

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
73	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
311	دیگر شرح تبدیلی	3.7

327	4	تفرق کا استعمال
327	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
342	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
358	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
358	4.3.1	پرکھ
370	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
393	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
420	4.6	بہترین بنانا
444	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
490	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
517	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
535	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
562	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
579	5.7	بنیادی مسئلہ
600	5.8	قطعی تکمل میں بدل
606	5.9	اعدادی تکمل
606	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ تکوینیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ تکوینیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

941	ضمیمہ اول	ا
943	ضمیمہ دوم	ب
945	فرہنگ	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جاسکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔ حقیقی اعداد¹ وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$-\frac{3}{4} = -0.75000 \dots$$

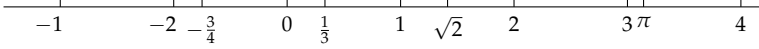
$$\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں ۰۰۰ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو کثیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس کثیر کو حقیقی خط² کہتے ہیں۔

real numbers¹
real line²



\mathbb{R} کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں: الجبرائی خواص، رتی خواص، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جاسکتے ہیں۔ آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

$$1. \quad a + c < b + c \iff a < b$$

$$2. \quad a - c < b - c \iff a < b$$

$$3. \quad ac < bc \iff a < b \text{ اور } c > 0$$

$$4. \quad -b < -a \iff a < b \text{ خصوصی صورت: } bc < ac \iff a < b \text{ اور } c < 0$$

$$5. \quad \frac{1}{a} > 0 \iff a > 0$$

$$6. \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \iff a < b \text{ اگر } a \text{ اور } b \text{ دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب}$$

درج بالا میں $a < b \iff a + c < b + c$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہوگی۔ دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سوراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دار و مدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔ کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

\mathbb{R} کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی سلسلوں³ کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. قدرتی اعداد⁴، یعنی 1، 2، 3، 4، ...

2. عدد صحیح، یعنی 0، ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، ...

3. ناطق اعداد⁵، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔ اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{200}{13}, 57 = \frac{57}{1}$$

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔
(الف) ختم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000 \dots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909 \dots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور رتبہ خواص رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔ یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سوراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں غیر ناطق اعداد⁶ کہلاتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے ناختم اور ناہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

sets³
natural numbers⁴
rational numbers⁵
irrational numbers⁶

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو اعداد کے درمیان تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں وقفہ⁷ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔ اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہذا -1 اور 1 کے درمیان تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔ خطی قطع متناہی وقفہ⁸ جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط لامتناہی وقفہ⁹ کہلاتے ہیں۔

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ بند¹⁰ کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ نصف کھلا¹¹ کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ کھلا¹² کہلاتا ہے۔ وقفے کے سروں کو سرحدی نقطے¹³ بھی کہتے ہیں۔ یہ وقفہ کی سرحد¹⁴ ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو اندرونی نقطے¹⁵ کہتے ہیں۔ تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی اندرون¹⁶ کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسموں کو جدول 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔

عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

مثال 1.1:

$$(1) \quad 2x - 4 < x + 1 \quad (2) \quad -\frac{x}{3} < x - 1 \quad (3) \quad \frac{2}{x-1} \geq 4$$

حل:

-
- interval⁷
 - finite interval⁸
 - infinite interval⁹
 - closed¹⁰
 - half-open¹¹
 - open¹²
 - boundary points¹³
 - boundary¹⁴
 - interior points¹⁵
 - interior¹⁶

جدول 1.1: وقفوں کی تقسیم

علامت	سلسلہ	ترسیم
متناہی	$\{x a < x < b\}$	
	$\{x a \leq x \leq b\}$	
	$\{x a \leq x < b\}$	
	$\{x a < x \leq b\}$	
لا متناہی	$\{x x > a\}$	
	$\{x x \geq a\}$	
	$\{x x < b\}$	
	$\{x x \leq b\}$	
	\mathbb{R}	

(1)

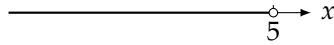
$$2x - 4 < x + 1$$

$$2x < x + 5$$

$$x < 5$$

دونوں ہاتھ 4 جمع کریں

کریں منفی x سے ہاتھ دونوں

حل سلسلہ وقفہ $(-\infty, 5)$ ہے۔

(2)

$$-\frac{x}{3} < x - 1$$

$$-x < 3x - 3$$

$$0 < 4x - 3$$

$$3 < 4x$$

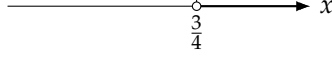
$$\frac{3}{4} < x$$

دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں

کریں جمع x ساتھ کے ہاتھ دونوں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں



وقفہ $(\frac{3}{4}, \infty)$ حل سلسلہ ہے۔

(3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بائیں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بائیں ہاتھ غیر متعین ہے۔ عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

$$2 \geq 4x - 4$$

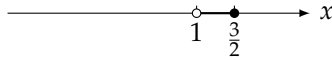
$$6 \geq 4x$$

$$\frac{3}{2} \geq x$$

دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$ ہے۔

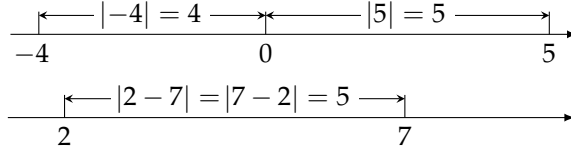
□

مطلق قیمت

عدد x کی مطلق قیمت¹⁷ جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $|0.88| = 0.88$, $|0| = 0$, $|-13| = -(-13) = 13$, $|-a| = |a|$



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq 0$ ہوگی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہوگا۔ چونکہ a کی غیر منفی جذر کو \sqrt{a} سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جاسکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

آپ $\sqrt{a^2} = |a|$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہوگا۔

جیومیٹریکی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$|x - y| \text{ } x \text{ اور } y \text{ کے بیچ فاصلہ}$$

ہوگا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$1. \quad |-a| = |a| \quad \text{کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔}$$

$$2. \quad |ab| = |a||b| \quad \text{حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہوگا۔}$$

$$3. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہوگا۔}$$

$$4. \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہوگی۔ اس کو تکنیکی عدم مساوات کہتے ہیں۔}$$

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a + b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہوگی۔ اس کے علاوہ ہر صورت $|a + b| = |a| + |b|$ ہوگا۔

مثال 1.3:

$$|-2 + 6| = |4| = 4 < |-2| + |6| = 8$$

$$|2 + 6| = |8| = |2| + |6|$$

$$|-2 - 6| = |-8| = 8 = |-2| + |-6|$$

□

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x - 1| = 11$ کو حل کریں۔
 حل: اس مساوات کے تحت $2x - 1 = \pm 11$ ہو سکتا ہے لہذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 = 11 & 2x - 1 = -11 \\ 2x = 12 & 2x = -10 \\ x = 6 & x = -5 \end{array}$$

□

یوں $|2x - 1| = 11$ کا درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

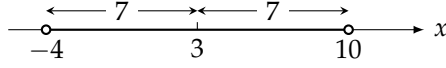
$$(1.1) \quad |a| < D \iff -D < a < D$$

$$(1.2) \quad |a| \leq D \iff -D \leq a \leq D$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x - 3| < 7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔
 حل:

$$\begin{array}{ll} |x - 3| < 7 & \\ -7 < x - 3 < 7 & \text{مساوات 1.1} \\ -7 + 3 < x < 7 + 3 & \text{دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں} \\ -4 < x < 10 & \end{array}$$

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔



□

مثال 1.6: عدم مساوات $\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1$ کو حل کریں۔
حل:

$$\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1 \iff -1 < 3 - \frac{2}{x} < 1 \quad \text{مساوات 1.1}$$

$$-4 < -\frac{2}{x} < -2 \quad \text{3 منفی کریں}$$

$$2 > \frac{1}{x} > 1 \quad \text{— سے ضرب دیں}$$

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{معکوس لیں}$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔ آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔ اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب معکوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہوگی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔ حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2}, 1)$ ہے۔ □

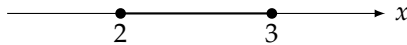
مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

$$(الف) \quad |2x - 5| \leq 1 \quad (ب) \quad |2x - 5| \geq 1$$

حل: (الف)

$$\begin{aligned} |2x - 5| &\leq 1 \\ -1 &\leq 2x - 5 \leq 1 && \text{مساوات 1.2} \\ 4 &\leq 2x \leq 6 && \text{جمع 5} \\ 2 &\leq x \leq 3 && \text{تقسیم 2} \end{aligned}$$

حل سلسلہ بند وقفہ $[2, 3]$ ہے۔



(ب)

$$\begin{array}{l|l}
 |2x - 5| \geq 1 & \\
 \hline
 2x - 5 \geq 1 & -(2x - 5) \geq 1 \\
 2x \geq 6 & 2x - 5 \leq -1 \\
 x \geq 3 & 2x \leq 4 \\
 & x \leq 2
 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ہے۔



□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی اشتراک¹⁸ کی علامت \cup استعمال کی گئی ہے۔ دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ اسی طرح ہم تقاطع¹⁹ کی علامت \cap بھی استعمال کرتے ہیں۔ دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ مثال کے طور پر $[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3)$ ہو گا۔

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1.1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔ اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔
جواب: $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}$

سوال 1.2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔ دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 1.3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

¹⁸union
¹⁹intersection

$$\begin{array}{lll}
 \text{ا} & 0 < x < 4 & \text{د} & \frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \\
 \text{ب} & 0 < x - 2 < 4 & \text{ه} & 1 < \frac{6}{x} < 3 \\
 \text{ج} & 1 < \frac{x}{2} < 3 & \text{و} & |x - 4| < 2 \\
 \text{ز} & -6 < -x < 2 & \text{ح} & -6 < -x < -2
 \end{array}$$

سوال 1.4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

$$\begin{array}{lll}
 \text{ا} & 4 < y < 6 & \text{د} & y < 6 \\
 \text{ب} & -6 < y < -4 & \text{ه} & 0 < y - 4 < 2 \\
 \text{ج} & y > 4 & \text{و} & 2 < \frac{y}{2} < 3 \\
 \text{ز} & \frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4} & \text{ح} & |y - 5| < 1
 \end{array}$$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترتیب کریں۔

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 1.5:} & -2x > 4 \\
 \text{جواب:} & x < -2 \\
 \text{سوال 1.9:} & 2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6} \\
 \text{جواب:} & x \leq -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 1.6:} & 8 - 3x \geq 5 \\
 \text{سوال 1.10:} & \frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 1.7:} & 5x - 3 \leq 7 - 3x \\
 \text{جواب:} & x \leq \frac{5}{4} \\
 \text{سوال 1.11:} & \frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6) \\
 \text{جواب:} & x < -\frac{6}{7}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 1.8:} & 3(2 - x) > 2(3 + x) \\
 \text{سوال 1.12:} & -\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}
 \end{array}$$

مطلق قیمت

سوال 1.13 تا سوال 1.18 میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال 1.16: $|1 - t| = 1$

سوال 1.13: $|y| = 3$
جواب: ∓ 3

سوال 1.17: $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$
جواب: $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

سوال 1.14: $|y - 3| = 7$

سوال 1.18: $|\frac{s}{2} - 1| = 1$

سوال 1.15: $|2t + 5| = 4$
جواب: $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$

سوال 1.19 تا سوال 1.34 میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ کو ترسیم کریں

سوال 1.19: $|x| < 2$
جواب: $-2 < x < 2$

سوال 1.20: $|x| \leq 2$

سوال 1.21: $|t - 1| \leq 3$
جواب: $-2 \leq t \leq 4$

سوال 1.22: $|t + 2| < 1$

سوال 1.23: $|3y - 7| < 4$
جواب: $1 < y < \frac{11}{3}$

سوال 1.24: $|2y + 5| < 1$

سوال 1.25: $|\frac{z}{5} - 1| \leq 1$
جواب: $0 \leq z \leq 10$

سوال 1.26: $|\frac{3}{2}z - 1| \leq 2$

سوال 1.27: $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$
 جواب: $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

سوال 1.28: $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$

سوال 1.29: $|2s| \geq 4$
 جواب: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

سوال 1.30: $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

سوال 1.31: $|1 - x| > 1$
 جواب: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

سوال 1.32: $|2 - 3x| > 5$

سوال 1.33: $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$
 جواب: $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

سوال 1.34: $\left|\frac{3}{5}r - 1\right| > \frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات
 سوال 1.35 تا سوال 1.42 میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترتیب کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2} = |a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 1.35: $x^2 < 2$
 جواب: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 1.36: $4 \leq x^2$

سوال 1.37: $4 < x^2 < 9$
 جواب: $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 1.38: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 1.39: $(x - 1)^2 < 4$
 جواب: $(-1, 3)$

سوال 1.40: $(x+3)^2 < 2$

سوال 1.41: $x^2 - x < 0$
جواب: $(0, 1)$

سوال 1.42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $-a = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔

جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 1.44: مساوات $|x-1| = 1-x$ کو حل کریں۔

سوال 1.45: ٹکوئی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a+b| = (a+b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے ٹکوئی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2 \\ |a+b| &\leq |a|+|b| \end{aligned}$$

سوال 1.46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 1.47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟
جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

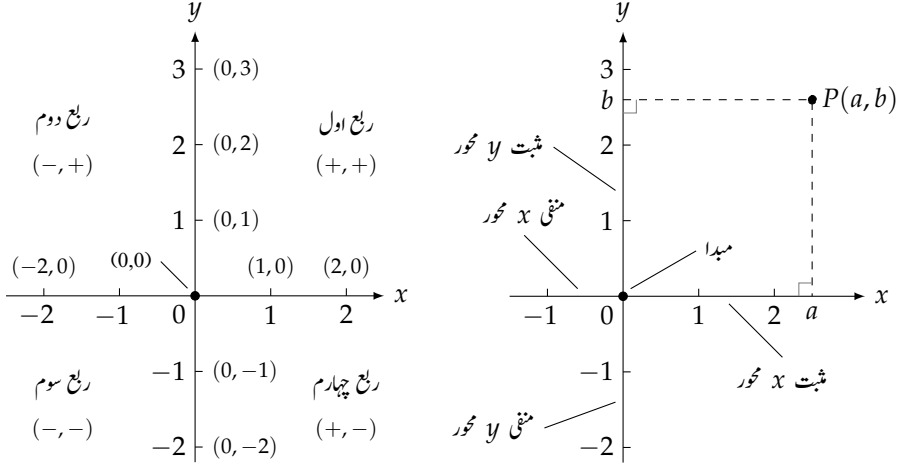
سوال 1.48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ کو ترسیم کریں۔

سوال 1.49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔
جواب: $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 1.50: (الف) تقابل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔



شکل 1.2: کارتیسی محدود

1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدود اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدود

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ ان خطوط کو مستوی میں محدودی محور²⁰ کہتے ہیں۔ افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔ انصافی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محدودی نظام کا مبدأ²¹ کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جاسکتے ہیں۔ اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x محدود²² a ہوگا۔ اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y محدود²³

²⁰ coordinate axis

²¹ origin

²² x-coordinate

²³ y-coordinate

b ہو گا۔ مرتب جوڑی (a, b) کو نقطہ کی محدودی جوڑی²⁴ کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محدودی جوڑی کا y محدود 0 ہو گا جبکہ y محور پر ہر محدودی جوڑی کا x محدود 0 ہو گا۔ محدودی نظام کا مبدا نقطہ $(0, 0)$ ہے۔

محور x کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدا کے دائیں جانب مثبت x محور²⁵ اور مبدا کے بائیں جانب منفی x محور²⁶ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدا y محور کو بھی مثبت y محور اور منفی y محور میں تقسیم کرتا ہے۔ محدودی مستوی کو چار ربعات²⁷ میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پہلا

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ 25 ms^{-1} کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی تناسب پہلو²⁸ ایک جیسے رکھتے ہیں لہذا دونوں محور پر پیمانہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

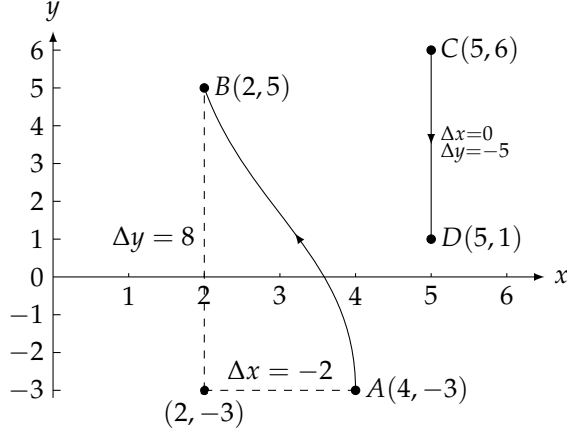
ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدودی میں کل تبدیلی کو بڑھوتری²⁹ کہتے ہیں۔ اختتامی محدودی سے ابتدائی محدودی منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

مثال 1.8: نقطہ $A(4, -3)$ سے نقطہ $B(2, 5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

coordinate pair²⁴
positive x-axis²⁵
negative x-axis²⁶
quadrants²⁷
aspect ratio²⁸
increments²⁹



شکل 1.3: محدودی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہوگی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

□

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5, 6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5, 1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔
حل: $\Delta x = 5 - 5 = 0$, $\Delta y = 1 - 6 = -5$

□

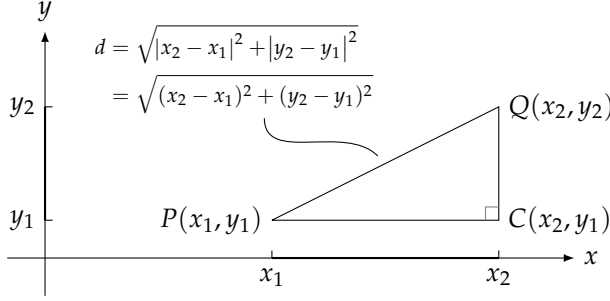
مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہوگا (شکل 1.4)۔

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1.10: (الف) $P(-1, 2)$ اور $Q(3, 4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)

(ب) مبدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

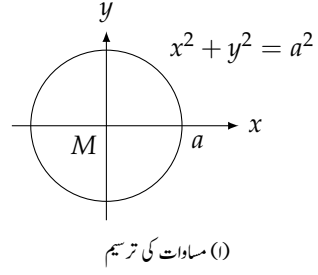
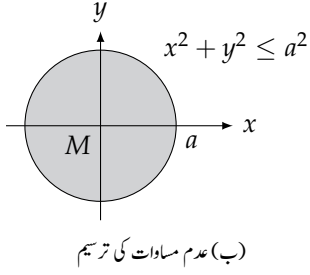
مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو

(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصل $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔ یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔

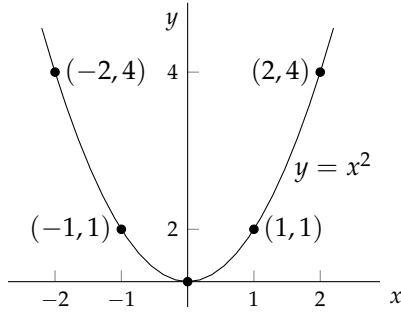
(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصل $\leq a$ ہے۔ یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہوگی (شکل 1.5)۔

□

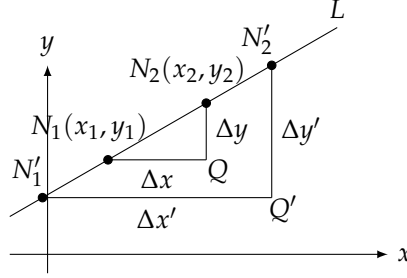
اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو اکائی دائرہ³⁰ کہتے ہیں۔



شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)



شکل 1.6: قطع مکانی (مثال 1.12)



شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N'_1Q'N'_2$ متشابہ مثلثات ہیں لہذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(-1,1)$ ، $(2,4)$ اور $(-2,4)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدد اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو قطع مکافی³¹ کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکساں سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

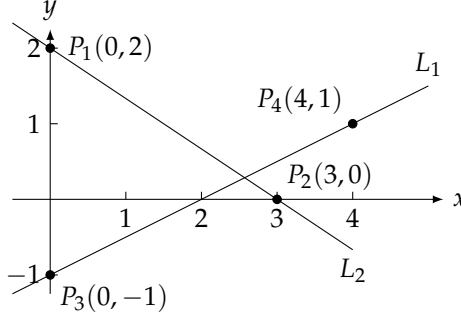
کی قیمت ایک جیسی ہو گی (شکل 1.7)۔

تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی ڈھلوان³² کہلاتی ہے۔

unit circle³⁰
parabola³¹
slope³²



شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)

□

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔ مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔ انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لہذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا³³۔ یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں L_1 کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1 - (-1)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔ اسی طرح L_2 کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

□

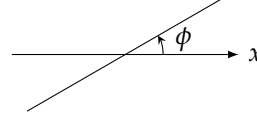
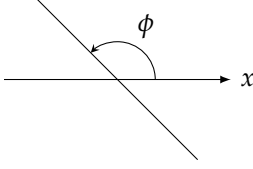
ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ ہے۔ یوں دائیں رخ چلتے ہوئے

خط کی چڑھائی یا اترائی کو زاویہ میلان³⁴ سے بھی ناپا جاتا ہے۔ x محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔ افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔ اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہی ϕ سے ظاہر کیا جائے تب $0 \leq \phi \leq 180^\circ$ ہو گا۔

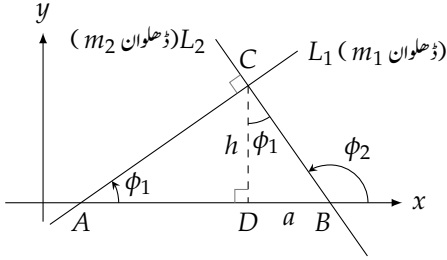
خط کی ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

$$m = \tan \phi$$

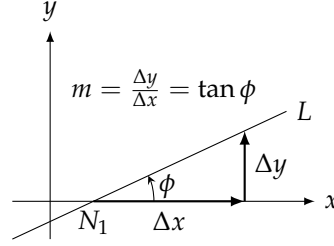
³³ چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔
³⁴ angle of inclination



شکل 1.9: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے



شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق



شکل 1.10: غیر انتصابی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجینٹ ہوتا ہے

متوازی اور قائمہ خطوط

متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔ اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا یہ متوازی ہوں گے۔

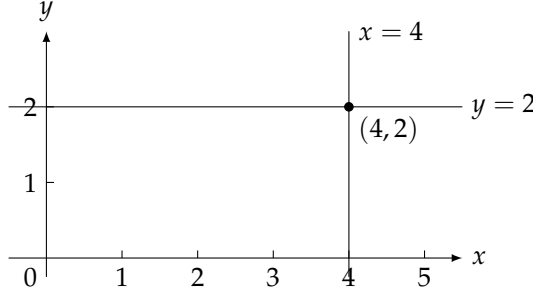
اگر غیر انتصابی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1 m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔ یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan \phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan \phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔ یوں $m_1 m_2 = \left(\frac{a}{h}\right)\left(-\frac{h}{a}\right) = -1$ ہو گا۔

خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ x محور کے نقطہ a سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی x محدد a ہو گی۔ یوں اس انتصابی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔ اسی طرح y محور کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔



شکل 1.12: افقی اور انحصاری خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

مثال 1.14: نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتے افقی اور انحصاری خطوط کے مساوات بالترتیب $y = 2$ اور $x = 4$ ہوں گی (شکل 1.12)۔ □

اگر ہمیں غیر انحصاری سیدھے خط L کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر $N(x, y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = y_1 + m(x - x_1)$$

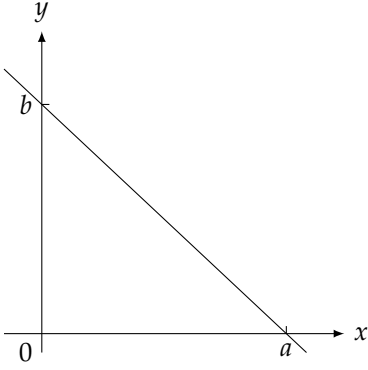
لکھا جاسکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

تعریف: نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان m ہو کی مساوات $y = y_1 + m(x - x_1)$ ہو گی جس کو خط کی نقطہ-ڈھلوان مساوات³⁵ ہے۔ □

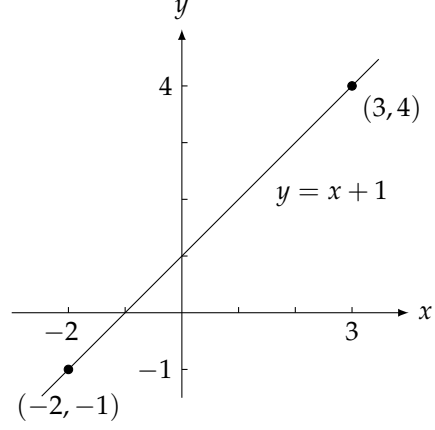
مثال 1.15: نقطہ $(3, 2)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔
حل:

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \implies y = -\frac{2}{3}x + 4$$

point-slope equation³⁵



شکل 1.14: غیر انتصابی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات



شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال 1.16)

□

مثال 1.16: نقطہ $(-2, -1)$ اور $(3, 4)$ سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔
حل: اس خط کی ڈھلوان

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ہے۔ ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ لیتے ہیں نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ لیتے ہیں

$$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2)) \quad y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$$

$$y = -1 + x + 2 \quad y = 4 + x - 3$$

$$y = x + 1 \quad y = x + 1$$

□

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔

غیر انتصابی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y قطع³⁶ کہتے ہیں۔ اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر x محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا x قطع³⁷ کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

³⁶y-intercept
³⁷x-intercept

غیر انتہائی خط جو y محور کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

ہو گی۔

تعریف: درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

کو خط کی ڈھلوان۔ قطع مساوات³⁸ کہتے ہیں۔ اس خط کی ڈھلوان m ہے اور یہ y محور کو b پر قطع کرتا ہے۔

□

□

مثال 1.17: خط $y = 3x - 7$ کی ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ y محور کو -7 پر قطع کرتا ہے۔

درج ذیل مساوات کو عمومی خطی مساوات³⁹ کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \quad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1.18: خط $8x + 5y = 20$ کی y قطع تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات کو ڈھلوان۔ قطع روپ میں لکھ کر y قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$8x + 5y = 20$$

$$5y = -8x + 20$$

$$y = -\frac{8}{5}x + 4$$

□

یوں خط کی ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور y قطع 4 ہے۔

مثال 1.19: مبدا سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔

□

چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہو گا لہذا ان کی مساوات $y = mx$ ہو گی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔

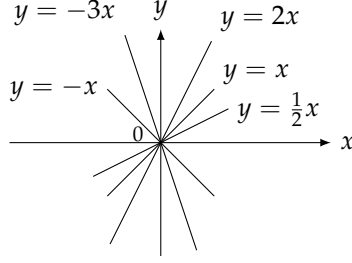
خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔ اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بنا سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں خطی مساوات⁴⁰ کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

slope-intercept equation³⁸

general linear equation³⁹

linear equations⁴⁰



شکل 1.15: مبدأ سے گزرتا خط کی مساوات $y = mx$ ہے جہاں m خط کی ڈھلوان ہے

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔ یہ جاننے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ ڈھلوان سے ہمیں پڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباؤ V اور برقی رو I کا تعلق $V = IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔ اس مساوات کی ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔

□

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی

سوال 1.51 تا سوال 1.54 میں ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1.51: $A(-3, 2), B(-1, -2)$
جواب: $2\sqrt{5}; -4, 2$

سوال 1.52: $A(-1, -2), B(-3, 2)$

سوال 1.53: $A(-3.2, -2), B(-8.1, -2)$
جواب: $-4.9, 0; 4.9$

سوال 1.54: $A(\sqrt{2}, 4), B(0, 1.5)$

سوال 1.55 تا سوال 1.58 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.55: $x^2 + y^2 = 1$
جواب: اکائی دائرہ

سوال 1.56: $x^2 + y^2 = 2$

سوال 1.57: $x^2 + y^2 \leq 3$
جواب: رداس $\sqrt{3}$ کا دائرہ اور اس کی اندرون۔ دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 1.58: $x^2 + y^2 = 0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات
سوال 1.59 تا سوال 1.62 دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کی قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 1.59: $A(-1, 2), B(-2, -1)$
جواب: $m_{\perp} = -\frac{1}{3}$

سوال 1.60: $A(-2, 1), B(2, -2)$

سوال 1.61: $A(2, 3), B(-1, 3)$
جواب: m_{\perp} غیر معین ہے۔

سوال 1.62: $A(-2, 0), B(-2, -2)$

سوال 1.63 تا سوال 1.66 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتا (الف) انتظامی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 1.63: $(-1, \frac{4}{3})$
جواب: (الف) $x = -1$ (ب) $y = \frac{4}{3}$

سوال 1.64: $(\sqrt{2}, -1.3)$

سوال 1.65: $(0, -\sqrt{2})$
جواب: (الف) $x = 0$ (ب) $y = -\sqrt{2}$

سوال 1.66: $(-\pi, 0)$

سوال 1.67 تا سوال 1.80 میں خط کی مساوات تلاش کریں۔ خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 1.67: نقطہ $(-1, 1)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان -1 ہو۔
جواب: $y = -x$

سوال 1.68: نقطہ $(2, -3)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔

سوال 1.69: نقطہ $(3, 4)$ اور $(-2, 5)$ سے گزرتا خط۔
جواب: $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$

سوال 1.70: نقطہ $(-8, 0)$ اور $(-1, 3)$ سے گزرتا خط۔

سوال 1.71: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔
جواب: $y = -\frac{5}{4}x + 6$

سوال 1.72: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع -3 ہے۔

سوال 1.73: نقطہ $(-12, -9)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان 0 ہو۔
جواب: $y = -9$

سوال 1.74: نقطہ $(\frac{1}{3}, 2)$ سے گزرتا خط جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔

سوال 1.75: جس کا x قطع -1 اور y قطع 4 ہو۔
جواب: $y = 4x + 4$

سوال 1.76: جس کا x قطع 2 اور y قطع -6 ہو۔

سوال 1.77: جو نقطہ $(5, -1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x + 5y = 15$ کے متوازی ہو۔
جواب: $y = -\frac{2}{5}x + 1$

سوال 1.78: جو نقطہ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔

سوال 1.79: نقطہ $4, 10$ سے گزرتا اور خط $6x - 3y = 13$ کا قائمہ ہو۔
جواب: $y = -\frac{x}{2} + 12$

سوال 1.80: نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتا اور خط $8x - 13y = 13$ کا قائمہ۔

خط کا x قطع اور y قطع تلاش کریں۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال 1.81 تا سوال 1.84)

سوال 1.81: $3x + 4y = 12$
جواب: قطع $x = 4$ ، قطع $y = 3$

سوال 1.82: $x + 2y = -4$

سوال 1.83: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
جواب: قطع $x = \sqrt{3}$ ، قطع $y = -\sqrt{2}$

سوال 1.84: $1.5x - y = -3$

سوال 1.85: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Bx - Ay = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔
جواب: جی ہاں۔ خطوط قائمہ ہیں چونکہ ان کی ڈھلوان $-\frac{A}{B}$ اور $\frac{B}{A}$ ایک دوسرے کے منفی معکوس ہیں۔

سوال 1.86: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Ax + By = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال 1.87: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(-2, 3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ ، $\Delta y = -6$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔
جواب: $(3, -3)$

سوال 1.88: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(6, 0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = -6$ ، $\Delta y = 0$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 1.89: ایک ذرہ $A(x, y)$ سے $B(3, -3)$ منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ اور $\Delta y = 6$ ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔
جواب: $(-2, -9)$

سوال 1.90: ایک ذرہ $A(1, 0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1, 0)$ کو واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محدود میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال 1.91: پانی میں دباؤ پانی میں d گہرائی پر نقطہ خور p دباؤ محسوس کرے گا جہاں $p = kd + 1$ ہے جہاں k مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر

دباؤ کیا ہو گا؟

جواب: 5.97 کرہ ہوائی دباؤ

سوال 1.92: انعکاس شعاع رُبع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع x محور سے منعکس ہوتی ہے۔ زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔ انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 1.93: سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔ اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔ کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟
جواب: جی ہاں۔ $C = F = -40^\circ$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.94: ایک مثلث کے راس $A(1, 2)$ ، $B(5, 5)$ اور $C(4, -2)$ پر پائے جاتے ہیں۔ مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 1.95: ایک مثلث کے راس $A(0, 0)$ ، $B(1, \sqrt{3})$ اور $C(2, 0)$ ہیں۔ دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

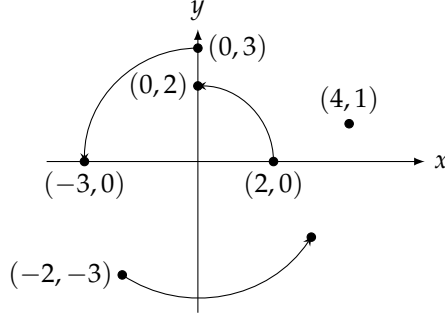
سوال 1.96: دکھائیں کہ $A(2, -1)$ ، $B(1, 3)$ اور $C(-3, 2)$ چکور کی راسیں ہیں۔ چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 1.97: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1, 1)$ ، $(2, 0)$ اور $(2, 3)$ ہیں۔ تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔
جواب: $(-1, 4)$ ، $(-1, -2)$ ، $(5, 2)$

سوال 1.98: مبدا کے گرد گھڑی مخالف 90° گھمانے سے نقطہ $(2, 0)$ اور $(0, 3)$ بالترتیب $(0, 2)$ اور $(-3, 0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔ درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

(ا) $(4, 1)$ (ب) $(-2, -3)$ (ج) $(2, -5)$
(د) $(x, 0)$ (ه) $(0, y)$ (و) (x, y)

سوال 1.99: k کی کس قیمت کے لئے خط $2x + ky = 3$ اور خط $4x + y = 1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟
جواب: $k = -8$ ، $k = \frac{1}{2}$



شکل 1.16: گھڑی مخالف 90° گھومنا (سوال 1.98)

سوال 1.100: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1, 2)$ اور خط $x + 2y = 3$ اور $2x - 3y = -1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 1.101: دکھائیں کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع کا وسط $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ہو گا۔

سوال 1.102: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0, y_0)$ سے خط $L: Ax + By = C$ تک فاصلہ درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

• L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔

• خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔

• N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصلہ تلاش کریں۔

ج) $N(a, b), L: x = -1$

ا) $N(2, 1), L: y = x + 2$

د) $N(x_0, y_0), L: Ax + By = C$

ب) $N(4, 6), L: 4x + 3y = 12$

1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ایلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔ زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔ اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دار و مدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔ چونکہ y کی قیمت مکمل طور پر x تعین کرتا ہے لہذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔ یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ $A = \pi r^2$ ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا رقبہ A تفاعل ہے۔ مساوات $A = \pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لئے A کی یکتا قیمت تلاش کی جاسکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا دائرہ کار⁴¹ کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا سعت⁴² کہتے ہیں۔ چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0, \infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔ اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعداد ہی ہوں گے۔

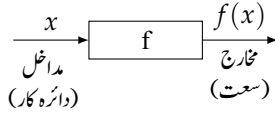
احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ ہم

$$y = f(x) \quad (y \text{ برابر ہے } x \text{ کا } f)$$

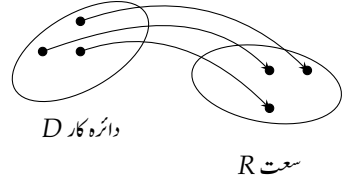
لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y ، متغیر x کا تفاعل ہے۔ یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت x غیر تابع متغیر⁴³ ہے اور خارجی قیمت y تابع متغیر⁴⁴ ہیں۔ x کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہوگی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہوگی۔

تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔

□



شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت



شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کا سعت R کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔ اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

2. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f ، $f(x)$ ، f ، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

domain⁴¹range⁴²independent variable⁴³dependent variable⁴⁴

قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً حقیقی متغیرات⁴⁵ کے حقیقی قیمت تفاعل⁴⁶ پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3 m رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t - 1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0، 2، $x + 2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔
حل:

$$F(0) = 2(0 - 1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$F(2) = 2(2 - 1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$F(x + 2) = 2(x + 2 - 1) + 3 = 2x + 5$$

$$F(F(2)) = F(5) = 2(5 - 1) + 3 = 11$$

□

real variables⁴⁵
real valued function⁴⁶

روایت دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔ اس کو تفاعل کا قدرتی دائرہ کار⁴⁷ کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔ اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم " $y = x^2, x \geq 2$ " لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔ تفاعل $y = x^2$ کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کا سعت $[4, \infty)$ ہو گا جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

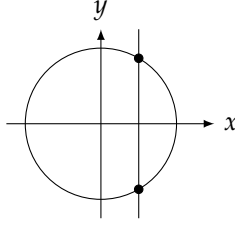
تفاعل	(x) دائرہ کار	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لئے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔ اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔ دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا اسوائے $x = 0$ ، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لئے حقیقی y دیتا ہے۔ تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔ اس کا سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لئے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔ یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا۔ □



شکل 1.19: دائرے کو تقاطع تصور کرنا غلط ہے۔

تقاطع کی ترسیم

تقاطع f کی تقسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدود تقاطع f کی داخلی، خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

ضروری نہیں کہ ہر مغنی جو آپ ترسیم کریں تقاطع کی مغنی ہو۔ تقاطع ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تقاطع کے دائرہ کار میں ہر x کے لئے تقاطع کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہذا کوئی بھی انتصابی خط تقاطع کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔ چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہذا دائرہ تقاطع نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔ اگر تقاطع f کی دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تقاطع کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

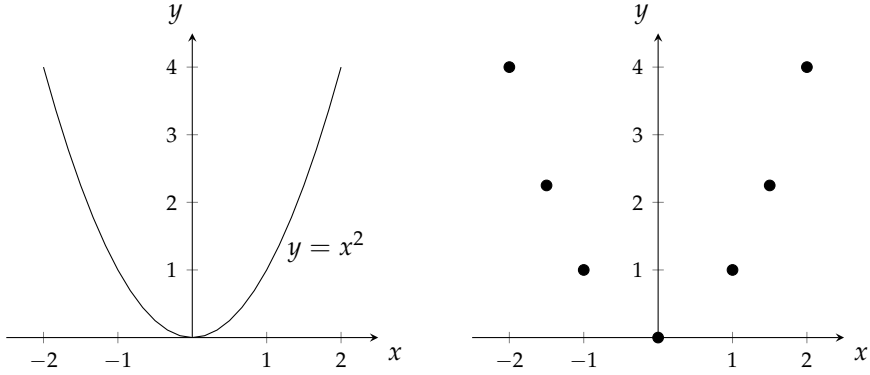
مثال 1.24: وقفہ $[-2, 2]$ پر تقاطع $y = x^2$ ترسیم کریں۔
حل: پہلا قدم: پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تقاطع کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو xy مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔
تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار مغنی کھینچیں۔ مغنی پر سرخی لکھیں۔

□

احصاء میں استعمال کئی تقاطع کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ان تقاطع کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔



شکل 1.20: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال 1.24)

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کرنے سے تفاعل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل $f + g$ ، $f - g$ اور $f \cdot g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

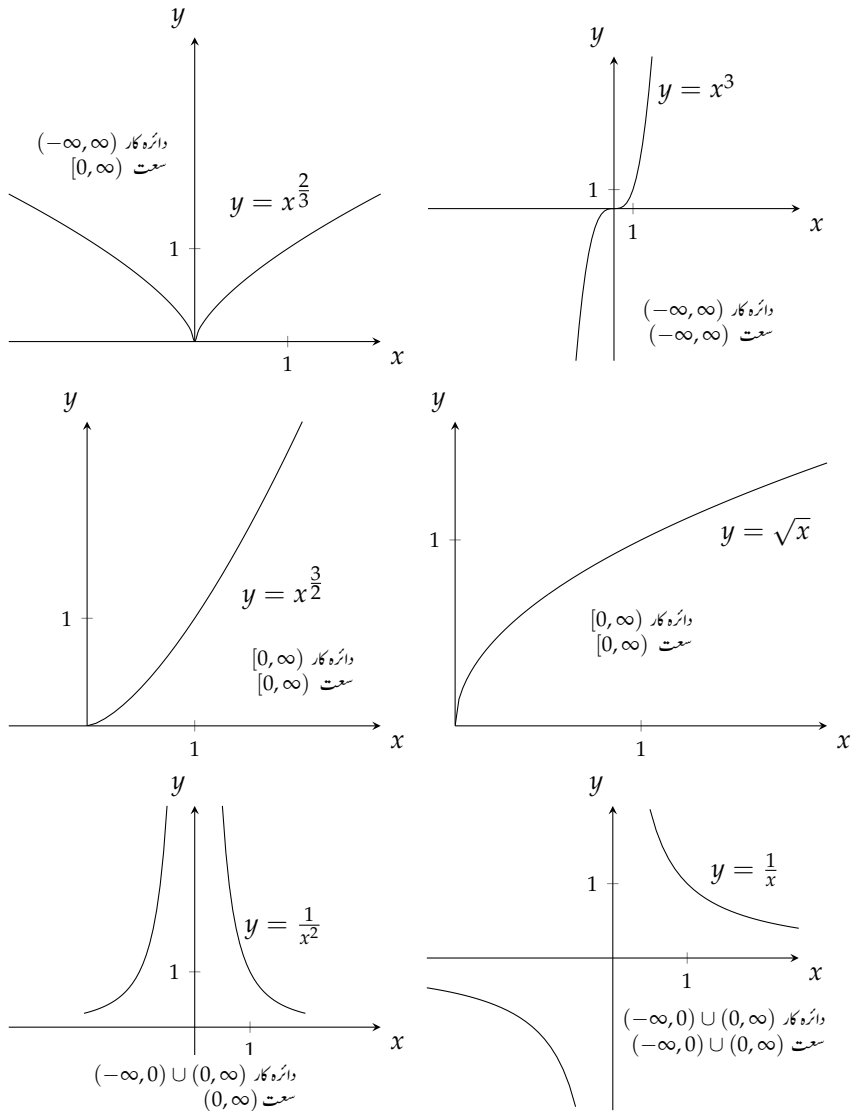
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

f اور g کی دائرہ کار کے اشتراک $D(f) \cap D(g)$ جہاں $g(x) \neq 0$ ہو ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہوگی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$



شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$3g$	$3g(x) = 3\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1) \quad (x = 1 \text{ ماسوائے})$
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1] \quad (x = 0 \text{ ماسوائے})$

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جاسکتا ہے جس کو مرکب تفاعل $f \circ g$ ⁴⁸ کہتے ہیں۔

تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f \circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f \circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

□

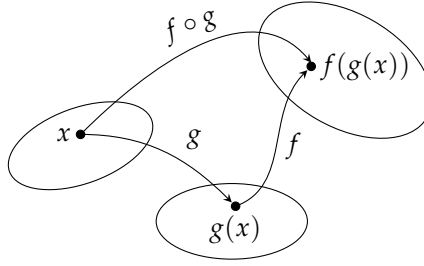
تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جاسکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔ $f \circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

معین $f \circ g$ حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $f \circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f \circ g$ اور $g \circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = x + 1$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

composite function⁴⁸



شکل 1.22: مرکب تفاعل

ا. $(f \circ g)(x)$ ب. $(g \circ f)(x)$ ج. $(f \circ f)(x)$ د. $(g \circ g)(x)$

حل:

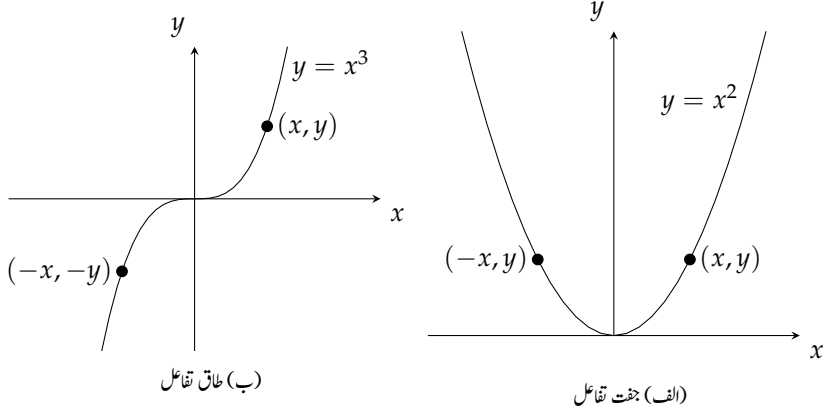
مرکب	دائرہ کار
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$	$(-\infty, \infty)$

یہ جاننے کے لئے کہ $f \circ g$ کا دائرہ کاریوں $[-1, \infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x) = x+1$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $x+1 \geq 0$ یعنی $x \geq -1$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ جفت⁴⁹ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ہے۔

چونکہ $f(-x) = f(x)$ ہے لہذا نقطہ (x, y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یوں جفت تفاعل کی ترسیم y محور کے لحاظ سے تشاکل ہوگی (شکل 1.23-الف)۔ y محور کے ایک جانب ترسیم جاتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جاسکتی ہے۔



شکل 1.23: جفت اور طاق تفاعل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ طاق⁵⁰ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

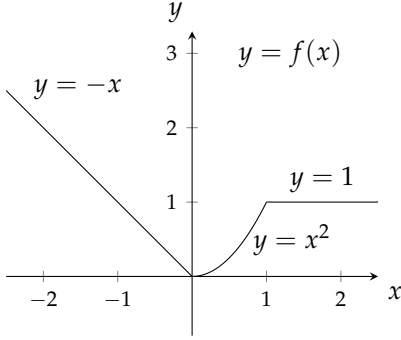
طاق تفاعل کی ترسیم مہدا کے لحاظ سے تشاکل ہوگی (شکل 1.23-ب)۔ چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یہاں بھی y محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جاسکتی ہے۔

ٹکڑوں میں معین تفاعل

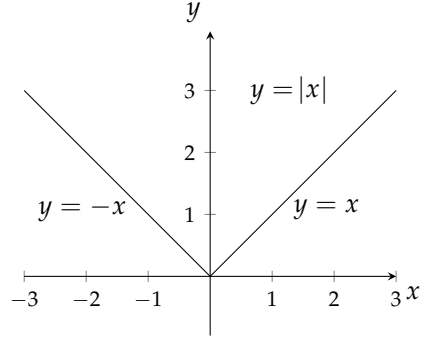
بعض اوقات ایک تفاعل کو اس کے دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات ظاہر کرتی ہیں۔ اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفاعل ہے (شکل 1.24)۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔



شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27



شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل

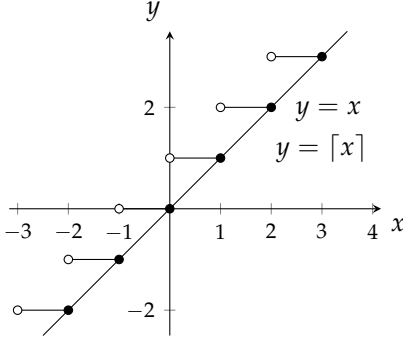
ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو بڑا ترین عدد صحیح تفاعل⁵¹ یا عدد صحیح زمین تفاعل⁵² کہلاتا جس کو $\lfloor x \rfloor$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \lfloor 2.4 \rfloor &= 2, & \lfloor 1.9 \rfloor &= 1, & \lfloor 0 \rfloor &= 0, & \lfloor -1.2 \rfloor &= -2 \\ \lfloor 2 \rfloor &= 2, & \lfloor 0.2 \rfloor &= 0, & \lfloor -0.3 \rfloor &= -1, & \lfloor -2 \rfloor &= -2 \end{aligned}$$

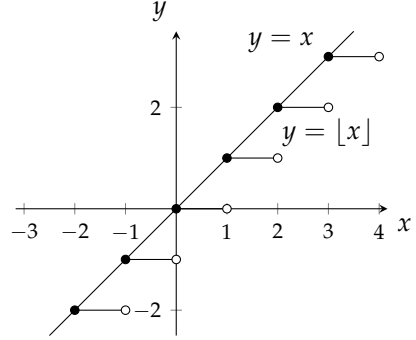
□

مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو کم ترین عدد صحیح تفاعل⁵³ یا عدد صحیح چھت تفاعل⁵⁴ کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ اس کی مثال نیگیٹیو کا کرایا

greatest integer function⁵¹
integer floor function⁵²
least integer function⁵³
integer ceiling function⁵⁴



شکل 1.27: عدد صحیح چھت تقابل (مثال 1.29)



شکل 1.26: عدد صحیح زمین تقابل (مثال 1.28)

ہے جو فی کلو میٹر واجب الادا ہوتا ہے۔ اضافی نامکمل کلو میٹر کی صورت میں مکمل کلو میٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔ یوں 17.2 کلو میٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلو میٹر کا کرایا واجب الادا ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} [3.2] &= 4, & [2.9] &= 3, & [0] &= 0, & [2] &= 2, \\ [-5] &= -5, & [-5.6] &= -5, & [-0.9] &= 0, & [-7.2] &= -7 \end{aligned}$$

□

سوالات

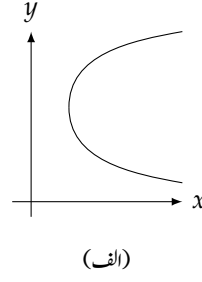
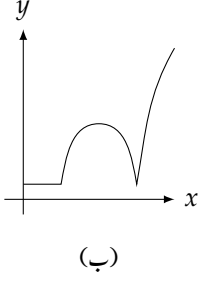
سوال 1.103 تا سوال 1.108 میں تقابل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1.103: $f(x) = 1 + x^2$
جواب: دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ، سعت $[1, \infty)$

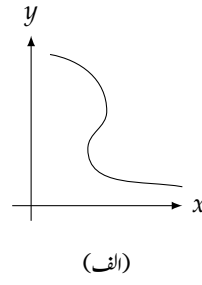
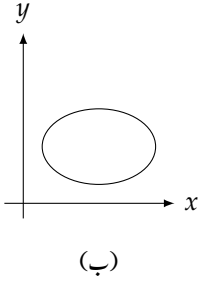
سوال 1.104: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

سوال 1.105: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
جواب: دائرہ کار $(0, \infty)$ ، سعت $(0, \infty)$

سوال 1.106: $F(t) = \frac{1}{1 + \sqrt{t}}$



شکل 1.28: اشکال برائے سوال 1.109



شکل 1.29: اشکال برائے سوال 1.110

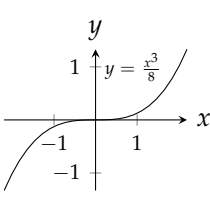
سوال 1.107: $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$
جواب: دائرہ کار $[-2, 2]$ ، سعت $[0, 2]$

سوال 1.108: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

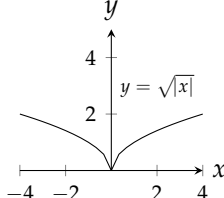
سوال 1.109: شکل 1.28 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) چونکہ چند x پر y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا x کا تفاعل نہیں ہے۔
(ب) چونکہ ہر x پر y کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہذا x کا تفاعل ہے۔

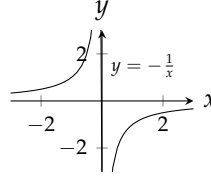
سوال 1.110: شکل 1.29 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔



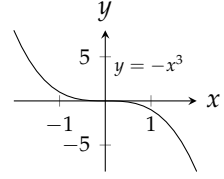
شکل 1.33



شکل 1.32



شکل 1.31



شکل 1.30

تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

سوال 1.111: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی x کا تفاعل لکھیں۔

جواب: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $p = 3x$

سوال 1.112: چکور کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں چکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔ اب چکور کے رقبہ کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال 1.113: مکعب کی ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں لکھیں۔ مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو d کا تفاعل لکھیں۔

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad A = 2d^2, \quad V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$$

سوال 1.114: رابع اول میں نقطہ N تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔ N کے محدود کو مبداء سے N تک خط کی ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

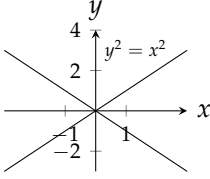
تفاعل اور ترسیم

سوال 1.115 تا سوال 1.126 میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ ان میں کوئی تشاکل پائی جاتی ہے (اگر پائی جاتی ہو تب)۔ اشکال 1.21 میں دی ترسیم کا سہارا لیا جاسکتا ہے۔

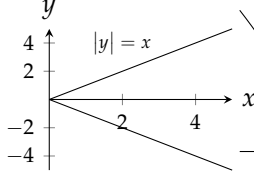
$$y = -x^3 \quad \text{سوال 1.115}$$

جواب: مبداء کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.30

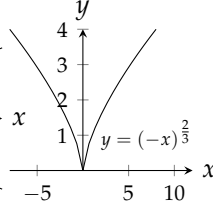
$$y = -\frac{1}{x^2} \quad \text{سوال 1.116}$$



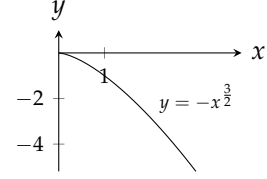
شکل 1.37



شکل 1.36



شکل 1.35



شکل 1.34

سوال 1.117: $y = -\frac{1}{x}$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.31

سوال 1.118: $y = \frac{1}{|x|}$

سوال 1.119: $y = \sqrt{|x|}$
جواب: y محدود کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.32

سوال 1.120: $y = \sqrt{-x}$

سوال 1.121: $y = \frac{x^3}{8}$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.33

سوال 1.122: $y = -4\sqrt{x}$

سوال 1.123: $y = -x^{3/2}$
جواب: کوئی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 1.34

سوال 1.124: $y = (-x)^{3/2}$

سوال 1.125: $y = (-x)^{2/3}$
جواب: y محور کے لحاظ سے تشاکل۔ شکل 1.35

سوال 1.126: $y = -x^{2/3}$

سوال 1.127: (الف) $|y| = x$ اور (ب) $y^2 = x^2$ ترسیم کریں۔ یہ مساوات x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) x کی ہر مثبت قیمت کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.36
(ب) ہر $x \neq 0$ کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.37

سوال 1.128: (الف) $|x| + |y| = 1$ اور (ب) $|x + y| = 1$ ترسیم کریں۔ یہ x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ وجہ پیش کریں۔

جفت اور طاق تفاعل
سوال 1.129 تا سوال 1.140 میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ جفت ہیں؟

سوال 1.129: $f(x) = 3$
جواب: جفت

سوال 1.130: $f(x) = x^{-5}$

سوال 1.131: $f(x) = x^2 + 1$
جواب: جفت

سوال 1.132: $f(x) = x^2 + x$

سوال 1.133: $g(x) = x^3 + x$
جواب: طاق

سوال 1.134: $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

سوال 1.135: $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
جواب: جفت

سوال 1.136: $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

سوال 1.137: $h(t) = \frac{1}{t - 1}$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 1.138: $h(t) = |t^3|$

سوال 1.139: $h(t) = 2t + 1$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 1.140: $h(t) = 2|t| + 1$

مجموعے، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم
سوال 1.141 تا سوال 1.142 میں f ، g ، $f + g$ اور $f \cdot g$ کا دائرہ کار اور سمت تلاش کریں۔

سوال 1.141: $f(x) = x$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$
جوابات: $D_f : -\infty < x < \infty$ ، $D_g : x \geq 1$ ، $R_f : -\infty < y < \infty$ ، $R_g : y \geq 0$ ،
 $D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g$ ، $R_{f+g} : y \geq 1$ ، $R_{f \cdot g} : y \geq 0$

سوال 1.142: $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 1.143 تا سوال 1.144 میں f ، g ، $\frac{f}{g}$ اور $\frac{g}{f}$ کا دائرہ کار اور سمت تلاش کریں۔

سوال 1.143: $f(x) = 2$ ، $g(x) = x^2 + 1$
جواب: $D_f : -\infty < x < \infty$ ، $D_g : -\infty < x < \infty$ ، $R_f : y = 2$ ، $R_g : y \geq 1$ ،
 $D_{\frac{f}{g}} : -\infty < x < \infty$ ، $R_{\frac{f}{g}} : 0 < y \leq 2$ ، $D_{\frac{g}{f}} : -\infty < x < \infty$ ، $R_{\frac{g}{f}} : y \geq \frac{1}{2}$

سوال 1.144: $f(x) = 1$ ، $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تفاعل کے مرکب

سوال 1.145: اگر $f(x) = x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $f(g(0))$ ج. $f(g(x))$ د. $f(f(-5))$ ز. $f(f(x))$
ب. $g(f(0))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

جواب:

ا. 2 ج. $x^2 + 2$ د. 5 ز. $g + 10$
 ب. 22 د. $x^2 + 10x + 22$ و. -2 ح. $x^4 - 6x^2 + 6$

سوال 1.146: اگر $f(x) = x - 1$ اور $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $f(g(\frac{1}{2}))$ ج. $f(g(x))$ د. $f(f(2))$ ز. $f(f(x))$
 ب. $g(f(\frac{1}{2}))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

سوال 1.147: اگر $u(x) = 4x - 5$ ، $v(x) = x^2$ اور $f(x) = \frac{1}{x}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $u(v(f(x)))$ ج. $v(u(f(x)))$ د. $f(u(v(x)))$
 ب. $u(f(v(x)))$ د. $v(f(u(x)))$ و. $f(v(u(x)))$

جواب:

ا. $\frac{4}{x^2} - 5$ ج. $(\frac{4}{x} - 5)^2$ د. $\frac{1}{4x^2 - 5}$
 ب. $\frac{4}{x^2} - 5$ د. $(\frac{1}{4x-5})^2$ و. $\frac{1}{(4x-5)^2}$

سوال 1.148: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{x}{4}$ اور $h(x) = 4x - 8$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $h(g(f(x)))$ ج. $g(h(f(x)))$ د. $f(g(h(x)))$
 ب. $h(f(g(x)))$ د. $g(f(h(x)))$ و. $f(h(g(x)))$

سوال 1.149 اور سوال 1.149 میں $f(x) = x - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $h(x) = x^3$ اور $j(x) = 2x$ لیں۔ سوال کے ہر جزو کو متفاعل کا مرکب لکھیں۔ مرکب میں f ، g ، h اور j میں سے ایک یا ایک سے زیادہ متفاعل ہو سکتے ہیں۔

سوال 1.149:

$$\begin{array}{lll} \text{ا.} & y = \sqrt{(x-3)^3} & \text{ب.} & y = 2\sqrt{x} \\ \text{ب.} & y = (2x-6)^3 & \text{ج.} & y = 4x \\ \text{ج.} & y = x^{\frac{1}{4}} & \text{د.} & y = \sqrt{x} - 3 \end{array}$$

جواب:

$$\begin{array}{lll} \text{ا.} & f(g(x)) & \text{ب.} & g(g(x)) \\ \text{ب.} & j(j(x)) & \text{ج.} & j(j(f(x))) \\ \text{ج.} & h(j(f(x))) & \text{د.} & g(h(f(x))) \end{array}$$

سوال 1.150:

$$\begin{array}{lll} \text{ا.} & y = 2x - 3 & \text{ب.} & y = x^{\frac{3}{2}} \\ \text{ب.} & y = \sqrt{x^3 - 3} & \text{ج.} & y = x^9 \\ \text{ج.} & y = 2\sqrt{x-3} & \text{د.} & y = x - 6 \end{array}$$

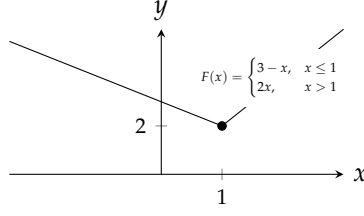
سوال 1.151: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	\sqrt{x}	
(ب)	$x + 2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ه)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	
(و)	$\frac{1}{x}$		x

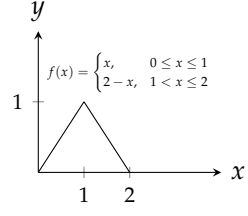
جواب:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	\sqrt{x}	$\sqrt{x-7}$
(ب)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(ج)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(ه)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
(و)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

سوال 1.152: کوئی عدد x لیں۔ اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔ نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔ نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔ جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟



شکل 1.39



شکل 1.38

ٹکڑوں میں معین تفاعل

سوال 1.153 تا سوال 1.156 میں تفاعل ترسیم کریں۔

سوال 1.153:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جواب: شکل 1.38

سوال 1.154:

$$g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

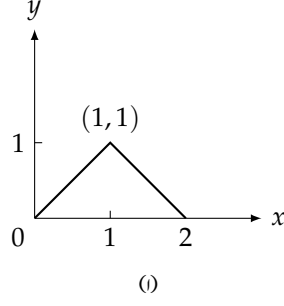
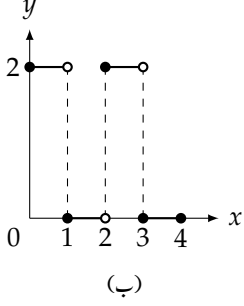
سوال 1.155:

$$F(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

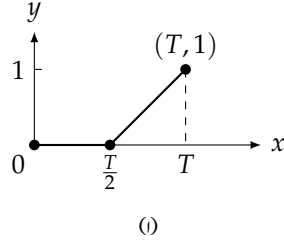
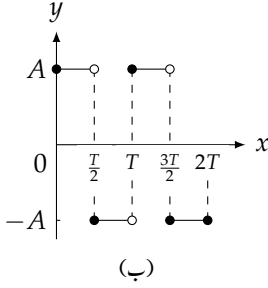
جواب: شکل 1.39

سوال 1.156:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$$



شکل 1.40: اشکال برائے سوال 1.157



شکل 1.41: اشکال برائے سوال 1.158

سوال 1.157: شکل 1.40 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

جواب: (الف) $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ (ب) $y = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \leq x < 3 \\ 3-x, & 3 \leq x < 4 \end{cases}$

سوال 1.158: شکل 1.41 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چھت اور زمین تفاعل

سوال 1.159: x کی کن قیمتوں کے لئے (الف) $[x] = 0$ ہوگا؟ (ب) $\lceil x \rceil = 0$ ہوگا؟
جواب: الف $0 \leq x < 1$ (ب) $-1 < x \leq 0$

سوال 1.160: کون سے عدد صحیح x مساوات $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال 1.161: کیا تمام x کے لئے $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 1.162: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔ $f(x)$ کو x کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل

سوال 1.163: فرض کریں کہ f جفت تفاعل اور g طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط \mathbb{R} پر معین ہیں۔ درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

- | | | |
|------------------|----------------|----------------|
| ا. fg | د. $f^2 = ff$ | ز. $g \circ f$ |
| ب. $\frac{f}{g}$ | ه. $g^2 = gg$ | ح. $f \circ f$ |
| ج. $\frac{g}{f}$ | و. $f \circ g$ | ط. $g \circ g$ |

جواب:

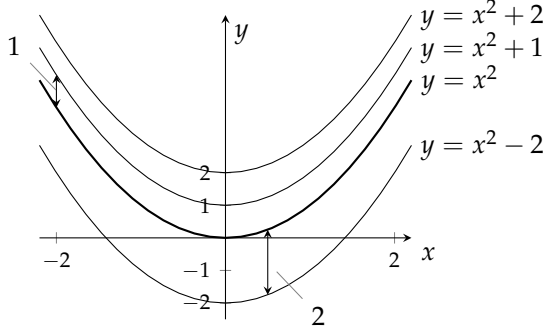
- | | | |
|--------|--------|--------|
| ا. طاق | د. جفت | ز. جفت |
| ب. طاق | ه. جفت | ح. جفت |
| ج. طاق | و. جفت | ط. طاق |

سوال 1.164: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

ترسیم

سوال 1.165: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = \sqrt{1-x}$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم کو بھی ترسیم کریں۔

سوال 1.166: فرض کریں کہ $f(x) = x - 7$ اور $g(x) = x^2$ ہیں۔ f اور g کے ساتھ $f \circ g$ اور $g \circ f$ کو بھی ترسیم کریں۔



شکل 1.42: تقابل $f(x) = x^2$ کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال 1.30 اور مثال 1.31)۔

1.4 ترسیم کی منتقلی

اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ ایسا کرنے سے نئی مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔ اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کا ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتا ہے۔ ہم دائرہ اور قطع مکانی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر دیگر منحنيات پر بھی قابل لاگو ہے۔

ترسیم کو کیسے منتقل کیا جاتا ہے

تقابل $y = f(x)$ کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ $y = f(x)$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔

مثال 1.30: کلیہ $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے $y = x^2 + 1$ حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل 1.42)۔

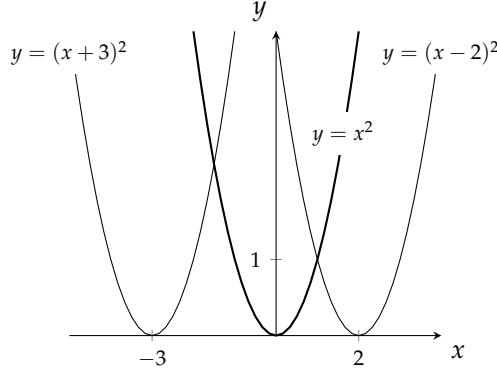
□

مثال 1.31: مساوات $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = x^2 - 2$ ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل 1.42)۔

□

مثال 1.32: $y = x^2$ میں x کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل 1.43)۔

□



شکل 1.43: $y = x^2$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر x کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔ دائیں منتقلی کی خاطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال 1.32 اور مثال 1.33)

$y = f(x)$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لئے x کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال 1.33: $y = x^2$ میں x کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = (x-2)^2$ حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل 1.43)۔ □

منتقلی کے کلیات

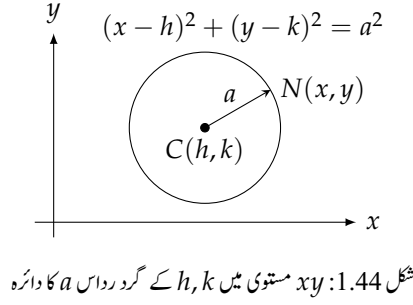
$$y = f(x) + k \quad \text{اُتھالی منتقلی}$$

$k > 0$ کی صورت میں ترسیم k اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ $k < 0$ کی صورت میں ترسیم $|k|$ اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

$$y = f(x - h) \quad \text{افقی منتقلی}$$

$h > 0$ کی صورت میں ترسیم h اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ $h < 0$ کی صورت میں ترسیم $|h|$ اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

مثال 1.34: $y = (x-2)^2 + 3$ تعامل $y = x^2$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ □



مساوات دائرہ

ایک مقررہ نقطہ سے یکساں فاصلے پر نقطوں کا سلسلہ دائرہ کہلاتا ہے۔ مقررہ نقطہ کو دائرے کا مرکز⁵⁵ کہتے ہیں جبکہ مرکز سے دائرے تک فاصلے کو دائرے کی رداس⁵⁶ کہتے ہیں (شکل 1.44)۔ ہم نے مثال 1.11 میں دیکھ کر مبدا کے گرد رداس a کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ہے۔ مرکز کو (h, k) منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ حاصل ہوتی ہے۔

رداس a کا دائرہ جس کا مرکز (h, k) ہو کی معیاری مساوات

$$(1.3) \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

مثال 1.35: دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔ نئی مساوات $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ہو گی۔ اس کا مرکز $(-2, 3)$ ہو گا۔ □

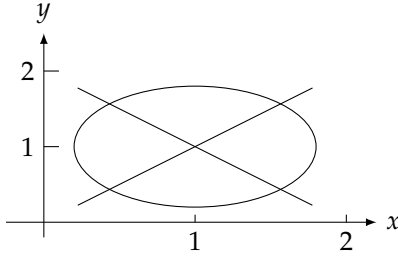
مثال 1.36: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز 3, 4 پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

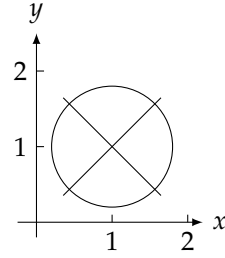
□

مثال 1.37: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$



(ب) غیر چکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے



(i) چکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے

شکل 1.45: چکور اور غیر چکور نقش

حل: اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رداس $a = \sqrt{3}$ اور مرکز $(h, k) = (1, -5)$ لکھے
□ جاسکتے ہیں۔

کمپیوٹر چکور نقش جس میں افقی اور انحصاری محور کی پیمائش ایک جیسی ہو۔ چکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔ غیر چکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔ چکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شیشہ نہیں ہے۔ بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام x اور y محور کی پیمائش غیر یکساں کرتے ہیں۔ یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔ عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جاسکتا ہے کہ وہ چکور ترسیم ہی دکھائے۔ شکل 1.45 میں چکور اور غیر چکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائری کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 1.38: درج ذیل دائرہ کا رداس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

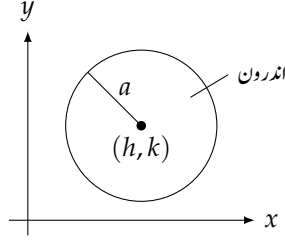
$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 3$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 3$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 = 4^2$$

□

یوں رداس $a = 4$ اور مرکز $(h, k) = (-2, 3)$ ہیں۔



شکل 1.46: دائرے کی اندرون

اندرون اور بیرون

دائرہ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا (h, k) سے فاصلہ a اکائیوں سے کم ہو۔ یہ نقطے درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

اس خطہ کو دائرے کی اندرون⁵⁷ کہتے ہیں (شکل 1.46)۔

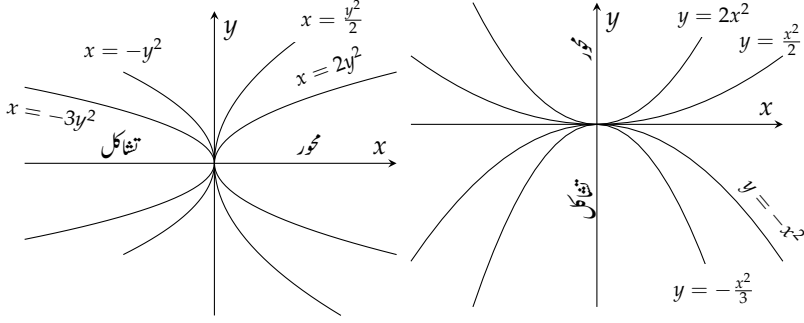
دائرے کی بیرون⁵⁸ ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا (h, k) سے فاصلہ a اکائیوں سے زیادہ ہو۔ ایسے نقطے درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2$$

