

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1261 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1303 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1317 . . . . .	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1319 . . . . .	10.8.1	دائرے
1333 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں مکمل

1347	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1347 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیت

1363 ا ضمیمہ اول

1365 ب ضمیمہ دوم

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 11

# سمتیاں اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

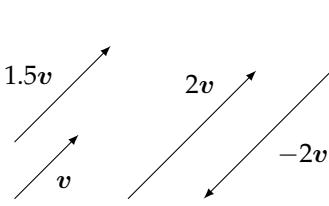
اس حصہ میں سمتیاں اور سہ بعدی محدود نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محدود مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محدود خلا موزوں ہے۔ ہم محدود مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محدود خلا پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور  $xy$  مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

### 11.1 مستوی میں سمتیاں

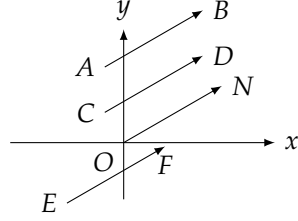
بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاؤ، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہوگی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہوگا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاؤ بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہوگا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہوگا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر کے اس نشان کو سمتیہ کہتے ہیں۔



شکل 11.2: سمتیہ کے غیر سمتی مضرب۔



شکل 11.1: یکساں لمبائی اور یکساں رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: ایک مستوی میں کسی مخصوص رخ خط کو سمتیہ<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً  $v$ ، سے ظاہر کیا جائے گا<sup>2</sup>۔ نقطہ  $A$  سے نقطہ  $B$  تک تیر کو ہم  $\vec{AB}$  لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل 11.1 میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{ON} = \vec{EF}$$

□

### غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل 11.2)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی 50% بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

<sup>1</sup>vector

<sup>2</sup>قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان  $\vec{v}$  یا نصف تیر کا نشان  $\vec{v}$  ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر  $c$  غیر صفر حقیقی عدد اور  $v$  ایک سمتیہ ہو تب ثابت  $c$  کی صورت میں  $v$  اور  $cv$  کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی  $c$  کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی<sup>3</sup> کہلاتے ہیں جبکہ  $cv$  کے مضرب کو  $v$  کا غیر سمتی<sup>4</sup> مضرب کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ  $0$  حاصل ہوگا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہوگا جس کی لمبائی صفر ہوگی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ  $0$  کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر  $v_1$  کا نمائندہ، مثلاً  $A$  سے  $B$  تک، ترسیم کر کے  $v_1$  کے اختتامی نقطہ (سر)  $B$  پر  $v_2$  کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل 11.3 میں  $\vec{BC}$  میں  $v_2 = \vec{BC}$  ہے۔ مجموعہ  $v_1 + v_2$  اب  $v_1$  کے دم  $A$  سے  $v_2$  کے سر  $C$  تک سمتیہ ہوگا۔ یوں اگر

$$v_1 = \vec{AB}, \quad v_2 = \vec{BC}$$

ہوں تب

$$v_1 + v_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ہوگا۔ چونکہ اس عمل میں  $v_1 + v_2$  متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع<sup>5</sup> کہتے ہیں (شکل 11.4)۔

اجزاء

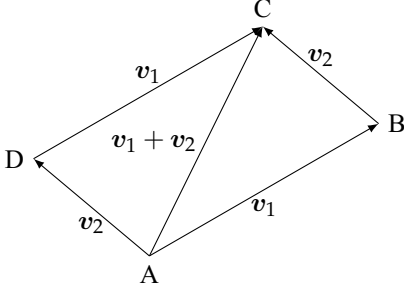
دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ  $v$  کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

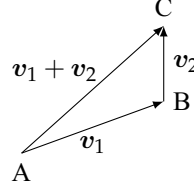
$$v = v_1 + v_2$$

لکھنا ممکن ہو، سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  سمتیہ  $v$  کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ  $v$  کو اس کے اجزاء  $v_1$  اور  $v_2$  میں تحلیل کیا گیا ہے۔

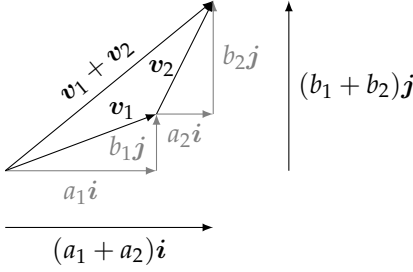
scalar<sup>3</sup>  
scalar multiple<sup>4</sup>  
parallelogram law<sup>5</sup>



