

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

|     |                                       |     |
|-----|---------------------------------------|-----|
| 1   | ابتدائی معلومات                       | 1   |
| 1   | حقیقی اعداد اور حقیقی خط              | 1.1 |
| 15  | محدود، خطوط اور بڑھوتری               | 1.2 |
| 32  | تفاعل                                 | 1.3 |
| 54  | ترسیم کی منتقلی                       | 1.4 |
| 74  | تکوینیاتی تفاعل                       | 1.5 |
| 95  | حدود اور استمرار                      | 2   |
| 95  | تبدیلی کی شرح اور حد                  | 2.1 |
| 113 | حد تلاش کرنے کے قواعد                 | 2.2 |
| 126 | مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف | 2.3 |
| 146 | تصور حد کی توسیع                      | 2.4 |
| 165 | استمرار                               | 2.5 |
| 184 | مماسی خط                              | 2.6 |
| 199 | تفرق                                  | 3   |
| 199 | تفاعل کا تفرق                         | 3.1 |
| 221 | قواعد تفرق                            | 3.2 |
| 240 | تبدیلی کی شرح                         | 3.3 |
| 257 | تکوینیاتی تفاعل کا تفرق               | 3.4 |
| 277 | زنجیری قاعدہ                          | 3.5 |
| 294 | خفی تفرق اور ناطق قوت نما             | 3.6 |
| 310 | دیگر شرح تبدیلی                       | 3.7 |

|     |       |  |
|-----|-------|--|
| 325 | 4     | تفرق کا استعمال  |
| 325 | 4.1   | تفاعل کی انتہائی قیمتیں                                  |
| 340 | 4.2   | مسئلہ اوسط قیمت  |
| 356 | 4.3   | مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرق پرکھ               |
| 356 | 4.3.1 | پرکھ   |
| 368 | 4.4   | $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم                             |
| 391 | 4.5   | $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء   |
| 418 | 4.6   | بہترین بنانا   |
| 442 | 4.7   | خط بندی اور تفرقات                                       |
| 465 | 4.8   | ترکیب نیوٹن  |
| 477 | 5     | تکمل   |
| 477 | 5.1   | غیر قطعی تکملات  |
| 489 | 5.2   | تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی |
| 505 | 5.3   | تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق         |
| 516 | 5.4   | اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ                              |
| 534 | 5.5   | ریمان مجموعے اور قطعی تکملات                             |
| 561 | 5.6   | خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ                       |
| 578 | 5.7   | بنیادی مسئلہ   |
| 599 | 5.8   | قطعی تکمل میں بدل  |
| 605 | 5.9   | اعدادی تکمل  |
| 605 | 5.10  | قاعدہ ذوزرقہ   |
| 625 | 6     | تکمل کا استعمال  |
| 625 | 6.1   | منحنیات کے بیچ رقبہ                                      |
| 629 | 6.1.1 | تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد                               |
| 640 | 6.2   | تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش                                |
| 648 | 6.3   | اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا                          |
| 663 | 6.4   | تکلی چھلے  |
| 676 | 6.5   | مستوی منحنیات کی لمبائیاں                                |
| 687 | 6.6   | سطح طواف کا رقبہ   |
| 699 | 6.7   | معیار اثر اور مرکز کمیت                                  |
| 711 | 6.7.1 | وسطانی مرکز  |
| 716 | 6.8   | کام  |
| 731 | 6.9   | فشار سیال اور قوت سیال                                   |
| 740 | 6.10  | بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال                        |
| 755 | 7     | ماورائی تفاعل  |
| 756 | 7.1   | الٹ تفاعل اور ان کے تفرق                                 |

|     |                                    |      |
|-----|------------------------------------|------|
| 774 | قدرتی لوگار تھم                    | 7.2  |
| 792 | قوت نمائی تفاعل                    | 7.3  |
| 807 | $\log_a x$ اور $a^x$               | 7.4  |
| 818 | افزائش اور تنزل                    | 7.5  |
| 832 | قاعدہ لھوپٹال                      | 7.6  |
| 848 | اضافی شرح نمو                      | 7.7  |
| 853 | 7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش        |      |
| 859 | الٹ نیگو نیاتی تفاعل               | 7.8  |
| 875 | الٹ نیگو نیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل | 7.9  |
| 892 | بدلولی تفاعل                       | 7.10 |
| 913 | یک رتبی تفرقی مساوات               | 7.11 |
| 931 | یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان | 7.12 |

|      |                           |  |
|------|---------------------------|--|
| 943  | 8 مکمل کے طریقے           |  |
| 943  | 8.1 مکمل کے بنیادی کلیات  |  |
| 959  | 8.2 مکمل بالخصص           |  |
| 964  | 8.2.1 بار بار استعمال     |  |
| 974  | 8.3 جزوی کسر              |  |
| 989  | 8.4 نیگو نیاتی بدل        |  |
| 1000 | 8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر |  |
| 1017 | 8.6 غیر مناسب مکمل        |  |

