احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

13.7 رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں

ہم حصہ 13.5 سے جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل $f(x, y)$ منحنی $x = g(t), y = h(t)$ کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے t کے لحاظ سے شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

نقطہ $N_0(x_0, y_0) = N_0(g(t_0), h(t_0))$ پر یہ مساوات بڑھتی t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی دیتی ہے، جو دیگر چیزوں کے ساتھ منحنی پر چلنے کے رخ پر بھی منحصر ہے۔ یہ مشاہدہ اس صورت خصوصاً اہم ہو گا جب یہ منحنی ایک سیدھی لکیر ہو اور نقطہ N_0 سے منحنی پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس t ہو۔چونکہ تب $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کے دائرہ کار میں فاصلہ کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ہو گی۔ ہم $\boldsymbol{u}$ تبدیل کرتے ہوئے نقطہ N_0 پر، فاصلہ کے لحاظ سے f کی مختلف رخ میں شرح تبدیلی دریافت کر سکتے ہیں۔ ان **رخی تفرقات**[41] کی سائنس، انجینئری اور ریاضیات میں کارآمد تشریحات کی جاتی ہیں۔ اس حصہ میں ان کی قیمت دریافت کرنے کا کلیہ اخذ کیا جائے گا جس کے بعد فضا میں سطحوں کی مماسی سطحیں اور عمودی سطحیں تلاش کی جائیں گی۔

مستوی میں رخی تفرقات

فرض کریں مستوی xy میں پورے خطہ R میں تفاعل $f(x, y)$ معین ہے، $N_0(x_0, y_0)$ خطہ R میں ایک نقطہ ہے، اور $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ ایک اکائی سمتیہ ہے۔ تب $\boldsymbol{u}$ کے متوازی نقطہ N_0 سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ نقطہ N_0 سے فاصلہ کو مقدار معلوم s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ سے حاصل کرتے ہیں۔

تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ کے رخ f کا تفرق درج ذیل عدد ہو گا

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \tag{13.41}$$

بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

رخی تفرق کو درج ذیل سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق $\qquad (D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}$

[41] directional derivative

مثال 13.40: نقطہ $N_0(1,2)$ پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$ کے رخ درج ذیل کا تفرق تلاش کریں۔

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

حل:

مساوات 13.41

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} &= \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1, y_0+su_2) - f(x_0,y_0)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{f\Big(1+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 2+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - f(1,2)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\Big(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\Big)\Big(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\Big) - (1^2+1\cdot 2)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\Big(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\Big) + \Big(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\Big) - 3}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2}{s} = \lim_{s\to 0}\Big(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\Big) = \Big(\frac{5}{\sqrt{2}}+0\Big) = \frac{5}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

نقطہ $N_0(1,2)$ پر $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$ کے رخ $f(x,y) = x^2 + xy$ کی تبدیلی کی شرح $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ہے۔ □

رخی تفرق کی جیومیٹریائی تشریح

مساوات $z = f(x,y)$ فضا میں ایک سطح S کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $z_0 = f(x_0,y_0)$ ہو تب نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سطح S پر واقع ہو گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے متوازی انتصابی مستوی، جو $N(x,y)$ اور $N_0(x_0,y_0)$ سے گزرتا ہو، S کو منحنی C میں قطع کرے گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی N پر C کے مماس کی ڈھلوان ہو گی۔

دھیان رہے کہ جب $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}$ ہو، N_0 پر رخی تفرق $\frac{\partial f}{\partial x}$ ہو گا جس کی قیمت (x_0,y_0) پر حاصل کی جائے گی۔ اسی طرح جب $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}$ ہو، N_0 پر رخی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہو گا جس کی قیمت (x_0,y_0) پر حاصل کی جائے گی۔ رخی تفرق ان دو جزوی تفرقات کو عمومی بناتا ہے۔ ہم اب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے علاوہ کسی بھی رخ $\boldsymbol{u}$، تفاعل f کی تبدیلی شرح جان سکتے ہیں۔

حساب

جیسا آپ جانتے ہیں، تفرق کی تعریف بطور حد سے کسی بھی تفرق کا حصول اتنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ رخی تفرق کی تعریف سے بھی رخی تفرق کا حصول مشکل کام ہے۔ آئیں رخی تفرق کا زیادہ آسان کلیہ اخذ کریں۔ ہم خط

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2 \tag{13.42}$$

سے شروع کرتے ہیں جو نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساوات ہے جس میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ کے رخ بڑھتا ہوا s مقدار معلوم لمبائی قوس ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\cdot u_2 \qquad \text{مساوات 13.42 سے } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = u_1 \text{ اور } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = u_2$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\cdot\boldsymbol{j}\right]}_{N_0 \text{ پر } f \text{ کی ڈھلوان}} \cdot \underbrace{\left[u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}\right]}_{\boldsymbol{u} \text{ کا رخ}} \tag{13.43}$$

تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ پر $f(x, y)$ کا سمتیہ ڈھلوان (ڈھلوان) درج ذیل سمتیہ ہو گا

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

جس کی قیمت N_0 پر f کے رخی تفرق سے حاصل کی جائے گی۔

□

سمتی ڈھلوان ∇f کو "ڈھلوان f " پڑھتے ہیں۔ علامت ∇ یونانی حرف "نیبلا" ہے۔

مساوات 13.43 کہتی ہے کہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق N_0 پر f کی ڈھلوان اور $\boldsymbol{u}$ کا حاصل ضرب ہو گا۔

مسئلہ 13.6: اگر $N_0(x_0, y_0)$ پر $f(x, y)$ کے جزوی تفرقات معین ہوں تب N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق، N_0 پر f کی ڈھلوان اور $\boldsymbol{u}$ کا غیر سمتی ضرب ہو گا:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} = \left(\nabla\right)_{N_0}\cdot\boldsymbol{u} \tag{13.44}$$

مثال 13.41: نقطہ $(2, 0)$ پر $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ رخ $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ کا رخی تفرق تلاش کریں۔

حل: ہم $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی سے $\boldsymbol{A}$ کو تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کے رخ اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{A}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - -\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

نقطہ $(2,0)$ پر f کے جزوی تفرقات

$$f_x(2,0) = (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$
$$f_y(2,0) = (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\cdot 0 = 2$$

ہوں گے للذا نقطہ $(2,0)$ پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(2,0)} = f_x(2,0)\boldsymbol{i} + f_y(2,0)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

ہو گی۔ نقطہ $(2,0)$ پر $\boldsymbol{A}$ رخ f کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\Big(D_{\boldsymbol{u}}f\Big)\Big|_{(2,0)} &= \nabla f\big|_{(2,0)}\cdot \boldsymbol{u}\\ &= (\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\cdot\Big(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\Big) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1\end{aligned}$$

□

رخی تفرقات کے خواص

رخی تفرق کے کلیہ

$$D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f\cdot\boldsymbol{u} = \big|\nabla f\big||\boldsymbol{u}|\cos\theta = \big|\nabla f\big|\cos\theta$$

کی قیمت تلاش کرنے سے درج ذیل خواص دریافت ہوتے ہیں:

رخی تفرق $D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f\cdot\boldsymbol{u} = \big|\nabla f\big|\cos\theta$ کے خواص

1. تفاعل f اس صورت تیز ترین بڑھتا ہے جب $\cos\theta = 1$ ہو، یعنی جب $\boldsymbol{u}$ اور ∇f ایک ہی رخ ہوں۔ اس طرح، اپنے دائرہ کار میں، نقطہ N پر سمتیہ ڈھلوان ∇f کے رخ، f تیز ترین بڑھتا ہے۔ اس رخ تفرق درج ذیل ہو گا۔
$$D_{\boldsymbol{u}}f = \big|\nabla f\big|\cos(0) = \big|\nabla f\big|$$

2. اسی طرح $-\nabla f$ کے رخ f تیز ترین گھٹتا ہے۔ اس رخ تفرق $D_{\boldsymbol{u}}f = \big|\nabla f\big|\cos(\pi) = -\big|\nabla f\big|$ ہو گا۔

3. ڈھلوان کے عمودی کسی بھی رخ $\boldsymbol{u}$ کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ ایسے رخ θ کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ ہو گی للذا درج ذیل ہو گا:
$$D_{\boldsymbol{u}}f = \big|\nabla f\big|\cos(\pi/2) = \big|\nabla f\big|\cdot 0 = 0$$

جیسا ہم دیکھیں گے، یہ خواص تین بعدی فضا میں بھی کارآمد ہوں گی۔

مثال 13.42: نقطہ $(1,1)$ پر وہ رخ تلاش کریں جس رخ تفاعل $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ (ا) تیز ترین بڑھتا ہو، (ب) تیز ترین گھٹتا ہو، (ج) میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی ہو۔

حل: (ا) یہ تفاعل نقطہ $(1,1)$ پر ∇f کے رخ تیز ترین بڑھے گا۔اس نقطہ پر ڈھلوان

$$(\nabla f)_{(1,1)}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})_{(1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

ہے لہٰذا تیز ترین بڑھنے کا رخ درج ذیل اکائی سمتیہ دیگا۔

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

(ب) یہ تفاعل $-\nabla f$ رخ تیز ترین گھٹے گا۔ یہ رخ درج ذیل ہو گا۔

$$-\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

(ج) نقطہ $(1,1)$ پر صفر تبدیلی کا رخ ∇f کو عمودی ہو گا۔یہ رخ درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},\quad -\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

□

ہم قد منحنی کے ڈھلوان اور مماس

اگر ہموار منحنی $\boldsymbol{r}=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت مستقل ہو (جس کی بنا یہ منحنی، f کی ہم قد منحنی ہو گی)، تب $f(g(t),h(t))=0$ ہو گا۔دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق درج ذیل مساوات دیگا:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t),h(t))&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c)\\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}&=0 \qquad \text{زنجیری قاعدہ}\\ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}&=0\end{aligned}\tag{13.45}$$

مساوات 13.45 کہتی ہے کہ مماسی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کو ∇f عمودی ہو گا، لہٰذا ∇f نقطہ (x_0, y_0) پر منحنی کو عمودی ہو گا۔

تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار میں ہر نقطہ (x_0, y_0) پر f کی ڈھلوان نقطہ (x_0, y_0) پر ہم قد منحنی کو عمودی ہو گی۔

ہم اس مشاہدہ کی بنا ہم قد منحنیات کی مماسات کی مساواتیں دریافت کر سکتے ہیں۔ یہ ڈھلوان کو عمودی خطوط ہوں گے۔ نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ سے گزرتا ہوا، سمتیہ $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ کو عمودی خط کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

اگر $\boldsymbol{N}$ ڈھلوان $(\nabla f)_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j}$ ہو تب اس مساوات کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{13.46}$$

مثال 13.43: نقطہ $(-2, 1)$ پر درج ذیل ترخیم کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

حل: یہ ترخیم درج ذیل تفاعل کی ہم قد منحنی ہے۔

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

نقطہ $(-2, 1)$ پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2}\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}\right)_{(-2,1)} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

ہو گی لہٰذا مماسی خط کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} (-1)(x + 2) + (2)(y - 1) &= 0 && \text{مساوات } 13.46 \\ x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

□

تین متغیرات کا تفاعل

ہم دو متغیرات کلیات کے ساتھ جزو z شامل کر کے تین متغیرات کلیات حاصل کرتے ہیں۔فضا میں قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}$ کے لئے ہم

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

اور

$$D_{\boldsymbol{u}}f=\nabla f\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2+\frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

لکھیں گے۔ رخی تفرق اب بھی

$$D_{\boldsymbol{u}}f=\nabla f\cdot\boldsymbol{u}=\left|\nabla f\right|\left|\boldsymbol{u}\right|\cos\theta=\left|\nabla f\right|\cos\theta$$

ہو گا لہٰذا دو متغیرات کے خواص (جن کا ہم ذکر کر چکے ہیں)، تین متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔کسی بھی نقطہ پر ∇f رخ تفاعل تیز ترین بڑھتا ہے اور $-\nabla f$ رخ تیز ترین گھٹتا ہے، جبکہ ∇f کے عمودی کسی بھی رخ، تفرق صفر ہو گا۔

مثال 13.44: (ا) نقطہ $(N_0(1,1,0))$ پر $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ رخ $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ کا تفرق تلاش کریں۔(ب) نقطہ N_0 پر f کس رخ تیز ترین بڑھتا ہے؟ اس رخ شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

حل: (ا) سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے اس کے رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(6)^2}=\sqrt{49}=7$$
$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{A}}{\left|\boldsymbol{A}\right|}=\frac{2}{7}\boldsymbol{i}-\frac{3}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}$$

نقطہ N_0 پر جزوی تفرقات

$$f_x=3x^2-y^2\Big|_{(1,1,0)}=2,\quad f_y=-2xy\big|_{(1,1,0)}=-2,\quad f_z=-1\big|_{(1,1,0)}=-1$$

ہوں گے لہٰذا N_0 پر f کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla f\big|_{(1,1,0)}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{A}$ کے رخ f کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$D_{\boldsymbol{u}}f\big|_{(1,1,0)}=\nabla f\big|_{(1,1,0)}\cdot\boldsymbol{u}=(2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{2}{7}\boldsymbol{i}-\frac{3}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)$$
$$=\frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7}=\frac{4}{7}$$

(ب) تفاعل تیز ترین $\nabla f = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ رخ بڑھتا ہے اور $-\nabla f = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ رخ تیز ترین گھٹتا ہے۔ ان رخ تبدیلی کی شرح بالترتیب درج ذیل ہوں گی۔

$$\left|\nabla f\right| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$-\left|\nabla f\right| = -3$$

□

مماسی مستوی اور عمودی خطوط کی مساواتیں

اگر قابل تفرق تفاعل f کی ہم قد منحنی $f(x,y,z) = c$ پر $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ ایک ہموار منحنی ہو تب $f(g(t),h(t),k(t)) = 0$ ہو گا۔ دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق درج ذیل دیگا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t),h(t),k(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$
$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}} = 0 \tag{13.47}$$

منحنی کے ساتھ ساتھ ہر نقطہ پر ∇f، منحنی کی سمتیہ رفتار کو عمودی ہو گا۔

آئیں اب نقطہ N_0 سے گزرتی منحنی تک اپنے آپ کو محدود رکھتے ہیں۔ نقطہ N_0 پر تمام سمتیات رفتار، N_0 پر ∇f کو عمودی ہوں گے لہٰذا منحنی کے تمام مماسی خط اس مستوی میں پائے جائیں گے جو N_0 پر ∇f کو عمودی ہو۔ اس مستوی کو ہم N_0 پر سطح کا مماسی مستوی کہتے ہیں۔ نقطہ N_0 سے گزرتا ہوا ایسا خط جو اس مستوی کو عمودی ہو، N_0 پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

تعریف: نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ پر $\nabla f\big|_{N_0}$ کا عمودی مستوی، نقطہ N_0 پر ہم قد منحنی $f(x,y,z) = c$ کا مماسی مستوی ہو گا۔

نقطہ N_0 پر $\nabla f\big|_{N_0}$ کا متوازی خط، نقطہ N_0 پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

□

یوں حصہ 11.5 کے تحت، مماسی مستوی اور عمودی خط کی بالترتیب مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$f_x(N_0)(x - x_0) + f_y(N_0)(y - y_0) + f_z(N_0)(z - z_0) = 0 \tag{13.48}$$
$$x = x_0 + f_x(N_0)t, \quad y = y_0 + f_y(N_0)t, \quad z = z_0 + f_z(N_0)t \tag{13.49}$$

مثال 13.45: نقطہ $N_0(1,2,4)$ پر درج ذیل کا مماسی مستوی اور عمودی خط دریافت کریں۔

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0 \qquad \text{دائری قطع مکافی}$$

حل: نقطہ N_0 پر f کی ڈھلوان کو عمودی سطح، نقطہ N_0 پر مستوی ہو گا۔ ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{N_0}=(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})_{(1,2,4)}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

ہے لہٰذا مستوی درج ذیل ہو گا۔

$$2x+4y+z=14 \quad \text{یعنی} \quad 2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$$

نقطہ N_0 پر سطح کا عمودی خط درج ذیل ہو گا۔

$$x=1+2t,\quad y=2+4t,\quad z=4+t$$

□

مثال 13.46: بیلنی سطح

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$$

اور مستوی

$$g(x,y,z)=x+z-4=0$$

ایک ترخیم T میں ملتے ہیں۔ نقطہ $N_0(1,1,3)$ پر T کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: نقطہ N_0 پر مماسی خط ∇f اور ∇g دونوں کو عمودی لہٰذا $\boldsymbol{v}=\nabla f\times\nabla g$ کو متوازی ہو گا۔ نقطہ N_0 کے محدد اور $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء ہمیں مماسی خط کی مساوات دیتے ہیں۔ ہمارے پاس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\nabla f_{(1,1,3)}&=(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j})_{(1,1,3)}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\\ \nabla g_{(1,1,3)}&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})_{(1,1,3)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{v}=(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

مماسی خط درج ذیل ہو گا۔

$$x=1+2t,\quad y=1-2t,\quad z=3-2t$$

□

سطح $z = f(x, y)$ کا مماسی مستوی

نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ پر سطح $z = f(x, y)$ کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔ اس نقطہ پر $z_0 = f(x_0, y_0)$ ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات $z = f(x, y)$ کو $f(x, y) - z = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں سطح $z = f(x, y)$ درحقیقت تفاعل $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ کا صفر ہم قد مستوی ہو گا۔ تفاعل F کے جزوی تفرقات

$$
\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - z) = f_x - 0 = f_x \\
F_y &= \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - z) = f_y - 0 = f_y \\
F_z &= \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y) - z) = 0 - 1 = -1
\end{aligned}
$$

ہوں گے۔ نقطہ N_0 پر مماسی مستوی کا کلیہ

$$F_x(N_0)(x - x_0) + F_y(N_0)(y - y_0) + F_z(N_0)(z - z_0) = 0$$

یوں درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) \tag{13.50}$$

مثال 13.47: نقطہ $(0, 0, 0)$ پر سطح $z = x \cos y - y e^x$ کا مماسی مستوی تلاش کریں۔

حل: ہم جزوی تفرقات معلوم کر کے مساوات 13.50 استعمال کریں گے:

$$
\begin{aligned}
f_x(0, 0) &= (\cos y - y e^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1 \\
f_y(0, 0) &= (-x \sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1
\end{aligned}
$$

یوں مماسی مستوی

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0 \qquad \text{مساوات } 13.50$$

یعنی درج ذیل ہو گا۔

$$x - y - z = 0$$

□

بڑھوتری اور فاصلہ

جوابات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