

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

7.2	قدرتی لوگار تھم	762
7.3	قوت نمائی تفاعل	779
7.4	$\log_a x$ اور a^x	794
7.5	افزائش اور تنزل	805
7.6	قاعدہ لھوپیٹال	819
7.7	اضافی شرح نمو	835
7.7.1	ترتیبی اور شمائی تلاش	840
7.8	الٹ نیکونائی تفاعل	846
7.9	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	862
7.10	ہذلولی تفاعل	879
7.11	یک رتبی تفرقی مساوات	900
7.12	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	918

8	تکمل کے طریقے	929
8.1	تکمل کے بنیادی کلیات	929
8.2	تکمل بالخص	945
8.2.1	بار بار استعمال	950
8.3	جزوی کسر	959
8.4	نیکونائی بدل	974
8.5	جدول تکمل اور کمپیوٹر	985
8.6	غیر مناسب تکمل	1002

9	لا متناہی تسلسل	1029
9.1	اعداد کی ترتیب کی حد	1029
9.2	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	1048
9.3	لا متناہی تسلسل	1064
9.4	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	1083
9.5	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	1093
9.6	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	1103
9.7	بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	1115
9.8	طاققی تسلسل	1129
9.9	ٹیبلر اور مککارن تسلسل	1145
9.10	ٹیبلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلل کے اندازے	1156
9.11	طاققی تسلسل کے استعمال	1175

10	مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	1195
10.1	مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	1195
10.2	سک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	1219

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیت
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تنگی اور کردی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولا کے حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1476	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوکت
1495		جوابات
1497	ا	ضمیمہ اول
1499	ب	ضمیمہ دوم
1501	ج	ضمیمہ تین
1503	د	ضمیمہ چار
1505	ه	ضمیمہ پانچ
1507	و	ضمیمہ چھ
1509	ز	ضمیمہ سات

1511

ح ضمیمہ آٹھ

1513

ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

مستوی منحنیات

سوال 1 تا سوال 4 میں مستوی منحنیات کا T ، N اور κ تلاش کریں۔

سوال 1: $r(t) = ti + (\ln \cos t)j$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 2: $r(t) = (\ln \sec t)i + tj$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 3: $r(t) = (2t + 3)i + (5 - t^2)j$

سوال 4: $r(t) = (\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j$, $t > 0$

سوال 5 اور سوال 6 میں T اور N معلوم کیے بغیر a کو $a = a_T T + a_N N$ روپ میں لکھیں۔

سوال 5: $r(t) = (2t + 3)i + (t^2 - 1)j$

سوال 6: $r(t) = \ln(t^2 + 1)i + (t - 2 \tan^{-1} t)j$

سوال 7: مستوی xy میں قاعل کی ترسیم کی انحناء کا کلیہ۔

ا. مستوی xy میں ترسیم $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = x$, $y = f(x)$ ہے اور سمتی کلیہ $r(t) = xi + f(x)j$ ہو گا۔ اگر f دو بار قابل تفرق ہو تب اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[a + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

ب. جزو-ا میں κ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کی انحناء تلاش کریں۔ اپنے جواب کا سوال 1 کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. دکھائیں کہ نقطہ تصرف پر انحناء صفر ہو گی۔

سوال 8: مستوی میں مقدار معلوم روپ میں دی گئی منحنی کی انحناء کا کلیہ

ا. دکھائیں کہ دو بار قابل تفرق تقابل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ پر مبنی ہموار منحنی $r(t) = f(t)i + g(t)j$ کی انحناء درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنیات کے انحناء تلاش کریں۔

ب. $r(t) = ti + (\ln \sin t)j$, $0 < t < \pi$

ج. $r(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]i + (\ln \cosh t)j$

سوال 9: مستوی منحنیات کے عمود

ا. دکھائیں کہ نقطہ $(f(t), g(t))$ پر منحنی $r(t) = f(t)i + g(t)j$ کے عمودی سمتیات $n(t) = -g'(t)i + f'(t)j$ اور $-n(t) = g'(t)i - f'(t)j$ ہیں۔ کسی مخصوص مستوی کا N تلاش کرنے کی خاطر ہم n اور $-n$ میں جو مقعر رخ ہو کو منتخب کر کے اس سے اگلی سمتیہ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.20)۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا N تلاش کریں۔

