احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ix

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 15
1.3 تفاعل 32
1.4 ترسیم کی منتقلی 54
1.5 تکونیاتی تفاعل 74

2 حدود اور استمرار 95
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 95
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 113
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف 126
2.4 تصور حد کی توسیع 146
2.5 استمرار 165
2.6 مماسی خط 184

3 تفرق 199
3.1 تفاعل کا تفرق 199
3.2 قواعد تفرق 221
3.3 تبدیلی کی شرح 240
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 257
3.5 زنجیری قاعدہ 277
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 294
3.7 دیگر شرح تبدیلی 310

4 تفرق کا استعمال 325
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں . . . 325
4.2 مسئلہ اوسط قیمت . . . 340
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ . . . 356
4.3.1 پرکھ . . . 356
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم . . . 368
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء . . . 391
4.6 بہترین بنانا . . . 418
4.7 خط بندی اور تفرقات . . . 442
4.8 ترکیب نیوٹن . . . 463

5 تکمل 475
5.1 غیر قطعی تکملات . . . 475
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی . . . 487
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق . . . 503
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ . . . 514
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات . . . 532
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ . . . 559
5.7 بنیادی مسئلہ . . . 576
5.8 قطعی تکمل میں بدل . . . 597
5.9 اعدادی تکمل . . . 603
5.10 قاعدہ ذوزنقہ . . . 603

6 تکمل کا استعمال 623
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ . . . 623
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد . . . 627
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش . . . 638
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا . . . 646
6.4 نلکی چھلے . . . 661
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں . . . 674
6.6 سطح طواف کا رقبہ . . . 685
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت . . . 697
6.7.1 وسطانی مرکز . . . 709
6.8 کام . . . 714
6.9 فشار سیال اور قوت سیال . . . 729
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال . . . 738

7 ماورائی تفاعل 753
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق . . . 754

7.2 قدرتی لوگارتھم 772
7.3 قوت نمائی تفاعل 790
7.4 a^x اور $\log_a x$ 805
7.5 افزائش اور تنزل 816
7.6 قاعدہ لھوپیٹال 830
7.7 اضافی شرح نمو 846
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش 851
7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل 857
7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل 873

ا ضمیمہ اول 881

ب ضمیمہ دوم 883

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل

الٹ تکونیاتی تفاعل مختلف اقسام کے تفاعل، جو انجینئری، طبیعیات اور ریاضیات میں رونما ہوتے ہیں، کے الٹ تفرق مہیا کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں اور متعلقہ تکملات پر غور کرتے ہیں۔

مثال 7.60:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(ا)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\sqrt{x+1} &= \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x+1}) \qquad \text{(ب)}\\ &= \frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(-3x) &= \frac{1}{\lvert -3x\rvert\sqrt{(-3x)^2-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-3x) \qquad \text{(ج)}\\ &= \frac{-3}{\lvert 3x\rvert\sqrt{9x^2-1}} = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{9x^2-1}}\end{aligned}$$

□

مثال 7.61:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{\tan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} e^u\,\mathrm{d}u \qquad u=\tan^{-1}u\\ &= e^u\Big]_0^{\pi/4} = e^{\pi/4}-1\end{aligned}$$

□

الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}(\sin^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{7.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cos^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{7.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\tan^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{7.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cot^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{7.43}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sec^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{7.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\csc^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{7.45}$$

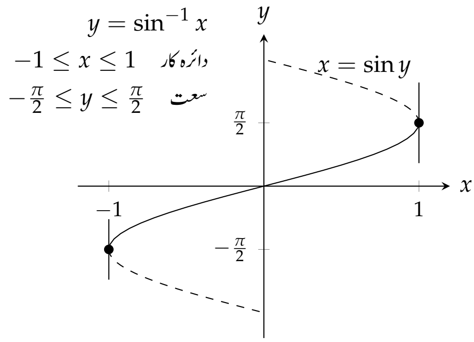
آئیں مساوات 7.40 اور مساوات 7.44 کو حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.42 کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 7.41، مساوات 7.43 اور مساوات 7.45 کو موزوں تماثل تفرق کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

تفاعل $y = \sin^{-1} u$ کا تفرق

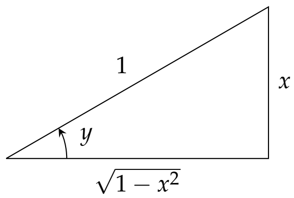
ہم جانتے ہیں کہ وقفہ $-\frac{y}{2} < y < \frac{y}{2}$ میں تفاعل $x = \sin y$ قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق، یعنی کوسائن، اس وقفہ پر مثبت ہے۔ یوں مسئلہ 7.1 ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ پورے وقفہ $-1 < x < 1$ پر الٹ تفاعل $y = \sin^{-1} x$ قابل تفرق ہو گا۔ چونکہ نقطہ $x = 1$ اور $x = -1$ پر اس کے ترسیم کے مماس انتصابی ہیں (شکل 7.60)لہٰذا ان نقطوں پر ہم الٹ تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کو قابل تفرق تصور نہیں کر سکتے ہیں۔

ہم $y = \sin^{-1} x$ کا تفرق درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہی:

$\sin y = x$	$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin y) = 1$	دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق
$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$	زنجیری قاعدہ
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y}$	وقفہ پر $\cos y > 0$ ہے لہٰذا تقسیم کیا جا سکتا ہے
$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	شکل 7.61



شکل 7.60: تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم کے مماس نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر انتصابی ہیں۔



شکل 7.61: اس حوالہ مثلث میں $\sin y = \frac{x}{1} = x$ اور $\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ ہو گا۔

یوں x کے لحاظ سے $y = \sin^{-1} x$ کو تفرق درج ذیل ہو گا۔

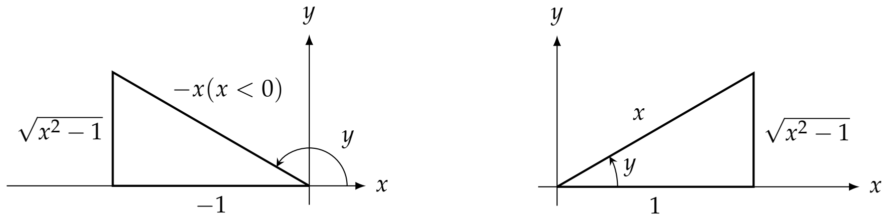
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

اگر x کے لحاظ سے u قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = \sin^{-1} u$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| < 1$$



شکل 7.62: دونوں ربع میں $\sin y = x$ ہے۔ ربع اول میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1} = \sqrt{x^2-1}$ ہے جبکہ ربع دوم میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(-1)} = -\sqrt{x^2-1}$ ہے۔

تفاعل $y = \sec^{-1} u$ کا تفرق

ہم $|x| > 1$,$y = \sec^{-1} x$ کا تفرق بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\sec y &= x && y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow \sec y = x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec y) &= 1 && \text{کے لحاظ سے دونوں اطراف کا تفرق } x \\
\sec y \tan y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 && \text{زنجیری قاعدہ} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\sec y \tan y} \\
&= \mp \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} && \text{شکل } 7.62
\end{aligned}
$$

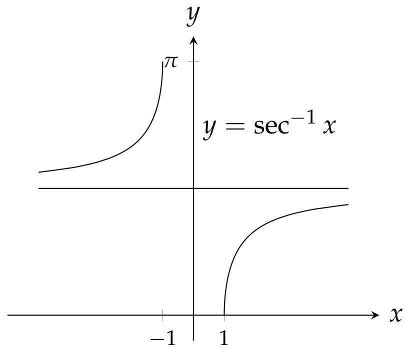
درج بالا میں تیسرے قدم پر چونکہ $|x| > 1$ ہے لہٰذا y وقفہ $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ میں پایا جائے گا جس کی بنا $\sec y \tan y \neq 0$ ہو گا لہٰذا دونوں اطراف کو غیر صفر $\sec y \tan y$ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

علامت کے بارے میں ہم کیا کر سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں (شکل 7.63) کہ $|x| > 1$ کے لئے $y = \sec^{-1} x$ کی ترسیم کی ڈھلوان مثبت رہتی ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \\ -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x < -1 \end{cases} \tag{7.46}
$$

مطلق قیمت استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 7.46 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1
$$



شکل 7.63: قوس $y = \sec^{-1} x$ کی ڈھلوان $x < -1$ اور $x > 1$ دونوں کے لئے مثبت ہے۔

اگر $|u| > 1$ ہو اور x کا u قابل تفرق تفاعل ہو تب زنجیری قاعدہ کے استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| > 1$$

کلیات تکمل

ہم مساوات 7.40، مساوات 7.42 اور مساوات 7.44 جہاں $a = 1$ ہے، سے تکمل کے درج ذیل تین اہم کلیات حاصل ہوتے ہیں جہاں $a \neq 0$ مستقل ہے۔

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad \text{ہے } u^2 < a^2 \text{ کے لئے درست} \tag{7.47}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad \text{ہے } u \text{ تمام کے لئے درست} \tag{7.48}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\tfrac{u}{a}\right| + C \qquad \text{ہے } u^2 > a^2 \text{ کے لئے درست} \tag{7.49}$$

تکمل کے درج بالا کلیات کے دائیں ہاتھ کا تفرق لے کر ان کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔

مثال 7.62:

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x)\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \sin^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) - \sin^{-1}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \quad (\text{ا})$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)\Big]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x)\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \quad (\text{ج})$$

□

مثال 7.63:

(ا) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \sin^{-1}(\tfrac{x}{3}) + C$$ مساوات 7.47 میں $u = x$ اور $a = 3$

(ب) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad a = \sqrt{3},\ u = 2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C$$ مساوات 7.47

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}}) + C$$

□

مثال 7.64: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}$ کو حل کریں۔

حل: یہاں ریاضی فقرہ $\sqrt{4x-x^2}$ مساوات 7.47 تا مساوات 7.49 میں سے کسی بھی تکمل میں پائے جانے والے ریاضی فقرے کی طرح نہیں ہے لہٰذا ہم اس کو مربع کے روپ میں لکھتے ہیں:

$$4x - x^2 = -(x^2-4x) = -(x^2-4x+4)+4 = 3-(x-2)^2$$

اس کے بعد $a = 2$ ، $u = x-2$ اور $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^- u^2}} \qquad a = 2,\ u = x-2$$

$$= \sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C$$ مساوات 7.47

$$= \sin^{-1}(\tfrac{x-2}{2}) + C$$

□

مثال 7.65:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{10+x^2} &= \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}(\tfrac{x}{\sqrt{10}})+C && a=\sqrt{10},\, u=x,\, \text{7.48 مساوات} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{7+3x^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} && a=\sqrt{7},\, u=\sqrt{3}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}(\tfrac{u}{a})+C && \text{7.48 مساوات} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}})+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{21}}\tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}})+C
\end{aligned}
$$

□

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم