

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	
463	4.8 ترکیب نیوٹن	
475	5 مکمل	
475	5.1 غیر قطعی مکملات	
487	5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	
503	5.3 مکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	
514	5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	
532	5.5 ریمان مجموعے اور قطعی مکملات	
558	5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	
575	5.7 بنیادی مسئلہ	
595	5.8 قطعی مکمل میں بدل	
602	5.9 اعدادی مکمل	
602	5.10 قاعدہ ڈورنقہ	
615	ا ضمیمہ اول	
617	ب ضمیمہ دوم	

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

5.9 اعدادی مکمل

ہم نے دیکھا کہ $f(x)$ کے الٹ تفرق $F(x)$ کے کلیہ سے قطعی مکمل $\int_a^b f(x) dx$ کی قیمت $F(b) - F(a)$ حاصل کی جاسکتی ہے۔ بعض اوقات الٹ تفرق معلوم کرنا مشکل ہوتا ہے بلکہ بعض تفاعل، مثلاً $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم یہ نہیں کہہ رہے ہیں کہ $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کے کلیات اب تک کوئی حاصل کرنے میں کامیاب نہیں ہوا بلکہ ہم کہہ رہے ہیں کہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ان تفاعل کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

ہم جب بھی قطعی مکمل کی قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کرنے میں ناکام ہوں، ہم اعدادی تراکیب، مثلاً قاعدہ ذوزنقہ یا قاعدہ سمسن بروئے کار لاتے ہیں جن پر اس حصہ میں غور کیا جائے گا۔

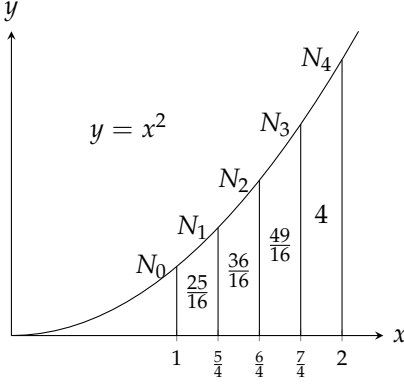
5.10 قاعدہ ذوزنقہ

جب کسی تفاعل جس کی قطعی مکمل کی قیمت درکار ہو کے مستعمل f کا الٹ تفرق ہم دریافت نہ کر سکیں تب ہم مکمل کے وقفہ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ پر f کو تخمیناً موزوں کثیر رکنی سے ظاہر کر کے ان کثیر رکنیوں کا مکمل لے کر تمام جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں جو مکمل کی تخمینی قیمت کے برابر ہو گا۔ کسی بھی خانہ بندی کے لئے جتنی زیادہ درجے کے کثیر رکنی منتخب کی جائیں حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ کسی بھی درجے کے کثیر رکنی کے لئے جتنی باریک خانہ بندی کی جائے حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا حتیٰ کہ ہم پور و پور خلل یا حدی خلل اتنا بڑھ جائے کہ مزید باریک خانہ بندی سے حاصل جواب کی درستی کم ہونا شروع ہو جائے۔

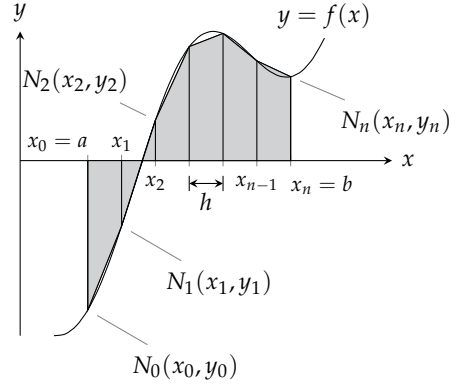
کم درجے کے کثیر رکنی سے بھی اچھے نتائج حاصل ہوتے ہیں بلکہ مستقیم قطعات (درجہ 1 کثیر رکنی) بھی بہترین تخمین دیتے ہیں پس ان کی تعداد کافی ہونی چاہیے۔ اس کی وجہ سمجھنے کے لئے فرض کریں ہم f کے وقفہ $[a, b]$ کو $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n قطعات میں تقسیم کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑتے ہیں (شکل 5.64)۔ لمبائی $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ کو لمبائی قدم³² کہتے ہیں جس کو یہاں Δx کی بجائے h سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ n قدموں³³ کی تعداد ہے۔ ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں سے تقسیمی نقطوں تک انتصابی لکیریں کھینچنے سے متعدد ذوزنقہ حاصل ہوتے ہیں جو منحنی اور x محور کے بیچ خطہ کی تخمین ہوں گے۔ ہم ان ذوزنقہ کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں جہاں x محور سے اوپر رقبہ کو مثبت جبکہ اس سے نیچے رقبہ کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\ &= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