ب. $r(t) = ti + e^{2t}j$

ج. $r(t) = \sqrt{4 - t^2}i + tj$, $-2 \leq t \leq 2$

سوال 10:

ا. منحنی $r(t) = ti + \frac{t^3}{3}j$ کا N وقفہ $t < 0$ اور وقفہ $t > 0$ پر سوال 9 کے کلیہ سے حاصل کریں۔

ب. جزو-ا میں منحنی کے لئے

$$N = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}, \quad t \neq 0$$

حاصل کریں۔ کیا $t = 0$ پر N موجود ہے؟ اس منحنی کو ترسیم کریں اور منحنی سے مثبت جانب گزرتے ہوئے N کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

فضائی منحنیات

سوال 11 تا سوال 18 میں فضائی منحنیات کا T ، N ، B اور κ دریافت کریں۔

سوال 11: $r(t) = (3 \sin t)i + (3 \cos t)j + 4tk$

سوال 12: $r(t) = (\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j + 3k$

سوال 13: $r(t) = (e^t \cos t)i + (e^t \sin t)j + 2k$

سوال 14: $r(t) = (6 \sin 2t)i + (6 \cos 2t)j + 5tk$

سوال 15: $r(t) = \frac{t^3}{3}i + \frac{t^2}{2}j, \quad t > 0$

سوال 16: $r(t) = (\cos^3 t)i + (\sin^3 t)j, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 17: $r(t) = ti + (a \cosh \frac{t}{a})j, \quad a > 0$

سوال 18: $r(t) = (\cosh t)i - (\sinh t)j + tk$

سوال 19 اور سوال 20 میں T اور N تلاش کیے بغیر a کو $a = A_T T + a_N N$ روپ میں لکھیں۔

سوال 19: $r(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j + btk$

سوال 20: $r(t) = (1 + 3t)i + (t - 2)j - 3tk$

سوال 21 اور سوال 24 میں T اور N تلاش کیے بغیر، دیے گئے t کو $a = A_T T + a_N N$ روپ میں لکھیں۔

سوال 21: $r(t) = (t + 1)i + 2tj + t^2k, \quad t = 1$

سوال 22: $r(t) = (t \cos t)i + (t \sin t)j + t^2k, \quad t = 0$

سوال 23: $r(t) = t^2i + (t + \frac{t^3}{3})j + (t - \frac{t^3}{3})k, \quad t = 0$

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \quad t = 0 \quad \text{سوال 24}$$

سوال 25 اور سوال 26 میں دیے گئے \mathbf{r} پر T ، N اور B معلوم کریں۔ اس کے بعد در پیچیدہ مستوی، عمودی مستوی اور سمت کار مستوی کی مساوات اس t پر حاصل کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad t = \frac{\pi}{4} \quad \text{سوال 25}$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0 \quad \text{سوال 26}$$

طبعی استعمال

سوال 27: آپ کی گاڑی کا رفتار پیا برقرار 60 km h^{-1} دکھا رہا ہے۔ کیا آپ کی اسراع ممکن ہے؟ جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 28: کیا مستقل رفتار سے چلتے ہوئے ذرہ کی اسراع کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 29: ایک ذرہ کی اسراع پر لمحہ اس کی سمتی رفتار کے عمودی ہے۔ اس کی رفتار کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 30: ایک جسم جس کی کمیت m ہے قطع مکانی $y = x^2$ پر مستقل رفتار 10 ms^{-1} سے حرکت کرتا ہے۔ نقطہ $(0, 0)$ اور نقطہ $(\sqrt{2}, 2)$ پر اسراع کی بدولت اس پر کتنی قوت ہو گی؟ اپنا جواب i اور j کی روپ میں لکھیں۔ (نیوٹن کا کلیہ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ذہن میں رکھیں۔)

سوال 31: ایک مٹھی پر کسی جسم کو مستقل رفتار سے حرکت دینے کے لئے درکار قوت، قوانین نیوٹن کے تحت، حرکت کی افخا کی مستقل مضرب ہو گی۔ حساب سے دکھائیں کہ یہ فقرہ کیوں درست ہے۔

سوال 32: دکھائیں اگر ایک ذرے کی اسراع کا عمودی جزو صفر ہو تب یہ متحرک ذرہ سیدھا حرکت کرے گا۔

انحنا پر مزید سوالات

سوال 33: دکھائیں کہ قطع مکانی $y = ax^2$ ، $a \neq 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا اس کی راس پر ہو گی جبکہ کسی بھی نقطہ پر کم سے کم انحنا نہیں ہو گی۔ (چونکہ منحنی کو فضا میں ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے یا گھمانے سے انحنا تبدیل نہیں ہوتی لہذا یہ حقیقت کسی بھی قطع مکانی کے لئے درست ہو گا۔)

سوال 34: دکھائیں کہ ترخیم $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $a > b > 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحناس کی محور اکبر پر اور کم سے کم انحناس کی محور اصغر پر ہوگی۔ (گزشتہ سوال کی طرح یہ حقیقت بھی ہر ترخیم کے لئے درست ہو گا۔)

سوال 35: چنچ دار منحنی کی زیادہ سے زیادہ انحناس κ ہم نے مثال 12.21 میں دیکھا کہ چنچ دار $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $(a, b \geq 0)$ کی انحناس $\frac{a}{a^2+b^2}$ ہوگی۔ کسی بھی b کے لئے زیادہ سے زیادہ انحناس کتنی ہوگی؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 36: اگر آپ کو $|a_N|$ اور $|v|$ معلوم ہوں تب کلیہ $a_N = \kappa|v|^2$ سے انحناس حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کی انحناس اور رداس انحناس دریافت کریں۔ (a_N اور $|v|$ کی قیمتیں مثال 12.23 سے لیں۔)

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$$

سوال 37: دکھائیں کہ درج ذیل خط کے لئے κ اور τ صفر ہوں گے۔

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + At)\mathbf{i} + (y_0 + Bt)\mathbf{j} + (z_0 + Ct)\mathbf{k}$$

سوال 38: مکمل انحناس $s = s_0$ سے $s = s_1 > s_0$ تک حصہ کی مکمل انحناس حاصل کرنے کی خاطر s_0 تا s_1 انحناس κ کا مکمل لیتے ہیں۔ اگر منحنی کا متغیر s کی بجائے t ہو تب مکمل انحناس درج ذیل ہوگی، جہاں s_0 اور s_1 کے مطابقتی قیمتیں t_0 اور t_1 ہیں۔

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa ds = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |v| dt$$

وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ پر چنچ دار منحنی $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ کی مکمل انحناس معلوم کریں۔

سوال 39: گزشتہ سوال جاری درج ذیل منحنیات کی مکمل انحناس دریافت کریں۔

ا. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$ ($a > 0$) (انحناس معلوم کرنے کا آسان طریقہ سوال 36 میں پیش کیا گیا ہے۔ مثال 12.23 کی قیمتیں استعمال کریں۔)

$$y = x^2, \quad -\infty < x < \infty$$

سوال 40:

ا. نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 1)$ پر منحنی $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ کے دائرہ انحناس کی مساوات تلاش کریں۔ (یہ مستوی xy میں $y = \sin x$ کی مقدار معلوم روپ ہے۔)

ب. نقطہ $(0, -2)$ جہاں $t = 1$ ہے پر منحنی $\mathbf{r}(t) = (2 \ln t)\mathbf{i} - (t + \frac{1}{t})\mathbf{j}$, $e^{-2} \leq t \leq e^2$ کے دائرہ انحناس کی مساوات تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

