احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفز. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

## عنوان

Vii																										,	يباچ	,
ix																						4	یبادٍ	، کا د	ناب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	•
1																							٠	لمومات	، مع	ابتدائی	1	L
1																		خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																										1.2		
32																							Ĺ	تفاعل		1.3		
54																					غلى	انمذ	م کی	ترسيم		1.4		
74																					بل	نفاء	ائی اِنی	بنكوني		1.5		
95																								/		حدود ا	2	)
95																										2.1		
113															٠.		عد	قواه	کے	ئے ۔	_,	پ کر	لاثر	פנ "		2.2		
126																										2.3		
146																										2.4		
165																							ار	استمر		2.5		
184	١.																					Į	ی ز	مماسح		2.6		
199	)																									تفرق	3	Ł
199	)																				<b>ت</b> ,	تف	K,	تفاعل		3.1	-	
221																					رں	, زق	ی ہ ِ تفر	عا ر قواعد		3.2		
240																										3.3		
257																										3.4		
277																										3.5		
294																										3.6		
310	) .																			ىلى	تبد	ح .	شرر	د گیر		3.7		

عـــنوان

<ul> <li>325</li> <li>340</li> <li>340</li> <li>341</li> <li>340</li> <li>341</li> <li>352</li> <li>363</li> <li>364</li> <li>374</li> <li>385</li> <li>386</li> <li>387</li> <li>391</li> <li>44</li> <li>391</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>53</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>58</li> <li>58</li> <li>59</li> <li>605</li> <li>605</li> <li>605</li> <li>70</li> <li>7</li></ul>		تفرق کا استعال	4
<ul> <li>356</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>37</li> <li>40</li> <li>44</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>30</li> <li>30<td></td><td></td><td></td></li></ul>			
<ul> <li>356</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>37</li> <li>40</li> <li>44</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>30</li> <li>30<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td></li></ul>	اوسط قیمت	4.2 متله	
<ul> <li>356</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>37</li> <li>40</li> <li>44</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>30</li> <li>30<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td></li></ul>	) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
<ul> <li>391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر</li></ul>	356	3.1	
418       بیترین بنان       4.6         442       خط بخد کی اور تنو تات         47       خط بخد کی اور تر تات         47       خط بخد کی اور ریانسان نموند کئی       5         477       کسی محلت       5.1         489       کسی محلت       5.2         505       تعلق محلوات، ابتدائی قیت سئلے، اور ریانسانی نموند کئی       5.3         505       محلی بدریج شرکیب پرل ر زخیری تامده کا ال اطلاق       5.6         534       نموسیت برتی، اور اوسط قیت سئل       5.5         551       نموسیت برتی، اور اوسط قیت سئل       5.6         578       بیادی سئل       5.7         599       نموسیت برتی، اور اوسط قیت سئل       5.8         605       بیادی سئل       5.9         605       بیادی سئل       5.10         625       بیادی برادی سئل       وی برتی         626       بیادی برتی       وی برتی         627       کسی برادی برتی       6.2         628       بیادی برتی       قرار برکز کیت و برتی         629       بیادی برتی       قرار برکز کیت و بیاد         63       بیادی برتی       6.3         640       بیادی مخیر ایسی       قرار برکز کیت و بیاد         650       بیادی مخیر ایسی       قرار برکز کیت و ب	اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442       غط بدی کا اور تو تات         465       خیر توشی کلداد         477       4.8         477       5.1         477       5.1         489       5.1         5.2       تقری ساوات، ابتدائی تیب سنت، اور ریافسیاتی موند شی         5.3       5.2         5.5       کلی بدر بید ترایی کبوسی         5.6       کبی بدر بید ترایی کبوسی         5.7       بنیادی سلیم         5.8       کسیم کلی سیم بدل         6.5       کسیم کلی سیم بدل         605       سیم کلی سیم بدل         605       سیم کلی سیم بدل         605       سیم کلی سیم بدل         625       سیم کلی سیم کلی سیم کلی         626       سیم کلی سیم کلی         627       کلی کا سیم کلی سیم کلی         640       سیم کلی کلی کر تیم کلی طاش         65       کلی کلی کلی کلی کر تیم کلی طاش         663       سیم کلی کلی کلی کلی کلی کلی کلی کلی کر تیم کلی			
465       ریب نیوش       4.8         477       کل       کا         477       خیر تطبی محملات       5.1         489       خیر تطبی محملات       5.2         5.2       تفری براید ترکیب بدل ر تیجری تامیده کا الت اطارت       5.3         5.6       کل       کل         5.6       کل       کل         5.6       کل       کل         5.6       کل       کل         5.7       خیر در اوسط آیت سئل       5.7         580       کس       کس         605       کس       کس         606       کس       کس         607       کس       کس         608       کس       کس         609       کس       کس         600       کس       کس         600       کس       کس         600       کس       کس			
477       گل       قریق الطاق الله       5.1         489       قریق ساوات، ابتدائی آیت سئط، اور ریاضیاتی موند آشی       5.2         505       تغیلی سرایید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق       5.3         516       تغیلی شریعید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق       5.4         54       اندازه بذر اید شای گموید       5.5         561       تغیادی مسئلد       5.6         578       تغیادی مسئلد       5.7         599       تغیادی مسئلد       5.8         605       تغیادی مسئلد       5.9         605       تغیادی مسئل       5.9         605       تغیادی مسئل       6.1         625       تغیادی مسئل       6.1         629       تغیادی وزاند       6.2         640       مینان کارتج کی کات والا سرحد       6.2         648       تغیال کات کر جم کی حال ال سرح الحال المراح و المرح و المراح و المراح و المرح و المرح و المرا			
