

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
16	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
34	تفاعل	1.3
58	ترسیم کی منتقلی	1.4
81	مکونیاتی تفاعل	1.5



## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

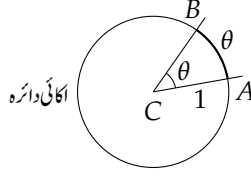
اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





شکل 1.86: قوس AB کی لمبائی زاویہ  $\theta$  کی ناپ ریڈیئن میں دیتی ہے۔

## 1.5 ٹکونیاتی تفاعل

اس حصہ میں ریڈیئن، ٹکونیاتی تفاعل، دوریت اور بنیادی ٹکونیاتی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

### ریڈیئن

چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات کی صورت میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے جہاں  $180^\circ$  کو  $\pi$  ریڈیئن کہتے ہیں۔ ریڈیئن کی استعمال سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

فرض کریں اکائی دائرہ<sup>62</sup> (رداس 1 کا دائرہ) کا وسطی زاویہ ACB ہے (شکل 1.86)۔ زاویہ ACB کی ریڈیئن ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس AB کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط  $2\pi$  ہے اور ایک مکمل چکر  $360^\circ$  ہے لہذا درج ذیل تعلق لکھا جاسکتا ہے۔

$$\pi \text{ ریڈیئن} = 180^\circ$$

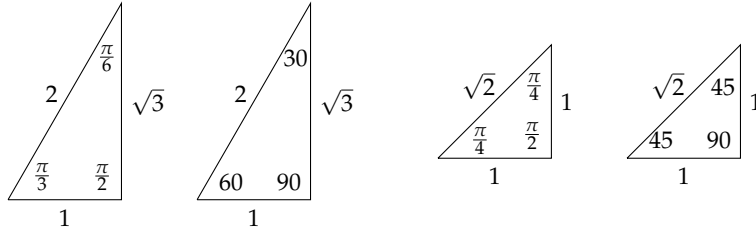
مثال 1.42: درجہ سے ریڈیئن میں زاویے کی تبدیلی

$45^\circ$  کو ریڈیئن میں لکھیں اور  $\frac{\pi}{6}$  کو درجہ میں لکھیں۔

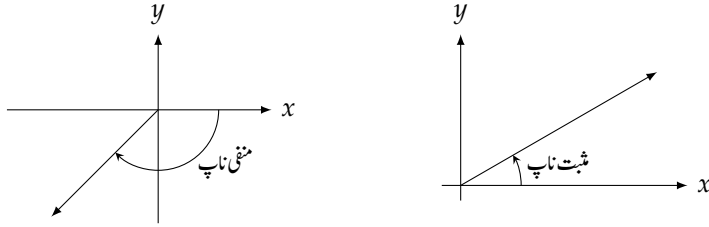
حل: شکل 1.87 دیکھیں۔

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈیئن}$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$



شکل 1.87: اشکال برائے مثال 1.42



شکل 1.88: زاویے کی ناپ

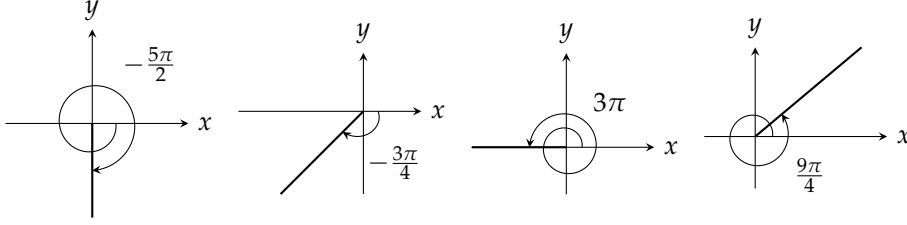
□

$xy$  مستوی میں مبداء پر اس اور ابتدائی مقام مثبت  $x$  محور پر ہونے کی صورت میں زاویہ کا مقام معیاری<sup>63</sup> مقام کہلاتا ہے۔ مثبت  $x$  محور سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ زاویہ کی ناپ مثبت اور گھڑی کی سوئی کی رخ ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل 1.88)۔ یوں مثبت  $x$  محور کا زاویہ 0 ریڈین اور منفی  $x$  محور کا زاویہ  $\pi$  ریڈین ہو گا۔

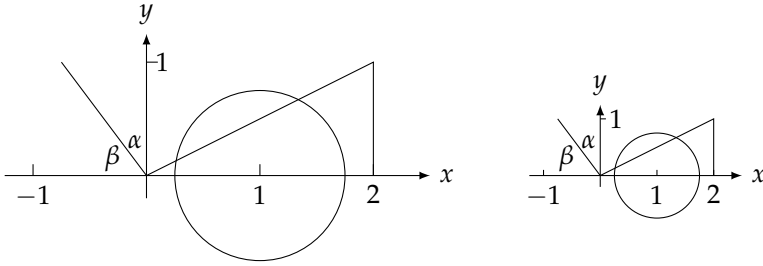
گھڑی مخالف چکر بیان کرتے ہوئے زاویے کی ناپ  $2\pi$  یعنی  $360^\circ$  سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ اسی طرح گھڑی کی رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ کچھ بھی ممکن ہے (شکل 1.89)۔