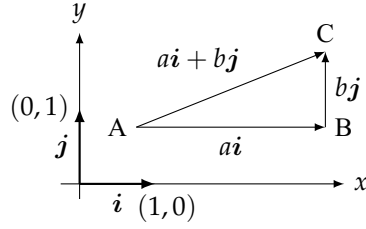
شکل 11.4: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع یکساں لمبائی ہونے کی بنا پر ABCD متوازی الاضلاع ہو گا۔



شکل 11.3: سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  کا مجموعہ۔



شکل 11.6: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔



شکل 11.5: اساس سمتیات  $i$  اور  $j$  کو استعمال کر کے کسی بھی سمتیہ  $\vec{AC}$  کو لکھا جاسکتا ہے۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں اساسی<sup>6</sup> سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت  $x$  محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ  $(0,0)$  سے نقطہ  $(1,0)$  تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت  $i$  ہے۔ مثبت  $y$  محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ  $(0,0)$  سے نقطہ  $(0,1)$  تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت  $j$  ہے۔ اب غیر سمتی  $a$  کے لئے محور  $x$  کے متوازی سمتیہ  $ai$  کی لمبائی  $|a|$  ہوگی جبکہ اس کا رخ  $a > 0$  کے لئے دایاں اور  $a < 0$  کے لئے بائیں ہوگا۔ اس طرح غیر سمتی  $b$  کے لئے محور  $y$  کے متوازی سمتیہ  $bj$  کی لمبائی  $|b|$  ہوگی جبکہ اس کا رخ  $b > 0$  کے لئے اوپر اور  $b < 0$  کے لئے نیچے ہوگا۔ شکل 11.5 میں سمتیہ  $\vec{AC} = v$  کو اجزاء  $i$  اور  $j$  میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$v = ai + bj$$

تعریف: اگر  $v = ai + bj$  ہو تب  $i$  اور  $j$  کے رخ، سمتیہ  $v$  کے اجزاء سمتیات  $ai$  اور  $bj$  ہوں گے۔ اعداد  $a$  اور  $b$ ، اساسی سمتیات  $i$  اور  $j$  کے رخ، سمتیہ  $v$  کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

□

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$(11.1) \quad ai + bj = a'i + b'j \Leftrightarrow a = a', \quad b = b'$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب  $i$  اور  $j$  کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 11.6)۔

اگر  $v_1 = a_1i + b_1j$  اور  $v_2 = a_2i + b_2j$  ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

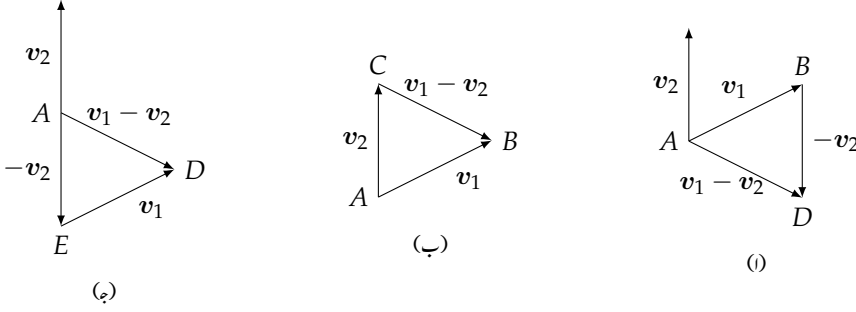
$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j$$

مثال 11.2:

$$(2i - 4j) + (5i + 3j) = (2 + 5)i + (-4 + 3)j = 7i - j$$

□





شکل 11.7: سمتیہ  $v_1 - v_2$  کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔

### تفریق

ایک سمتیہ  $v$  کا منفی سمتیہ  $-v = (-1)v$  ہو گا۔ اس کی لمبائی  $v$  کی لمبائی ہو گی البتہ اس کا رخ  $v$  کا مخالف ہو گا۔ سمتیہ  $v_2$  کو سمتیہ  $v_1$  سے منفی کرنے کی خاطر ہم  $-v_2$  اور  $v_1$  کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم  $v_1$  کے سر سے  $-v_2$  کھینچ کر  $v_1$  کے دم سے  $-v_2$  کے سر تک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل 11.7-ا میں دکھایا گیا ہے جہاں

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = v_1 + (-v_2) = v_1 - v_2$$

اس کے علاوہ  $v_1$  اور  $v_2$  کے دم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر  $v_1$  اور  $v_2$  ترسیم کر کے  $v_2$  کے سر سے  $v_1$  کے سر تک سمتیہ  $v_1 - v_2$  ہو گا۔ یہ عمل شکل 11.7-ب میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -v_2 + v_1 = v_1 - v_2$$