مثال 1.39:

خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کی اندرون	$x^2 + y^2 < 1$
اکائی دائرہ اور اس کی اندرون	$x^2 + y^2 \leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2 + y^2 > 1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2 + y^2 \geq 1$

□

شکل 1.48: قطع مکانی $x = ay^2$ شکل 1.47: قطع مکانی $y = ax^2$

قطع مکانی ترسیم

مسادات $y = 3x^2$ یا $y = -5x^2$ جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y = ax^2$$

کی ترسیم کو قطع مکانی⁵⁹ کہتے ہیں جس کی محور⁶⁰ تفاضل y محور ہے۔ اس قطع مکانی کی راس⁶¹ (جہاں قطع مکانی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبدا پر پائی جاتی ہے۔ مثبت a ($a > 0$) کی صورت میں یہ قطع مکانی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی a ($a < 0$) کی صورت میں یہ قطع مکانی نیچے کو کھلتا ہے۔ $|a|$ کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکانی اتنا تنگ ہو گا (شکل 1.47)۔

کلیہ $y = ax^2$ میں x اور y کو آپس میں اول بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$x = ay^2$$

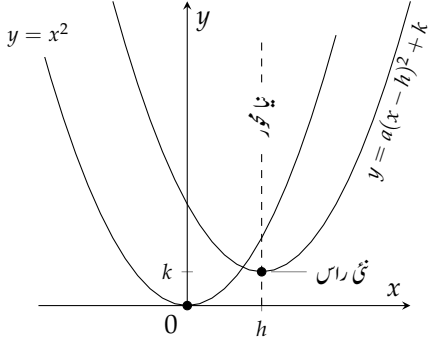
اس قطع مکانی کی ترسیم کا محور، x محور ہو گا اور اس کی راس مبدا پر پائی جائے گی (شکل 1.48)۔

مثال 1.40: کلیہ $x = y^2$ ہمیں x بطور y کا تفاضل دیتا ہے لیکن یہ ہمیں y بطور x کا تفاضل نہیں دیتا ہے۔ y کے لئے حل کرتے ہوئے $y = \pm\sqrt{x}$ حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت x کے لئے y کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تفاضل کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

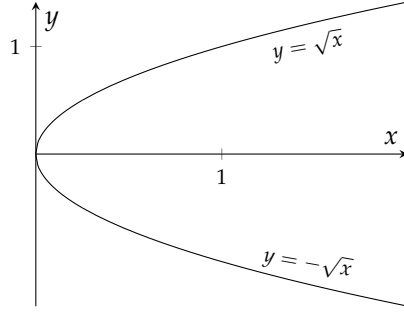
ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تفاضل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ تصور کیا جاسکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت x کے لئے یہ کلیات y کی ایک قیمت دیتے ہیں۔ $y = \sqrt{x}$ کی ترسیم قطع مکانی کا بالائی حصہ اور $y = -\sqrt{x}$ قطع مکانی کا نچلا حصہ دیتے ہیں (شکل 1.49)۔

□

⁵⁹ parabola
⁶⁰ axis
⁶¹ vertex



شکل 1.50: قطع مکانی $y = ax^2$, $a > 0$ کو h اکائیاں دائیں اور k اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے



شکل 1.49: تقابل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کی ترسیم مبداء پر ملتے ہیں اور مساوات $x = y^2$ کی ترسیم دیتے ہیں (مثال 1.40)

دو درجی مساوات $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

قطع مکانی $y = ax^2$ کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$(1.4) \quad y = a(x - h)^2$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$(1.5) \quad y - k = a(x - h)^2$$

لکھتے ہیں۔ دونوں منتقلی سے قطع مکانی کی راس (h, k) کو منتقل ہوتی ہے جبکہ اس کا محور $x = k$ ہو گا (شکل 1.50)۔

مساوات 1.5 کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(1.6) \quad y = ax^2 + bx + c$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت $y = ax^2$ کی ترسیم ہو گی جس کو کہیں اور منتقل کیا گیا ہے۔ کیوں؟ اس لئے کہ جس طرح مساوات 1.5 سے مساوات 1.6 حاصل کی گئی اسی طرح واپس مساوات 1.6 سے مساوات 1.5 بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ منحنی $y = ax^2 + bx + c$ اور $y = ax^2$ کی صورت اور سمت بندی ایک جیسی ہیں۔

قطع مکانی $y = ax^2 + bx + c$ کا محور خط $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا۔ اس کا قطع y حاصل کرنے کی خاطر $x = 0$ پر کیا جائے گا۔

منحنی $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ کی ترسیم مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم قطع مکانی ہے جو $a > 0$ کی صورت میں اوپر رخ اور $a < 0$ کی صورت میں نیچے رخ کھلتا ہے۔ اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$(1.7) \quad x = -\frac{b}{2a}$$

اس کی راس اس نقطے پر ہوگی جہاں قطع مکانی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔ راس کا $x = -\frac{b}{2a}$ محدود x جس کو قطع مکانی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدود حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1.41: ترسیم قطع مکانی

مساوات $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ترسیم کریں۔

حل: پہلا قدم: مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

دوسرا قدم: چونکہ $a < 0$ ہے لہذا قطع مکانی نیچے کھلا ہے۔

تیسرا قدم: قطع مکانی کی محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔ اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

یوں راس کا x محدود -1 ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدود حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

اس طرح راس $(-1, \frac{9}{2})$ ہوگی۔

چوتھا قدم: قطع x (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

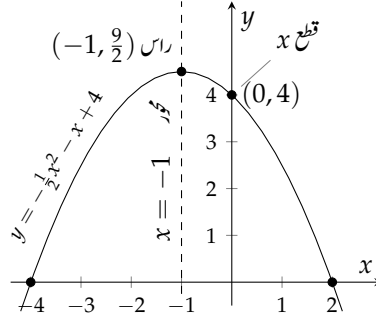
$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \quad \text{قطع مکانی کی مساوات میں } y = 0 \text{ پر کریں}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (x-2)(x+4) = 0 \quad \text{دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں}$$

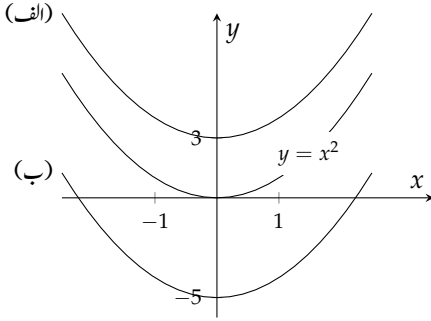
$$x = 2, \quad x = -4$$

پانچواں قدم: $y = ax^2$ کا خاکہ بناتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کر کے منتقلی کے بعد کے xy محور کھینچیں (شکل 1.51)۔

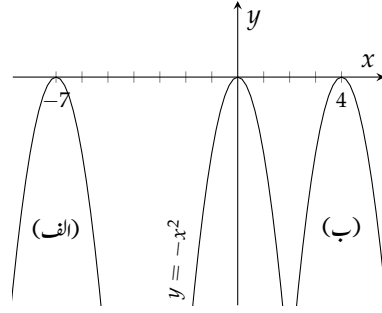
□



شکل 1.51: ترسیم قطع مکیانی (مثال 1.41)



شکل 1.53: اشکال برائے سوال 1.168



شکل 1.52: اشکال برائے سوال 1.167

سوالات

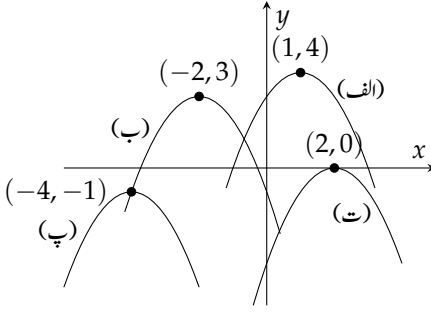
ترسیم کی منتقلی
سوال 1.167: شکل 1.52 میں $y = -x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

جواب: (الف) $y = -(x+7)^2$ (ب) $y = -(x-4)^2$

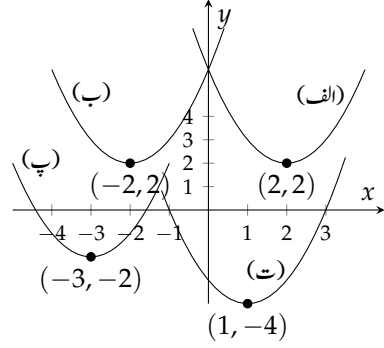
سوال 1.168: شکل 1.53 میں $y = x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

سوال 1.169: شکل 1.54 میں دکھائے گئے ترسیم کی مساوات درج ذیل میں سے منتخب کریں۔

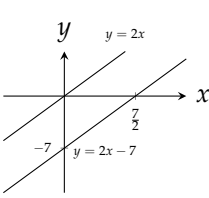
$$y = (x-1)^2 - 4, \quad y = (x-2)^2 + 2, \quad y = (x+2)^2 + 2, \quad y = (x+3)^2 - 2$$



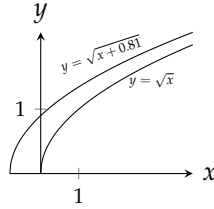
شکل 1.55: اشکال برائے سوال 1.170



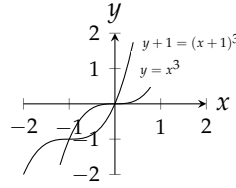
شکل 1.54: اشکال برائے سوال 1.169



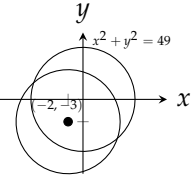
شکل 1.59



شکل 1.58



شکل 1.57



شکل 1.56

جواب: (الف) $y = (x - 2)^2 + 2$ (ب) $y = (x + 2)^2 + 2$ (پ) $y = (x + 3)^2 - 2$ (ت) $y = (x - 1)^2 - 4$

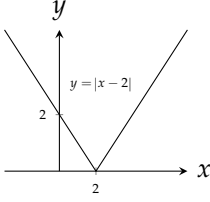
سوال 1.170: شکل 1.55 میں $y = -x^2$ کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔ چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔

سوال 1.171 تا سوال 1.182 میں ترسیم منتقل کریں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساوات حاصل کریں۔ اصل اور منتقل شدہ ترسیم کھینچیں۔

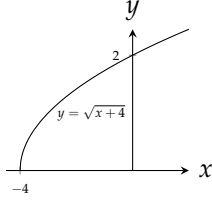
سوال 1.171: $x^2 + y^2 = 49$ کو 3 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

جواب: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$ ، شکل 1.56

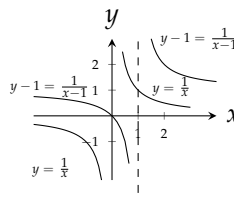
سوال 1.172: $x^2 + y^2 = 25$ کو 3 اوپر، 4 بائیں منتقل کریں۔



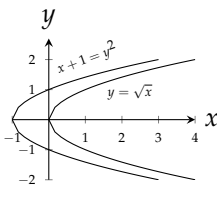
شکل 1.63



شکل 1.62



شکل 1.61



شکل 1.60

سوال 1.173: $y = x^3$ کو 1 نیچے، 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y + 1 = (x + 1)^3$ ، شکل 1.57

سوال 1.174: $y = x^{\frac{2}{3}}$ کو 1 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال 1.175: $y = \sqrt{x}$ کو 0.81 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y = \sqrt{x + 0.81}$ ، شکل 1.58

سوال 1.176: $y = -\sqrt{x}$ کو 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 1.177: $y = 2x - 7$ کو 7 اوپر منتقل کریں۔
جواب: $y = 2x$ ، شکل 1.59

سوال 1.178: $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$ کو 5 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

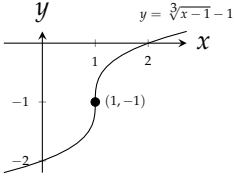
سوال 1.179: $y = x^2$ کو 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $x + 1 = y^2$ ، شکل 1.60

سوال 1.180: $x = -3y^2$ کو 2 اوپر، 3 دائیں منتقل کریں۔

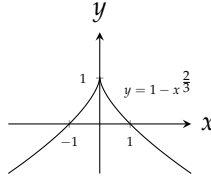
سوال 1.181: $y = \frac{1}{x}$ کو 1 اوپر، 1 دائیں منتقل کریں۔
جواب: $y - 1 = \frac{1}{x - 1}$ ، شکل 1.61

سوال 1.182: $y = \frac{1}{x^2}$ کو 1 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

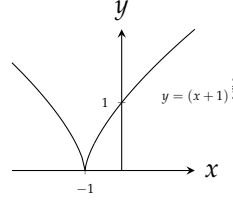
سوال 1.183 تا سوال 1.202 میں تقابل ترسیم کریں۔ صفحہ 38 پر شکل 1.21 میں دی گئی ترسیم کا سہارا لیں۔



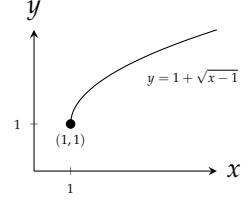
شکل 1.67



شکل 1.66



شکل 1.65



شکل 1.64

سوال 1.183 : $y = \sqrt{x+4}$
جواب: شکل 1.62

سوال 1.184 : $y = \sqrt{9-x}$

سوال 1.185 : $y = |x-2|$
جواب: شکل 1.63

سوال 1.186 : $y = |1-x| - 1$

سوال 1.187 : $y = 1 + \sqrt{x-1}$
جواب: شکل 1.64

سوال 1.188 : $y = 1 - \sqrt{x}$

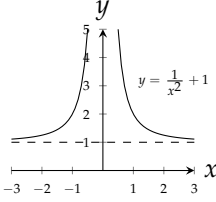
سوال 1.189 : $y = (x+1)^{2/3}$
جواب: شکل 1.65

سوال 1.190 : $y = (x-8)^{2/3}$

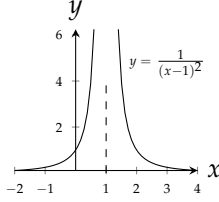
سوال 1.191 : $y = 1 - x^{2/3}$
جواب: شکل 1.66

سوال 1.192 : $y + 4 = x^{2/3}$

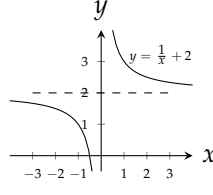
سوال 1.193 : $y = \sqrt[3]{x-1} - 1$
جواب: شکل 1.67



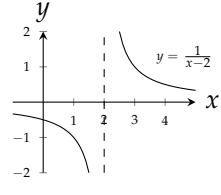
شکل 1.71



شکل 1.70



شکل 1.69



شکل 1.68

سوال 1.194: $y = (x+2)^{\frac{3}{2}} + 1$

سوال 1.195: $y = \frac{1}{x-2}$
جواب: شکل 1.68

سوال 1.196: $y = \frac{1}{x} - 2$

سوال 1.197: $y = \frac{1}{x} + 2$
جواب: شکل 1.69

سوال 1.198: $y = \frac{1}{x+2}$

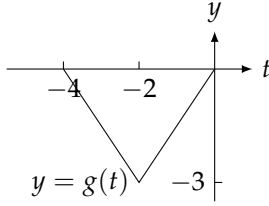
سوال 1.199: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$
جواب: شکل 1.70

سوال 1.200: $y = \frac{1}{x^2} - 1$

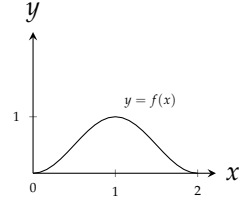
سوال 1.201: $y = \frac{1}{x^2} + 1$
جواب: شکل 1.71

سوال 1.202: $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

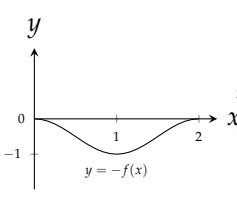
سوال 1.203: شکل 1.72 میں دکھائے گئے تفاعل $f(x)$ کا دائرہ کار $[0, 2]$ اور سمت $[0, 1]$ ہے۔ درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سمت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔



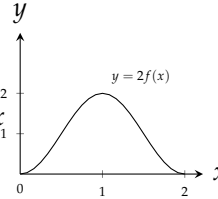
شکل 1.73: تقابل برائے سوال 1.204



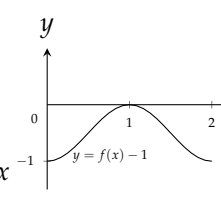
شکل 1.72: تقابل برائے سوال 1.203



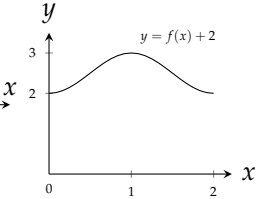
(ا)



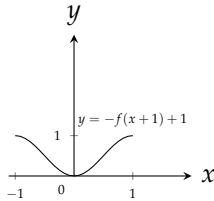
(ب)



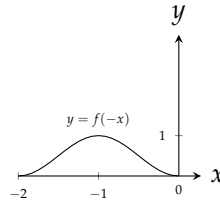
(ج)



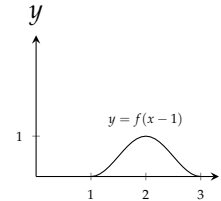
(د)



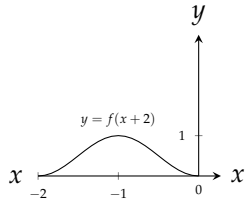
(ه)



(و)



(ز)



(ح)

شکل 1.74: اشکال برائے سوال 1.203 کے جوابات

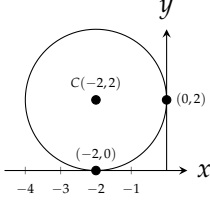
- ا. $f(x) + 2$ ج. $2f(x)$ د. $f(x+2)$ ز. $f(-x)$
- ب. $f(x) - 1$ د. $-f(x)$ و. $f(x-1)$ ح. $-f(x+1) + 1$

جوابات: اشکال کے لئے شکل 1.74 دیکھیں۔ جبکہ دائرہ کار اور سعت درج ذیل ہیں۔

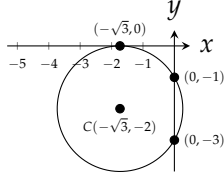
ا. $D : [0, 2], R : [2, 3]$ د. $D : [0, 2], R : [-1, 0]$ ز. $D : [-2, 0], R : [0, 1]$

ب. $D : [0, 2], R : [-1, 0]$ د. $D : [-2, 0], R : [0, 1]$

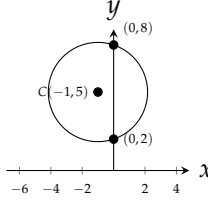
ج. $D : [0, 2], R = [0, 2]$ د. $D : [1, 3], R : [0, 1]$ ح. $D : [-1, 1], R : [0, 1]$



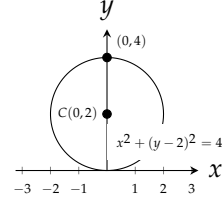
شکل 1.78



شکل 1.77



شکل 1.76



شکل 1.75

سوال 1.204: شکل 1.73 میں دکھائے گئے تفاعل $g(t)$ کا دائرہ کار $[-4, 0]$ اور سعت $[-3, 0]$ ہے۔ درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔

ا. $g(-t)$ ب. $g(t) + 3$ ج. $g(-t + 2)$ د. $g(1 - t)$

ب. $-g(t)$ د. $1 - g(t)$ ج. $g(t - 2)$ د. $-g(t - 4)$

دائرے

سوال 1.205 تا سوال 1.210 میں دائرے کا رداس a اور مرکز $C(h, k)$ دیا گیا ہے۔ دائرے کی مساوات لکھیں۔ دائرہ اور دائرے کی مرکز کا xy مستوی میں خاکہ کھینچیں۔ دائرے کا قطع x اور قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کی نشاندہی کریں اور اس کے محدود لکھیں۔

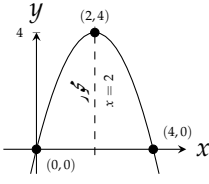
سوال 1.205: $C(0, 2), a = 2$ جواب: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ، شکل 1.75

سوال 1.206: $C(-3, 0), a = 3$

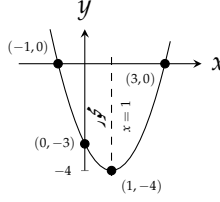
سوال 1.207: $C(-1, 5), a = \sqrt{10}$ جواب: $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$ ، شکل 1.76

سوال 1.208: $C(1, 1), a = \sqrt{2}$

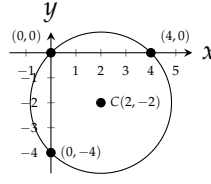
سوال 1.209: $C(-\sqrt{3}, -2), a = 2$ جواب: $(x + \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 4$ ، شکل 1.77



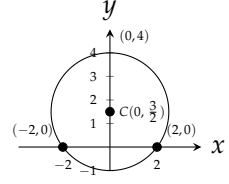
شکل 1.82



شکل 1.81



شکل 1.80



شکل 1.79

سوال 1.210: $C(3, \frac{1}{2})$, $a = 5$

سوال 1.211 تا سوال 1.216 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔ دائرے کا مرکز اور قطع x ، قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کے محدود دکھائیں۔

سوال 1.211: $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
جواب: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ ، شکل 1.78

سوال 1.212: $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

سوال 1.213: $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$
شکل 1.79، $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$

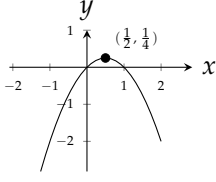
سوال 1.214: $x^2 + y^2 - 4x - \frac{9}{4} = 0$

سوال 1.215: $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$
شکل 1.80، $(x - 2)^2 (y + 2)^2 = 8$

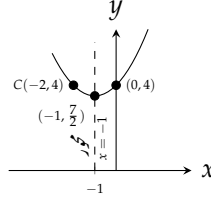
سوال 1.216: $x^2 + y^2 + 2x = 3$

قطع مکانی

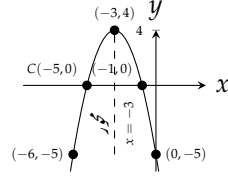
سوال 1.217 تا سوال 1.224 میں دیے گئے قطع مکانی ترسیم کریں۔ راس، محور اور قطع x ، قطع y بھی ظاہر کریں۔



شکل 1.85



شکل 1.84



شکل 1.83

سوال 1.217: $y = x^2 - 2x - 3$

جواب: شکل 1.81، $y = x^2 - 2x - 3$

سوال 1.218: $y = x^2 + 4x + 3$

سوال 1.219: $y = -x^2 + 4x$

جواب: شکل 1.82، $y = -x^2 + 4x$

سوال 1.220: $y = -x^2 + 4x - 5$

سوال 1.221: $y = -x^2 - 6x - 5$

جواب: شکل 1.83

سوال 1.222: $y = 2x^2 - x + 3$

سوال 1.223: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

جواب: شکل 1.84

سوال 1.224: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

سوال 1.225: قطع مکافی $y = x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

جواب: شکل 1.85

سوال 1.226: قطع مکافی $y = 3 - 2x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $g(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ کا دائرہ کار اور

سعت تلاش کریں۔

عدم مساوات

سوال 1.227 تا سوال 1.234 میں دیے گئے عدم مساوات اور عدم مساوات کی جوڑیوں پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.227: $x^2 + y^2 > 7$
جواب: رداس $\sqrt{7}$ کے دائرے کی بیرون-دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 1.228: $x^2 + y^2 < 5$

سوال 1.229: $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$
جواب: $(1, 0)$ پر مرکز اور رداس 2 دائرے پر اور اس کے اندر۔

سوال 1.230: $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$

سوال 1.231: $x^2 + y^2 > 1$, $x^2 + y^2 < 4$
جواب: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ جہلی۔ (وہ نقطے جن کا مبدا سے فاصلہ 1 اور 2 کے بیچ ہے۔)

سوال 1.232: $x^2 + y^2 \leq 4$, $(x+2)^2 + y^2 \leq 4$

سوال 1.233: $x^2 + y^2 + 6y < 0$, $y > -3$
جواب: خط $y = -3$ کی بالائی جانب رداس 3 کے دائرہ کی اندرون-دائرے کا مرکز $(0, -3)$ ہے۔

سوال 1.234: $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$, $x > 2$

سوال 1.235: ایسا عدم مساوات لکھیں جو رداس $\sqrt{6}$ کے دائرہ جس کا مرکز $(-2, 1)$ ہو کے اندر نقطوں کو ظاہر کرتی ہو۔
جواب: $(x+2)^2 + (y-1)^2 < 6$

سوال 1.236: رداس 4 اور مرکز $(-4, 2)$ والے دائرے کے باہر نقطوں کے لئے عدم مساوات لکھیں۔

سوال 1.237: رداس 2 اور مرکز $(0, 0)$ دائرے پر یا اس کے اندر، اور نقطہ $(1, 0)$ سے گزرتا انتصابی خط پر یا اس کے دائیں جانب نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔
جواب: $x^2 + y^2 \leq 2$, $x \geq 1$

سوال 1.238: رداس 2 اور مرکز $(0,0)$ والے دائرے کے باہر اور ایسے دائرہ جس کا مرکز $(1,3)$ ہو اور جو مبدأ سے گزرتا ہو، کے اندر نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

منتقلی خطوط

سوال 1.239: خط $y = mx$ جو مبدأ سے گزرتا ہے کو افقی اور انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے۔
نئے خط کی مساوات تلاش کریں (جس کو نقطہ-ڈھلوان مساوات کہتے ہیں)۔
جواب: $y = y_0 + m(x - x_0)$

سوال 1.240: خط $y = mx$ کو انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ $(0, b)$ سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں۔

خطوط، دائرے اور قطع مکافی کا ایک دوسرے کو قطع ہونا

سوال 1.241 تا سوال 1.248 میں دیے دو مساوات ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

سوال 1.241: $y = 2x$, $x^2 + y^2 = 1$
جواب: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

سوال 1.242: $x + y = 1$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

سوال 1.243: $y - x = 1$, $y = x^2$
جواب: $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$

سوال 1.244: $x + y = 0$, $y = -(x - 1)^2$

سوال 1.245: $y = -x^2$, $y = 2x^2 - 1$
جواب: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

سوال 1.246: $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = (x - 1)^2$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{سوال 1.247:}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{جواب:}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 1 \quad \text{سوال 1.248:}$$

سوال 1.249 تا سوال 1.252 میں مساوات $y = f(ax)$ میں مستقل a کی تبدیلی کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر ہم $y = f(ax)$ کو کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کرتے ہیں۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = 2, 3, \dots, 10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ a کی (ثبت) قیمت بڑھانے کے اثرات پر تبصرہ کریں۔

ب. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = -2, -3, \dots, -10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ اب ترسیم پر اثرات کیا ہیں؟

ج. $y = f(x)$ اور $y = f(ax)$ کو $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ کے لئے ترسیم کریں۔ ترسیم پر $|a| < 1$ کا کیا اثر پایا جاتا ہے؟

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+4}, \quad [-10, 10] \quad \text{سوال 1.249:}$$

$$f(x) = \frac{2x(x-1)}{x^2+1}, \quad [-3, -2] \quad \text{سوال 1.250:}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}, \quad [-2, -2] \quad \text{سوال 1.251:}$$

$$f(x) = \frac{x^4-4x^3+10}{x^2+4}, \quad [-1, 4] \quad \text{سوال 1.252:}$$

1.5 ٹکونیاتی تفاعل

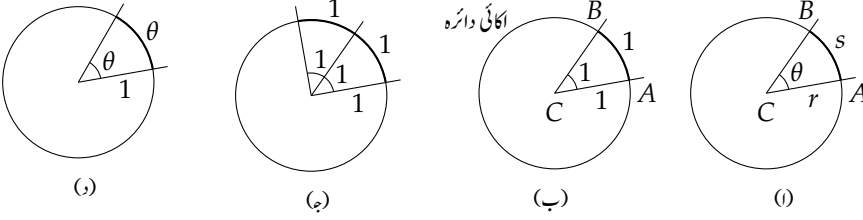
اس حصہ میں ریڈیئن، ٹکونی تفاعل، دوریت اور بنیادی ٹکونی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

ریڈیئن

چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات کی صورت میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے جہاں 180° کو π ریڈیئن کہتے ہیں۔ ریڈیئن کی استعمال سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

شکل 1.86-1 میں رداس r کا دائرہ دکھایا گیا ہے جس کے مرکز C سے دو شعاعیں نکل رہی ہیں جو مرکز پر وسطی زاویہ θ بناتی ہیں۔ یہ شعاعیں دائرے کو A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ قوس AB کی لمبائی s ہے۔ اگر دائرے کا رداس 1 ہو تب ہم اس دائرے کو اکائی دائرہ⁶² کہتے ہیں۔ اکائی دائرے پر اکائی لمبائی کا قوس جتنا زاویہ بناتی ہے اس کو ایک ریڈیئن زاویہ کہتے ہیں (یہی ایک ریڈیئن کی تعریف

⁶²unit circle



شکل 1.86: ریڈین کی تعریف

(ہے)۔ شکل 1.86-ب میں ایک ریڈین کی اس تعریف کی وضاحت کی گئی ہے۔ شکل 1.86-ج میں اکائی لمبائی کے دو قوس ساتھ ساتھ رکھے گئے ہیں جو ایک ایک ریڈین کا وسطی زاویہ بناتے ہیں۔ یوں کل قوس کی لمبائی 2 ہے اور کل زاویہ 2 ریڈین ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اکائی دائرے پر وسطی زاویہ کی ریڈین میں ناپ قوس کی لمبائی کے برابر ہوگی۔ شکل 1.86-د میں اس حقیقت کو دکھایا گیا ہے۔

زاویہ ACB کی ریڈین ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس AB کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط 2π ہے اور ایک مکمل چکر 360° ہے لہذا درج ذیل تعلق لکھا جاسکتا ہے۔

$$\pi \text{ ریڈین} = 180^\circ$$

مثال 1.42: درجہ سے ریڈین میں زاویے کی تبدیلی

45° کو ریڈین میں لکھیں اور $\frac{\pi}{6}$ کو درجہ میں لکھیں۔

حل: شکل 1.87 دیکھیں۔

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈین}$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

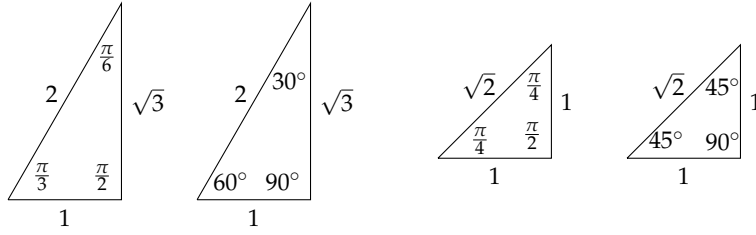
□

ریڈین اور درجہ

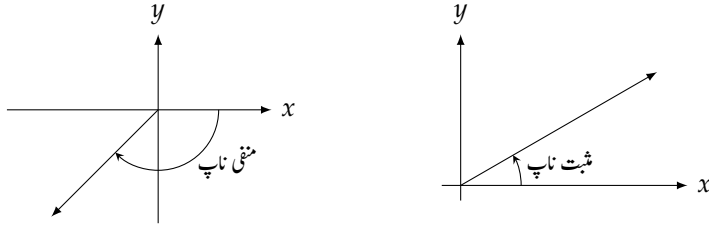
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.02 \text{ ریڈین}$$

$$1 \text{ ریڈین} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$$

دھیان رہے کہ زاویے کی پیمائش درجات میں ہونے کو $^\circ$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ریڈین کو بغیر علامت لکھا جاتا ہے۔ یوں 45° سے مراد پیمائش درجہ ہوگا جبکہ $\theta = 3$ سے مراد تین ریڈین ہوگا۔



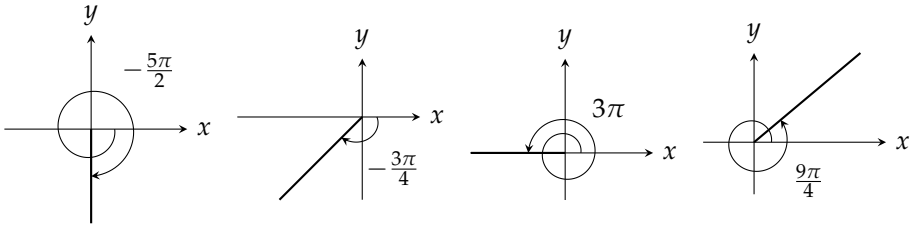
شکل 1.87: اشکال برائے مثال 1.42



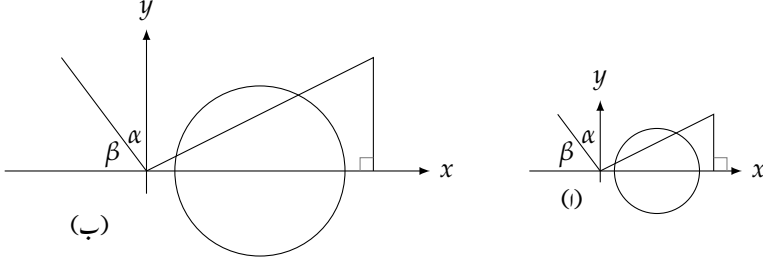
شکل 1.88: زاویے کی ناپ

xy مستوی میں شعاع کا راس مبدأ پر اور شعاع کا ابتدائی مقام مثبت x محور پر ہونے کی صورت میں زاویہ کے مقام کو معیاری مقام⁶³ کہتے ہیں۔ مثبت x محور سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ زاویہ کی ناپ مثبت اور گھڑی کی سوئی کی رخ ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل 1.88)۔ یوں مثبت x محور کا زاویہ 0 ریڈیئن اور منفی x محور کا زاویہ π ریڈیئن ہو گا۔

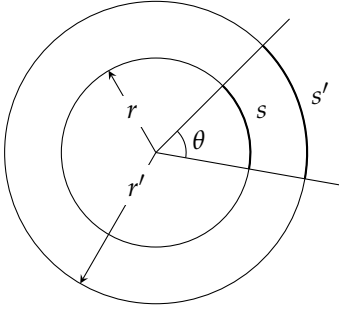
گھڑی مخالف چکر بیان کرتے ہوئے زاویے کی ناپ 2π یعنی 360° سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ اسی طرح گھڑی کی رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ کچھ بھی ممکن ہے (شکل 1.89)۔



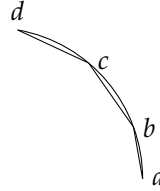
شکل 1.89: مثبت اور منفی ریڈیئن



شکل 1.90: شکل بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر اثر نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 1.92: محیط دائرہ

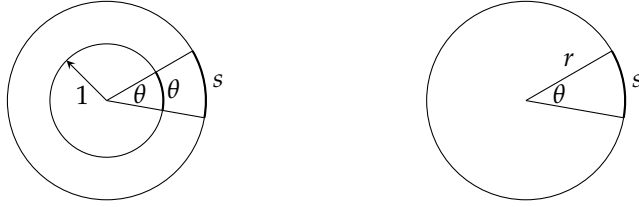


شکل 1.91: قوس کی لمبائی

شکل 1.90-1 میں چند اشکال کو چکدار xy مستوی پر دکھایا گیا ہے۔ اس xy مستوی کو کھینچ کر x رخ اور y رخ کی لمبائیاں k گنا کرنے سے شکل 1.90-ب حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ جسامت k گنا کر دی گئی ہے۔ یوں اگر بائیں شکل کے ٹکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہوں تب اس کی وتر کی لمبائی $\sqrt{a^2 + b^2}$ ہوگی۔ دائیں شکل میں ٹکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب ka اور kb ہوں گی لہذا اس کا وتر $k\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2}$ ہوگا۔ آپ نے دیکھا کہ دائیں مستوی پر نا صرف افقی اور انتصابی خط بلکہ ترجھے خط کی لمبائی بھی k گنا ہو گئی ہے۔ چونکہ ہر ترجھے خط کو کسی ٹکون کا وتر تصور کیا جاسکتا ہے لہذا دائیں مستوی پر (ہر افقی اور ہر انتصابی خط کے ساتھ ساتھ) ہر ترجھے خط کی لمبائی k گنا ہوگی۔ کیا جسامت k گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی k گنا ہوگی؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جس کا ثبوت اب پیش کرتے ہیں۔

شکل 1.91 میں قوس کی لمبائی جاننے کی خاطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی تصور کیا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ اب اگر اس قوس کی جسامت کو k گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی k گنا ہوگی لہذا ان کی مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی k گنا ہوگی۔ (ثبوت مکمل ہوا۔)

شکل 1.93-1 میں رداس r کے دائرے پر قوس s اور وسطی زاویہ θ دکھائے گئے ہیں۔ اس دائرے کے مرکز پر ہم 1 رداس کا دائرہ بناتے ہیں (شکل 1.93-ب؛ اگر دیے گئے دائرے کا رداس اکائی سے کم ہو تب یہ دائرہ اکائی دائرے کے اندر نظر آئے گا)۔ (جیسا شکل



شکل 1.93: قوس، رداس اور زاویے کا تعلق۔

1.93-ب میں دکھایا گیا ہے (ریڈیئن کی تعریف کی رو سے اکائی دائرے پر قوس اور زاویہ آپس میں برابر ہوں گے۔ شکل 1.93-ب میں دونوں دائروں پر قوس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{s}{\theta}$ اور دائروں کے رداس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{r}{1}$ ایک جیسا ہوں گے، یعنی $\frac{s}{\theta} = \frac{r}{1}$ جس سے درج ذیل اہم ترین کلیہ ملتا ہے۔

قوس، رداس اور زاویے کا تعلق

$$s = r\theta$$

زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں
یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔ جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔ یوں اگر ہم زاویہ $\frac{\pi}{6}$ کی بات کریں تب اس سے مراد $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن کا زاویہ ہو گا تاکہ $\frac{\pi}{6}$ درجے کا زاویہ۔

مثال 1.43: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر 2π لمبائی کا قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بناتا ہے۔
(ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو $\frac{3\pi}{4}$ وسطی زاویہ بناتا ہو۔
حل:

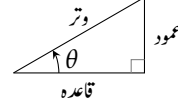
$$s = r\theta = 8\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\pi \quad (\text{ب}) \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

□

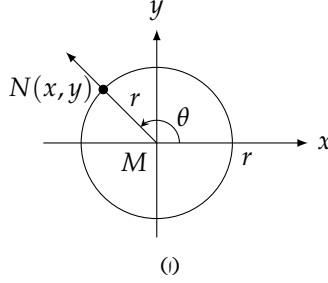
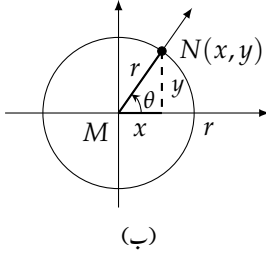
چھ بنیادی ٹکونیاتی تفاعل

آپ زاویہ حادہ کے ٹکونیاتی تفاعل سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل 1.94)۔ ہم انہیں تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرد اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس r کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب ان ٹکونیاتی تفاعل کو نقطہ $N(x, y)$ کے محدود کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتا ہوا شعاع دائرے کو $N(x, y)$ پر قطع کرتا ہے۔

سائن	$\sin \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$	کوسائن	$\cos \theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$	ٹینجینٹ	$\tan \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$	csc	$= \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$	سیکینٹ	$= \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$	کوٹینجینٹ	$= \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$
------	--	--------	---	---------	--	-----	------------------------------------	--------	-------------------------------------	-----------	--------------------------------------



شکل 1.94: قائمہ مثلث اور ٹکونیاتی تفاعل



شکل 1.95: ٹکونیاتی تفاعل

شکل 1.95-ا کو دیکھتے ہوئے ان تفاعل کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

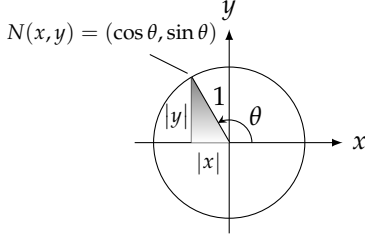
چھ ٹکونیاتی تفاعل

سائن	$\sin \theta = \frac{y}{r}$	کوسائن	$\cos \theta = \frac{x}{r}$	csc	$= \frac{r}{y}$	سیکینٹ	$= \frac{r}{x}$
ٹینجینٹ	$\tan \theta = \frac{y}{x}$	کوٹینجینٹ	$\cot \theta = \frac{x}{y}$				

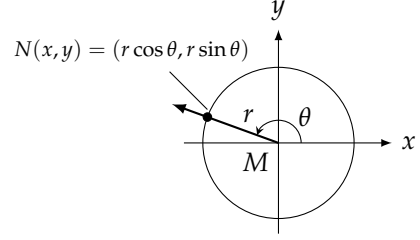
آپ شکل 1.95-ب سے دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ حادہ کی صورت میں ٹکونیاتی تفاعل کی توسیعی تعریف اور قائمہ زاویہ ٹکونی تعریف ایک جیسے ہیں۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $x = 0$ کی صورت میں $\tan \theta$ اور $\sec \theta$ غیر معین ہیں (چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے)۔ یوں یہ $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ کے لئے غیر معین ہیں۔ اسی طرح $y = 0$ یعنی $\theta = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ کے لئے $\cot \theta$ اور $\csc \theta$ غیر معین ہیں۔

اسی طرح درج ذیل تعریف بھی لکھے جاسکتے ہیں۔



شکل 1.97: زاویہ θ کے لئے زاویہ حادہ تکون



شکل 1.96: مستوی میں کارتیسی محدود کا r اور θ میں اظہار۔

تکونیاتی تفاعل کے باہمی تعلقات

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

مستوی میں نقطہ $N(x, y)$ کو مبداء سے فاصلہ r اور زاویہ θ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے (شکل 1.96)۔ چونکہ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ اور $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ہیں لہذا درج ذیل ہو گا۔

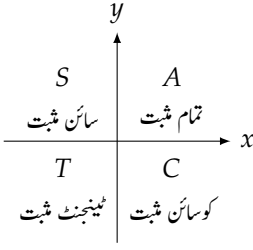
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں

شکل 1.95 کے دائرے میں $r = 1$ ہونے کی صورت میں $\sin \theta$ اور $\cos \theta$ کی تعارفی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

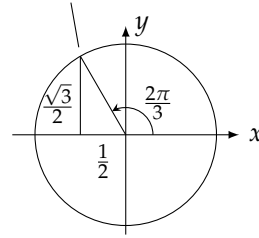
$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y$$

یوں ہم سائن اور کوسائن کی قیمتوں کو بالترتیب نقطہ $N(x, y)$ کی x اور y محدود سے پڑھ سکتے ہیں۔ نقطہ N سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون سے بھی انہیں حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 1.97)۔ ہم x اور y کی قیمتیں تکون کی اطراف سے ناپتے ہیں۔ x اور y کی علامتیں اس ربع سے تعین کی جاتی ہیں جس میں تکون پایا جاتا ہو۔



شکل 1.99: قاعدہ CAST

$$\left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



شکل 1.98: ٹکونیاتی تفاعل کی قیمتیں (مثال 1.44)

مثال 1.44: ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔
 حل: پہلا قدم: زاویے کو معیاری مقام پر اکائی دائرے میں بنائیں۔ حوالہ ٹکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.98)۔
 دوسرا قدم: جہاں اکائی دائرے کو شعاع قطع کرتی ہے اس نقطے کے محدود دریافت کریں:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = x \text{ کا محدود } N = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = y \text{ کا محدود } N = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

□

ٹکونیاتی تفاعل کی قیمتوں کی علامت جاننے کے لئے شکل 1.99 میں دکھایا گیا CAST کا قاعدہ یاد رکھیں۔

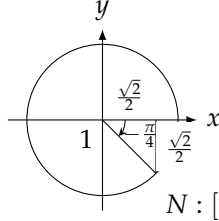
مثال 1.45: $-\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔
 حل: پہلا قدم: معیاری مقام پر اکائی دائرے میں زاویہ کھینچ کر حوالہ ٹکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.100)۔
 دوسرا قدم: نقطہ N کے محدود تلاش کریں۔

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = x \text{ کا محدود } N = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y \text{ کا محدود } N = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

درج بالا دو مثالوں کی طرح حل کرتے ہوئے جدول میں دیے قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔



$$N : [\cos(-\frac{\pi}{4}), \sin(-\frac{\pi}{4})] = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

شکل 1.100: شکل برائے مثال 1.45

درجہ ریڈیئن	-180° $-\pi$	-135° $-\frac{3\pi}{4}$	-90° $-\frac{\pi}{2}$	-45° $-\frac{\pi}{4}$	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	180° π
$\sin \theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0

ترسیم

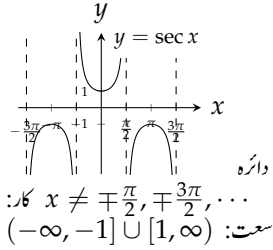
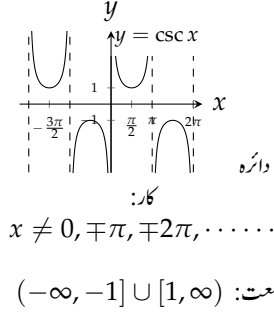
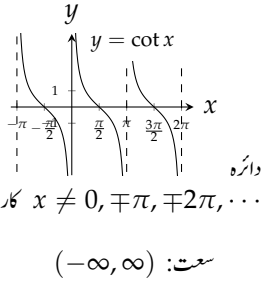
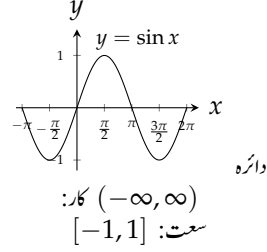
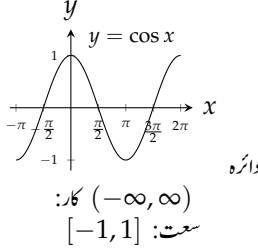
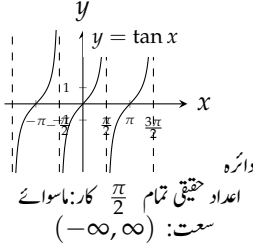
ٹکونیاتی تفاعل کو کارٹیسسی محد میں ترسیم کرتے ہوئے ہم عموماً غیر تابع متغیر θ کو x سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 1.101)۔

دوریت

معیاری مقام پر زاویہ x اور زاویہ $x + 2\pi$ ہم مکان ہوں گے۔ یوں ان دونوں زاویوں کے ٹکونیاتی تفاعل کی قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔ مثال کے طور پر $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ہو گا۔ ایسے تفاعل جن کی قیمت مقررہ وقفوں سے دہرائی ہو دوری⁶⁴ کہلاتا ہے۔

تعریف: اگر کسی مثبت عدد p کے لئے تمام x پر $f(x + p) = f(x)$ ہو تب تفاعل $f(x)$ دوری کہلاتا ہے۔ p کی ایسی کم سے کم قیمت کو $f(x)$ کا دوری عرصہ⁶⁵ کہتے ہیں۔

□



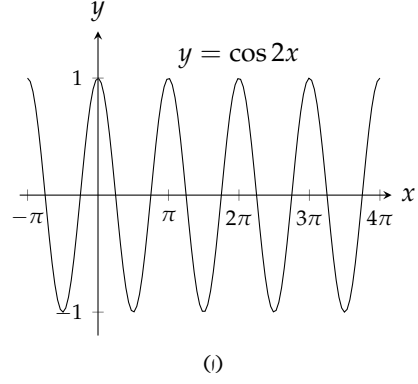
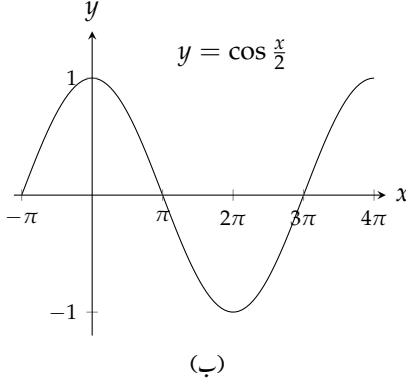
شکل 1.101: چھ بنیادی ٹریگونیٹریک ٹیٹال کے ترسیم۔ ان ٹیٹال کی دوریت صاف ظاہر ہے۔

ہم شکل 1.101 سے دیکھ سکتے ہیں کہ ٹریگونیٹریک ٹیٹال کا دوری عرصہ $p = \pi$ ہے جبکہ باقی چار ٹیٹال کا دوری عرصہ 2π ہے۔

شکل 1.102 میں $y = \cos 2x$ اور $y = \cos \frac{x}{2}$ ترسیم کیے گئے ہیں۔ ٹریگونیٹریک ٹیٹال میں x کو 1 سے بڑی عدد سے ضرب کرنے سے ٹیٹال تیز ہو جاتا ہے (اس کی تعدد بڑھ جاتی ہے اور اس کا دوری عرصہ کم ہو جاتا ہے) جبکہ 1 سے کم عدد سے x کو ضرب کرنے سے ٹیٹال آہستہ ہو جاتا ہے جس سے اس کا دوری عرصہ بڑھ جاتا ہے۔

دوری ٹیٹال کی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ سائنس میں عموماً طبعی نظام جن پر ہم غور کرتے ہیں کا رویہ دوری ہوتا ہے۔ دل کی دھڑکن، دماغی لہریں اور گھریلو استعمال کی 220 وولٹ کی بجلی دوری ہیں۔ اسی طرح خرد امواج تندور میں برقیاتی میدان جو خوراک کو گرم کرتی ہیں دوری ہوتی ہیں۔ موسمی کاروبار میں سرمایہ کی آمد و رفت اور گھومنے والی مشین کا رویہ بھی دوری ہوتا ہے۔ ہمارے پاس پختہ شواہد موجود ہیں جن کے تحت دنیا پر برقیاتی عہد تقریباً 90 000 تا 100 000 سال کے وقفہ سے دہراتا ہے۔

اگر اتنے زیادہ چیزیں دوری ہیں تب ہم صرف ٹریگونیٹریک ٹیٹال پر کیوں غور کرنا چاہتے ہیں؟ اس کا جواب اعلیٰ احصاء کا ایک حیرت کن مسئلہ دیتا ہے جس کے تحت ہر دوری ٹیٹال، جسے ہم ریاضی نمونہ میں استعمال کرنا چاہیں گے، کو ہم سائن اور کوسائن ٹیٹال کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں۔ یوں سائن اور کوسائن ٹیٹال کا احصاء جانتے ہوئے ہم کسی بھی دوری ٹیٹال کا ریاضی نمونہ اخذ کر سکیں گے۔



شکل 1.102: $\cos 2x$ کا دوری عرصہ کم ہے جبکہ $\cos \frac{x}{2}$ کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

جفت بالمتقابل طاق

شکل 1.101 سے ظاہر ہے کہ کوسائن اور سینکسٹ متقابل جفت ہیں جبکہ باقی چار متقابل طاق ہیں:

جفت	طاق
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

مماثل

ایکائی دائرے پر نقطہ $N(\cos \theta, \sin \theta)$ سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ ٹکون پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے درج ذیل ملتا ہے (شکل 1.103)۔

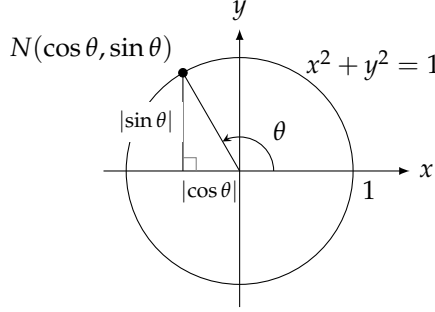
$$(1.8) \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

یہ مساوات θ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اور غالباً یہ اہم ترین ٹکونیاتی مماثل ہے۔

مساوات 1.8 کے دونوں ہاتھ کو ایک بار $\cos^2 \theta$ اور ایک بار $\sin^2 \theta$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



شکل 1.103: عمومی زاویہ θ کے لئے حوالہ ٹکون۔

آپ درج ذیل مماثل سے بخوبی واقف ہوں گے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned} \quad \text{مجموعہ زاویہ کلیات}$$

اس کتاب میں تمام درکار مماثل کو مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.9 اور A اور B کی ہر قیمت کے لئے درست ہیں۔ $\cos(A - B)$ اور $\sin(A - B)$ کے لئے بھی اسی طرح کے کلیات پائے جاتے ہیں (سوال 1.287 اور سوال 1.288)۔

مجموعہ زاویہ کلیات میں A اور B دونوں کے لئے θ پر کرنے سے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \text{دوہرا زاویہ کلیات}$$

درج ذیل کلیات

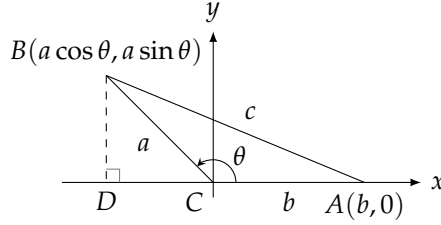
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

کو آپس میں جمع کرنے سے $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$ اور تفریق کرنے سے $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ حاصل ہوتا ہے جن سے دوہرا زاویے کے درج ذیل مزید دو کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$(1.11) \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$(1.12) \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

درج بالا میں θ کی جگہ $\frac{\theta}{2}$ لکھنے سے نصف زاویہ کلیات⁶⁶ حاصل ہوتے ہیں۔



شکل 1.104: قاعدہ کوسائن

قاعدہ کوسائن

اگر ٹکون ABC کے اضلاع a ، b اور c ہوں اور c کے سامنے زاویہ θ ہو تب درج ذیل ہو گا (شکل 1.104)۔

$$(1.13) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

اس مساوات کو قاعدہ کوسائن⁶⁷ کہتے ہیں۔

اس کلیہ کو حاصل کرنے کی خاطر ٹکون کو کارٹیزی محدد پر یوں بنائیں کہ اس کا ایک راس مبدا پر اور ایک ضلع x محور پر ہو (شکل 1.104)۔ راس B سے x محور پر قائمہ گرائیں۔ یوں حاصل قائمہ مثلث ABD پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق کرتے ہیں جہاں A سے D تک فاصلہ $b - a \cos \theta$ لکھا جائے گا (مثلاً $b = 3$ اور $a \cos \theta = -2$ کی صورت میں $AD = 3 - (-2) = 5$ ہو گا اور $a \cos \theta = 1$ کی صورت میں $AD = 3 - 1 = 2$ ہو گا)۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b^2 - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ کا سہارا لیا گیا ہے۔

قاعدہ کوسائن مسئلہ فیثاغورث کو عمومی بناتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی صورت میں $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ کی بنا قاعدہ کوسائن سے $c^2 = a^2 + b^2$ یعنی مسئلہ فیثاغورث حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

ریڈیئن، درجہ اور دائری قوس

سوال 1.253: رداس 10 cm کے دائرے پر کتنی لمبائی کا قوس (الف) $\frac{4\pi}{5}$ ریڈیئن (ب) 110° کا وسطی زاویہ بنائے گا؟
جواب: (الف) 8π سنٹی میٹر (ب) 0.19 میٹر

سوال 1.254: رداس 8 کے دائرے پر 10π لمبائی کا قوس، مرکز پر کتنا وسطی زاویہ بناتا ہے؟ جواب درجات اور ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 1.255: کیلکولیٹر 80° کا وسطی زاویہ بنانے کی خاطر آپ 30 cm قطر کے قرص پر مرکز سے دو خط کھینچنا چاہتے ہیں۔ محیط پر قرص کی لمبائی 1 mm درنگی تک تلاش کریں۔
جواب: 20.9 cm

سوال 1.256: کیلکولیٹر ایک میٹر قطر کے پہیا کو ہموار زمین پر 30 cm چلایا جاتا ہے۔ پہیا کتنا زاویہ گھوما ہو گا؟ جواب (الف) ریڈیئن کے دسواں حصہ اور (ب) درجہ کے ایک حصہ درنگی تک تلاش کریں۔

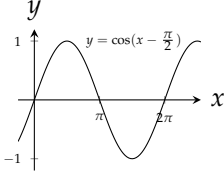
تکونیاتی تفاعل کی قدر پیمائی

سوال 1.257: درج ذیل بایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

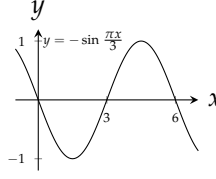
θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	θ	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$\sin \theta$						$\sin \theta$					
$\cos \theta$						$\cos \theta$					
$\tan \theta$						$\tan \theta$					
$\cot \theta$						$\cot \theta$					
$\sec \theta$						$\sec \theta$					
$\csc \theta$						$\csc \theta$					

سوال 1.258: درج بالا دایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

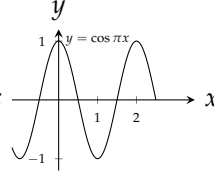
سوال 1.259 تا سوال 1.264 میں $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ میں سے ایک دیا گیا ہے۔ باقی دو تفاعل کو دیے گئے وقفے کے اندر تلاش کریں۔



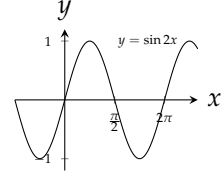
شکل 1.108



شکل 1.107



شکل 1.106



شکل 1.105

سوال 1.259: کار: دائرہ $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\sin x = \frac{3}{5}$,
جواب: $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$

سوال 1.260: کار: دائرہ $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\tan x = 2$,

سوال 1.261: کار: دائرہ $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\cos x = \frac{1}{3}$,
جواب: $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, $\tan x = -\sqrt{8}$

سوال 1.262: کار: دائرہ $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos x = -\frac{5}{13}$,

سوال 1.263: کار: دائرہ $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $\tan x = \frac{1}{2}$,
جواب: $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 1.264: کار: دائرہ $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $\sin x = -\frac{1}{2}$,

تکونیاتی تفاعل کی ترسیم
سوال 1.265 تا سوال 1.274 میں دیا گیا تفاعل ترتیم کریں۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ تلاش کریں۔

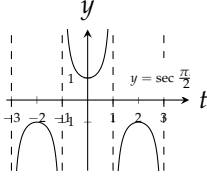
سوال 1.265: $\sin 2x$
جواب: دوری عرصہ π ہے۔ شکل 1.105

سوال 1.266: $\sin \frac{x}{2}$

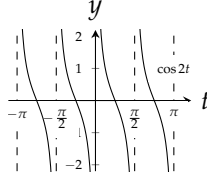
سوال 1.267: $\cos \pi x$
جواب: دائرہ کار: 2، شکل 1.106

سوال 1.268: $\cos \frac{\pi x}{2}$

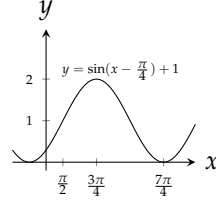
سوال 1.269: $-\sin \frac{\pi x}{3}$
جواب: دائرہ کار: 6، شکل 1.107



شکل 1.111



شکل 1.110



شکل 1.109

سوال 1.270: $-\cos 2\pi x$ سوال 1.271: $\cos(x - \frac{\pi}{2})$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.108سوال 1.272: $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ سوال 1.273: $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.109سوال 1.274: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$ سوال 1.275 تا سوال 1.278 میں دیے تقابل کو ts مستوی میں ترسیم کریں جہاں افقی محور t ہو۔ ہر تقابل کا دوری عرصہ اور تقابل تلاش کریں۔سوال 1.275: $s = \cot 2t$
جواب: دائرہ کار: $\frac{\pi}{2}$ ، شکل 1.110سوال 1.276: $s = -\tan \pi t$ سوال 1.277: $s = \sec \frac{\pi t}{2}$
جواب: دائرہ کار: 4، شکل 1.111سوال 1.278: $s = \csc \frac{t}{2}$ سوال 1.279: کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے
(الف) $y = \cos x$ اور $y = \sec x$ کو $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\sec x$ کے رویہ

پر $\cos x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔
 (ب) $-pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \sin x$ اور $y = \csc x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\csc x$ کے رویہ پر $\sin x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

سوال 1.280: $-7 \leq x \leq 7$ کے لئے $y = \tan x$ اور $y = \cot x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\tan x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے $\cot x$ پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.281: $y = \sin x$ اور $y = \lfloor \sin x \rfloor$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lfloor \sin x \rfloor$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 1.282: $y = \sin x$ اور $y = \lceil \sin x \rceil$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lceil \sin x \rceil$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

اضافی ٹکونیاتی مماثل

مجموعہ زاویہ کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال 1.283 تا سوال 1.288 میں دیے گئے مماثل حاصل کریں۔

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \quad \text{سوال 1.283}$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \text{سوال 1.284}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \text{سوال 1.285}$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x \quad \text{سوال 1.286}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \text{سوال 1.287}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \text{سوال 1.288}$$

سوال 1.289: اگر سوال 1.287 میں $B = A$ پر کیا جائے تب کیا حاصل ہوگا؟ کیا آپ حاصل کردہ مماثل کو پہلے سے جانتے ہیں؟

سوال 1.290: مجموعہ زاویہ کلیات میں $B = 2\pi$ لینے سے کیا حاصل ہوگا؟ کیا آپ نتائج سے مطمئن ہیں؟

مجموعہ زاویہ کلیات کا استعمال
سوال 1.291 تا سوال 1.294 میں دی گئی مقدار کو $\sin x$ اور $\cos x$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 1.291: $\cos(\pi + x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 1.292: $\sin(2\pi - x)$

سوال 1.293: $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 1.294: $\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

سوال 1.295: $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\sin \frac{7\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

سوال 1.296: $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\cos \frac{11\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 1.297: $\cos \frac{\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

سوال 1.298: $\sin \frac{5\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

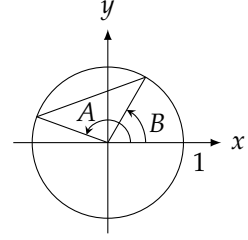
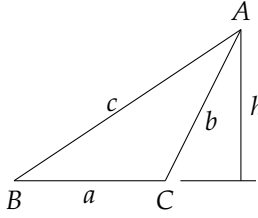
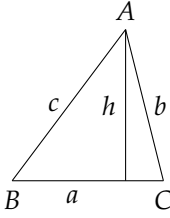
دوہرا زاویہ کلیات کا استعمال
سوال 1.299 تا سوال 1.302 میں تقابل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1.299: $\cos^2 \frac{\pi}{8}$
جواب: $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

سوال 1.300: $\cos^2 \frac{\pi}{12}$

سوال 1.301: $\sin^2 \frac{\pi}{12}$
جواب: $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

سوال 1.302: $\sin^2 \frac{\pi}{8}$



شکل 1.113: اشکال برائے سوال 1.309

شکل 1.112: اشکال برائے سوال 1.305

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.303: ٹینجینٹ مجموعہ زاویہ کا کلیہ $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ہے۔ اس کلیہ کو اخذ کریں۔

سوال 1.304: $\tan(A - B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 1.305: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A - B)$ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 1.306: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 کی طرز کے شکل پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A + B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔ یہ شکل کیسا ہو گا۔

سوال 1.307: سیکیولیر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 60^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔
جواب: $c = \sqrt{7} \approx 2.646$

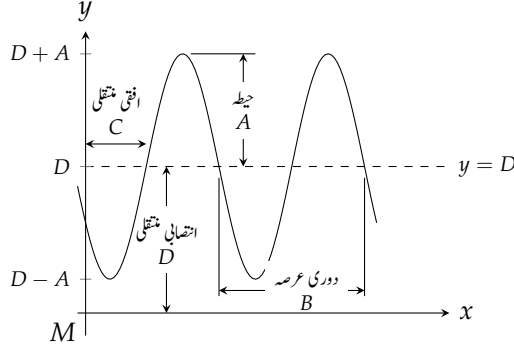
سوال 1.308: سیکیولیر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 40^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 1.309: قاعدہ سائن قاعدہ سائن کہتا ہے کہ اگر مثلث کے زاویے A ، B ، C کے سامنے اضلاع بالترتیب a ، b ، c ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اشکال 1.113 اور مماثل $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ استعمال کرتے ہوئے اس قاعدہ کو اخذ کریں۔

سوال 1.310: سیکیولیر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 60^\circ$ ہیں۔ $\sin B$ کو قاعدہ سائن سے حاصل کریں۔



شکل 1.114: عمومی سائن تفاعل

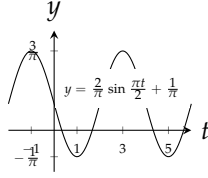
سوال 1.311: کیلویٹر ایک مثلث کا ضلع $c = 2$ اور زاویے $A = \frac{\pi}{4}$ اور $B = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔ زاویہ A کا مخالف ضلع a اور تلاش کریں۔
جواب: $a = 1.464$

سوال 1.312: تخمین $\sin x \approx x$ کی چھوٹی قیمتوں کے لئے $\sin x \approx x$ ہوتا ہے جہاں x کی ناپ ریڈین میں ہے۔ اس کی وجہ حصہ 4.7 میں بتلائی جائے گی۔ $|x| < 0.1$ کے لئے تخمینہ خلل 5000 میں 1 حصہ سے کم ہو گا۔
(الف) کمپیوٹر پر $y = \sin x$ اور $y = x$ کو مبداء کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ ریڈین میں ہے۔ مبداء کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(ب) کمپیوٹر پر $y = \sin x$ اور $y = x$ کو مبداء کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی پیمائش درجات میں ہے۔ مبداء کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(پ) کیلویٹر استعمال کرتے ہوئے $x = 0.1$ کے لئے $\sin x$ حاصل کریں۔ اگر آپ کیلویٹر ریڈین استعمال کر رہا ہو تب جواب تقریباً 0.1 ہی ہو گا۔ اگر کیلویٹر درجات استعمال کر رہا ہو تب جواب مختلف ہو گا۔

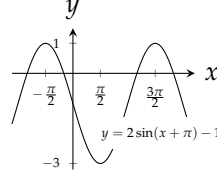
عمومی سائن ترسیم

شکل 1.114 میں درج ذیل تفاعل کی ترسیم یعنی عمومی سائن ترسیم دکھائی گئی ہے جہاں $|A|$ جیلہ، $|B|$ دوری عرصہ، C افقی منتقلی اور D انتصابی منتقلی ہے۔ سوال 1.313 تا سوال 1.316 میں عمومی سائن تفاعل کے A ، B ، C اور D تلاش کریں۔ تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$



شکل 1.116



شکل 1.115

سوال 1.313: $y = 2 \sin(x + \pi) - 1$:
جواب: $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$: شکل 1.115

سوال 1.314: $y = \frac{1}{2} \sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

سوال 1.315: $y = -\frac{2}{\pi} \sin(-\frac{\pi t}{2}) + \frac{1}{\pi}$:
جواب: $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$: شکل 1.116

سوال 1.316: $y = \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{L}, L > 0$

سوال 1.317 تا سوال 1.317 میں عمومی سائن تعامل $f(x) = A \sin(\frac{2\pi}{B}(x - C)) + D$ پر ترسیم کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ ترسیم کے لئے کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال 1.317: دوری عرصہ $A = 3, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر تعامل ترسیم کریں۔ دوری عرصہ بڑھانے سے تعامل کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ (ب) B کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $B = -3$ اور $B = -2\pi$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں۔

سوال 1.318: افقی منتقلی $A = 3, B = 6, D = 0$ لیتے ہوئے (الف) تعامل $f(x)$ کو $C = 0, 1, 2$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ C کی بڑھتے مثبت قیمت کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) C کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی۔ (پ) صفر افقی منتقلی کے لئے C کی کم تر مثبت قیمت کیا ہو گی؟ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 1.319: انتظامی منتقلی $A = 3, B = 6, C = 0$ لیتے ہوئے (الف) تعامل $f(x)$ کو $D = 0, 1, 3$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ D کی بڑھتی مثبت قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) D کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

سوال 1.320: حیث $B = 6, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) A کی مثبت بڑھتی قیمتوں کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟
سوال $f(x)$ کو $A = 1, 5, 9$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔ (ب) A کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

باب 2

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکنیکیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں باضابطہ وضع کرتے ہیں۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔ کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔ دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔ تفاعل کی تفرق، جس پر باب 3 میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 2.1: ایک پتھر 100 m اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے درانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔ یوں پہلی t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\text{(الف)} \quad \text{پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2 - 0} = 9.8 \text{ m s}^{-1} \text{ ہو گی۔}$$

$$\text{(ب)} \quad \text{پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(1)^2}{2 - 1} = 14.7 \text{ m s}^{-1} \text{ ہو گی۔}$$

□

مثال 2.2: پتھر کی رفتار $t = 1 \text{ s}$ اور $t = 2 \text{ s}$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم وقتی وقفہ $[t_0, t_0 + h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

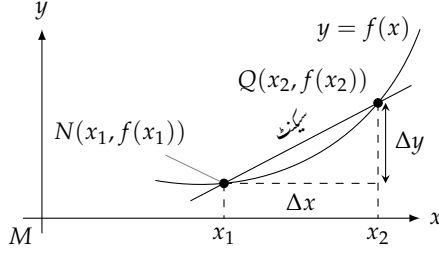
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا درج بالا کلیہ میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے "لمحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں $t_0 = 1$ اور $t_0 = 2$ کے لئے $h = 0.1, 0.01, 0.001, \dots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

h	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ کے لئے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار 9.8 m s^{-1} کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ پر پتھر کی رفتار 9.8 m s^{-1} ہو گی۔ اسی طرح $t_0 = 2$ پر پتھر کی رفتار 19.6 m s^{-1} نظر آئے گی۔

□



شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

اوسط شرح تبدیلی اور سیکنٹ خطوط

x کے لحاظ سے تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1, x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1, x_2]$ پر $y = f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

□

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔ جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گرتے ہوئے خط کو ترسیم کا سیکنٹ¹ کہتے ہیں۔ یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

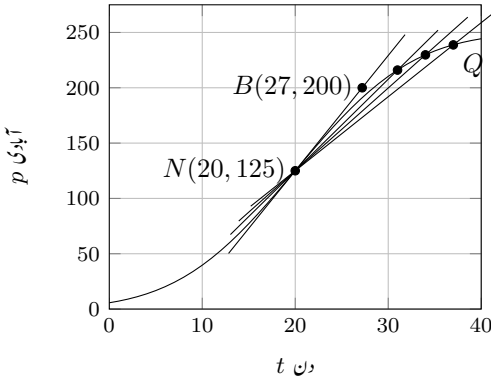
مثال 2.3: نمو آبادی کی اوسط شرح

ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔ تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

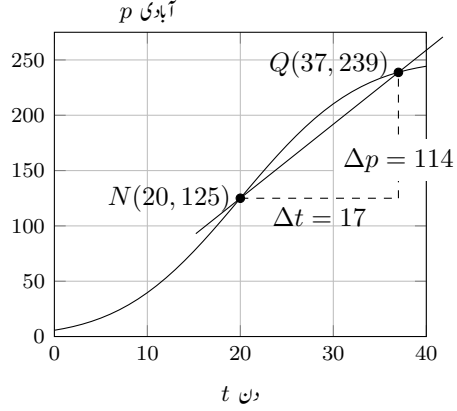
حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔ یوں $37 - 20 = 17$ دنوں میں آبادی میں $239 - 125 = 114$ تبدیلی رونما ہوئی۔ یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7 \text{ (کھیاں فی دن)}$$

¹ secant



شکل 2.3: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی



شکل 2.2: مکھی کی نمو آبادی

□

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔

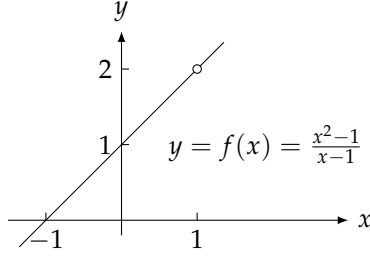
درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔ اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

مثال 2.4: مثال 2.3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟
حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
(37, 239)	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
(35, 230)	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
(32, 216)	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
(27, 200)	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو مس کرتا ہے۔ اس خط کو دیے گئے منحنی کا مماس² کہتے ہیں۔ اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 کھیاں فی دن ہو گی۔

□



شکل 2.4: مثال 2.5

لحہ $t = 1$ اور لحہ $t = 2$ پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو لحاتی شرح تبدیلی³ کہتے ہیں۔ جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لحاتی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔ درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سینٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔ لحاتی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔ اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم حد⁴ کہتے ہیں۔

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 2.5: تفاعل $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ نقطہ $x = 1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟
حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا ماسوائے $x = 1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے f تعین کرتا ہے۔ کسی بھی $x \neq 1$ کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$$

یوں خط $y = x + 1$ جس سے نقطہ $x = 1$ یعنی $(1, 2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔ اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

$x (\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 تک پہنچنے سے $f(x)$ کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا x ایک تک پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

□

x کی قیمت x_0 تک پہنچنے کو $x \rightarrow x_0$ لکھا جاتا ہے۔

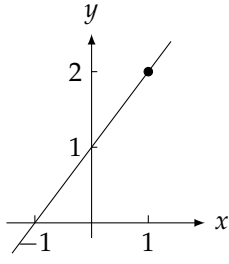
تعریف: حد کی غیر رسمی تعریف
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ پر تفاعل $f(x)$ معین ہے جبکہ عین نقطہ x_0 پر $f(x)$ غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لئے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 تک پہنچنے سے f کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

□

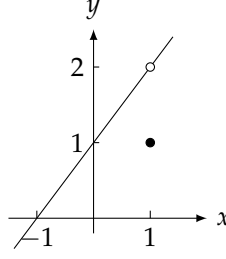
اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراہ پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد $10 \mu\text{m}$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف حصہ 2.3 میں پیش کریں گے۔

مثال 2.6: $x \rightarrow x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجوہیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں f کا $x \rightarrow 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تفاعل g کا $x \rightarrow 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تفاعل h کا $x \rightarrow 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں



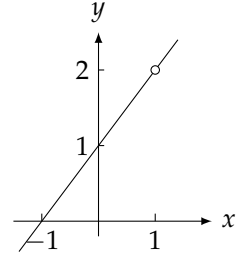
$$h(x) = x + 1$$

(ج)



$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(ب)



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

(ا)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 \quad \text{شکل 2.5}$$

یعنی $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ - حد اور تفاعل کی قیمتیں برابر ہونے کی یہ مساوات مخصوص صورت ہے جس پر حصہ 2.5 میں دوبارہ بات کی جائے گی۔

□

بعض اوقات $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کی مثال تفاعل $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور تکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہو۔ (اس پر مزید بات حصہ 2.2 اور حصہ 2.5 میں کی جائے گی۔)

مثال 2.7:

$$\text{ا. } \lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4$$

$$\text{ب. } \lim_{x \rightarrow 13} (4) = 4$$

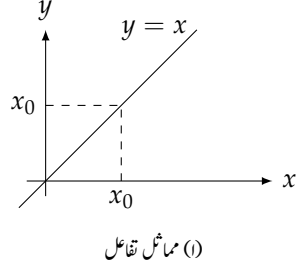
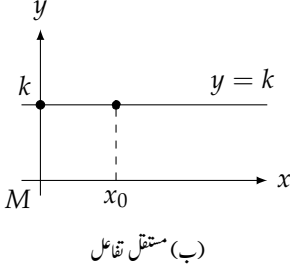
$$\text{ج. } \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

$$\text{د. } \lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$$

$$\text{ه. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3}$$

□

مثال 2.8:



شکل 2.6: اشکال برائے مثال 2.7

ا. اگر f مماثل تفاعل $f(x) = x$ ہو تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہوگا (شکل 2.6-ل)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

ب. اگر f مستقل تفاعل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہوگا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

□

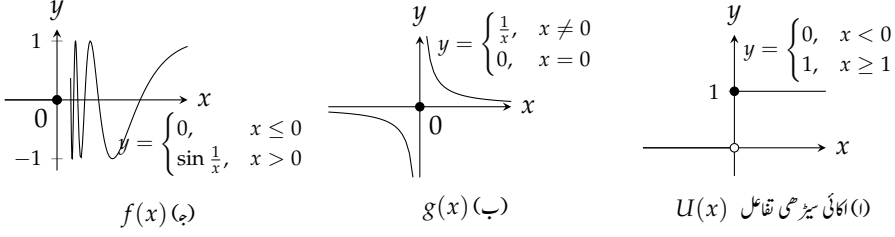
مثال 2.9: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔
درج ذیل تفاعل کا $x \rightarrow 0$ پر رویہ کیسا ہوگا؟

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \text{ ا.}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ ب.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ ج.}$$

حل:



شکل 2.7: اشکال برائے مثال 2.9

ا. اکائی سیزھی تقابل $U(x)$ کا $x \rightarrow 0$ پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تقابل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لئے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لئے U کی قیمت 1 ہے۔ یوں 0 کے قریب پہنچنے سے U کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔

ب. $x = 0$ کے کافی قریب تقابل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج. $x = 0$ کے کافی قریب تقابل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔ اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

□

سوالات 2.1

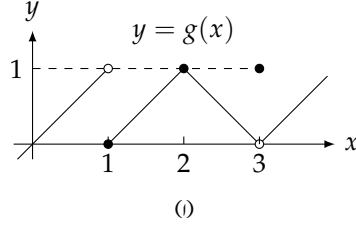
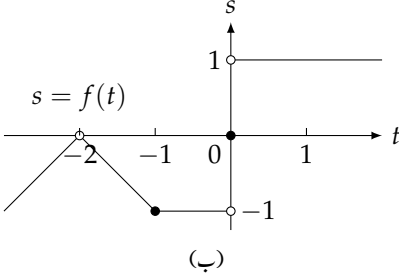
ترسیم سے حد

سوال 2.1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

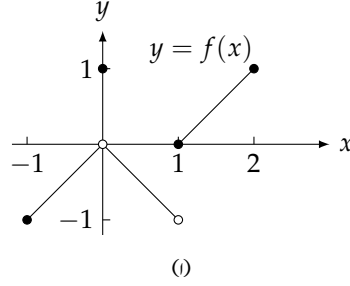
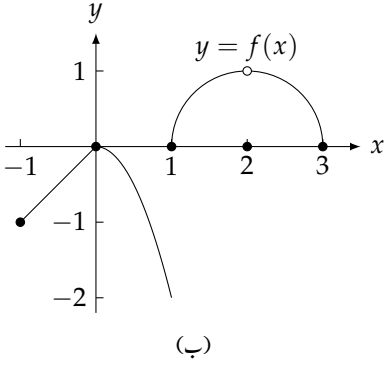
ا. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ب. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ج. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

جواب: (ا) موجود نہیں ہے۔ جیسے جیسے x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 0 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ یوں x کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہونے سے L کی یکتا قیمت کے نزدیک تر $g(x)$ نہیں پہنچتا ہے۔ (ب) 1 (ج) 0

سوال 2.2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔



شکل 2.8: اشکال برائے سوال 2.1 اور سوال 2.2



شکل 2.9: اشکال برائے سوال 2.3 اور سوال 2.4

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} f(t) \quad \text{ب۔}$$

$$\lim_{t \rightarrow -2} f(t) \quad \text{ا۔}$$

سوال 2.3: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 2.3-ا) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{د۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے} \quad \text{ا۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ وقفہ } (-1, 1) \quad \text{د۔}$$

میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{د۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{ب۔}$$

جواب: (ا) درست (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ه) غلط (و) درست

سوال 2.4: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 2.3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

- ج. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نہیں ہے
 ا. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود نہیں ہے
 ب. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔
 د. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وقفہ $(-1, 1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔
 و. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وقفہ $(1, 3)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

وجودیت اور حد

سوال 2.5 اور سوال 2.6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 2.5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$
 جواب: جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ جب x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ یوں x کا 1 کے نزدیک تر ہونے سے $\frac{x}{|x|}$ کسی یکتا قیمت کے نزدیک تر نہیں ہوتی ہے۔

سوال 2.6: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

- سوال 2.7: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 2.8: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1, 1]$ میں تمام x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 2.9: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟ اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

- سوال 2.10: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ لازماً موجود ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ لازماً ہو گا؟ کیا ہم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 2.11: $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $-3.1, -3.01, -3.001, \dots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلو لیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس نقاط $-2.9, -2.99, \dots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہوگا؟

ب. تقابل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \rightarrow -3$ کے لئے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

جواب: (ا)

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -6 \text{ (ج)}$$

سوال 2.12: $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینہ قیمتوں $x = 1.4, 1.41, 1.414, \dots$ پر تقابل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0 = \sqrt{2}$ کے قریب تقابل ترسیم کریں۔ $x \rightarrow \sqrt{2}$ کے لئے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 2.13: $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $-5.9, -5.99, -5.999, \dots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس $-6.1, -6.01, -6.001, \dots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ حاصل ہوگا؟

ب. G کو $x_0 = 6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x \rightarrow -6$ کے لئے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔ $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (i)

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	-0.126582	-0.1251564	-0.1250156	-0.1250015	-0.1250001	-0.1250000

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	-0.123456	-0.124843	-0.124984	-0.124998	-0.124999	-0.124999

$$\lim_{x \rightarrow -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0.125 \text{ (ج)}$$

سوال 2.14: $h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$ لیں۔

ا. نقاط $x = 2.9, 2.99, 2.999, \dots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کے برعکس $x = 3.1, 3.01, 3.001, \dots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہوگا؟

ب. $x_0 = 3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x \rightarrow 3$ کے لئے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔ $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 2.15: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے $x \rightarrow -1$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

(جواب: (i)

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	-0.99999	-0.999999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ (ج)}$$

$$\text{سوال 2.16: } F(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{2 - |x|} \text{ لیں۔}$$

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -2$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ ترسیم سے $x \rightarrow -2$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

$$\text{ج. } \lim_{x \rightarrow -2} F(x) \text{ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔}$$

$$\text{سوال 2.17: } g(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ لیں۔}$$

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

(جواب: (i)

θ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

θ	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = 1 \text{ (ج)}$$

$$\text{سوال 2.18: } G(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} \text{ لیں۔}$$

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $t_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{t \rightarrow 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 2.19: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $x \rightarrow 1$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب: (i)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$f(x)$	0.348678	0.366032	0.367695	0.367861	0.367877	0.367879
x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	0.385543	0.369711	0.368063	0.367897	0.367881	0.367878

(ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \approx 0.36788$

سوال 2.20: $f(x) = \frac{3^x - 1}{x}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $x \rightarrow 0$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 2.21 تا سوال 2.28 میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو تفاعل میں پر کرتے ہوئے تفاعل کی حد تلاش کریں۔

سوال 2.21: $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$

جواب: 4

سوال 2.22: $\lim_{x \rightarrow 0} 2x$

سوال 2.23: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x - 1)$
جواب: 0

سوال 2.24: $\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال 2.25: $\lim_{x \rightarrow -1} 3x(2x - 1)$
جواب: 9

سوال 2.26: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 2.27: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 2.28: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال 2.29 تا سوال 2.34 میں دیے وقفہ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

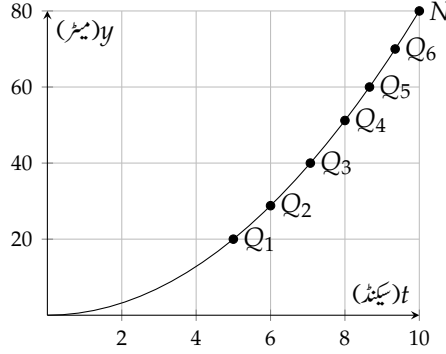
سوال 2.29: $f(x) = x^3 + 1$ ؛ (الف) $[2, 3]$ ، (ب) $[-1, 1]$
جواب: (الف) 19، (ب) 1

سوال 2.30: $g(x) = x^2$ ؛ (الف) $[-1, 1]$ ، (ب) $[-2, 0]$

سوال 2.31: $h(t) = \cos t$ ؛ (الف) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ، (ب) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$
جواب: (الف) $-\frac{4}{\pi}$ ، (ب) $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

سوال 2.32: $g(t) = 2 + \cos t$ ؛ (الف) $[0, \pi]$ ، (ب) $[-\pi, \pi]$

سوال 2.33: $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ ؛ $[0, 2]$
جواب: 1



شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم

سوال 2.34: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ ؛ $[1, 2]$

سوال 2.35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سینکٹ NQ_1 ، NQ_2 ، \dots ، NQ_6 کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10$ s پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 2.36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔ (الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے 1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

جواب: (ب) 5600000 سالانہ (پ) 4200000 سالانہ

سوال 2.37: تفاعل $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x = 2$ ، $\frac{11}{10}$ ، $\frac{101}{100}$ ، $\frac{1001}{1000}$ ، اور $x = 1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔ (الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $x \neq 1$ کے لئے وقفہ $[1, x]$ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔ (ب) $x = 1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔ اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 2.38: $x \geq 0$ کے لئے $g(x) = \sqrt{x}$ لیں۔

ا. وقفہ $[1, 2]$ ، $[1, 1.5]$ اور $[1, 1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ کے لئے x کے لحاظ سے وقفہ $[1, 1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x = 1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h \rightarrow 0$ کے لئے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا) $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$, 0.449489, 0.414213 (ب)

$1+h$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1+h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.000005	1.0000005
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(ج) 0.5 (د) 0.5

سوال 2.39: $f(t) = \frac{1}{t}$ کے لئے $t \neq 0$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t = 2$ تا $t = 3$ اور (ب) وقفہ $t = 2$ تا $t = T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T = 2.1$ ، $T = 2.01$ ، $T = 2.001$ ، $T = 2.0001$ ، کے لئے وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t = 2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \rightarrow 2$ کے لئے تلاش کریں۔ ($T = 2$ پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال 2.40 تا سوال 2.45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔ (الف) نقطہ x_0 کے قریب متقابل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر متقابل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 2.40: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2} \quad \text{سوال 2.41}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \quad \text{سوال 2.42}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4} \quad \text{سوال 2.43}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \quad \text{سوال 2.44}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3 - 3 \cos x} \quad \text{سوال 2.45}$$

2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔ پہلے تین مسئلے مثال 2.8 کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔ چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 2.1: حد کے خواص
اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ اور $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ہوں، جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M \quad \text{قاعدہ مجموعہ}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M \quad \text{قاعدہ فرق}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M \quad \text{قاعدہ ضرب}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = kL \quad (k \text{ مستقل عدد ہے}) \quad \text{قاعدہ ضرب مستقل}$$

قاعدہ حاصل تقسیم: $M \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ہو گا بشرطیکہ $L^{\frac{m}{n}}$ حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا مجموعہ ہو گا۔
2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا فرق ہو گا۔
3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہو گا۔
5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل تقسیم ہو گا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔
6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہو گا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ 2.3 میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ ب میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 2.10: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$ تلاش کریں۔

حل: مثال 2.8 کے نتائج $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ اور $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 2.1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow c} x^2 = (\lim_{x \rightarrow c} x)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c \cdot c = c^2 \quad \text{ا. حاصل ضرب یا طاقت}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5 = c^2 + 5 \quad \text{ب. مجموعہ اور (i)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} 4x^2 = 4 \lim_{x \rightarrow c} x^2 = 4c^2 \quad \text{ج. ضرب مستقل اور (i)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3 = 4c^2 - 3 \quad \text{د. فرق اور (ج)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} x^3 = (\lim_{x \rightarrow c} x^2)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c^2 \cdot c = c^3 \quad \text{ه. حاصل ضرب اور (i) یا طاقت}$$

و. $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x - 3) = \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = c^3 + 4c^2 - 3$ (ج) اور (د) مجموعہ،

ز. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)} = \frac{c^3 + 4c^2 - 3}{c^2 + 5}$ حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب)

□

مثال 2.11: $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$ تلاش کریں۔

حل:

مثال 2.10-د اور $n = \frac{1}{2}$ کے ساتھ قاعدہ طاقت

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{4(-2)^2 - 3} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$$

□

مسئلہ 2.1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x \rightarrow c$ کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں۔ ناطق تفاعل کا حد $x \rightarrow c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2.2: کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

مسئلہ 2.3: غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا

فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c) \neq 0$ ہے تب درج ذیل ہوگا۔

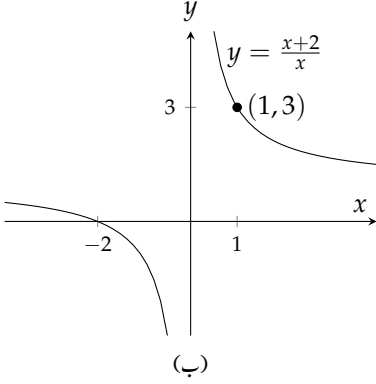
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 2.12:

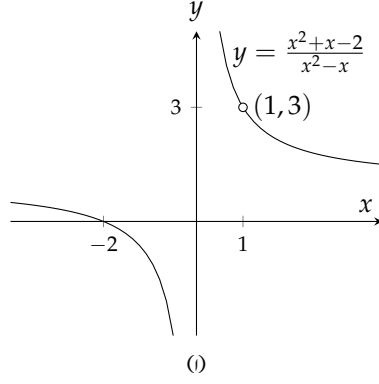
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

□

یہ ایک ہی قدم میں مثال 2.10 کا حل ہے۔



(ب)



(i)

شکل 2.11: ماسوائے نقطہ (1, 3) کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے استقاط

مسئلہ 2.3: ناطق تقاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تقاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔ صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹنے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پر کرنے سے حد حاصل کیا جاسکتا ہے۔ درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x = 1$ پر صفر ہیں۔ یوں $(x - 1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جاسکتا ہے۔

مثال 2.13: یکساں جزو کی منوخی

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} \text{ تلاش کریں۔}$$

حل: ہم $x = 1$ پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہو گا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے۔ البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}$$

اب $x \neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$

شکل 2.11 میں $y = \frac{x+2}{x}$ اور $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔ یہ ترسیم صرف نقطہ (1, 3) پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ البتہ اس نقطہ پر دونوں تقاعل کا حد ایک جیسا ہے۔ □

مثال 2.14: ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \text{ تلاش کریں۔}$$

حل: ہم $h = 0$ پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نم شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔ البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق $5 \sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔ نسب نما میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے

جس کو ہم کاٹتے ہیں

یوں درج ذیل ہو گا۔

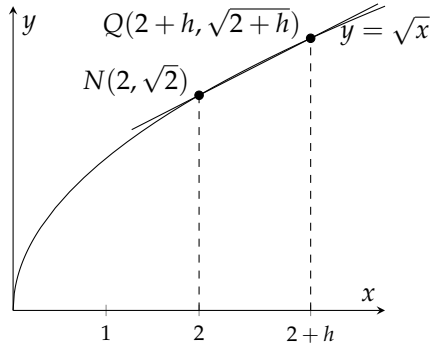
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} \quad \text{نسب نما اب } h = 0 \text{ پر صفر نہیں ہے} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ تفاعل $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ در حقیقت تفاعل $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2, \sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h, \sqrt{2+h})$ کے بیچ سیکنٹ کی ڈھلوان ہے اور $h \rightarrow 0$ کرنے سے مراد $Q \rightarrow N$ ہے۔ نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ ہم نے دیکھا کہ اس سیکنٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □

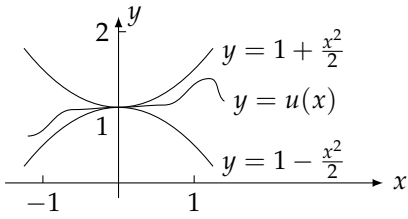
مسئلہ بیچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔ اس کو مسئلہ بیچ⁶ اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل f سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل g اور تفاعل h کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تفاعل کے بیچ پھنسنے ہوئے تفاعل کی قیمت L ہوگی (شکل 2.13)۔ اس کا ثبوت ضمیر ب میں دیا گیا ہے۔

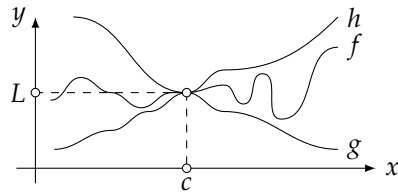
⁵ conjugate expression
⁶ sandwich theorem



شکل 2.12: $Q \rightarrow N$ کرنے سے سینٹ NQ کی ڈھلوان کا حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے



شکل 2.14: شکل برائے مثال 2.15



شکل 2.13: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔

مسئلہ 2.4: مسئلہ بیچ

فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو، میں (مکمل ہے کہ) ماسوائے $x = c$ پر تمام x کے لئے

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ہے۔ مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

ہے۔ تب $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ہو گا۔

مثال 2.15: اگر تمام $x \neq 0$ کے لئے $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ تلاش کریں۔
حل: چونکہ

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2}) = 1$$

□

ہیں لہذا مسئلہ بچ کے تحت $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل 2.14)۔

مثال 2.16: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ ہو گا۔
حل: چونکہ $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ہے، اور $-|f(x)|$ اور $|f(x)|$ کا حد 0 ہے لہذا مسئلہ بچ کے تحت
□ $f(x)$ کا حد بھی 0 ہو گا۔

سوالات 2.2

حد کا حساب

سوال 2.46 تا سوال 2.61 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.46: $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$
جواب: -9

سوال 2.47: $\lim_{x \rightarrow 12} (10 - 3x)$

سوال 2.48: $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$
جواب: 4

سوال 2.49: $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

سوال 2.50: $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$
جواب: -8

سوال 2.51: $\lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}} 3s(2s - 1)$

سوال 2.52: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+6}$
جواب: $\frac{5}{8}$

سوال 2.53: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4}{x-7}$

سوال 2.54: $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5-y}$
جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 2.55: $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 2.56: $\lim_{x \rightarrow -1} 3(2x - 1)^2$
جواب: 27

سوال 2.57: $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^{1984}$

سوال 2.58: $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{\frac{4}{3}}$
جواب: 16

سوال 2.59: $\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{\frac{1}{3}}$

سوال 2.60: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$
جواب: $\frac{3}{2}$

2.2. حد تلاش کرنے کے قواعد

سوال 2.61: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال 2.62 تا سوال 2.75 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.62: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$
جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 2.63: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال 2.64: $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$
جواب: -7

سوال 2.65: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال 2.66: $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 2.67: $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال 2.68: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 2.69: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال 2.70: $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$
جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 2.71: $\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال 2.72: $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
جواب: $\frac{1}{6}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}} \quad \text{سوال 2.73}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \quad \text{سوال 2.74}$$

جواب: 4

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} \quad \text{سوال 2.75}$$

قواعد حد کا استعمال

سوال 2.76: فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)} \\ &= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1 + 7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

جواب: (ا) قاعدہ حاصل تقسیم (ب) فرق اور قاعدہ طاقت (پ) مجموعہ اور ضرب مستقل قاعدہ

سوال 2.77: فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 5$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (p(x)(4 - r(x)))} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 5h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} (4 - r(x)))} && \text{(ب)} \\ &= \frac{\sqrt{5 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} 4 - \lim_{x \rightarrow 1} r(x))} && \text{(پ)} \\ &= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4 - 2)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

سوال 2.78: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$ اور $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + 3g(x)) \quad \text{ج۔} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) \quad \text{ا۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)} \quad \text{د۔} \quad \lim_{x \rightarrow c} 2f(x)g(x) \quad \text{ب۔}$$

$$\text{جواب: (ا) } -10 \quad \text{(ب) } -20 \quad \text{(ج) } -1 \quad \text{(د) } \frac{5}{7}$$

سوال 2.79: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ اور $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3) \quad \text{ا۔} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^2 \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x f(x) \quad \text{ب۔} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x)-1} \quad \text{د۔}$$

سوال 2.80: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$ اور $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow b} (f(x) + g(x)) \quad \text{ا۔} \quad \lim_{x \rightarrow b} 4g(x) \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) \quad \text{ب۔} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{د۔}$$

$$\text{جواب: (ا) } 4 \quad \text{(ب) } -21 \quad \text{(ج) } -12 \quad \text{(د) } -\frac{7}{3}$$

سوال 2.81: $\lim_{x \rightarrow -2} p(x) = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} r(x) = 0$ اور $\lim_{x \rightarrow -2} s(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2} (p(x) + r(x) + s(x)) \quad \text{ا۔} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4p(x) + 5r(x)}{s(x)} \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x) \quad \text{ب۔}$$

اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سینٹ خطوط، مماس اور لمباتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنیاد احصاء میں عموماً درپیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سوال 2.82 تا سوال 2.87 میں اس حد کو دیے گئے x پر تفاعل $f(x)$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 2.82: $f(x) = x^2, \quad x = 1$
جواب: 2

سوال 2.83: $f(x) = x^2, \quad x = -2$

سوال 2.84: $f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$
جواب: 3

سوال 2.85: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = -2$

سوال 2.86: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

سوال 2.87: $f(x) = \sqrt{3x + 1}, \quad x = 0$

مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 2.88: اگر $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے $\sqrt{5 - x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - 2x}$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sqrt{5}$

سوال 2.89: اگر تمام x کے لئے $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال 2.90: (الف) یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$$

(ب) $-2 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ ، $y = \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$ اور $y = 1$ ترسیم کریں۔ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔
جواب: (ا) حد 1 ہے۔

سوال 2.91: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لئے مطمئن ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(ب) $-2 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$ ، $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ اور $y = \frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ ان ترسیم کا رویہ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے کیا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 2.92: اگر $[-1, 1]$ میں x کے لئے $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ اور $x < -1$ اور $x > 1$ کے لئے $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 2.93: فرض کریں کہ تمام $x \neq 2$ کے لئے $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -5$ ہے۔ کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ کیا $f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہات پیش کریں۔

سوال 2.94: اگر $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: 7

سوال 2.95: اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال 2.96: (الف) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
(ب) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: (ا) 5 (ب) 5

سوال 2.97: اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گے؟

کمپیوٹر

سوال 2.98: (الف) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 2.99: (الف) $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ تلاش کریں۔
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبرا سے حاصل کریں۔

2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہوگی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

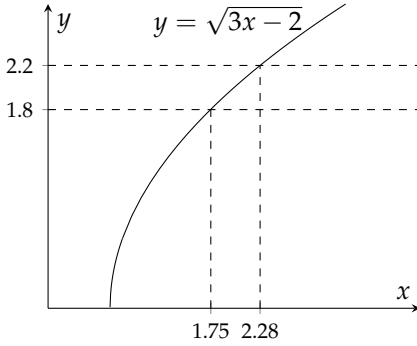
ہم بعض اوقات جانتا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دار و مدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مستری انجن کی سلنڈر کا قطر $50 \mu\text{m}$ درستی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

مثال 2.17: خطی تفاعل قابو کرنا
تفاعل $y = 2x - 1$ کے خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟
حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لئے $|y - 7| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $|y - 7|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

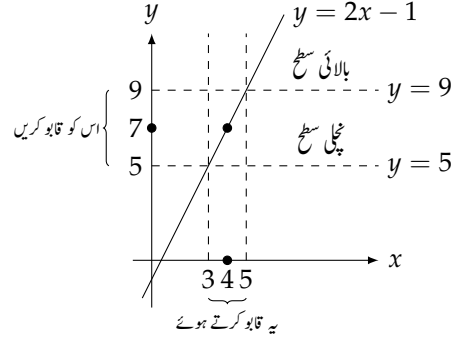
$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $|2x - 8| < 2$ کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 &< 2x - 8 < 2 \\ 6 &< 2x < 10 \\ 3 &< x < 5 \\ -1 &< x - 4 < 1 \end{aligned}$$



شکل 2.16: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔



شکل 2.15: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 2.17)

$x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □

فنیات

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جاسکتے ہیں۔ درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور نچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی کلیروں سے ظاہر کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفہ میں تفاعل کا رویہ دیکھا جاسکتا ہے۔ (سوال 2.106 تا سوال 2.113 اور سوال 2.160 تا سوال 2.163)

مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ کے ترسیم پر y محور کے مطلوبہ وقفہ (1.8, 2.2) پر غور کریں۔ یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل 2.16)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ (1.98, 2.02) اور (1.9998, 2.0002) پر بھی تفاعل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2.18: 6 cm اندرونی قطر کے ایک لٹری پیائٹی پیالے پر 1 mm وقفہ پر افقی کلیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔
پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ ایک لٹر (1000 cm³) پانی ناپنے کی خاطر h کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل 1% سے کم ہونا چاہیے۔
حل: ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \leq 10$$

یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہوگی۔

$$\begin{aligned} |36\pi h - 1000| &\leq 10 \\ -10 &\leq 36\pi h - 1000 \leq 10 \\ 990 &\leq 36\pi h \leq 1010 \\ \frac{990}{36\pi} &\leq h \leq \frac{1010}{36\pi} \\ 8.8 &\leq h \leq 8.9 \end{aligned}$$

یوں 1% درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1 \text{ cm}$ یعنی 1 mm ہے۔ پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر افقی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مانع تاپنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ □

حد کی باضابطہ تعریف

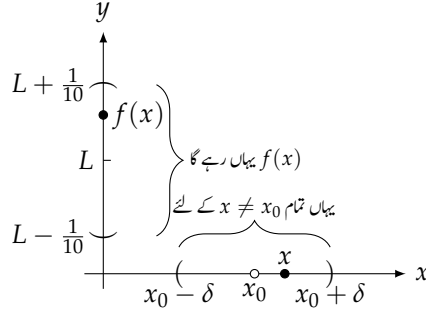
مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \rightarrow x_0$ کرنے سے $f(x)$ کا حد L حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہوگی (شکل 2.17)۔ البتہ اتنا جاننا کافی نہیں ہے چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھراتی ہو۔

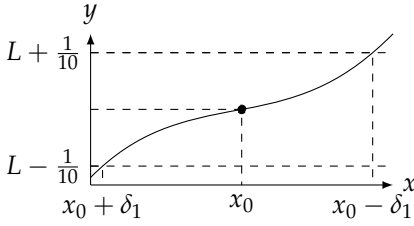
ہمیں سے کہا جاسکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100,000}$ ہے۔ ہر مرتبہ ہم x_0 کے ارد گرد ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جاسکتا ہے۔ البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جاسکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھر تھراہٹ کا شکار ہوتے ہوئے L تک نہ پہنچتی ہو۔

شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکلی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔ شکلی انسان قابل قبول چھوٹ ϵ چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔

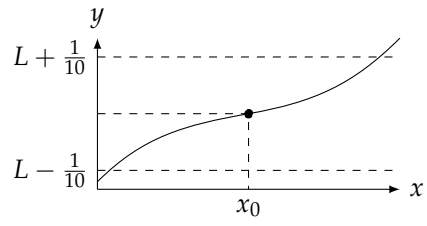
اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لئے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔



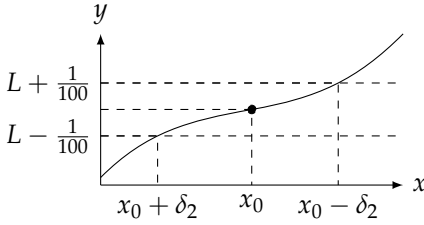
شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم



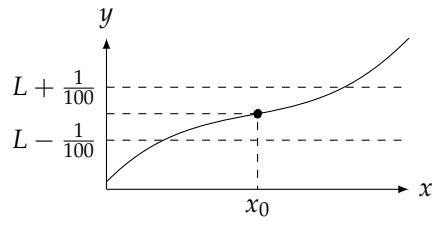
(ب) پہلے جواب: $|x - x_0| < \delta_1$ رکھیں



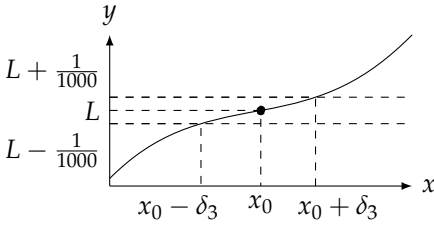
(i) پہلا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں



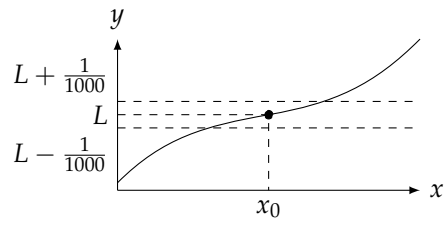
(g) دوسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_2$ رکھیں



(j) دوسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں

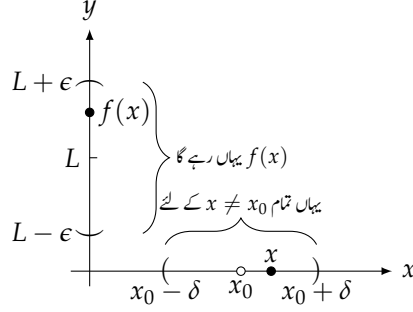


(e) تیسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_3$ رکھیں



(h) تیسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں

شکل 2.18: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ



شکل 2.19: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی قریب ہوگی۔

تعریف: حد کی باضابطہ تعریف

فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں $f(x)$ معین ہے جبکہ نقطہ x_0 پر عین ممکن ہے کہ $f(x)$ معین نہ ہو۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

□

مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ آپ خراہ کی مشین پر قطر L کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔ اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج نہیں دیتی ہے لہذا آپ کو $f(x)$ قطر یعنی $L - \epsilon$ اور $L + \epsilon$ کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہوگا۔ دھرا کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لئے x کو قابو میں رکھنا ضروری ہوگا لہذا x کو $x - \delta$ اور $x + \delta$ کے بیچ رکھنا ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ ϵ کم کی جائے، آپ کو ویسے ویسے δ کو درست کرنا ہوگا۔

تعریف کو پرکھنے کی مثالیں

حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی ہے البتہ اس سے حد کی درستگی کی تصدیق کی جاسکتی ہے۔ درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔ حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 2.19: دکھائیں کہ $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ ہے۔

حل: حد کی تعریف میں $x_0 = 1$ ، $f(x) = 5x - 3$ اور $L = 2$ لیں۔ کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہمیں موزوں $\delta > 0$ تلاش کرنا ہوگا تاکہ اگر $x \neq 1$ ہو اور $x_0 = 1$ سے x کا فاصلہ δ سے کم ہو یعنی اگر

$$0 < |x - a| < \delta$$

ہو تب $L = 2$ سے $f(x)$ کا فاصلہ ϵ سے کم ہوگا یعنی:

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

ہم ϵ کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے δ تلاش کرتے ہیں۔

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$

$$5|x - 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$$

یوں ہم $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ لے سکتے ہیں (شکل 2.20)۔ اب اگر $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ اور $0 < |x - 1| < \delta$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

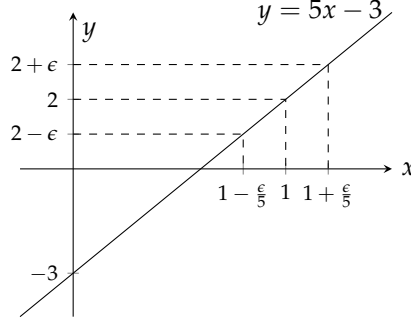
اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ ہے۔

$\delta = \frac{\epsilon}{5}$ وہ واحد قیمت نہیں ہے جس کے لئے $0 < |x - 1| < \delta$ سے مراد $|5x - 5| < \epsilon$ لیا جاسکتا ہے۔ δ کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لئے بھی $0 < |x - 1| < \delta$ سے مراد $|5x - 5| < \epsilon$ لیا جاسکتا ہے۔ حد کی تعریف بہترین δ کی بات نہیں کرتی ہے بلکہ δ کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو کی بات کرتی ہے۔ □

مثال 2.20: دو اہم حد

تصدیق کریں: (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ (ب) $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ جہاں k مستقل ہے۔
حل: (i) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا $\delta > 0$ تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ سے مراد } |x - x_0| < \epsilon \text{ ہو۔}$$



شکل 2.20: $f(x) = 5x - 3$ کے لئے $0 < |x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$ کی صورت میں $|f(x) - 2| < \epsilon$ ہوگا (مثال 2.19)۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ δ کی قیمت ϵ کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل 2.21)۔ یوں ثابت ہو کہ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ہے۔
(ب) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا δ تلاش کرنا ہے کہ ہر x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ سے مراد } |f(x) - L| < \epsilon \text{ ہو۔}$$

چونکہ $k - k = 0$ ہے لہذا کسی بھی مثبت عدد کو δ لیا جاسکتا ہے (شکل 2.21)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ ہے۔
□

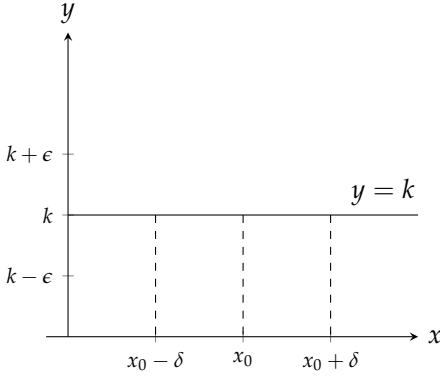
دیے گئے ϵ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

مثال 2.19 اور مثال 2.20 میں x_0 کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر $|f(x) - L|$ کی قیمت ϵ سے کم تھی x_0 کے لحاظ سے تشابہی تھا۔ یوں ہم δ کو وقفہ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشابہ نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا ہے، ہم x_0 سے وقفے کے قریبی سر تک فاصلے کو δ لے سکتے ہیں۔

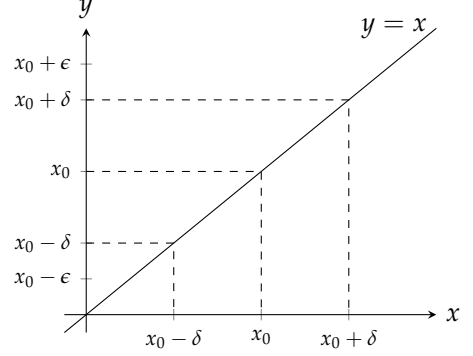
مثال 2.21: حد $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = 2$ کے لئے $\epsilon = 1$ کے لحاظ سے $\delta > 0$ تلاش کریں۔ یعنی ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $0 < |x - 5| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت \implies کو پڑھیں "سے مراد")۔

$$0 < |x - 5| < \delta \implies |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$

حل: اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں عدم مساوات $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ (a, b) تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد



(ب) تقابل $f(x) = k$ کے لئے کسی بھی مثبت δ کی صورت میں $|f(x) - k| < \epsilon$ ہو گا۔



(ا) $0 < |x - x_0| < \delta$ کی صورت میں $f(x) = x$ کے لئے جب بھی $\delta \leq \epsilon$ ہو تب $|f(x) - x_0| < \epsilon$ ہو گا۔

شکل 2.21: 2.20 مثال کے برائے شکل

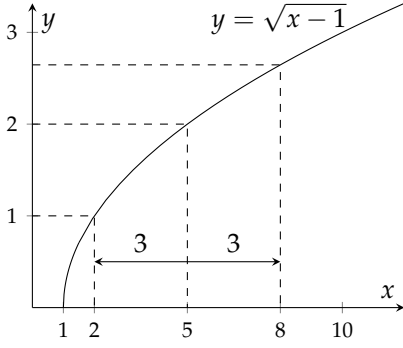
$\delta > 0$ حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کا وسط نقطہ x_0 ہو اور یہ وقفہ (a, b) کے اندر پایا جاتا ہو۔ پہلا قدم: عدم مساوات $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں کہ اس وقفے پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

$$\begin{aligned} |\sqrt{x-1}-2| &< 1 \\ -1 &< \sqrt{x-1}-2 < 1 \\ 1 &< \sqrt{x-1} < 3 \\ 1 &< x-1 < 9 \\ 2 &< x < 10 \end{aligned}$$

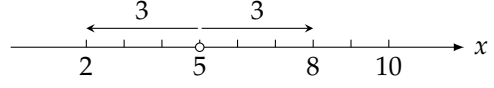
عدم مساوات کھلے وقفہ $(2, 10)$ پر تمام نقطوں کے لئے مطمئن ہوتی ہے لہذا یہ اس وقفے پر تمام $x \neq 5$ کے لئے بھی مطمئن ہو گی۔ دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کو وقفہ $(2, 10)$ میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ $(2, 10)$ کے قریبی سر کا فاصلہ 3 ہے۔ اس طرح $\delta = 3$ یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے $0 < |x - 5| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x وقفہ $(2, 10)$ میں پائے جائیں گے جس سے $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 5| < 3 \implies |\sqrt{x-1}-2| < 1$$

□



(ب) تفاعل اور وقفہ



(i) $x_0 = 5$ کے ارد گرد اس 3 کا کھلا وقفہ $(2, 10)$ کے اندر پایا جائے گا۔

شکل 2.22: اشکال برائے مثال 2.21

دیے گئے f ، L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

ایسا $\delta > 0$ کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

کو دو قدموں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

پہلا قدم: عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ (a, b) حاصل کریں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو کھلا وقفہ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، جس کا وسط x_0 ہے، کو (a, b) کے اندر رکھے۔ اس δ وقفہ میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوگی۔

مثال 2.22: ثابت کریں کہ درج ذیل تفاعل کے لئے $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

حل: ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ $0 < |x - 2| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

پہلا قدم: عدم مساوات $|f(x) - 4| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 2$ کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اب $x \neq x_0 = 2$ کے لئے $f(x) = x^2$ ہے لہذا عدم مساوات کی صورت $|x^2 - 4| < \epsilon$ ہوگی۔

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \epsilon \\ -\epsilon &< x^2 - 4 < \epsilon \\ 4 - \epsilon &< x^2 < 4 + \epsilon \\ \sqrt{4 - \epsilon} &< |x| < \sqrt{4 + \epsilon} \quad \text{فرض کریں کہ } \epsilon < 4 \text{ ہے} \\ \sqrt{4 - \epsilon} &< x < \sqrt{4 + \epsilon} \end{aligned}$$

کھلا وقفہ $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ میں تمام $x \neq 2$ کے لئے عدم مساوات $|f(x) - 4| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ $(2 - \delta, 2 + \delta)$ کو $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ کے اندر رکھتا ہو۔ نقطہ $x_0 = 2$ سے کھلا وقفہ $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ کے قریبی سر کا فاصلہ δ ہوگا۔ یوں $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ اور $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$ میں سے کم قیمت δ کے برابر ہوگی۔ δ کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لئے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

□

درج بالا مثال میں ہم نے $\epsilon < 4$ کیوں فرض کیا؟ اس لئے کہ تمام x کے لئے ایسا δ کہ $0 < |x - 2| < \delta$ سے مراد $|f(x) - 4| < \epsilon < 4$ ہو میں ہم نے δ کی وہ قیمت دریافت کی جو ϵ کے کسی بھی بڑی قیمت کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسکلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے ہیں۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسکلوں (بالخصوص حصہ 2.2 کے مسکلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کیے جاتے ہیں۔ انہیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال 2.23: قاعدہ مجموعہ

اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ اور $\lim_{z \rightarrow c} g(x) + M$ ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

حل: فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم ایسا مثبت عدد δ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ $0 < |x - c| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

تکوئی عدم مساوات

چونکہ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ موجود ہے لہذا ایسا عدد $\delta_1 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ موجود ہے لہذا ایسا عدد $\delta_2 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ δ_1 اور δ_2 میں سے چھوٹی قیمت δ کے برابر ہے۔ اب اگر $0 < |x - c| < \delta$ ہو تب

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x - c| < \delta_1$$

ہوں گے، اور $|x - c| < \delta_2$ اور $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔ اس طرح

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□ ہو گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$ ہے۔

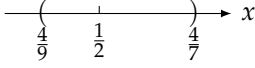
سوالات 2.3

نقطہ x_0 پر وقفے کا وسط لانا
سوال 2.100 تا سوال 2.105 میں x محور پر وقفہ (a, b) ترسیم کریں جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے۔ اس کے بعد ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $|x - x_0| < \delta$ سے مراد $a < x < b$ ہو۔

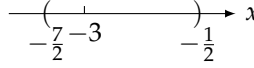
سوال 2.100: $a = 1, b = 7, x_0 = 5$

جواب: $\delta = 2$ شکل 2.23

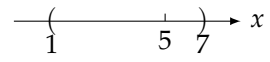
سوال 2.101: $a = 1, b = 7, x_0 = 2$



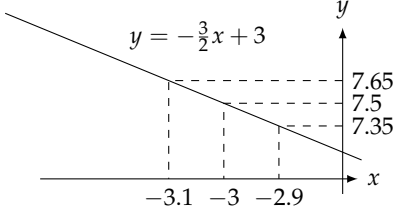
شکل 2.25



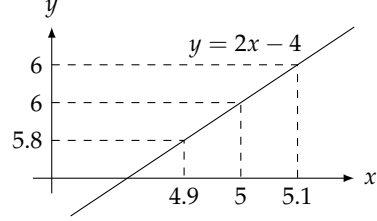
شکل 2.24



شکل 2.23



شکل 2.27: ترسیم برائے سوال 2.107



شکل 2.26: ترسیم برائے سوال 2.106

سوال 2.102: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -3$
جواب: $\delta = \frac{1}{2}$ شکل 2.24

سوال 2.103: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 2.104: $a = \frac{4}{9}, b = \frac{4}{7}, x_0 = \frac{1}{2}$
جواب: $\delta = \frac{1}{18}$ شکل 2.25

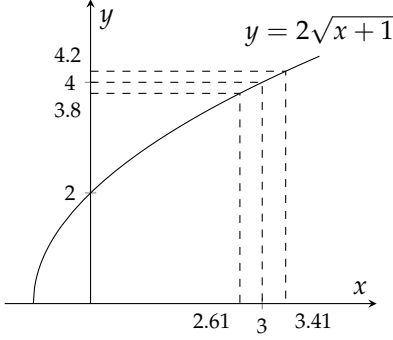
سوال 2.105: $a = 2.7591, b = 3.2391, x_0 = 3$

δ کا حصول بذریعہ ترسیم
سوال 2.106 تا سوال 2.113 میں ترسیم سے ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

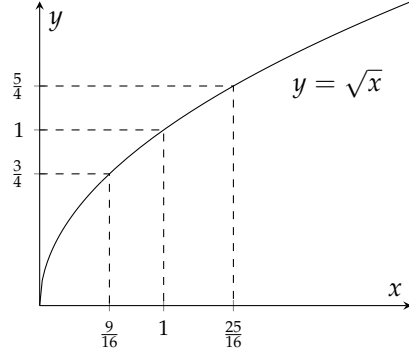
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies 0 < |f(x) - L| < \epsilon$$

سوال 2.106: $f(x) = 2x - 4, x_0 = 5, L = 6, \epsilon = 0.2$
جواب: $\delta = 0.1$ شکل 2.26

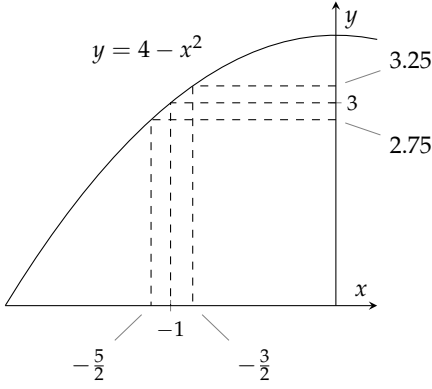
سوال 2.107: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3, x_0 = -3, L = 7.5, \epsilon = 0.15$ شکل 2.27



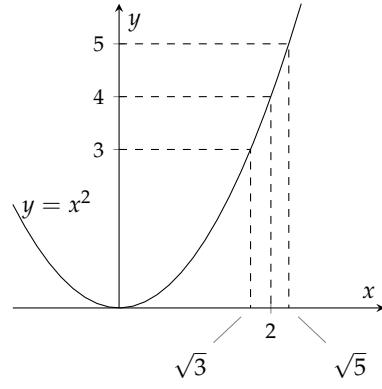
شکل 2.29: ترسیم برائے سوال 2.109



شکل 2.28: ترسیم برائے سوال 2.108



شکل 2.31: ترسیم برائے سوال 2.111



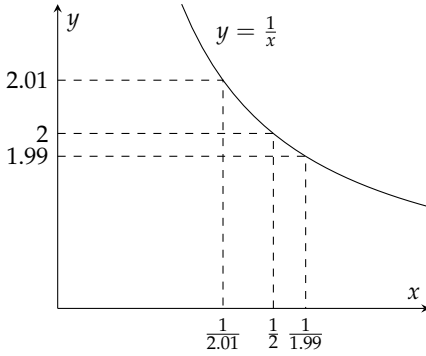
شکل 2.30: ترسیم برائے سوال 2.110

سوال 2.108: $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $L = 1$, $\epsilon = \frac{1}{4}$: شکل 2.28
جواب: $\delta = \frac{7}{16}$

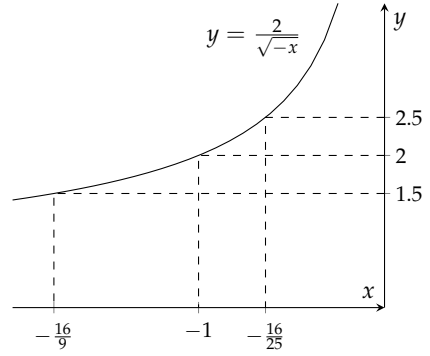
سوال 2.109: $f(x) = 2\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$, $L = 4$, $\epsilon = 0.2$: شکل 2.29

سوال 2.110: $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $L = 4$, $\epsilon = 1$: شکل 2.30
جواب: $\delta = \sqrt{5} - 2$

سوال 2.111: $f(x) = 4 - x^2$, $x_0 = -1$, $L = 3$, $\epsilon = 0.25$: شکل 2.31



شکل 2.33: ترتیم برائے سوال 2.113



شکل 2.32: ترتیم برائے سوال 2.112

سوال 2.112: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}, x_0 = -1, L = 2, \epsilon = 0.5$ شکل 2.32
جواب: $\delta = 0.36$

سوال 2.113: $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}, L = 2, \epsilon = 0.01$ شکل 2.33

δ کا الجبرائی حصول
سوال 2.114 تا سوال 2.129 میں $f(x)$ اور اعداد L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ دیے گئے ہیں۔ ہر سوال میں x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کریں جس پر عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد $\delta > 0$ کی ایسی قیمت تلاش کریں کہ عدم مساوات $\delta < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے ہر x کے لئے عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

سوال 2.114: $f(x) = x + 1, L = 5, x_0 = 4, \epsilon = 0.01$
جواب: $\delta = 0.01, (3.99, 4.01)$

سوال 2.115: $f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \epsilon = 0.02$

سوال 2.116: $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, x_0 = 0, \epsilon = 0.1$
جواب: $\delta = 0.19, (-0.19, 0.21)$

سوال 2.117: $f(x) = \sqrt{x}, L = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{4}, \epsilon = 0.1$

سوال 2.118: $f(x) = \sqrt{19-x}, L = 3, x_0 = 10, \epsilon = 1$
جواب: $\delta = 5, (3, 15)$

سوال 2.119: $f(x) = \sqrt{x-7}, L = 4, x_0 = 23, \epsilon = 1$

سوال 2.120: $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, x_0 = 4, \epsilon = 0.05$
 جواب: $\delta = \frac{2}{3}, \left(\frac{10}{3}, 5\right)$

سوال 2.121: $f(x) = x^2, L = 3, x_0 = \sqrt{3}, \epsilon = 0.1$

سوال 2.122: $f(x) = x^2, L = 4, x_0 = -2, \epsilon = 0.5$
 جواب: $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12, (-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$

سوال 2.123: $f(x) = \frac{1}{x}, L = -1, x_0 = -1, \epsilon = 0.1$

سوال 2.124: $f(x) = x^2 - 5, L = 11, x_0 = 4, \epsilon = 1$
 جواب: $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12, (\sqrt{15}, \sqrt{17})$

سوال 2.125: $f(x) = \frac{120}{x}, L = 5, x_0 = 24, \epsilon = 1$

سوال 2.126: $f(x) = mx, m > 0, L = 2m, x_0 = 2, \epsilon = 0.03$
 جواب: $\delta = \frac{0.03}{m}, \left(2 - \frac{0.03}{m}, 2 + \frac{0.03}{m}\right)$

سوال 2.127: $f(x) = mx, m > 0, L = 3m, x_0 = 3, \epsilon = c > 0$

سوال 2.128: $f(x) = mx + b, m > 0, L = \frac{m}{2} + b, x_0 = \frac{1}{2}, \epsilon = c > 0$
 جواب: $\delta = \frac{c}{m}, \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{1}{2} + \frac{c}{m}\right)$

سوال 2.129: $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, x_0 = 1, \epsilon = 0.05$

با ضابطہ حد پر مزید سوالات
 سوال 2.130 تا سوال 2.135 میں تقابل $f(x)$ ، نقطہ x_0 اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد ایسا عدد $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

سوال 2.130: $f(x) = 3 - 2x, x_0 = 3, \epsilon = 0.02$
 جواب: $\delta = 0.01, L = -3$

سوال 2.131: $f(x) = -3x - 2, x_0 = -1, \epsilon = 0.03$

سوال 2.132: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x_0 = 2, \epsilon = 0.05$
 جواب: $\delta = 0.05, L = 4$

2.3. مطلوب قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف

$$f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+5}, x_0 = -5, \epsilon = 0.05 \quad \text{سوال 2.133}$$

$$f(x) = \sqrt{1-5x}, x_0 = -3, \epsilon = 0.5 \quad \text{سوال 2.134}$$

جواب: $\delta = 0.75, L = 4$

$$f(x) = \frac{4}{x}, x_0 = 2, \epsilon = 0.4 \quad \text{سوال 2.135}$$

سوال 2.136 تا سوال 2.149 میں دیا گیا فقرہ حد ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} (9 - x) = 5 \quad \text{سوال 2.136}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2 \quad \text{سوال 2.137}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x - 5} = 2 \quad \text{سوال 2.138}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 - x} = 2 \quad \text{سوال 2.139}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{کے لئے} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{سوال 2.140}$$

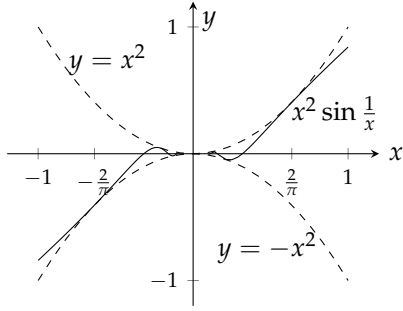
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4 \quad \text{کے لئے} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases} \quad \text{سوال 2.141}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \quad \text{سوال 2.142}$$

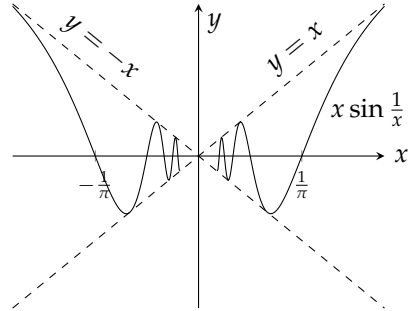
$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \quad \text{سوال 2.143}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6 \quad \text{سوال 2.144}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{سوال 2.145}$$



شکل 2.35: ترسیم برائے سوال 2.149



شکل 2.34: ترسیم برائے سوال 2.148

سوال 2.146: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ کے لئے $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

سوال 2.147: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ کے لئے $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

سوال 2.148: شکل 2.34 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

سوال 2.149: شکل 2.35 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

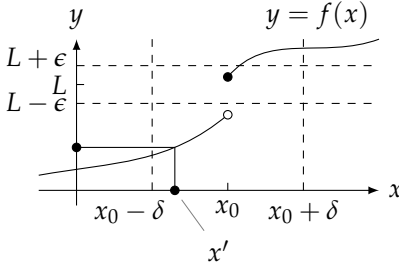
نظریہ اور مثالیں

سوال 2.150: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

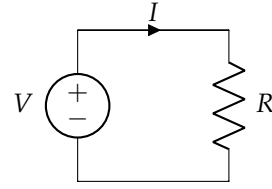
سوال 2.151: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = k$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 2.152: یہ کہنا کہ "جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت L کے قریب ہوتی جاتی ہے" سے یہ اخذ نہیں کیا جاسکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال 2.153: یہ کہنا کہ "کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $|f(x) - L| < \epsilon$ " سے یہ مراد نہیں لیا جاسکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔



شکل 2.37



شکل 2.36: قانون اوہم (سوال 2.155)

سوال 2.154: انجن کی سلنڈر کی رگڑائی
انجن سلنڈر کا رقبہ عمودی تراش 58 cm^2 حاصل کرنے کے لئے رگڑائی کرنے سے پہلے آپ جاننا چاہیں گے کہ سلنڈر کے رقبہ میں خلل کو $\pm 0.06 \text{ cm}^2$ درستگی کے اندر رکھنے کے لئے درکار 8.593 cm قطر میں چھوٹ کتنی ہے۔ یہ جاننے کی خاطر آپ $A = \frac{\pi d^2}{4}$ لکھ کر $|A - 58| \leq 0.06$ کو حل کرتے ہوئے قطر d تلاش کرتے ہو۔ قطر کا کیا وقفہ حاصل ہو گا؟
جواب: $[8.589, 8.598]$

سوال 2.155: اوہم کا قانون کہتا ہے کہ $V = IR$ ہو گا جہاں V برقی دباؤ، I برقی رو اور R برقی مزاحمت ہیں جن کی اکائیاں بالترتیب وولٹ V ، ایمپیئر A اور اوہم Ω ہیں (شکل 2.36)۔ آپ کے ادارے کو کہا گیا ہے کہ وہ برقی مزاحمت فراہم کرے۔ برقی دباؤ 220 V ہو گی جبکہ برقی رو $10 \text{ mA} \pm 0.1 \text{ mA}$ ہونی ضروری ہے۔ مطلوبہ برقی رو 10 mA میں چھوٹ 0.1 mA ہے۔ درکار برقی مزاحمت کا وقفہ کیا ہو گا؟

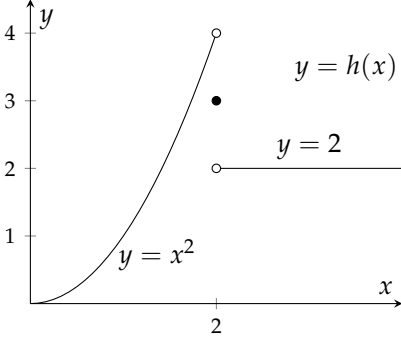
کب $x \rightarrow x_0$ کرنے سے عدد L تفاعل $f(x)$ کا حد نہیں ہو گا؟
یہ ثابت کرنے کی خاطر آپ کو ایسا $\epsilon > 0$ تلاش کرنا ہو گا جس کے لئے ایسا کوئی $\delta > 0$ نہیں پایا جاتا ہو کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر ہم اس ϵ کے لئے ثابت کریں گے کہ ہر $\delta > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ اور $|f(x) - L| \geq \epsilon$ ہوں (مثلاً شکل 2.37 میں نقطہ $x = x'$)۔

سوال 2.156: فرض کریں $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ہے جس کو شکل 2.38 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) $\epsilon = \frac{1}{2}$

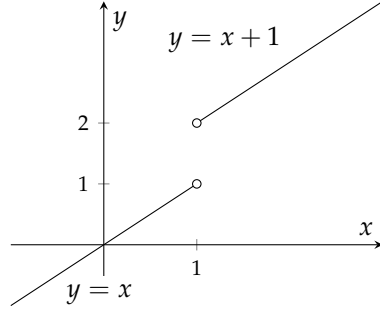
لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدم مساوات $0 < |x - 1| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے کوئی بھی $\delta > 0$ عدم مساوات $|f(x) - 2| < \frac{1}{2}$ کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ یعنی ہر δ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $0 < |x - 1| < \delta$ اور $|f(x) - 2| \geq \frac{1}{2}$ ہوتے ہیں۔ یوں $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 2$ ہو گا۔

(ب) دکھائیں $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1$

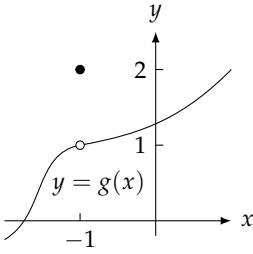
(پ) دکھائیں $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1.5$



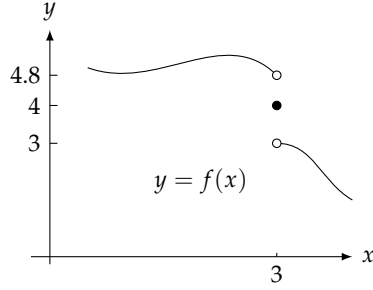
شکل 2.39: تقابل کا ترسیم برائے سوال 2.157



شکل 2.38: تقابل کا ترسیم برائے سوال 2.156



شکل 2.41: ترسیم برائے سوال 2.159



شکل 2.40: ترسیم برائے سوال 2.158

سوال 2.157: تقابل (شکل 2.39) کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 3$

(پ) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 2$

سوال 2.158: تقابل کی ترسیم شکل 2.40 اس کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 4.2$

(پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 3$

سوال 2.159: دکھائیں کہ شکل 2.41 کی ترسیم کے لئے $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \neq 2$ ہے۔ کیا ایسا نظر آتا ہے جیسے حد $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ موجود ہے؟ اگر حد موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر حد نہیں پایا جاتا تو اس کی وجہ پیش کریں۔

حد بذریعہ ترسیم۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 2.160 تا سوال 2.165 میں آپ نے ترسیم کے ذریعہ δ تلاش کرنا ہو گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔
(الف) تفاعل $y = f(x)$ کو نقطہ x_0 کے قریب ترسیم کریں۔

(ب) ترسیم کو دیکھ کر حد کا اندازہ لگائیں۔ حد کو حساب کے ذریعہ تلاش کرتے ہوئے اپنے اندازے کی تصدیق کریں۔

(پ) $\epsilon = 0.2$ لیتے ہوئے تحدیدی خطوط $y_1 = L - \epsilon$ اور $y_2 = L + \epsilon$ کھینچیں۔ ساتھ ہی x_0 کے قریب تفاعل f ترسیم کریں۔

(ت) درج بالا جزو (پ) سے ایسے $\delta > 0$ کا اندازہ لگائیں کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتے ہوں۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

اپنا اندازہ پرکھنے کی خاطر f ، y_1 اور y_2 کو وقفہ $0 < |x - x_0| < \delta$ پر ترسیم کریں۔ اگر تفاعل کی کوئی قیمت وقفہ $[L - \epsilon, L + \epsilon]$ کے باہر پائی جاتی ہو تب منتخب کردہ δ بہت بڑا تھا لہذا δ کی چھوٹی قیمت لیتے ہوئے دوبارہ کوشش کریں۔
(ث) جزو (پ) اور (ت) کو $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ کے لئے دہرائیں۔

سوال 2.160: $f(x) = \frac{x^4 - 81}{x - 3}$, $x_0 = 3$

سوال 2.161: $f(x) = \frac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}$, $x_0 = 0$

سوال 2.162: $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$, $x_0 = 0$

سوال 2.163: $f(x) = \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}$, $x_0 = 0$

سوال 2.164: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$, $x_0 = 1$

سوال 2.165: $f(x) = \frac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}$, $x_0 = 1$

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. یک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب بائیں ہاتھ حد⁷ حاصل ہو گا۔ اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب دائیں ہاتھ حد⁸ حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

یک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔ اسی لئے عام حد کو بعض اوقات دو طرفہ حد⁹ بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر یک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔ اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

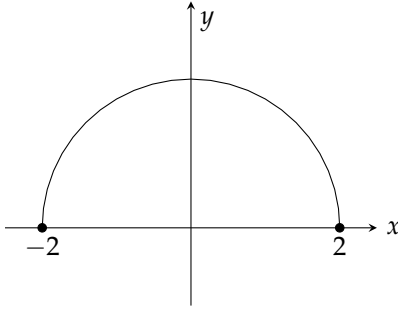
تعریف: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) ، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

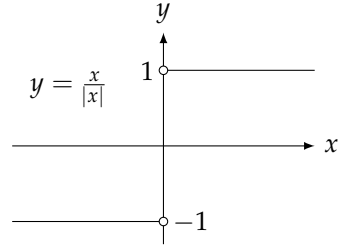
فرض کریں کہ وقفہ (c, a) ، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

left-handed limit⁷
right-handed limit⁸
two-sided limit⁹



شکل 2.43: تقابل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔

شکل 2.42 میں تقابل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$$

□

$x \rightarrow a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x \rightarrow a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تقابل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا دائرہ کار $[-2, 2]$ ہے۔ تقابل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

نقطہ $x = -2$ پر تقابل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = 2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x = -2$ اور $x = 2$ پر تقابل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔

□

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تقابل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تقابل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور مناطق تقابل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

ایک طرفہ اور دوطرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: ایک طرفہ بالمقابل دوطرفہ حد متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔
($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔ (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(2) = 2$ ہے۔

$x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

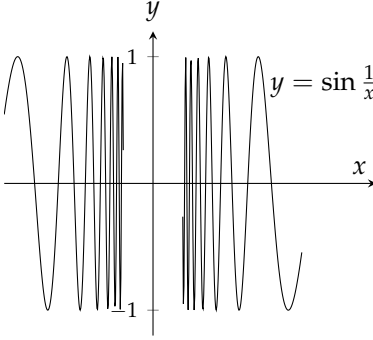
$x = 4$: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔ (نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ $[0, 4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ \square

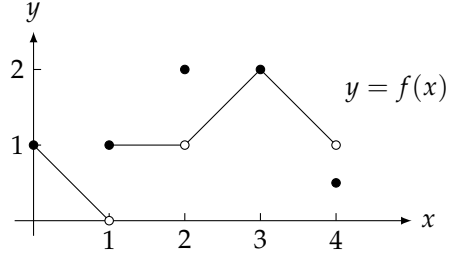
اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا ایک طرفہ حد موجود تھا۔ درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نہ بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin \frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔

حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ ایسا کوئی یکتا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔ یوں $x = 0$ پر $\sin \frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نہ کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ \square



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

لا متناہی حد

آئیں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے $x \rightarrow 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہوگا (شکل 2.46)۔ یوں $x \rightarrow 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

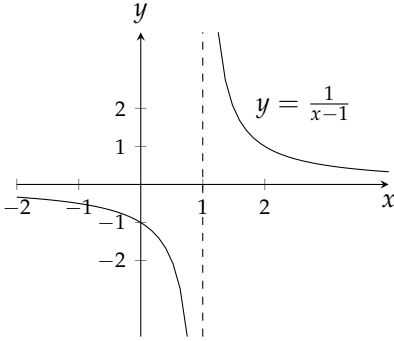
یہ لکھنے سے ہم ہرگز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہوگی۔

$x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہوگی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہوگی (شکل 2.46)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

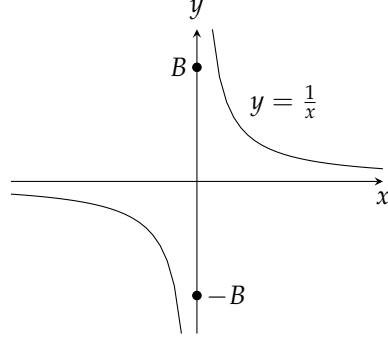
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

یہاں بھی ہم ہرگز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہوگی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: ایک طرفہ حد
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27



شکل 2.46: تفاعل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔

حل: ترسیمی حل: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x-1$ اور اس کے بالکس متناسب پر غور کریں۔ $x \rightarrow 1^+$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$ ملتے ہیں۔ $x \rightarrow 1^-$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$ ملتے ہیں۔ □

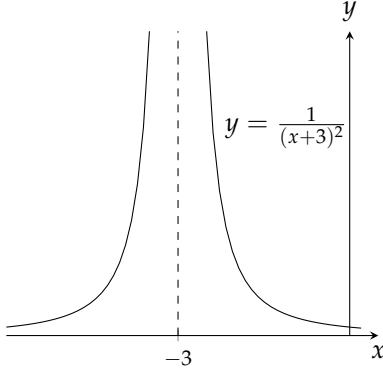
مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد
(i) $x=0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x=-3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔
حل: (i) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

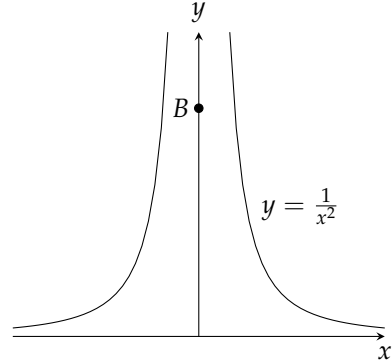
(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.49: تفاعل $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.48: تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \rightarrow 0$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔ اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔ صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: ناطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویے دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \quad (ب)$$

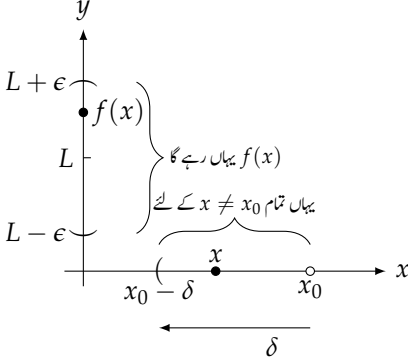
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \quad (د)$$

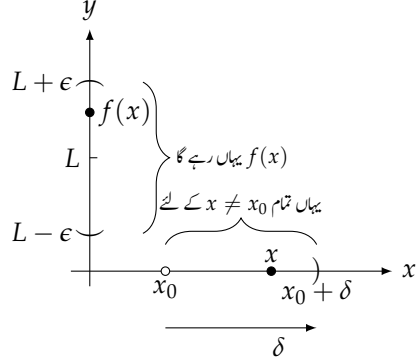
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \quad (ه)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \quad (و)$$

جزو (i) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔ جزو (ه) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جاسکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$(2.1) \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

بائیں ہاتھ حد

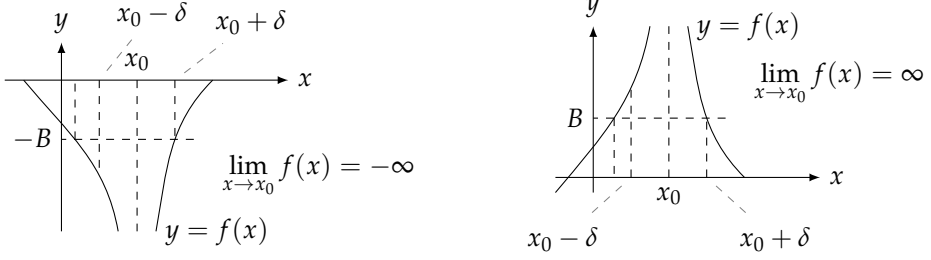
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$(2.2) \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

□



شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

ایک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے ایک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.3) \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.4) \quad -\delta < x - x_0 < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$(2.5) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبداء سے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔ اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لامتناہی حد

(i) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

□

ایک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔ اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 2.166: درج ذیل فکروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تقابل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ن۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ا۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{ب۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{ط۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{چ۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad \text{ی۔}$$

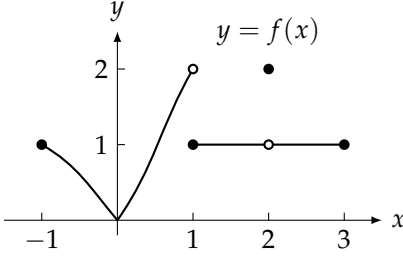
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{د۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{پ۔}$$

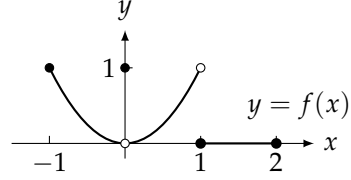
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے۔} \quad \text{ه۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \quad \text{ب۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{و۔}$$



شکل 2.54: تقابل برائے سوال 2.167



شکل 2.53: تقابل برائے سوال 2.166

جواب:

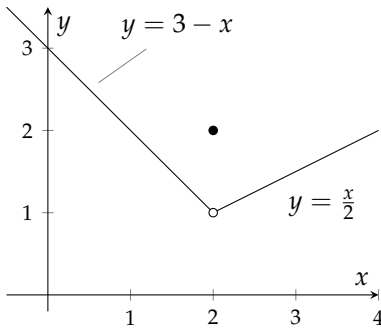
- ا. درست ب. غلط ج. غلط د. درست ه. درست ز. غلط ط. غلط یا. درست
- ب. درست د. درست و. درست ح. غلط ی. غلط یب. غلط

سوال 2.167: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تقابل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔

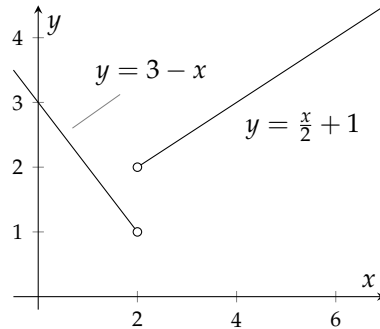
- ا. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ ب. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔
- ج. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ د. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$
- ه. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ و. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$
- ز. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ ی. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ غیر موجود ہے۔
- ط. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔ یا. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔
- ی. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ یب. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔

سوال 2.168: درج ذیل تقابل کو شکل 2.168 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$$



شکل 2.56: تفاعل برائے سوال 2.169



شکل 2.55: تفاعل برائے سوال 2.168

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود ہے۔ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) 2, 1، (ب) نہیں $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، (ج) 3, 3، (د) ہاں، 3

سوال 2.169: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

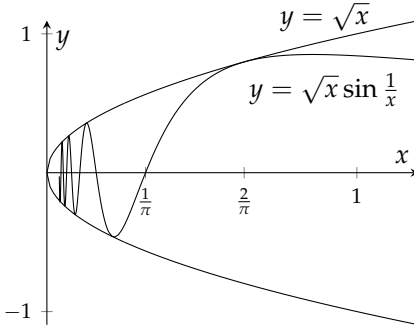
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

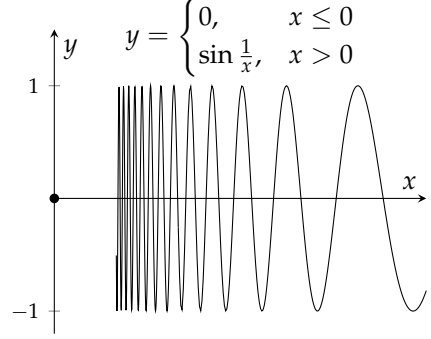
ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.58: تقابل برائے سوال 2.171



شکل 2.57: تقابل برائے سوال 2.170

سوال 2.170: درج ذیل تقابل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (i) نہیں (ب) ہاں، 0 (ج) نہیں

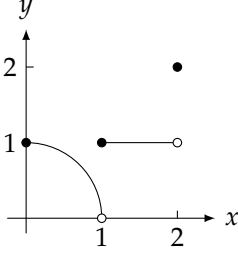
سوال 2.171: درج ذیل تقابل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

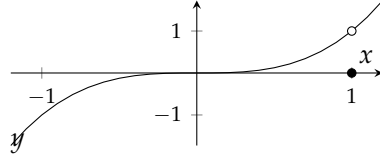
ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.172:



شکل 2.60: ترسیم برائے سوال 2.174



شکل 2.59: ترسیم برائے سوال 2.172

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (i) شکل 2.59 (ب) 1, 1 (ج) ہاں، 1

سوال 2.173:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.174 اور سوال 2.175 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases} \quad \text{سوال 2.174}$$

جواب: شکل 2.174 (i) $D: 0 \leq x \leq 2$ ، $R: 0 < y \leq 1$ اور $y = 2$ (ب) $(0, 1) \cup (1, 2)$ (ج) $x = 0$ (د) $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \text{ یا } 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \quad \text{سوال 2.175}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 2.176 تا سوال 2.185 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \quad \text{سوال 2.176}$$

جواب: $\sqrt{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \quad \text{سوال 2.177}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{2x+5}{x^2+x} \right) \quad \text{سوال 2.178}$$

جواب: 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\frac{x+6}{x} \right) \left(\frac{3-x}{7} \right) \quad \text{سوال 2.179}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} \quad \text{سوال 2.180}$$

جواب: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h} \quad \text{سوال 2.181}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}} \quad (\text{i}) \quad \text{سوال 2.182}$$

جواب: (i) 1 (ب) -1

سوال 2.183: (i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 2.184: (i) $\lim_{\theta \rightarrow 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta \rightarrow 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$
جواب: (i) 1 (ب) $\frac{2}{3}$

سوال 2.185: (i) $\lim_{t \rightarrow 4^+} (t - |t|)$ (ب) $\lim_{t \rightarrow 4^-} (t - |t|)$

لامتناہی حد: سوال 2.186 تا سوال 2.197 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 2.186: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x}$
جواب: ∞

سوال 2.187: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 2.188: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$
جواب: $-\infty$

سوال 2.189: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 2.190: $\lim_{x \rightarrow -8^+} \frac{2x}{x+8}$
جواب: $-\infty$

سوال 2.191: $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 2.192: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4}{(x-7)^2}$
جواب: ∞

سوال 2.193: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 2.194: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$
جواب: (i) ∞ (ب) $-\infty$

سوال 2.195: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

2.4. تصور حد کی توسیع

سوال 2.196: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^{2/5}}$
جواب: ∞

سوال 2.197: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 2.198 تا سوال 2.201 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.198: $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x$
جواب: ∞

سوال 2.199: $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 2.200: $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (1 + \csc \theta)$
جواب: $-\infty$

سوال 2.201: $\lim_{\theta \rightarrow 0} (2 - \cot \theta)$

مزید حساب: سوال 2.202 تا سوال 2.207 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.202: $\lim_{x^2 \rightarrow 4} \frac{1}{x^2 - 4}$

ا. $x \rightarrow 2^+$ ب. $x \rightarrow 2^-$ ج. $x \rightarrow -2^+$ د. $x \rightarrow -2^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) $-\infty$ (ج) $-\infty$ (د) ∞

سوال 2.203: $\lim_{x^2 \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$

ا. $x \rightarrow 1^+$ ب. $x \rightarrow 1^-$ ج. $x \rightarrow -1^+$ د. $x \rightarrow -1^-$

سوال 2.204: $\lim (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x})$

ا. $x \rightarrow 0^+$ ب. $x \rightarrow 0^-$ ج. $x \rightarrow \sqrt[3]{2}$ د. $x \rightarrow -1$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞ (ج) 0 (د) $\frac{3}{2}$

سوال 2.205: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-1}{2x+4}$

ا. $x \rightarrow -2^+$ ب. $x \rightarrow -2^-$ ج. $x \rightarrow 1^+$ د. $x \rightarrow 0^-$

سوال 2.206: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$

ا. $x \rightarrow 0^+$ ب. $x \rightarrow 2^+$ ج. $x \rightarrow 2^-$ د. $x \rightarrow 2$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $-\infty$ ہو گا۔

سوال 2.207: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

ا. $x \rightarrow 2^+$ ب. $x \rightarrow -2^+$ ج. $x \rightarrow 0^-$ د. $x \rightarrow 1^+$

سوال 2.208 تا سوال 2.211 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.208: $\lim_{t \rightarrow 0} (2 - \frac{3}{t^{1/3}})$

ا. $t \rightarrow 0^+$ ب. $t \rightarrow 0^-$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞

سوال 2.209: $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$

ا. $t \rightarrow 0^+$ ب. $t \rightarrow 0^-$

سوال 2.210: $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$

ا. $x \rightarrow 0^+$ ب. $x \rightarrow 0^-$ ج. $x \rightarrow 1^+$ د. $x \rightarrow 1^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) ∞ (ج) ∞ (د) ∞

سوال 2.211: $\lim\left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right)$

ا. $x \rightarrow 0^+$ ب. $x \rightarrow 0^-$ ج. $x \rightarrow 1^+$ د. $x \rightarrow 1^-$

نظریہ اور مثالیں

سوال 2.212: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.213: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.214: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.215: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ایک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

سوال 2.216: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5 + \delta)$, $\delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟
جواب: $\delta = \epsilon^2$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

سوال 2.217: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4 - \delta, 4)$, $\delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 2.218 اور سوال 2.219 میں دیے الجبرائی فکروں کو ثابت کریں۔

سوال 2.218: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1 \quad \text{سوال 2.219}$$

سوال 2.220: (i) $\lim_{x \rightarrow 400^+} [x]$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 400^-} [x]$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x \rightarrow 400} [x]$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔
جواب: (i) 400 (ب) 399 (ج) حد غیر موجود ہے۔

سوال 2.221: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔ (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف: سوال 2.222 تا سوال 2.225 میں دیے گئے فکروں کو حد کی باضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{سوال 2.222}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \quad \text{سوال 2.223}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty \quad \text{سوال 2.224}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty \quad \text{سوال 2.225}$$

ایک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف
دائیں ہاتھ لامتناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابق عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} = \infty$$

□

سوال 2.226: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \text{ ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \text{ ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \text{ ب.}$$

جواب: (ا) ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابق عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہے۔ (ب) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابق عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔ (ج) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابق عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔

ایک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 2.227 تا سوال 2.232 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \text{ سوال 2.227}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ سوال 2.228}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ سوال 2.229}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \text{ سوال 2.230}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \text{ سوال 2.231}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty \text{ سوال 2.232}$$

2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطہ ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچتا ہے تاکہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اتنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاید ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مائیکول میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی درحقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے تاکہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔ استمراری تفاعل کی متوسط قیت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

معملاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔ یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی اندرونی نقطے¹⁰ (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، بائیں سر نقطے¹¹ اور دائیں سر نقطے¹²۔

تعریف: اندرونی نقطہ پر استمرار
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ $x = c$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر f استمراری ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

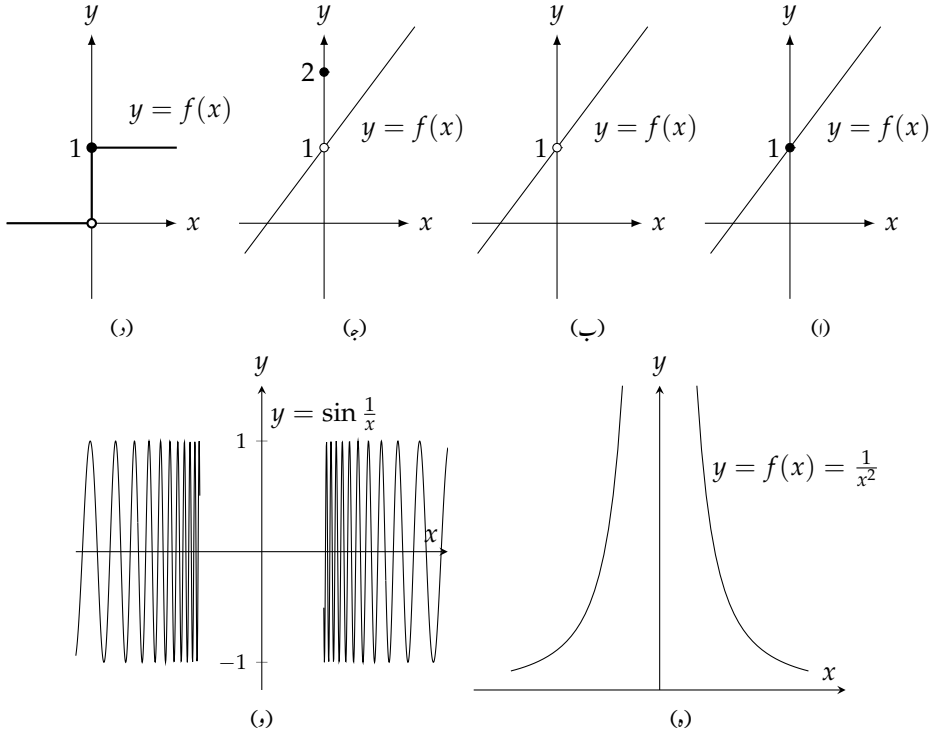
□

شکل 2.61 میں $x = 0$ پر (i) استمراری ہے۔ اس نقطہ پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کی بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔ انہیں قابل ہٹاؤ¹³ عدم استمرار کہتے ہیں۔ ان دونوں میں $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر پر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جاسکتا ہے۔

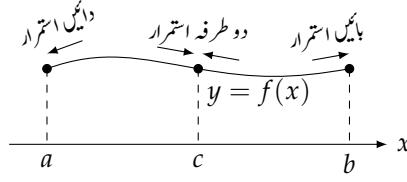
شکل 2.61 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تشویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں لہذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جاسکتی ہے۔ (د) میں چھلانگ عدم استمرار¹⁴ پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (ه) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا لا متناہی عدم استمرار¹⁵ پایا جاتا ہے۔ ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لئے غیر استمراری ہے کہ $x \rightarrow 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں ارتعاشی عدم استمرار¹⁶ پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔ کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔ عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

interior points¹⁰left endpoints¹¹right endpoints¹²removable¹³jump discontinuity¹⁴infinite discontinuity¹⁵oscillating discontinuity¹⁶



شکل 2.61: $x = 0$ پر تفاعل (i) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (د) غیر استمراری ہیں۔



شکل 2.62: نقطہ a ، b اور c پر استمرار

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

تعریف: بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔ اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔

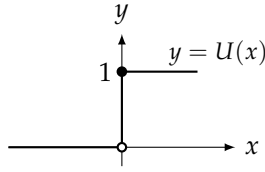
□

عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل دائیں استمراری¹⁷ ہو گا۔ اسی طرح تفاعل f اس صورت بائیں استمراری¹⁸ ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔ یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.62)۔

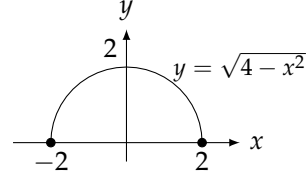
مثال 2.30: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل 2.63)۔

□

¹⁷right-continuous
¹⁸left-continuous



شکل 2.64: یہ تفاعل مبدا پر دائیں استمراری ہے



شکل 2.63: پورے دائرہ کار کے پر نقطہ پر استمراری

مثال 2.31: شکل 2.64 میں دکھایا گیا اکائی سیزھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ نابائیں استمراری ہے اور نابئی استمراری ہے۔

□

ہم نقطہ پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

پروکھ استمرار
نقطہ $x = c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

1. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)

2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے ($x \rightarrow c$ پر f کا حد پایا جاتا ہے)

3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

ایک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.65 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔ نقطہ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

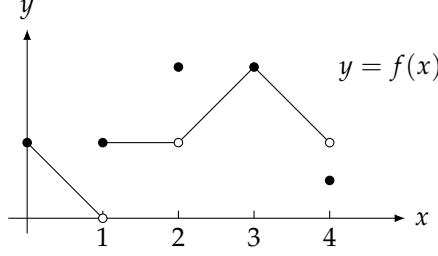
حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

1. $x = 0$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(0) = 1$ موجود ہے

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں)



شکل 2.65: تقابل f بند وقفہ $[0, 4]$ پر معین ہے۔ یہ تقابل $x = 1, 2, 4$ پر غیر استتاری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استتاری ہے۔

ب. چونکہ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غیر موجود ہے لہذا $x = 1$ پر f غیر استتاری ہے۔ پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استتاری ہے چونکہ

$$1. \quad f(1) \text{ موجود ہے } (f(1) = 1)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ (نقطہ } x = 1 \text{ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ (دائیں ہاتھ حد اور تقابل کی قیمتیں برابر ہیں۔)}$$

ج. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ کی بنا $x = 2$ پر f غیر استتاری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

$$د. \quad x = 3 \text{ پر } f \text{ استتاری ہے چونکہ}$$

$$1. \quad f(3) \text{ موجود ہے } (f(3) = 2)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \text{ (نقطہ } x = 2 \text{ پر حد موجود ہے۔)}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{ (تقابل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)}$$

ہ. چونکہ $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ ہے لہذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استتاری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار
اگر نقطہ $x = c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x = c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

$$1. f + g \text{ اور } f - g$$

$$2. fg$$

$$3. kf, \text{ جہاں } k \text{ کوئی عدد ہے}$$

$$4. \frac{f}{g} \text{ (شرطیکہ } g(c) \neq 0 \text{ ہو)}$$

$$5. (f(x))^{m/n} \text{ (شرطیکہ } (f(x))^{m/n} \text{ اس وقت پر معین ہو جس پر } c \text{ پایا جاتا ہے، اور } m \text{ اور } n \text{ عدد صحیح ہیں۔)}$$

درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار
حقیقی خط کے ہر نقطہ پر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

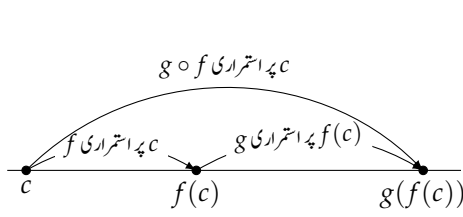
مثال 2.33: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = x^4 + 20$ اور $g(x) = 5x(x - 2)$ استمراری ہیں۔ تفاعل

$$r(x) = \frac{x^2 + 20}{5x(x - 2)}$$

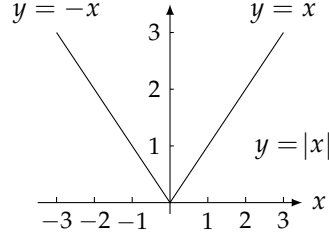
□

ماسوائے $x = 0$ اور $x = 2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔

مثال 2.34: $f(x) = |x|$ کی استمرار
 x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = |x|$ استمراری ہے (شکل 2.66)۔ $x > 0$ کے لئے $f(x) = x$ ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔ اسی



شکل 2.67: مرکب تفاعل کی استتار۔



شکل 2.66: تفاعل کا کونا اس کو استتاری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔

طرح $x < 0$ کے لئے $f(x) = -x$ ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔ آخر میں مباد پر $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$ ہے۔ □

مثال 2.35: تکنیکی تفاعل کی استتار
باب 3 میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استتاری ہے لہذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استتاری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x}, & \csc x &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

□

مسئلہ 2.8: مرکبات کی استتار
اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استتاری ہوں تب c پر $g \circ f$ استتاری ہو گا (شکل 2.67)۔

مرکب کی استتار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استتاری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استتاری ہیں۔

- | | |
|--|---|
| (ا) $y = \sqrt{x}$ | مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت) |
| (ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ | مسئلہ 2.7 اور 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب) |
| (ج) $y = \frac{x \cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$ | مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی) |
| (د) $y = \left \frac{x-2}{x^2-2} \right $ | مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حقیقی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب) |

□

نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔ اگر $f(c)$ غیر معین ہو لیکن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل F نقطہ $x = c$ پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو f کی نقطہ $x = c$ تک استمراری توسیع¹⁹ کہتے ہیں اور توسیع شدہ تفاعل کو وسیع تفاعل²⁰ کہتے ہیں۔ ناطق تفاعل f کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا $x = 2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

حل: اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x \neq 2$ پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل $x \neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x = 2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

یوں f کی نقطہ $x = 2$ تک توسیع تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

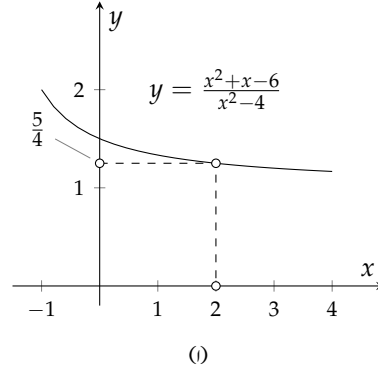
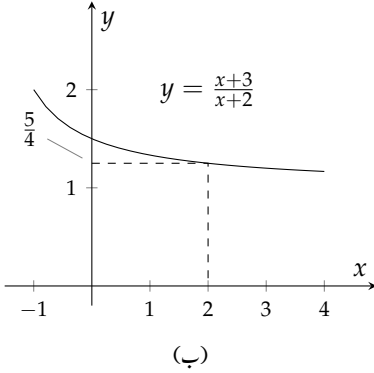
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

تفاعل f کی ترسیم شکل 2.68 میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی یہی ترسیم ہے مگر اس میں $(2, \frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

□

continuous extension¹⁹
extended function²⁰



شکل 2.68: $f(x)$ تقابل اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تقابل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ ایسا تقابل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تقابل کی قیمت برابر ہوں تب f وقفہ پر استمراری²¹ کہلائے گا۔ جو تقابل I پر استمراری ہو یہ تقابل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔ کثیر رکنی اور ناظم تقابل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تقابل

شکل 2.69 میں وقفوں پر استمراری تقابل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔

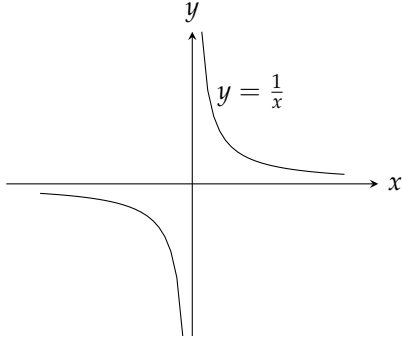
□

وقفوں پر استمراری تقابل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ ان میں ایک متوسط قیمت خاصیت²² ہے۔ اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تقابل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تقابل متوسط قیمت خاصیت رکھتا ہے۔

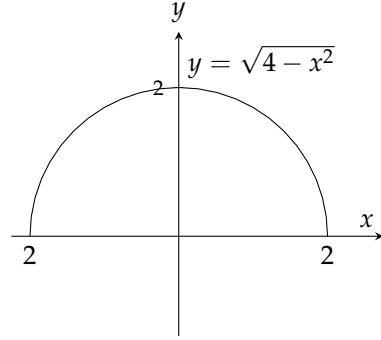
مسئلہ 2.9: مسئلہ متوسط قیمت

فرض کریں کہ تقابل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ تب اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا کہ $f(c) = y_0$ ہو (شکل 2.70)۔

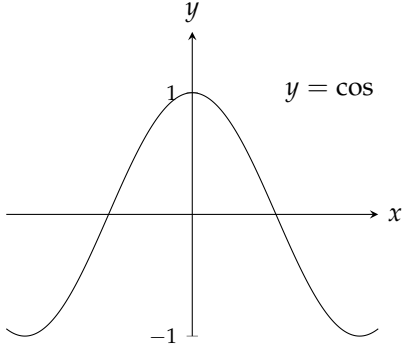
continuous on interval²¹
intermediate value property²²



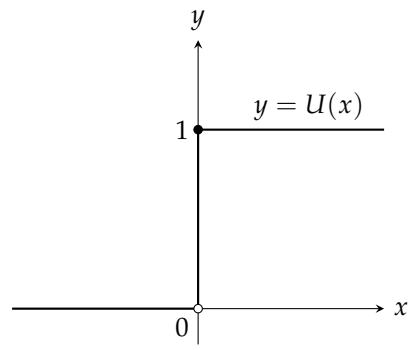
(ب) $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر استمراری



(د) $[-2, 2]$ پر استمراری

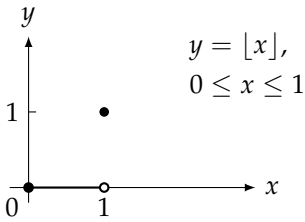


(د) $(-\infty, \infty)$ پر استمراری

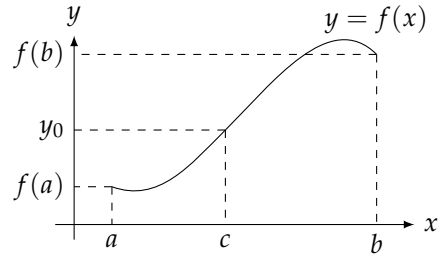


(ج) $(-\infty, 0)$ اور $[0, \infty)$ پر استمراری

شکل 2.69: وقفوں پر استمراری تفاعل (مثال 2.38)



شکل 2.71: تفاعل $y = [x], 0 \leq x \leq 1$ کوئی بھی قیمت $f(1) = 1$ اور $f(0) = 0$ کے لئے قبول نہیں کرتا ہے۔



شکل 2.70: وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے لئے ہر قیمت رکھتا ہے

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلیٰ کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کی استتار ضروری ہے۔ اگر I میں صرف ایک نقطے پر بھی f غیر استتاری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔ اس کی ایک مثال شکل 2.71 میں دی گئی ہے۔

ترسیم کرنے کا نتیجہ: ربط

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ I پر استتاری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔ اس میں عددی صحیح زمین تفاعل $[x]$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نا ہی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

تلاش جذر

مساوات $f(x) = 0$ کے حل کو $f(x)$ کا صفر²³ یا جذر²⁴ کہتے ہیں۔ مسئلہ 2.9 کے تحت استتاری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت (\pm) تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں f استتاری ہے)۔ مساوات کی ترسیم x محور کو f کی جذر پر قطع کرتی ہے۔ ہم $y = f(x)$ کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ یہ کہاں x محور کو قطع کرتی ہے۔ ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت دیکھتے ہیں۔ اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔ اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک کا جذر تلاش کیا جاسکتا ہے۔ شکل 2.72 میں، قدم با قدم، اس عمل سے $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

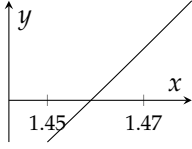
ترسیم سے مساوات کو حل کرتے ہوئے تفاعل کے جذر حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ اس سے کم دورانیے میں جذر کو بذریعہ اعدادی ترکیب حاصل کیا جاسکتا ہے جیسے آپ حصہ 4.8 میں دیکھیں گے۔

سوالات

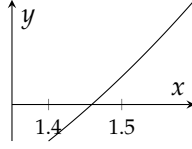
استمرار بذریعہ ترسیم

سوال 2.233 تا سوال 2.236 میں دریافت کریں کہ آیا تفاعل وقفہ $[-1, 3]$ پر استتاری ہے۔ نا ہونے کی صورت میں کہاں تفاعل غیر استتاری ہے اور ایسا کیوں ہے؟

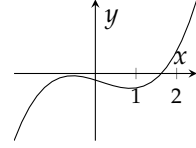
سوال 2.233: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.73-1 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: نہیں؛ $x = 2$ پر غیر استتاری ہے؛ $x = 2$ پر غیر معین ہے۔



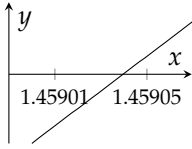
(ج) جذر (صفر) 1.45 اور 1.47 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



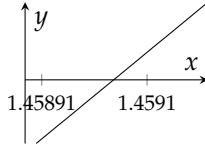
(ب) جذر (صفر) 1.4 اور 1.5 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



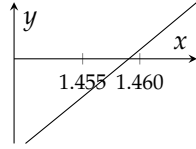
(ا) جذر (صفر) 1 اور 2 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(د) جذر (صفر) 1.45901 اور 1.45905 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

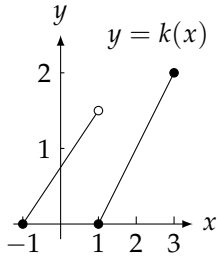


(س) جذر (صفر) 1.45891 اور 1.4591 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

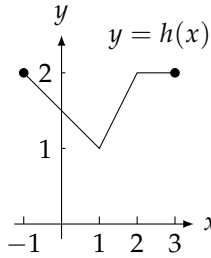


(ذ) جذر (صفر) 1.455 اور 1.460 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

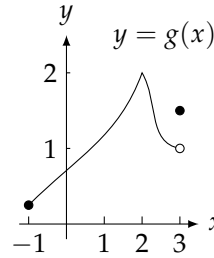
شکل 2.72: ترسیم کے ذریعہ $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کے جذر کا قدم با قدم حصول۔



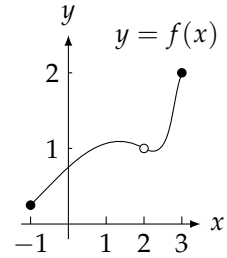
(د)



(ج)

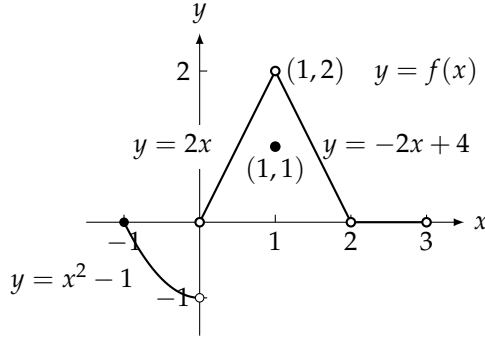


(ب)



(ا)

شکل 2.73: اشکال برائے سوال 2.233 تا سوال 2.236



شکل 2.74: ترسیم برائے سوال 2.237 تا سوال 2.242

سوال 2.234: تفاعل $y = g(x)$ جسے شکل 2.73-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.235: تفاعل $y = h(x)$ جسے شکل 2.73-ج میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: استمراری

سوال 2.236: تفاعل $y = k(x)$ جسے شکل 2.73-د میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.237 تا سوال 2.242 درج ذیل تفاعل کے بارے میں ہیں جس کو شکل 2.74 میں ترسیم کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

سوال 2.237: (ا) کیا $f(-1)$ موجود ہے؟

(ب) کیا $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ موجود ہے؟

(ج) کیا $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ ہے؟

(د) کیا $x = -1$ پر $f(x)$ استمراری ہے؟

جواب: (ا) ہاں، (ب) ہاں، (ج) ہاں، (د) ہاں

سوال 2.238: (ا) کیا $f(x)$ موجود ہے؟

(ب) کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟

(ج) کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ہے؟

(د) کیا $x = 1$ پر f استمراری ہے؟

سوال 2.239: (i) کیا $x = 2$ پر f معین ہے؟
 (ب) کیا $= 2$ پر f استمراری ہے؟
 جواب: (i) نہیں، (ب) نہیں

سوال 2.240: x کی کس قیمت پر f استمراری ہے؟

سوال 2.241: $x = 2$ پر توسیع کردہ تفاعل کو استمراری بنانے کی خاطر $f(2)$ کی کیا قیمت ہونی چاہیے؟
 جواب: 0

سوال 2.242: $f(1)$ کی کیا قیمت غیر استمرار کو ختم کرے گی؟

پروکھ استمرار کا استعمال
 کن نقطوں پر سوال 2.243 اور سوال 2.244 میں دیے گئے تفاعل غیر استمراری ہیں۔ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم کیا جاسکتا ہے؟ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم نہیں کیا جاسکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.243: حصہ 2.4 میں سوال 2.166 کے تفاعل۔
 جواب: 1 نا قابل ہٹاؤ؛ 0 قابل ہٹاؤ

سوال 2.244: حصہ 2.4 میں سوال 2.167 کے تفاعل۔

سوال 2.245 تا سوال 2.260 میں کن نقطوں پر تفاعل استمراری ہیں۔

سوال 2.245: $y = \frac{1}{x-2} - 3x$
 جواب: تمام ماسوائے $x = 2$

سوال 2.246: $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

سوال 2.247: $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
 جواب: تمام ماسوائے $x = 3$ اور $x = 1$

سوال 2.248: $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$

سوال 2.249: $y = |x - 1| + \sin x$
 جواب: تمام x

سوال 2.250: $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$

سوال 2.251: $y = \frac{\cos x}{x}$
 جواب: تمام ماسوائے $x = 0$

سوال 2.252: $y = \frac{x+2}{\cos x}$

سوال 2.253: $y = \csc x$
 جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 2.254: $y = \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 2.255: $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
 جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n طاق عدد صحیح ہے۔

سوال 2.256: $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

سوال 2.257: $y = \sqrt{2x+3}$
 جواب: تمام $x > -\frac{3}{2}$

سوال 2.258: $y = \sqrt[4]{3x-1}$

سوال 2.259: $y = (2x-1)^{1/3}$
 جواب: تمام x

سوال 2.260: $y = (2-x)^{1/5}$

مرکب تفاعل کے حد
 سوال 2.261 تا سوال 2.266 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.261: $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$
 جواب: 0

سوال 2.262: $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t))$

سوال 2.263: $\lim_{y \rightarrow 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
 جواب: 1

سوال 2.264: $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(\sin x^{1/3})\right)$

سوال 2.265: $\lim_{t \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{19-3 \sec 2t}}\right)$
جواب: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوال 2.266: $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3} \tan x}$

استمراری توسیع

سوال 2.267: $g(3)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x = 3$ پر $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ کی استمراری توسیع ہو۔
جواب: $g(3) = 6$

سوال 2.268: $h(2)$ کی تعریف یوں کریں کہ $t = 2$ پر $h(t) = \frac{t^2+3t-10}{t-2}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 2.269: $f(1)$ کی تعریف یوں کریں کہ $s = 1$ پر $f(s) = \frac{s^3-1}{s^2-1}$ کی استمراری توسیع ہو۔
جواب: $f(1) = \frac{3}{2}$

سوال 2.270: $g(4)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x = 4$ پر $g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 2.271: a کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$ استمراری ہے؟
جواب: $a = \frac{4}{3}$

سوال 2.272: b کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$ استمراری ہے؟

استمراری توسیع۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 2.273 تا سوال 2.276 میں تفاعل f کو ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کہ آیا مبدا پر اس کا استمراری توسیع پایا جاتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب $x = 0$ پر وسیع تفاعل کی موزوں قیمت تلاش کریں۔ اگر تفاعل کی استمراری توسیع ممکن نہ ہو، تب کیا اس کو مبدا پر دائیں یا بائیں سے استمراری بنایا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں مبدا پر وسیع تفاعل کی قیمت کیا ہوگی؟

سوال 2.273: $f(x) = \frac{10^x-1}{x}$

سوال 2.274: $f(x) = \frac{10^{|x|}-1}{x}$

سوال 2.275: $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

سوال 2.276: $f(x) = (1+2x)^{1/x}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 2.277: ایک استمراری تفاعل کی قیمت $x=0$ پر منفی اور $x=1$ پر مثبت ہے۔ $x=0$ اور $x=1$ کے بیچ مساوات $f(x)=0$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟ ایک خاکہ کھینچ کر وجہ بیان کریں۔

سوال 2.278: مساوات $\cos x = x$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟

سوال 2.279: دکھائیں کہ وقفہ $[-4, 4]$ میں مساوات $x^3 - 15x + 1 = 0$ کے تین حل پائے جاتے ہیں۔

سوال 2.280: دکھائیں کہ کسی x پر تفاعل $F(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$ کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہوگی۔

سوال 2.281: دکھائیں کہ c کی ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جن پر تفاعل $f(x) = x^3 - 8x + 10$ کی قیمت (i) π ؛ (ب) $-\sqrt{3}$ ؛ (ج) $5\,000\,000$ ہوں گی۔

سوال 2.282: سمجھائیں کہ درج ذیل جملے ایک ہی معلومات پوچھتی ہیں۔

(i) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے جذور تلاش کریں۔

(ب) اس نقطے کا x محدود تلاش کریں جہاں $y = x^3$ اور $y = 3x + 1$ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

(ج) وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جن پر $x^3 - 3x = 1$ ہوگا۔

(د) ان نقطوں کے x محدود تلاش کریں جہاں منحنی $y = x^3 - 3x$ خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔

(e) مساوات $x^3 - 3x - 1 = 0$ کو حل کریں۔

سوال 2.283: ایسا تفاعل $f(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x=2$ پر جہاں اس کا قابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x=2$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے۔

سوال 2.284: ایسا تفاعل $g(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x=-1$ پر جہاں اس کا ناقابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x=-1$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار ناقابل ہٹاؤ ہے۔

سوال 2.285: تمام نقطوں پر غیر استمراری تفاعل
(i) اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہوئے، کہ حقیقی اعداد کا ہر غیر خالی وقفہ ناطق اور غیر ناطق اعداد پر مشتمل ہے، دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل ہر نقطے پر عدم استمراری ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ناطق} \\ 0 & x \text{ غیر ناطق} \end{cases}$$

(ب) کیا کسی نقطے پر f دائیں استمراری یا بائیں استمراری ہے؟

سوال 2.286: اگر $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ استمراری ہوں تب کیا $[0, 1]$ کے کسی نقطے پر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.287: اگر تفاعل $h(x) = f(h) \cdot g(x)$ نقطہ $x = 0$ پر استمراری ہو تب کیا $f(x)$ اور $g(x)$ ضرور $x = 0$ پر استمراری ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.288: ایسے تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی مثال دیں جو $x = 0$ پر استمراری ہوں لیکن ان کا مرکب تفاعل $f \circ g$ نقطہ $x = 0$ پر عدم استمراری ہو۔ کیا یہ مسئلہ 2.8 کی خلاف ورزی کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.289: کیا یہ کہنا درست ہو گا کہ جو تفاعل کسی وقفے پر کبھی صفر نہیں ہوتا ہے وہ تفاعل اس وقفہ پر کبھی علامت تبدیل نہیں کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.290: کیا یہ درست ہے کہ ہر p کی پٹی کو دونوں سروں سے کھینچنے کے باوجود پٹی پر ایک نقطہ ایسا پایا جاتا ہے جو اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.291: مسئلہ مقررہ نقطہ
فرض کریں کہ وقفہ $0, 1$ میں تفاعل f استمراری ہے اور $[0, 1]$ میں ہر x کے لئے $0 \leq f(x) \leq 1$ ہے۔ دکھائیں کہ $[0, 1]$ میں ایسا نقطہ c پایا جاتا ہے جس پر $f(c) = c$ ہو گا۔ c کو f کا مقررہ نقطہ²⁵ کہتے ہیں۔

سوال 2.292: استمراری تفاعل کی علامت برقرار رکھنے کی خاصیت
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) پر تفاعل f معین ہے اور نقطہ c جہاں f استمراری ہے پر $f(c) \neq 0$ ہے۔ دکھائیں کہ c کے ارد گرد وقفہ $c - \delta, c + \delta$ میں f کی علامت وہی ہوگی جو c پر $f(c)$ کی ہے۔ یہ ایک غیر معمولی نتیجہ ہے۔ اگرچہ (a, b) پر f معین ہے، کسی بھی نقطے پر تفاعل کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے ماسوائے نقطہ c پر۔ اس کے ساتھ شرط $f(c) \neq 0$ ملائے سے f غیر صفر حاصل ہوتا ہے یعنی پورے وقفے پر f مثبت یا منفی ہو گا۔

سوال 2.293: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 سے اس حصے کا مسئلہ 2.6 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال 2.294: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.2 اور مسئلہ 2.3 سے موجودہ حصے کا مسئلہ 2.7 کس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے؟

سوال کا حل بذریعہ ترسیم
کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کھینچ کر درج ذیل سوالات حل کریں۔

سوال 2.295: $x^3 - 3x - 1 = 0$
جواب: $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$

سوال 2.296: $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

سوال 2.297: $x(x-1)^2 = 1$
جواب: $x \approx 1.7549$ ایک جذر حاصل کریں۔

سوال 2.298: $x^x = 2$

سوال 2.299: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$
جواب: $x \approx 3.5156$

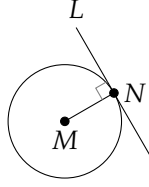
سوال 2.300: $x^3 - 15x + 1 = 0$ تین جذر تلاش کریں۔

سوال 2.301: $\cos x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔
جواب: $x \approx 0.7391$

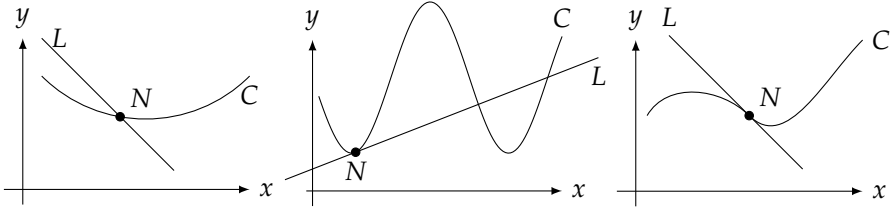
سوال 2.302: $2 \sin x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

2.6 مماسی خط

حصہ 2.1 میں سیکنٹ اور مماس پر بحث کی گئی۔ اس بحث کو اس حصے میں جاری رکھتے ہیں۔ ہم سیکنٹ کی ڈھلوان کا حد تلاش کرتے ہوئے منحنی کا مماس حاصل کریں گے۔



شکل 2.75: نقطہ N پر مماس اور رداس آپس میں عمودی ہیں۔



(1) N پر L مماسی C کا مماس ہے لیکن یہ (ب) نقطہ N پر L مماسی C کا مماس ہے (ج) اگرچہ L مماسی C کو ایک نقطہ N پر مماسی کے دونوں اطراف پر پایا جاتا ہے۔ لیکن یہ مماسی کو کئی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ مس کرتا ہے، یہ مماسی کا مماس نہیں ہے۔

شکل 2.76: عمومی مماسی کے مماس۔

مماسی کے مماس سے کیا مراد ہے؟

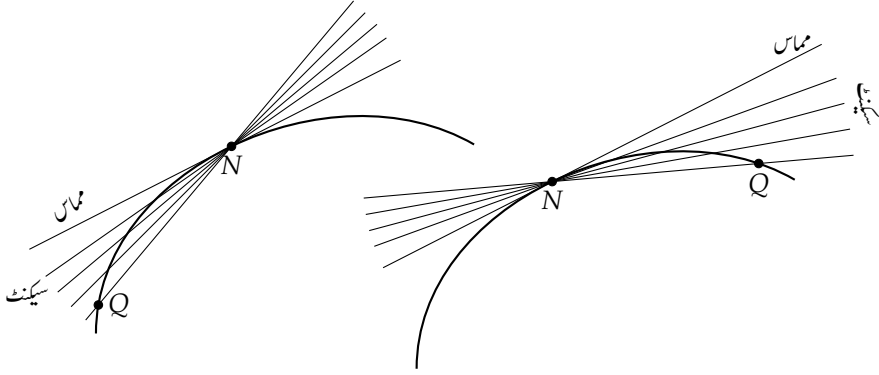
دائرے کی مماس کا مطلب سیدھا سادہ ہے۔ نقطہ N پر دائرہ C کے مماس سے مراد خط L ہے جو نقطہ N سے گزرتا ہے اور N پر رداس کو عمودی ہے (شکل 2.75)۔ نقطہ N پر کسی اور مماسی C کے مماس سے کیا مطلب ہے؟ دائرے کی جیومیٹری کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مماس کا مطلب درج ذیل میں سے ایک ہو سکتا ہے۔

1. N سے C کی مرکز تک خط کو عمودی خط L ،

2. خط L مماسی C کو صرف ایک نقطہ، یعنی N پر مس کرتا ہے،

3. خط L نقطہ N سے گزرتا ہے اور مماسی C کے ایک جانب رہتا ہے۔

اگرچہ یہ تینوں جملے دائرے کی صورت میں درست ہیں البتہ یہ ہر مماسی کے لئے بلا تضاد درست نہیں ہیں۔ عموماً مماسیات کا مرکز نہیں پایا جاتا ہے، اور نقطہ N پر جس خط کو ہم C کا مماس کہنا چاہتے ہیں وہ C کو کہیں اور یا N پر منقطع سکتا ہے۔ اس کے علاوہ ضروری نہیں ہے کہ مماسی کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہو سیدھا خط مماسی کا مماس ہو (شکل 2.76)۔



شکل 2.77: نقطہ N کے دائیں یا بائیں جانب منحنی C پر نقطہ Q کو N کے قریب تر کرنے سے N پر C کا مماس حاصل ہو گا۔

عمومی منحنی کا مماس متعارف کرنے کی خاطر ہمیں متحرک حکمت عملی سے کام لینا ہو گا۔ ہم نقطہ N اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے سیکنٹ پر نظر رکھتے ہوئے Q کو منحنی پر رکھتے ہوئے N کے نزدیک لاتے ہیں (شکل 2.77)۔ اس حکمت عملی میں ہم درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

1. ہم سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حساب لگاتے ہیں۔

2. منحنی پر رہتے ہوئے Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد پر غور کرتے ہیں۔

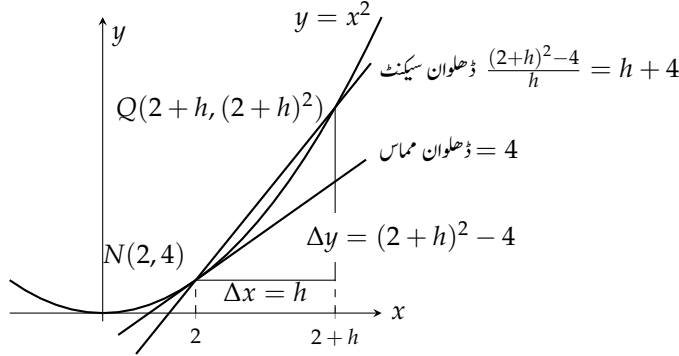
3. اگر یہ حد موجود ہو تب اس کو N پر منحنی کی ڈھلوان تسلیم کرتے ہوئے اس خط کو N پر C کا مماس تسلیم کریں جس کی ڈھلوان اس حد کے برابر ہو اور جو N سے گزرتا ہو۔

مثال 2.39: نقطہ $N(2, 4)$ پر قطع مکانی $y = x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطہ پر قطع مکانی کی مماس کی مساوات حاصل کریں (شکل 2.78)۔
حل: ہم $N(2, 4)$ اور $Q(2+h, (2+h)^2)$ سے سیکنٹ گزار کر اس کی ڈھلوان کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$\text{سیکنٹ کی ڈھلوان} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h) - (2)} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

اگر $h > 0$ ہو تب N کی دائیں جانب اور اس سے اوپر نقطہ Q پایا جائے گا۔ اگر $h < 0$ ہو تب N کی بائیں جانب اور اس سے نیچے نقطہ Q پایا جائے گا۔ دونوں صورتوں میں قطع مکانی پر رہتے ہوئے جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ N کے نزدیک پہنچتا ہے ویسے ویسے h کی قیمت صفر کے نزدیک پہنچتی ہے جس سے سیکنٹ کی ڈھلوان کی درج ذیل حد حاصل ہوتی ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$$



شکل 2.78: قطع مماسی کا مماس (مثال 2.39)

ہم N پر قطع مماسی کی ڈھلوان 4 تسلیم کرتے ہیں۔ نقطہ N پر قطع مماسی کا مماس وہ خط ہے جس کی ڈھلوان 4 ہے اور جو نقطہ $(2, 4)$ سے گزرتا ہے۔ اس مماس کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x - 2) \\ &= 4x - 4 \end{aligned} \quad \text{نقطہ ڈھلوان مساوات}$$

□

تفاعل کی ترسیم کا مماس

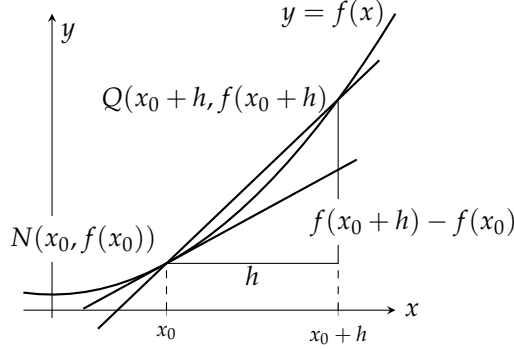
نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس اسی متحرک حکمت عملی سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم N اور $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ سے گزرتا ہوا سیکنٹ بناتے ہیں۔ اس کے بعد $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے اس سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہیں (شکل 2.79)۔ اگر یہ حد موجود ہو، اس کو N پر مماسی کے مماس کا ڈھلوان مانا جاتا ہے اور اتنی ڈھلوان کا سیدھا خط جو N سے گزرتا ہو کو N پر مماسی کا مماس قبول کیا جاتا ہے۔

تعریف: نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان درج ذیل عدد کو کہتے ہیں۔

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔})$$

N پر اس ڈھلوان کے خط کو اس نقطہ پر مماسی کا مماس کہتے ہیں۔

□



شکل 2.79: مماس کی ڈھلوان $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ہو گی۔

نئی تعریف پیش کرنے کے بعد اس کو جانی پہچانی صورتوں میں استعمال کرتے ہوئے متوقع جوابات حاصل کر کے یقین دہانی ہوتی ہے۔ درج ذیل مثال دکھاتا ہے کہ ڈھلوان کی موجودہ تعریف ہمیں غیر انتصابی کلیروں کی صورت میں متوقع جوابات دیتی ہے۔

مثال 2.40: ڈھلوان کی تعریف کا استعمال دکھائیں کہ نقطہ $(x_0, mx_0 + b)$ پر خط $y = mx + b$ کا مماس یہی خط ہے۔
 حل: ہم $f(x) = mx + b$ لیتے ہوئے قدم با قدم چلتے ہیں۔
 پہلا قدم: $f(x_0) = h$ اور $f(x_0) = h$ ڈھوڑتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f(x_0) &= mx_0 + b \\ f(x_0 + h) &= m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b \end{aligned}$$

دوسرا قدم: ڈھلوان تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned}$$

تیسرا قدم: نقطہ ڈھلوان مساوات استعمال کرتے ہوئے مماس کی مساوات لکھتے ہیں۔ نقطہ $x_0, mx_0 + b$ پر مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= (mx_0 + b) + m(x - x_0) \\ &= mx_0 + b + mx - mx_0 \\ &= mx + b \end{aligned}$$

□

- مثال 2.41: (ا) $x = a$ پر مماسی خط $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
 (ب) کس نقطہ پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ کے برابر ہے؟
 (ج) a تبدیل کرنے سے نقطہ $a, \frac{1}{a}$ پر مماس کو کیا ہو گا؟
 حل: (ا) یہاں $f(x) = \frac{1}{x}$ ہے اور $(a, \frac{1}{a})$ پر ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

- دھیان رہے کہ ہمیں اس وقت تک $\lim_{h \rightarrow 0}$ بار بار لکھنا پڑا جب تک ہم $h = 0$ پر کرنے کے قابل نہیں ہوئے۔
 (ب) نقطہ $x = a$ پر $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہے جس کو $-\frac{1}{4}$ کے برابر پر کرتے ہیں۔

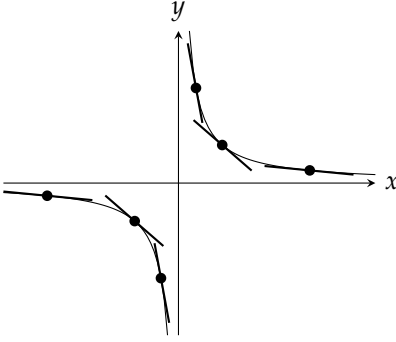
$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

- اس کے حل $a = 2$ اور $a = -2$ ہیں لہذا مماسی خط $y = \frac{1}{x}$ کا دو نقطوں یعنی $(2, \frac{1}{2})$ اور $(-2, -\frac{1}{2})$ پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے (شکل 2.80-ا)۔
 (ج) ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہر صورت منفی رہے گی۔ یوں $a \rightarrow 0^+$ کی صورت میں ڈھلوان $-\infty$ تک پہنچتی کی کوشش کرتی ہے اور مماس انتہائی صورت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ یہی کچھ $a \rightarrow 0^-$ کرتے ہوئے بھی نظر آتا ہے۔ جیسے جیسے مبدا سے a دور ہوتا ہے ویسے ویسے مماس افقی صورت اختیار کرتا ہے (شکل 2.80-ب)۔
 □

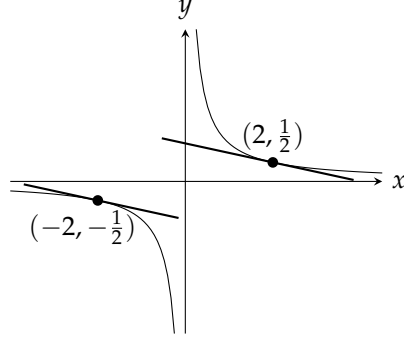
شرح تبدیلی

درج ذیل الجبرائی فقرے کو x_0 پر f کا تفریقی حاصل تقسیم²⁶ کہتے ہیں۔ اگر h کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے تفریقی حاصل تقسیم کا حد پایا جاتا ہو، اس حد کو x_0 پر f کا تفرق²⁷ کہتے ہیں۔ اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو سینٹ کی ڈھلوان تصور کریں تب تفرق نقطہ x_0 پر مماس کی ڈھلوان دیتا ہے۔ اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو اوسط تبدیلی شرح تصور کریں (جیسا ہم نے حصہ 2.1 میں کیا) تب تفرق نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل کی شرح تبدیلی دیتا ہے۔ احصاء میں دو اہم ترین ریاضیاتی تصور میں سے ایک تفرق ہے جس پر باب 3 میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

difference quotient²⁶
derivative²⁷



(ب) مبدا کے قریب ڈھلوان زیادہ ہے۔

(i) دو نقطوں پر مماس کی ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے۔

شکل 2.80: اشکال برائے مثال 2.41

مثال 2.42: لحاقی رفتار (حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2) حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2 میں سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے پتھر پر غور کیا گیا۔ ہم جانتے تھے کہ پہلی t سیکنڈوں میں یہ $y = 4.9t^2$ میٹر فاصلہ طے کرتا ہے اور بتدریج کم دورانیہ میں اوسط رفتار سے ہم نے $t = 1$ پر اس کی لحاقی رفتار معلوم کی۔ ٹھیک $t = 1$ پر لحاقی رفتار کیا ہوگی؟
حل: ہم $f(t) = 4.9t^2$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 1$ اور $t = 1 + h$ کے دوران اوسط رفتار

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} = \frac{4.9(2th + h^2)}{h} = 4.9(2t + h)$$

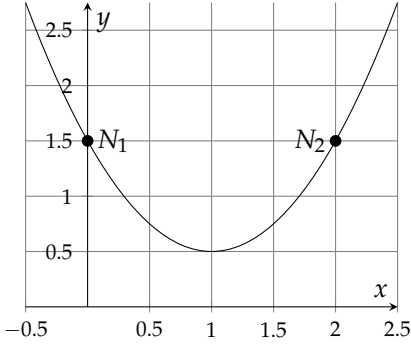
ہوگی۔ ٹھیک لمحہ $t = 1$ پر پتھر کی رفتار درج ذیل ہوگی جو ہماری پہلی جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} 4.9(2 + h) = 4.9(2 + 0) = 9.8 \text{ m s}^{-1}$$

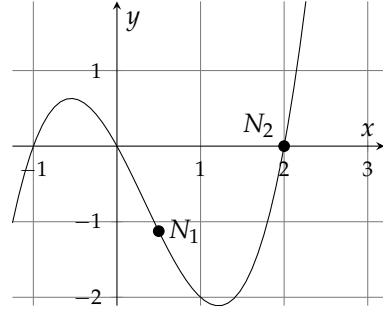
□

سوالات

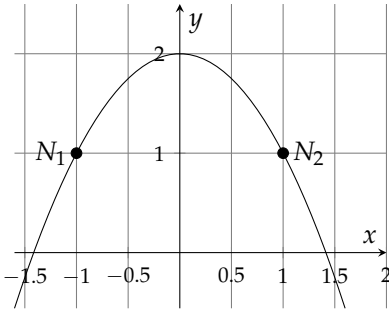
سوال 2.303 تا سوال 2.306 میں نقطہ N_1 اور N_2 پر منحنی کی ڈھلوان کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ نقطے پر فیتہ یا کوئی دوسرا سیدھا کنارہ رکھ کر سیکنٹ کی حد سے ڈھلوان حاصل کریں۔ (ترسیم سے عموماً بالکل ٹھیک جواب حاصل نہیں ہوتا ہے لہذا آپ کے جواب میں اور دیے گئے جواب میں فرق ہو سکتا ہے۔)



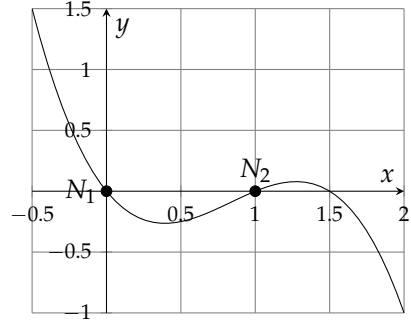
شکل 2.82: مماسی برائے سوال 2.304



شکل 2.81: مماسی برائے سوال 2.303



شکل 2.84: مماسی برائے سوال 2.306



شکل 2.83: مماسی برائے سوال 2.305

سوال 2.303: شکل 2.81

جواب: $N_1 : m = -2.25, N_2 : m = 6$

سوال 2.304: شکل 2.82

جواب: $N_1 : m = -2, N_2 : m = 2$

سوال 2.305: شکل 2.83

جواب: $N_1 : m = -1.5, N_2 : m = 0.5$

سوال 2.306: شکل 2.84

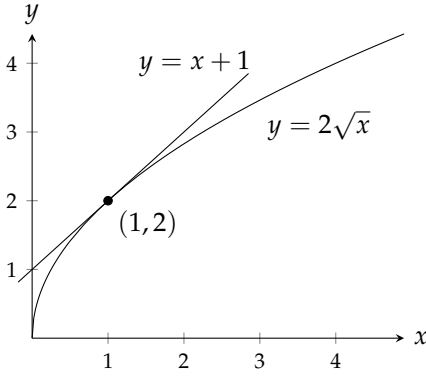
جواب: $N_1 : m = 2, N_2 : m = -2$

سوال 2.307 تا سوال 2.312 میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔ تفاعل اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

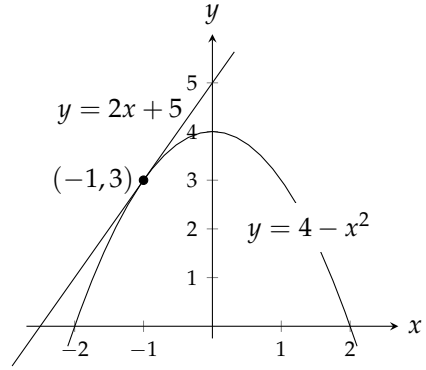
سوال 2.307: $y = 4 - x^2, (-1, 3)$ جواب: شکل 2.85 $y = 2x + 5$ سوال 2.308: $y = (x - 1)^2 + 1, (1, 1)$ سوال 2.309: $y = 2\sqrt{x}, (1, 2)$ جواب: شکل 2.86 $y = x + 1$ سوال 2.310: $y = \frac{1}{x^2}, (-1, 1)$ سوال 2.311: $y = x^3, (-2, -8)$ جواب: شکل 2.87 $y = 12x + 16$ سوال 2.312: $y = \frac{1}{x^3}, (-2, -\frac{1}{8})$

سوال 2.313 تا سوال 2.320 میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

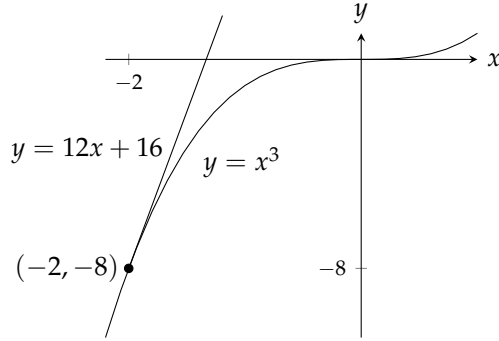
سوال 2.313: $f(x) = x^2 + 1, (2, 5)$ جواب: $m = 4, y - 5 = 4(x - 2)$ سوال 2.314: $f(x) = x - 2x^2, (1, -1)$



شکل 2.86: ترسیم برائے سوال 2.309



شکل 2.85: ترسیم برائے سوال 2.307



شکل 2.87: ترسیم برائے سوال 2.311

سوال 2.315: $g(x) = \frac{x}{x-2}, (3,3)$
 جواب: $m = -2, y - 3 = -2(x - 3)$

سوال 2.316: $g(x) = \frac{8}{x^2}, (2,2)$

سوال 2.317: $h(t) = t^3, (2,8)$
 جواب: $m = 12, y - 8 = 12(t - 2)$

سوال 2.318: $h(t) = t^3 + 3t, (1,4)$

سوال 2.319: $f(x) = \sqrt{x}, (4,2)$
 جواب: $m = \frac{1}{4}, y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

سوال 2.320: $f(x) = \sqrt{x+1}, (8,3)$

سوال 2.321 تا سوال 2.324 میں دیے گئے نقطے پر ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 2.321: $y = 5x^2, x = -1$
 جواب: $m = -10$

سوال 2.322: $y = 1 - x^2, x = 2$

سوال 2.323: $y = \frac{1}{x-1}, x = 3$
 جواب: $m = -\frac{1}{4}$

سوال 2.324: $y = \frac{x-1}{x+1}, x = 0$

مخصوص ڈھلوان کے مماس

سوال 2.325: کس نقطے پر تقابل $f(x) = x^2 + 4x - 1$ کا مماس افقی ہے؟
 جواب: $(-2, -5)$

سوال 2.326: کس نقطے پر تقابل $g(x) = x^3 - 3x$ کا مماس افقی ہے؟

سوال 2.327: ان تمام خطوط کی مساوات حاصل کریں جن کی ڈھلوان -1 ہے اور جو تقابل $y = \frac{1}{x-1}$ کی مماس ہیں۔
 جواب: $y = -(x+1), y = -(x-3)$

سوال 2.328: اس سیدھے خط کی مساوات تلاش کریں جو تقابل $y = \sqrt{x}$ کا مماس اور جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے۔

شرح تبدیلی

سوال 2.329: ایک جسم کو ساکن حالت سے 100 m بلند عمارت سے گرایا جاتا ہے۔ t سیکنڈ بعد زمین سے اس کا فاصلہ $100 - 4.9t^2$ میٹر ہو گا۔ گرنے کے 2 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟
جواب: 19.6 m s^{-1}

سوال 2.330: اڑان کے t سیکنڈ بعد ایک مزائل $3t^2$ میٹر بلندی پر ہے۔ 10 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہے؟

سوال 2.331: ایک دائرے کے رقبہ $A = \pi r^2$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیل $r = 3$ پر کیا ہو گی؟
جواب: 6π

سوال 2.332: ایک گیند کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیلی $r = 2$ پر کیا ہو گی؟

مماس کئے لئے پرکھ

سوال 2.333: کیا مبداء پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

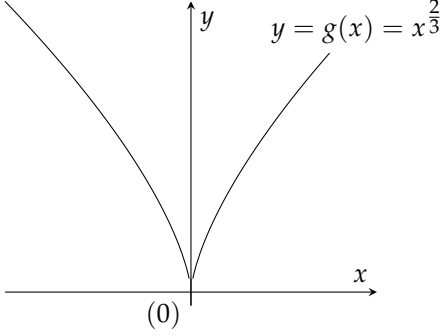
جواب: ہاں

سوال 2.334: کیا مبداء پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

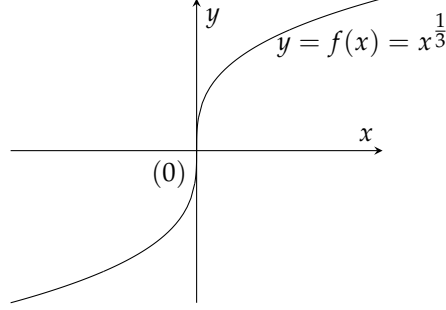
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

انتصابی مماس

اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$ یا $-\infty$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس انتصابی ہے۔



(ب) مبداء پر انتضابی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔



(ا) مبداء پر انتضابی مماس پایا جاتا ہے۔

شکل 2.88: انتضابی مماس

نقطہ $x = 0$ پر تفاعل $y = f(x) = x^{1/3}$ کا مماس درج ذیل ہو گا (شکل 2.88-ا)۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

انہیں اب مبداء پر تفاعل $y = g(x) = x^{2/3}$ (شکل 2.88-ب) کا مماس حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \infty$$

اب چونکہ مبداء تک دائیں سے پہنچنے سے حد ∞ جبکہ مبداء تک بائیں سے پہنچنے سے حد $-\infty$ حاصل ہوتا ہے لہذا مبداء پر درج بالا حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 2.335: کیا درج ذیل تفاعل کا مبداء پر انتضابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 2.336: کیا درج ذیل تفاعل کا نقطہ $(0,1)$ پر انتضابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ انتصابی مماس
سوال 2.337 تا سوال 2.346 میں دیا گیا تفاعل کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کریں۔ ترسیم کا مماس کہاں انتصابی نظر آتا ہے؟ حساب سے انتصابی مماس کی تصدیق کریں۔

سوال 2.337: $y = x^{\frac{2}{5}}$
جواب: (i) کہیں نہیں

سوال 2.338: $y = x^{\frac{4}{5}}$

سوال 2.339: $y = x^{\frac{1}{5}}$
جواب: (i) $x = 0$ پر

سوال 2.340: $y = x^{\frac{3}{5}}$

سوال 2.341: $y = 4x^{\frac{2}{5}} - 2x$
جواب: (i) کہیں نہیں

سوال 2.342: $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$

سوال 2.343: $y = x^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{1}{3}}$
جواب: (i) $x = 1$ پر

سوال 2.344: $y = x^{\frac{1}{3}} + (x - 1)^{\frac{1}{3}}$

سوال 2.345: $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$
جواب: (i) $x = 0$ پر

سوال 2.346: $y = \sqrt{|4 - x|}$

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 2.347 تا سوال 2.350 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $x_0 - \frac{1}{2} \leq x \leq x_0 + 3$ پر تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں۔

ب. نقطہ x_0 پر تقریبی حاصل تقسیم q کو قدم h کی صورت میں لکھیں۔

ج. $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے q کی حد تلاش کریں۔

د. $h = 3, 2, 1$ کے لئے سیکنٹ خطوط $y = f(x_0) + q(x - x_0)$ متعارف کرتے ہوئے (i) میں دیے گئے وقفے پر ان سیکنٹ خطوط کو تفاعل f کے ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 2.347: $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

سوال 2.348: $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

سوال 2.349: $f(x) = x + \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 2.350: $f(x) = \cos x + 4 \sin 2x, \quad x_0 = \pi$

باب 3

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سستی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔ اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

3.1 تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کی ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

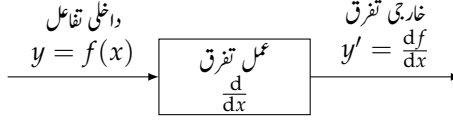
$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔ اس حصے میں f کی دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کی ڈھلوان بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا تفرق¹ درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

derivative¹



شکل 3.1: تفرق کے عمل کی ڈیہ صورت

□

f' کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x پر f کا تفرق پایا جاتا ہے یا کہ x پر f قابل تفرق² ہے۔

علامتیت

تفاعل $y = f(x)$ کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔

$\frac{dy}{dx}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔

$\frac{df}{dx}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

$\frac{d}{dx}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل 3.1)۔

$D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔

\dot{y} نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم $\frac{dy}{dx}$ کو " x کے لحاظ سے y کو تفرق" پڑھتے ہیں۔ اسی طرح $\frac{df}{dx}$ اور $\frac{d}{dx}f(x)$ کو " x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال 2.40 اور مثال 2.41 میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال 2.40 میں

$$\frac{d}{dx}(mx + b) = m$$

اور مثال 2.41 میں

$$(3.1) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

1. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

2. درج ذیل تفریق حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

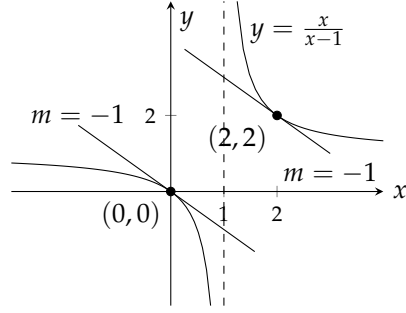
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال 3.1:

ا. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟



شکل 3.2: $x = 0$ اور $x = 2$ پر $y' = -1$ ہوگا (مثال 3.1)۔

حل: (i) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔
 پہلا قدم: یہاں $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h) = \frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جاسکتا ہے۔
 دوسرا قدم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب) $y = f(x)$ کی ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہوگی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

اس مساوات $(x-1)^2 = 1$ کے مترادف ہے لہذا $x = 0$ اور $x = 2$ درکار نتائج ہیں (شکل 3.2)۔ □

مثال 3.2:

1. $x > 0$ کے لئے $y = \sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

2. $x = 4$ پر تفاعل $y = \sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (I) پہلا قدم:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} && \text{سے ضرب دیتے ہیں} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل 3.3 دیکھیں۔

(ب) $x = 4$ پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=4} = \left. \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4, 2)$ پر f کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{1}{4}x + 1$$

□

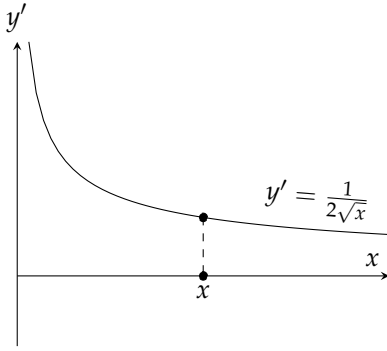
نقطہ $x = a$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

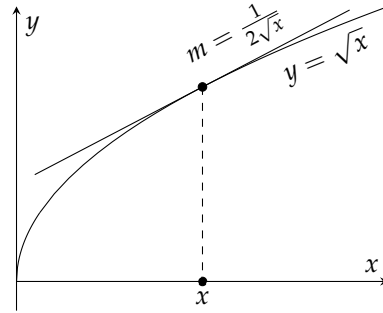
کے علاوہ

$$y' \Big|_{x=a} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

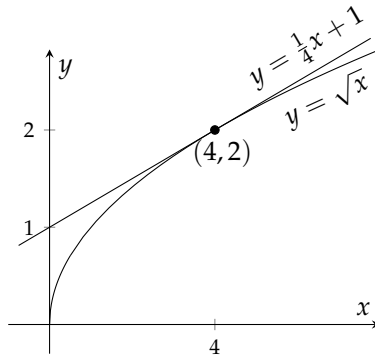
سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں $|_{x=a}$ علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو $x = a$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔



(ب) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ کے لئے $x > 0$

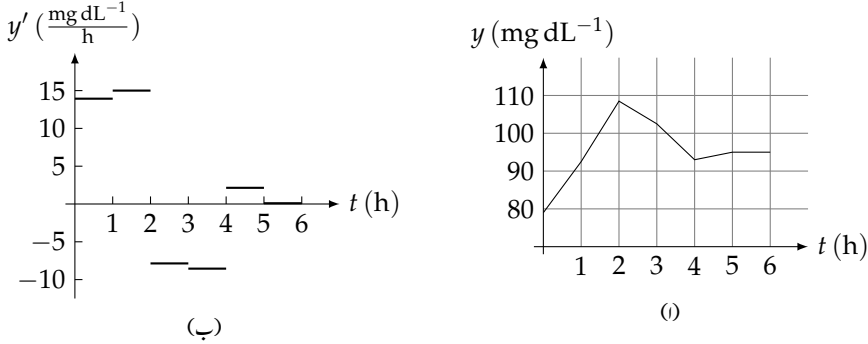


(1) $y = \sqrt{x}$ کے نقطہ



(ج) $y = \sqrt{x}$ کے نقطہ (4, 2) پر اس کا مماس $y = \frac{1}{4}x + 1$

شکل 3.3: اشکال برائے مثال 3.2۔ نقطہ $x = 0$ پر تقاطع معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔



شکل 3.4: (i) قبل پرواز پر کھ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پر کھ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

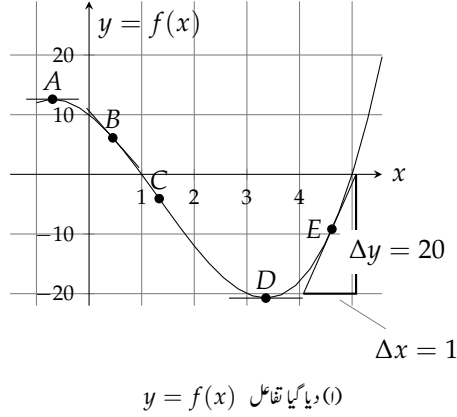
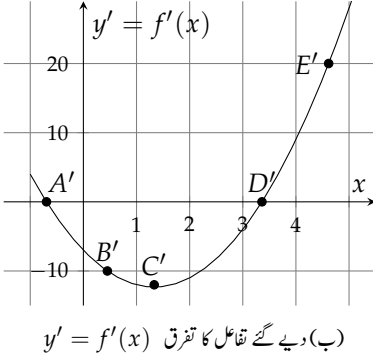
اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباؤ بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تاکہ ہمیں f کی صورت نظر آئے۔ مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان f' سے ہم عموماً f' کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

مثال 3.3: دوا

23 اپریل 1988 کو 31 کلوگرام وزن، ڈیڈلس³ نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریٹی⁴ سے جزیرہ سانٹورینی⁵ تک اڑا کر 115.11 کلو میٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔ یہ جہاز امریکی یونیورسٹی⁶ کے طلبہ نے تیار کیا۔ اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل 3.4-ا میں دکھایا گیا ہے۔ موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جاسکتا ہے۔ تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل 3.4-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر 79 mg dL⁻¹ سے بڑھ کر 83 mg dL⁻¹ ہو جاتا ہے۔ یوں تبدیل $\Delta y = 93 - 79 = 14 \text{ mg dL}^{-1}$ ہے جس کو $\Delta x = 1 \text{ h}$ سے تقسیم کرتے ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14 \text{ mg dL}^{-1}}{\text{h}}$$



شکل 3.5: اشکال برائے مثال 3.5

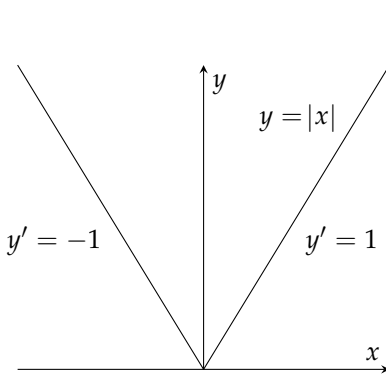
حاصل ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \dots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے پائے جاتے ہیں لہذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کشاف کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ ان نقطوں پر تفریق سیدھی تفاعل غیر معین ہے۔

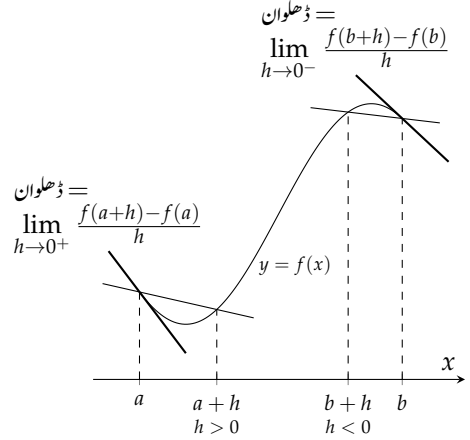
جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفریق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔ اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.4: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 3.5-1 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے تفریق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل: شکل 3.5-1 کے ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریکی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔ شکل 1-1 کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔ A سے D تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔ اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔ نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل 3.5-ب کے مطابقتی نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔ نقطہ E پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جاسکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔ آپ شکل-1 میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو 10- ہو گا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔ شکل-1 میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔



شکل 3.7: چونکہ مہدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہذا مہدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال 3.5)۔



شکل 3.6: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لامتناہی) پر تفاعل $y = f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہوگا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a, b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہوگا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل 3.6)۔

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{پر دائیں ہاتھ تفرق}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad \text{پر بائیں ہاتھ تفرق}$$

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہوگا۔ مسئلہ 2.5 کی بنا کی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہوگا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال 3.5: تفاعل $y = |x|$ وقفہ $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مہدا کے دائیں جانب

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1, \quad \frac{d}{dx}(mx + b) = m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1$$

ہے (شکل 3.7)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \quad \text{اگر } h > 0 \text{ تب } |h| = h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

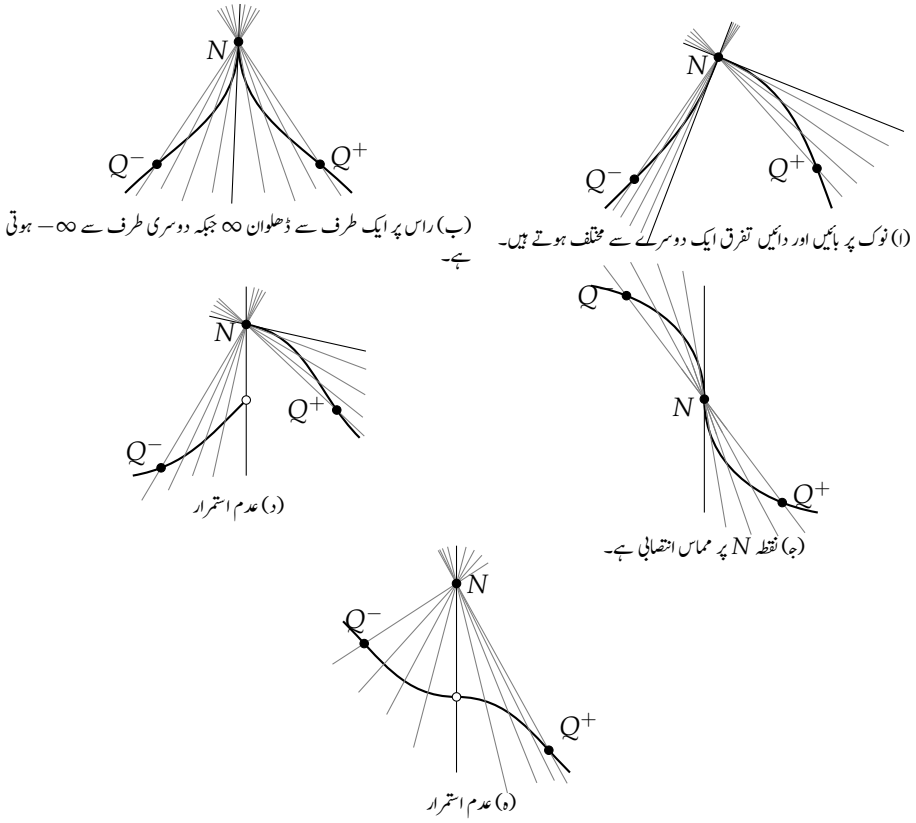
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \quad \text{اگر } h < 0 \text{ تب } |h| = -h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned}$$

□

کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہو گا۔ اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

1. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل 3.8-ا)۔
2. راس، جہاں NQ کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ب)۔
3. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کی ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ج)۔
4. عدم استمرار (شکل 3.8-د اور شکل 3.8-ه)۔



شکل 3.8: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل ناقابل تفرق ہو گا۔

قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہو گا۔

مسئلہ 3.1: اگر $x = c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x = c$ پر f استمراری ہو گا۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہیں۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

اب $h \rightarrow 0$ لیں۔ مسئلہ 2.1 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x = c$ پر f کا ایک طرفہ (ایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x = c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دایاں) سے استمراری ہو گا۔

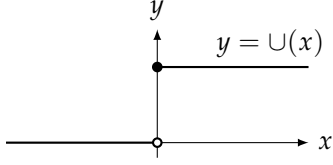
انتباہ مسئلہ 3.1 کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال 3.5 میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر بھوار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y = |x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل 3.9) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

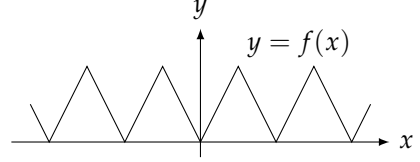
کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائٹسٹر اس⁷ نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

[1815-1897]⁷



شکل 3.10: اکائی سیڑھی تفعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے لہذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔



شکل 3.9: دندان ترسیم استمراری لیکن لامتناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔

یہ کلیہ f کو بڑھتی تعداد کے کوسائن تفعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ بل کو بل دینے سے ایسا تفعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہذا اس کا تماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفعل جن کا کسی بھی نقطے پر تماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری⁸ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفعل کسی دوسرے کا تفرقی تفعل ہو۔ درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 3.2: اگر جس وقفے پر f قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ a اور b پائے جاتے ہیں تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے سچے ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ 3.2 (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفعل اس صورت تک کسی دوسرے تفعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل 3.10)۔ ایک تفعل کب کسی دوسرے تفعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبزنز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ ان کے جواب کو ہم باب 5 میں دیکھیں گے۔

سوالات

تفریق تفاعل اور قیمتوں کی تلاش
سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں تفریق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفریق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 3.1: $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3), f'(0), f'(1)$
جواب: $-2x, 6, 0, -2$

سوال 3.2: $F(x) = (x - 1)^2 + 1$; $F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال 3.3: $g(t) = \frac{1}{t^2}$; $g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
جواب: $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

سوال 3.4: $k(z) = \frac{1-z}{2z}$; $k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال 3.5: $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$; $p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$
جواب: $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$

سوال 3.6: $r(s) = \sqrt{2s+1}$; $r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال 3.7 تا سوال 3.12 میں دیا گیا تفریق حاصل کریں۔

سوال 3.7: $y = 2x^3$; $\frac{dy}{dx}$
جواب: $6x^2$

سوال 3.8: $r = \frac{s^3}{2} + 1$; $\frac{dr}{ds}$

سوال 3.9: $s = \frac{t}{2t+1}$; $\frac{ds}{dt}$
جواب: $\frac{1}{(2t+1)^2}$

سوال 3.10: $v = t - \frac{1}{t}$; $\frac{dv}{dt}$

سوال 3.11: $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}$; $\frac{dp}{dq}$
جواب: $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}; \quad \frac{dz}{dw} \quad \text{سوال 3.12}$$

ڈھلوان اور مماسی خطوط
سوال 3.13 تا سوال 3.16 میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

$$f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad x = -3 \quad \text{سوال 3.13}$$

جواب: $1 - \frac{9}{x^2}, 0$

$$k(x) = \frac{1}{2+x}; \quad x = 2 \quad \text{سوال 3.14}$$

$$s = t^3 - t^2; \quad t = -1 \quad \text{سوال 3.15}$$

جواب: $3t^2 - 2t, 5$

$$y = (x+1)^3; \quad x = -2 \quad \text{سوال 3.16}$$

سوال 3.17 تا سوال 3.18 میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}; \quad (x, y) = (6, 4) \quad \text{سوال 3.17}$$

جواب: $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 6)$

$$g(z) = 1 + \sqrt{4-z}; \quad (z, w) = (3, 2) \quad \text{سوال 3.18}$$

سوال 3.19 تا سوال 3.22 میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=-1}; \quad s = 1 - 3t^2 \quad \text{سوال 3.19}$$

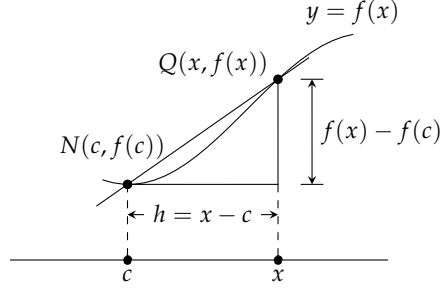
جواب: 6

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\sqrt{3}}; \quad y = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{سوال 3.20}$$

$$\left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{\theta=0}; \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}} \quad \text{سوال 3.21}$$

جواب: $\frac{1}{8}$

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=4}; \quad w = z + \sqrt{z} \quad \text{سوال 3.22}$$



شکل 3.11: حصول تفرق کا متبادل کلیہ

تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ
تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل 3.11 میں سیکنٹ کی ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تقابل کا تفرق دیتی ہے۔

$$(3.2) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال 3.23 تا سوال 3.26 میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تقابل کا تفرق حاصل کریں۔

سوال 3.23: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad c = -1$
جواب: -1

سوال 3.24: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad c = 2$

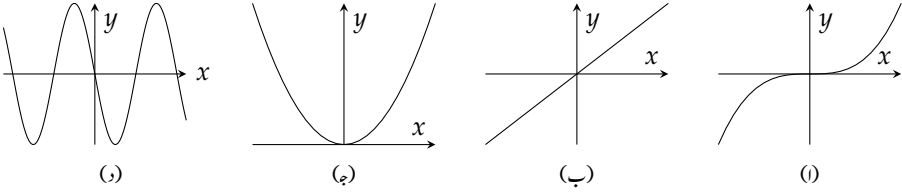
سوال 3.25: $g(t) = \frac{t}{t-1}, \quad c = 3$
جواب: $-\frac{1}{4}$

سوال 3.26: $k(s) = 1 + \sqrt{s}, \quad c = 9$

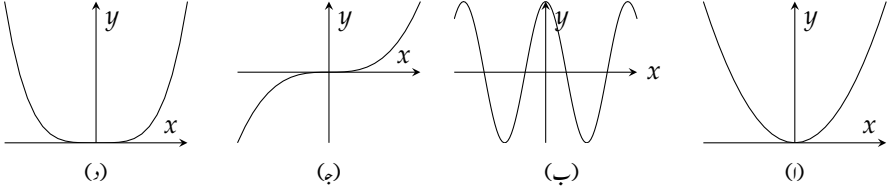
ترسیمات سوال 3.27 تا سوال 3.30 میں دیے گئے تقابل کا تفرق شکل 3.12 میں تلاش کریں۔

سوال 3.27: شکل 3.13-ا
جواب: شکل 3.12-ب

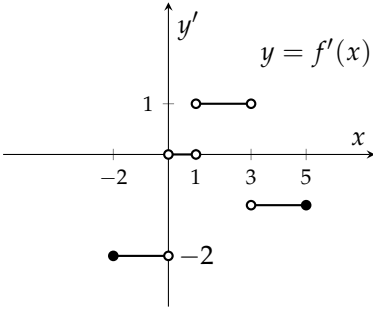
سوال 3.28: شکل 3.13-ب
جواب: شکل 3.12-د



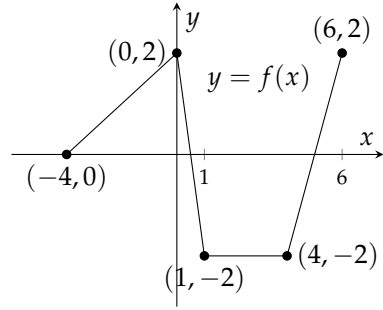
شکل 3.12: تفعل کے تفرق



شکل 3.13: اصل تفعل



شکل 3.15: تفعل کا ترسیم برائے سوال 3.32



شکل 3.14: ترسیم برائے سوال 3.31

سوال 3.29: شکل 3.13-ج

جواب: شکل 3.12-ج

سوال 3.30: شکل 3.13-د

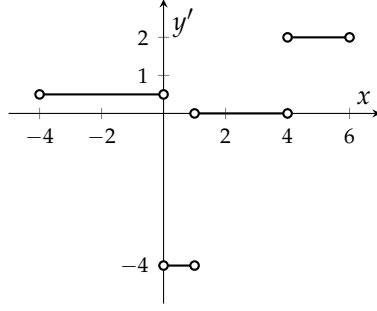
جواب: شکل 3.12-ا

سوال 3.31: قطعات کو جوڑ کر شکل 3.14 حاصل کی گئی ہے۔ (ا) وقفہ $[-4, 6]$ پر کہاں f' غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) انتہائی محور کو y' کہتے ہوئے f' کو ترسیم کریں۔ ترسیم سیزھی نما ہو گا۔

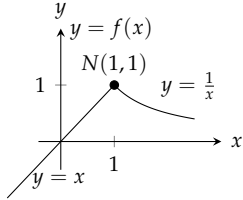
جواب: (ا) $x = 0, 1, 4$; (ب) شکل 3.16

سوال 3.32: تفعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی

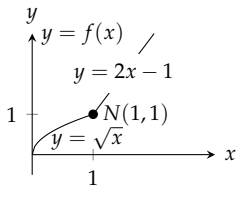
(ا) درج ذیل طریقے سے تفعل f ترسیم کو وقفہ $[-2, 5]$ پر کریں۔



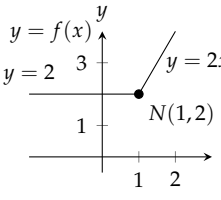
شکل 3.16: جواب برائے سوال 3.32



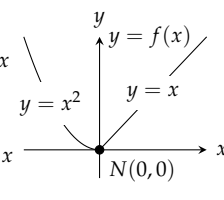
شکل 3.20



شکل 3.19



شکل 3.18



شکل 3.17

1. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔

2. ترسیم کو نقطہ $(-2, 3)$ سے شروع کریں۔

3. تفاعل کا تفرق شکل 3.15 میں دکھایا گیا ہے۔

(ب) نقطہ $(-2, 0)$ سے شروع کرتے ہوئے جزو (i) کا ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 3.33 تا سوال 3.36 میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تفاعل ناقابل تفرق ہے۔

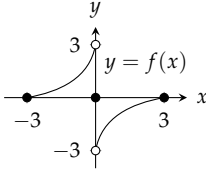
سوال 3.33: تفاعل کو شکل 3.17 میں دکھایا گیا ہے۔

جواب: چونکہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$ جبکہ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ ہے لہذا $x = 0$ پر $f(x)$ ناقابل تفرق ہے۔

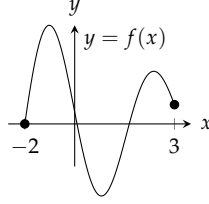
سوال 3.34: تفاعل کو شکل 3.18 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3.35: تفاعل کو شکل 3.19 میں دکھایا گیا ہے۔

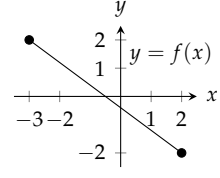
جواب: چونکہ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2$ جبکہ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ ہے لہذا $x = 1$ پر $f(x)$ ناقابل تفرق ہے۔



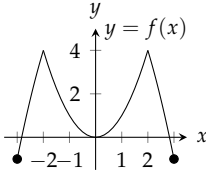
شکل 3.23



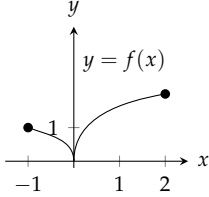
شکل 3.22



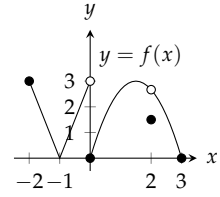
شکل 3.21



شکل 3.26



شکل 3.25



شکل 3.24

سوال 3.36: تفعل کو شکل 3.20 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3.37: سوال 3.42 میں بند دائرہ کار D پر تفعل کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کن نقطوں پر تفعل (i) قابل تفرق، (ب) استمراری لیکن نا قابل تفرق، (ج) غیر استمراری اور نا قابل تفرق ہے؟

سوال 3.37: ترسیم شکل 3.21 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 2$ ہے۔

جواب: (i) $-3 \leq x \leq 2$ (ب) کوئی نہیں (ج) کوئی نہیں۔

سوال 3.38: ترسیم شکل 3.22 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال 3.39: ترسیم شکل 3.23 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 3$ ہے۔

جواب: (i) $-3 \leq x < 0, 0 < x \leq 3$ (ب) کوئی نہیں (ج) $x = 0$

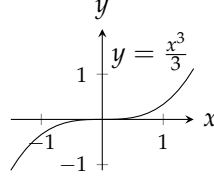
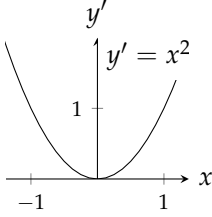
سوال 3.40: ترسیم شکل 3.24 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال 3.41: ترسیم شکل 3.25 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -1 \leq x \leq 2$ ہے۔

جواب: (i) $-1 \leq x < 0, 0 < x \leq 2$ (ب) $x = 0$ (ج) کوئی نہیں۔

سوال 3.42: ترسیم شکل 3.26 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال 3.43 تا سوال 3.46 میں درج ذیل کریں۔



شکل 3.27: ترسیم برائے شکل 3.45

ا. تقابل $y = f(x)$ کا تفرق $y' = f'(x)$ تلاش کریں۔

ب. $y = f(x)$ اور $y' = f'(x)$ کو علیحدہ مجدد پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج. x کی کن قیمتوں کے لئے y' کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د. x بڑھنے سے x کی قیمتوں کے کن وقفوں پر $y = f(x)$ بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (باب 4 میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال 3.43: $y = -x^2$ (ا) $y' = -2x$ (ب) $x < 0, x = 0, x > 0$ (ج) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$ (د) کوئی نہیں۔

سوال 3.44: $y = -\frac{1}{x}$

سوال 3.45: $y = \frac{x^3}{3}$ (ا) $y' = x^2$ (ب) شکل 3.27، (ج) $x \neq 0, x = 0$ ، کوئی نہیں، (د) $-\infty < x < \infty$ ، کوئی نہیں۔

سوال 3.46: $y = \frac{x^4}{4}$

سوال 3.47: کیا $y = x^3$ کا کبھی منفی ڈھلوان ہو گا؟ اگر ہے تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $y' = 3x^2$ کبھی بھی منفی نہیں ہو گا۔

سوال 3.48: کیا $y = 2\sqrt{x}$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.49: کیا قطع مکافی $y = 2x^2 - 13x + 5$ کے مماس کا ڈھلوان -1 ہو سکتا ہے۔ اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں ہے تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں، $y + 16 = -(x - 3)$ نقطہ $(3, -16)$ پر مماس ہے۔

سوال 3.50: کیا منحنی $y = \sqrt{x}$ کا کوئی مماس x محور کو $x = -1$ پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال 3.51: کیا $(-\infty, \infty)$ پر قابل تفرق تفاعل کا تفرق $y = [x]$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: نہیں، چونکہ تفاعل $y = [x]$ متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا ہے۔

سوال 3.52: $f(x) = |x|$ کے تفرق کو ترسیم کرنے کے بعد $y = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ ترسیم کریں۔ ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال 3.53: یہ جانتے ہوئے کہ $x = x_0$ پر تفاعل $f(x)$ قابل تفرق ہے، آپ $x = x_0$ پر تفاعل $-f$ کی قابل تفرق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں؛ $(-f)'(x) = -(f'(x))$

سوال 3.54: کیا $t = 7$ پر $g(t)$ کا قابل تفرق ہونے سے آپ $t = 7$ پر $3g$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.55: فرض کریں کہ t کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $g(t)$ اور $h(t)$ معین ہیں اور $g(0) = h(0) = 0$ ہے۔ کیا $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{h(t)}$ موجود ہو گا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $g(t) = mt$ اور $h(t) = t$ کے لئے $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{h(t)} = m$ ہو گا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

سوال 3.56: (i) فرض کریں کہ $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے تفاعل $f(x)$ شرط $|f(x)| \leq x^2$ کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ $x = 0$ پر f قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ $x = 0$ پر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.57: $0 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ کو ترسیم کریں۔ اس کے اوپر پہلے $h = 1, 0.5, 0.1$ لیتے ہوئے $y = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -1, -0.5, -0.1$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 3.58: $-2 \leq x \leq 2$ اور $0 \leq y \leq 3$ لیتے ہوئے $y = 3x^2$ ترسیم کریں۔ اسی کے اوپر پہلے $h = 2, 1, 0.2$ لیتے ہوئے $y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -2, -1, -0.2$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 3.59: وائشٹراس کا ناقابل تفرق تقابل وائشٹراس تقابل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$ کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) \\ + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تقابل کو ترسیم کریں۔ ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں کہ یہ کتنی بلد دار ہے۔

سوال 3.60 تا سوال 3.65 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت قدم h لیتے ہوئے عمومی نقطہ x پر حاصل تقسیم q متعارف کریں۔

ج. $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د. $x = x_0$ پر کرتے ہوئے تقابل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ه. x_0 سے x کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پر کریں۔ کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔ اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (د) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1 \quad \text{سوال 3.60}$$

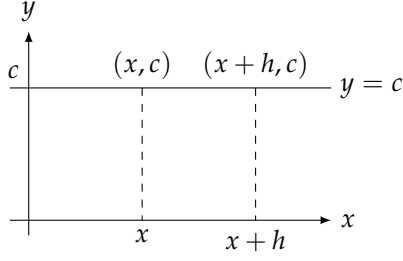
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1 \quad \text{سوال 3.61}$$

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2 \quad \text{سوال 3.62}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1 \quad \text{سوال 3.63}$$

$$f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 3.64}$$

$$f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{سوال 3.65}$$



شکل 3.28: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

3.2 قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ 3.1: مستقل کا تفرق
اگر c مستقل ہو تب $\frac{d}{dx}c = 0$ ہو گا۔

مثال 3.6: $\frac{d}{dx}(8) = 0$, $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $\frac{d}{dx}(\sqrt{3}) = 0$ □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے $f(x) = c$ کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل 3.28)۔ ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں x^n کا تفرق دیتا ہے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔

قاعدہ 3.2: قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح
اگر n مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت n سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو n سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 3.7:

f	x	x^2	x^3	x^4	\dots
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	\dots

□

ثبوت قاعدہ: اگر $f(x) = x^n$ ہو تب $f(x+h) = (x+h)^n$ ہو گا۔ چونکہ n مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

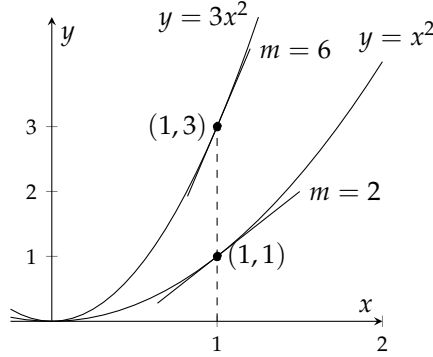
استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ ہم $a = x+h$ اور $b = x$ لیتے ہیں۔ یوں $h = a-b$ ہو گا۔ اس طرح

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جو n ارکان پر مشتمل ہے اور $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ہر رکن کا حد x^{n-1} ہے۔ یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

□



شکل 3.29: ترسیم برائے مثال 3.8

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

قاعدہ 3.3: قاعدہ مستقل مضرب

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

بالخصوص مثبت عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

مثال 3.8: تفرقی کلیہ $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$ کہتی ہے کہ y محور کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم $y = x^2$ کی پیمائش تبدیل کرنے سے ہر نقطے کی ڈھلوان 3 سے ضرب ہوگی (شکل 3.29)۔

□

مثال 3.9: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ 3.3 میں $c = -1$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}$$

□

ثبوت قاعدہ : (قاعدہ 3.3)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} cu &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} & f(x) = cu(x) \text{ کے تفرق کی تعریف} \\
 &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} & \text{تحدیدی خاصیت} \\
 &= c \frac{du}{dx} & u \text{ قابل تفرق ہے}
 \end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفرق تفاعل کے مجموعے کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.4: قاعدہ مجموعہ

اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ $u + v$ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہو گا جہاں u اور v دونوں قابل تفرق ہوں۔ ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی تفریقی قاعدہ حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفرق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفرق ان کے تفرق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعل کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعہ میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔ اگر u_1, u_2, \dots, u_n متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بھی قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$$

مثال 3.10:

$$\begin{aligned}
 \text{(ا)} \quad y &= x^4 + 12x & \text{(ب)} \quad y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) & \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\
 &= 4x^3 + 12 & &= 3x^2 + \frac{4}{3} \cdot 2x - 5 + 0 \\
 & & &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5
 \end{aligned}$$

□

آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفرق لیا جاسکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.4) ہم تفرق کی تعریف کو $f(x) = u(x) + v(x)$ پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
 &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}
 \end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لئے ثبوت ہم درج ذیل فقرے کو ریاضی مانوڈ⁹ کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$(3.3) \quad \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ $n = 2$ کے لئے درست ہے۔ یہ ریاضی مانوڈ کا پہلا قدم ہے۔

دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح $n = k$ (جہاں $n_0 = 2 \geq k$ ہے) کے لئے درست ہے تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx}$$

ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}} \right) \\ &= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \\ &= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx} \end{aligned}$$

اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح $n \geq 2$ کے لئے قاعدہ 3.4 کی درستی کی تصدیق کرتا ہے۔

مثال 3.11: کیا منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تب کہاں پایا جاتا ہے؟
حل: افقی مماس وہاں ہو گا جہاں $\frac{dy}{dx}$ صفر کے برابر ہو۔ ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{dy}{dx}$ معلوم کرتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

اور اس کے بعد مساوات $\frac{dy}{dx} = 0$ کو x کے لئے حل کرتے ہیں۔

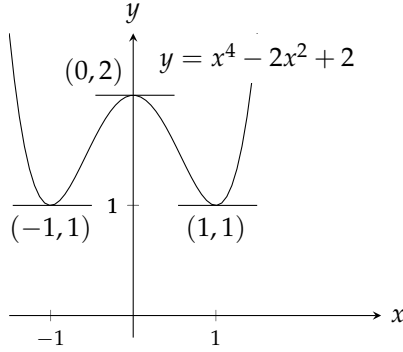
$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1 \end{aligned}$$

منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس $x = 0, 1, -1$ پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابقتی نقطے $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(0, 2)$ ہیں (شکل 3.30)۔
□

حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{ہے جبکہ} \quad \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$



شکل 3.30: افقی مماس (مثال 3.11)

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.5: قاعدہ حاصل ضرب
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب uv بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

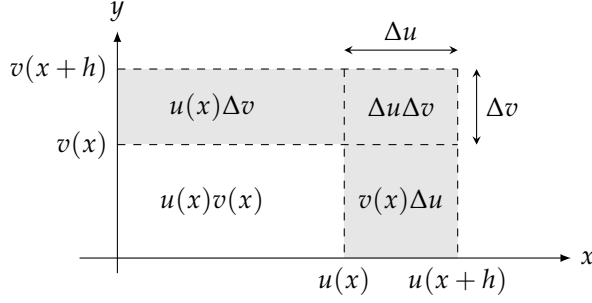
حاصل ضرب uv کا تفرق u ضرب v کا تفرق جمع v ضرب u کا تفرق ہو گا۔ اس کو $(uv)' = uv' + vu'$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفرق کی تعریف کے تحت

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہو گا جس کو u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں $u(x+h)v(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \end{aligned}$$



شکل 3.31: قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی۔

چونکہ x پر u قابل تفرق ہے لہذا $h \rightarrow 0$ کرنے سے $u(x+h) \rightarrow u(x)$ ہو گا۔ دو کسر کی تحدیدی قیمتیں x پر $\frac{du}{dx}$ اور $\frac{dv}{dx}$ ہیں۔ مختصراً درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

□

قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ مثبت ہوں اور x بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب $h > 0$ کی صورت میں شکل 3.31 حاصل ہو گا۔ $u(x)$ اور $v(x)$ بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u\Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو h سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h) \frac{\Delta v}{h} + v(x+h) \frac{\Delta u}{h} - \Delta u \frac{\Delta v}{h}$$

حاصل ہو گا۔ اب $h \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \rightarrow 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$ ہو گا لہذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

مثال 3.12: تقابل $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ کا تفرق تلاش کریں۔
 حل: قاعدہ حاصل ضرب میں $u = x^2 + 1$ اور $v = x^3 + 3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)(x^3 + 3)] &= (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\end{aligned}$$

□

اس مثال میں تو سین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y &= (x^2 + 1)(x^3 + 3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3 \\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\end{aligned}$$

ملتا ہے جو مثال 3.12 میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔ درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال 3.13: فرض کریں کہ $y = uv$ تقابل u اور v کا حاصل ضرب ہے۔ درج ذیل استعمال کرتے ہوئے $y'(2)$ تلاش کریں۔

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1, \quad v'(2) = 2$$

حل: قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2\end{aligned}$$

□

حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں تھا اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں ہو گا۔ درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

قاعدہ 3.6: قاعدہ حاصل تقسیم

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم $\frac{u}{v}$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

اس آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں u اور v کے تفریق حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں $v(x)u(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نم میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.14: تفاعل $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل: ہم $u = t^2 - 1$ اور $v = t^2 + 1$ لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{(t^2+1) \cdot 2t - (t^2-1) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} & \left(\frac{du}{dt} = 2t, \frac{dv}{dt} = 2t \right) \\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{4t}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

□

منفی عدد صحیح کے لئے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ 3.7: منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ

اگر n منفی عدد صحیح اور $x \neq 0$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ اگر n منفی عدد صحیح ہو تب $m = -n$ مثبت عدد صحیح ہو گا۔ یوں $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ہو گا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\ &= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\ &= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} \quad \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہذا } \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\ &= -mx^{-m-1} \\ &= -nx^{n-1} \quad \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے} \end{aligned}$$

□

مثال 3.15:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right) &= 4 \frac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4} \end{aligned}$$

□

مثال 3.16: منفی $y = x + \frac{2}{x}$ کا نقطہ $(1, 3)$ پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔
حل: منفی کی ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

ہے جس کی قیمت نقطہ $x = 1$ پر

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

ہو گی۔ نقطہ $(1, 3)$ پر ڈھلوان $m = -1$ کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y - 3 = (-1)(x - 1) \quad \text{نقطہ-ڈھلوان مساوات}$$

$$y = -x + 1 + 3$$

$$y = -x + 4$$

□

قاعدہ کا انتخاب
تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔ درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 3.17: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کی بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر x^4 سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

□

دو رتبی اور بلند رتبی تفرق

تفرق $y' = \frac{dy}{dx}$ کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ اول تفرق¹⁰ یا ایک رتبی تفرق یا مختصراً پہلا تفرق¹¹ کہتے ہیں۔ یہ تفرق از خود x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ دوم تفرق¹² یا دو رتبی تفرق یا مختصراً دوسرا تفرق¹³ کہتے ہیں۔

دو رتبی تفرق کی علامت $\frac{d^2 y}{dx^2}$ میں شمار کنندہ میں d جبکہ نسب نما میں x کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔ درج بالا مساوات میں $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ سے مراد تفرقی علامتوں کا ضرب نہیں ہے بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر y'' قبل تفرق ہو تب اس کے تفرق $\frac{dy''}{dx} = \frac{d^3 y}{dx^3}$ کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ سوم تفرق یا سہ رتبی تفرق یا تین رتبی تفرق یا مختصراً تیسرا تفرق کہتے ہیں۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ n تفرق یا n رتبی تفرق یا n واں تفرق کہیں گے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔ آپ نے دیکھا کہ بلند رتبی تفرق کو قوسین میں بند y کا طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال 3.18: متاعل $y = x^3 - 3x^2 + 2$ کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(4)} = 0$$

چونکہ $y^{(4)} = 0$ ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہذا اس کا تفرق در حقیقت صفر (یعنی مثال) کا تفرق ہو گا جو صفر ہی ہے۔ یوں اس متاعل کے ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ اس کا چار رتبی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

first order derivative¹⁰

first derivative¹¹

second order derivative¹²

second derivative¹³

سوالات

تفرق کا حساب
سوال 3.66 تا سوال 3.77 میں متقابل کا رتبہ اول اور رتبہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال 3.66: $y = -x^2 + 3$
جواب: $y' = -2x, \quad y'' = -2$

سوال 3.67: $y = x^2 + x + 8$

سوال 3.68: $s = 5t^3 - 3t^5$
جواب: $s' = 15t^2 - 15t^4, \quad s'' = 30t - 60t^3$

سوال 3.69: $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال 3.70: $y = \frac{4x^3}{3} - x$
جواب: $y' = 4x^2 - 1, \quad y'' = 8x$

سوال 3.71: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال 3.72: $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$
جواب: $w' = -6z^{-3} + \frac{1}{z^2}, \quad w'' = 18z^{-4} - \frac{2}{z^3}$

سوال 3.73: $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال 3.74: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
جواب: $y' = 12x - 10 + 10x^{-3}, \quad y'' = 12 - 30x^{-4}$

سوال 3.75: $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال 3.76: $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
جواب: $r' = -\frac{2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \quad r'' = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

سوال 3.77: $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال 3.78 تا سوال 3.81 میں (i) y' کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفریق حاصل کریں۔

سوال 3.78: $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
جواب: $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

سوال 3.79: $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

سوال 3.80: $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$
جواب: $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \frac{1}{x^2}$

سوال 3.81: $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

سوال 3.82 تا سوال 3.93 میں تقابل کا تفریق تلاش کریں۔

سوال 3.82: $y = \frac{2x+5}{3x-2}$
جواب: $y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}$

سوال 3.83: $z = \frac{2x+1}{x^2-1}$

سوال 3.84: $g(x) = \frac{x^2-4}{x+0.5}$
جواب: $g'(x) = \frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

سوال 3.85: $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

سوال 3.86: $v = (1-t)(1+t^2)^{-1}$
جواب: $\frac{dv}{dt} = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

سوال 3.87: $w = (2x-7)^{-1}(x+5)$

سوال 3.88: $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$
جواب: $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

سوال 3.89: $u = \frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

سوال 3.90: $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$
 جواب: $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

سوال 3.91: $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

سوال 3.92: $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$
 جواب: $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

سوال 3.93: $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

سوال 3.94: $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ تفاعل کے تمام بلند رتبی تفریق تلاش کریں۔
 جواب: $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12, y^{(n)} = 0$ کے لئے $n \geq 5$

سوال 3.95: $y = \frac{x^5}{120}$ تفاعل کے تمام بلند رتبی تفریق تلاش کریں۔

سوال 3.96 تا سوال 3.103 میں یک رتبی اور دو رتبی تفریق تلاش کریں۔

سوال 3.96: $y = \frac{x^3+7}{x}$
 جواب: $y' = 2x - 7x^{-2}, y'' = 2 + 14x^{-3}$

سوال 3.97: $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

سوال 3.98: $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$
 جواب: $\frac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \frac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$

سوال 3.99: $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

سوال 3.100: $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$
 جواب: $\frac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \frac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$

سوال 3.101: $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

سوال 3.102: $p = \left(\frac{q^2+3}{12q} \right) \left(\frac{q^4-1}{q^3} \right)$
 جواب: $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \quad \frac{d^2p}{dq^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

سوال 3.103: $p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال 3.104: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے تفاعل ہیں جو $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

$x = 0$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{d}{dx}(uv), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

جواب:

$$\frac{d}{dx}(uv) = 13, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = -7, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{7}{25}, \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u) = 20$$

سوال 3.105: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

$x = 1$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{d}{dx}(uv), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

ڈھلوان اور مماس

سوال 3.106: (i) نقطہ $(2, 1)$ پر مماسی $y = x^3 - 4x + 1$ کے مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) مماسی کی کم تر ڈھلوان کتنی اور کس نقطے پر ہے؟ (ج) جس نقطے پر مماسی کی ڈھلوان 8 ہے وہاں مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 3.107: (i) مماسی $y = x^3 - 3x - 2$ کے افقی مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔ مماسی نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساواتیں بھی تلاش کریں۔ (ب) مماسی کی کم تر ڈھلوان کیا ہے اور کس نقطے پر ہے؟ اس نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 3.108: مبدأ اور (1,2) پر منحنی $y = \frac{4x}{x^2+1}$ کے مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 3.109: نقطہ (2,1) پر $y = \frac{8}{x^2+4}$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 3.110: منحنی $y = ax^2 + bx + c$ نقطہ (1,2) سے گزرتی ہے اور مبدأ پر خط $y = x$ کا مماس ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 3.111: نقطہ (1,0) پر $y = x^2 + ax + b$ اور $y = cx - x^2$ کا مشترک مماس پایا جاتا ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 3.112: (i) نقطہ (-1,0) پر منحنی $y = x^3 - x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) کمپیوٹر پر منحنی اور مماس کو ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدود اندازہ لگائیں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

سوال 3.113: (i) مبدأ پر منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی اور مماس کو کمپیوٹر پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدود اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

طبعی استعمال

سوال 3.114: دباؤ اور حجم بند ڈبہ میں مستقل درجہ حرارت T پر گیس کا حجم V اور دباؤ P درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں جہاں a ، b اور c مستقل ہیں۔ $\frac{dP}{dV}$ تلاش کریں۔

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

سوال 3.115: دوا کو جسم کا رد عمل دوا کو جسم کے رد عمل کو عموماً درج ذیل کلیہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں C مثبت مستقل ہے جبکہ M خون میں جذب دوا کی مقدار ہے۔

$$R = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

اگر رد عمل فٹار خون کی تبدیلی ہو تب R کو ملی میٹر پارہ میں ناپا جاتا ہے۔ اگر رد عمل درجہ حرارت میں تبدیلی ہو تب R کو کیلون میں ناپا جاتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ $\frac{dR}{dM}$ تلاش کریں۔ یہ تفرق جو M کا تفاعل ہے، دوا کی مقدار میں تبدیلی کو جسم کی حساسیت¹⁴ کہلاتا ہے۔ سوال 4.397 میں ہم دوا کی وہ مقدار معلوم کریں گے جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 3.116: فرض کریں کہ قاعدہ حاصل ضرب میں v کی قیمت مستقل c ہو۔ کیا اس سے قاعدہ مضرب مستقل حاصل کیا جاسکتا ہے؟

سوال 3.117: قاعدہ بالعکس متناسب (i) قاعدہ بالعکس متناسب¹⁵ کہتا ہے کہ جس نقطے پر تفاعل $v(x)$ قابل تفرق ہو اس نقطے پر

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

ہو گا۔ دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب درحقیقت قاعدہ حاصل تقسیم کی ایک مخصوص صورت ہے۔ (ب) دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب اور قاعدہ حاصل ضرب کو ملا کر قاعدہ حاصل تقسیم اخذ کیا جاسکتا ہے۔

سوال 3.118: مثبت عدد صحیح کا دوسرا ثبوت الجبرائی کلیہ

$$cx^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1})$$

اور صفحہ 3.2 پر دیا گیا کلیہ تفرق (مساوات 3.2)

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

استعمال کرتے ہوئے $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ حاصل کریں۔

سوال 3.119: قاعدہ حاصل ضرب کی عمومی صورت قاعدہ حاصل ضرب متغیر x کے قابل تفرق تفاعل u اور v کے لئے درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

(i) متغیر x کے قابل تفرق تین تفاعل کے حاصل ضرب uvw کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ب) متغیر x کے قابل تفرق چار تفاعل کے حاصل ضرب $u_1 u_2 u_3 u_4$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ج) متغیر x کے قابل تفرق متناہی تعداد تفاعل کے حاصل ضرب $u_1 u_2 \dots u_n$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟

سوال 3.120: $x^{3/2}$ کو $x \cdot x^{1/2}$ لکھ کر قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے $\frac{d}{dx}(x^{3/2})$ حاصل کریں۔ جواب کو ناطق عدد ضرب x کا ناطق طاقت لکھیں۔ جزو (ب) اور (ج) کو بھی اسی طرح حل کریں۔ (ب) $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$ تلاش کریں۔ (ج) $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$ تلاش کریں۔ (د) درج بالا تین جزو میں آپ کیا نقش دیکھتے ہیں۔ ناطق طاقتیں حصہ 3.6 کا ایک موضوع ہے۔

3.3 تبدیلی کی شرح

اس حصے میں ہم تبدیلی کی شرح پر تفریق کی مدد سے غور کریں گے۔ وقت کے لحاظ سے فاصلہ میں تبدیلی کی مثالیں سمتی رفتار اور اسراع ہیں۔ ہم وقت کے علاوہ دیگر متغیر کے لحاظ سے بھی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر حکیم جاننا چاہے گا کہ دوا میں معمولی تبدیلی سے مریض کی حالت پر کیا اثر ہو گا۔ ماہر اقتصادیات جاننا چاہے گا کہ سرمایہ کاری میں معمولی تبدیلی سے اقتصادی ترقی پر کتنا اثر پایا جائے گا۔ ان سوالات کو موزوں متغیر کے لحاظ سے تفریق کی صورت میں ظاہر کیا جائے گا۔

اوسط اور لمحاتی شرح تبدیلی

ہم کسی دورانیہ پر اوسط شرح تبدیلی سے شروع کرتے ہیں۔ اس دورانیہ کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے حاصل شرح تبدیلی کی حد کو تفاعل کا تفریق کہتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ x_0 تا $x_0 + h$ پر تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی سے مراد

$$\text{اوسط شرح تبدیلی} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ہے۔ x کے لحاظ سے x_0 پر f کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

کو کہتے ہیں بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

روایتی طور پر اگر x وقت کو ظاہر نہ کرتا ہو تب بھی لفظ لمحاتی استعمال کیا جاتا ہے۔ عموماً کو مختصراً کہتے ہیں۔

مثال 3.19: دائرے کے رقبہ S اور رداس r کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$S = \pi r^2$$

رہتے کی شرح تبدیلی $r = 0.1 \text{ m}$ پر کیا ہوگی؟

حل: رداس کے لحاظ سے رقبہ کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi r$$

ہے۔ یوں $r = 0.1 \text{ m}$ کی صورت میں r تبدیل کرنے سے رقبہ تبدیل ہونے کی شرح $0.2\pi \text{ m}^2/\text{m}$ ہوگی۔ یوں اس رداس

□

پر رداس میں Δr میٹر چھوٹی تبدیلی سے رقبہ میں $0.2\pi \Delta r$ مربع میٹر تبدیلی رونما ہوگی۔

لکیر پر حرکت۔ ہٹاؤ، سمتی رفتار، رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ محوری خط (جس کو ہم s محور کہتے ہیں) پر ایک جسم یوں حرکت کرتا ہے کہ اس محور پر مقام s اور وقت t کا تعلق

$$s = f(t)$$

ہے۔ دورانیہ t تا $t + \Delta t$ میں جسم کا ہٹاؤ¹⁶

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ہو گا (شکل 3.32) اور اس کی اوسط سمتی رفتار¹⁷

$$v_{\text{اوسط}} = \frac{\text{ہٹاؤ}}{\text{دورانیہ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار جاننے کی خاطر ہم $\Delta t \rightarrow 0$ کرتے ہوئے دورانیہ t تا $t + \Delta t$ پر اوسط سمتی رفتار کا حد تلاش کرتے ہیں۔ یہ حد t کے لحاظ سے f کا تفرق ہے۔

تعریف: جسم کی (لچاتی) سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے تعین گر تفاعل $s = f(t)$ کا تفرق ہو گا۔ لمحہ t پر سمتی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

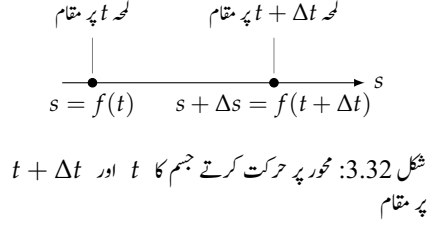
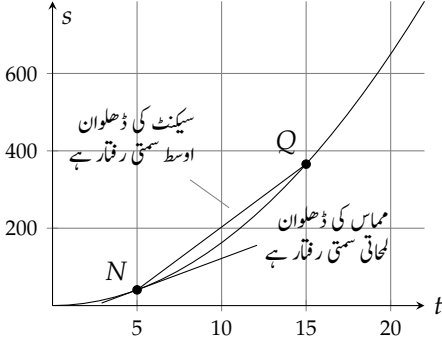
□

مثال 3.20: ایک گاڑی کی فاصلہ (میٹر) بالقابل وقت (سیکنڈ) ترسیم کو شکل 3.33 میں دکھایا گیا ہے۔ سیکنٹ NQ کی ڈھلوان دورانیہ $t = 5$ s تا $t = 15$ s کے لئے اوسط سمتی رفتار ہے جو 32.5 m s^{-1} یعنی 117 km h^{-1} کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 5$ s پر مماس کی ڈھلوان اس لمحہ پر لچاتی سمتی رفتار 16.25 m s^{-1} یعنی 58.5 km h^{-1} دیتی ہے۔ □

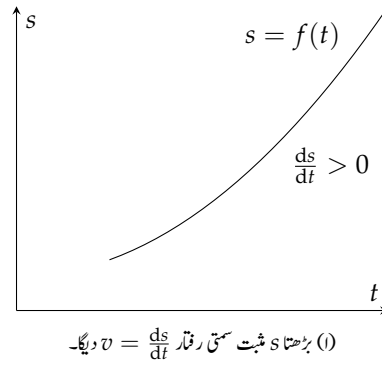
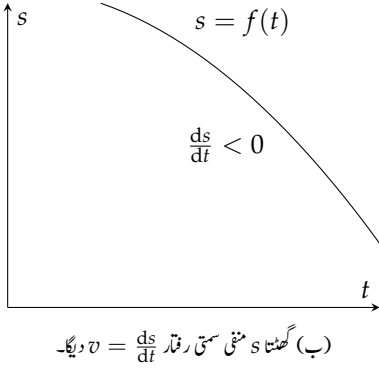
مقدار معلوم روپ

اگر x اور y دونوں متغیر t کے تفاعل ہوں تب $(x(t), y(t))$ کی ترسیم مقدار معلوم ترسیم¹⁸ کہلاتی ہے۔ منحنی

displacement¹⁶
average velocity¹⁷
parametric curve¹⁸



شکل 3.33: فاصلہ بالمتقابل وقت برائے مثال 3.20



شکل 3.34

یہ $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ¹⁹ حاصل کرنے کی خاطر ہم $x = t$ اور $y = f(t)$ لیں گے۔ چند منحنیات کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

تفاعل	مقدار معلوم روپ
$y = x^2$ (y متغیر x کا تفاعل ہے)	$x(t) = t, y(t) = t^2, -\infty < t < \infty$
$x^2 + y^2 = 4$ (y متغیر x کا تفاعل نہیں ہے)	$x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

سمتی رفتار ہمیں فاصلہ طے کرنے کی شرح کے ساتھ ساتھ حرکت کی سمت بھی دیتی ہے۔ اگر جسم آگے (بڑھتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار مثبت ہوگا؛ اگر جسم پیچھے (گھٹتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار منفی ہوگا (شکل 3.34)۔ سمتی رفتار ایک جسم کتنا

¹⁹ parametric representation

تیز فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کے علاوہ ہمیں حرکت کرنے کی سمت کی معلومات بھی

سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو رفتار²⁰ کہتے ہیں جو مثبت مقدار ہے۔ اگر آپ اپنے گھر سے دوست کے گھر تک 60 km کی سمتی رفتار سے گاڑھی چلائیں اور وہاں سے واپسی پر اسی رفتار سے آئیں تو واپسی پر گاڑھی کی سمتی رفتار 60 km - ہوگی لیکن گاڑھی کا رفتار پیا واپسی پر بھی 60 km h⁻¹ دکھائے گا چونکہ وہ رفتار ناپتا ہے ناکہ سمتی رفتار۔

تعریف: سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو رفتار²¹ کہتے ہیں۔

$$\text{رفتار} = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

□

جس شرح سے ایک جسم کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہے اس کو جسم کی اسراع کہتے ہیں۔

تعریف: وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کا تفرق اسراع²² کہلاتا ہے۔ اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب t پر اس جسم کی اسراع درج ذیل ہوگی۔

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

□

ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے کسی بھی جسم سے اس کی وضاحت کی جاسکتی ہے۔ ایسے جسم پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہے اور جسم کی حرکت کو آزادانہ گرنا²³ کہتے ہیں۔ آزادی سے گرتا ہوا جسم دورانہ t میں

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

فاصلہ طے کرتا ہے جہاں مستقل $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ سطح زمین کے قریب کشش زمین کی بنا اسراع ہے۔ خلا میں ہوا کی غیر موجودگی کی بنا ہوا کی مزاحمت نہیں پائے جاتی ہے اور ہر جسم اس کے تحت حرکت کرتی ہے۔ زمین کے قریب ہوا کی موجودگی میں ہر کثیف، بھاری جسم مثلاً اینٹ، پتھر، وغیرہ کی حرکت، ابتدائی چند سیکنڈ کے لئے جب تک ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہو، اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

speed²⁰speed²¹acceleration²²free fall²³

اسراع کی اکائی ms^{-2} میٹر فی مربع سیکنڈ پڑھی جاتی ہے۔

یہ مساوات ہمیں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی رفتار اور مقام کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔

مثال 3.21: لمحہ $t = 0$ پر ٹھوس جسم کو ساکن حال سے گرنے کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔
(i) پہلے 2 سیکنڈوں میں جسم کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔ (ب) اس لمحہ پر جسم کی رفتار اور اسراع کتنی ہوں گی؟
حل: (i) پہلے دو سیکنڈوں میں جسم درج ذیل فاصلہ طے کرتا ہے۔

$$s(2) = \frac{1}{2}(9.8)(2^2) = 19.6 \text{ m}$$

(ب) لمحہ t پر رفتار $v(t)$ اور اسراع $a(t)$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 9.8t, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8$$

ہوں گے۔ یوں $t = 2 \text{ s}$ پر رفتار اور اسراع درج ذیل ہوں گے۔

$$v(2) = 9.8(2) = 19.6 \text{ m/s}, \quad a(2) = 9.8 \text{ ms}^{-2}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اسراع a کی قیمت وقت t کا تابع نہیں ہے۔

مثال 3.22: ایک جسم کو 49 ms^{-1} کی ابتدائی رفتار کے ساتھ سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ لمحہ t پر جسم کی بلندی $s = 49 - \frac{1}{2}gt^2$ ہوگی (شکل 3.35)۔

ا. جسم کس بلندی تک پہنچ پائے گا؟

ب. اوپر جاتے ہوئے 102.9 m کی بلندی پر جسم کی سمتی رفتار کیا ہوگی؟ نیچے آتے ہوئے اتنی ہی بلندی پر سمتی رفتار کیا ہوگی؟

ج. حرکت کے دوران کسی بھی لمحہ t پر جسم کی اسراع کتنی ہوگی؟

د. جسم زمین پر کب گرے گا؟

حل:

ا. ہم محدودی نظام یوں منتخب کرتے ہیں سطح زمین سے فاصلہ مثبت ہو۔ یوں بلندی s مثبت مقدار ہوگی، ابتدائی رفتار مثبت ہوگی جبکہ اسراع جو نیچے رخ کرتا ہے منفی ہوگا۔ اوپر جاتے ہوئے سمتی رفتار مثبت جبکہ نیچے گرتے ہوئے سمتی رفتار منفی ہوگی۔ بلند ترین مقام پر سمتی رفتار صفر ہوگی۔ اب کسی لمحہ پر سمتی رفتار

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 49 - gt$$

ہوگی۔ رفتار اس لمحہ پر صفر ہوگی جب

$$49 - 9.8t = 0, \quad \Rightarrow \quad t = \frac{49}{9.8} = 5 \text{ s}$$

ہو۔ لمحہ $t = 5 \text{ s}$ پر جسم کی بلندی درج ذیل ہوگی۔

$$s(5) = 49(5) - \frac{1}{2}(9.8)(5^2) = 122.5 \text{ m}$$

ب. جسم کی رفتار 100 m پر حاصل کرنے کی خاطر ہم اس بلندی پر لمحہ t تلاش کرتے ہیں۔

$$102.9 = 49t - 4.9t^2, \quad \Rightarrow \quad t = 3 \text{ s}, 7 \text{ s}$$

یوں 3 سیکنڈوں میں جسم 102.9 m بلندی تک پہنچتا ہے جبکہ واپس گرتے ہوئے اسی بلندی پر یہ 7 سیکنڈ بعد ہوتا ہے۔ ان لمحات پر جسم کی سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$v(3) = 49 - 9.8(3) = 19.6 \text{ m s}^{-1}, \quad v(7) = 49 - 9.8(7) = -19.6 \text{ m s}^{-1}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں لمحات پر جسم کی رفتار ایک جیسی ہے۔

ج. جسم کی اسراع تلاش کرتے ہیں۔

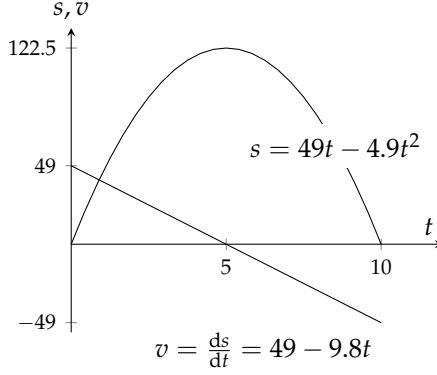
$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = -g = -9.8 \text{ m s}^{-2}$$

جسم کی اسراع مسلسل -9.8 m s^{-2} رہتی ہے۔ اوپر جاتے ہوئے یہ سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے جبکہ نیچے گرتے کے دوران یہ سمتی رفتار میں اضافہ پیدا کرتا ہے۔

د. جس اس لمحہ زمین پر ہوگا جب $s = 0$ ہو یعنی:

$$49t - 4.9t^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad t(49 - 4.9t) = 0, \quad \Rightarrow \quad t = 0 \text{ s}, 10 \text{ s}$$

یوں ابتدائی لمحے پر جسم زمین پر ہوگا اور ٹھیک 10 سیکنڈ بعد یہ واپس زمین پر گرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر جانے کا دورانیہ اور نیچے گرنے کا دورانیہ ایک جیسے ہیں۔



شکل 3.35: بلندی اور سمتی رفتار (برائے مثال 3.22)

□

فنیات انتہائی کلیر پر حرکت کی نقل
مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$

کو کمپیوٹر پر نقطہ ترسیم²⁴ کریں جو لمحہ t پر نقطہ $(x(t), y(t))$ دکھائے گی۔ نقطہ ترسیم لمحہ بالمحہ صورت حال دکھاتی ہے۔ یوں اگر $f(t)$ جسم کی بلندی کو ظاہر کرتا ہو تب $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ کی لمحاتی ترسیم جسم کی حقیقی حرکت دکھائے گی۔ مثال 3.22 کے لئے اس لمحاتی ترسیم کو پہلے $0 \leq t \leq 5$ اور بعد میں $0 \leq t \leq 10$ وقفے پر دیکھیں۔

دوسرا تجربہ کرنے کی خاطر مقدار معلوم مساوات

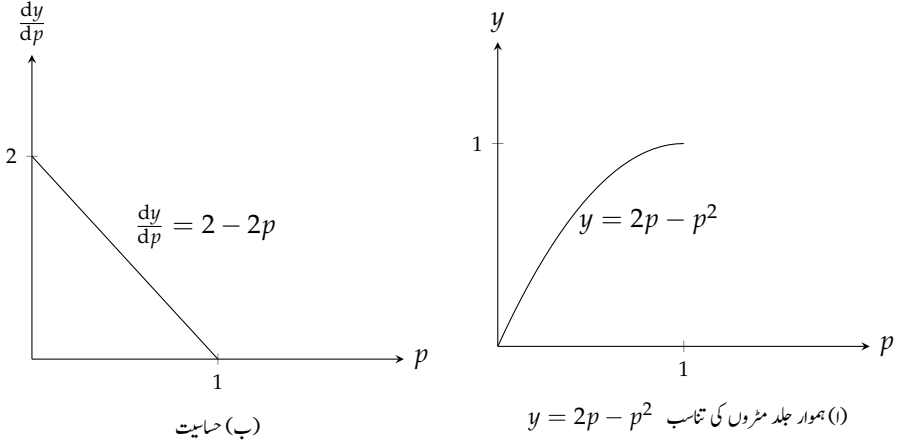
$$x(t) = t, \quad y(t) = 49t - 4.9t^2$$

کو نقطہ ترسیم کریں۔

حساسیت

اگر x میں چھوٹی تبدیلی سے تفاعل $f(x)$ میں بڑی تبدیلی رونما ہوتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x میں تبدیلی کے لئے تفاعل نسبتاً زیادہ حساس²⁵ ہے۔ تفرق $f'(x)$ تفاعل $f(x)$ کی حساسیت²⁶ کی ناپ ہے۔

²⁴dot graph
²⁵sensitive
²⁶sensitivity



شکل 3.36: مینڈل کے تجربہ نے جنیات کی بنیاد رکھی۔

مثال 3.23: تبدیلی کے لئے حساسیت
آسٹریا کے گرگر یوہان مینڈل (1822-1884) نے مٹر پر تجربہ کرتے ہوئے جنیات²⁷ کے میدان کی بنیاد ڈالی۔ ان کے نتائج کے مطابق اگر ہموار جلد والے (غالب²⁸) مٹروں کے جین²⁹ کی تعداد p ہو (جہاں p کی قیمت 0 تا 1 ہو سکتی ہے) اور غیر ہموار جلد والے (مغلوب³⁰) مٹروں کی جین کی تعداد $(1 - p)$ ہو تب مٹروں کی آبادی میں ہموار جلد مٹروں کی تناسب

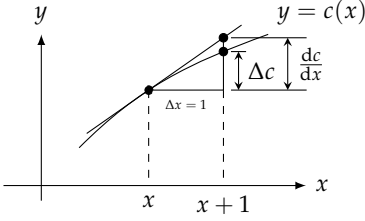
$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2$$

ہے۔

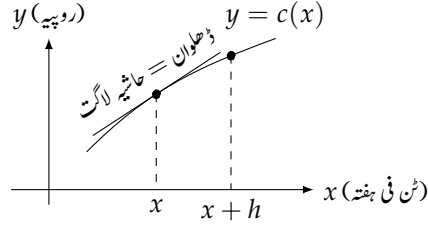
y بالقابل p کی ترسیم کے مطابق جب p کی قیمت کم ہو تب y زیادہ حساس ہوگا (شکل 3.36-i)۔ تفاعل y کے تفرق $\frac{dy}{dp}$ کی ترسیم سے بھی یہی ظاہر ہوتا ہے۔ جب p کی قیمت 0 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 2 کے قریب ہے اور جب p کی قیمت 1 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 0 کے قریب ہے (شکل 3.36-b)۔ □

جیسے تفرق کی بات کرتے ہوئے سستی رفتار اور اسراع کی اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں، اقتصادیات کی میدان میں ہم حاشیہ³¹ کی بات کرتے ہیں۔

genetics²⁷
dominant²⁸
gene²⁹
recessive³⁰
marginals³¹



(ب) $\Delta x = 1$ اضافی پیداوار کی اضافی لاگت Δc تقریباً $\frac{dc}{dx}$ کے برابر ہے۔



(i) ہفتہ وار پیداوار بالمتقابل لاگت

شکل 3.37: حاشیہ لاگت پیداوار

عمل پیداوار میں اشیاء پیدا کرنے کی لاگت $c(x)$ متغیر x کا متعلق ہے جہاں پیدا کردہ اشیاء کی تعداد x ہے۔ حاشیہ لاگت پیداوار³² سے مراد پیداوار کے لحاظ سے لاگت کی شرح تبدیلی $\frac{dc}{dx}$ ہے۔

مثال کے طور پر ایک ہفتہ میں x ٹن فولاد پیدا کرنے پر $c(x)$ روپیہ لاگت آتی ہے۔ اب $x+h$ ٹن فولاد پیدا کرنے پر زیادہ لاگت آئے گی اور لاگت میں اضافہ (تبدیلی) کو h سے تقسیم کرنے سے فی ہفتہ فی ٹن لاگت میں اوسط اضافہ ہو گا۔

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{ہفتہ میں } h \text{ ٹن اضافی فولاد پیدا کرنے سے لاگت میں اوسط اضافہ}$$

فی ہفتہ موجودہ پیداوار x ٹن ہونے کی صورت میں $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے اس نسبت کا حد اضافی فولاد پیدا کرنے کی حاشیہ لاگت دے گی (شکل 3.37-1)۔

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{حاشیہ لاگت پیداوار}$$

بعض اوقات ہم اضافی ایک اکائی پیداوار کی اضافی لاگت

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

کو ہی حاشیہ لاگت پیداوار کہتے ہیں جو x پر $\frac{dc}{dx}$ کی تخمینہ ہے۔ یہ قابل قبول اس لئے ہے کہ x کے نزدیک c کی ڈھلوان میں تبدیلی زیادہ نہیں ہوتی ہے لہذا یہاں $\Delta x = 1$ لیتے ہوئے حاصل سیکنٹ کی ڈھلوان کی قیمت حد $\frac{dc}{dx}$ کے قیمت کے بہت قریب ہو گی۔ عملاً x کی بڑی قیمتوں کے لئے یہ تخمینہ قابل قبول ہو گی (شکل 3.37-ب)۔

مثال 3.24: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x اشیاء پیدا کرنے پر

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

³² marginal cost of production
³³ tonne, 1000 kg

روپیہ لاگت آتی ہے جب x کی قیمت 8 تا 30 ہو۔ ابھی آپ روزانہ 10 اشیاء پیدا کرتے ہیں۔ روزانہ ایک اضافی شہ پیدا کرنے پر کتنی اضافی لاگت آئے گی؟
 حل: دس اشیاء بناتے ہوئے مزید ایک شہ پیدا کرنے پر تقریباً $c'(10)$ اضافی لاگت آئے گی

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

□

جو 195 روپیہ کے برابر ہے۔

اگرچہ حقیقی اعمال کے کلیات عموماً نہیں پائے جاتے ہیں، نظریہ اقتصادیات ہمیں متوقع نتائج جاننے میں مدد کرتا ہے۔ یہ نظریہ جن تفاعل کا ذکر کرتا ہے انہیں عموماً موزوں وقفہ پر کم درجے کی کثیر رکنیوں سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کبھی کثیر رکنی عموماً اس قابل ہوتی ہے کہ پیچیدہ مسئلے کو ظاہر کر سکے اور کبھی کثیر رکنی کا استعمال زیادہ مشکل بھی نہیں ہوتا ہے۔

مثال 3.25: حاشیہ شرح ٹیکس
 اگر آپ کی موجودہ آمدن پر حاشیہ شرح ٹیکس 28% ہو اور آپ کی آمدنی میں 10000 روپیہ کا اضافہ ہو تب آپ کو اضافی 2800 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ 28% حاشیہ ٹیکس کا یہ ہرگز مطلب نہیں ہے کہ آپ کو اپنی آمدن کا 28% بطور ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ آپ کی موجودہ آمدنی I پر آمدنی بڑھنے کے لحاظ سے ٹیکس کی شرح $\frac{dT}{dI} = 0.28$ ہے۔ آپ کو ہر اضافی ایک روپیہ کی آمدن پر 0.28 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اب ظاہر ہے کہ اگر آپ کی آمدن بہت بڑھ جائے تب آپ ٹیکس کے نئے قالب میں شامل ہوں جائیں گے جہاں حاشیہ شرح ٹیکس غالباً زیادہ ہو گا۔