|      |  |  |
|------|--|--|
| 1043 | 9 لامتناہی تسلسل                                   |  |
| 1043 | 9.1 اعداد کی ترتیب کی حد                           |  |
| 1061 | 9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے                 |  |
| 1078 | 9.3 لامتناہی تسلسل                                 |  |
| 1097 | 9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ        |  |
| 1108 | 9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ         |  |
| 1118 | 9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناہی اور جذری پرکھ |  |
| 1129 | 9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز             |  |
| 1143 | 9.8 طاقتی تسلسل                                    |  |
| 1160 | 9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل                          |  |
| 1172 | 9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے           |  |
| 1191 | 9.11 طاقتی تسلسل کے استعمال                        |  |

|      |             |  |
|------|-------------|--|
| 1195 | ا ضمیمہ اول |  |
| 1197 | ب ضمیمہ دوم |  |



## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 9.11 طاقی تسلسل کے استعمال

اس حصہ میں ثنائی تسلسل متعارف کرایا جائے گا جو طاقت اور جذر کا اندازہ کرنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ مزید ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کو تخمیناً تسلسل سے ظاہر کرنا اور غیر بنیادی کھلم کے قیمت کے حصول میں تسلسل کا کردار دکھایا جائے گا۔ ایسے حد جو غیر معین صورت دیتے ہوں کا حل بھی سکھایا جائے گا۔ ہم  $\tan^{-1} x$  کے مکملارن تسلسل کا ایک مختصر طریقہ دکھائیں گے اور بار بار استعمال ہونے والے تسلسلوں کی جدول کا ذکر کریں گے۔

## طاقت اور جذر کے لئے ثنائی تسلسل

تفاعل  $f(x) = (1+x)^m$  جہاں  $m$  مستقل ہے، کا مکملارن تسلسل درج ذیل ہے

$$(9.39) \quad 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

جس کو ثنائی تسلسل<sup>48</sup> کہتے ہیں اور جو  $|x| < 1$  کے لئے مطلق مرکب ہے۔ یہ تسلسل حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل اور اس کے تفرقات لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)(1+x)^{m-k} \end{aligned}$$

نقطہ  $x = 0$  پر ان کی قیمتیں دریافت کر کے مکملارن تسلسل کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے مساوات 9.39 کا تسلسل حاصل ہو گا۔

اگر  $m$  عدد صحیح ہو جو صفر یا اس سے بڑا ہو تب  $k = m + 1$  عددی سر سے تمام عددی سر صفر ہوں گے لہذا  $(m+1)$  اجزاء کے بعد یہ تسلسل رک جاتا ہے۔

اگر  $m$  صفر یا مثبت عدد صحیح نہ ہو تب یہ تسلسل لامتناہی اجزاء پر مشتمل ہو گا جو  $|x| < 1$  کے لئے مرتکز ہو گا۔ اس کی وجہ دیکھنے کی خاطر فرض کریں  $u_k$  وہ جزو ہے جس میں  $x^k$  پایا جاتا ہو۔ اب مطلق ارتکاز کے تناسبی پرکھ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{m-k}{k+1} x \right| \rightarrow |x| \quad k \rightarrow \infty$$

ثنائی تسلسل کا حصول ہمیں صرف اتنا بتاتا ہے کہ  $(1+x)^m$  اس کو پیدا کرتا ہے اور  $|x| < 1$  کے لئے یہ تسلسل مرتکز ہے۔ تسلسل کا حصول ہمیں یہ نہیں دکھاتا ہے کہ یہ تسلسل  $(1+x)^m$  کو مرکوز ہے۔ حقیقت میں یہ تسلسل  $(1+x)^m$  کو مرکوز ہے، جس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \quad -1 < x < 1$$

$$(9.40) \quad \binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!} \quad \text{جہاں}$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1)}{k!} \quad \text{اور } k \geq 3 \text{ کے لئے}$$

ہوں گے۔

مثال 9.65: اگر  $m = -1$  ہو تب

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1,$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3) \cdots (-1-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k!}{k!} = (-1)^k$$

ہوں گے اور مساوات 9.40 درج ذیل ثنائی تسلسل دے گی۔

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$$

□

سوال 1: ہم مثال 4.40 سے جانتے ہیں کہ چھوٹے  $|x|$  کے لئے  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$  ہو گا۔ ثنائی تسلسل میں  $m = \frac{1}{2}$  لیتے ہوئے دو قدری اور بلند رتبہ تخمین حاصل ہوتے ہیں، اور ساتھ ہی اندازہ خلل بھی حاصل ہوتا ہے جو مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ خلل دیتا

ہے:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 \\
 &\quad + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}x^4 + \dots \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots
 \end{aligned}$$

دیگر تخمین  $x$  کی مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل ہوں گی۔ مثال کے طور پر:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-x} &\approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} && \text{چھوٹے } |x^2| \text{ کے لئے} \\
 \sqrt{1-\frac{1}{x}} &\approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} && \text{چھوٹا } \left|\frac{1}{x}\right| \text{ یعنی بڑا } |x|
 \end{aligned}$$

تفرقی مساوات کے طاقی تسلسل حل اور ابتدائی قیمت مسائل



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول





ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