مزید،  $-v_2$  کے سر سے  $v_1$  ترسیم کر کے  $v_1 - v_2$  حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 11.7-ج)۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

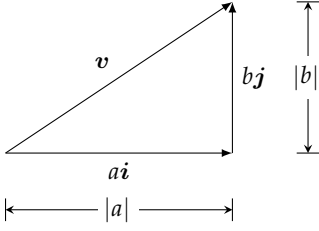
$$(11.2) \quad v_1 - v_2 = (a_1 - a_2)i + (b_1 - b_2)j$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

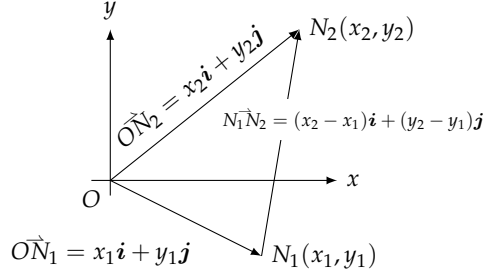
مثال 11.3:

$$(6i + 2j) - (3i - 5j) = (6 - 3)i + (2 - (-5))j = 3i + 7j$$

□



شکل 11.9: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جاسکتی ہے۔



شکل 11.8

ہم نقطہ  $N_1(x_1, y_1)$  سے نقطہ  $N_2(x_2, y_2)$  تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے  $\vec{ON}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$  کے اجزاء کو  $\vec{ON}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$  کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔

$N_1(x_1, y_1)$  سے  $N_2(x_2, y_2)$  تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(11.3) \quad \vec{N_1N_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

مثال 11.4: نقطہ  $N_1(3, 4)$  سے نقطہ  $N_2(5, 1)$  تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\vec{N_1N_2} = (5 - 3)\mathbf{i} + (1 - 4)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

□

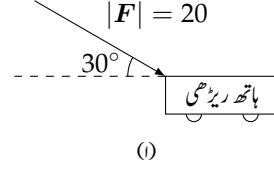
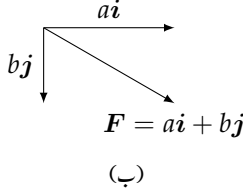
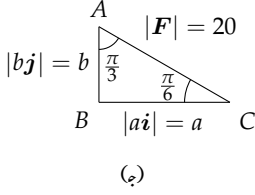
مقدار

سمتیہ  $v = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  کی لمبائی<sup>7</sup> یا مقدار<sup>8</sup>  $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$  ہے۔ سمتیہ  $v$  اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے (شکل 11.9)۔ سمتیہ کی لمبائی  $|v|$  میں دو انتصابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$(11.4) \quad |v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$v = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

length<sup>7</sup>  
magnitude<sup>8</sup>



شکل 11.10: ہاتھ ریڑھی (مثال 11.5)

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ  $30^\circ$  زاویہ پر 20 N کی قوت  $F$  سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں (شکل 11.10-ii)۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتحابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتحابی جزو معلوم کریں۔

حل: ہم قوت  $F = ai + bj$  اور اس کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں (شکل 11.10-ii)۔ ب اور شکل 11.10-ii)۔ ج)۔ اس مثلث سے  $a = 10\sqrt{3}$  اور  $b = 10$  حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو  $10\sqrt{3}i$  اور انتحابی جزو  $10j$  ہے۔ یوں  $F = 10\sqrt{3}i - 10j$  ہو گا۔ انتحابی جزو کا رخ نیچے ہے لہذا یہ منفی ہے۔ □

### غیر سمتی ضرب

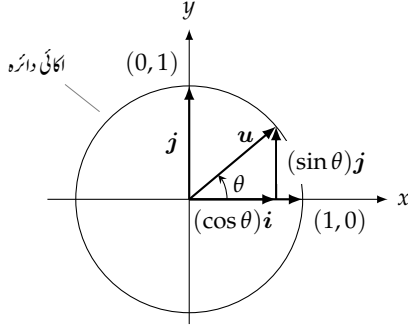
غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر  $c$  ایک غیر سمتی اور  $v = ai + bj$  ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$cv = c(ai + bj) = (ca)i + (cb)j \quad (11.5)$$

سمتیہ  $cv$  کی لمبائی سمتیہ  $v$  کی لمبائی ضرب  $|c|$  ہو گا:

$$\begin{aligned} |cv| &= |(ca)i + (cb)j| \\ &= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{c^2} \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= |c||v| \end{aligned}$$

