $y = e^x$ ، لکیر $x = \ln 2$ اور محددی محوروں کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم بیلنی خول کی ترکیب استعمال کرتے ہیں جو درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b 2\pi f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^{\ln 2} xe^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ہم درج ذیل لیتے ہوئے اس تکمل کو کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ سے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u &= x, \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x, \quad v = e^x \end{aligned}$$

e^x کا سادہ ترین الٹ تفرق

یوں

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} xe^x \, dx &= xe^x\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x \, dx \\ &= [\ln 2e^{\ln 2} - 0] - [e^x]_0^{\ln 2} \\ &= 2\ln 2 - [2-1] \\ &= 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ اس طرح جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}H &= 2\pi \int_0^{\ln 2} xe^x \, dx \\ &= 2\pi(2\ln 2 - 1)\end{aligned}$$

□

تکمل بالحصص وہاں بھی کارآمد ہو سکتا ہے جہاں متکمل صرف ایک جزو پر مبنی ہو۔ مثال کے طور پر ہم $\int \ln x \, dx$ (اگلی مثال) یا $\int \cos^{-1} x \, dx$ کو تکمل بالحصص سے حل کر سکتے ہیں۔

مثال 8.11: تکمل $\int \ln x \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم اس کو $\int \ln x \cdot 1 \, dx$ لکھ کر $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ استعمال کرتے ہیں جس میں

$u = \ln x,$	اس کا تفرق سادہ ہے
$dv\, dx,$	اس کا تکمل آسان ہے
$du = \frac{1}{x}\, d,$	
$v = u,$	سادہ ترین الٹ تفرق

ہوں گے۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

□

8.2.1 بار بار استعمال

بعض اوقات ایک سے زیادہ مرتبہ تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے مسئلہ حل ہو گا۔

مثال 8.12: تکمل $\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ $\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$ میں

$$u = x^2, \quad \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x, \quad v = e^x, \quad \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x$$

لیتے ہیں جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x$$

ہمیں دائیں ہاتھ نیا تکمل حل کرنے کے لئے مزید ایک بار تکمل بالحصص استعمال کرنا ہو گا۔ ہم مثال 8.10 میں دیکھ چکے ہیں کہ اس کی قیمت $xe^x - e^x + C$ ہے۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

□

نا معلوم تکمل کے لئے حل

برقی انجینئری میں درج ذیل قسم کے تکمل پائے جاتے ہیں جن کے حل میں تکمل بالحصص دو بار استعمال کرنے کے بعد نا معلوم تکمل کے لئے حل درکار ہوتا ہے۔ آئیں اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 8.13: تکمل $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ $\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$ میں درج ذیل لیتے ہیں۔

$$u = e^x, \quad \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x, \quad v = \sin x, \quad \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$$

یوں

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$$

ہو گا جہاں نیا تکمل، دیے گئے تکمل کی طرح ہے۔ ان میں فرق صرف اتنا ہے کہ نئے تکمل میں $\cos x$ کی بجائے $\sin x$ ہے۔ ہم درج ذیل لیتے ہوئے اس نئے تکمل کو بھی تکمل بالحصص حل کرتے ہیں۔

$$u = e^x, \quad \mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x, \quad v = -\cos x, \quad \mathrm{d}v = e^x \,\mathrm{d}x$$

یوں

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \,\mathrm{d}x)\right)\\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ہو گا جہاں نا معلوم تکمل دو بار پایا جاتا ہے۔ ہم نا معلوم تکمل کو ایک طرف منتقل کر کے

$$2\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x + e^x \cos x + C$$

دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C'$$

اگرچہ دوسرے تکمل میں $u = e^x$ اور $\mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x$ کا انتخاب اختیاری معلوم ہوتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ اگر ہم $u = \sin x$ اور $\mathrm{d}v = e^x \,\mathrm{d}x$ منتخب کریں تب

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x &= e^x \sin x - \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x\right)\\ &= \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

حاصل ہو گا، یعنی ہم وہیں ہیں جہاں سے شروع کیا تھا۔ اس طرز کے تکمل میں تفرق اور تکمل کے اجزاء منتخب کرنے کے بعد انہیں تبدیل نہ کریں۔ تفاعل $e^{ax} \cos bx$ اور اس سے ملتا جلتا تفاعل $e^{ax} \sin bx$ کے تکمل آپ کو کتاب کے آخر میں تکمل کے جدول میں ملیں گے۔ □

جدولی تکمل

ہم نے دیکھا اگر f کا تفرق بار بار لینے سے صفر ملتا ہو اور g کا تکمل بار بار باآسانی لینا ممکن ہو تب $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص سے حل کرنا ممکن ہو گا۔ بعض اوقات بار بات تکمل لینے کی تعداد اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ اجزاء پر نظر رکھنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت

میں حساب کو ایسی ترتیب دی جاسکتی ہے جس سے کام میں کافی کمی پیدا ہوتی ہے۔ اس کو جدولی تکمل[2] کہتے ہیں جس کی وضاحت درج ذیل مثال میں کی گئی ہے۔

مثال 8.14: جدولی تکمل سے $\int x^2 e^x \, dx$ کو حل کریں۔

حل: ہم $f(x) = x^2$ اور $g(x) = e^x$ لے کر اجزاء کو جدول میں درج کرتے ہیں۔

$f(x)$ اور اس کے تفرق		$g(x)$ اور اس کے تکمل
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

ہم تیر کے نشان سے جڑے ہوئے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے تیر کے وسط پر علامت استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

□

مثال 8.15: جدولی تکمل سے $\int x^3 \sin x \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sin x$ لیتے ہیں۔

$f(x)$ اور اس کے تفرق		$g(x)$ اور اس کے تکمل
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

ہم تیر کے نشان سے جوڑے گئے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے تیر کی نشان پر علامت استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

□

[2]tabular integration

سوالات

تکمل بالحصص
سوال 1 تا سوال 24 کو حل کریں۔

سوال 1: $\int x \sin \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x$

سوال 2: $\int \theta \cos \pi\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 3: $\int t^2 \cos t \, \mathrm{d}t$

سوال 4: $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

سوال 5: $\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال 6: $\int_1^e x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال 7: $\int \tan^{-1} y \, \mathrm{d}y$

سوال 8: $\int \sin^{-1} y \, \mathrm{d}y$

سوال 9: $\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$

سوال 10: $\int 4x \sec^2 2x \, \mathrm{d}x$

سوال 11: $\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x$

سوال 12: $\int p^4 e^{-p} \, \mathrm{d}p$

سوال 13: $\int (x^2 - 5x) e^x \, \mathrm{d}x$

سوال 14: $\int (r^2 + r + 1) e^r \, \mathrm{d}r$

سوال 15: $\int x^5 e^x \, \mathrm{d}x$

سوال 16: $\int t^2 e^{4t} \, \mathrm{d}t$

سوال 17: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta \, d\theta$

سوال 18: $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x \, dx$

سوال 19: $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t \, dt$

سوال 20: $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2) \, dx$

سوال 21: $\int e^{\theta} \sin \theta \, d\theta$

سوال 22: $\int e^{-y} \cos y \, dy$

سوال 23: $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

سوال 24: $\int e^{-2x} \sin 2x \, dx$

بدل اور تکمل بالحصص

سوال 25 تا سوال 30 میں تکمل بالحصص سے پہلے بدل استعمال کریں۔

سوال 25: $\int e^{\sqrt{3s+9}} \, ds$

سوال 26: $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$

سوال 27: $\int_0^{\pi/3} x \tan^2 x \, dx$

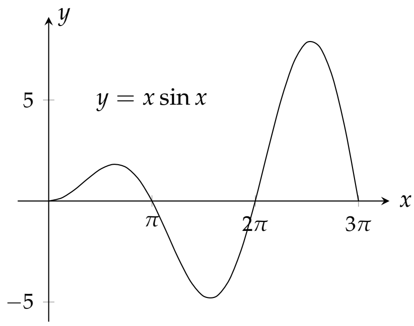
سوال 28: $\int \ln(x + x^2) \, dx$

سوال 29: $\int \sin(\ln x) \, dx$

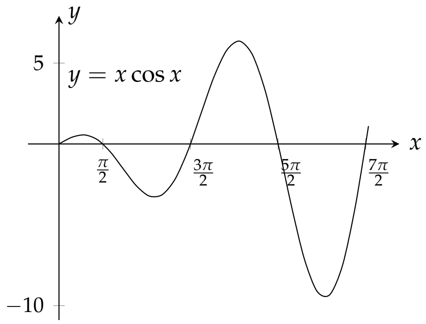
سوال 30: $\int z(\ln z)^2 \, dz$

نظریہ اور مثالیں

سوال 31: محور x اور منحنی $y = x \sin x$ کے بیچ (شکل 8.2) وقفہ (ا) $0 \le x \le \pi$ ، (ب) $\pi \le x \le 2\pi$ ، اور (ج) $2\pi \le x \le 3\pi$ پر رقبہ تلاش کریں۔ (د) آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ وقفہ $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ ، جہاں n غیر منفی عدد صحیح ہے، پر یہ رقبہ کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل 8.2: ترسیم برائے سوال 31



شکل 8.3: ترسیم برائے سوال 32

سوال 32: منحنی $y = x\cos x$ اور محور x کے بیچ (شکل 8.3) وقفہ (ا) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$، (ب) $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$، اور (ج) $\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$ پر رقبہ معلوم کریں۔ (د) آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ وقفہ $\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$ پر یہ رقبہ کتنا ہو گا، جہاں n اختیاری عدد صحیح ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = e^x$ اور لکیر $x = \ln 2$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \ln 2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 34: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = e^{-x}$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = 1$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

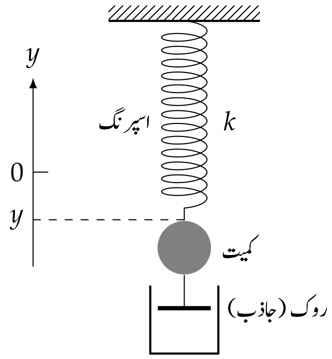
سوال 35: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ اور لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 36: محور x اور منحنی $y = x\sin x, 0 \le x \le \pi$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = \pi$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (منحنی کے لئے شکل 8.2 دیکھیں)۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 37: (ا) ربع اول میں محور x، منحنی $y = x^2e^x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ یکساں کثافت کی چادر پائی جاتی ہے۔ اس چادر کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ تک تلاش کریں اور اس کی نشاندہی خطہ کے خاکہ پر کریں۔

سوال 38: (ا) محور x، منحنی $y = \ln x$ اور لکیر $x = e$ کے بیچ یکساں کثافت کی چادر پائی جاتی ہے۔ اس چادر کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ تک تلاش کریں اور اس کی نشاندہی خطہ کے خاکہ پر کریں۔

سوال 39: ایک چادر کی کثافت $\delta = 1 + x$ ہے۔ یہ چادر محور x اور منحنی $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس چادر کا معیار اثر تلاش کریں۔



شکل 8.4: اسپرنگ، کمیت اور جاذب کا قصری نظام (سوال 41 اور سوال 42)۔

سوال 40: اگرچہ ہم $\int \mathrm{d}v$ کو تکمل بالحصص سے حل کر کے v کی تلاش میں تکمل کے مستقل کو صفر تصور کر کے رد کرتے ہیں۔ بعض اوقات اس مستقل کو غیر صفر تصور کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\int x \tan^{-1} x \, \mathrm{d}x$$

میں $u = \tan^{-1} x$ اور $v = \frac{x^2}{2} + C$ لے کر C کی ایسی قیمت منتخب کریں جس سے حاصل کلیہ کی سادہ صورت ملتی ہو۔

سوال 41: چھت سے جڑے ہوئے اسپرنگ کے نچلے سر سے ایک کمیت آویزاں ہے جس کی حرکت میں رکاوٹ پیدا کرنے کی خاطر اسپرنگ کے نچلے سر کو بند بیلن میں چلنے والے ایک بوکا کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ حرکت میں رکاوٹ پیدا کرنے والے اس نظام کو اصطلاحاً روک[3] یا جذب کہتے ہیں (شکل 8.4)۔ یوں لمحہ t پر کمیت کا مقام

$$y = 2e^{-t} \cos t, \quad t \geq 0$$

ہو گا۔ (ا) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y ترسیم کر کے محور y پر y کی اوسط قیمت کی نشاندہی کریں۔

سوال 42: اسپرنگ، کمیت اور روک کا نظام شکل 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ t پر کمیت کا مقام درج ذیل ہے۔

$$y = 4e^{-t}(\sin t - \cos t), \quad t \geq 0$$

(ا) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y ترسیم کر کے محور y پر y کی اوسط قیمت کی نشاندہی کریں۔

[3] dashpot

الٹ تفاعل کے تکمل

تکمل بالحصص کی استعمال سے الٹ تفاعل کا تکمل حاصل کرنے سے ایک قاعدہ اخذ ہوتا ہے جو عموماً اچھے نتائج دیتا ہے:

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int y f'(y)\,\mathrm{d}y && y=f^{-1}(x),\ x=f(y),\ \mathrm{d}x=f'(y)\,\mathrm{d}y\\ &= yf(y)-\int f(y)\,\mathrm{d}y && \text{لے کر تکمل بالحصص } \mathrm{d}v=f'(y)\,\mathrm{d}y \text{ اور } u=y\\ &= xf^{-1}(x)-\int f(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

ہمارا غرض پہلے متکمل کے پیچیدہ ترین حصہ، جو یہاں $f^{-1}(x)$ ہے، کی سادہ صورت کا حصول ہے۔ یوں $\ln x$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \ln x\,\mathrm{d}x &= \int ye^y\,\mathrm{d}y && y=\ln x,\ x=e^y,\ \mathrm{d}x=e^y\,\mathrm{d}y\\ &= ye^y-e^y+C\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

تفاعل $\cos^{-1}x$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1}x\,\mathrm{d}x &= x\cos^{-1}x-\int \cos y\,\mathrm{d}y && y=\cos^{-1}x\\ &= x\cos^{-1}x-\sin y + C\\ &= x\cos x^{-1}x-\sin(\cos^{-1}x)+C\end{aligned}$$