شکل 1.90 میں ایک جیسے اشکال کو دو مختلف ناپ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جسامت بڑی یا چھوٹی کرنے سے زاویے تبدیل نہیں ہوتے ہیں۔ یوں دونوں اشکال میں  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ہے۔  $x$  اور  $y$  محدود پر اکائی فاصلہ کی ناپ کم اور زیادہ کرتے ہوئے اشکال کی جسامت تبدیل ہوتی ہے۔ دونوں محدود پر اکائی فاصلہ ایک جیسا

unit circle<sup>62</sup>  
standard position<sup>63</sup>



شکل 1.89: مثبت اور منفی ریڈین



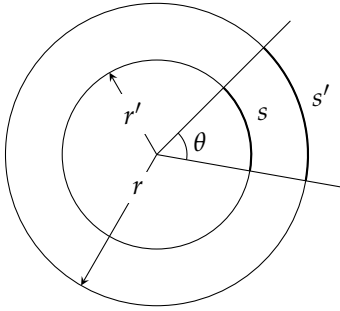
شکل 1.90: شکل بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

ہونا ضروری ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جسامت  $k$  گنا کرنے سے تمام سیدھی لمبائیاں  $k$  گنا ہوں گے۔ کیا جسامت  $k$  گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی  $k$  گنا ہوگی؟ اس کا جواب ہے جی ہاں۔ آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں۔

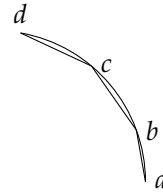
شکل 1.91 میں قوس کی لمبائی جاننے کی خاطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی لی جاسکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ اب اگر اس قوس کی جسامت کو  $k$  گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی  $k$  گنا ہوگی لہذا ان کی مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی  $k$  گنا ہوگی۔

شکل 1.92 میں رداس  $r$  اور رداس  $r'$  کے دائرے دکھائے گئے ہیں جہاں قوس  $s$  اور  $s'$  بھی دکھائے گئے ہیں۔ چھوٹے دائرے کی جسامت بڑھاتے ہوئے بڑا دائرہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ جسامت بڑھانے سے زاویے تبدیل نہیں ہوتے ہیں۔ یوں دونوں دائروں کی رداس کا تناسب اور دکھائے گئے قوسین کا تناسب ایک جیسا ہوگا، یعنی:

$$\frac{s}{s'} = \frac{r}{r'} \implies s = r \frac{s'}{r'}$$



شکل 1.92: محیط دائرہ



شکل 1.91: قوس کی لمبائی

اب اگر  $r' = 1$  ہو تب ریڈیئن کی تعریف کی رو سے  $\frac{s'}{r'} = \theta$  ہو گا (جہاں زاویہ ریڈیئن میں ہو گا) لہذا درج بالا سے درج ذیل اہم ترین کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

قوس کی لمبائی اور ریڈیئن میں ناپے گئے زاویے کا تعلق

$$s = r\theta$$

زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں

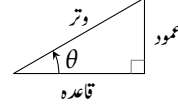
یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔ جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔ یوں اگر ہم زاویہ  $\frac{\pi}{6}$  کی بات کریں تب اس سے مراد  $\frac{\pi}{6}$  ریڈیئن کا زاویہ ہو گا ناکہ  $\frac{\pi}{6}$  درجے کا زاویہ۔

مثال 1.43: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر  $2\pi$  لمبائی کا قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بنتا ہے۔ (ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو  $\frac{3\pi}{4}$  وسطی زاویہ بنتا ہو۔ حل:

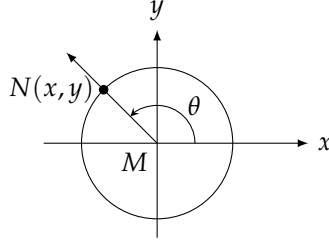
$$s = r\theta = 8\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\pi \quad (\text{ب}) \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

□

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}, & \csc &= \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}, & \sec &= \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}, & \cot &= \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}\end{aligned}$$



شکل 1.93: قائمہ مثلث اور ٹکونیاتی تناسب



شکل 1.94: ٹکونیاتی تناسب

چہ بنیادی ٹکونیاتی تناسب

آپ زاویہ حادہ کے ٹکونیاتی تناسب سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل 1.93)۔ ہم انہیں تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرجہ اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس  $r$  کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب ان ٹکونیاتی تناسب کو نقطہ  $N(x, y)$  کے محدود کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتا ہوا شعاع دائرے کو  $N(x, y)$  پر قطع کرتا ہے۔

شکل 1.94 کو دیکھتے ہوئے ان تناسب کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