step size³²
steps³³



شکل 5.65: ذوزنقہ قاعدہ تقاض $y = x^2$ کا رقبہ کچھ زیادہ دیتا ہے۔



شکل 5.64: ذوزنقہ قاعدہ برائے اعدادی تکمیل۔

یہاں $y_0 = f(a)$ ، $y_1 = f(x_1)$ ، \dots ، $y_{n-1} = f(x_{n-1})$ اور $y_n = f(x_n)$ ہیں۔

قاعدہ 5.1: ذوزنقہ قاعدہ
تکمیل $\int_a^b f(x) dx$ کو تخمیناً درج ذیل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے (جہاں n ذیلی وقفوں کی لمبائی قدم $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $y_k = f(x_k)$ ہے۔)

$$(5.34) \quad T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

مثال 5.51: تکمیل $\int_1^2 x^2 dx$ کو ذوزنقہ قاعدہ سے $n = 4$ لے کر حل کریں۔ اصل رقبہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

حل: ہم وقفہ $[1, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک وقفہ کی لمبائی $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ہوگی۔ ان ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں پر تقاض $y = x^2$ کی قیمت درج ذیل ہے۔

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

اب $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.34 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{8}(1 + 2(\frac{25}{16}) + 2(\frac{36}{16}) + 2(\frac{49}{16}) + 4) = \frac{75}{32} \\ &= 2.34375 \end{aligned}$$

نکمل کی اصل قیمت درج ذیل ہے۔

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.\bar{3}$$

یہاں تخمینہ قیمت اصل قیمت سے زیادہ ہے۔ درحقیقت تمام ذوزنقے مطابقتی خطہ میں کچھ زیادہ رقبہ گھیرتا ہے (شکل 5.65)۔ □

ذوزنقہ تخمینہ میں قابو خلل

مختلف تقابل کے ترسیم کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لمبائی قدم h کم کرنے سے چونکہ ذوزنقہ تقابل پر بہتر بیٹھتا ہے لہذا ذوزنقہ تخمینہ میں خلل

$$(5.35) \quad E_T = \int_a^b f(x) dx - T$$

کم ہوگی۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر f کا دہرا تفرق استمراری ہو تب یقینی طور پر ایسا ہی ہوگا۔

ذوزنقہ قاعدہ میں اندازہ خلل اگر f'' استمراری ہو اور $[a, b]$ پر $|f''|$ کی قیمت کی بالائی حد بندی M ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(5.36) \quad |E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M$$

اگرچہ نظریہ کہتا ہے کہ ہر صورت M کی کم ترین قیمت پائی جائے گے عموماً حقیقت میں یہ قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم عام طور پر M کی بہتر سے بہتر اندازاً قیمت معلوم کر کے اسی سے $|E_T M|$ حاصل کرتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا اچھا نہیں لگتا ہے لیکن یہ طریقہ چلتا ہے۔ کسی بھی M کے لئے $|E_T|$ کی قیمت کم کرنے کی خاطر ہم h کو چھوٹا کرتے ہیں۔

مثال 5.52: مکمل $\int_1^2 x^2 dx$ کی تخمینی قیمت مثال 5.51 میں حاصل کی گئی۔ اس تخمینی قیمت میں خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

حل: وقفہ $1 \leq x \leq 2$ پر $f(x) = x^2$ کا دہرا تفرق $f''(x) = 2$ ہے جس کی قیمت اٹل ہے لہذا ہم $M = 2$ لے سکتے ہیں۔ اب $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ سے مساوات 5.36 درج ذیل دیتی ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^2 (2) = \frac{1}{96}$$

ہم $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$ سے $T = \frac{75}{32}$ منفی کر کے یہی خلل $\left| -\frac{1}{96} \right| = \left| \frac{7}{3} - \frac{75}{32} \right|$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں ہم خلل کی بالکل درست مطلق قیمت حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ ایسا ہر بار نہیں ہو گا۔ □

مثال 5.53: ذوزنقہ قاعدہ میں $n = 10$ قدم لیتے ہوئے درج ذیل مکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$

حل: $a = 0$ ، $b = \pi$ اور $h = \frac{\pi-0}{10}$ سے

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 M = \frac{\pi^3}{1200} M$$

مٹا ہے جہاں $[0, \pi]$ پر $f(x) = x \sin x$ کے دہرا تفرق کی کوئی بھی بالائی حد بندی ہو سکتی ہے۔ چونکہ

$$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

کے برابر ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$|f''(x)| = |2 \cos x - x \sin x|$$

$$\leq 2|\cos x| + |x||\sin x|$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \text{ نمونی عدم مساوات}$$

$$\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi$$

$$|\cos x| \text{ اور } |\sin x| \text{ ایک سے بڑھ نہیں سکتے ہیں}$$

ہم $M = 2 + \pi$ لیتے ہیں۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133$$

بطور حفاظت اوپر کو پورا کیا گیا ہے

حاصل ہوتا ہے لہذا خلل کسی صورت بھی 0.133 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ زیادہ درست جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم M کی بہتر قیمت تلاش کرنے کی بجائے زیادہ قدم لیں گے، مثلاً $n = 100$ قدم لیتے ہوئے $h = \frac{1\pi}{100}$ ہو گا جس سے خلل کم ہو کر درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{100}\right)^2 M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{120000} < 0.00133 = 1.33 \times 10^{-3}$$

□

مثال 5.54: جیسا ہم باب میں دیکھیں گے $\ln 2$ کی قیمت درج ذیل مکمل سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

دو زلقہ قاعدہ سے مکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے خلل کو 10^{-4} سے کم رکھنے کی خاطر ہمیں کتنے قدم منتخب کرنے ہوں گے۔

حل: قدموں کی تعداد n یعنی ذیلی وقفوں کی تعداد منتخب کرنے کی خاطر ہم مساوات 5.36 بروئے کار لاتے ہیں۔ یوں

$$b - a = 2 - 1 = 1, \quad h = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{n}, \quad f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

سے

$$|E_T| \leq \frac{b - a}{12} h^2 \left| f''(x) \right|_{\text{بلندتر}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left| \frac{2}{x^3} \right|_{\text{بلندتر}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں وقفہ $[1, 2]$ پر $|f''|$ درکار ہے۔

یہ وہ شاندار موقع ہے جب ہم $|f''|$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ وقفہ $[1, 2]$ پر $y = \frac{2}{x^3}$ کی قیمت $y = 2$ سے گھٹ کر $y = \frac{1}{4}$ ہوتی ہے۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

ہو گا لہذا خلل کی مطلق قیمت 10^{-3} سے تب کم ہوگی جب $\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$ ہو جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$$

$$\frac{10^4}{6} < n^2$$

$$\frac{100}{\sqrt{6}} < |n|$$

$$\frac{100}{\sqrt{6}} < n$$

$$40.83 < n$$

دونوں اطراف کو $10^4 n^2$ سے ضرب کریں

جذر لیں

n مثبت ہے

حفاظتی طور پر اور کو پورا کیا گیا ہے۔

عدد 40.83 سے بڑا پہلا عدد صحیح 41 ہے۔ یوں $n = 41$ یا اس سے بھی زیادہ ذیلی وقفے لیتے ہوئے دو زلقہ ترکیب سے $\ln 2$ کی قیمت میں خلل کو یقینی طور پر 10^{-4} سے کم رکھا جاسکتا ہے۔

□

سمسن قاعدہ

قاعدہ سمسن میں $\int_a^b f(x) dx$ کے حصول میں f کو مستقیم خطوط کی بجائے دو رتبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم ترتیب کو سیدھی لکیروں کی بجائے قطع مکانی قوسین سے ظاہر کرتے ہیں۔

رتبی کثیر رکنی $y = Ax^2 + Bx + C$ کا $x = -h$ تا $x = h$ تکمیل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h \\ &= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch \\ &= \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)\end{aligned}$$

کثیر رکنی کی مساوات سے

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

لکھے جاسکتے ہیں جن سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}C &= y_1 \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1 \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1 \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1\end{aligned}$$

یوں حاصل تکمیل میں C اور $2Ah^2$ کی قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3} [(y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1] = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

یعنی

$$(5.37) \quad \int_{-h}^h f(Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ملتا ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کو برابر لمبائی کی جفت تعداد کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.37 کو یک بعد دیگرے ذیلی وقفوں کی جوڑیوں پر لاگو کر کے ان کا مجموعہ لینے سے قاعدہ سمسن حاصل ہو گا۔

قاعدہ سمسن $\int_a^b f(x) dx$ کا تخمینہ حاصل کرنے کے لئے درج ذیل استعمال کریں جو قاعدہ سمسن³⁴ کہلاتا ہے۔

$$(5.38) \quad S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

y کی قیمتیں نقطہ خانہ بندی

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = b$$

پر لیے جاتے ہیں جہاں n ہفت اور $h = \frac{b-a}{n}$ ہے۔

قاعدہ سمسن میں قابو خلل

قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار

$$(5.39) \quad E_S = \int_a^b f(x) dx - S$$

لمبائی قدم گھٹانے سے کم ہوتی ہے (جیسا قاعدہ ذوزنقہ بھی ہوتا ہے) البتہ قاعدہ سمسن میں خلل قابو کرنے کے لئے درکار عدم مساوات میں f کے چار بار تفرق کا استمراری ہونا ضروری ہے۔ اس بار بھی قابو خلل کا کلیہ اعلیٰ احصاء دیتی ہے:

قاعدہ سمسن میں اندازاً خلل اگر $[a, b]$ میں $f^{(4)}$ استمراری ہو اور $|f^{(4)}|$ کی بالائی حد بندی کی کوئی ایک قیمت M ہو تب مطلق خلل درج ذیل ہوگی۔

$$(5.40) \quad |E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M$$

قاعدہ ذوزنقہ کی طرح ہم یہاں بھی عموماً M کی کم سے کم قیمت دریافت نہیں کر پائیں گے۔ ہم M کی کوئی موزوں قیمت تلاش کر کے اسی کو استعمال کرتے ہوئے $|E_S|$ کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 5.55: درج ذیل تکمل کو قاعدہ سمسن سے حل کرتے ہوئے $n = 4$ لیں۔

$$\int_0^1 5x^4 dx$$

اس تخمین میں مساوات 5.40 کے تحت خلل انداز آکتنی ہو گی؟

حل: ہم وقفہ مکمل کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کر کے تقسیمی نقطوں پر مکمل $f(x) = 5x^4$ کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	0	$\frac{5}{256}$	$\frac{80}{256}$	$\frac{405}{256}$	5

ہم $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.38 استعمال کرتے ہیں۔

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{1}{12} \left[0 + 4 \left(\frac{5}{256} \right) + 2 \left(\frac{80}{256} \right) + 4 \left(\frac{405}{256} \right) + 5 \right] \approx 1.00260$$

خلل جاننے سے پہلے ہمیں وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x) = 5x^4$ کے چار بار تفرق $f^{(4)}$ کی بالائی حد بندی کی ایک قیمت M چاہیے۔ چونکہ $f^{(4)}(x) = 120$ مستقل ہے لہذا ہم بلا خطر $M = 120$ لے سکتے ہیں۔ یوں $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.40 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$|E_S| \leq \frac{b-1}{180} h^4 M = \frac{1}{180} \left(\frac{1}{4} \right)^4 (120) = \frac{1}{384} < 0.00261$$

□

کونسا قاعدہ بہتر نتائج دیتا ہے؟

قابو خلل کے کلیات

$$|E_T| \leq \frac{b-1}{12} h^2 M, \quad |E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M$$

سے یہ جانا جاسکتا ہے کہ کونسا کلیہ بہتر نتیجہ دیگا جہاں بائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f''|$ کی بالائی حد بندی ہے جبکہ دائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f^{(4)}|$ کی بالائی حد بندی ہے۔ اس کے علاوہ قاعدہ سمسن میں جزو $\frac{b-a}{180}$ قاعدہ ذوزلقہ میں جزو $\frac{b-a}{12}$ سے 15 گنا کم ہے۔ مزید قاعدہ سمسن میں h^4 جبکہ قاعدہ ذوزلقہ میں h^2 استعمال ہوتا ہے۔ یوں اگر $h = \frac{1}{10}$ ہو تب $h^2 = \frac{1}{100}$

جبکہ $h^4 = \frac{1}{10000}$ ہو گا۔ اس طرح اگر دونوں M کی قیمت 1 اور $b - a = 1$ ہوں تب $h = \frac{1}{10}$ کی صورت میں درج ذیل ہوں گے۔

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{10} \right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{1200}$$

$$|E_S| \leq \frac{1}{180} \left(\frac{1}{10} \right)^4 \cdot 1 = \frac{1}{180000} = \frac{1}{1500} \cdot \frac{1}{1200}$$

ایک جتنی حسابی کوشش سے اس مثال میں قاعدہ سمسن بہت بہتر نتیجہ دیتا ہے۔

h^4 بالمتقابل h^2 وہ اجزاء ہیں جن پر نظر رکھنی چاہیے۔ اگر h کی قیمت 1 سے کم ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت کم ہو گی۔ اگر h کی قیمت 1 ہو تب $h^4 = h^2$ ہو گا۔ اگر h کی قیمت 1 سے زیادہ ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت زیادہ ہو گی۔ ان آخری دو صورتوں میں قابو غلط کلیات ہمیں زیادہ مدد فراہم نہیں کر سکتے ہیں اور ہمیں $y = f(x)$ کی منحنی کو دیکھ کر فیصلہ کرنا ہو گا کہ قاعدہ سمسن اور قاعدہ ڈوزلفہ میں سے کونسا قاعدہ بہتر نتیجہ (اگر دیتا ہو) دیگا۔

اعدادی مواد کے ساتھ کام

تجربہ گاہ میں پیمائش سے حاصل قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے قاعدہ سمسن کے ذریعہ ایسے تفاعل کے عمل کی قیمت کو اگلے مثال میں حاصل کیا جائے گا جس کا کلیہ ہم نہیں جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ ڈوزلفہ کو بھی اسی طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 5.56: ایک شہر میں گندے پانی کا تالاب پایا جاتا ہے جس کو بھرنا مقصود ہے۔ یہ تالاب 2.5 m گہرا ہے (شکل 5.66)۔ تالاب سے پانی کی نکاسی کرنے کے بعد اس کو مٹی سے بھرا جائے گا۔ کتنی مٹی درکار ہو گی؟

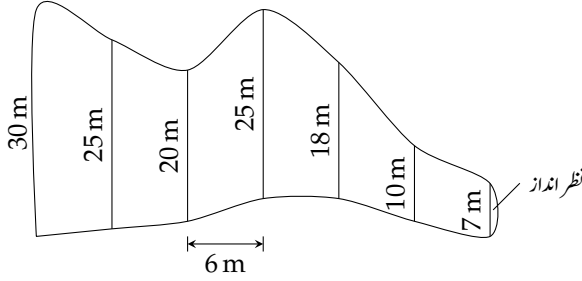
حل: تالاب کا حجم جاننے کے لئے ہم اس کا سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیں گے۔ سطحی رقبہ کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہیں جہاں $h = 6$ m ہے جبکہ y کی قیمتوں کو تالاب پر ناپا گیا ہے (شکل 5.66)۔

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$= \frac{6}{3} (30 + 100 + 40 + 100 + 36 + 40 + 7) = 706$$

□

سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیتے ہوئے تقریباً 1765 m^3 حجم حاصل ہوتا ہے۔



شکل 5.66: گندے پانی کا تالاب۔ افقی فاصلے 6 m ہیں (مثال 5.56)۔

پور و پور خلل

اگرچہ لمبائی قدم h کم کرنے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار کم ہوگی، حقیقت میں بعض اوقات اس کے برعکس بھی ہوتا ہے۔ جب h کی قیمت بہت کم ہو، مثلاً $h = 10^{-5}$ ، تب S اور T کی حساب میں پور و پور خلل اتنا بڑھ سکتا ہے کہ نتائج میں بہتری کی بجائے خرابی پیدا ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت میں آپ کلیات خلل، جو پور و پور خلل کو جاننے سے قاصر ہیں، پر بھروسہ نہیں کر سکتے ہیں۔ لمبائی قدم h کو کسی خاص قیمت سے کم کرنے سے حقیقتاً نتائج خراب ہو سکتے ہیں۔ اس کتاب میں ایسی صورت حال پیدا نہیں ہوگی۔ اگر آپ کو ایسی صورت حال کا سامنا ہو، بہتر ہوگا کہ آپ اعدادی تراکیب پر لکھی گئی کسی کتاب کا سہارا لیں۔

سوالات

تکمیل کی قیمت کا اندازہ
سوال 1 تا سوال 10 میں دو جزو پائے جاتے ہیں۔ ایک جزو قاعدہ ذوزنقہ اور دوسرا جزو قاعدہ سمسن کے لئے ہے۔

1. قاعدہ ذوزنقہ

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمیل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.36 سے خلل $|E_T|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. تکمیل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.35 سے $|E_T|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_T|$ کو اصل تکمیل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

2. قاعدہ سمسن

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر مکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.40 سے خلل $|E_S|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. مکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.39 سے $|E_S|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_S|$ کو اصل مکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 1: $\int_1^2 x \, dx$

سوال 2: $\int_1^3 (2x - 1) \, dx$

سوال 3: $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) \, dx$

سوال 4: $\int_{-2}^0 (x^2 - 1) \, dx$

سوال 5: $\int_0^2 (t^3 + t) \, dt$

سوال 6: $\int_{-1}^1 (t^3 + 1) \, dt$

سوال 7: $\int_1^2 \frac{1}{s^2} \, ds$

سوال 8: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2} \, ds$

سوال 9: $\int_0^\pi \sin t \, dt$

سوال 10: $\int_0^1 \sin \pi t \, dt$

سوال 11 تا سوال 14 میں (i) قاعدہ ذوزنقہ، (ب) قاعدہ سمسن استعمال کرتے ہوئے دی گئی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے آٹھ قدم $n = 8$ کے لئے مکمل حل کریں۔ اپنے جواب کو 5 اعشاریہ درستی تک پور و پور کریں۔ (ج) اس کے بعد مکمل کی اصل قیمت حاصل کریں اور خلل $|E_T|$ کو مساوات 5.35 اور خلل $|E_S|$ کو مساوات 5.39 سے حاصل کریں۔

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \quad \text{سوال 11:}$$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$x\sqrt{1-x^2}$	0.0	0.12402	0.24206	0.34763	0.43301	0.48789	0.49608	0.42361	0

$$\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}} d\theta \quad \text{سوال 12:}$$

θ	0	0.375	0.75	1.125	1.5	1.875	2.25	2.625	3.0
$\frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}$	0.0	0.09334	0.18429	0.27075	0.35112	0.42443	0.49026	0.58466	0.6

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3 \cos t}{(2+\sin t)^2} dt \quad \text{سوال 13:}$$

t	-1.5708	-1.1781	-0.7854	-0.3927	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708
$\frac{3 \cos t}{(2+\sin t)^2}$	0.0	0.99138	1.26906	1.05961	0.75	0.48821	0.28946	0.13429	0

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y) \sqrt{\cot y} dy \quad \text{سوال 14:}$$

y	0.78540	0.88357	0.98175	1.07992	1.17810	1.27627	1.37445	1.47262	1.57080
$(\csc^2 y) \sqrt{\cot y}$	2.0	1.51606	1.18237	0.93998	0.75402	0.60145	0.46364	0.31688	0

ذیلی وقفوں کی کم سے کم تعداد
سوال 15 تا سوال 26 میں خلیں کی مقدار 10^{-4} سے کم مطلوب ہے۔ (i) قاعدہ ذوزنقہ اور (ب) قاعدہ سمسن استعمال کریں۔ مساوات
5.36 اور مساوات 5.40 کی مدد سے ذیلی وقفوں کی درکار تعداد تلاش کریں۔ (سوال 15 تا سوال 22 درحقیقت سوال 1 تا سوال 8 ہیں۔)

$$\int_1^2 x dx \quad \text{سوال 15:}$$

$$\int_1^3 (2x-1) dx \quad \text{سوال 16:}$$

$$\int_{-1}^1 (x^2+1) dx \quad \text{سوال 17:}$$

$$\int_{-2}^0 (x^2-1) dx \quad \text{سوال 18:}$$

$$\int_0^2 (t^3+t) dt \quad \text{سوال 19:}$$

سوال 20: $\int_{-1}^1 (t^3 + 1) dt$

سوال 21: $\int_1^2 \frac{1}{s^2} ds$

سوال 22: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2} ds$

سوال 23: $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$

سوال 24: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

سوال 25: $\int_0^2 \sin(x+1) dx$

سوال 26: $\int_{-1}^1 \cos(x+\pi) dx$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

