

# احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	بدلولی تفاعل	7.10
900	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
986	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1003	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1220	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1230 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1286 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301 . . . . .	10.8.1	دائرے
1315 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1345 . . . . .	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353 . . . . .	11.2.1	کرہ
1363 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1364 . . . . .	11.3.1	حساب
1378 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1393 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426 . . . . .	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1478 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1499 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1545 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1562 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1594 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1640 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1657 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1665	14 تکمل بالکثرت
1665 . . . . .	14.1 دوہرا نکملات
1685 . . . . .	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701 . . . . .	14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712 . . . . .	14.4 کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727 . . . . .	14.5 تعین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736 . . . . .	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756 . . . . .	14.7 نکملات بالکثرت میں بدل
1771	15 سستی میدان میں تکمل
1771 . . . . .	15.1 لکیری تکمل
1774 . . . . .	15.1.1 جمع پذیری
1778 . . . . .	15.2 سستی میدان، کام، دورانیت، اور بہاؤ
1779	جوابات
1853	ا ضمیمہ اول
1855	ب ضمیمہ دوم
1857	ج ضمیمہ تین
1859	د ضمیمہ چار
1861	ه ضمیمہ پانچ
1863	و ضمیمہ چھ
1865	ز ضمیمہ سات
1867	ح ضمیمہ آٹھ
1869	ط ضمیمہ آٹھ
1871	ی نکملات کا مختصر جدول





## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 15.2 سمتی میدان، کام، دورانیت، اور بہاؤ

ان طبعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، ہم بند راہ پر نکملات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر نکملات استعمال کرتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت نقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) کے لئے درکار کام یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہے) کے لئے درکار کام اس طرح کے نکملات سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم منحنیات کے پارسیال کی بہاؤ کی شرح بھی لکیری نکملات سے حاصل کرتے ہیں۔

## سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر **سمتی میدان**<sup>2</sup> سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ یہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$$

اگر جزوی تفاعل  $M$ ،  $N$ ،  $P$  استراری ہوں تب یہ میدان استراری ہوگا، اگر  $M$ ،  $N$ ،  $P$  قابل تفرق ہوں تب یہ میدان قابل تفرق ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$$

گول انداز کے مستوی مدار میں مدار کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کی سمتی رفتار کا سمتیہ منسلک کرنے سے مدار کے ساتھ ساتھ دو ابعادی میدان حاصل ہوگا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم۔ قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر یہ ابعادی میدان حاصل ہوگا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتار کا سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر یہ ابعادی میدان حاصل ہوگا۔ ان میدان کے علاوہ دیگر میدان بھی شکل میں دکھائے گئے ہیں جہاں چند میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے تاکہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب 12) میں ایسا نہیں کیا گیا بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبداء پر رکھا گیا جبکہ اس کے سر کا سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا گیا۔

## جوابات