یوں اگر  $c$  غیر سمتی ہو اور  $v$  ایک سمتیہ ہو تب  $|cv| = |c||v|$  ہو گا۔



شکل 11.11: مستوی میں ہر اکائی سمتیہ کو  $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$  روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 11.6: اگر  $c = -2$  اور  $v = -3i + 4j$  ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$|v| = |-3i + 4j| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned} |-2v| &= |(-2)(-3i + 4j)| = |6i - 8j| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||v| \end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0i + 0j$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ  $\mathbf{0}$  کو ظاہر کرنے کے لئے  $\mathbf{0}$  کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔ صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

$$|ai + bj| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

## اکائی سمتیات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو اکائی سمتیہ<sup>9</sup> کہلائے گا۔ سمتیات  $i$  اور  $j$  اکائی سمتیات ہیں۔

$$|i| = |1i + 0j| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad |j| = |0i + 1j| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

سمتیہ  $u$  جو اکائی سمتیہ  $i$  کو  $\theta$  زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل 11.11)۔

$$(11.6) \quad u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی لہذا  $u$  بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|u| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ  $\theta$  کو  $0$  تا  $2\pi$  کرنے سے  $u$  کا سر  $N$  مہد کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

## لمبائی اور رخ

اگر  $v \neq 0$  ہو تب

$$\left| \frac{v}{|v|} \right| = \left| \frac{1}{|v|} v \right| = \frac{1}{|v|} |v| = 1$$

ہو گا لہذا  $\frac{v}{|v|}$  اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ  $v$  کا رخ ہو گا۔ یوں ہم  $v$  کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$v = |v| \left( \frac{v}{|v|} \right)$$

یوں اگر  $u \neq 0$  ہو تب

۱.  $\frac{v}{|v|}$  اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ  $v$  کا رخ ہو گا۔ یوں ہم  $\frac{v}{|v|}$  کو  $v$  کا رخ کہتے ہیں۔

ب. مساوات  $v = |v| \left( \frac{v}{|v|} \right)$  سمتیہ  $v$  کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ  $v = 3i - 4j$  کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

حل:

$$\begin{aligned}
 |v| &= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 && v \text{ کی لمبائی} \\
 \frac{v}{|v|} &= \frac{3i - 4j}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j && v \text{ کا رخ} \\
 v &= 3i - 4j = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}} \left( \underbrace{\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j}_{\text{رخ}} \right)
 \end{aligned}$$

□

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں  $a \neq 0$  کی صورت میں سمتیہ  $v = ai + bj$  کا ڈھلوان  $\frac{b}{a}$  ہو گا (شکل 11.12)۔

کسی نقطہ پر ایک منحنی کو ایک سمتیہ تب مماسی<sup>10</sup> یا عمودی<sup>11</sup> ہو گا جب اس نقطہ پر منحنی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

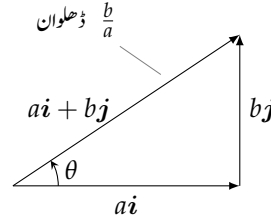
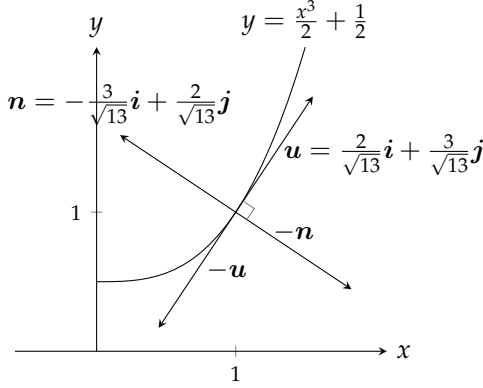
مثال 11.8: نقطہ  $(1, 1)$  پر منحنی  $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$  کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

حل: ہم نقطہ  $(1, 0)$  پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل 11.13)۔

اس نقطہ پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \frac{3x^2}{2} \Big|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

tangent<sup>10</sup>  
normal<sup>11</sup>



شکل 11.12: اگر  $a \neq 0$  ہو تب سمتیہ  $v = ai + bj$  کی ڈھلوان  $\frac{b}{a}$  ہو گی۔

شکل 11.13: ایک نقطہ پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیہ (مثال 11.8)