477       غیر تطعی محملات       5.1         489       ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی       5.2         505       تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق       5.3         516       محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق       5.4         534       محمد بدرایید تعالی محمد       5.5         551       محمد بدرایید تعالی محمد       5.6         561       محمد بدرایید تعالی محمد       5.6         578       محمد بدرایی محمد       5.7         599       محمد بدرایی محمل       5.8         605       محمد بدرای محمل       5.9         605       محمد بدرای محمل       6.5         625       محمد بدرای محمل       6.1         626       محمد بدرای محم	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477       غیر تطعی محملات       5.1         489       ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی       5.2         505       تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق       5.3         516       محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق       5.4         534       محمد بدرایید تعالی محمد       5.5         551       محمد بدرایید تعالی محمد       5.6         561       محمد بدرایید تعالی محمد       5.6         578       محمد بدرایی محمد       5.7         599       محمد بدرایی محمل       5.8         605       محمد بدرای محمل       5.9         605       محمد بدرای محمل       6.5         625       محمد بدرای محمل       6.1         626       محمد بدرای محم	477	کیل .	5
489       ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی         505       تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3         516       ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.4         534       ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.5         551       5.6         562       نصوعیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 5.7         578       نیادی سئلہ 5.8         579       5.8         605       5.8         605       5.9         605       تعدادی محملہ 6.5         605       تعدادی محملہ 6.5         625       تعدادی وزرنقہ 6.1         626       منحنیات کے فتی رتب         627       کمیل کا استعمال 6.1         640       منحنیات والا سرحم         640       کمیل سیل کا الے کر قبم کی سائل 7.5         640       کمیل سیل کی سیل کی سیل الے کہ اللے الیاں محملہ اللے الیاں اللے اللے اللے اللے اللے اللے اللے ال		•	5
505       کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق       5.3         516       امدازہ بذراید متاباتی تجویم       5.4         54       امدازہ بذراید متاباتی تجویم       5.5         55       ریمان تجویم اور قطعی تحملیت       5.6         56       محمل کا سرا برا اور اصطفی تحمل میں بدل       5.8         605       نظمی تحمل میں بدل       5.9         605       اعدادی تحمل کی اس بدل       6.1         625       اعدادی تحمل کی اس بدل       6.1         625       محمل کا استعمال       6.1         640       مخمل کا سرا ہوتے کلیات والا سرحد         640       محمل کا سرا ہوتے کلیات والا سرحد         648       کمی شیطیات کی لمبائیاں         650       محمل کا سرائی نیائی ہوئے کلیائیاں         651       معیاد اثر اور سرکز کہتے         652       معیاد اثر اور سرکز کہتے         653       معیاد اثر اور سرکز کہتے         654       معیاد اثر اور سرکز کہتے         655       معیاد اثر اور سرکز کہتے         656       معیاد اثر اور سرکز کہتے         657       معیاد اثر اور سرکز کہتے         658       معیاد نظر نون سیال اور توت بیال اور توت بیال اور توت بیال استعمال         755       میادی قشر اور دیگر نمونی استعمال	ر با		
516       اندازه بذرایید تثانای مجموعها         534       5.5       5.6       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.6       5.6       5.6       5.6       5.6       5.6       5.6       5.7       5.8       5.8       5.8       5.8       5.8       5.9       5.9       5.0       605       606       605       606			
534       ريمان مجموع اور قطعي تحمالت       5.5         561       خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله       5.6         578       خمادی سئله       5.7         579       5.8       5.8         605       5.9       6.9         605       6.0       6.0         605       6.0       6.0         605       6.0       6.0         605       6.0       6.0         605       6.0       6.1         605       6.1       6.1         625       6.1       6.1         629       6.1       6.1         640       6.2       6.3         640       6.3       6.3         640       6.4       6.4         648       6.4       6.5         649       6.6       6.5         650       6.6       6.6         661       6.6       6.6         662       6.6       6.6         663       6.6       6.6         664       6.6       6.6         665       6.6       6.6         666       6.6       6.6         667       6.5       6.6 <td></td> <td></td> <td></td>			
561       فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل       5.6         578       5.7       5.7         579       5.8       5.8         605       5.9       5.9         605       5.0       5.10         625       605       6.1         626       6.2       6.1         627       6.1       6.2         640       6.2       6.3         640       6.3       6.3         663       6.4       6.5         664       6.5       6.5         665       6.6       6.6       6.6         670       6.2       6.4         687       6.3       6.4         688       6.5       6.6         689       6.6       6.7         710       6.8       6.8         731       6.8       6.9         740       6.10       6.5         755       7       10       6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578       بنیادی سئلد       5.7       5,10       5.8       5.8       5.8       5.8       6.0       5.8       6.0       5.9       5.9       6.0       5.9       6.0       5.0       6.0       6.0       6.0       6.0       6.0       6.1       6.2       6.2       6.2       6.1       6.2       6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599       قطع کمل میں برل       5.8         605       5.9         605       5.9         605       5.10         625       5.10         625       6.1         629       6.1         640       7         6.2       6.2         6.3       6.2         6.4       6.3         6.5       6.4         6.6       6.5         6.6       6.9         6.7       6.7         70       6.8         71       6.8         731       6.9         740       6.10         755       6.10			
605       اعدادی گلل       5.9         605       تاعدہ و و و زفتہ       5.10         625       تاعدہ و و و زفتہ       6.1         626       مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد       6.1         629       منایاں کاٹ کر تیم کی طاش         640       شایل کاٹ کر تیم کی طاش         642       6.2         643       المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش         663       المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں         664       معند الرا و در کر کہتے ہے۔         665       معید الرا و در کر کہتے         667       المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں         668       المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و			
605       اعدادی گلل       5.9         605       تاعدہ و و و زفتہ       5.10         625       تاعدہ و و و زفتہ       6.1         626       مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد       6.1         629       منایاں کاٹ کر تیم کی طاش         640       شایل کاٹ کر تیم کی طاش         642       6.2         643       المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش         663       المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں         664       معند الرا و در کر کہتے ہے۔         665       معید الرا و در کر کہتے         667       المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں         668       المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و	<sup>ت</sup> کمل میں بدل	5.8 قطعی	
<ul> <li>5.10 تاعدہ ذوزنقہ</li> <li>5.10 تاعدہ ذوزنقہ</li> <li>625 تاعدہ ذوزنقہ</li> <li>6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ</li> <li>6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ</li> <li>6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد</li> <li>6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش</li> <li>6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا</li> <li>6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں</li> <li>6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں</li> <li>6.6 میار اثر اور مرکز کمیت</li> <li>6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت</li> <li>6.8 میار اثر اور مرکز کمیت</li> <li>6.9 وسطانی مرکز</li> <li>6.7 میار اور قوت سیال اور قوت سیال</li> <li>6.10 میادرائی تفاعل</li> </ul>			
625       متخدیات کے نی رقبہ       6.1         629       متخدیات کے اتا والا سرحد         6.2       6.1.1         640       تدبل ہوتے کلیات والا سرحد         6.2       6.3         648       شار الحد ہے جم کی سمانی ہے۔         6.3       جرم سور سے الحد ہے۔         6.4       6.6         6.6       مستوی متخدیات کی لمبائیاں         6.6       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.7       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.8       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.8       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.9       فشار سیال اور قوت سیال         6.10       مورائی تفاعل         7       ماورائی تفاعل			
625       متخدیات کے نی رقبہ       6.1         629       متخدیات کے اتا والا سرحد         6.2       6.1.1         640       تدبل ہوتے کلیات والا سرحد         6.2       6.3         648       شار الحد ہے جم کی سمانی ہے۔         6.3       جرم سور سے الحد ہے۔         6.4       6.6         6.6       مستوی متخدیات کی لمبائیاں         6.6       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.7       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.8       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.8       معیار اثر اور مرکز کمیت         6.9       فشار سیال اور قوت سیال         6.10       مورائی تفاعل         7       ماورائی تفاعل		کا ب	_
629       تدريل ہوتے کليات والا سرحد         640       6.2         640       6.2         6.3       6.3         6.4       6.3         6.5       6.4         6.6       6.5         6.7       6.6         6.8       6.9         6.7       6.7         711       6.8         731       6.8         731       6.0         740       6.10         755       30	0_0		6
640       گیاں کاٹ کر قجم کی طاش         648       اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا         65       اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا         65       6.4         676       شوی متحدیات کی لمبائیاں         687       6.6         689       6.7         70       معیاد اثر اور مرکز کمیت         67       6.71         711       0.71         68       6.71         716       وسطانی مرکز         6.8       مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال         740       مادرائی نقاعل			
648       اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا       6.3         663       شکلی چھلے       6.4         676       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.5         687       6.6       6.9         699       6.7       6.7         711       6.7       7         688       7.1       6.8         731       6.8       7         740       بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال       6.10         755       ماورائی نقاعل       7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663       بکی چیلے       6.4         676       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.5         687       6.6       6.6         699       6.7       6.7         711       6.7       7         711       6.8       7         716       6.8       7         731       10       6.0         740       6.10       6.10         755       31       6.10       6.10	) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676       مستوی منحنیات کی لمبائیاں         687       6.5         688       6.6         699       6.7         70       معیاد اثر اور مرکز کمیت         6.7       6.7.1         70       6.8         731       8         740       6.10         755       ماورائی تفاعل	•		
687       شطح طواف کا رقبہ         699       6.7         711       6.7         711       6.7.1         716       9         6.8       731         700       6.10         701       6.10         702       6.10         703       6.10         704       6.10         705       6.10         706       6.10         707       6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

عـــنوان

قدرتی لوگار تھم	7.2	
قوت نمائی تفاعل	7.3	
807 $\log_a x$ let $a^x$	7.4	
	7.5	
قاعده گھوپیٹال کی میں میں میں میں میں ہوتی ہوتی ہوتی ہے۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔	7.6	
اضافی شرح نمو	7.7	
7.7.1 ترقیمی اور شانکی علاش		
الث تكونياتى تفاعل	7.8	
الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9	
ہذالولی تفاعل	7.10	
يك رتبي تفرقی مساوات	7.11	
يوگر كى اعداد كى تركيب؛ ميدان ڈھلوان	7.12	
المريق 43	ا تکمل کے	8
ر تمکن کے بنیادی کلیات	8.1	
تكمل بالحصص		
964	0.2	
974	8.3	
كونياتى بدلُ	8.4	
حبدول کمل اور کمپیوٹر	8.5	
	8.6	
, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	0.0	
ىلىل 1043	! لا <b>مت</b> ناہی <sup>تت</sup>	9
اعداد کی ترتیب کی حد	9.1	
ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	9.2	
لامتناي تسلسل	9.3	
غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پر کھ	9.4	
یر غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پر کھ	9.5	
یر منفی اجزاء کے شکسل کا تنابی اور جذری پر کھ	9.6	
بیر کی ابراء کے سطح ما بی اور جدری چرھی ۔		
بدليا مشكل الشكل اور مشروط الرتفازي	9.7 9.8	
	9.8	
پیر اور مقلان مسلس کا از تکاز؛ خلل کے اندازے	9.9 9.10	
یر من کار نظر: کس کے انداز کے	9.10	
طاق عن کے استعمال	9.11	
ھے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد	ا مخروطی ج	0
ے میں مدیر کا ہوتے ہی گئی۔ مخروطی چھے اور دو قدری مساواتیں	10.1	•
ر می تعداد می از در معنون کا جماعت بندی	10.2	

ر جی مساوات اور گھومنا	10.3 دودر
ی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول	10.4 مستو
ء اور مقدار معلوم منحنیات کی منتقب کی معنوب کا منتقب اور مقدار معلوم منحنیات کی منتقب کی منتقب کی منتقب کی منتقب	10.5 احصا
1291	ا ضمیمه اول
1293	ب ضمیمه دوم

## ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$ 

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

## میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كي

2011 كتوبر \_2011

سوال 1 تا سوال 12 میں 
$$t$$
 پر مقدار معلوم منخیٰ کے مماس کی مساوات دریافت کریں گے۔ اس نقطہ پر  $t$  کبھی معلوم کریں۔

$$x = 2\cos t$$
,  $y = 2\sin t$ ,  $t = \frac{\pi}{4}$  :1 سوال

$$x = \sin 2\pi t$$
,  $y = \cos 2\pi t$ ,  $t = -\frac{1}{6}$  :2 سوال

$$x = 4\sin t$$
,  $y = 2\cos t$ ,  $t = \frac{\pi}{4}$  :3

$$x = \cos t$$
,  $y = \sqrt{3}\cos t$ ,  $t = \frac{2\pi}{3}$  :4 يوال

$$x = t$$
,  $y = \sqrt{t}$ ,  $t = \frac{1}{4}$  :5

$$x = \sec^2 t$$
,  $y = \tan t$ ,  $t = -\frac{\pi}{4}$  :6

$$x = \sec t$$
,  $y = \tan t$ ,  $t = \frac{\pi}{6}$  :7

$$x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$$
 :8 عوال

$$x = 2t^2 + 3$$
,  $y = t^4$ ,  $t = -1$  :9

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$$
 :10

$$x = t - \sin t$$
,  $y = 1 - \cos t$ ,  $t = \frac{\pi}{3}$  :11

$$x = \cos t$$
,  $y = 1 + \sin t$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$  :12

خفى مقدار معلوم مساوات

سوال 13 تا سوال 16 میں 
$$x$$
 اور  $y$  بطور قابل تفرق خفی مقدار معلوم تفاعل  $y=g(t)$  ،  $x=f(t)$  ویے گئے ہیں۔ دیے گئے ہیں۔ دیے گئے  $x=f(t)$  ,  $t=g(t)$  کے کہ کریں۔  $x=f(t)$  کے کہ کریں۔

$$x^2 - 2tx + 2t^2 = 4$$
,  $2y^3 - 3t^2 = 4$ ,  $t = 2$  :13

$$x=\sqrt{5-\sqrt{t}}, \quad y(t-1)=\ln y, \quad t=1 \quad :14$$
 عوال  $x+2x^{3/2}=t^2+t, \quad y\sqrt{t+1}+2t\sqrt{y}=4, \quad t=0 \quad :15$  عوال  $x\sin t+2x=t, \quad t\sin t-2t=y, \quad t=\pi \quad :16$ 

منحنيات كى لمبائياں  $x=\cos t, \quad y=t+\sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$  عوال 17 تا يوال 22 يس منحنيات كى لمبائياں عمارتى  $x=\cos t, \quad y=t+\sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$  عوال 18 يوال 18  $x=t^3, \quad y=\frac{3t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$  عوال 18 يوال 18  $x=\frac{t^2}{2}, \quad y=\frac{(2t+1)^{3/2}}{3}, \quad 0 \leq t \leq 4$  عوال 19 يوال 19  $x=\frac{(2t+3)^{3/2}}{3}, \quad y=t+\frac{t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq 3$  عوال 19 يوال 19  $x=8\cos t+8t\sin t, \quad y=8\sin t-8t\cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  عوال 19 يوال 19 يوال

استعال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ نتیجہ کا جیو میٹری کے کلیہ  $x=2t, y=t+1, 0 \leq t \leq 1$ یں۔  $S = \pi(r_1 + r_2)($ تر چھا قد)

h مبدا اور نقط (h,r) کے نیج قطع کو محور x کے گرد کھما کر مخروط سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کے قاعدے کا رداس r اور قد ہوں گے۔ مقدار معلوم مساوات  $1 \leq t \leq 1$  ہوئے x = ht , y = rt ,  $0 \leq t \leq 1$  ہوئے سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔ نتیجے کا موازنہ جیومیٹری کے کلیہ (ترچھا قد $S=\pi r$  کے ساتھ کریں۔

 $x = \cos t + t \sin t$ ,  $y = \sin t - t \cos t$ ,  $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 

(ب) یہ منحیٰ شکل 10.76 میں دکھائی گئی در پیچیدہ کا حصہ ہے۔ اس منحلی کو ترسیم کریں۔ منحلی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر د کھائیں۔

سوال 30: (۱) درج زیل منحیٰ کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

 $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $0 \le t \le \pi$ 

(پ) ایں منحنی کو ترسیم کری۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر د کھائیں۔

سوال 31: (۱) درج ذیل منحیٰ کے وسطانی م کز کے محدد تلاش کریں۔

 $x = \cos t$ ,  $y = t + \sin t$ ,  $0 \le t \le \pi$ 

(پ) اس منحیٰ کو ترسیم کری۔ منحیٰ کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر د کھائیں۔