□

مثال 3.26: حاشیہ اگر x ہزار مٹھائی فروخت کرنے سے

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

آمدنی حاصل ہو جہاں $20 \geq x \geq 5$ ہے تب 10 ہزار مٹھائی فروخت کرتے ہوئے حاشیہ آمدنی

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

ہو گی۔ حاشیہ لاگت کی طرح ایک اضافی اکائی فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو حاشیہ آمدنی پیش کرتی ہے۔ اگر آپ 10 ہزار مٹھائیاں فی ہفتہ فروخت کر رہے ہوں تب فی ہفتہ 11 ہزار مٹھائیاں فروخت کرنے سے آپ کی آمدنی میں درج ذیل روپیہ اضافہ متوقع ہو گا۔

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252$$

□

سوالات

محددی لکیر پر حرکت

سوال 3.121 تا سوال 3.126 میں $a \leq t \leq b$ کے لئے $s = f(t)$ محدودی لکیر پر ایک جسم کا مقام دیتی ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔

ا. دیے گئے وقفے پر جسم کا ہٹاؤ اور سمتی رفتار حاصل کریں۔

ب. اس وقفے کے آخری سروں پر جسم کی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

ج. جسم کب حرکت کی سمت تبدیل کرتا ہے (اگر ایسا کرتا ہو)؟

سوال 3.121: چاند پر آزادانہ گرنا $s = 0.8t^2$, $0 \leq t \leq 10$
جواب: (ا) 80 m , 8 ms^{-1} (ب) 0 ms^{-1} , 16 ms^{-1} ; 1.6 ms^{-2} , 1.6 ms^{-2} (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 3.122: مرغ پر آزادانہ گرنا $s = 1.86t^2$, $0 \leq t \leq 0.5$

سوال 3.123: $s = -t^3 + 3t^2 - 3t$, $0 \leq t \leq 3$
جواب: (ا) -9 m , -3 ms^{-1} (ب) 3 ms^{-1} , 12 ms^{-1} ; 6 ms^{-2} , -12 ms^{-2} (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 3.124: $s = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2$, $0 \leq t \leq 2$

سوال 3.125: $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}$, $1 \leq t \leq 5$
جواب: (ا) -20 m , -5 ms^{-1} (ب) 45 ms^{-1} , 0.2 ms^{-1} ; 140 ms^{-2} , $\frac{4}{25} \text{ ms}^{-2}$ (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 3.126: $s = \frac{25}{t+5}$, $-4 \leq t \leq 0$

سوال 3.127: s محور پر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ ہے۔ (ا) ان نقطوں پر اس جسم کی اسراع تلاش کریں جن پر جسم کی سمتی رفتار صفر ہو گی۔ (ب) جب جسم کی اسراع صفر ہو اس لمحے پر اس جسم کی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = 0$ تا $t = 2$ کے دوران یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔

جواب: (ا) $a(1) = -6 \text{ ms}^{-2}$, $a(3) = 6 \text{ ms}^{-2}$ (ب) $v(2) = 3 \text{ ms}^{-1}$ (ج) 6 m

سوال 3.128: وقت $t \geq 0$ پر s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = t^2 - 4t + 3$ ہے۔ (ا) جسم کی اسراع وہاں تلاش کریں جہاں جسم کی سمتی رفتار صفر ہے۔ (ب) جسم کب آگے رخ اور کب پیچھے رخ حرکت کرتی ہے؟ (ج) جسم کی سمتی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

آزادانہ گونا

سوال 3.129: مریخ اور مشتری کی سطح کے قریب آزادانہ گرنے کے مساوات بالترتیب $s = 1.86t^2$ اور $s = 11.44t^2$ ہیں جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ ساکن حال سے گرتے ہوئے کتنے وقت میں (مریخ اور مشتری میں) ایک جسم کی رفتار 27.8 m s^{-1} یعنی تقریباً 100 km h^{-1} ہو گی؟
جواب: مریخ: 7.5 s ، مشتری: 1.2 s

سوال 3.130: سطح چاند سے انتصابی رخ 25 m s^{-1} کی رفتار سے پھینکا گیا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر پہنچے گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچے پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ه. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟

سوال 3.131: سطح زمین پر ہوا کی غیر موجودگی میں سوال 3.130 کا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 4.9t^2$ بلندی پر ہو گا۔

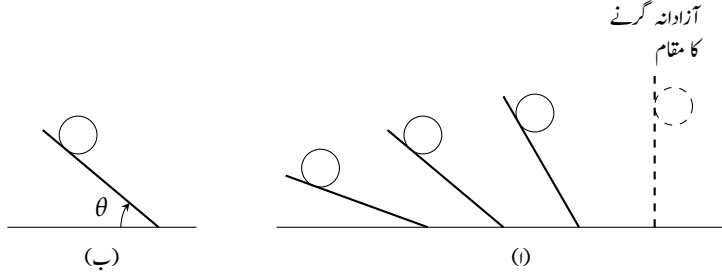
ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچے پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ه. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟



شکل 3.38: گلیلو کا تجربہ برائے آزادانہ گرنا (سوال 3.135)

جواب: (i) $2.4 - 9.8t \text{ ms}^{-1}$ ، -9.8 ms^{-2} (ب) 2.4 s (ج) 29.4 m (د) 0.7 s سیکنڈ اوپر جانب اور 4.2 s سیکنڈ نیچے رخ (ه) 4.9 s

سوال 3.132: ہوا سے خالی ایک دنیا پر ایک ٹھوس جسم کو انتہائی رخ 15 ms^{-1} کی ابتدائی رفتار سے پھینکا گیا۔ اس دنیا کے سطح پر ثقلی اسراع $g \text{ ms}^{-2}$ ہونے کی بنا t سیکنڈوں میں جسم $s = 15t - \frac{1}{2}gt^2$ میٹر بلندی تک پہنچے گا۔ یہ جسم بلند ترین مقام تک 20 سیکنڈوں میں پہنچتا ہے۔ اس دنیا میں ثقلی اسراع کتنی ہے؟

سوال 3.133: چاند پر ایک بندوق کو انتہائی رخ چلایا گیا۔ بندوق کی گولی t سیکنڈوں میں $s = 300t - 4.9t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ چاند پر یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنی دیر بعد سطح پر گرے گی؟ جواب: چاند پر 320 سیکنڈ، زمین پر 52 سیکنڈ؛ چاند پر 20287 میٹر، زمین پر 3297 میٹر

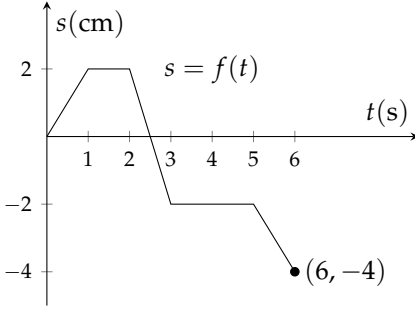
سوال 3.134: مشتری پر ہوا کی غیر موجودگی میں یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 11.44t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی جبکہ مریخ پر یہ $s = 300t - 1.86t^2$ میٹر کی بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنے بلندی تک پہنچے گی؟

سوال 3.135: گلیلو کا کلیہ برائے آزادانہ گرنا ایک پٹی کو مختلف زاویوں پر رکھتے ہوئے گلیلو نے اس پر گیند کی سمتی رفتار کو ناپتے ہوئے کلیہ اخذ کیا جس کی تحدیدی صورت سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کا کلیہ حاصل کرنا مقصد تھا (شکل 3.38)۔ گلیلو نے دیکھا کہ حرکت کے شروع سے t سیکنڈ بعد سمتی رفتار کی قیمت t کے راست متناسب ہے یعنی $v = kt$ لکھا جاسکتا ہے۔ مستقل k کی قیمت کا دارومدار پٹی کی ڈھلوان پر ہے۔

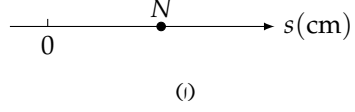
موجودہ علامت استعمال کرتے ہوئے (شکل 3.38-ب) درحقیقت گلیلو نے درج ذیل کلیہ حاصل کیا تھا جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔

$$v = (9.8 \sin \theta)t$$

(i) آزادانہ گرتے ہوئے گیند کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) سطح زمین کے قریب جسم کی اسراع کیا ہو گی؟
جواب: (i) $9.8t \text{ ms}^{-1}$ (ب) 9.8 ms^{-2}



(ب)

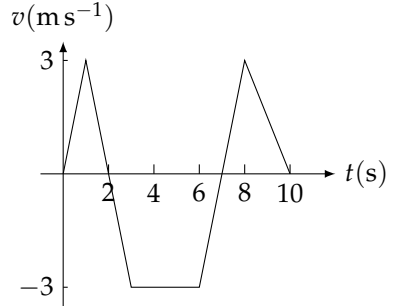


شکل 3.39: محوری کلیپر پر حرکت (سوال 3.138)

سوال 3.136: پی سا اگر گلیو پی سا سے توپ کی گولی 55 m بلندی سے گرنے دیتا تب t سیکنڈ بعد سطح زمین سے اس کی بلندی $s = 55 - 4.9t^2$ ہوتی۔ (i) لمحہ t پر توپ کی گولی کی سمتی رفتار، رفتار اور اسراع کیا ہوتے؟ (ب) یہ زمین تک کتنی دیر میں پہنچتا؟ (ج) زمین پر پہنچنے کے لمحہ پر اس کی سمتی رفتار کیا ہوتی؟

ترسیم سے حرکت کے بارے میں معلومات اخذ کرنا

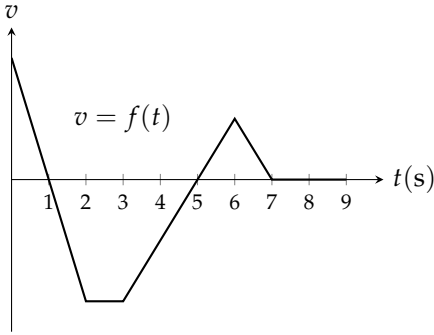
سوال 3.137: ایک محوری کلیپر پر ایک جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt} = f(t)$ کو درج ذیل شکل میں ترسیم کیا گیا ہے۔



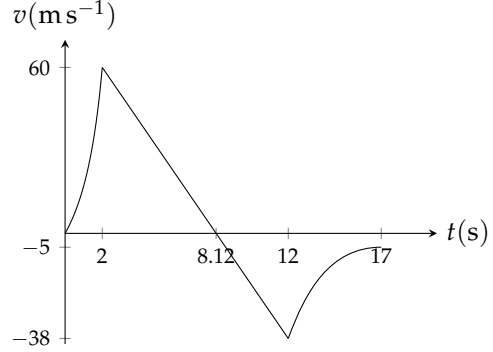
(i) جسم کب سست حرکت تبدیل کرتی ہے؟ (ب) کب جسم تقریباً مستقل رفتار سے حرکت کرتی ہے؟ (ج) دورانیہ $0 \leq t \leq 10$ کے لئے جسم کی رفتار ترسیم کریں۔ (د) جسم کی اسراع (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔ جواب: (i) $t = 2, t = 7$ (ب) $3 \leq t \leq 6$

سوال 3.138: ایک محوری کلیپر پر نقطہ N حرکت کرتا ہے۔ اس نقطے کا مقام بالمتقابل وقت بھی ترسیم کیا گیا ہے (شکل 3.39)۔ (i) N کب بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب دائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب ساکن ہے؟ (ب) اس کی سمتی رفتار اور رفتار (جہاں معین ہوں) ترسیم کریں۔

سوال 3.139: راکٹ میں چند سیکنڈوں کے لئے ایندھن ہوتا ہے جو اس کو کسی خاص بلندی تک پہنچاتا ہے جس کے بعد راکٹ کچھ دیر تک مزید بلند ہو کر واپس زمین کی جانب گرتا ہے۔ گرنے کے چند لمحات بعد خود کار پیراشوٹ کھلتا ہے جو راکٹ کو حفاظت کے ساتھ نہایت آہستہ



شکل 3.41: جسم کی حرکت (سوال 3.140)



شکل 3.40: راکٹ کی حرکت (سوال 3.139)

زمین تک پہنچتا ہے۔ ایک راکٹ کی حرکت کو شکل 3.40 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ (i) ایندھن ختم ہونے کے لمحہ راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ب) ایندھن کتنے سیکنڈوں تک کے لئے تھا؟ (ج) راکٹ کب بلند ترین مقام تک پہنچا اور بلند ترین مقام پر اس کی رفتار کتنی تھی؟ (د) پیراشوٹ کب کھلا اور اس لمحہ پر راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ه) پیراشوٹ کھلنے سے پہلے راکٹ کتنی دیر تک گرتا رہا؟ (و) راکٹ کی اسراع کب زیادہ سے زیادہ تھی؟ (ز) اسراع کب مستقل تھی اور اس کی قیمت کیا تھی؟
جواب: (i) 60 ms^{-1} (ب) 2 s (ج) $t = 8.12 \text{ s}$ ، $v = 0 \text{ ms}^{-1}$ (د) 12 s ، $v = -38 \text{ ms}^{-1}$ (ه) 10 s (و) 12 s (ز) 2 s پر

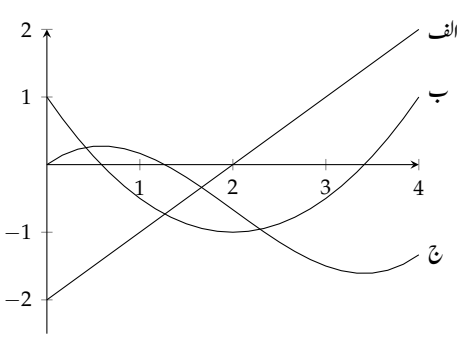
سوال 3.140: محوری کثیر پر ایک جسم کی رفتار $v = f(t)$ شکل 3.41 میں ترسیم کی گئی ہے۔ (i) کب جسم آگے حرکت، پیچھے حرکت کرتی ہے؟ اس کی رفتار کب تیز؟ کب کم ہوتی ہے؟ (ب) جسم کی اسراع کب مثبت؟ کب منفی؟ اور کب صفر ہے؟ (ج) جسم کی رفتار زیادہ سے زیادہ کب ہوتی ہے؟ (د) کم جسم لمحہ سے زیادہ دورانیے کے لئے ساکن رہتا ہے؟

سوال 3.141: ایک ٹرک $t = 0$ پر اڈے سے نکل کر دوسرے شہر مال پہنچا کر 15 گھنٹوں بعد اڈے پر واپس پہنچتا ہے۔ اس کے مقام بالمقابل کا شکل 3.42 میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 3.4 کی طرح $0 \leq t \leq 15$ کے لئے ٹرک کی سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ ترسیم کریں۔ اسی طریقے کو دہراتے ہوئے سمتی رفتار کی ترسیم سے ٹرک کی اسراع $a = \frac{dv}{dt}$ ترسیم کریں۔

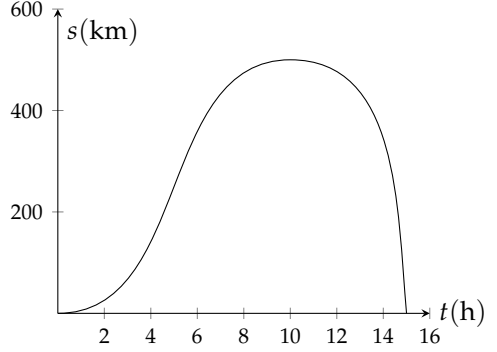
سوال 3.142: ایک جسم کا فاصلہ s ، رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ اور اسراع $a = \frac{dv}{dt}$ بالمقابل وقت t کو شکل 3.142 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ان میں کون سا ترسیم کون سا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: مقام بالمقابل وقت شکل-ج، رفتار بالمقابل وقت شکل-ب اور اسراع بالمقابل وقت شکل-ا ہیں۔

اقتصادیات

سوال 3.143: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x مشینوں کو پیدا کرنے پر $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$ روپیہ لاگت آتی ہے۔ (i) پہلے 100 مشینوں کی اوسط لاگت کیا ہوگی؟ (ب) اگر 100 پیدا کیے جا رہے ہوں تب حاشیہ لاگت کیا ہوگی؟ (ج)



شکل 3.43: اشکال برائے سوال 3.142



شکل 3.42: ٹرک کی حرکت (سوال 3.141)

دکھائیں کہ 100 مشین پیدا کرنے کے بعد ایک اضافی مشین پیدا کرنے پر لاگت تقریباً حاشیہ لاگت کے برابر ہے۔
جواب: (i) 110 روپیہ فی مشین (ب) 80 روپیہ (ج) 79.9 روپیہ

سوال 3.144: حاشیہ آمدنی فرض کریں کہ x کرسیاں فروخت کرنے سے $r(x) = 2000(1 - \frac{1}{x+1})$ روپیہ آمدنی ہوتی ہے۔ (i) x کرسیوں کی فروخت پر حاشیہ آمدنی کیا ہوگی؟ (ب) فی ہفتہ 5 کرسیوں کی بجائے 6 کرسیاں فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو $r'(x)$ سے حاصل کریں۔ (ج) $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے تقابل $r'(x)$ کے حد کی قیمت تلاش کریں۔ اس قیمت کا کیا مطلب ہوگا؟

مزید استعمال

سوال 3.145: جرثوموں پر تجربہ کے دوران ان کی خوراک میں جرثومہ مار دوا ملائی گئی۔ جرثوموں کی تعداد کچھ دیر تک بڑھتی رہی جس کے بعد ان کی تعداد کم ہونا شروع ہوئی۔ لمحہ t پر ان کی تعداد $b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$ تھی جہاں t کی اکائی گھنٹہ ہے۔
شرح نمو کو (i) $t = 0$ ؛ (ب) $t = 5$ ؛ اور $t = 10$ پر تلاش کریں۔
جواب: (i) 10^4 جرثومیں فی گھنٹہ؛ (ب) 0 جرثومیں فی گھنٹہ؛ (ج) -10^4 جرثومیں فی گھنٹہ

سوال 3.146: لمحہ t پر ایک ٹینکی سے پانی کا انخلا $Q(t) = 200(30 - t^2)$ لٹر ہے جہاں t کی اکائی منٹ ہے۔ دس منٹ بعد پانی کی انخلا کی شرح کیا ہے؟ پہلے دس منٹوں میں اوسط شرح اخراج کتنی ہے؟

سوال 3.147: ٹینکی کو خالی کرنے کے لئے گھر کے نلکے کھولے جاتے ہیں۔ نلکے کھولنے کے t منٹوں بعد ٹینکی میں پانی کی گہرائی $y = 150(1 - \frac{t}{60})^2$ سنی میٹر ہے۔ (i) لمحہ t پر ٹینکی سے پانی کی انخلا $\frac{dy}{dt}$ کیا ہوگی؟ (ب) پانی کی گہرائی کب زیادہ سے زیادہ تیزی سے کم ہوتی ہے؟ کب کم سے کم تیزی سے گہرائی کھٹتی ہے؟ ان لمحات پر $\frac{dy}{dt}$ کی قیمت کیا ہے؟ (ج) y اور $\frac{dy}{dt}$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں اور علامت اور قیمتوں کے ساتھ y کے تعلق پر تبصرہ کریں۔

جواب: (i) $5\left(\frac{t}{60} - 1\right)$ (ب) پر گہرائی تیز ترین گھٹتی ہے جب شرح $\frac{dy}{dt} = -5$ ہے اور $t = 60$ پر گھٹنے کی کم تر شرح $\frac{dy}{dt} = 0$ ہو گی۔

سوال 3.148: گول غبارے کا حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ رداس r کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ (i) رداس کے ساتھ حجم کی تبدیلی کی شرح $r = 10$ cm پر کیا ہو گی؟ (ب) اگر رداس 10 cm سے 12 cm ہو تب حجم میں تبدیلی کتنی ہو گی؟

سوال 3.149: پرواز سے پہلے ہوائی جہاز زمین پر دوڑ کر ایک مخصوص رفتار تک پہنچتا ہے۔ زمین پر دوڑ کے دوران ایک جہاز $D = \frac{10}{9}t^2$ فاصلہ طے کرتا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ اڑنے کے لئے درکار رفتار 200 km h^{-1} ہے۔ جہاز کتنے وقت میں اڑ پاتا ہے اور اڑنے سے پہلے یہ زمین پر کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟
جواب: جہاز 25 سیکنڈ بعد اڑتا ہے اور جس دوران یہ 694 m فاصلہ طے کرتا ہے۔

سوال 3.150: جزیرہ ہوائی کی آتش فشاں پہاڑی 1959 نومبر کے مہینے میں جزیرہ ہوائی کے ایک آتش فشاں پھٹ پڑا اور ہوا میں 580 m کی بلندی تک لاوا اگلنے لگا جو عالمی رکارڈ ہے۔ لاوا کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.151 تا 3.154 میں s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام لمحہ t پر تعین کر تفاعل $s = f(t)$ دیتا ہے۔ اس تفاعل کو سمتی رفتار تفاعل $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ اور تفاعل اسراع $a = \frac{dv}{dt} = f''(t)$ کے ساتھ اکٹھے ترسیم کریں۔ v اور a کی قیمتوں اور علامت کے لحاظ سے s کے رویہ پر بحث کریں۔ بحث میں درج ذیل شامل کریں۔

ا. کب جسم لمحاتی طور پر ساکن ہے؟

ب. کب جسم بائیں (یا نیچے) اور کب یہ دائیں (یا اوپر) رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. یہ سمت کو کب تبدیل کرتا ہے؟

د. اس کی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

ه. یہ کب تیز تر اور کب آہستہ تر حرکت کرتا ہے؟

و. مبداء سے جسم دور ترین کب ہوتا ہے؟

سوال 3.151: $s = 200t - 16t^2$, $0 \leq t \leq 12.5$

سوال 3.152: $s = t^2 - 3t + 2$, $0 \leq t \leq 5$

جواب: (i) $t = 6.25$ s؛ (ب) $[0, 6.25]$ پر اوپر رخ اور $(6.25, 12.5]$ پر نیچے رخ؛ (ج) $t = 6.25$ s؛ (د) $(6.25, 12.5]$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $[0, 6.25]$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (د) $t = 0, 12.5$ پر تیز تر اور $t = 6.25$ پر آہستہ ترین؛ (س) $t = 6.25$ s

سوال 3.153: $s = t^3 - 6t^2 + 7t$, $0 \leq t \leq 4$

سوال 3.154: $s = 4 - 7t + 6t^2$, $0 \leq t \leq 4$

جواب: (i) $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ ؛ (ب) $(\frac{6 - \sqrt{15}}{3}, \frac{6 + \sqrt{15}}{3})$ پر بائیں رخ اور $(\frac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4]$ \cup $[0, \frac{6 - \sqrt{15}}{3})$ پر دائیں رخ؛ (ج) $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ ؛ (د) $(\frac{6 - \sqrt{15}}{3}, 2) \cup (\frac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4]$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $(2, \frac{6 + \sqrt{15}}{3}) \cup [0, \frac{6 - \sqrt{15}}{3})$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (س) $t = 0, 4$ پر تیز ترین اور $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ پر آہستہ ترین؛ (د) $t = \frac{6 + \sqrt{15}}{3}$

3.4 ٹکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقیاتی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں چھ ٹکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

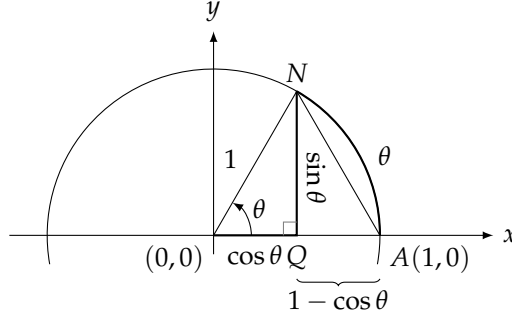
ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہوگی۔ چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$



شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $\theta > 0$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$ لکھی جاسکتی ہے۔

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہذا

$$\sin^2 \theta < \theta^2, \quad (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جاسکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

$$|\sin \theta| < |\theta|, \quad |1 - \cos \theta| < |\theta|$$

یعنی

$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

□

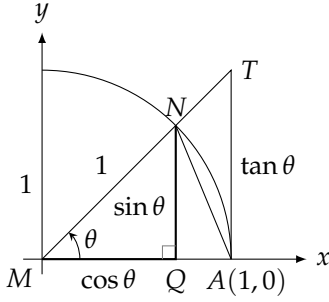
مثال 3.27: دکھائیں کہ $\theta = 0$ پر $\sin \theta$ اور $\cos \theta$ استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

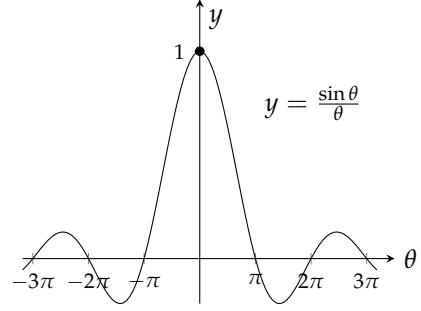
حل: $\theta \rightarrow 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $-|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ 3.4 سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔

□

تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈین میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta = 0$ پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 1$ ہو گا۔



شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4

شکل 3.45: تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.4:

$$(3.4) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے})$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔ یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} < \Delta MAT \text{ رقبہ} < \Delta MAN \text{ خطہ}$$

ہے۔ ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\sin \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\Delta MAN \text{ خطہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2}(1)^2 \theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\Delta MAT \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\tan \theta) = \frac{1}{2} \tan \theta$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$$

جس کو $\frac{1}{2} \sin \theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

حاصل ہو گا۔ اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

چونکہ $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$ ہے لہذا مسئلہ پتھ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin \theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہذا $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم y محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔ اس تشاکلی کی بنا بایں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 148 پر مسئلہ 2.5 کے تحت $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم تکنیکیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر تکنیکیاتی حد تلاش کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ہے۔
حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \quad \left(\theta = \frac{h}{2}\right) \\ &= -(1)(0) = 0 \end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل $y = \sin \theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\
 &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کو سائن تفاعل ہے۔

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$\begin{aligned}
 y = x^2 - \sin x : \quad \frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق}) \\
 &= 2x - \cos x
 \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}
 y = x^2 \sin x : \quad \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= x^2 \cos x + 2x \sin x
 \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}
 y = \frac{\sin x}{x} : \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\
 &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}
 \end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ہوتا ہے اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \quad (\text{تفرق کی تعریف}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \quad (\text{مثال 3.28 اور مسئلہ 3.4}) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

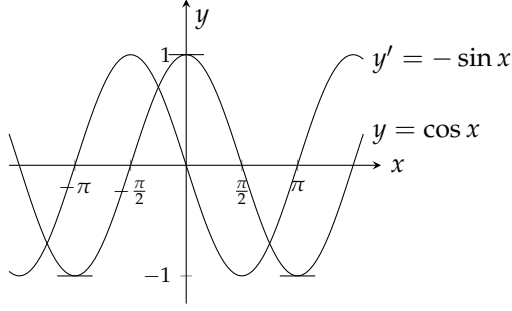
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x = -\pi, 0, \pi$) وہاں اس کا تفرق یعنی $y' = -\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔ اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

ا.

$$\begin{aligned} y &= 5x + \cos x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x \end{aligned}$$



شکل 3.47: $y = \cos x$ کی ڈیروان تفاعل $y' = -\sin x$ دیتی ہے۔

ب۔

$$\begin{aligned}
 y &= \sin x \cos x \\
 \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
 &= \cos^2 x - \sin^2 x
 \end{aligned}$$

ج۔

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\
 &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
 &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
 &= \frac{1}{1 - \sin x}
 \end{aligned}$$

□

سادہ ہارمونی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دھرتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونی حرکت کی ایک مثال ہے۔ اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔ لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5 \cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} s &= 5 \cos t && \text{ہم مقام} \\ v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = 5 \frac{d}{dt}(\cos t) = -5 \sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \frac{d}{dt}(\sin t) = -5 \cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں} \end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ s محور پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا محیط 5 ہے جبکہ اس کی تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کی تعدد ہے۔

2. تفاعل $\sin t$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو گا۔ یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \pm 1$ ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع $a = -5 \cos t$ اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\cos t = 0$ ہو گا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔ کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہو گا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہو گا۔ اسراع کی مطلق قیمت مبداء سے دور ترین نقطے پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $\cos t = \pm 1$ ہو گا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔ گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{d^3 s}{dt^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو جھٹکا³⁴ کہتے ہیں۔ اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب لمحہ t پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}$$

□

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔ اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔ یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{dg}{dt} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j &= \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) \\ &= 5 \sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\sin t = \pm 1$ ہو جو مہدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \csc x &= \frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x\end{aligned}\tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔ سوال 3.221 اور سوال 3.222 میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر $y = \sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
 y &= \sec x \\
 y' &= \sec x \tan x && \text{(مساوات 3.5)} \\
 y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\
 &= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
 &= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\
 &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
 \end{aligned}$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\frac{d}{dx}(3x + \cot x) = 3 + \frac{d}{dx}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{d}{dx}(2 \csc x) = 2 \frac{d}{dx}(\csc x) \\
 &= 2(-\csc x \cot x) = -2 \csc x \cot x
 \end{aligned}$$

□

ٹکونیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی ٹکونیاتی تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔ اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x

کی قیمت π کا عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تقابل کے لئے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ہو گا۔ نتیجتاً ہم تکنیکی تقابل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \quad \text{مثال 3.36}$$

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش
 θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ مطمئن ہو گی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \theta = x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1, \theta = 7x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1, \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں $x \rightarrow 0$ کرنا $\theta \rightarrow 0$ کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔
 مثال 3.37:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x} \quad (\text{تقابل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے}) \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\ &= \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

ب۔

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) \quad (\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \\ &= \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{1}{\cos 0} \right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

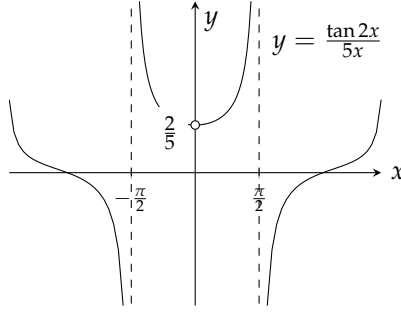
\square شکل 3.48 سے رجوع کریں۔

مثال 3.38: درج ذیل میں $\theta = t - \frac{\pi}{2}$ لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔ یوں $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ سے مراد $\theta \rightarrow 0$ ہو گا۔

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t - \frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

\square

احصاء کی میدان کے علاوہ تقابل $\frac{\sin x}{x}$ دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔



شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

سوالات

سوال 3.155 تا سوال 3.166 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 3.155: $y = -10x + 3 \cos x$
جواب: $y' = -10 - 3 \sin x$

سوال 3.156: $y = \frac{2}{x} + 3 \sin x$

سوال 3.157: $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
جواب: $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

سوال 3.158: $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال 3.159: $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
جواب: $y' = 0$

سوال 3.160: $y = (\sin x + \cos x) \sec x$

سوال 3.161: $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$
جواب: $\frac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$

سوال 3.162: $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

سوال 3.163: $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$
جواب: $4 \tan x \sec x - \csc^2 x$

سوال 3.164: $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

سوال 3.165: $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$
جواب: $x^2 \cos x$

سوال 3.166: $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

سوال 3.167 تا سوال 3.170 میں $\frac{ds}{dt}$ تلاش کریں۔

سوال 3.167: $s = \tan t - t$
جواب: $\sec^2 t - 1$

سوال 3.168: $s = t^2 - \sec t + 1$

سوال 3.169: $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$
جواب: $\frac{-2 \csc t \cot t}{(1 - \csc t)^2}$

سوال 3.170: $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

سوال 3.171 تا سوال 3.174 میں $\frac{dr}{d\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 3.171: $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$
جواب: $-\theta(\theta \cos \theta + 2 \sin \theta)$

سوال 3.172: $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$

سوال 3.173: $r = \sec \theta \csc \theta$
جواب: $\sec \theta \csc \theta (\tan \theta - \cot \theta) = \sec^2 \theta - \csc^2 \theta$

سوال 3.174: $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

سوال 3.175 تا سوال 3.178 میں $\frac{dp}{dq}$ تلاش کریں۔

سوال 3.175: $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$
جواب: $\sec^2 q$

سوال 3.176: $p = (1 + \csc q) \cos q$

$$p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q} \quad \text{سوال 3.177}$$

جواب: $\sec^2 q$

$$p = \frac{\tan q}{1 + \tan q} \quad \text{سوال 3.178}$$

$$\text{سوال 3.179: } y = \csc x \text{ (i) اور } y = \sec x \text{ (ب) کے لئے } y'' \text{ تلاش کریں۔}$$

جواب: (i) $2 \csc^3 x - \csc x$ ، (ب) $2 \sec^3 x - \sec x$

$$\text{سوال 3.180: } y = -2 \sin x \text{ (i) اور } y = 9 \cos x \text{ (ب) کے لئے } y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} \text{ تلاش کریں۔}$$

سوال 3.181 تا سوال 3.186 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{سوال 3.181}$$

جواب: 0

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)} \quad \text{سوال 3.182}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sec\left[\cos x + \pi \tan\left(\frac{\pi}{4 \sec x}\right) - 1\right] \quad \text{سوال 3.183}$$

جواب: -1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x} \quad \text{سوال 3.184}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \quad \text{سوال 3.185}$$

جواب: 0

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \theta}{\sin \theta}\right) \quad \text{سوال 3.186}$$

سوال 3.187 تا سوال 3.202 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2} \theta}{\sqrt{2} \theta} \quad \text{سوال 3.187}$$

جواب: 1

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل}) \quad \text{سوال 3.188}$$

سوال 3.189: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{4y}$
جواب: $3/4$

سوال 3.190: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$

سوال 3.191: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$
جواب: 2

سوال 3.192: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\tan t}$

سوال 3.193: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$
جواب: $1/2$

سوال 3.194: $\lim_{x \rightarrow 0} 6x^2 \cot x \csc 2x$

سوال 3.195: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x \cos x}{\sin x \cos x}$
جواب: 2

سوال 3.196: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

سوال 3.197: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$
جواب: 1

سوال 3.198: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

سوال 3.199: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta}$
جواب: $1/2$

سوال 3.200: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

سوال 3.201: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$
جواب: $3/8$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y} : \text{سوال 3.202}$$

مماسی خطوط

سوال 3.203 تا سوال 3.206 میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔ تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

$$y = \sin x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi, 0, 3\pi/2 : \text{سوال 3.203}$$

$$y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, 0, \pi/3 : \text{سوال 3.204}$$

$$y = \sec x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, \pi/4 : \text{سوال 3.205}$$

$$y = 1 + \cos x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi/3, 3\pi/2 : \text{سوال 3.206}$$

کیا سوال 3.207 تا سوال 3.210 کا دائرہ کار $0 \leq x \leq 2\pi$ میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

$$y = x + \sin x : \text{سوال 3.207}$$

جواب: ہاں، نقطہ $x = \pi$ پر

$$y = 2x + \sin x : \text{سوال 3.208}$$

$$y = x - \cot x : \text{سوال 3.209}$$

جواب: نہیں

$$y = x + 2 \cos x : \text{سوال 3.210}$$

سوال 3.211: منحنی $y = \tan x$ پر $-\pi/2 < x < \pi/2$ کے سچ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط

$y = 2x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

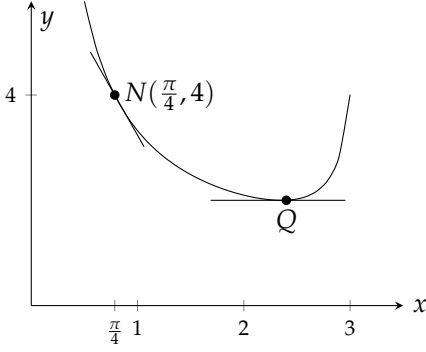
جواب: $(-\pi/4, -1); (\pi/4, 1)$

سوال 3.212: منحنی $y = \cot x, 0 < x < \pi$ پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = -x$ کے متوازی

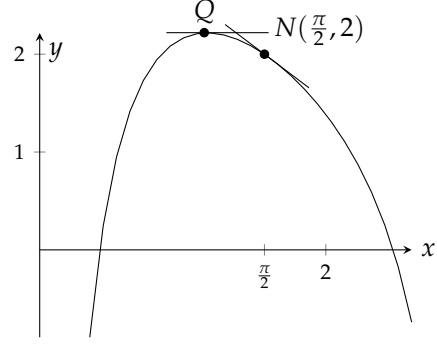
ہے۔ منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 3.213: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.49 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

$$y = 4 - \sqrt{3} \quad (ب), \quad y = -x + \pi/2 + 2 \quad (ا) : \text{جواب}$$



شکل 3.50: $y = 1 + \sqrt{2} \csc x + \cot x$ تفاعل کی منحنی (سوال 3.214)



شکل 3.49: $y = 4 + \cot x - 2 \csc x$ تفاعل کی منحنی (سوال 3.213)

سوال 3.214: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.50 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سادہ ہارمونی حرکت

سوال 3.215 تا سوال 3.215 میں محوری لکیر s پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ $t = \pi/4$ سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھکا تلاش کریں۔

سوال 3.215: $s = 2 - 2 \sin t$
جواب: $-\sqrt{2} \text{ m s}^{-1}, \sqrt{2} \text{ m s}^{-1}, \sqrt{2} \text{ m s}^{-2}, \sqrt{2} \text{ m s}^{-3}$

سوال 3.216: $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال 3.217: کیا c کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: $c = 9$

سوال 3.218: کیا b کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر (i) استمراری (ب) قابل تفریق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

سوال 3.219: $\frac{d^{999}}{dx^{999}}(\cos x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sin x$

سوال 3.220: $\frac{d^{725}}{dx^{725}}(\sin x)$ تلاش کریں۔

سوال 3.221: x کے لحاظ سے $\sec x$ (ا) اور $\csc x$ (ب) کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

سوال 3.222: x کے لحاظ سے $\cot x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.223: $-\pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \cos x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$ لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

اب $h = -1, -0.5, -0.3$ کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \rightarrow 0^+$ اور $h \rightarrow 0^-$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال 3.224: وسطی فرق حاصل تقسیم وسطی تفریقی حاصل تقسیم³⁵

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

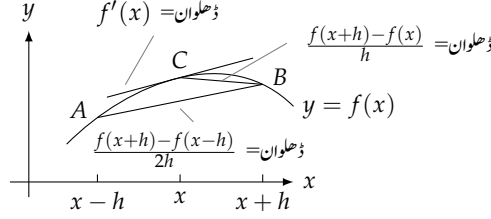
کو اعدادی تراکیب میں $f'(x)$ کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے یہ تفاعل کا تفرق دیتی ہے جو h کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم³⁶

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سے بہتر ہوتا ہے (شکل 3.51)۔ (ا) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \sin x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = \cos x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = \cos x$ اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

centered difference quotient³⁵
Fermat's difference quotient³⁶



شکل 3.51: فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم سے وسطی تفریقی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 3.223 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔
(ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \cos x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = -\sin x$ تک پہنچتا ہے،
لیتے ہوئے وقفہ $h = 1, 0.5, 0.3$ پر $y = -\sin x$ اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 3.223 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 3.225: وسطی تفریقی حاصل تقسیم کے لئے انتباہ بعض اوقات x پر ناقابل تفرق $f(x)$ کے لئے بھی وسطی تفریقی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کا $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = |x|$ لیں اور

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال 3.226: دائرہ کار $(-\pi/2, \pi/2)$ پر $y = \tan x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.227: دائرہ کار $0 < x < \pi$ پر $y = \cot x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.228: وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر $y = \frac{\sin 2x}{x}$ ، $y = \frac{\sin x}{x}$ اور $y = \frac{\sin 4x}{x}$ کو اکٹھے ترسیم کریں۔ y محور کو یہ ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتا نظر آتی ہیں؟ کیا یہ ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے

آپ $y = \frac{\sin 5x}{x}$ اور $y = \frac{\sin(-3x)}{x}$ کی ترسیات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟ k کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے $y = \frac{\sin kx}{x}$ سے کیا توقع کیا جاسکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 3.229: درجات بالمتقابل ریڈیئن x کو درجات میں ناپتے ہوئے $\sin x$ اور $\cos x$ کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$ کا اندازہ لگائیں۔ اس اندازے کا $\frac{\pi}{180}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا اس حد کی قیمت $\frac{\pi}{180}$ کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جاسکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

ج. اب $\sin x$ کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے $\sin x$ کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ہ. بلند رتبہ تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔ $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ کے لئے y'' اور y''' تلاش کریں۔

3.5 زنجیری قاعدہ

ہم $\sin x$ اور $x^2 - 4$ کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً $\sin(x^2 - 4)$ کا تفرق زنجیری قاعدہ³⁷ کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہوگا۔ احصاء میں تفرق کے حصول کے لئے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

³⁷ chain rule

مثال 3.39: تعامل $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ حقیقتاً تعامل $y = 2u$ اور $u = 3x - 5$ کا مرکب ہے۔ ان تینوں تعامل کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟
حل: ان تعامل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = 6, \quad \frac{dy}{du} = 2, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

چونکہ $6 = 2 \cdot 3$ ہے لہذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

□

کیا تعلق

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ایک اتفاق ہے؟ اگر ہم تفرق کو شرح تبدیلی تصور کریں اور $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ ہوں تب اگر u سے y دگنا تبدیل ہوتا ہو اور x سے y تین گنا تبدیل ہوتا ہو تب ہم توقع کریں گے کہ x سے y چھ گنا تبدیل ہو گا۔

آئیں دوسرا تعامل لے کر دیکھیں۔

مثال 3.40: $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$ کو $y = u^2$ اور $u = 3x^2 + 1$ کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

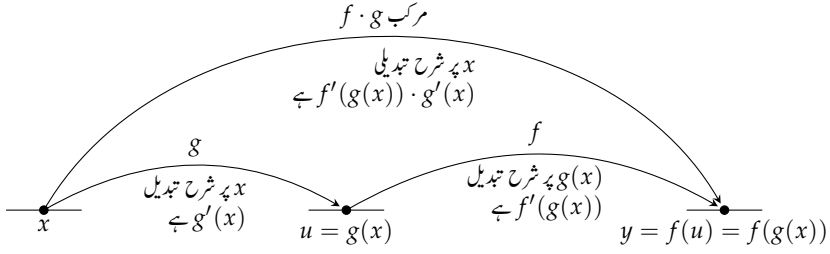
$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں اور ایک بار پھر درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



شکل 3.52: $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب x پر مرکب $f \cdot g$ کا تفرق دے گا۔

□

x پر مرکب تقابل $f(g(x))$ کا تفرق $g(x)$ پر f کا تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔ اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل 3.52)۔

مسئلہ 3.5: زنجیری قاعدہ
اگر $u = g(x)$ پر $f(u)$ قابل تفرق ہو اور x پر $g(x)$ قابل تفرق ہو تب x پر مرکب تقابل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(3.6) \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ہو گا۔ لیبنٹز طرز لکھائی میں اگر $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ ہوں تب

$$(3.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ہو گا جہاں $\frac{dy}{du}$ کو $u = g(x)$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدہ کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر $\Delta x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے زنجیری قاعدے کو ثابت نہیں کیا جاسکتا ہے چونکہ عین ممکن ہے کہ x میں تبدیلی سے u میں تبدیلی Δu صفر ہو۔ زنجیری قاعدہ ثابت کرنے کی خاطر ہمیں حصہ 4.7 میں پیش کیے گئے تصورات کی ضرورت ہوگی۔ یہ ثبوت اس وقت پیش کیا جائے گا جب ہم اس کو سمجھنے کے قابل ہوں۔

مثال 3.41: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: یہاں $y = f(g(x))$ یعنی $u = x^2 + 1$ اور $f(u) = \sqrt{u}$ ہیں۔ چونکہ f اور g کے تفرق

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ہیں لہذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

□

باہر، اندر قاعدہ

اگر $y = f(g(x))$ ہو تب مساوات 3.7 درج ذیل کہتی ہے

$$(3.8) \quad \frac{dy}{dx} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

جہاں دائیں طرف f کی اندرون کو نظر انداز کر کے جوں کا توں رکھ کر f کا تفرق لے کر اس کو f کی اندرون کے تفرق کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ یوں پہلے بیرونی تفاعل کا تفرق اور بعد میں اندرونی تفاعل کا تفرق لیا جاتا ہے۔

مثال 3.42:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sin}_{\text{بیرونی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{اندرونی}} = \underbrace{\cos}_{\text{تفرق بیرونی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{اندرونی نظر انداز}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{تفرق اندرونی}}$$

□

زنجیری قاعدہ کا بار بار اطلاق

بعض اوقات ہم زنجیری قاعدہ کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.43: $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ کا تفرق تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) \quad u = 5 - \sin 2t \text{ لے کر } \tan u \text{ کا تفرق} \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - (\cos 2t) \cdot \frac{d}{dt}(2t)) \quad u = 2t \text{ لے کر } 5 - \sin u \text{ کا تفرق} \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\
 &= -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t)
 \end{aligned}$$

□

زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کیے کلیات
تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔ اگر f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = f(u)$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال کے طور پر اگر u تغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور $y = u^n$ ہو جہاں n عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}(u^n) \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= nu^{n-1} \frac{du}{dx}
 \end{aligned}$$

قاعدہ 3.8: طاقت کا زنجیری قاعدہ

اگر $u(x)$ قابل تفرق ہو اور n عدد صحیح ہو تب u^n قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$(3.9) \quad \frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

مثال 3.44:

ا.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin^5 x &= 5 \sin^4 x \frac{d}{dx} (\sin x) \\ &= 5 \sin^4 x \cos x\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (2x + 1)^{-3} &= -3(2x + 1)^{-4} \frac{d}{dx} (2x + 1) \\ &= -3(2x + 1)^{-4} (2) \\ &= -6(2x + 1)^{-4}\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6 \cdot \frac{d}{dx} (5x^3 - x^4) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6 (5 \cdot 3x^2 - 4x^3) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3)\end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3x - 2} \right) &= \frac{d}{dx} (3x - 2)^{-1} \\ &= -1(3x - 2)^{-2} \frac{d}{dx} (3x - 2) \\ &= -1(3x - 2)^{-2} (3) \\ &= -\frac{3}{(3x - 2)^2}\end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں تفاعل $\sin^5 x$ استعمال کیا گیا جو $(\sin x)^5$ لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

مثال 3.45: درجات بالمتقابل ریڈینٹس
یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی پیمائش ریڈینٹس میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ

ان دونوں میں فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ ریڈیئن $\pi = 180^\circ$ ہوتا ہے لہذا ریڈیئن $\frac{\pi x}{180} = x^\circ$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos(x^\circ)$$

ہو گا۔ اسی طرح $\cos(x^\circ)$ کا تفرق $-\frac{\pi}{180} \sin(x^\circ)$ ہو گا۔

زاویہ کی پیمائش درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کی ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا $\frac{\pi}{180}$ کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی زیادہ آسان ہو گی۔ □

مثال 3.46: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟

حل: ہم پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی s ہو تب اس کا حجم $H = s^3$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s اور H متغیر t (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کے راست متناسب ہے۔ یہ مفروضہ اس لئے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخل ہوتی ہے۔ یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{dH}{ds} = -k(6s^2), \quad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔ تناسب کا مستقل k مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً آرد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ ابتدائی حجم کو H_0 لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$H = s^3, \quad \frac{dH}{dt} = -k(6s^2)$$

$$H = H_0 \quad \text{پہلے} \quad t = 0$$

$$H = \frac{3}{4}H_0 \quad \text{پہلے} \quad t = 1 \text{ h}$$

اب ہمیں $H = 0$ پہلے t تلاش کرنا ہو گا۔

ہم $H = s^3$ کا تفرق زنجیری قاعدہ سے t کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{dH}{dt} = 3s^2 \frac{ds}{dt}$$

تبدیلی کی شرح $-k(6s^2)$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$3s^2 \frac{ds}{dt} = -6ks^2$$

$$\frac{ds}{dt} = -2k$$

حاصل کرتے ہیں۔ اطراف کی لمبائی مستقل شرح $2k$ سے کم ہو رہی ہے۔ یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی s_0 ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی $s_1 = s_0 - 2k$ ہو گی جس سے

$$2k = s_0 - s_1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پگھلنے کا وقت $2kt = s_0$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی:

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}} = (\frac{3}{4})^{1/3} \approx 0.91$$

ہے لہذا پگھلنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{1}{1 - 0.91} \approx 11 \text{ h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر $\frac{1}{4}$ حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لئے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتی۔ ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور اس کو مزید بہتر کس طرح بنایا جاسکتا ہے۔

سوالات

سوال 3.230 تا سوال 3.237 میں $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ دیے گئے ہیں۔ $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$ تلاش کریں۔

سوال 3.230: $y = 6u - 9$, $u = \frac{1}{2}x^4$
جواب: $12x^3$

سوال 3.231: $y = 2u^3$, $u = 8x - 1$

سوال 3.232: $y = \sin u$, $u = 3x + 1$
جواب: $3 \cos(3x + 1)$

سوال 3.233: $y = \cos u$, $u = -\frac{x}{3}$

سوال 3.234: $y = \cos u$, $u = \sin x$
جواب: $-\sin(\sin x) \cos x$

سوال 3.235: $y = \sin u$, $u = x - \cos x$

سوال 3.236: $y = \tan u$, $u = 10x - 5$
جواب: $10 \sec^2(10x - 5)$

سوال 3.237: $y = -\sec u$, $u = x^2 + 7x$

سوال 3.238 تا سوال 3.247 میں متبادل کو $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ صورت میں لکھ کر $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 3.238: $y = (2x + 1)^{-7}$
جواب: $u = 2x + 1$ لیتے ہوئے $y = u^5$ اور $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$ ہو گا۔

سوال 3.239: $y = (4 - 3x)^9$

سوال 3.240: $y = (1 - \frac{x}{7})^{-7}$
جواب: $u = (1 - x/7)$ لے کر، $y = u^{-7}$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot (\frac{1}{7}) = (1 - x/7)^{-8}$ ،

سوال 3.241: $y = (\frac{x}{2} - 1)^{-10}$

سوال 3.242: $y = (\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x})^4$
جواب: $u = x^2/8 + x - 1/x$ لے کر، $y = u^4$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 4(x^2/8 + x - 1/x)^3(x/4 + 1 + 1/x^2)$

سوال 3.243: $y = (\frac{x}{5} + \frac{1}{5x})^5$

سوال 3.244: $y = \sec(\tan x)$

جواب: $u = \tan x$ لے کر $y = \sec u$ اور

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x) = \sec(\tan x) \tan(\tan x) \sec^2 x$$

سوال 3.245: $y = \cos(\pi - \frac{1}{x})$

سوال 3.246: $y = \sin^3 x$

جواب: $u = \sin x$ لے کر $y = u^3$ اور $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 3u^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x$

سوال 3.247: $y = 5 \cos^{-4} x$

سوال 3.248 تا سوال 3.267 میں متقابل کا تفریق تلاش کریں۔

سوال 3.248: $p = \sqrt{3-t}$

جواب: $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$

سوال 3.249: $q = \sqrt{2r-r^2}$

سوال 3.250: $s = \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \cos 5t$

جواب: $\frac{4}{\pi} (\cos 3t - \sin 5t)$

سوال 3.251: $s = \sin(\frac{3\pi t}{2}) + \cos(\frac{3\pi t}{2})$

سوال 3.252: $r = (\csc \theta + \cot \theta)^{-1}$

جواب: $\frac{\csc \theta}{\cot \theta + \csc \theta}$

سوال 3.253: $r = -(\sec \theta + \tan \theta)^{-1}$

سوال 3.254: $y = x^2 \sin^4 x + x \cos^{-2} x$

جواب: $2x \sin^4 x + 4x^2 \sin^3 x \cos x + \cos^{-2} x + 2x \cos^{-3} x \sin x$

سوال 3.255: $y = \frac{1}{x} \sin^{-5} x - \frac{x}{3} \cos^3 x$

سوال 3.256: $y = \frac{1}{21} (3x-2)^7 + (4 - \frac{1}{2x^2})^{-1}$

جواب: $(3x-2)^6 - \frac{1}{x^3(4 - \frac{1}{2x^2})^2}$

سوال 3.257: $y = (5-2x)^{-3} + \frac{1}{8}(\frac{2}{x} + 1)^4$

سوال 3.258: $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$
 جواب: $\frac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

سوال 3.259: $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$

سوال 3.260: $h(x) = x \tan(2\sqrt{x}) + 7$
 جواب: $\sqrt{x} \sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$

سوال 3.261: $k(x) = x^2 \sec(\frac{1}{x})$

سوال 3.262: $f(\theta) = (\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta})^2$
 جواب: $\frac{2 \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2}$

سوال 3.263: $g(t) = (\frac{1 + \cot t}{\sin t})^{-1}$

سوال 3.264: $r = \sin(\theta^2) \cos(2\theta)$
 جواب: $\frac{dr}{d\theta} = -2 \sin(\theta^2) \sin 2\theta + 2\theta \cos(2\theta) \cos(\theta^2)$

سوال 3.265: $r = \sec \sqrt{\theta} \tan(\frac{1}{\theta})$

سوال 3.266: $q = \sin(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$
 جواب: $\frac{dq}{dt} = (\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}}) \cos(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$

سوال 3.267: $q = \cot(\frac{\sin t}{t})$

سوال 3.268 تا سوال 3.277 میں تلاش کریں۔ $\frac{dy}{dt}$

سوال 3.268: $y = \sin^2(\pi t - 2)$
 جواب: $2\pi \sin(\pi t - 2) \cos(\pi t - 2)$

سوال 3.269: $y = \sec^2 \pi t$

سوال 3.270: $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$
 جواب: $\frac{8 \sin 2t}{(1 + \cos 2t)^5}$

سوال 3.271: $y = (1 + \cot(\frac{t}{2}))^{-2}$

سوال 3.272: $y = \sin(\cos(2t - 5))$
 جواب: $-2 \cos(\cos(2t - 5)) \sin(2t - 5)$

سوال 3.273: $y = \cos(5 \sin(\frac{t}{3}))$

سوال 3.274: $y = (1 + \tan^4(\frac{t}{12}))^3$
 جواب: $(1 + \tan^4(\frac{t}{12}))^2 (\tan^3(\frac{t}{12}) \sec^2(\frac{t}{12}))$

سوال 3.275: $y = \frac{1}{6}(1 + \cos^2(7t))^3$

سوال 3.276: $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$
 جواب: $\frac{-t \sin(t^2)}{\sqrt{1 + \cos(t^2)}}$

سوال 3.277: $y = 4 \sin(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$

سوال 3.278 تا سوال 3.281 میں y'' تلاش کریں۔

سوال 3.278: $y = (1 + \frac{1}{x})^3$
 جواب: $\frac{6}{x^3}(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{2}{x})$

سوال 3.279: $y = (1 - \sqrt{x})^{-1}$

سوال 3.280: $y = \frac{1}{9} \cot(3x - 1)$
 جواب: $2 \csc^2(3x - 1) \cot(3x - 1)$

سوال 3.281: $y = 9 \tan(\frac{x}{3})$

تفریق کی اعدادی قیمتوں کا حصول

سوال 3.282 تا سوال 3.287 میں x کی دی گئی قیمت پر $(f \circ g)'$ تلاش کریں۔

سوال 3.282: $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$
 جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 3.283: $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1$

سوال 3.284: $f(u) = \cot \frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$
 جواب: $-\pi/4$

سوال 3.285: $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}$, $u = g(x) = \pi x$, $x = \frac{1}{4}$

سوال 3.286: $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}$, $u = g(x) = 10x^2 + x + 1$, $x = 0$
جواب: 0

سوال 3.287: $f(u) = (\frac{u-1}{u+1})^2$, $u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$, $x = -1$

سوال 3.288: فرض کریں کہ قائل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 2$ اور $x = 3$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	2π	5

درج ذیل میں دیے گئے x پر قائل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $2f(x)$, $x = 2$ ب. $f(g(x))$, $x = 2$

ج. $f(x) + g(x)$, $x = 3$ د. $\sqrt{f(x)}$, $x = 2$

ه. $f(x) \cdot g(x)$, $x = 3$ و. $1/g^2(x)$, $x = 3$

ز. $f(x)/g(x)$, $x = 2$ ح. $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, $x = 2$

جواب: (ا) $2/3$, (ب) $2\pi + 5$, (ج) -8π , (د) $37/6$, (ه) -1 , (و) $\frac{\sqrt{2}}{24}$, (ز) $5/32$, (ح) $-\frac{5}{3\sqrt{17}}$

سوال 3.289: فرض کریں کہ قائل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 0$ اور $x = 1$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$1/3$
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

درج ذیل میں دیے گئے x پر قائل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

$$x=0 \text{ } g(f(x)), \text{ } \therefore$$

$$5f(x) - g(x), x = 1 \text{ } \therefore$$

$$f(x)g^3(x), x = 0 \text{ } \therefore$$

$$(x^{11} + f(x))^{-2}, x = 1 \text{ } \therefore$$

$$\frac{f(x)}{g(x)+1}, x = 1 \text{ } \therefore$$

$$x=0 \text{ } f(x+g(x)), \text{ } \therefore$$

$$f(g(x)), x = 0 \text{ } \therefore$$

سوال 3.290: اگر $s = \cos \theta$ اور $\frac{d\theta}{dt} = 5$ ہوں تب $\theta = 3\pi/2$ پر $\frac{ds}{dt}$ تلاش کریں۔
جواب: 5

سوال 3.291: اگر $y = x^2 + 7x - 5$ اور $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$ ہوں تب $x = 1$ پر $\frac{dy}{dt}$ تلاش کریں۔

مرکب کے کئی صورتیں
اگر مرکب تفاعل کو مختلف انداز میں لکھنا ممکن ہو تب کیا ہوگا؟ کیا ہر صورت سے ایک جیسا تفرق حاصل ہوگا؟ زنجیری قاعدہ کہتا ہے کہ ایسا ہی ہوگا۔ اگلے دو سوالات میں اس عمل کو دیکھیں۔

سوال 3.292: تفاعل $y = x$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

$$y = \frac{u}{5} + 7, \quad u = 5x - 35 \text{ } \therefore$$

$$y = 1 + \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{x-1} \text{ } \therefore$$

جواب: (i) 1، (ب) 1

سوال 3.293: تفاعل $y = x^{3/2}$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

$$y = u^3, \quad u = \sqrt{x} \text{ } \therefore$$

$$y = \sqrt{u}, \quad u = x^3 \text{ } \therefore$$

مماس اور ڈھلوان

سوال 3.294:

1. $x = 1$ پر منحنی $y = 2 \tan(\pi x/4)$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 < x < 2$ پر منفی کی ڈھلوان کی کم سے کم قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (i) $y = \pi x + 2 - \pi$ ، (ب) $\pi/2$

سوال 3.295:

ا. مبادا پر $y = \sin 2x$ اور $y = -\sin \frac{x}{2}$ کے مماس کی مساواتیں تلاش کریں۔ کیا ان مماس کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا مبادا پر $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی مماسوں کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے جہاں مستقل $m \neq 0$ ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ج. کسی بھی دیے گئے m کے لئے $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی زیادہ سے زیادہ ڈھلوان کیا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تقابل $y = \sin x$ ایک چکر پورا کرتا ہے، تقابل $y = \sin 2x$ دو چکر پورے کرتا ہے، تقابل $y = \sin \frac{x}{2}$ آدھا چکر پورا کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ کیا اس وقفے پر تقابل $y = \sin mx$ کے مکمل چکر اور مبادا پر تقابل کی ڈھلوان کا آپس میں کوئی تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

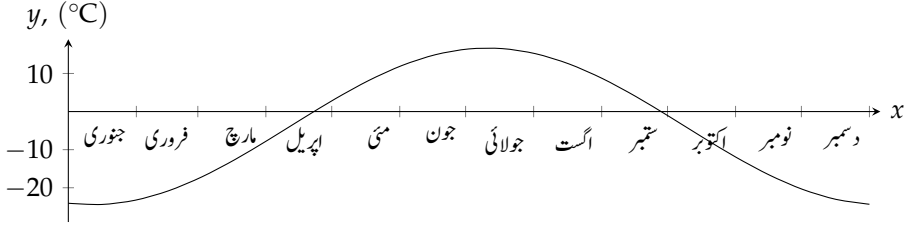
سوال 3.296: مشین کا بہت تیز چلنا ایک گاڑی کی انجن کا پسٹن³⁸ اوپر نیچے دوری حرکت کرتا ہے جس کو

$$s = A \cos(2\pi bt)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں لمحہ t پر پسٹن کا مقام s ہے جبکہ A اور b مثبت مستقل ہیں۔ حرکت کا حیظ A اور اس کی تعدد (ایک سیکنڈ میں اوپر نیچے حرکت کی گنتی) b ہے۔ تعدد دگنا کرنے سے پسٹن کی سمتی رفتار، اسراع اور جھٹکا پر کیا اثر ہوگا؟ (یہ جاننے کے بعد آپ سمجھ سکتے ہیں کہ مشین تیز چلانے سے کیوں خراب ہوتی ہے۔) جواب: سمتی رفتار دگنی، اسراع چار گنا اور جھٹکا آٹھ گنا ہو جاتا ہے۔

سوال 3.297: قطب شمالی کے نزدیک ایلاسکا کے ایک شہر میں درجہ حرارت ایلاسکا³⁹ کے ایک شہر میں پورے سال کے ہر دن کے اوسط درجہ حرارت کو شکل 3.53 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو درج ذیل تقابل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$y = 20.56 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] - 3.89$$



شکل 3.53: اوسط درجہ حرارت

ا. کس دن درجہ حرارت تیز ترین تبدیل ہوتا ہے؟

ب. ایک دن میں درجہ حرارت کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کتنی ہے؟

سوال 3.298: محور لکیر پر ایک جسم کا مقام $s = \sqrt{1+4t}$ ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ لمحہ $t = 6\text{ s}$ پر اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع کیا ہیں؟
جواب: $v = 0.4\text{ m s}^{-1}$, $a = -\frac{4}{125}\text{ m s}^{-2}$

سوال 3.299: ساکن حال کے t سیکنڈ بعد ایک گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = k\sqrt{s}\text{ m s}^{-1}$ ہے جہاں k مستقل اور ساکن مقام سے فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ جسم کی اسراع مستقل ہے۔

سوال 3.300: زمین کی فضا میں داخل ہونے والے شہاب ثاقب کی سمتی رفتار \sqrt{s} کے بالعکس متناسب ہے جہاں s زمین کی وسط سے شہاب ثاقب کا فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ شہاب ثاقب کی اسراع s^2 کے بالعکس متناسب ہے۔

سوال 3.301: محور پر حرکت کرنے والے ایک ذرہ کی سمتی رفتار $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ہے۔ دکھائیں کہ اس ذرہ کی اسراع $f(x)f'(x)$ ہے۔

سوال 3.302: لنگن کا دوری عرصہ بالمتقابل درجہ حرارت ایک لنگن جس کی لمبائی L ہو کا دوری عرصہ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ہو گا جہاں لنگن کے مقام پر ثقلی اسراع کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں T کی اکائی سیکنڈ اور L کی اکائی میٹر ہے۔ اگر لنگن کسی دھات سے بنا ہو تب اس کی لمبائی درجہ حرارت کے ساتھ درج ذیل کلیہ کے تحت تبدیل ہوگی

$$\frac{dL}{du} = kL$$

جہاں درجہ حرارت کو u سے ظاہر کیا گیا ہے اور k مستقل ہے۔ دکھائیں کہ حرارت کے ساتھ دوری عرصہ تبدیل ہونے کی شرح $\frac{kT}{2}$ ہو گی۔

سوال 3.303: اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = |x|$ ہوں تب مرکبات

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{اور} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

دونوں $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں اگرچہ $x = 0$ پر g از خود قابل تفرق نہیں ہے۔ کیا یہ زنجیری قاعدہ کے مترادف ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.304: فرض کریں $x = 1$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(1)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے۔ اگر $x = 1$ پر $y = f(g(x))$ کے معنی کا مماس افقی ہو تب کیا $x = 1$ پر g کے مماس یا $u = g(1)$ پر f کے مماس کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.305: فرض کریں کہ $x = -5$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(-5)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے اور $(f \circ g)'(-5)$ منفی ہے۔ کیا $g'(-5)$ اور $f'(g(-5))$ کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے۔

زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اگلے دو سوالات میں دیے گئے تفاعل x^n کے لئے دکھائیں کہ طاقی قاعدہ $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ مطمئن ہوتا ہے۔

$$x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}} \quad \text{سوال 3.306}$$

$$x^{3/4} = \sqrt{x} \sqrt{x} \quad \text{سوال 3.307}$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.308: $y = \sin 2x$ کا تفرق وقفہ $-2 \leq x \leq 3.5$ کے لئے تفاعل $y = 2 \cos 2x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.2$ کے لئے

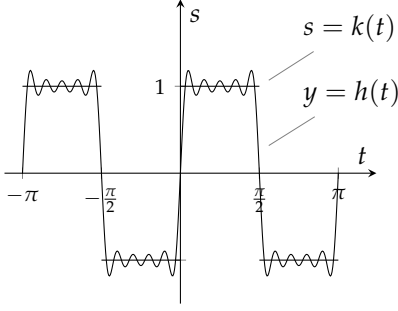
$$y = \frac{\sin 3(x+h) - \sin 2x}{h}$$

ترسیم کریں۔ کی دیگر (بشمول منفی) قیمتوں کے لئے بھی اس کو ترسیم کریں۔ $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اس کی وجہ پیش کریں۔

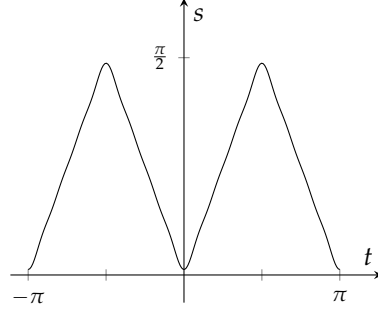
سوال 3.309: درج ذیل کثیر رکنی کو شکل 3.54 میں دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر تقریباً دندان موج $s = g(t)$ نظر آتا ہے۔

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662 \cos 2t - 0.07074 \cos 6t - 0.02546 \cos 10t - 0.01299 \cos 14t$$

جہاں دندان موج معین ہو وہاں اس کثیر رکنی کا تفرق دندان موج کی تفرق کو کتنا خوش اسلوبی سے ظاہر کرتا ہے؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔



شکل 3.55: سیڑھی تفاعل $s = k(t)$ کا $s = h(t)$ کشیر رکنی سے اظہار (سوال 3.310)



شکل 3.54: دندان موج کا کشیر رکنی سے اظہار (سوال 3.309)

ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{dg}{dt}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. تلاش کر کے ترسیم کریں۔ $\frac{df}{dt}$

ج. کہاں پر $\frac{dg}{dt}$ کو $\frac{df}{dt}$ بہتر ظاہر کرتا ہے؟ کہاں خراب ترین ظاہر کرتا ہے؟ تکنیکی تفاعل سے عموماً مختلف تفاعل کو ظاہر کیا جاتا ہے البتہ جیسے اگلا سوال میں ظاہر ہو گا اصل تفاعل کے تفرق کو عموماً ان کشیر رکنی کے تفرق سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔

سوال 3.310: گزشتہ سوال میں دندان موج کو کشیر رکنی سے ظاہر کیا گیا جہاں ہم نے دیکھا کہ دندان موج کے تفرق کو اس کشیر رکنی کا تفرق ظاہر کرتا ہے۔ آئیں اب ایسا تفاعل دیکھیں جس کو کشیر رکنی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے البتہ تفاعل کے تفرق کو اس کشیر رکنی کا تفرق ظاہر نہیں کرتا ہے۔ شکل 3.55 میں سیڑھی تفاعل کو درج ذیل کشیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

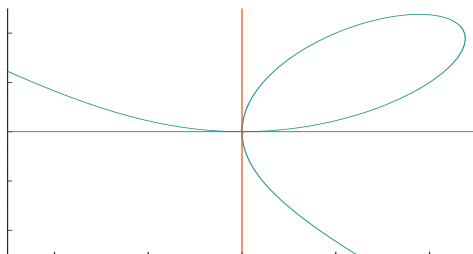
$$s = h(t) = 1.2732 \sin 2t + 0.4244 \sin 6t + 0.25465 \sin 10t + 0.18186 \sin 14t + 0.14147 \sin 18t$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ کشیر رکنی کا تفرق ہر گز سیڑھی تفاعل کا تفرق نہیں دیتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{dk}{dt}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. ترسیم کریں۔ $\frac{dh}{dt}$

ج. نتائج کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟



شکل 3.56: خفی معنی $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ جس کو پتا بھی کہتے ہیں۔

3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما

بعض اوقات مساوات $F(x, y) = 0$ کو $y = f(x)$ روپ میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ اس کے باوجود ہم $\frac{dy}{dx}$ کو خفی تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اس حصہ میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا اور اس کے ذریعہ طاقی قاعدہ کو وسعت دیتے ہوئے تمام ناطق تفاعل کو شامل کیا جائے گا۔

خفی تفرق

چونکہ مساوات $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ درحقیقت تین تفاعل $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ اور $y = f_3(x)$ کا ملاپ ہے جو مساوائے نقطہ M اور A کے قابل تفرق ہیں لہذا اس کے ترسیم کا تقریباً ہر نقطے پر اچھی طرح معین ڈھلوان پایا جاتا ہے (شکل 3.56)۔ خفی تفاعل کا تفرق لینے کی خاطر y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے قواعد برائے قوت نما، طاقت، مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور زنجیری قاعدہ زیر استعمال لائے جاتے ہیں۔ اس کے بعد $\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کرتے ہوئے کسی بھی نقطہ (x, y) پر تفرق حاصل کیا جاسکتا ہے۔

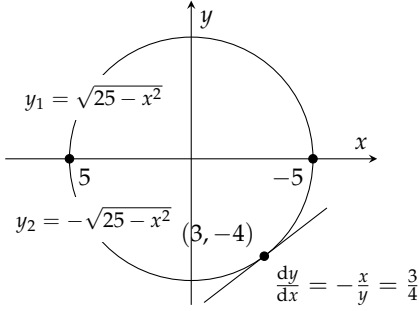
اس ترکیب کو خفی تفرق⁴⁰ کہتے ہیں۔

مثال 3.47: $y^2 = x$ ہے۔ $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

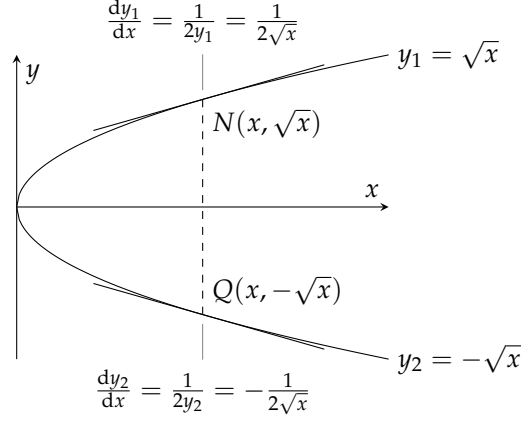
حل: مساوات $y^2 = x$ درحقیقت دو تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کو ظاہر کرتی ہے جہاں جذر کی مثبت قیمت لی جاتی ہے۔ ہم $x > 0$ کے لئے ان دونوں تفاعل کا تفرق لینا جانتے ہیں۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

⁴⁰implicit differentiation



شکل 3.58: ترسیم برائے مثال 3.48



شکل 3.57: ترسیم برائے مثال 3.47

آئیں اب اس مساوات کو دو تقاطع میں تقسیم کیے بغیر اس کا تفرق حاصل کریں۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تقاطع تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں $f(x) = y^2$ لکھ کر $\frac{df}{dx} = 2y$ لکھا جا سکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 1 && \text{زنجیری قاعدہ} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

ہوگا۔ یہ کلیہ دونوں صریح تقاطع $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کا تفرق دیتا ہے۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

مثال 3.48: نقطہ $(3, -4)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.58)۔
حل: دائرہ در حقیقت دو قابل تفرق تقاطع $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ اور $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ نقطہ $(3, -4)$ تقاطع y_2 پر پایا جاتا ہے لہذا ہم صریحاً ڈھلوان تلاش کر سکتے ہیں:

$$(3.10) \quad \left. \frac{dy_2}{dx} \right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

ہم دائرے کی مساوات کا x کے لحاظ سے خفی تفرق

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

لے کر $(3, -4)$ پر ڈھلوان کی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3, -4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

دھیان رہے کہ مساوات 3.10 صرف x محور کے نیچے جوابات دیتی ہے جبکہ درج بالا تمام نقطوں پر قابل استعمال ہے۔ خفی تفرق کی قیمت عموماً x اور y دونوں پر منحصر ہوتی ہے جبکہ صریحاً حاصل تفرق کے کلیہ میں صرف x درکار ہو گا۔ □

دیگر خفی تفاعل کا تفرق بھی درج بالا دو مثالوں کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف تفرق کے قواعد استعمال کرتے ہیں۔

مثال 3.49: $2y = x^2 + \sin y$ کے لئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔
حل:

$$2y = x^2 + \sin y$$

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2 \frac{dy}{dx} = 2x + \cos y \frac{dy}{dx}$$

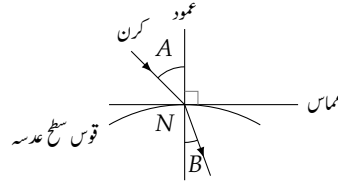
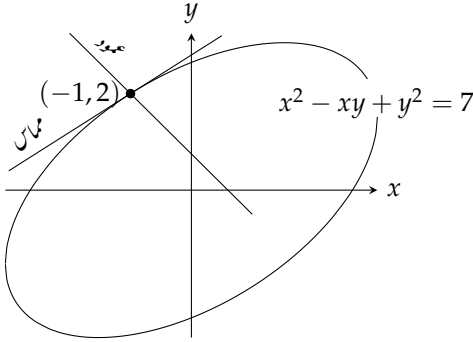
$$2 \frac{dy}{dx} - \cos y \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

□

خفی تفرق چار اقدام پر مشتمل ہے۔



شکل 3.59: عددہ میں کرن داخل ہوتے ہوئے عمود کی طرف جھکتی ہے۔

شکل 3.60: ترسیات برائے مثال 3.50

1. y کو x کا قابل تفریق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کو تفریق کے قواعد کے مطابق تفریق کریں۔

2. $\frac{dy}{dx}$ والے اجزاء کو ایک طرف اکٹھا کریں۔

3. $\frac{dy}{dx}$ کو تجزی کریں۔

4. $\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کریں۔

عددہ، مماس اور عمودی خطوط

روشنی کی کرن عددہ میں نقطہ N پر داخل ہوتے ہوئے سمت تبدیل کرتی ہے (شکل 3.59)۔ مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی خط کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ N پر منحنی کے مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی⁴¹ کہتے ہیں۔ اس خط کو N پر منحنی کا عمود کہتے ہیں۔

□

عددہ کی سطح پر تبصرہ عموماً دو درجی منحنیات کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ ان منحنیات کے مماس اور عمود کو خفی تفریق سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

⁴¹normal

مثال 3.50: نقطہ $(-1, 2)$ پر منحنی $x^2 - xy + y^2 = 7$ کا مماس اور عمود تلاش کریں (شکل 3.60)۔
حل: ہم خفی تفرق سے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 \\ \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(7) \\ 2x - (x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx}) + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ (2y - x) \frac{dy}{dx} &= y - 2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y - 2x}{2y - x} \end{aligned}$$

نقطہ $(x, y) = (-1, 2)$ پر ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(-1,2)} = \left. \frac{y - 2x}{2y - x} \right|_{(-1,2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$

$(-1, 2)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= 2 + \frac{4}{5}(x - (-1)) \\ y &= \frac{4}{5} + \frac{14}{5} \end{aligned}$$

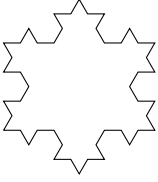
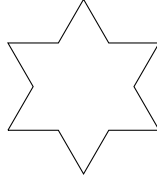
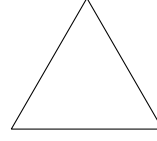
اسی طرح منحنی کا عمود نقطہ $(-1, 2)$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= 2 - \frac{5}{4}(x - (-1)) \\ y &= -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

برف کی روئی

ہلکے ون کوچ⁴² کے منحنیات جنہیں برف کی روئی کہتے ہیں شکل 3.61 میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-1 میں مساوی الاضلاع مثلث سے شروع کرتے ہیں جس کو ہم منحنی C_1 کہتے ہیں۔ ہر ضلع کے وسط پر باہر رخ مثلث الاضلاع بنا کر درمیانے $\frac{1}{3}$ ضلع کو مٹائیں۔ یوں منحنی C_2

C₃ منحنی (ج)C₂ منحنی (ب)C₁ منحنی (ا)

شکل 3.61: برف کی روئی۔

حاصل ہو گی۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے لامتناہی منحنیات بنائی جاسکتی ہیں۔ ان منحنیات کی تحدیدی صورت C_n کو برف کی روئی⁴³ کہتے ہیں، جہاں عدد n لامتناہی تک پہنچتا ہے۔

برف کی روئی بہت زیادہ غیر ہموار ہے لہذا کسی بھی نقطہ پر اس کا مماس حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ تفاعل $F(x, y) = 0$ جو برف کی روئی کو ظاہر کرتا ہے، نا y کو x کا قابل تفرق تفاعل اور نا ہی x کو y کا قابل تفرق تفاعل ظاہر کرتا ہے۔ برف کی روئی پر صفحہ 681 پر دوبارہ غور کیا جائے گا جہاں لمبائی قوس کی بات کی جائے گی۔

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق کا حصول

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.51: $2x^3 - 3y^2 = 7$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔
حل: ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق حاصل کرتے ہوئے پہلے $\frac{dy}{dx}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$2x^3 - 3y^2 = 7$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y} \quad (y \neq 0)$$

ہم اب مساوات $x^2 - yy' = 0$ کا تفرق لیتے ہوئے y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(yy') = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x - y'y' - yy'' = 0$$

$$yy'' = 2x - (y')^2$$

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(y')^2}{y} \quad (y \neq 0) \text{ اگر } ($$

ہم آخر میں $y' = \frac{x^2}{y}$ پر کرتے ہوئے x اور y کی روپ میں y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(x^2/y)^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \quad (y \neq 0) \text{ اگر } ($$

□

قابل تفرق تفاعل کے ناطق طاقت

ہم جانتے ہیں کہ طاقتی قاعدہ

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

عدد صحیح n کے لئے درست ہے۔ ہم اب دکھاتے ہیں کہ یہ قاعدہ کسی بھی ناطق عدد کے لئے درست ہے۔

مسئلہ 3.6: ناطق طاقت کے لئے طاقتی قاعدہ
اگر ناطق عدد ہو تب x^{n-1} کے دائرہ کار کے ہر اندرونی نقطہ x پر x^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ثبوت: فرض کریں p اور q عدد صحیح ہیں جہاں $q > 0$ اور $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ ہے۔ تب

$$y^q = x^p$$

ہو گا۔ یہ مساوات اور کے طاقتوں کا ملاپ ہے لہذا (اس حصہ کے ابتدا میں اعلیٰ مسئلہ کے تحت) y متغیر x کا قابل تفریق تفاعل ہو گا۔ چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں (جن کے لئے ہمارے پاس قاعدہ طاقت ہے) ہم خفی مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفریق لے سکتے ہیں:

$$qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

اب اگر $y \neq 0$ ہو تب دونوں اطراف کو qy^{q-1} سے تقسیم کیا جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1} \end{aligned}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.52:

ا.