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ  $v = 2i + 3j$  اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کی ڈھلوان  $\frac{3}{2}$  ہے۔ سمتیہ  $v$  کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی 1 ہو ہم  $v$  کو

$$|v| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

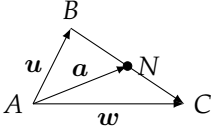
سمتیہ  $u$  کی لمبائی 1 ہے اور یہ  $(1, 1)$  پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-u = -\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

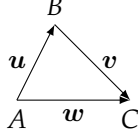
جو مخالف رخ ہے بھی  $(1, 1)$  پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جاسکتی ہے۔

نقطہ  $(1, 1)$  پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان  $u$  کی ڈھلوان کے بالعکس تناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم  $u$  کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

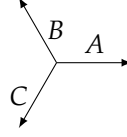
$$n = -\frac{3}{\sqrt{13}}i + \frac{2}{\sqrt{13}}j, \quad -n = \frac{3}{\sqrt{13}}i - \frac{2}{\sqrt{13}}j$$



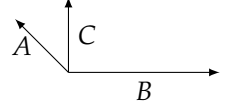
شکل 11.17



شکل 11.16



شکل 11.15



شکل 11.14

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں  $(1, 1)$  پر منحنی کو عمودی ہیں۔

□

## سوالات

جیومیٹری اور حساب

سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا.  $A + B$       ب.  $A + B + C$       ج.  $A - 2B$       د.  $\frac{1}{2}A - C$

سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کو شکل 11.15 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا.  $A - B$       ب.  $A + B + C$       ج.  $2A - \frac{1}{2}B$       د.  $A - (B - C)$

سوال 3 تا سوال 6 میں  $A = 2i - 7j$ ،  $B = i + 6j$  اور  $C = \sqrt{3}i - \pi j$  لیں۔ نتائج کو  $ai + bj$  روپ میں لکھیں۔

سوال 3:  $A + 2B$

سوال 4:  $A + B - C$

سوال 5:  $3A - \frac{1}{\pi}C$

سوال 6:  $2A - 3B + 32j$

سوال 7: مثلث  $ABC$  کے اضلاع سمتیات  $u$ ،  $v$  اور  $w$  دیتے ہیں (شکل 11.16)۔



ا.  $w$  کو  $u$  اور  $v$  کی صورت میں لکھیں۔

ب.  $v$  کو  $u$  اور  $w$  کی صورت میں لکھیں۔

سوال 8: مثلث  $ABC$  کے اضلاع سمتیات  $u$  اور  $w$  دیتے ہیں جبکہ  $BC$  کا وسطی نقطہ  $N$  ہے (شکل 11.17)۔ سمتیہ  $a$  کو  $u$  اور  $w$  کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیہ کو  $ai + bj$  روپ میں لکھیں۔ محدودی سطح پر مبداء سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

سوال 9: نقاط  $N_1(5, 7)$  اور  $N_2(2, 9)$  کے قع قطع  $\vec{N_1N_2}$  تلاش کریں۔

سوال 10: نقاط  $N_1(1, 2)$  اور  $N_2(-3, 5)$  کے قع قطع  $\vec{N_1N_2}$  تلاش کریں۔

سوال 11: نقاط  $A(-5, 3)$  اور  $B(-10, 8)$  کے قع قطع  $\vec{AB}$  تلاش کریں۔

سوال 12: نقاط  $A(-7, -8)$  اور  $B(6, 11)$  کے قع قطع  $\vec{AB}$  تلاش کریں۔

سوال 13: نقاط  $N_1(1, 3)$  اور  $N_2(2, -1)$  کے قع قطع  $\vec{N_1N_2}$  تلاش کریں۔

سوال 14: نقاط  $N_3(1, 3)$  اور  $N_4$  کے قع قطع  $\vec{N_3N_4}$  تلاش کریں جہاں  $N_1(2, -1)$  اور  $N_2(-4, 3)$  کو ملانے والے قطع کا وسطی نقطہ  $N_4$  ہے۔

سوال 15: نقاط  $A(1, -1)$ ،  $B(2, 0)$ ،  $C(-1, 3)$  اور  $D(-2, 2)$  دیے گئے ہیں۔ سمتیات  $\vec{CD}$  اور  $\vec{AB}$  کا مجموعہ تلاش کریں۔

سوال 16: نقطہ  $A$  سے مبداء تک سمتیہ، جہاں  $\vec{AB} = 4i - 2j$  اور  $B(-2, 5)$  ہیں۔

سوال 17: سمتیہ  $\vec{AB} = 3i - j$  اور نقطہ  $A(2, 9)$  دیا گیا ہے۔ نقطہ  $B$  تلاش کریں۔

سوال 18: سمتیہ  $\vec{NQ} = -6i - 4j$  اور نقطہ  $Q(3, 3)$  دیا گیا ہے۔ نقطہ  $N$  تلاش کریں۔

اکائی سمتیات

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو  $ai + bj$  روپ میں لکھیں۔

سوال 19: زاویہ  $\theta = \frac{\pi}{6}$  اور  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  کے لئے اکائی سمتیات  $j(\sin \theta) + i(\cos \theta) = u$  ترسیم کریں۔ دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 20: زاویہ  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  اور  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$  کے لئے اکائی سمتیات  $j(\sin \theta) + i(\cos \theta) = u$  ترسیم کریں۔ دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 21: سمتیہ  $j$  کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ  $\frac{3\pi}{4}$  ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال 22: سمتیہ  $j$  کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ  $\frac{2\pi}{3}$  ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال 23 اور سوال 24 میں اکائی سمتیہ  $j(\sin \theta) + i(\cos \theta) = u$  اسی رخ تلاش کریں۔

سوال 23:  $6i - 8j$

سوال 24:  $-i + 3j$

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہو گی۔)

سوال 25:  $y = x^2$ ,  $(2, 4)$

سوال 26:  $x^2 + 2y^2 = 6$ ,  $(2, 1)$

سوال 27:  $y = \tan^{-1} x$ ,  $(1, \frac{\pi}{4})$

سوال 28:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $(0, 1)$

سوال 29 تا سوال 32 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اور عمودی اکائی سمتیہ تلاش کریں۔

سوال 29:  $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0$ ,  $(1, 0)$

سوال 30:  $x^2 - 6xy + 8y^2 - 2x - 1 = 0$ ,  $(1, 1)$

سوال 31:  $y = \int_0^x \sqrt{3 + t^4} dt$ ,  $(0, 0)$

$$y = \int_e^x \ln(\ln t) dt, \quad (e, 0) \quad \text{سوال 32}$$

لمبائی اور رخ

سوال 33 اور سوال 34 میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

$$5i + 12j \quad \text{سوال 33}$$

$$2i - 3j \quad \text{سوال 34}$$

سوال 35: سمتیہ  $3i - 4j$  کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 36: سمتیہ  $A = -i + 2j$  کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 2 ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں؟

سوال 37: دکھائیں کہ  $A = 3i + 6$  اور  $B = -i - 2j$  ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

سوال 38: دکھائیں کہ  $A = 3i + 6$  اور  $B = \frac{1}{2}i + j$  کے رخ ایک دوسرے جیسے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: آپ ایک ریڑھی کو قوت  $F$  سے کھینچ رہے ہیں جس کی مقدار  $|F| = 10 \text{ N}$  ہے۔ زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ  $30^\circ$  ہے۔ اس قوت کے  $x$  اور  $y$  اجزاء تلاش کریں۔

سوال 40: پتنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ  $45^\circ$  زاویہ پر  $5 \text{ N}$  قوت سے کھینچتی ہے۔ اس قوت کے افقی اور انحصالی اجزاء تلاش کریں۔

سوال 41: سمتیہ  $A = 2i + j$ ،  $B = i + j$  اور  $C = i - j$  دیے گئے ہیں۔ ایسے غیر سمتیات  $\alpha$  اور  $\beta$  کہ  $A = \alpha B + \beta C$  ہو۔

سوال 42: سمتیات  $A = i - 2j$ ،  $B = 2i + 3j$  اور  $C = i + j$  دیے گئے ہیں۔ سمتیہ  $A = A_1 + A_2$  لکھیں جہاں  $A_1$  سمتیہ  $B$  کے متوازی اور  $A_2$  سمتیہ  $C$  کے متوازی ہے۔ (سوال 41 دیکھیں۔)

سوال 43: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شمال کی طرف  $60^\circ$  پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لئے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی  $xy$  کے مبدا پر گھونسلہ، مثبت  $x$  محور پر مشرق اور مثبت  $y$  محور پر شمال رکھ (i) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

سوال 44: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، شمال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد یہ مغرب سے  $30^\circ$  زاویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی  $xy$  کے مبدا پر گھونسلہ، مثبت  $x$  محور پر مشرق اور مثبت  $y$  محور پر شمال رکھ (i) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

سوال 45: مستوی میں  $v$  ایک سمتیہ ہے جو  $y$  محور کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ  $v$  کی ڈھلوان اور سمتیہ  $-v$  کی ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