سوال 43 تا سوال 46 میں درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔ جواب کو x کی صورت میں لکھیں۔

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x)-\int f(y)\,\mathrm{d}y \qquad y=f^{-1}(x) \tag{8.4}$$

سوال 43: $\int \sin^{-1}x\,\mathrm{d}x$

سوال 44: $\int \tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$

سوال 45: $\int \sec^{-1}x\,\mathrm{d}x$

سوال 46: $\int \log_2 x\,\mathrm{d}x$

قابل تکمل تفاعل $f^{-1}(x)$ کو تکمل بالحصص سے دوسرے طریقہ سے بھی حل کیا جا سکتا ہے جس میں $u=f^{-1}(x)$ اور $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x)-\int x\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x)\Big)\,\mathrm{d}x \tag{8.5}$$

سوال 47 اور سوال 48 میں مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حاصل نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے۔

سوال 47: تفاعل $\cos^{-1}(x)$ کو مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حل کرتے ہوئے درج ذیل، ایک دوسرے سے مختلف، نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1}(x)\,\mathrm{d}x &= x\cos^{-1}x - \sin(\cos^{-1}x) + C\\ \int \cos^{-1}x\,\mathrm{d}x &= x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned} \tag{8.6}$$

کیا دونوں نتائج درست ہو سکتے ہیں؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 48: تفاعل $\tan^{-1}(x)$ کو مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حل کرتے ہوئے درج ذیل، ایک دوسرے سے مختلف، نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1}(x)\,\mathrm{d}x &= x\tan^{-1}x - \ln\sec(\tan^{-1}x) + C\\ \int \tan^{-1}x\,\mathrm{d}x &= x\tan^{-1}x - \ln 1 + x^2 + C\end{aligned} \tag{8.7}$$

کیا دونوں نتائج درست ہو سکتے ہیں؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 49 اور سوال 50 کو مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حل کریں۔ ہر بار حاصل نتیجہ کا تفرق لے کر اس کی درستگی کی تصدیق کریں۔

سوال 49: $\int \sin^{-1}x\,\mathrm{d}x$

سوال 50: $\int \tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$

8.3 جزوی کسر

اعلٰی الجبرا کا ایک مسئلہ (جس کو زیادہ تفصیل سے بعد میں پیش کیا جائے گا) کہتا ہے کہ کوئی بھی ناطق تفاعل، جو جتنا بھی پیچیدہ کیوں نہ ہو، کو سادہ کسروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جنہیں ہم اب تک جانتے ہوئے تراکیب سے تکمل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} \tag{8.8}$$

ہو گا لہٰذا بائیں ہاتھ ناطق تفاعل کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر ہم دائیں ہاتھ سادہ کسروں کا تکمل لیں گے۔

ناطق تفاعل کو اس طرح سادہ کسروں کی صورت میں لکھنے کو جزوی کسری ترکیب[4] کہتے ہیں۔ اس ترکیب میں مستقل A اور B کی وہ قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں جو

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \tag{8.9}$$

کو مطمئن کرتے ہوں۔ فرض کریں ہمیں A اور B کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں۔ ہم $\frac{A}{x+1}$ اور $\frac{B}{x-3}$ کو جزوی کسر[5] کہتے ہیں جبکہ A اور B کی قیمتیں حاصل نہ کر دی جائیں انہیں نا معلوم مستقل کہتے ہیں۔

نا معلوم مستقل اور دریافت کرنے سے پہلے ہم مساوات 8.9 میں نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x - 3A + B$$

یہ مساوات تب درست ہو گی جب دونوں اطراف x کے یکساں طاقت کے جزو ضربی ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$A+B=5, \quad -3A+B=-3$$

انہیں بیک وقت حل کرتے ہوئے $A=2$ اور $B=3$ حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 8.16: نسب نما میں دو علیحدہ علیحدہ خطی اجزائے ضربی
درج ذیل حل کریں۔

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

حل: مذکورہ بالا تبصرہ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C\end{aligned}$$

□

مثال 8.17: نسب نما میں جزو ضربی کا تکرار
درج ذیل کو جزوی کسروں کا مجموعہ لکھیں۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}$$

---

[4] method of partial fractions
[5] partial fractions

حل: چونکہ نسب نما میں $x+2$ ایک سے زیادہ مرتبہ پایا جاتا ہے لہٰذا جزوی کسر کو درج ذیل صورت میں لکھنا لازمی ہے۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2} \tag{8.10}$$

مساوات 8.10 کے نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں:

$$6x+7=A(x+2)+B=Ax+(2A+B)$$

دونوں اطراف ایک جیسے طاقتوں کے جزو ضربی کو آپس میں برابر پر کرتے ہوئے $A=6$ اور

$$7=2A+B=12+B, \quad\implies\quad B=-5$$

ملتا ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{6}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}$$

□

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم