

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ نیکو نیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکو نیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکو نیاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لاقتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کا حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لاقتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1117	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناہی اور جذری پرکھ	

1121	ا ضمیمہ اول	
1123	ب ضمیمہ دوم	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

ارتکاز اور انفراج کی دریافت
سوال 1 تا سوال 36 میں کون سا تسلسل مرتکز اور کون سا تسلسل منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$

سوال 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}}$

سوال 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

سوال 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$

سوال 5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

سوال 6: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \sqrt{n}}$

سوال 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$

سوال 8: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3} + 2}$

سوال 9: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

سوال 10: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

سوال 11: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3} \quad \text{سوال 12:}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \quad \text{سوال 13:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}} \quad \text{سوال 14:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2 n} \quad \text{سوال 15:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2} \quad \text{سوال 16:}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \quad \text{سوال 17:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2 n} \quad \text{سوال 18:}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} \quad \text{سوال 19:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \quad \text{سوال 20:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n} \quad \text{سوال 21:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2 2^n} \quad \text{سوال 22:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1} \quad \text{سوال 23:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n} \quad \text{سوال 24:}$$

سوال 25: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

سوال 26: $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$

سوال 27: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

سوال 28: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$

سوال 29: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$

سوال 30: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$

سوال 31: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$

سوال 32: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$

سوال 33: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$

سوال 34: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

سوال 35: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$

سوال 36: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^2+3^2+\dots+n^2}$

نظریہ اور مثالیں
سوال 37: تقابل حد پرکھ کا جزو-ب اور جزو-ج ثابت کریں۔

سوال 38: اگر غیر منفی اجزاء کا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرکوز ہو تب کیا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 39: فرض کریں $n \geq N$ کے لئے $a_n > 0$ اور $b_n > 0$ ہیں جہاں N عدد صحیح ہے۔ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ہو اور $\sum a_n$ مرکوز ہو تب کیا $\sum b_n$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 40: ثابت کریں کہ اگر غیر مثبت اجزاء کا تسلسل $\sum a_n$ مرکوز ہو تب $\sum a_n^2$ بھی مرکوز ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 41: ہم نہیں جانتے ہیں کہ آیا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ مرکوز کہ منفرج ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے اس تسلسل کا رویہ درج ذیل اقدام سے دیکھیں۔

ا. جزوی مجموعات $s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2 \sin^2 n}$ کی ترتیب لیں۔ اس ترتیب کا حد کا رویہ $k \rightarrow \infty$ کیسا ہے۔ کیا آپ کا کمپیوٹر پروگرام اس ترتیب کے حد کا کلیہ تلاش کر سکتا ہے؟

ب. جزوی مجموعات کے ابتدائی 100 نقطے $(k, s - k)$ ترسیم کریں۔ کیا یہ مرکوز نظر آتے ہیں؟ آپ اس کے حد کی اندازاً کتنی قیمت لگائیں گے؟

ج. اب ابتدائی 200 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔ اس کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

د. ابتدائی 400 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔ $k = 355$ پر کیا ہوتا ہے؟ عدد $\frac{355}{113}$ کا حساب لگائیں۔ اس حساب کی رو سے $k = 355$ پر جزوی مجموعہ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔ آپ k کی کن قیمتوں پر اسی رویہ کی توقع کرتے ہیں۔

9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ

وہ پرکھ ارتکاز جو دوسرے تسلسل یا عمل کے ساتھ موازنہ پر منحصر ہو بیرونی پرکھ³⁰ کہلاتا ہے۔ ایسے پرکھ کار آمد ہوتے ہیں لیکن چند وجوہات کی بنا ہمیں ایسے پرکھ درکار ہیں جو کسی موازنہ پر منحصر نہ ہوں۔ حقیقت میں عین ممکن ہے کہ ہمیں ایسا کوئی تسلسل یا مکمل معلوم نہ ہو جس کے ساتھ موازنہ کرنا ممکن ہو۔ اس کے علاوہ کسی بھی تسلسل کی تمام معلومات اسی کے اجزاء میں پائی جانی چاہیے۔ اسی لئے ہم اپنی توجہ اندرونی پرکھ³¹ کی طرف کرتے ہیں۔ اندرونی پرکھ صرف دیے گئے تسلسل پر منحصر ہوتا ہے۔

extrinsic test³⁰
intrinsic test³¹

تناسبی پرکھ

تناسبی پرکھ ہمارا پہلا اندرونی پرکھ ہے جو تسلسل کے بڑھنے (یا گھٹنے) کی شرح کو نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ سے حاصل کرتا ہے۔ ہندی تسلسل $\sum ar^n$ کے لئے یہ شرح مستقل ($\frac{ar^{n+1}}{ar^n} = r$) ہے اور تسلسل صرف اور صرف اس صورت میں مرکب ہوگا جب اس کے نسبت کی مطلق قیمت 1 سے کم ہو۔ اگر نسبت مستقل نہ ہو تب بھی (اگلی مثال کی طرح) ایسا ہندی تسلسل معلوم کیا جاسکتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کیا جاسکے۔

مثال 9.35: $a_1 = 1$ اور تمام n کے لئے $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1}a_n$ لیں۔ کیا تسلسل $\sum a_n$ مرکب ہے؟

حل: ہم تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{5}a_2 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5}, \quad a_4 = \frac{3}{7}a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

چونکہ $\frac{n}{2n+1}$ کی قیمت $\frac{1}{2}$ سے کم ہے لہذا ہر جزو گزشتہ جزو کے $\frac{1}{2}$ سے بھی کم ہوگا۔ یوں اس تسلسل کے اجزاء درج ذیل ہندی تسلسل کے اجزاء سے کم یا برابر ہوں گے

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

اور یہ ہندی تسلسل 2 پر مرکب ہے۔ یوں ہمارا تسلسل بھی مرکب ہوگا اور اس کا مجموعہ 2 سے کم ہوگا۔ درج ذیل جدول میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تسلسل اپنے حد $\frac{\pi}{2}$ تک کتنا جلدی پہنچتا ہے۔

n	s_n
5	1.549 206 349
10	1.570 289 085
15	1.570 783 080
20	1.570 795 964
25	1.570 796 317
30	1.570 796 327
35	1.570 796 327

□

تناسبی پرکھ

فرض کریں $\sum a_n$ مثبت اجزاء کا تسلسل ہے اور درج ذیل فرض کریں۔

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

تب درج ذیل ہوگا۔

ا. $\rho < 1$ کی صورت میں تسلسل مرتکز ہو گا۔

ب. $\rho > 1$ یا لامتناہی کے برابر ہونے کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. $\rho = 1$ کی صورت میں یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ:

ا. $[\rho < 1]$ فرض کریں ρ اور 1 کے بیچ r ایک عدد ہے۔ یوں $\epsilon = r - \rho$ مثبت ہو گا۔ چونکہ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \rho$$

ہے لہذا بڑے n مثلاً $n \geq N$ کی صورت میں ρ سے $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ کا فرق ϵ یا اس سے کم ہو گا۔ بالخصوص درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r \quad \text{جب } n \geq N$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$a_{N+1} < r a_N,$$

$$a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N,$$

$$a_{N+3} < r a_{N+2} < r^3 a_N,$$

\vdots

$$a_{N+m} < r a_{N+m-1} < r^m a_N$$

ان عدم مساوات سے ظاہر ہے کہ N جزو کے بعد ہمارے تسلسل کے اجزاء صفر تک اس ہندی تسلسل سے زیادہ تیزی سے پہنچنے ہیں جس میں $r < 1$ ہو۔ بلکہ تسلسل $\sum c_n$ جہاں $n = 1, 2, \dots, N$ کے لئے $c_n = a_n$ ہوں اور

$$c_{N+1} = r a_N, c_{N+2} = r^2 a_N, \dots, c_{N+m} = r^m a_N, \dots$$

ہوں۔ ان $|r| < 1$ کی وجہ سے ہندی تسلسل $1 + r + r^2 + \dots$ مرتکز ہے لہذا $\sum c_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ چونکہ $a_n \leq c_n$ ہے لہذا $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

ب. $[1 < \rho \leq \infty]$ کسی اشاریہ M سے آگے

$$a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \dots \quad \text{اور} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

ہو گا۔ تسلسل کے اجزاء n لامتناہی کرنے سے صفر تک نہیں پہنچتے ہیں لہذا n ویں جزو پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرد ہو گا۔

ج. $[\rho = 1]$ درج ذیل دو تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

دکھاتے ہیں کہ $\rho =$ کی صورت میں کسی دوسرے پرکھ کی ضرورت پیش آئے گی۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{لئے} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1^2 = 1 \quad \text{لئے} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

باوجود اس کے کہ دونوں صورتوں میں $\rho = 1$ ہے، پہلا تسلسل منفرد اور دوسرا تسلسل مرکب ہے۔

□

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

