

# احصاء اور تحليلي علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

762 . . . . .	قدرتی لوگار تھم	7.2
779 . . . . .	قوت نمائی تفاعل	7.3
794 . . . . .	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805 . . . . .	افزائش اور تنزل	7.5
819 . . . . .	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835 . . . . .	اضافی شرح نمو	7.7
840 . . . . .	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846 . . . . .	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
862 . . . . .	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879 . . . . .	بدلولی تفاعل	7.10
900 . . . . .	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918 . . . . .	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے
929 . . . . .	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات
945 . . . . .	8.2 مکمل بالخص
950 . . . . .	8.2.1 بار بار استعمال
959 . . . . .	8.3 جزوی کسر
974 . . . . .	8.4 نکتہ بنائی بدل
986 . . . . .	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر
1003 . . . . .	8.6 غیر مناسب مکمل

1029	9 لامتناہی تسلسل
1029 . . . . .	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد
1048 . . . . .	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے
1064 . . . . .	9.3 لامتناہی تسلسل
1083 . . . . .	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ
1093 . . . . .	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ
1103 . . . . .	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا کتابی اور جذری پرکھ
1115 . . . . .	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز
1129 . . . . .	9.8 طاقی تسلسل
1145 . . . . .	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل
1156 . . . . .	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے
1175 . . . . .	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود
1195 . . . . .	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں
1220 . . . . .	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی

1230 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1286 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301 . . . . .	10.8.1	دائرے
1315 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1345 . . . . .	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353 . . . . .	11.2.1	کرہ
1363 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1364 . . . . .	11.3.1	حساب
1378 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1393 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426 . . . . .	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1478 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1499 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1545 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1562 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1594 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1640 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1657 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1665	14 تکمیل بالکثرت
1665 . . . . .	14.1 دوہرا نکملات
1685 . . . . .	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701 . . . . .	14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712 . . . . .	14.4 کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727 . . . . .	14.5 تعین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736 . . . . .	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756 . . . . .	14.7 نکملات بالکثرت میں بدل
1771	15 سستی میدان میں تکمیل
1771 . . . . .	15.1 لکیری تکمیل
1774 . . . . .	15.1.1 جمع پذیری
1778 . . . . .	15.2 سستی میدان، کام، دورانیت، اور بہاؤ
1781	جوابات
1853	ا ضمیمہ اول
1855	ب ضمیمہ دوم
1857	ج ضمیمہ تین
1859	د ضمیمہ چار
1861	ه ضمیمہ پانچ
1863	و ضمیمہ چھ
1865	ز ضمیمہ سات
1867	ح ضمیمہ آٹھ
1869	ط ضمیمہ آٹھ
1871	ی نکملات کا مختصر جدول





## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 15.2 سمتی میدان، کام، دورانیت، اور بہاؤ

ان طبعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر نکلات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر نکلات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لئے درکار کام اس طرح کے نکلات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات کے پار سیال کے بہاؤ کی شرح بھی لکیری نکلات سے حاصل کی جاتی ہے۔

## سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر سمتی میدان<sup>2</sup> سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ یہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$$

استمراری جزوی تفاعل  $M$ ،  $N$ ،  $P$  کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق  $M$ ،  $N$ ،  $P$  کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کی سمتی رفتار کا سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کے ساتھ ساتھ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر یہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتار کا سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر یہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے تاکہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب 12) کے لئے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبداء پر رکھا جاتا ہے جبکہ اس کا سر سیرہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

## میدان ڈھلوان

تعریف: قابل تفرق تفاعل  $f(x, y, z)$  کے میدان ڈھلوان<sup>3</sup> سے مراد سمتیات ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

کا میدان ہے۔

vector field<sup>2</sup>  
gradient field<sup>3</sup>

□

مثال 15.5: تقابل  $f(x, y, z) = xyz$  کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

□

حل: تقابل  $f$  کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان  $F = \nabla f = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

فضا میں منحنی پر چلتے ہوئے قوت کا کام

فرض کریں فضا کے ایک خطہ میں سمتی میدان  $F = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$  ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقیاتیسی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطہ میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

ایسی صورت میں منحنی پر  $F \cdot T$ ، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ  $F$  کا غیر سمتی جزو، کے مکمل کو  $a$  تا  $b$  کا کام کہتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی  $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$  پر  $a$  تا  $b$  قوت  $F = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$  کا کام  $W$  درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T \, ds \quad (15.5)$$

□

ثابت محور  $x$  رخ مقدار  $F(x)$  کی استمراری قوت کے کام کا کلیہ  $W = \int_a^b F(x) \, dx$  حصہ 6.8 میں اخذ کیا گیا۔ مساوات 15.5 کے حصول کے دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطعہ پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینہ قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطعہ کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینہ مجموعہ کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لئے کہ تحدیدی مکمل کی قیمت کیا ہوگی، ہم قطعہ  $[a, b]$  کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطعہ  $[t_k, t_{k+1}]$  پر نقطہ  $c_k$  منتخب کرتے ہیں۔ قطعہ  $I$  کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ  $\mathbf{r}$  کا سر نقطہ  $P_k$  پر ہو گا اور ذیلی قطعہ  $P_k P_{k+1}$  کی لمبائی  $\Delta s_k$  ہوگی۔ اگر منحنی پر  $t = c_k$  کے مطابق نقطہ پر  $F$  کی قیمت  $F_k$  اور منحنی کا مماسی سمتیہ  $T_k$  ہو تب  $t = c_k$  پر  $T$  کے رخ  $F$  کا غیر سمتی جزو  $F_k \cdot T_k$  ہو گا۔ منحنی کے قطعہ  $P_k P_{k+1}$  پر چلتے ہوئے  $F$  کا کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$(\text{طے فاصلہ}) \times (\text{حرکت کے رخ قوت کا جزو}) = F_k \cdot T_k \Delta s_k$$

منحنی پر چلتے ہوئے  $t = a$  تا  $t = b$  کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k$$

جیسا جیسا  $[a, b]$  کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری مکمل کو پہنچتا ہے۔

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

اس مکمل سے حاصل عدد کی علامت،  $t$  بڑھانے سے حاصل، منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے  $\mathbf{T}$  کا رخ الٹ ہو گا جس کی بنا  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  اور مکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

علامت اور قیمت کا حصول

مکمل کام (مساوات 15.5) کو لکھنے کے چھ طریقے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds && \text{تعریف} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} && \text{منحصر تفریقی روپ} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt && \text{پھیلا کر } dt \text{ شامل کیا گیا ہے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \left( M \frac{dg}{dt} + N \frac{dh}{dt} + P \frac{dk}{dt} \right) dt && \text{مقدار معلوم } t \text{ اور سمتی رفتار } \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ اجاگر کیے گئے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \left( M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dt && \text{جزوی تفاعل اجاگر کیے گئے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} M dx + N dy + P dz && dt \text{ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کی گئی}
 \end{aligned}
 \tag{15.6}$$

مساوات 15.6 کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔

جوابات