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{تفاعل } x \geq 0 \text{ جبکہ تفریق } x > 0 \text{ کے لئے معین ہے}$$

ب.

$$\frac{d}{dx}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5} \quad \text{تفاعل تمام } x \text{ جبکہ تفریق } x \neq 0 \text{ کے لئے معین ہے}$$

□

طاقق قاعدہ کی ایک روپ جس میں زنجیری قاعدہ ضم ہے کہتا ہے کہ اگر n ناطق عدد ہو اور x پر u قابل تفرق ہو اور $(u(x))^{n-1}$ معین ہو تب x پر u^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$(3.11) \quad \frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

مثال 3.53:

ا.

$$\frac{d}{dx} (1-x^2)^{1/4} = \frac{1}{4} (1-x^2)^{-3/4} (-2x)$$

تفاعل وقفہ $[-1, 1]$ جبکہ تفرق وقفہ $(-1, 1)$ پر معین ہے۔

ب.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} \frac{d}{dx} (\cos x) \\ &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} (-\sin x) \\ &= \frac{1}{5} \sin x (\cos x)^{-6/5} \end{aligned}$$

□

سوالات

ناطق طاقتوں کا تفرق
سوال 3.311 تا سوال 3.320 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 3.311: $y = x^{9/4}$
جواب: $\frac{9}{4} x^{5/4}$

سوال 3.312: $y = x^{-3/5}$

سوال 3.313: $y = \sqrt[3]{2x}$
جواب: $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

سوال 3.314: $y = \sqrt[4]{5x}$

سوال 3.315: $y = 7\sqrt{x+6}$
جواب: $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

سوال 3.316: $y = -2\sqrt{x-1}$

سوال 3.317: $y = (2x+5)^{-1/2}$
جواب: $-(2x+5)^{-3/2}$

سوال 3.318: $y = (1-6x)^{2/3}$

سوال 3.319: $y = x(x^2+1)^{1/2}$
جواب: $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

سوال 3.320: $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

سوال 3.321 تا سوال 3.328 میں پہلا تفریق تلاش کریں۔

سوال 3.321: $s = \sqrt[7]{t^2}$
جواب: $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

سوال 3.322: $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

سوال 3.323: $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$
جواب: $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3} \cos[(2t+5)^{-2/3}]$

سوال 3.324: $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

سوال 3.325: $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$
جواب: $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

سوال 3.326: $g(x) = 2(2x^{-1/2} + 1)^{-1/3}$

سوال 3.327: $h(\theta) = \sqrt[3]{1 + \cos(2\theta)}$
 جواب: $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^{-2/3}$

سوال 3.328: $k(\theta) = (\sin(\theta + 5))^{5/4}$

خفی تفرق
 سوال 3.329 تا سوال 3.342 میں $\frac{dy}{dx}$ کو خفی تفرق کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 3.329: $x^2y + xy^2 = 6$
 جواب: $\frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$

سوال 3.330: $x^3 + y^3 = 18xy$

سوال 3.331: $2xy + y^2 = x + y$
 جواب: $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

سوال 3.332: $x^3 - xy + y^3 = 1$

سوال 3.333: $x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$
 جواب: $\frac{-2x^3 + 3x^2y - xy^2 + x}{x^2y - x^3 + y}$

سوال 3.334: $(3xy + 7)^2 = 6y$

سوال 3.335: $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$
 جواب: $\frac{1}{y(x+1)^2}$

سوال 3.336: $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

سوال 3.337: $x = \tan y$
 جواب: $\cos^2 y$

سوال 3.338: $x = \sin y$

سوال 3.339: $x + \tan(xy) = 0$
 جواب: $\frac{-\cos^2(xy) - y}{x}$

سوال 3.340: $x + \sin y = xy$

سوال 3.341: $y \sin(\frac{1}{y}) = 1 - xy$
 جواب: $\frac{-y^2}{y \sin(\frac{1}{y}) - \cos(\frac{1}{y}) + xy}$

سوال 3.342: $y^2 \cos(\frac{1}{y}) = 2x + 2y$

سوال 3.343 تا سوال 3.346 میں $\frac{dr}{d\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 3.343: $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$
 جواب: $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

سوال 3.344: $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

سوال 3.345: $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$
 جواب: $-\frac{r}{\theta}$

سوال 3.346: $\cos r + \cos \theta = r\theta$

بلند رتبی تفریق

سوال 3.347 تا سوال 3.352 میں خفی تفریق کی مدد سے پہلے $\frac{dy}{dx}$ اور بعد میں $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔

سوال 3.347: $x^2 + y^2 = 1$
 جواب: $y' = -\frac{x}{y}, y'' = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}$

سوال 3.348: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

سوال 3.349: $y^2 = x^2 + 2x$
 جواب: $y' = \frac{x+1}{y}, y'' = \frac{y^2 - (x+1)^2}{y^3}$

سوال 3.350: $y^2 - 2x = 1 - 2y$

سوال 3.351: $2\sqrt{y} = x - y$
 جواب: $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}, y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

سوال 3.352: $xy + y^2 = 1$

سوال 3.353: نقطہ $(2, 2)$ پر $x^3 + y^3 = 16$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔
 جواب: -2

سوال 3.354: نقطہ $(0, -1)$ پر $xy + y^2 = 1$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ڈھلوان، مماس اور عمود
 سوال 3.355 تا سوال 3.356 میں دیے گئے نقطوں پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 3.355: $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$
 جواب: $(-2, 1) : m = -1, (-2, -1) : m = 1$

سوال 3.356: $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$, $(1, 0)$, $(1, -1)$

سوال 3.357 تا سوال 3.366 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا نقطہ مماسی پر پایا جاتا ہے اور اس نقطے پر مماسی کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 3.357: $x^2 + xy - y^2 = 1$, $(2, 3)$
 جواب: (i) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$, (ب) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

سوال 3.358: $x^2 + y^2 = 25$, $(3, -4)$

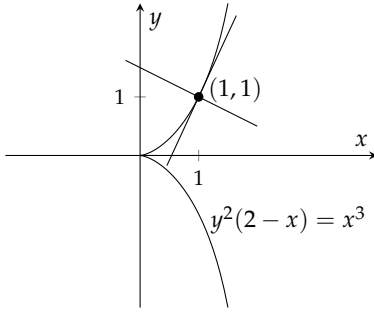
سوال 3.359: $x^2y^2 = 9$, $(-1, 3)$
 جواب: (i) $y = 3x + 6$, (ب) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

سوال 3.360: $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, $(-2, 1)$

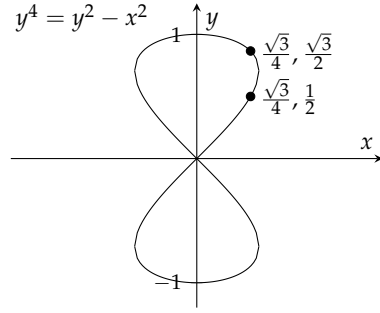
سوال 3.361: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$, $(-1, 0)$
 جواب: (i) $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$, (ب) $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

سوال 3.362: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5$, $(\sqrt{3}, 2)$

سوال 3.363: $2xy + \pi \sin y = 2\pi$, $(1, \pi/2)$
 جواب: (i) $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$, (ب) $y = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$



شکل 3.63: منحنی برائے سوال 3.370



شکل 3.62: منحنی آٹھ (سوال 3.369)

سوال 3.364: $x \sin 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

سوال 3.365: $y = 2 \sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$
جواب: (i) $y = 2\pi x - 2\pi$, (ب) $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

سوال 3.366: $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0, \pi)$

سوال 3.367: $x^2 + xy + y^2 = 7$ محور کو x دو نقطوں پر قطع کرتی ہے۔ ان نقطوں کو تلاش کریں اور دکھائیں کہ ان نقطوں پر منحنی کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔ ان مماس کی ڈھلوان کیا ہو گی؟
جواب: نقطہ $(-\sqrt{7}, 0)$ اور $(\sqrt{7}, 0)$ ، ڈھلوان: -2

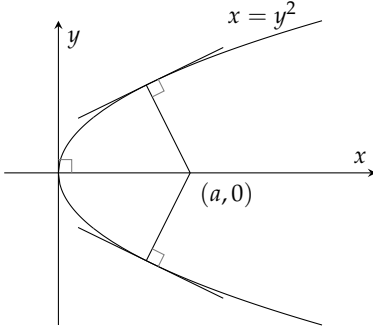
سوال 3.368: منحنی $x^2 + y^2 + xy = 7$ پر وہ نقطے تلاش کریں جہاں (i) مماس x محور کے متوازی ہے، (ب) مماس y محور کے متوازی ہے۔ دوسرے جزو میں $\frac{dy}{dx}$ غیر معین جبکہ $\frac{dx}{dy}$ معین ہے۔ ان نقطوں پر $\frac{dx}{dy}$ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 3.369: منحنی آٹھ نقطہ $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ اور $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ پر $y^4 = y^2 - x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.62)۔
جواب: $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ پر $m = -1$ ، $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ پر $m = \sqrt{3}$

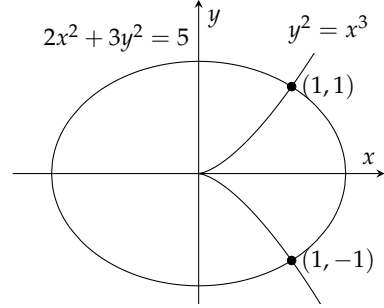
سوال 3.370: نقطہ $(1, 1)$ پر $y^2(2-x) = x^3$ کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں (شکل 3.63)۔

سوال 3.371: چار نقطوں $(-3, 2)$ ، $(-3, -2)$ ، $(3, 2)$ اور $(3, -2)$ پر $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
جواب: $(-3, 2) : m = -\frac{27}{8}$; $(-3, -2) : m = \frac{27}{8}$; $(3, 2) : m = \frac{27}{8}$; $(3, -2) : m = -\frac{27}{8}$

سوال 3.372:



شکل 3.65: منحنی برائے سوال 3.377



شکل 3.64: ترسیم برائے سوال 3.374

ا. نقطہ $(4, 2)$ اور $(2, 4)$ پر پتا $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.56)۔

ب. مبدا کے علاوہ پتے کا مماس کس نقطے پر افقی ہے؟

ج. کس نقطے پر پتے کا مماس انتہائی ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 3.373: اگر $f''(x) = x^{-1/3}$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے درست ہوں گے؟

ا. $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$ ج. $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$

ب. $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$ د. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

جواب: (ا) غلط، (ب) درست، (ج) درست، (د) درست

سوال 3.374: کیا نقطہ $(1, 1)$ اور $(1, -1)$ پر $2x^2 + 3y^2 = 5$ اور $y^2 = x^3$ کے مماس میں کوئی خاصیت پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل 3.64)۔

سوال 3.375: نقطہ $(1, 1)$ پر منحنی $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ کا مماس اس منحنی کو کس دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے؟
جواب: $(3, -1)$

سوال 3.376: منحنی $xy + 2x - y = 0$ کا ایسا عمود تلاش کریں جو $2x + y = 0$ کے متوازی ہو۔

سوال 3.377: دکھائیں کہ اگر نقطہ $(a, 0)$ سے قطع مکانی $x = y^2$ تک تین عمود بنانا ممکن ہو تب $a > \frac{1}{2}$ ہو گا۔ تیسرا عمود x محور ہے۔ a کی کس قیمت کے لئے باقی دو عمود آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں (شکل 3.65)؟

سوال 3.378: مثال 3.52 اور مثال 3.53-1 میں کس جیومیٹری کی بنیاداً کار کے حدود تعین ہوتے ہیں؟

سوال 3.379 اور سوال 3.380 میں پہلے y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں اور اس کے بعد x کو y کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dx}{dy}$ تلاش کریں۔ کیا $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{dx}{dy}$ کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ کیا آپ اس تعلق کو منحنی کی ترسیم کی مدد سے جیومیٹری کے ذریعہ سمجھا سکتے ہیں؟

$$\text{سوال 3.379: } xy^3 + x^2y = 6 \quad \text{جواب: } \frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{dy/dx}$$

$$\text{سوال 3.380: } x^3 + y^2 = \sin^2 y$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.381:

ا. منحنی $x^4 + 4y^2 = 1$ کا $\frac{dy}{dx}$ عمومی طریقہ اور منحنی طریقہ سے حاصل کریں۔ کیا دونوں جوابات ایک دوسرے جیسے ہیں؟

ب. مساوات $x^4 + 4y^2 = 1$ کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تمام حاصل تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے $x^4 + 4y^2 = 1$ کی مکمل ترسیم کھینچیں۔ اب ساتھ ہی ان تفاعل کے ایک رتبی تفرق کی ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا $x^4 + 4y^2 = 1$ کی ترسیم کو دیکھ کر آپ اس کے تفرق کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا مساوات کے تفرق کی تقسیم کو دیکھ کر آپ مساوات کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.382:

ا. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کا تفرق $\frac{dy}{dx}$ دو طریقوں سے تلاش کریں۔ پہلی بار مساوات کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تفرق حاصل کریں جبکہ دوسری بار منحنی طریقہ استعمال کریں۔ کیا دونوں بار ایک جیسے جوابات حاصل ہوتے ہیں؟

ب. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کو y کے لئے حل کریں۔ تمام حاصل تفاعل کا ترسیم کھینچ کر مساوات $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کی مکمل ترسیم حاصل کریں۔ اب تفاعل کے ایک رتبی تفرق کا ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا آپ مساوات کی ترسیم کو دیکھ کر اس کے تفرق کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا آپ تفرق کی ترسیم کو دیکھ کر مساوات کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.383 تا سوال 3.390 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. کمپیوٹر پر مساوات کو ترسیم کریں۔ تصدیق کریں کہ نقطہ N مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. مخفی طریقہ سے تفرق $\frac{dy}{dx}$ کا کلیہ حاصل کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کی قیمت تلاش کریں۔

ج. N پر ڈھلوان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے اس نقطہ پر مماس کی مساوات حاصل کریں۔ مماس اور مساوات کو اکٹھے ترسیم کریں۔

سوال 3.383: $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad N(2, 1)$

سوال 3.384: $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad N(1, 1)$

سوال 3.385: $y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad N(0, 1)$

سوال 3.386: $y^3 + \cos(xy) = x^2, \quad N(1, 0)$

سوال 3.387: $x + \tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2, \quad N(1, \pi/2)$

سوال 3.388: $xy^3 + \tan(x + y) = 1, \quad N(\pi/4, 0)$

سوال 3.389: $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad N(1, 1)$

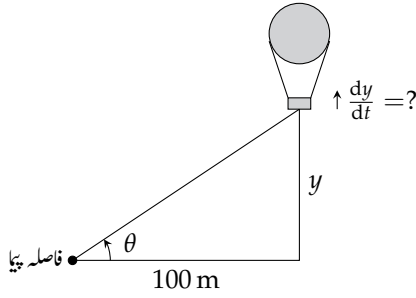
سوال 3.390: $x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad N(1, 0)$

3.7 دیگر شرح تبدیلی

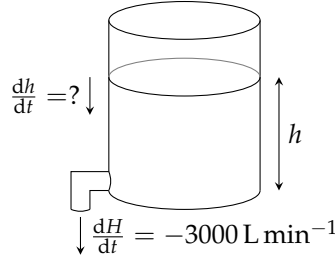
ٹینکی سے 3000 L min^{-1} پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہوگی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے ہیں۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 3.54: انعکاس 3000 L min^{-1} کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس r کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی h ہے۔ یوں پانی کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہوگا جہاں حجم کو H سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل 3.66)۔ اب ہمیں انعکاس

$$\frac{dH}{dt} = -3000$$



شکل 3.67: غبارہ (مثال 3.55)



شکل 3.66: پانی کی ٹینکی (مثال 3.54)

بتلایا گیا ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتی ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{dh}{dt}$$

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں H اور h کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{dH}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

جہاں دائیں جانب r مستقل ہے۔ اس میں $\frac{dH}{dt}$ کی معلوم قیمت پر کرتے ہوئے نامعلوم شرح $\frac{dh}{dt}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

پانی کی گہرائی $\frac{3}{\pi r^2}$ میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہو گی۔ مثلاً $r = 1$ m اور $r = 10$ m کی صورت میں شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95 \text{ m min}^{-1} = -95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 1 \text{ m})$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095 \text{ m min}^{-1} = -0.95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 10 \text{ m})$$

□

مثال 3.55: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل 3.67)۔ غبارے کی نقطہ اڑان سے 100 m دور واقع فاصلہ پیتا⁴⁴ سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پیتا کا زاویہ صعود $\frac{\pi}{4}$ تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح $0.14 \text{ rad min}^{-1}$ تھی۔ اس لمحہ پر غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟
 حل: ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔
 پہلا قدم: موقع کی تصویر کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات θ اور y درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پیتا کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو t سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ θ اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پیتا سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ 100 m ہے جس کو متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔
 دوسرا قدم: ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad min}^{-1} \quad (\theta = \frac{\pi}{4})$$

تیسرا قدم: جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے $\theta = \pi/4$ کی صورت میں $\frac{dy}{dt}$ پوچھا گیا ہے۔
 چوتھا قدم: متغیرات θ اور y کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100} = \tan \theta \implies y = 100 \tan \theta$$

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے t کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو $\frac{dy}{dt}$ (درکار معلومات) اور $\frac{d\theta}{dt}$ (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{dy}{dt} = 100 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

چھٹا قدم: $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $\frac{d\theta}{dt} = 0.14$ پر کرتے ہوئے $\frac{dy}{dt}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = 100 (\sec \frac{\pi}{4})^2 (0.14) = 28 \text{ m min}^{-1}$$

□

اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

- مسئلے کی تصویر کشی کریں۔ وقت کو t سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو t کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔
- اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کی روپ میں لکھیں۔
- مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کی روپ میں ہو گا)۔

- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی بار آپ کو دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنا ہو گا۔
- اس کا t کے لحاظ سے تفریق لیں۔ اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔
- معلوم معلومات کو پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال 3.56: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ 0.6 km اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ 0.8 km ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ 20 km h^{-1} سے بڑھ رہا ہے۔ پولیس کی گاڑی کی رفتار 60 km h^{-1} ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟
 حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔
 پہلا قدم: تصویر اور متغیرات۔ ہم کار تہی محدود پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو x محور جبکہ پولیس کی گاڑی کو y محور پر رکھتے ہیں۔ وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ t پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام x ، پولیس کی گاڑی کا مقام y اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ s ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ x ، y اور s متغیر t کے قابل تفریق تفاعل ہیں۔
 دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8 \text{ km}, \quad y = 0.6 \text{ km}, \quad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ km h}^{-1}, \quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ km h}^{-1}$$

اس لئے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی y رخ چل رہی ہے۔
 تیسرا قدم: ہمیں $\frac{dx}{dt}$ تلاش کرنا ہے۔
 چوتھا قدم: مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق $s^2 = x^2 + y^2$ ہے۔
 پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ کی مدد سے t کے لحاظ سے تفریق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

چھٹا قدم: $x = 0.8$ ، $y = 0.6$ ، $\frac{dy}{dt} = -60$ اور $\frac{ds}{dt} = 20$ پر کرتے ہوئے $\frac{dx}{dt}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} 20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2 + 0.6^2}} \left(0.8 \frac{dx}{dt} + 0.6(-60) \right) \\ 20 &= 0.8 \frac{dx}{dt} - 36 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{20 + 36}{0.8} = 70 \end{aligned}$$

اس لمحہ پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار 70 km h^{-1} ہے۔

□

مثال 3.57: پانی کی مخروطی ٹینکی $9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس 5 m ، اس کا قد 10 m ہے اور اس کی نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی 6 m ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔
پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

H : لمحہ t (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

x : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

y : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ H ، x اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔
دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6 \text{ m}, \quad \frac{dH}{dt} = 9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$$

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{dy}{dt}$ تلاش کرنا ہے۔
چوتھا قدم: متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

چونکہ لمحہ t پر ہمیں x اور $\frac{dx}{dt}$ کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی ہے لہذا ہمیں x سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ متشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \implies x = \frac{y}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12} y^3$$

پانچواں قدم: t کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt}$$

اس کو $\frac{dy}{dt}$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \frac{dH}{dt}$$

چھٹا قدم: دی گئی معلومات یعنی $y = 6$ اور $\frac{dH}{dt} = 9$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi(6^2)} \cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \text{ m min}^{-1}$$

□

اس لمحے پر پانی کی گہرائی 0.32 m min^{-1} سے بڑھ رہی ہے۔

سوالات

سوال 3.391: فرض کریں کہ دائرے کا رداس r اور رقبہ $S = \pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{dr}{dt}$ اور $\frac{dS}{dt}$ کا تعلق لکھیں۔
جواب: $\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

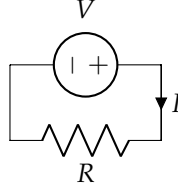
سوال 3.392: فرض کریں کہ دائرے کا رداس r اور سطحی رقبہ $S = \frac{4}{3}\pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{dr}{dt}$ اور $\frac{dS}{dt}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال 3.393: نیلن کے رداس r ، قد h اور حجم H کا تعلق $H = \pi r^2 h$ ہے۔

ا. r کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dh}{dt}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب. h کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dr}{dt}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نا r اور نا h مستقل ہوں تب $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dr}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟



شکل 3.68: برقی دور برائے سوال 3.395

جواب: (ا) $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$ ، (ب) $\frac{dH}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt}$ ، (ج) $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi r h \frac{dr}{dt}$

سوال 3.394: سیدھا کھڑے مخروط جس کا رداس r اور قد h ہوں کا حجم $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہو گا۔

ا. مستقل r کی صورت میں $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dh}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ب. مستقل h کی صورت میں $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dr}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل h اور r کی صورت میں $\frac{dH}{dt}$ ، $\frac{dr}{dt}$ اور $\frac{dh}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال 3.395: مزاحمت R میں برقی رو I اور برقی دباؤ V کا تعلق $V = IR$ ہے (شکل 3.68 میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباؤ 1 V s^{-1} سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو $\frac{1}{3} \text{ A s}^{-1}$ سے گھٹ رہی ہے۔

ا. $\frac{dV}{dt}$ کی قیمت کیا ہے؟

ب. $\frac{dI}{dt}$ کی قیمت کیا ہے؟

ج. $\frac{dR}{dt}$ ، $\frac{dV}{dt}$ اور $\frac{dR}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

د. جب $V = 12$ وولٹ اور $I = 2$ ایمپیر ہوں تب $\frac{dR}{dt}$ کیا ہو گا؟ کیا R بڑھ رہا ہو گا یا گھٹ رہا ہو گا؟

جواب: (ا) 1 V s^{-1} ، (ب) $-\frac{1}{3} \text{ A s}^{-1}$ ، (ج) $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I} \left(\frac{dV}{dt} - V \frac{dI}{dt} \right)$ ، (د) $\frac{3}{2} \Omega \text{ s}^{-1}$ ، مزاحمت بڑھ رہی ہے۔

سوال 3.396: برقی دور میں طاقت P ، مزاحمت R اور برقی رو i کا تعلق $P = i^2 R$ ہے۔ طاقت، مزاحمت اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W)، اوہم (Ω) اور ایمپیر (A) ہیں۔

ا. $\frac{dP}{dt}$ ، $\frac{dR}{dt}$ اور $\frac{di}{dt}$ کا تعلق کیا ہے جہاں P ، R اور i میں سے کوئی بھی مستقل نہیں ہے۔

ب. مستقل P کی صورت میں $\frac{dR}{dt}$ اور $\frac{di}{dt}$ کا کیا تعلق ہے؟

سوال 3.397: کارتیسی محد میں نقطہ $(x, 0)$ اور $(0, y)$ کے بیچ فاصلہ $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ وقت کو t سے ظاہر کریں۔

ا. مستقل y کی صورت میں $\frac{dx}{dt}$ اور $\frac{ds}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ب. اگر x اور y دونوں متغیر ہوں تب $\frac{ds}{dt}$ کا $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کے ساتھ کیا تعلق ہوگا؟

ج. مستقل s کی صورت میں $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کا کیا تعلق ہوگا؟

جواب: (ا) $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt}$ ، (ب) $\frac{ds}{dt} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt}$ ، (ج) $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$

سوال 3.398: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ڈبے کے وتر کی لمبائی $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہوگی۔

ا. فرض کریں x ، y اور z مستقل نہیں ہیں۔ $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

ب. مستقل x کی صورت میں $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

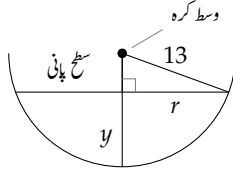
ج. مستقل x کی صورت میں $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

سوال 3.399: ایک مثلث جس کے ضلع a اور b جن کے بیچ زاویہ θ ہو کا رقبہ $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ ہوگا۔

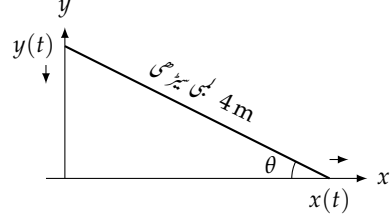
ا. مستقل a اور b کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ب. مستقل b کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ ، $\frac{da}{dt}$ اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ج. a ، b اور θ غیر مستقل ہونے کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ ، $\frac{da}{dt}$ ، $\frac{db}{dt}$ اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟



شکل 3.70: نصف کرہ ٹینکی (سوال 3.409)



شکل 3.69: دیوار کے ساتھ سیڑھی (سوال 3.403)

جواب: (ا) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$ ، (ب) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt}$ ، (ج) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a \sin \theta \frac{db}{dt}$

سوال 3.400: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس r ہے جس سے اس کا رداس 0.01 cm min^{-1} کی شرح سے بڑھتا ہے۔ جب رداس 50 cm ہو تب تختے کا رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

سوال 3.401: مستطیل کی لمبائی l اور چوڑائی w کی شرح تبدیلی 2 cm s^{-1} اور 2 cm s^{-1} ہیں۔ جب $l = 12 \text{ cm}$ اور $w = 5 \text{ cm}$ ہو تب شرح تبدیلی (ا) رقبہ، (ب) محیط، (ج) وتر کیا ہوں گے؟ ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟
جواب: (ا) $14 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ سے بڑھتا ہے؛ (ب) 0 cm s^{-1} ، مستقل؛ (ج) $-\frac{14}{13} \text{ cm s}^{-1}$ ، گھٹ رہا ہے۔

سوال 3.402: مستطیل ڈبے کے ضلع کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ان کی شرح تبدیلی

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}$$

ہیں۔ جس لمحہ $x = 4$ ، $y = 3$ اور $z = 2$ ہوں اس لمحہ ڈبے کے (ا) حجم، (ب) سطحی رقبہ، (ج) وتر $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہوگی؟

سوال 3.403: دیوار کے ساتھ لگی لمبی سیڑھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے (شکل 3.69)۔ جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیڑھی کا فاصلہ 3 m ہو اس لمحہ پر سیڑھی کا یہ سر 0.5 m s^{-1} کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

ا. اس لمحے پر سیڑھی کا بالائی سر کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

ب. سیڑھی، زمین اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔ اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ج. اس لمحے پر سیڑھی اور زمین کے بیچ زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟

جواب: (i) $-\frac{3\sqrt{7}}{14} \text{ m s}^{-1}$ ، (ب) $-\frac{\sqrt{7}}{14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

سوال 3.404: دو ہوائی جہاز 7000 m کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار 1000 km h^{-1} جبکہ جہاز ب کی رفتار 850 km h^{-1} ہے۔ جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ 50 km اور ب کا فاصلہ 100 km ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.405: ایک لڑکی 300 m بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ ہوا پتنگ کو افقی رخ 25 m min^{-1} کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔ اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ 500 m ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟
جواب: 20 m s^{-1}

سوال 3.406: پرانے انجن کی بیلن کو خراہ کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا پسٹن ڈالا جاتا ہے۔ خراہ کی مشین بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں $25 \mu\text{m}$ بڑھاتی ہے۔ جب رداس 9.8 cm ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال 3.407: ریت کو $10 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی $\frac{3}{8}$ ہوتی ہے۔ جب ڈھیر 4 m اونچا ہو اس لمحہ ڈھیر کی (i) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب cm s^{-1} میں دیں۔
جواب: (i) $\frac{dh}{dt} = 11.19 \text{ cm min}^{-1}$ ، (ب) $\frac{dr}{dt} = 14.92 \text{ cm min}^{-1}$

سوال 3.408: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی 6 m اور رداس 45 m ہیں سے پانی کو $50 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔ مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔ (i) جب پانی 5 m گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحے پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب cm s^{-1} میں دیں۔

سوال 3.409: نصف کرہ جس کا رداس $R = 13 \text{ m}$ ہے سے پانی کا انکس $6 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے کیا جاتا ہے (شکل 3.70)۔ پانی کا حجم $H = \frac{\pi}{3} y^2 (3R - y)$ ہے جہاں y پانی کی گہرائی ہے۔

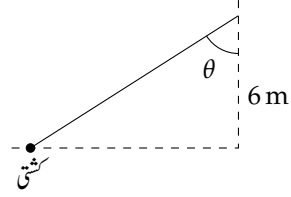
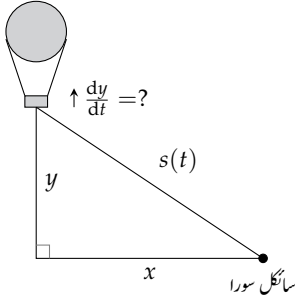
ا. جب پانی کی گہرائی 8 m ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

ب. جب پانی کی گہرائی y ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟

ج. جب پانی 8 m گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

جواب: (i) $-\frac{1}{24\pi} \text{ m min}^{-1}$ ، (ب) $r = \sqrt{26y - y^2} \text{ m}$ ، (ج) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi} \text{ m min}^{-1}$

سوال 3.410: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔ فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔ دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔



شکل 3.71: کشتی کو بندرگاہ میں کھینچا جاتا ہے (سوال 3.412)

شکل 3.72: غبارہ کے نیچے سے گاڑی گزرتی ہے (سوال 3.413)

سوال 3.411: ایک غبارے میں $100\pi \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے ہیلیم ^{45}He گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس 5 m ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہوگا؟
جواب: 1 m/min ، $40\pi \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$

سوال 3.412: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے 6 m اونچائی سے بندرگاہ کی طرح کھینچا جاتا ہے (شکل 3.71)۔ رسی کو 2 ms^{-1} کی رفتار کھینچا جاتا ہے۔ (i) جب رسی کی لمبائی 10 m ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہوگا؟

سوال 3.413: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ 1 ms^{-1} سے حرکت کرتا ہے۔ جب یہ 65 m بلندی پر پہنچتا ہے ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی 17 ms^{-1} کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے (شکل 3.72)۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟
جواب: 11 ms^{-1}

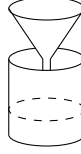
سوال 3.414: مخروط چھلنی میں بیک وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں $10 \text{ cm}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے بھری جاتی ہے (شکل 3.73)۔ (i) چھلنی میں چائے کی گہرائی 5 cm ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحے پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟

سوال 3.415: اخراج قلب جرمی کے اڈولف فک نے 1860 کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس ہیلے کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً 7 L min^{-1} خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر 6 L min^{-1} اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب 30 L min^{-1} تک خون خارج کر سکتا ہے۔

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

helium⁴⁵



شکل 3.73: مخروط چھلنی (سوال 3.414)

سے کیا جاسکتا ہے جہاں سانس سے خارج CO_2 کی ملی لٹرن فی منٹ میں مقدار کو Q سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں CO_2 کی کثافت mL/L اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں CO_2 کی کثافت کے فرق کو D سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں $Q = 223 \text{ mL/min}$ اور $D = 97 - 56 = 41 \text{ mL/L}$ کی صورت میں

$$y = \frac{223 \text{ mL/min}}{41 \text{ mL/L}} \approx 5.68 \text{ L/min}$$

ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ جب $Q = 233$ اور $D = 41$ ہوں تب D کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ Q میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی ہے۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟
جواب: $\frac{466}{1681} \text{ L min}^{-1}$ سے بڑھ رہا ہے۔

سوال 3.416: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ x اشیاء کو $c(x)$ لاگت، $r(x)$ آمدنی اور $p(x) = r(x) - c(x)$ منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔ x اور $\frac{dx}{dt}$ کی درج ذیل قیمتوں کے لئے $\frac{dr}{dt}$ ، $\frac{dc}{dt}$ اور $\frac{dp}{dt}$ کا حساب کریں۔

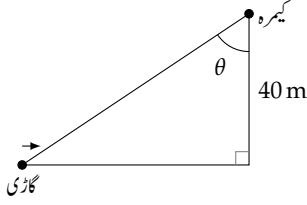
ا.

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x; \quad \frac{dx}{dt} = 0.1, \quad x = 2$$

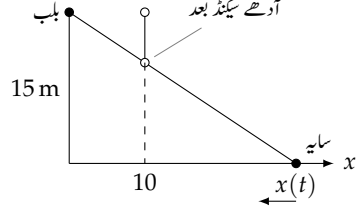
ب.

$$r(x) = 70x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{x}; \quad \frac{dx}{dt} = 0.05, \quad x = 1.5$$

سوال 3.417: قطع مکانی پر حرکت۔ ایک ذرہ قطع مکانی $y = x^2$ پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدود 10 ms^{-1} کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بتاتا ہے۔ جب $x = 3 \text{ m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: 1 rad s^{-1}



شکل 3.75: گاڑی کی ویڈیو (سوال 3.422)



شکل 3.74: گیند کا سایہ (سوال 3.421)

سوال 3.418: دوسرا قطع مکانی۔ ایک ذرہ دائیں سے بائیں جانب قطع مکانی $y = \sqrt{-x}$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدود $\frac{8}{\text{ms}}$ سے گھٹتا ہے۔ مبداء سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x = -4 \text{ m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.419: مستوی پر حرکت۔ کار تیزی محدود پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے تعین گر x اور y محدود وقت t کے قابل تفرق تقابل ہیں۔ اگر $\frac{dx}{dt} = -1 \text{ m s}^{-1}$ اور $\frac{dy}{dt} = -5 \text{ m s}^{-1}$ ہوں تب مبداء سے ذرے کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب: -5 m s^{-1}

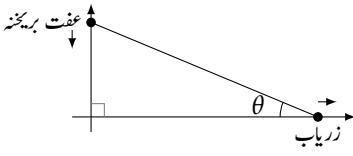
سوال 3.420: حرکت پذیر سایہ۔ 2 m قد کا ایک شخص گلی میں روشنی کے کھمبے کی طرف 1.5 m s^{-1} رفتار سے چل رہا ہے۔ کھمبے میں نسب بلیب زمین سے 5 m بلندی پر ہے۔ جب شخص کھمبے سے 4 m فاصلے پر ہو، اس کا سایہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.421: دوسرا حرکت کرتا سایہ۔ کھمبے پر بلیب 15 m بلندی پر نسب ہے۔ کھمبے سے 10 m فاصلے پر اتنی ہی بلندی سے ایک گیند کو زمین پر گرنے دیا جاتا ہے (شکل 3.74)۔ آدھے سیکنڈ بعد زمین پر گیند کا سایہ کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ ($g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$) جواب: 490 m s^{-1}

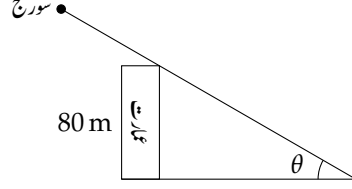
سوال 3.422: آپ 80 km h^{-1} رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی سے 150 m کے فاصلے پر 40 m کی بلندی سے گاڑی کی ویڈیو⁴⁶ بنا رہے ہیں جو سیدھی آپ کی طرف آرہی ہے (شکل 3.75)۔ اس لمحے پر کیمرے کا زاویہ میلان سے شرح سے تبدیل ہو گا؟ دو سیکنڈ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

سوال 3.423: برف کی پگھلتی تہہ۔ ایک لوہے کا کرہ جس کا رداس 0.1 m ہے پر برف کی یکساں موٹائی کی تہہ جمائی جاتی ہے جو $10 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ کی شرح سے پگھلتی ہے۔ جس لمحے پر تہہ کو موٹائی 2 cm ہو اس لمحے پر تہہ کی موٹائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ جواب: $\frac{dr}{dt} = 55 \mu\text{m s}^{-1}$, $\frac{dS}{dt} = 1.66 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

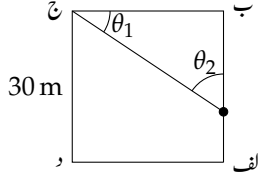
سوال 3.424: موٹر وے پولیس۔ 1 km بلندی پر ایک جہاز پشاور سے اسلام آباد کی موٹر وے کے ٹھیک اوپر 500 km h^{-1} کی رفتار سے پرواز کرتے ہوئے موٹر وے پر سامنے سے آمد گاڑی کا فاصلہ 5 km ناپتا ہے جو اس لمحے پر 100 km h^{-1} کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ گاڑی کی رفتار تلاش کریں۔



شکل 3.77: عفت اور زریاب کی چال قدمی (سوال 3.426)



شکل 3.76: عمارت کا سایہ (سوال 3.425)



شکل 3.78: بچوں کا کھیل (سوال 3.427)

سوال 3.425: عمارت کا سایہ۔ سال کے کسی ایک دن سورج 80 m بلند عمارت کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے (شکل 3.76)۔ جب عمارت کا سایہ ہموار زمین پر 60 m ہو، سایے کے سر سے سورج تک کا خط زمین کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے جو اس لمحہ $0.27^\circ/\text{min}$ کی شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔ سایے کی لمبائی کس شرح سے گھٹتی ہے؟ جواب cm/min میں دیں اور ریڈیئن کا استعمال کرنا نہ بھولیں۔
جواب: $58.9 \text{ cm}/\text{min}$

سوال 3.426: چال قدمی۔ ایک چوراہے پر دو سڑک 90° زاویے سے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک سڑک پر عفت بریجنز چوراہے کی جانب 2 m s^{-1} کی رفتار سے بڑھتی ہے جبکہ دوسری سڑک پر اس کا چھوٹا بھائی زریاب خان 1.5 m s^{-1} کی رفتار سے چوراہے سے دور چلا جاتا ہے (شکل 3.77)۔ جب عفت بریجنز اور زریاب خان چوراہے سے بالترتیب 20 m اور 15 m کے فاصلے پر ہوں، زاویہ θ کی شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

سوال 3.427: بچوں کا کھیل۔ ایک کھیل میں کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے دوڑ کر گھری کی الٹ رخ پکڑو راہ پر 6 m s^{-1} کی رفتار سے پکڑ لگتا ہے۔ پکڑ کے اطراف کی لمبائی 30 m ہے (شکل 3.78)۔

ا. جب کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے 10 m فاصلے پر ہو، اس کا نقطہ ج سے فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ب. اس لمحے پر زاویہ θ_1 اور θ_2 کس شرح سے تبدیل ہوتے ہیں؟

جواب: (ا) $\frac{-12}{\sqrt{13}} \text{ m s}^{-1}$ ، (ب) $\frac{d\theta_1}{dt} = -0.138 \text{ rad s}^{-1}$ ، $\frac{d\theta_2}{dt} = 0.138 \text{ rad s}^{-1}$

سوال 3.428: ایک گھڑی کے سیکنڈوں کی سوئی کی لمبائی 20 cm ہے۔ جب یہ سوئی چار بجے پر ہو اس لمحہ بارہ بجے کی نشان سے اس کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.429: بحری جہاز۔ نقطہ M سے دو بحری جہاز آپس میں 120° کا زاویہ بناتے ہوئے روانہ ہوتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار 28 km h^{-1} ہے جبکہ جہاز ب کی رفتار 20 km h^{-1} ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $4\sqrt{109} \text{ km h}^{-1}$

باب 4

تفرق کا استعمال

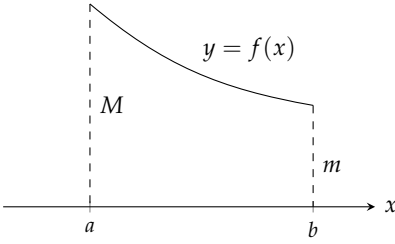
اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ ہم تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی کرتے ہیں اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیدائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کی صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔ مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ مکملی احصاء (باب 5) کی راہ ہموار کرتا ہے۔

4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں

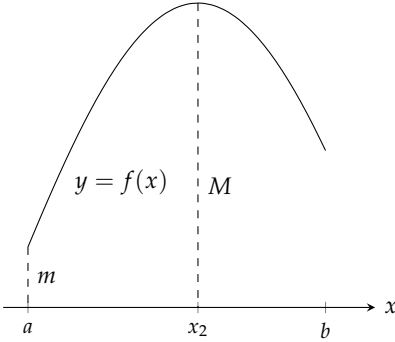
اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

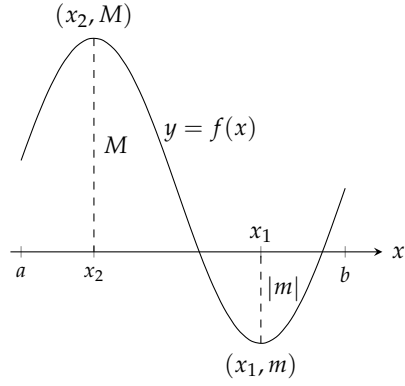
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کا اس دائرہ کار پر مطلق بلند تر قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت ہو گا جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں ان انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ مکمل احصاء کی نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔



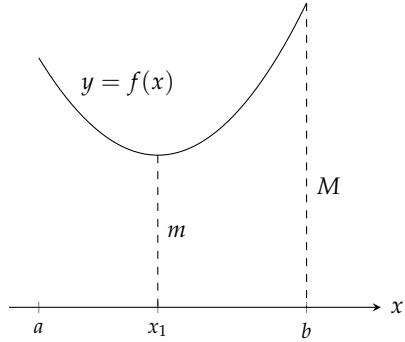
(ب) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم آخری نقطوں پر ہے۔



(د) زیادہ سے زیادہ اندرونی نقطہ جبکہ کم سے کم آخری نقطہ پر ہے۔

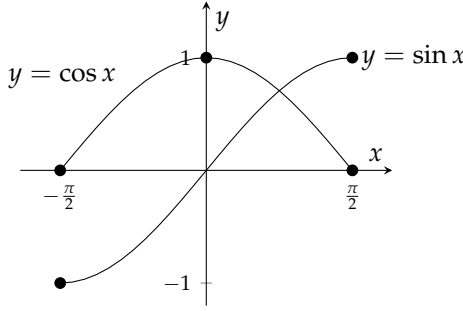


(ل) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔



(ج) کم سے کم اندرونی نقطہ جبکہ زیادہ سے زیادہ آخری نقطہ ہے۔

شکل 4.1: زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔



شکل 4.2: ترسیم برائے مثال 4.1

مسئلہ 4.1: استمراری تفاعل کا مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ
بند دائرہ کار I کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل f کا I پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت M اور مطلق کم سے کم قیمت m پایا جائے
گا۔ یعنی I میں ایسا x_1 اور x_2 پایا جائے گا کہ $f(x_1) = m$ اور $f(x_2) = M$ ہوں اور I میں تمام x کے لئے
 $m \leq f(x) \leq M$ ہو (شکل 4.1)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

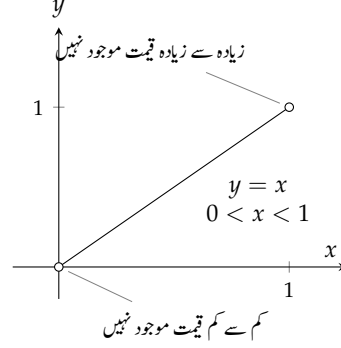
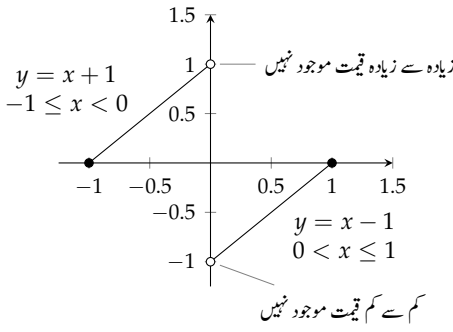
مثال 4.1: وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور دو بار کم سے کم قیمت
0 اختیار کرتا ہے۔ اسی وقفے پر تفاعل $g(x) = \sin x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور ایک بار کم سے کم قیمت -1 اختیار
کرتا ہے (شکل 4.2)۔ □

جیسا شکل 4.3 اور شکل 4.4 واضح کرتے ہیں مسئلہ 4.1 میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ ان کے بغیر مسئلے سے اخذ
نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.4 میں تفاعل

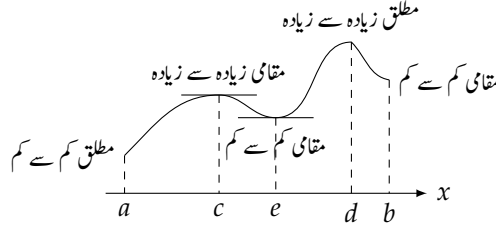
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-1, 1]$ پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ $x = 0$ پر، جس کی بنا تفاعل کا نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی
اس کی کوئی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔



شکل 4.4: واحد ایک نقطہ عدم استمرار کی بنا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں غیر یقینی ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.3: کھلا وقفہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں ہے۔



شکل 4.5: مقامی اور مطلق انتہا۔

مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

شکل 4.5 میں تقابل کے پانچ انتہا نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اس تقابل کا کم سے کم نقطہ a پر ہے اگرچہ e پر بھی x کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے f کی قیمت کم ہے۔ نقطہ c پر تقابل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے جبکہ d پر اس کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔

تعریف: مطلق انتہائی قیمتیں

فرض کریں تقابل f کا دائرہ کار D ہے۔ نقطہ c پر تقابل f کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تب پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \leq f(c)$$

اور D میں c پر تب f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \geq f(c)$$

□

مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم کو مطلق انتہا¹ کہتے ہیں۔ انہیں عالمگیر² انتہا بھی کہتے ہیں۔

ایک جیسے تفاعل، جنہیں ایک جیسا تعریفی قاعدہ بیان کرتا ہو، کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

مثال 4.2:

انتہا مطلق	کار دائرہ D	تفاعل تعریفی
ہے 0 قیمت کم سے کم مطلق پر $x = 0$ جبکہ ہے نہیں زیادہ سے زیادہ مطلق	$(-\infty, \infty)$	(i) $y = x^2$
ہے 0 قیمت کم سے کم مطلق پر $x = 0$ جبکہ ہے 4 پر $x = 2$ قیمت زیادہ سے زیادہ مطلق	$[0, 2]$	(ب) $y = x^2$
ہے نہیں موجود قیمت کم سے کم مطلق جبکہ ہے 4 پر $x = 2$ قیمت زیادہ سے زیادہ مطلق	$(0, 2]$	(ج) $y = x^2$
ہے جاتا پایا نہیں قیمت مطلق کوئی	$(0, 2)$	(د) $y = x^2$

□

شکل 4.6 دیکھیں۔

تعریف: مقامی انتہا قیمت

تفاعل f کا کھلے دائرہ کار D میں اندرونی نقطہ c پر اس صورت مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جب D میں کسی بھی کھلا وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں تمام x کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ c پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

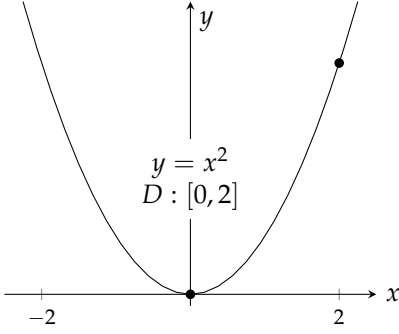
$$f(x) \geq f(c)$$

□

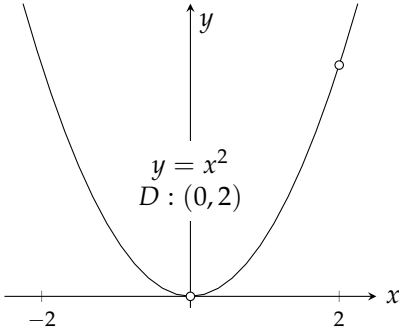
ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفہ کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔ یوں آخری سر c پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلا وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل 4.5 میں تفاعل f کا c اور d پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ a ، e اور b پر اس کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہیں۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت بھی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اپنی پڑوس میں بھی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ یوں تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتوں کی جدول میں مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی کم سے کم قیمتوں کی جدول میں مطلق کم سے کم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

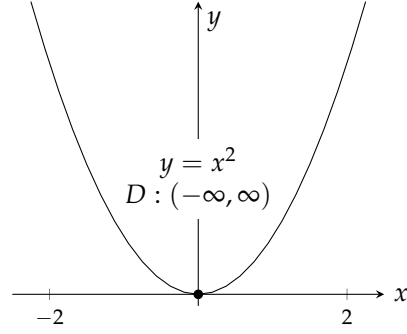
¹extrema
²global



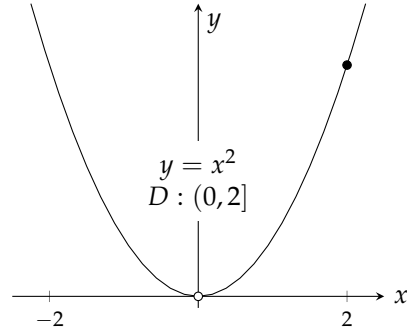
(ب) مطلق کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہیں



(د) نا مطلق زیادہ سے زیادہ اور نا مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(i) مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے

شکل 4.6: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال 4.2)۔

انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھاتا ہے تفاعل کے انتہا کی حصول کے لئے صرف چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہوگی۔

مسئلہ 4.2: ایک رتبی مسئلہ برائے مقامی انتہا فرض کریں تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ c پر f کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو اور c پر f' معین ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر $f'(c)$ کی قیمت صفر ہوگی ہم دکھاتے ہیں کہ $f'(c)$ مثبت نہیں ہو سکتا ہے اور کہ $f'(c)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے۔ صفر وہ واحد عدد ہے جو نا مثبت اور نا منفی ہے لہذا $f'(c)$ صفر ہوگا۔

فرض کریں کہ c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.7)۔ یوں c کے قریبی پڑوس میں تمام x پر $f(x) - f(c) \leq 0$ ہوگا۔ چونکہ c اندرونی نقطہ ہے لہذا $f'(c)$ کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ $x = c$ پر دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور $f'(c)$ کے برابر ہیں۔ ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔ چونکہ c کے دائیں جانب $x - c > 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہذا

$$(4.1) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ہوگا۔ اسی طرح c کے بائیں جانب $x - c < 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہذا

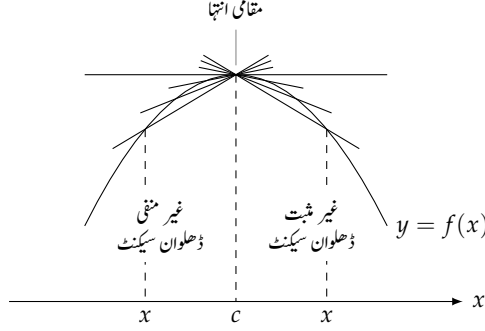
$$(4.2) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

ہوگا۔ مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کو ملا کر $f'(c) = 0$ ملتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔ مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے $f(x) \geq f(c)$ استعمال کرنا ہوگا جس سے مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب $f'(c) = 0$ ہوگا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔



شکل 4.7: اندرونی نقطہ پر مقامی انتہا پر ڈھلوان صفر ہو گی (مسئلہ 4.2)۔

1. اندرونی نقطہ جہاں $f' = 0$ ہو۔

2. اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین ہو۔

3. f کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل f کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین یا صفر ہو کو نقطہ فاصل³ کہتے ہیں۔

□

خلاصہ
تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کی دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں۔

عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ 4.1 ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔ اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جاسکتا ہے کہ آیا نقطہ پر زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.3: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔
حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا واحد نقطہ فاصل $f'(x) = 2x = 0$ یعنی $x = 0$ پر ہوگا۔ ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل $x = 0$ اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 1$ پر دیکھنی ہوں گی۔

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0 & \text{قیمت پر فاصل نقطہ} \\ f(-2) = 4 & \text{قیمت پر نقطہ آخری} \\ f(1) = 1 & \text{قیمت پر نقطہ آخری} \end{array}$$

تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 ہے جو نقطہ $x = -2$ پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے۔ □

مثال 4.4: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $g(t) = 8t - t^4$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔
حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہوگا جہاں $g'(t) = 0$ ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\ t^3 &= 2 \\ t &= 2^{1/3} \end{aligned}$$

ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں ہے۔ یوں تفاعل کے مقامی انتہا قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی: (شکل 4.8)

$$\begin{array}{ll} g(-2) = -32 & \text{قیمت کم سے کم مطلق} \\ g(1) = 7 & \text{قیمت زیادہ سے زیادہ مطلق} \end{array}$$

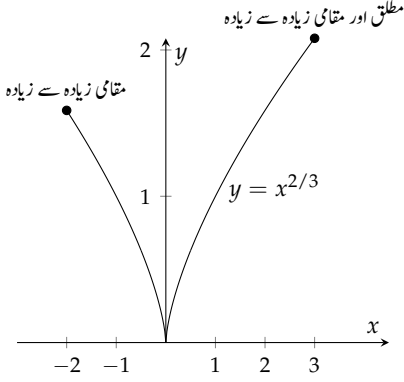
□

مثال 4.5: تفاعل $h(x) = x^{2/3}$ کی $[-2, -3]$ پر مطلق انتہا تلاش کریں۔
حل: ایک رتبی تفرق

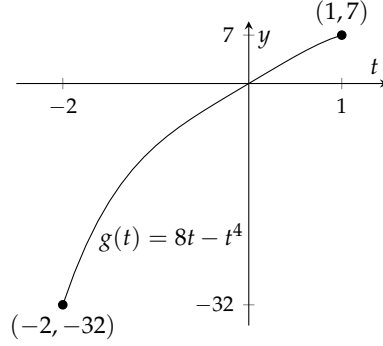
$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا ہے البتہ $x = 0$ پر یہ غیر معین ہے۔ اس نقطہ پر اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 3$ پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

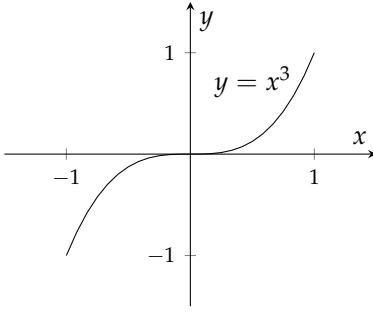
$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\ h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3} \end{aligned}$$



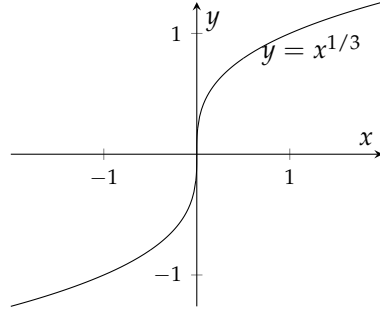
شکل 4.9: ترسیم برائے مثال 4.5



شکل 4.8: ترسیم برائے مثال 4.4



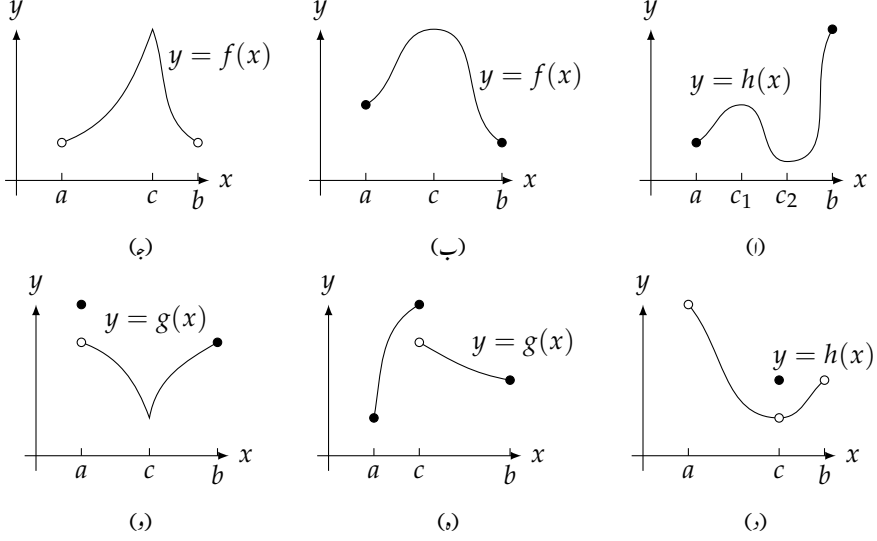
شکل 4.11: $x = 0$ پر $y = x^3$ کا کوئی انتہائی پایا جاتا ہے اگرچہ اس نقطے پر $y' = 3x^2 = 0$ ہے۔



شکل 4.10: نقطہ فاصل $x = 0$ پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $9^{1/3}$ ہے جو نقطہ $x = 3$ پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے (شکل 4.9)۔

اگرچہ تقابل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں، ضروری نہیں ہے کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطہ پر انتہائی قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل 4.10 اور شکل 4.11 اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے اور سوال 4.34 میں آپ سے ایسا تقابل پیش کرنے کو کہا گیا ہے جو اپنے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر انتہائی قیمت اختیار نہیں رکھتا ہے۔



شکل 4.12: اشکال برائے سوال 4.1 تا سوال 4.6

سوالات

ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول
کیا سوال 4.1 تا سوال 4.6 میں $[a, b]$ کے قع تعامل کے مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ سمجھائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ 4.1 میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 4.1: شکل 4.12-ا
جواب: $x = c_2$ پر مطلق کم سے کم؛ $x = b$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ۔

سوال 4.2: شکل 4.12-ب

سوال 4.3: شکل 4.12-ج
جواب: $x = c$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ؛ مطلق کم سے کم غیر موجود۔

سوال 4.4: شکل 4.12-د

سوال 4.5: شکل 4.12-ه
جواب: $x = a$ پر مطلق کم سے کم؛ $x = c$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ۔

سوال 4.6: شکل 4.12-د

بند وقفہ پر مطلق انتہا

سوال 4.7 تا سوال 4.22 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 4.7: $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$
 جواب: $x = -3$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ، $x = -\frac{19}{3}$ پر مطلق کم سے کم۔ شکل 4.13-ا

سوال 4.8: $f(x) = -x - 4, \quad -4 \leq x \leq 1$

سوال 4.9: $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 2$
 جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 3، مطلق کم سے کم: -1، شکل 4.13-ب

سوال 4.10: $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

سوال 4.11: $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \leq x \leq 2$
 جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: -0.25، مطلق کم سے کم: -4، شکل 4.13-ج

سوال 4.12: $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$

سوال 4.13: $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \leq x \leq 8$
 جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2، مطلق کم سے کم: -1، شکل 4.13-د

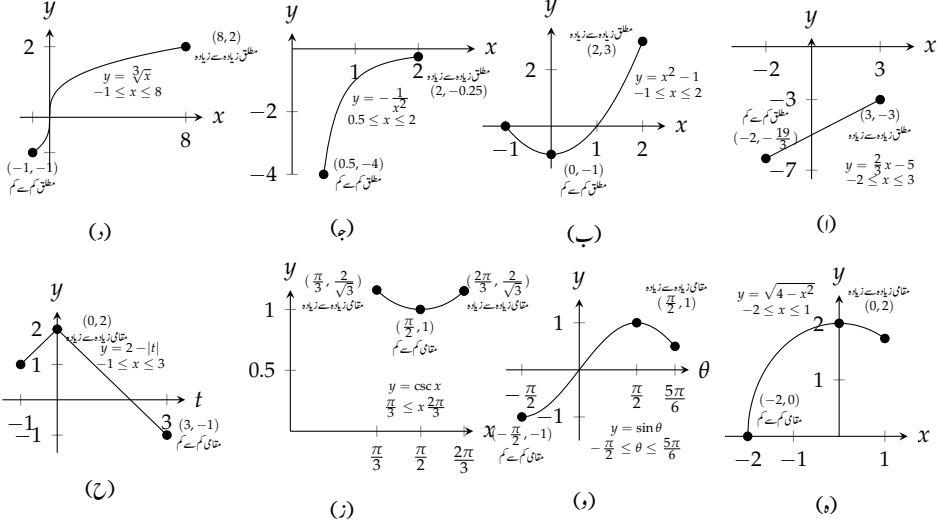
سوال 4.14: $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال 4.15: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1$
 جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2، مطلق کم سے کم: 0، شکل 4.13-ه

سوال 4.16: $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \leq x \leq 0$

سوال 4.17: $f(\theta) = \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$
 جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 1، مطلق کم سے کم: -1، شکل 4.13-و