سوال 32: سمحمل کی قیت وسطانی مراکز کے مسائل کو عموماً سیکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔درج ذیل منحنی کا وسطانی مرکز 2 اعشاریہ تک سیکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدو سے تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 33: لمبائی کا دارومدار مقدار معلوم مساوات پر نہیں ہوتا ہے۔

نصف دائرہ  $y=\sqrt{1-x^2}$  کی لمبائی درج ذیل مقدار معلوم مساوات استعال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$x = \cos 2t$$
,  $y = \sin 2t$ ,  $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$  .

$$x = \sin \pi t, y = \cos \pi t, -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$$
 ...

آب دیکھیں گے کہ دونوں جوابات یکساں ہیں۔

$$x=a\cos t,\,y=b\sin t,\,0\leq t\leq 2\pi$$
 کی لبائی ورج ذیل ہے  $x=a\cos t,\,y=b\sin t$ 

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} \, dt$$

جہاں e=7 ترخیم کی سک ہے۔ ماسوائے e=1 یہ e=1 یہ e=0 نے مکمل جہاتا ہے، غیر بنیادی ہے۔

ا. قاعدہ ذوزنقہ میں 
$$n=10$$
 کے کر  $a=1$  اور  $e=rac{1}{2}$  اور کا کیاں ترخیم کی لمبائی کا اندازہ لگائیں۔

ب. نفاعل مجے اس حقیقت کو استعال کرتے ہوئے جزو-ا میں  $f(t) = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$  بناعل کرتے ہوئے جزو-ا میں حاصل قیت میں خلل کا بالائی صد تلاش کریں۔

سوال 35: جیسا حصہ 10.4 میں ذکر کیا گیا، وقفہ [a,b] پر تفاعل y=f(x) کے ترسیم کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہو گی۔ x = x, y = f(x),  $a \le x \le b$ 

یہاں x از خود مقدار معلوم ہے۔

اس مقدار معلوم روپ کے لئے دکھائیں کہ مقدار معلوم لمبائی

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^{2}} \,\mathrm{d}t$$

درج ذیل کار تیمی صورت اختیار کرتی ہے جس کو حصہ 6.5 میں حاصل کیا گیا۔

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{2}} \, \mathrm{d}x$$

یوں کار تیسی کلیہ در حقیقت مقدار معلوم کلیہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔

elliptic integral<sup>34</sup>

(6.11 حوال 36: وکھائیں کہ منحنی کہ منحنی  $x=g(y),\,c\leq y\leq d$  کی لمبائی کا کار تیسی کلیہ

$$L = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^{2}} \,\mathrm{d}y$$

در حقیقت درج ذیل مقدار معلوم کلیه کی مخصوص صورت ہے۔

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^{2}} \,\mathrm{d}t$$

سوال 37: درج زیل تدویر کی ایک محراب کے پنیچ رقبہ علاش کریں۔

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

(اشاره:  $dx = \frac{dx}{d\theta} d\theta$  استعال کریں۔)

سوال 38: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کی لمبائی معلوم کریں۔

 $x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$ 

سوال 39: تدویر  $x= heta-\sin heta$ ,  $y=1-\cos heta$  کی ایک محراب کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 40: محور x اور تدویر  $\theta = 1 - \cos\theta$  کی ایک محراب کے نی خطہ کو محور x کے گرد گھما (  $dH = \pi y^2 \, dx = \pi y^2 \frac{dx}{d\theta} \, d\theta$  ) (اشارہ:  $dH = \pi y^2 \, dx = \pi y^2 \frac{dx}{d\theta}$ 

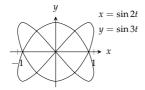
كمپيوٹركا استعمال

سوال 41 اور سوال 41 میں لسماجس اشکال <sup>35</sup> و کھائی گئی ہیں۔ دونوں سوالات میں رابع اول میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں منحنی کا مماس افتی ہو۔ مبدا پر دو مماس کی مساوات تلاش کریں۔

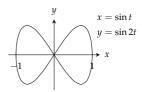
سوال 41: ترسيم شكل 10.85 مين دى گئي ہے۔

سوال 42: ترسيم شكل 10.86 مين دى گئي ہے۔

Lissajous figures<sup>35</sup>



شكل 10.86: ترسيم سوال 42



شكل 10.85: ترسيم سوال 41

ضمیمه ا ضمیمه اول

ضمیمه د وم