سوال 4.18: $f(x) = \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$



شکل 4.13: حل تریسبات سوال 4.7 تا سوال 4.22

سوال 4.19: $g(x) = \csc x$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$
 جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، مطلق کم سے کم: -1 ، شکل 4.13-ز

سوال 4.20: $g(x) = \sec x$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

سوال 4.21: $f(t) = 2 - |t|$, $-1 \leq t \leq 3$
 جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2 ، مطلق کم سے کم: -1 ، شکل 4.13-ح

سوال 4.22: $f(t) = |t - 5|$, $-4 \leq t \leq 7$

سوال 4.23 تا سوال 4.26 میں تفاعل کی مطلق کم سے کم اور مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال 4.23: $f(x) = x^{4/3}$, $-1 \leq x \leq 8$
 جواب: $(0, 8)$ پر بڑھتا ہے، $(-1, 0)$ پر گھٹتا ہے، $x = 8$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 16 اور $x = 0$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.24: $f(x) = x^{5/3}$, $-1 \leq x \leq 8$

سوال 4.25: $g(\theta) = \theta^{3/5}$, $-32 \leq \theta \leq 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1 اور $\theta = -32$ پر مطلق کم سے کم -8 ہے۔
جواب: $(-32, 1)$ پر بڑھتا ہے، $\theta = 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1 اور $\theta = -32$ پر مطلق کم سے کم -8 ہے۔

سوال 4.26: $h(\theta) = 3\theta^{2/3}$, $-27 \leq \theta \leq 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال 4.27 تا سوال 4.27 میں دی گئے دائرہ کار پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟
ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال 4.27:

$$f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \text{ا.} \quad k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < \infty \quad \text{د.}$$

$$g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < 2 \quad \text{ب.}$$

$$h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2 \quad \text{ج.} \quad l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty \quad \text{ه.}$$

جواب: (ا) $x = \pm 2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 ہے، مطلق زیادہ سے زیادہ 0 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ب) $x = -2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 ہے، مطلق زیادہ سے زیادہ 0 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ج) مقامی زیادہ سے زیادہ غیر موجود، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (د) $x = -2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ه) مقامی انتہا غیر موجود، مطلق انتہا غیر موجود۔

سوال 4.28:

$$f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{ا.} \quad k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \leq 1 \quad \text{د.}$$

$$g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \leq 1 \quad \text{ب.}$$

$$h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1 \quad \text{ج.} \quad l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0 \quad \text{ه.}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.29: اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ ناقابل تفرق ہے نقطہ $x = 0$ پر f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ کیا یہ مسئلہ 4.2 کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 4.30: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ c ہو تب مسئلہ 4.2 کیوں نا قابل استعمال ہو گا؟

سوال 4.31: اگر جفت تفاعل $f(x)$ کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.32: اگر طاق تفاعل $g(x)$ کی مقامی کم سے کم قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب کیا $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.33: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونا کی صورت میں کیا ہو گا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.34: وقفہ $[0, 1]$ پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا $x = 0$ پر نا کوئی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.35 تا سوال 4.40 میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں $f' = 0$ ہو۔ بعض اوقات f' ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں f' غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ه. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں اور جن نقطوں پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں تلاش کریں۔

سوال 4.35: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2$, $[-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}]$

سوال 4.36: $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1$, $[-\frac{3}{4}, 3]$

سوال 4.37: $f(x) = x^{2/3}(3 - x)$, $[-2, 2]$

سوال 4.38: $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}$, $[-1, \frac{10}{3}]$

سوال 4.39: $f(x) = \sqrt{x} + \cos x$, $[0, 2\pi]$

سوال 4.40: $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}$, $[0, 2\pi]$

4.2 مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لحد $t = 0$) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی t سیکنڈوں میں $s = 4.9t^2$ m کا فاصل طے کرے گا۔ اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لحد t پر اس جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt} = 9.8 \text{ ms}^{-1}$ اور اسراع $a = \frac{dv}{dt} = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ہوگی۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کی اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاؤ تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ ضمنی نتیجہ کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل $f(x)$ محور x کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب $f(x)$ کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مثل رول (1652 – 1719) کا 300 سال پرانا مسئلہ رول ہمیں یقین دہانی کرتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

مسئلہ 4.3: مسئلہ رول⁴
فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $y = f(x)$ استمراری ہے اور وقفہ کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

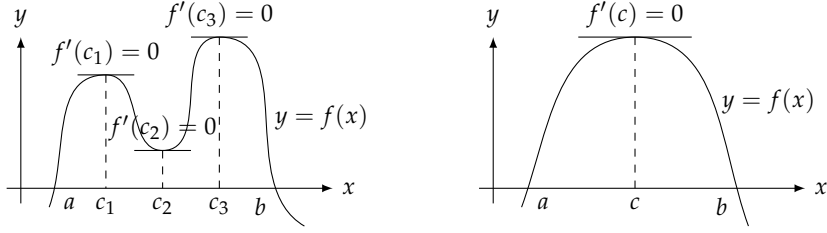
$$f(a) = f(b) = 0$$

تب (a, b) میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ c ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل 4.14)۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: چونکہ f استمراری ہے لہذا $[a, b]$ پر f کے مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

1. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' ہو۔



شکل 4.14: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تقاطع x محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تقاطع کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

2. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' غیر معین ہو۔

3. تقاطع کے دائرہ کار کی آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں a اور b ہیں۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر f کا تفرق پایا جاتا ہے۔ یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ c پر تقاطع کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ 4.2 کے تحت $f'(c) = 0$ ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت دونوں a یا b پر پائے جاتے ہوں تب f مستقل ہو گا۔ یوں $f' = 0$ ہو گا لہذا وقفے کے کسی بھی نقطے کو c لیا جاسکتا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

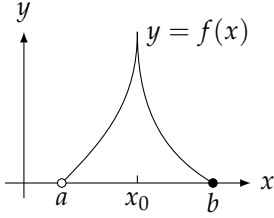
مسئلہ 4.3 میں دیے شرائط لازمی ہیں۔ اگر صرف ایک نقطہ پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترسیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل 4.15)۔

مثال 4.6: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ $[-3, 3]$ کے ہر نقطہ پر استمراری ہے اور $(-3, 3)$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے۔

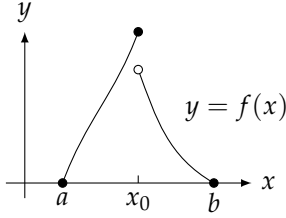
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

چونکہ $f(-3) = f(3) = 0$ ہے لہذا مسئلہ رول کے تحت $a = -3$ اور $b = 3$ کھلا وقفہ کے بیچ کم سے کم ایک نقطہ پر $f' = 0$ ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں $f'(x) = x^2 - 3$ دو نقطوں $x = \sqrt{3}$ اور $x = -\sqrt{3}$ پر صفر کے برابر ہے (شکل 4.16)۔

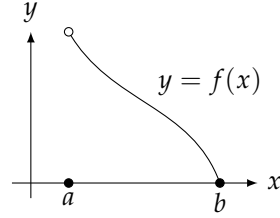
□



(ج) $[a, b]$ پر استمراری لیکن کسی اندرونی نقطہ پر ناقابل تفرق

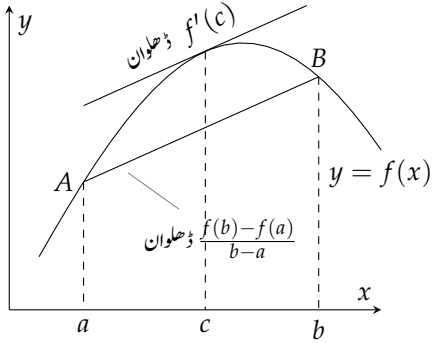


(ب) اندرونی نقطہ پر غیر استمراری

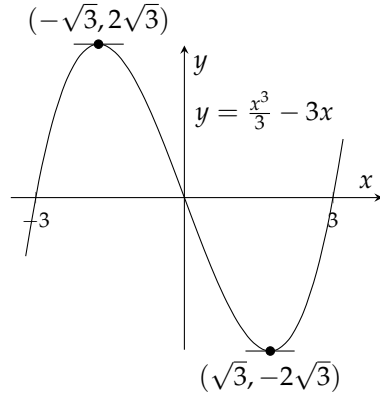


(l) ایک آخری نقطہ پر غیر استمراری

شکل 4.15: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 4.17: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ A اور B کے بیچ کہیں پر تقابل کا مماس قطع AB کے متوازی ہو گا۔



شکل 4.16: ترسیم برائے مثال 4.6

مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترچھی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل 4.17)۔ قطع AB کے متوازی نقطہ A اور B کے چھ کھیں پر تفاعل کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کی ڈھلوان قطع کی ڈھلوان کے برابر ہوگی۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ اوسط قیمت⁵ فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر $y = f(x)$ استمراری ہے اور اس کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہے تب (a, b) میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$(4.3) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ثبوت: ہم f کی ترسیم پر دو نقطوں $A(a, f(a))$ اور $B(b, f(b))$ کے چھ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل 4.18)۔ یہ لکیر درج ذیل تفاعل کی ترسیم ہوگی۔

$$(4.4) \quad g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (\text{نقطہ ڈھلوان صورت})$$

نقطہ x پر f اور g کے چھ انحصالی فاصلہ

$$(4.5) \quad \begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$

ہوگا۔ شکل 4.18-ب میں f ، g اور h دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفہ پر f اور g استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ f اور g دونوں نقطہ A اور B سے گزرتے ہیں لہذا $h(a) = h(b) = 0$ ہے۔ یوں (a, b) میں کسی نقطہ c پر $h'(c) = 0$ ہوگا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات 4.3 میں درکار ہے۔

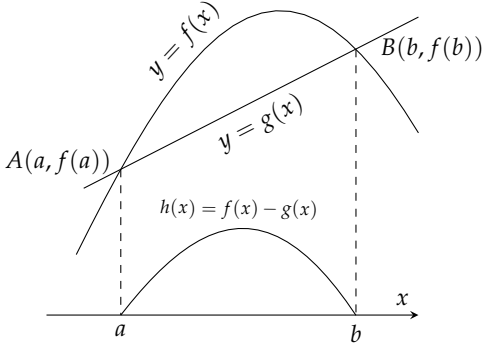
مساوات 4.3 کی تصدیق کی خاطر ہم x کے لحاظ سے مساوات 4.5 کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں $x = c$ پر کرتے ہیں۔

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{تفرق})$$

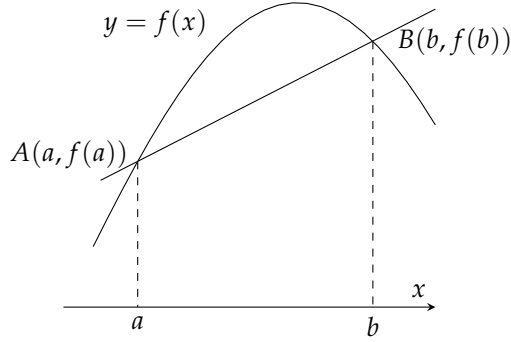
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x = c)$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (h'(c) = 0)$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



(ب) $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ انفی فاصلہ $h(x)$ ہے۔



(i) وقفہ $[a, b]$ پر f اور قطع AB کے ترسیم۔

شکل 4.18: مسئلہ اوسط قیمت۔

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

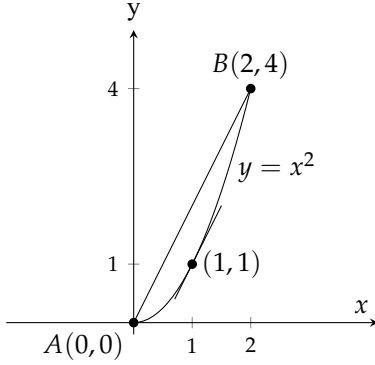
دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ a یا b پر f کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں ہے البتہ ان نقطوں پر f کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل 4.19)۔ ہم عموماً c کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ c موجود ہے۔ اگلی مثال کی طرح بعض اوقات ہم c کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذ و نادر ہو گا۔

مثال 4.7: وقفہ $0 \leq x \leq 2$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ استمراری ہے اور $0 < x < 2$ پر یہ قابل تفرق ہے (شکل 4.20)۔ چونکہ $f(0) = 0$ اور $f(2) = 4$ ہیں لہذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ c پر تفرق $f'(x) = 2x$ کی قیمت لازماً $\frac{4-0}{2-0} = 2$ ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم $2x = 2$ کو حل کرتے ہوئے $x = c = 1$ حاصل کر پاتے ہیں۔ □

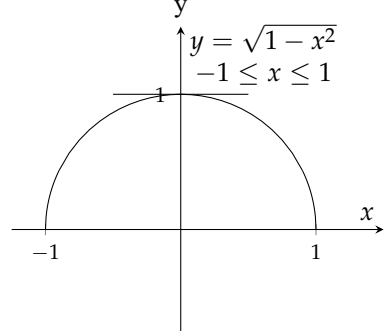
طبعی تشریح

اگر ہم $[a, b]$ پر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ کو f کی اوسط تبدیلی اور $f'(c)$ کو لمحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لمحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال 4.8: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ ان 8 سیکنڈوں کے لئے گاڑی کی اوسط رفتار $\frac{120}{8} = 15 \text{ m s}^{-1}$ ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی لمحہ رفتار پچاس ٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔ □



شکل 4.20: نقطہ $c = 1$ پر مماس قطع AB کے متوازی ہے (مثال 4.7)



شکل 4.19: اگرچہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ نقطہ -1 اور 1 پر ناقابل تفرق ہے یہ $[-1, 1]$ پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔

ضمنی نتائج اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا ضمنی نتیجہ اس کا جواب دیتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 4.1: صفر تفرق کے تفاعل مستقل ہوں گے
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = 0$ ہو تب I میں تمام x پر $f(x) = C$ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ I پر تفاعل f کی قیمت مستقل ہو تب I پر f قابل تفرق ہو گا اور I میں تمام x پر $f'(x) = 0$ ہو گا۔ ضمنی نتیجہ اس کا الٹ پیش کرتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ I پر f کی قیمت مستقل ہے۔ ہم I میں ہر دو نقطوں x_1 اور x_2 پر $f(x_1) = f(x_2)$ دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں x_1 اور x_2 وقفہ I میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بائیں سے دائیں جانب ہے لہذا $x_1 < x_2$ ہو گا۔ یوں $[x_1, x_2]$ پر f مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ کہ ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔ یوں x_1 اور x_2 کے بیچ کسی نقطہ c پر

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

ہو گا۔ چونکہ پورے I پر $f' = 0$ ہے لہذا اس مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

□

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا ہم اسراع سے پیچھے کی طرف چلتے ہوئے رفتار اور ہٹاؤ تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ کا جواب اگلا ضمنی نتیجہ پیش کرتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 4.2: ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = g'(x)$ ہو تب ایسا مستقل C موجود ہو گا کہ I میں تمام x پر $f(x) = g(x) + C$ ہو۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: I میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق $h = f - g$ کا تفرق

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

ہو گا۔ یوں ضمنی نتیجہ 4.1 کے تحت I پر $h(x) = C$ ہو گا۔ یوں $f(x) - g(x) = C$ یا $f(x) = g(x) + C$ ہو گا۔

□

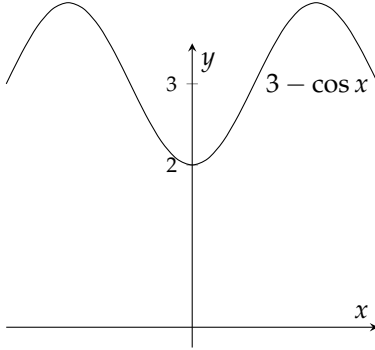
ضمنی نتیجہ 4.2 کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا مستقل فرق ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ $(-\infty, \infty)$ پر $f(x) = x^2$ کا تفرق $2x$ ہے۔ ایسا دوسرا تفاعل جس کا $(-\infty, \infty)$ پر تفرق $2x$ ہو گا کلیہ لازماً $x^2 + C$ ہو گا (شکل 4.21)۔

مثال 4.9: ایسا تفاعل $f(x)$ تلاش کریں جس کا تفرق $\sin x$ ہو اور جو نقطہ $(0, 2)$ سے گزرتا ہو۔
حل: چونکہ $g(x) = -\cos x$ کا تفرق بھی $\sin x$ ہے لہذا $f(x) = -\cos x + C$ ہو گا۔ دیا گیا نقطہ اس میں پر کرتے ہوئے مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

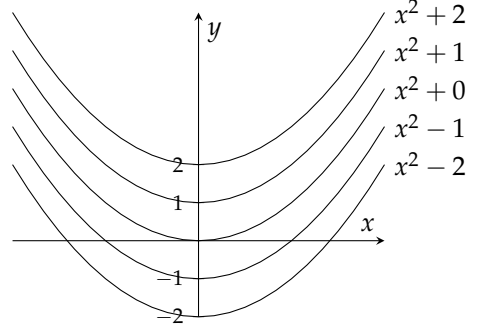
$$f(0) = -\cos(0) + C = 2 \implies C = 3$$

□

یوں درکار تفاعل $f(x) = -\cos x + 3$ ہے (شکل 4.22)۔



شکل 4.22: ترسیم برائے مثال 4.9



شکل 4.21: ضمنی نتیجہ 4.2 کہتا ہے کہ ایک جیسے تفرق والے تقابل میں صرف انتصابی فرق پایا جاتا ہے۔

اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاؤ کا حصول

سطح زمین کے قریب جہاں $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاؤ تلاش کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار v ایسا تقابل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ $g(t) = 9.8t$ کا تفرق 9.8 ہے لہذا ضمنی نتیجہ 4.2 کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ لہذا $t = 0$ پر جسم ساکن ہو گا لہذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \implies C = 0$$

ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تقابل $v(t) = 9.8t$ ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $h(t) = 4.9t^2$ کا تفرق $9.8t$ ہے لہذا ضمنی نتیجہ 4.2 کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ چونکہ لہذا $t = 0$ پر ہٹاؤ صفر ہے لہذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \implies C = 0$$

یعنی $s(t) = 4.9t^2$ ہو گا۔

کسی تقابل کی شرح تبدیلی سے تقابل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

بڑھتا تقابل اور گھٹتا تقابل

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تقابل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا ضمنی نتیجہ جو اس کا جواب دیتا ہے کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تقابل کا تفرق مثبت اور گھٹتے ہوئے تقابل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف: فرض کریں وقفہ I پر تقابل f معین ہے اور اس وقفہ پر x_1 اور x_2 کوئی بھی دو نقطے ہیں۔

1. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو تب I پر f بڑھتا⁶ تقابل کہلاتا ہے۔

2. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) > f(x_2)$ ہو تب I پر f گھٹتا⁷ تقابل کہلاتا ہے۔

□

ضمنی نتیجہ 4.3: بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کا پہلا تفرقی پرکھ
فرض کریں $[a, b]$ پر f استمراری اور (a, b) پر f قابل تفرق ہے۔

• اگر (a, b) کے ہر نقطہ پر $f' > 0$ ہو تب $[a, b]$ پر f بڑھتا ہے۔

• اگر (a, b) کے ہر نقطہ پر $f' < 0$ ہو تب $[a, b]$ پر f گھٹتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: فرض کریں $[a, b]$ میں x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں جہاں $x_1 < x_2$ ہے۔ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر مسئلہ اوسط قیمت تقابل f کے لئے کہتا ہے کہ

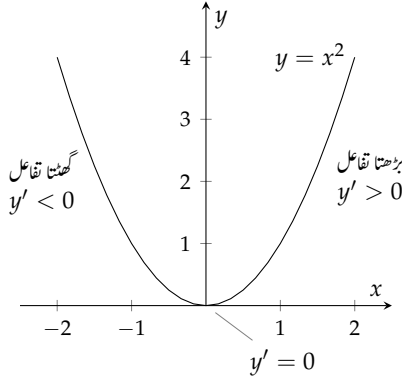
$$(4.6) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

ہو گا جہاں x_1 اور x_2 کے بیچ c ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ $x_2 - x_1$ مثبت قیمت ہے لہذا مساوات 4.6 کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہوگی جو $f'(c)$ کی ہے۔ یوں (a, b) پر مثبت $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_2) > f(x_1)$ ہو گا جبکہ (a, b) پر منفی $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو گا۔

□

مثال 4.10: وقفہ $(-\infty, 0)$ پر تقابل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x < 0$ ہے لہذا اس وقفے پر f گھٹتے
گا۔ وقفہ $(0, \infty)$ پر تقابل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x > 0$ ہے لہذا اس وقفے پر f بڑھے گا (شکل 4.23)۔

□



شکل 4.23: ترسیم برائے مثال 4.10

سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں c کی تلاش
سوال 4.41 تا سوال 4.44 میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لئے c کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

سوال 4.41: $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $[0, 1]$
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 4.42: $f(x) = x^{2/3}$, $[0, 1]$

سوال 4.43: $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[\frac{1}{2}, 2]$
جواب: 1

سوال 4.44: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $[1, 3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال
سوال 4.45 تا سوال 4.48 میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.45: $f(x) = x^{2/3}$, $[-1, 8]$
جواب: نہیں کرتا؛ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = 0$ پر f ناقابل تفرق ہے۔

سوال 4.46: $f(x) = x^{4/5}$, $[0, 1]$

سوال 4.47: $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $[0, 1]$
جواب: کرتا ہے۔

سوال 4.48: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

سوال 4.49: درج ذیل تقابل $x = 0$ اور $x = 1$ پر صفر کے برابر ہے اور $(0, 1)$ پر قابل تفرق ہے لیکن (a, b) پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ $(0, 1)$ پر کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.50: وقفہ $[0, 2]$ پر a ، m اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے درج ذیل تقابل مسئلہ اوسط قیمت کی قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال 4.51:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کے یک رتبی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

$$1. y = x^2 - 4$$

$$2. y = x^2 + 8x + 15$$

$$3. y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$$

سوال 4.59: فرض کریں $[a, b]$ پر f قابل تفریق ہے اور $f(b) < f(a)$ ہے۔ کیا $[a, b]$ پر f' کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟

سوال 4.60: فرض کریں $[a, b]$ پر f اور g قابل تفریق ہیں اور $f(a) = g(a)$ اور $f(b) = g(b)$ ہیں۔ دکھائیں کہ a اور b کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں f اور g کی ترسیمات کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال 4.61: فرض کریں x کی ہر قیمت کے لئے f قابل تفریق ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f(1) = 1$ ہے اور $(-\infty, 1)$ پر $f' < 0$ ہے اور $(1, \infty)$ پر $f' > 0$ ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام x پر $f(x) \geq 1$ ہو گا۔

ب. کیا $f'(1) = 0$ لازماً ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 4.62: فرض کریں $f(x) = px^2 + qx + r$ بند وقفہ $[a, b]$ پر معین ہے۔ دکھائیں کہ (a, b) میں ٹھیک ایک نقطہ c پر f مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ پر پورا اترتا ہے۔

سوال 4.63: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \sin x \sin(x+2) - \sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.64: اگر دو تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک جیسی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک جیسے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.65:

ا. دکھائیں کہ تفاعل $g(x) = \frac{1}{x}$ اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھومتا ہے۔

ب. اگر جزو (i) کا نتیجہ درست ہو تب $g(1) = 1$ کس طرح $g(-1) = -1$ سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال 4.66: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ میں تفاعل f معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر f پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$\text{زیادہ سے زیادہ } f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \text{کم سے کم } f'$$

جہاں کم سے کم f' اور زیادہ سے زیادہ f' سے مراد $[a, b]$ پر بالترتیب f' کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

سوال 4.67: اگر $0 \leq x \leq 0.1$ پر $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ ہو اور $f(0) = 1$ ہو تب سوال 4.66 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $1.09999 \leq f(0.1) \leq 1.1$

سوال 4.68: اگر $0 \leq x \leq 0.1$ پر $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ ہو اور $f(0) = 2$ ہو تب سوال 4.66 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 4.69: ہندسی اوسط۔ دو مثبت اعداد a اور b کی ہندسی اوسط⁸ سے مراد عدد \sqrt{ab} ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ میں مثبت اعداد کے وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کے لئے c کی قیمت \sqrt{ab} ہے۔

سوال 4.70: حسابی اوسط۔ دو اعداد a اور b کی حسابی اوسط⁹ $\frac{a+b}{2}$ ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت میں وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کے لئے c کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہوگی۔

تفرق سے تفاعل کا حصول
سوال 4.71: فرض کریں $f(-1) = 3$ اور تمام x کے لئے $f'(x) = 0$ ہے۔ کیا تمام x کے لئے $f(x) = 3$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 4.72: فرض کریں $f(0) = 5$ اور تمام x کے لئے $f'(x) = 2$ ہیں۔ کیا تمام x کے لئے $f(x) = 2x + 5$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.73: فرض کریں تمام x کے لئے $f'(0) = 2x$ ہے۔ درج ذیل صورتوں میں $f(2)$ تلاش کریں۔

ا. $f(0) = 0$ ب. $f(1) = 0$ ج. $f(-2) = 3$

جواب: (ا) 4، (ب) 3، (ج) 3

سوال 4.74: جن تفاعل کا تفرق مستقل ہو ان کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.75 تا 4.80 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے۔

سوال 4.75: (ا) $y' = x$ ، (ب) $y' = x^2$ ، (ج) $y' = x^3$
جواب: (ا) $\frac{x^2}{2} + C$ ، (ب) $\frac{x^3}{3} + C$ ، (ج) $\frac{x^4}{4} + C$

سوال 4.76: (ا) $y' = 2x$ ، (ب) $y' = 2x - 1$ ، (ج) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

سوال 4.77: (ا) $y' = -\frac{1}{x^2}$ ، (ب) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ ، (ج) $y' = 5 + \frac{1}{x^2}$
 جواب: (ا) $\frac{1}{x} + C$ ، (ب) $x + \frac{1}{x} + C$ ، (ج) $5x - \frac{1}{x} + C$

سوال 4.78: (ا) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ب) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، (ج) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

سوال 4.79: (ا) $y' = \sin 2t$ ، (ب) $y' = \cos \frac{t}{2}$ ، (ج) $y' = \sin 2t + \cos \frac{t}{2}$
 جواب: (ا) $-\frac{1}{2} \cos 2t + C$ ، (ب) $2 \sin \frac{t}{2} + C$ ، (ج) $-\frac{1}{2} \cos 2t + 2 \sin \frac{t}{2} + C$

سوال 4.80: (ا) $y' = \sec^2 \theta$ ، (ب) $y' = \sqrt{\theta}$ ، (ج) $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2 \theta$

سوال 4.81 تا سوال 4.84 میں وہ تقابل تلاش کریں جس کا تفریق دیا گیا ہے اور جو دیے گئے نقطہ سے گزرتا ہے۔

سوال 4.81: $f'(x) = 2x - 1$ ، $N(0, 0)$
 جواب: $f(x) = x^2 - x$

سوال 4.82: $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$ ، $N(-1, 1)$

سوال 4.83: $r'(\theta) = 8 - \csc^2 \theta$ ، $N(\frac{\pi}{4}, 0)$
 جواب: $r(\theta) = 8\theta + \cot \theta - 2\pi - 1$

سوال 4.84: $r'(t) = \sec t \tan t - 1$ ، $N(0, 0)$

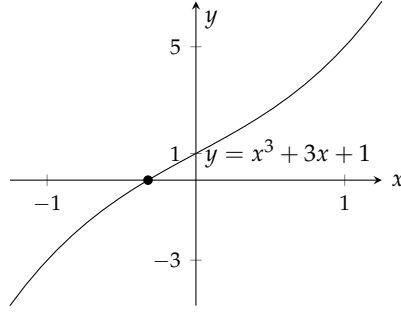
صفروں کی گنتی
 مساوات $f(x) = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کرنے سے پہلے ہم عموماً مطلوبہ وقفہ پر مساوات کی متوقع صفروں کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔
 بعض اوقات ضمنی نتیجہ 4.3 کی مدد سے ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

درج ذیل فرض کریں۔

1. $[a, b]$ پر f استمراری اور (a, b) پر قابل تفریق ہے۔

2. $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں۔

3. پورے (a, b) پر $f' > 0$ اور یا پورے (a, b) پر $f' < 0$ ہے۔



شکل 4.25: کثیر رکنی $y = x^3 + 3x + 1$ کا واحد صفر دکھایا گیا ہے۔

تب a اور b کے بیچ f کا ٹھیک ایک صفر پایا جائے گا۔ چونکہ یہ پورے $[a, b]$ پر بڑھ رہا ہے اور یا پورے $[a, b]$ پر گھٹ رہا ہے لہذا یہ x محور کو ایک ہی بار قطع کر سکتا ہے۔ اس کے باوجود مسئلہ 2.9 کے تحت اس کام سے کم ایک صفر ہو گا۔ مثال کے طور پر $[-1, 1]$ پر $f(x) = x^3 + 3x + 1$ قابل تفرق ہے، $f(-1) = -3$ اور $f(1) = 5$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں، اور تمام x کے لئے $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ہے لہذا $[-1, 1]$ پر f کا ٹھیک ایک صفر پایا جاتا ہے (شکل 4.25)۔

سوال 4.85 تا سوال 4.92 میں دکھائیں کہ دیے گئے وقفہ پر تفاعل کا صرف ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 4.85: $f(x) = x^4 + 3x + 1$, $[-2, -1]$

سوال 4.86: $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7$, $(-\infty, 0)$

سوال 4.87: $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4$, $(0, \infty)$

سوال 4.88: $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3$, $(-1, 1)$

سوال 4.89: $r(\theta) = \theta + \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) - 8$, $(-\infty, \infty)$

سوال 4.90: $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}$, $(-\infty, \infty)$

سوال 4.91: $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5$, $(0, \frac{\pi}{2})$

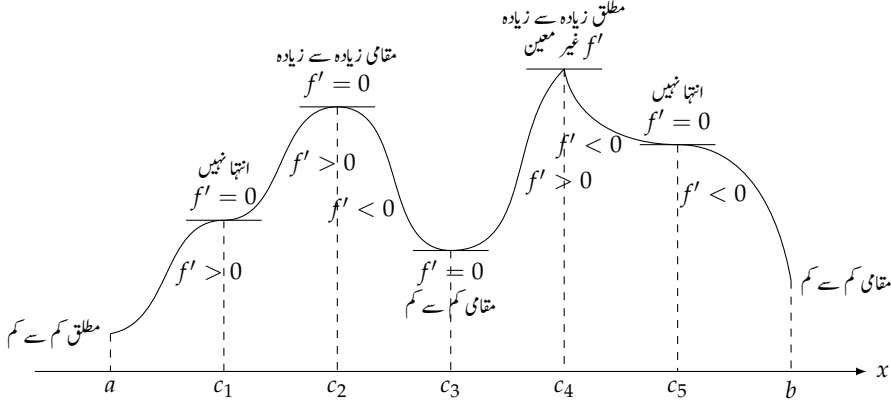
سوال 4.92: $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta$, $(0, \frac{\pi}{2})$

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 4.93:

ا. ایسا کثیر رکنی $f(x)$ تشکیل دیں جس کے صفر $x = -2, -1, 0, 1, 2$ پر پائے جاتے ہوں۔

ب. $f(x)$ اور $f'(x)$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ آپ کو کیا خوبی نظر آتی ہے۔

ج. کیا $g(x) = \sin x$ اور اس کا تفرق $g'(x)$ بھی ایسی خوبی رکھتے ہیں؟



شکل 4.26: بعض نقطہ فاصل پر مقامی انتہائی پائی جاتی ہے اور بعض پر نہیں۔

4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفریقی پرکھ

اس حصہ میں مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کے لئے تفاعل کے نقطہ فاصل کو پرکھنا دکھایا جائے گا۔

4.3.1 پرکھ

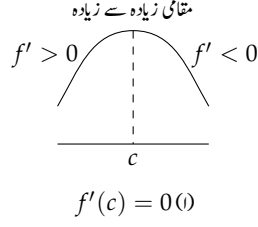
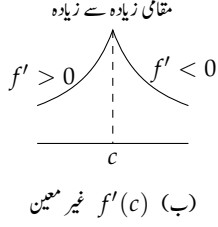
جیسا شکل 4.26 میں دکھایا گیا ہے تفاعل f کے بعض نقطہ فاصل پر تفاعل کی مقامی انتہائی پائی جائے گی اور بعض پر نہیں۔ یہ راز نقطہ کے بالکل قریب f' کی علامت میں پوشیدہ ہے۔ جیسا جیسا x بائیں سے دائیں رخ بڑھتا ہے f کی قیمت وہاں بڑھتی ہے جہاں $f' > 0$ ہو اور f کی قیمت وہاں گھٹتی ہے جہاں $f' < 0$ ہو۔

آپ (شکل 4.26 سے) دیکھ سکتے ہیں کہ مقامی کم سے کم نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں $f' < 0$ جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں $f' > 0$ ہو گا۔ (آخری نقطہ کی صورت میں نقطہ کے صرف ایک طرف پر f' کی قیمت دیکھی جاسکتی ہے۔) یوں مقامی کم سے کم نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے)۔ اسی طرح مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں $f' > 0$ جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں $f' < 0$ ہو گا۔ یوں اس نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے)۔

اس مشاہدہ سے مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کا پرکھ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: مقامی انتہائی قیمت کا ایک رتبی تفریقی پرکھ
درج ذیل پرکھ استمراری تفاعل $f(x)$ کے لئے ہیں۔

نقطہ فاصل c پر:



شکل 4.27: پر کھ برائے مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت۔

1. اگر c پر f' کی علامت مثبت سے تبدیل ہو کر منفی ہو جائے ($f' > 0$ پر $x < c$ اور $f' < 0$ پر $x > c$) تب c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہوگی (شکل 4.27)۔

2. اگر c پر f' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہو جائے ($f' < 0$ پر $x < c$ اور $f' > 0$ پر $x > c$) تب c پر f کی مقامی کم سے کم قیمت ہوگی (شکل 4.28)۔

3. اگر c پر f' کی علامت تبدیل نہ ہو (c کے دونوں اطراف f' کی علامت ایک جیسی ہے) تب c پر f کی کوئی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 4.29)۔

بائیں آخری نقطہ a پر:

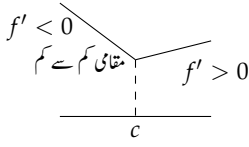
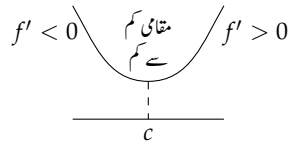
اگر $x > a$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب a پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ (مقامی کم سے کم) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.30-ا، ب)۔

دائیں آخری نقطہ b پر:

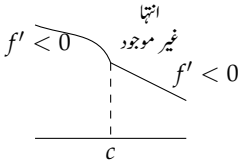
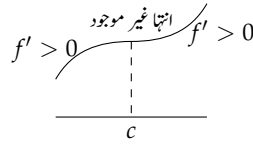
اگر $x < b$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب b پر f کا مقامی کم سے کم (مقامی زیادہ سے زیادہ) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.30-ج، د)۔

مثال 4.11: درج ذیل تفاعل کے نقطہ فاصل تلاش کریں۔

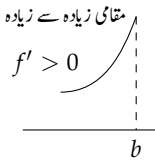
$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

(ب) $f'(c)$ غیر معین $f'(c) = 0$

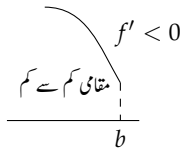
شکل 4.28: پرکھ برائے مقامی کم سے کم قیمت۔

(ب) $f'(c)$ غیر معین $f'(c) = 0$

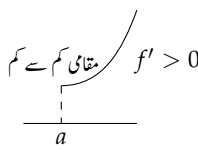
شکل 4.29: پرکھ برائے عدم موجودگی انتہائی قیمت۔



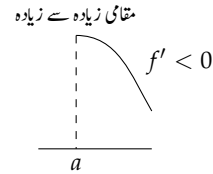
(د)



(ج)

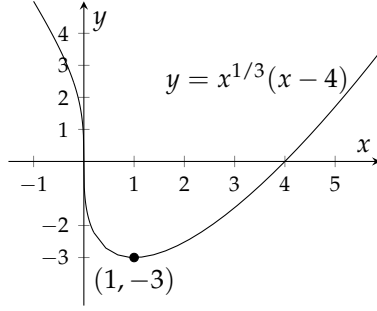


(ب)



(ا)

شکل 4.30: پرکھ برائے بائیں اور دائیں نقطوں پر نقطہ انتہا۔



شکل 4.31: ترسیم برائے مثال 4.11

ان وقفوں کی نشاندہی کریں جس پر f بڑھتا ہے اور جس پر f گھٹتا ہے۔ تفاعل کے مقامی اور مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔
حل: تفاعل تمام حقیقی اعداد کے لئے معین اور استمراری ہے ((شکل 4.31)۔ ایک رتبی تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

ہے جو $x = 1$ پر صفر اور $x = 0$ پر غیر معین ہے۔ f کے دائرہ کار میں کوئی آخری نقطہ نہیں پایا جاتا ہے لہذا نقطہ فاصل $x = 0$ اور $x = 1$ وہ نقطے ہیں جہاں تفاعل کے انتہائی قیمتیں ممکن ہیں۔

یہ نقطے فاصل x محور کو ان حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جس پر f' مثبت اور یا منفی ہے۔ نقطہ فاصل کے دونوں اطراف f کی علامتوں کو دیکھ کر ہم انتہائی نقطہ کی نوعیت جان سکتے ہیں۔ وقفہ $(-\infty, 0)$ پر f گھٹتا ہے، وقفہ $(0, 1)$ پر گھٹتا ہے اور وقفہ $(1, \infty)$ پر بڑھتا ہے۔ مسئلہ 4.5 کے تحت $x = 0$ (جہاں f' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی) پر کوئی انتہائی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جبکہ $x = 1$ (جہاں f' کی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے) پر مقامی کم سے کم نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.32)۔

□ مقامی کم سے کم قیمت $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$ ہے جو تفاعل کی مطلق کم سے کم قیمت بھی ہے۔

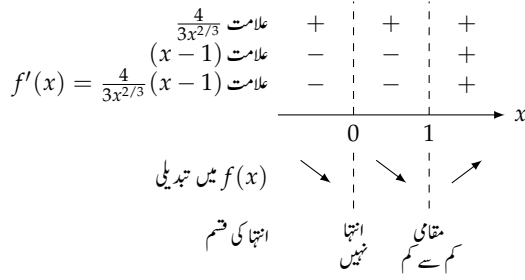
مثال 4.12: درج ذیل کے لئے وہ وقفہ تلاش کریں جہاں f گھٹتا ہو اور جہاں f بڑھتا ہو۔

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \quad -3 \leq x \leq 3$$

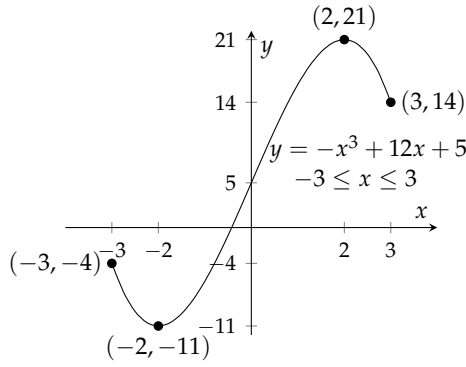
تفاعل کے انتہائی قیمتیں کیا ہیں اور کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

حل: تفاعل اپنے دائرہ کار $[-3, 3]$ پر استمراری ہے (شکل 4.33)۔ اس کا ایک رتبی تفرق

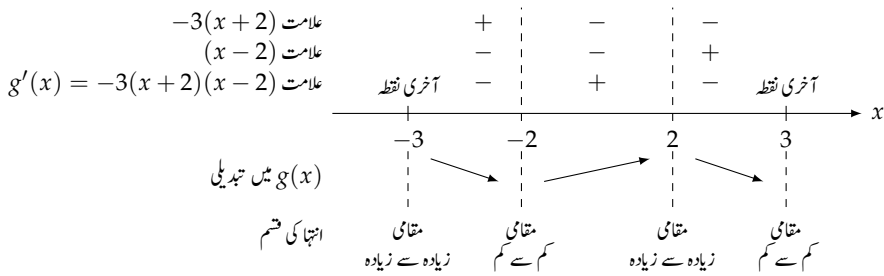
$$g'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x + 2)(x - 2)$$



شکل 4.32: ترسیم برائے مثال 4.11



شکل 4.33: ترسیم برائے مثال 4.12



شکل 4.34: تفریق کی علامتوں سے تفاعل کا رویہ (مثال 4.12)

وقفہ $[-3, 3]$ کے تمام نقطوں پر معین ہے، اور اس کی قیمت نقطہ $x = -2$ اور $x = 2$ پر صفر ہے۔ نقطے فاصل دائرہ کار کو ان خطوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں g' کی قیمت منفی یا مثبت ہے (شکل 4.34)۔ ہم g' کی علامتوں کو دیکھ کر مسئلہ 4.5 کی مدد سے تفاعل کا تجزیہ کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $x = -3$ اور $x = 2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتیں پائی جاتی ہیں جبکہ $x = -2$ اور $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ ان نقطوں پر تفاعل $g(x) = -x^3 + 12x + 5$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} g(-3) &= -4, & g(2) &= 21 & \text{مقامی زیادہ سے زیادہ} \\ g(-2) &= -11, & g(3) &= 14 & \text{مقامی کم سے کم} \end{aligned}$$

چونکہ بند وقفہ پر تفاعل معین ہے لہذا $g(-2)$ مطلق کم سے کم اور $g(2)$ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں ہیں۔ □

سوالات

f' کی مدد سے f کا تجزیہ
سوال 4.94 تا سوال 4.101 میں تفاعل کا تفرق دیا گیا ہے۔ درج ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

ا. f کے نقطہ فاصل کیا ہیں؟

ب. f کس وقفے پر بڑھتا اور کس وقفے پر گھٹتا ہے؟

ج. کن نقطوں پر تفاعل کی مقامی کم سے کم قیمت یا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟

سوال 4.94: $f'(x) = x(x-1)$
جواب: (i) 0، 1؛ (ب) $(-\infty, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر بڑھتا ہے، $(0, 1, c)$ پر گھٹتا ہے، مقامی زیادہ سے زیادہ $x = 0$ پر اور مقامی کم سے کم $x = 1$ پر ہے۔

سوال 4.95: $f'(x) = (x-1)(x+2)$

سوال 4.96: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$
جواب: (i) -2، 1؛ (ب) $(-2, 1)$ اور $(1, \infty)$ پر بڑھتا ہے، $-\infty, -2$ پر گھٹتا ہے؛ (ج) مقامی زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $(x = -2)$ پر مقامی کم سے کم۔

سوال 4.97: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

$$f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3) \quad \text{سوال 4.98}$$

جواب: (i) -2 ، 1 ، 3 ؛ (ب) $(-2, 1)$ اور $(3, \infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty, -2)$ اور $(1, 3)$ پر گھٹتا؛ (ج) $(x = 1)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ، $(x = -2)$ اور $x = 3$ پر مقامی کم سے کم۔

$$f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5) \quad \text{سوال 4.99}$$

$$f'(x) = x^{-1/3}(x+2) \quad \text{سوال 4.100}$$

جواب: (i) -2 ، 0 ؛ (ب) $(-\infty, -2)$ اور $(0, \infty)$ پر بڑھتا، $(-2, 0)$ پر گھٹتا؛ (ج) $(x = -2)$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $(x = 0)$ پر مقامی کم سے کم۔

$$f'(x) = x^{-1/2}(x-3) \quad \text{سوال 4.101}$$

دیئے گئے تفاعل کی انتہا
سوال 4.102 تا سوال 4.121 میں درج ذیل کریں۔

ا. وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل بڑھتا ہو اور وہ جن پر تفاعل گھٹتا ہو۔

ب. تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتوں کی نشاندہی کریں اور جن نقطوں پر ایسا ہوا ان کی بھی نشاندہی کریں۔

ج. ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں (اگر ایسا ہو)؟

$$g(t) = -t^2 - 3t + 3 \quad \text{سوال 4.102}$$

جواب: (i) $(-\infty, -1.5)$ پر بڑھتا، $(-1.5, \infty)$ پر گھٹتا؛ (ب) $t = -1.5$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 5.25؛ (ج) $t = -1.5$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 5.25 ہے۔

$$g(t) = -3t^2 + 9t + 5 \quad \text{سوال 4.103}$$

$$h(x) = -x^3 + 2x^2 \quad \text{سوال 4.104}$$

جواب: (i) $(-\infty, 0)$ اور $(\frac{4}{3}, \infty)$ پر گھٹتا، $(0, \frac{4}{3})$ پر بڑھتا؛ (ب) $x = 0$ پر مقامی کم سے کم، $x = \frac{4}{3}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\frac{4}{3}, \frac{32}{27})$ ؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

$$h(x) = 2x^3 - 18x \quad \text{سوال 4.105}$$

$$f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3 \quad \text{سوال 4.106}$$

جواب: (i) $(-\infty, 0)$ اور $(\frac{1}{2}, \infty)$ پر گھٹتا، $(0, \frac{1}{2})$ پر بڑھتا؛ (ب) $\theta = \frac{1}{2}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

$$f(\theta) = 6\theta - \theta^3 \quad \text{سوال 4.107}$$

$$f(r) = 3r^3 + 16r \quad \text{سوال 4.108}$$

جواب: (ا) $(-\infty, \infty)$ پر بڑھتا ہے یعنی کبھی کم نہیں ہوتا؛ (ب) مقامی انتہا عدم موجود؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

$$h(r) = (r + 7)^3 \quad \text{سوال 4.109}$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 \quad \text{سوال 4.110}$$

جواب: (ا) $(-2, 0)$ اور $(2, \infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty, -2)$ اور $(0, 2)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = 0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 16 اور $x = \pm 2$ پر مقامی کم سے کم 0؛ (ج) مطلق زیادہ سے زیادہ غیر موجود، $x = \pm 2$ پر مطلق کم سے کم 0

$$g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad \text{سوال 4.111}$$

$$H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6 \quad \text{سوال 4.112}$$

جواب: (ا) $(-\infty, -1)$ اور $(0, 1)$ پر بڑھتا، $(-1, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = \pm 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\pm 1, 0.5)$ ہے $x = 0$ پر مقامی کم سے کم $(0, 0)$ ہے؛ (ج) $x = \pm 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ جبکہ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

$$K(t) = 15t^3 - t^5 \quad \text{سوال 4.113}$$

$$g(x) = x\sqrt{8 - x^2} \quad \text{سوال 4.114}$$

جواب: (ا) $(-2\sqrt{2}, -2)$ اور $(2, 2\sqrt{2})$ پر گھٹتا $(-2, 2)$ پر بڑھتا ہے؛ (ب) مقامی کم سے کم $g(-2) = -4$ ، $g(2\sqrt{2}) = 0$ ؛ مقامی زیادہ سے زیادہ $g(-2\sqrt{2}) = 0$ ، $g(2) = 4$ ؛ (ج) $x = 2$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 4 اور $x = -2$ پر مطلق کم سے کم -4 ہے۔

$$g(x) = x^2\sqrt{5 - x} \quad \text{سوال 4.115}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2 \quad \text{سوال 4.116}$$

جواب: (ا) $(-\infty, 1)$ پر بڑھتا $1 < x < 2$ اور $2 < x < 3$ پر گھٹتا ہے۔ $x = 2$ پر غیر استمراری اور $(3, \infty)$ پر بڑھتا ہے۔ (ب) $x = 3$ پر مقامی کم سے کم $(3, 6)$ اور $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(1, 2)$ ؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1} \quad \text{سوال 4.117}$$

$$f(x) = x^{1/3}(x + 8) \quad \text{سوال 4.118}$$

جواب: (ا) $(-2, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty, -2)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = -2$ پر مقامی کم سے کم $-6\sqrt[3]{2}$ ؛ (ج) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $x = -2$ پر مطلق کم سے کم $-6\sqrt[3]{2}$ ہے۔

سوال 4.119: $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$

سوال 4.120: $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$

جواب: (i) $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{7}})$ اور $(\frac{2}{\sqrt{7}}, \infty)$ پر بڑھتا، $(-\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}})$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $3.12 \approx \frac{24\sqrt[3]{2}}{7\sqrt{6}}$ جبکہ $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی کم سے کم $-3.12 \approx -\frac{24\sqrt[3]{2}}{7\sqrt{6}}$ ہے؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 4.121: $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

نصف کھلے وقفوں پر تفاعل کی انتہا

سوال 4.122 تا سوال 4.129 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ میں تفاعل کے مقامی انتہا تلاش کریں۔ ان نقطوں کی بھی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. کون سے انتہا مطلق ہیں (اگر ہوں)۔

ج. کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔

سوال 4.122: $f(x) = 2x - x^2, -\infty < x \leq 2$

جواب: (i) $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 1 اور $x = 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے؛ (ب) $x = 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1 جبکہ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 4.123: $f(x) = (x + 1)^2, -\infty < x \leq 0$

سوال 4.124: $g(x) = x^2 - 4x + 4, 1 \leq x < \infty$

جواب: (i) $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 1 اور $x = 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے؛ (ب) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $x = 2$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.125: $g(x) = -x^2 - 6x - 9, -4 \leq x < \infty$

سوال 4.126: $f(t) = 12t - t^3, -3 \leq t < \infty$

جواب: (i) $t = -3$ پر -9 اور $t = 2$ پر 16 مقامی زیادہ سے زیادہ ہیں۔ $t = -2$ پر مقامی کم سے کم -16 ہے۔ (ب) $t = 2$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 16؛ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 4.127: $f(t) = t^3 - 3t^2, -\infty < t \leq 3$

سوال 4.128: $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, 0 \leq x < \infty$

جواب: (i) $x = 0$ پر مقامی کم سے کم 0؛ (ب) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود؛ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.129: $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, -\infty < x \leq 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.130 تا سوال 4.133 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے وقتے پر مقامی انتہا تلاش کریں اور اس نقطہ کی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. تقابل اور تقابل کے تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f پر تبصرہ کریں۔

سوال 4.130: $f(x) = \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq 2\pi$ جواب: (i) $x = \frac{2\pi}{3}$ پر مقامی کم سے کم $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ جبکہ $x = 0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے اور $x = 2\pi$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ π ہے۔

سوال 4.131: $f(x) = -2 \cos x - \cos^2 x$, $-\pi \leq x \leq \pi$

سوال 4.132: $f(x) = \csc^2 x - 2 \cot x$, $0 < x < \pi$ جواب: (i) $x = \frac{\pi}{4}$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.133: $f(x) = \sec^2 x - 2 \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں
دکھائیں کہ سوال 4.134 اور سوال 4.135 میں دیے گئے θ پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے۔ اس انتہا کی قسم دریافت کریں۔

سوال 4.134: $h(\theta) = 3 \cos \frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\theta = 0, 2\pi$ جواب: (i) $\theta = 0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 3 اور $\theta = 2\pi$ پر مقامی کم سے کم -3 ہے۔

سوال 4.135: $h(\theta) = 5 \sin \frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta = 0, \pi$

سوال 4.136: قابل تفرق تقابل $y = f(x)$ نقطہ $(1, 1)$ سے گزرتا ہے اور $f'(1) = 0$ ہے۔ درج ذیل پر پورا اترتا ہوا اس تقابل کا خاکہ کھینچیں۔

ا. $x < 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے اور $x > 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے۔

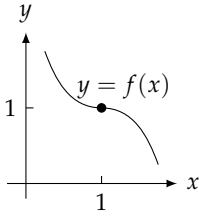
ب. $x < 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے اور $x > 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے۔

ج. $x \neq 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے۔

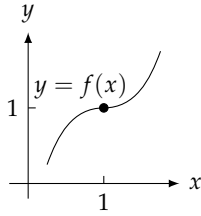
د. $x \neq 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے۔

جواب: شکل 4.35

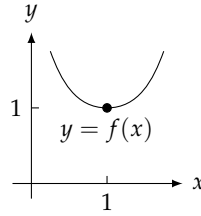
سوال 4.137: قابل تفرق تقابل $y = f(x)$ جو درج ذیل پر پورا اترتا ہے کا خاکہ بنائیں۔



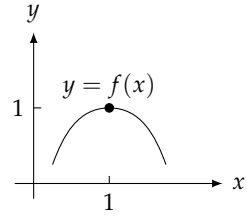
(ا)



(ب)

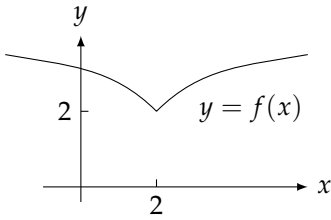


(پ)

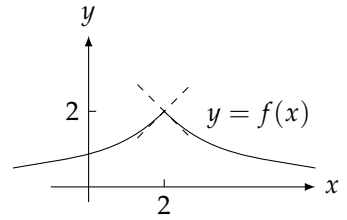


(د)

شکل 4.35: حل ترسیماں سوال 4.136



(پ)



(د)

شکل 4.36: حل ترسیماں سوال 4.138

ا. $(1, 1)$ پر مقامی کم سے کم اور $(3, 3)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

ب. $(1, 1)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور $(3, 3)$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

ج. $(1, 1)$ اور $(3, 3)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

د. $(1, 1)$ اور $(3, 3)$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

سوال 4.138: درج ذیل استمراری تفاعل $y = g(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $0 < g' < 1$ ہے، $x \rightarrow 2^-$ کے لئے $g'(x) \rightarrow 1^-$ ، $x > 2$ کے لئے $-1 < g' < 0$ اور $x \rightarrow 2^+$ کے لئے $g'(x) \rightarrow -1^+$ ہے۔

ب. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $g' < 0$ ، $x \rightarrow 2^-$ کے لئے $g' \rightarrow -\infty$ ، $x > 2$ کے لئے $g' > 0$ اور $x \rightarrow 2^+$ کے لئے $g'(x) \rightarrow \infty$ ہے۔

ب. شکل 4.36

سوال 4.139: درج ذیل استمراری تفاعل $y = h(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \leq h(x) \leq 2$ ، $x \rightarrow 0^-$ کے لئے $h'(x) \rightarrow \infty$ اور $x \rightarrow 0^+$ کے لئے $h'(x) \rightarrow -\infty$ ہے۔

ب. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \leq h(x) \leq 0$ ، $x \rightarrow 0^-$ کے لئے $h'(x) \rightarrow \infty$ اور $x \rightarrow 0^+$ کے لئے $h'(x) \rightarrow -\infty$ ہے۔

سوال 4.140: جب x بائیں سے دائیں جانب نقطہ $c = 2$ سے گزرے تب $f(x) = x^3 - 3x + 2$ کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے یا نیچے گرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.141: وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جہاں $a \neq 0$ ہے، بڑھتا ہے اور گھٹتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم

ہم نے حصہ 4.1 میں تفاعل کی انتہائی قیمتوں کی تلاش میں ایک رتی تفریق کا کردار دیکھا۔ تفاعل کے انتہائی نقطے صرف نقطہ فاصل اور تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ نقطہ فاصل پر نقطہ انتہا کی موجودگی لازمی نہیں ہے۔ ہم نے حصہ 4.2 میں یہ بھی دیکھا کہ قابل تفریق تفاعل کی تقریباً تمام معلومات اس کی تفریق میں سمیٹی گئی ہے۔ مکمل تفاعل کے حصول کے لئے ہمیں صرف کسی ایک نقطہ پر تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔ اگر تفاعل کا تفریق $2x$ ہے اور تفاعل مبدا سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً x^2 ہو گا۔ اگر تفاعل کا تفریق $2x$ ہو اور تفاعل نقطہ $(0, 4)$ سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً $x^2 + 4$ ہو گا۔

ہم نے حصہ 4.3 میں نقطہ فاصل پر تفاعل کے رویہ جاننے ہوئے اس کی تفریق سے مزید معلومات حاصل کرنا سیکھا جس کے بعد ہم یہ جان سکے کہ آیا نقطہ فاصل پر حقیقتاً انتہا موجود ہے یا تفاعل مسلسل گھٹتا یا مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم جانتے ہیں کہ تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کس طرح مڑتی یا واپس پلٹتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ معلومات y' کے اندر ضرور پائی جائے گی۔ دو مرتبہ قابل تفریق تفاعل کی صورت میں y' اور اس کا تفریق y'' مل کر تفاعل کی ترسیم کی صورت کے بارے میں معلومات فراہم کرتے ہیں۔ باب 5 میں انہیں استعمال کرتے ہوئے تفریقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل کے حل کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا۔

مقرر

x بڑھنے سے تفاعل $y = x^3$ کا ترسیم اوپر اٹھتا ہے لیکن $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر اس کے حصے مختلف طریقہ سے مڑتے ہیں (شکل 4.37)۔ اگر ہم منحنی پر بائیں سے مبدا کی طرف گامزن ہوں تب منحنی ہماری دائیں ہاتھ کی طرف جھکتی ہے اور اپنے مماس سے نیچے رہتی ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم منحنی پر دائیں جانب مبدا سے دور چلیں تب منحنی ہماری بائیں ہاتھ جھکتی ہے اور اپنے مماس کے بالائی طرف رہتی ہے۔

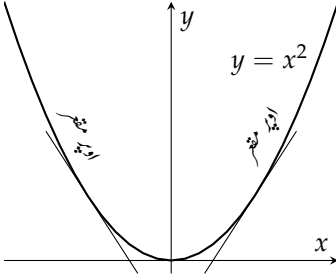
اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ ربع سوم میں بائیں سے مبدا کی طرف چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان گھٹتی ہے جبکہ ربع اول میں مبدا سے دائیں جانب چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان بڑھتی ہے۔

تعریف: قابل تفریق تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم اس وقفہ پر اوپر مقعر¹⁰ ہوگی جہاں y' بڑھتا ہو اور اس وقفہ پر نیچے مقعر¹¹ ہوگی جہاں y' گھٹتا ہو۔

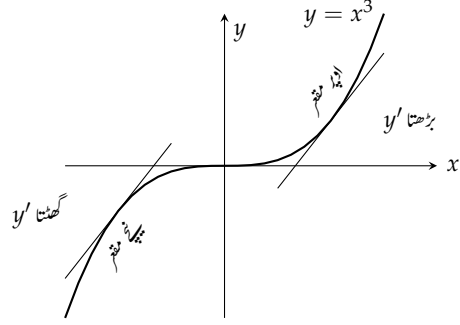
□

اگر $y = f(x)$ کا دور رتی تفریق موجود ہو تب ہم مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3 استعمال کرتے ہوئے اخذ کر سکتے ہیں کہ $y'' > 0$ کی صورت میں y' کی قیمت بڑھے گی اور $y'' < 0$ کی صورت میں y' کی قیمت گھٹے گی۔

concave up¹⁰
concave down¹¹



شکل 4.38: ترسیم برائے مثال 4.13

شکل 4.37: $(-\infty, 0)$ پر منحنی دائیں جھکتی ہے جبکہ $(0, \infty)$ پر مبداء بائیں مڑتی ہے۔

مقعر کا دو رتی تفرق پرکھ

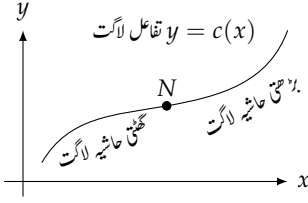
فرض کریں وقفہ I پر $y = f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہے۔ا. اگر I پر $y'' > 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم اوپر مقعر ہوگی۔ب. اگر I پر $y'' < 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم نیچے مقعر ہوگی۔

مثال 4.13:

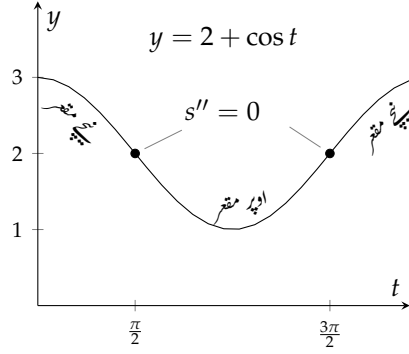
ا. $(-\infty, 0)$ پر قائل $y = x^3$ کا دور تبی تفرق $y'' = 6x < 0$ ہے لہذا اس کی ترسیم نیچے مقعر ہوگی جبکہ $(0, \infty)$ پر $y'' = 6x > 0$ ہے لہذا یہاں ترسیم اوپر مقعر ہوگی (شکل 4.37)۔

ب. چونکہ قطع مکانی $y = x^2$ کا دور تبی تفرق $y'' = 2 > 0$ ہے لہذا یہ ہر جگہ اوپر مقعر ہوگا (شکل 4.38)۔

□



شکل 4.40: ترسیم برائے مثال 4.15



شکل 4.14: ترسیم برائے مثال 4.39

نقطہ تصریف

ایک لکیر پر جسم کی حرکت کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اس کا مقام بالتقابل وقت ترسیم کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہم وہ لمحہ تلاش کر سکتے ہیں جہاں جسم کی اسراع، جو دور تہی تفرق ہے، کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔ ترسیم پر یہ وہ نقطہ ہوگا جہاں مقعر تبدیل ہوتا ہے۔

تعریف: وہ نقطہ جہاں تقابل کا مماس پایا جاتا ہو اور جہاں مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہو نقطہ تصریف¹² کہلاتا ہے۔

□

یوں نقطہ تصریف کی ایک طرف y'' مثبت اور دوسری طرف منفی ہوگا۔ عین نقطہ تصریف پر y'' کی قیمت یا (تفرق کی متوسط قیمت خاصیت کی بنا) صفر ہوگی اور یا y'' غیر معین ہوگا۔

دو مرتبہ قابل تفرق تقابل کی ترسیم کے نقطہ تصریف پر $y'' = 0$ ہوگا۔

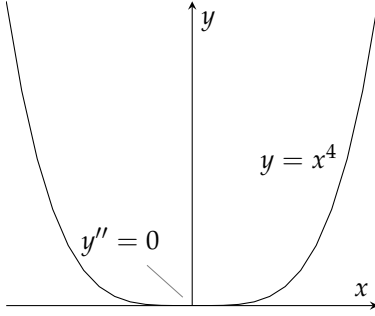
مثال 4.14: سادہ ہارمونی حرکت
تقابل $y = 2 \cos t$ کی ترسیم نقطہ $t = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ پر مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہے جہاں اسراع $s'' = -\cos t$ صفر ہے (شکل 4.39)۔

□

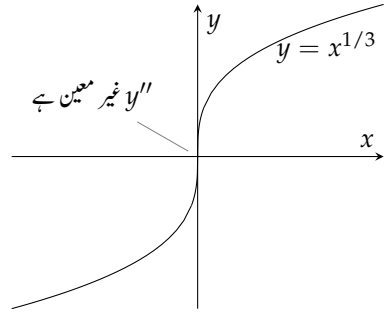
مثال 4.15: نقطہ تصریف کا معاشیات میں بھی اہمیت ہے۔ فرض کریں کہ کسی چیز کی x اکائیاں پیدا کرنے پر $y = c(x)$ لاگت آتی ہے۔ جہاں حاشیہ لاگت پیداوار گٹھنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے یہ نقطہ تصریف N ہوگا (شکل 4.40)۔

□

inflection point¹²



شکل 4.42: اگرچہ مبدا پر $y'' = 0$ ہے یہاں نقطہ تصرف نہیں پایا جاتا ہے (مثال 4.17)



شکل 4.41: نقطہ تصرف پر y'' غیر معین ہے (مثال 4.16)

مثال 4.16: ایسا نقطہ تصرف جہاں y'' غیر موجود ہے۔
تفاعل $y = x^{1/3}$ کا نقطہ تصرف $x = 0$ پر ہے لیکن یہاں y'' غیر معین (لا متناہی) ہے (شکل 4.41)۔

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}(x^{1/3}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

□

مثال 4.17: $y'' = 0$ ہے لیکن نقطہ تصرف نہیں ہے
تفاعل $y = x^4$ کا $x = 0$ پر $y'' = 12x^2 = 0$ پایا جاتا ہے لیکن یہاں y'' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہذا یہاں نقطہ تصرف نہیں پایا جاتا ہے۔

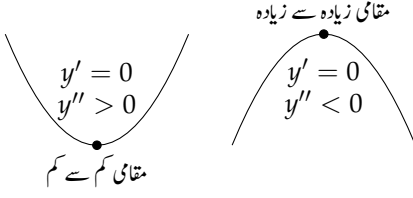
□

فنیات تفاعل اور تفاعل کے تفرق کا ترسیم
کبھی کبھار تفاعل کی ترسیم سے نقطہ تصرف کی نشاندہی کرنا مشکل ہوتا ہے۔ $f(x) = 2 \cos x - \sqrt{2}x$ کی $-4 \leq x \leq 3$ پر ترسیم کرتے ہوئے کوشش کر کے دیکھیں۔ اس کے ساتھ f' کی ترسیم شامل کرنے سے نقطہ تصرف کی پہچان میں کچھ بہتری آتی ہے۔ f کے ساتھ f'' ترسیم کرنے سے نقطہ تصرف پہچانے کا بہترین ثبوت ملتا ہے (شکل 4.43)۔ نقطہ تصرف پر f'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے یعنی f'' محور x کو قطع کرتا ہے۔ f ، f' اور f'' تینوں کو ایک ساتھ ترسیم کرنا دلچسپ مشغلہ ہے۔

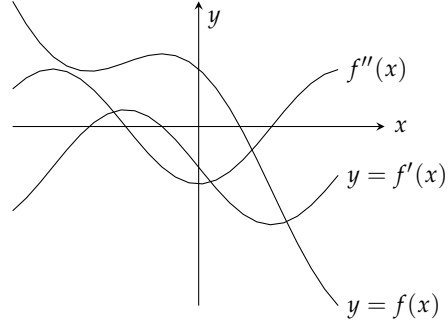
مقامی انتہائی قیمت کا دورتی تفرقی پرکھ

مقامی انتہا کا مقام تعین کرنے کی خاطر f' کی علامت کی تبدیلی کی بجائے درج ذیل پرکھ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مقامی انتہا کا دو رتی تفرق پرکھ



شکل 4.44: دو رتبی تفریق پر کم برائے مقامی انتہا

شکل 4.43: تفاعل $y = f(x) = 2 \cos x - \sqrt{2}x$ اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی تفرق۔

• اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) < 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی (شکل 4.44)۔

• اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) > 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی (شکل 4.44)۔

مذکورہ بالا پرکھ میں ہمیں صرف $x = c$ پر y'' درکار ہے تاکہ c پر کسی وقفہ پر۔ یوں پرکھ کا استعمال نہایت آسان ہے۔ $y'' = 0$ یا غیر معین y'' کی صورت میں پرکھ ہمیں مدد نہیں کر پاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں یک رتبی تفریق پرکھ استعمال کرنی ہوگی۔

y' اور y'' کے ترسیم ایک ساتھ

ہم نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل ترسیم کرتے ہیں۔

مثال 4.18: قلم و کاغذ سے تفاعل کا ترسیم

تفاعل $y = x^4 - 4x^3 + 10$ ترسیم کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم y' اور y'' ڈھونڈتے ہیں۔

$$y = x^4 - 4x^3 + 10$$

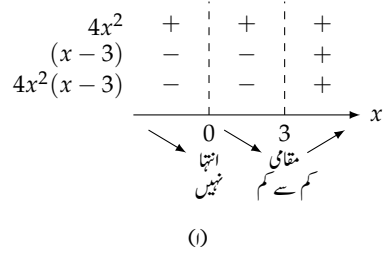
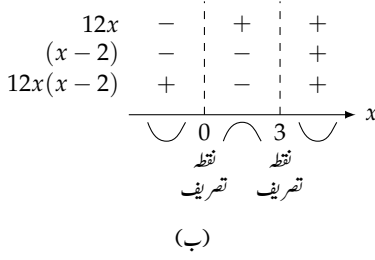
$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

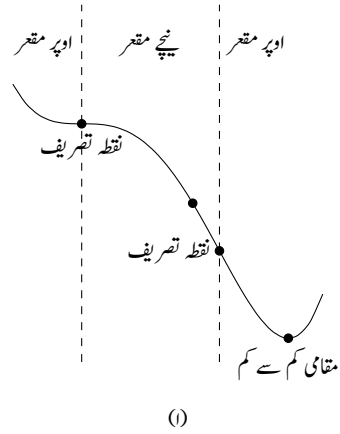
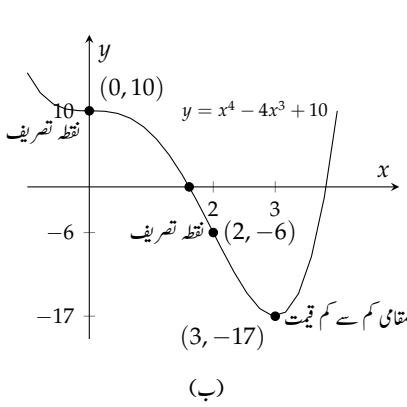
نقطہ فاصل $x = 0$ اور $x = 3$ ہیں

مکملہ نقطہ تصریف $x = 0$ اور $x = 2$ ہیں

دوسرا قدم: اتر اور چڑھاؤ دیکھنے کے لئے y' کی علامتوں کو دیکھ کر y کا رویہ جانتے ہیں۔ $y' = 4x^2(x - 3)$ میں $x = 0$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی علامت منفی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے بھی منفی علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں نقطہ $x = 0$ پر y' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے لہذا یہاں کوئی مقامی انتہا نہیں پایا جاتا ہے۔ $y' = 4x^2(x - 3)$



شکل 4.45: اشکال برائے مثال 4.18



شکل 4.46: اشکال برائے مثال 4.18

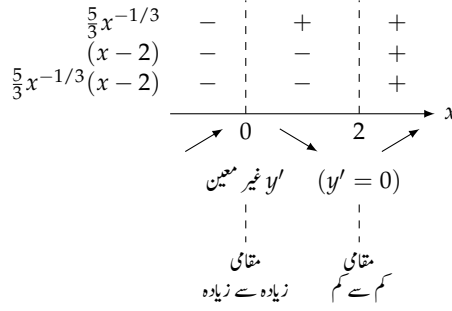
میں $x = 3$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی منفی علامت جبکہ اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے مثبت علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر y' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.45)۔

تیسرا قدم: نقطہ $x = 0$ اور $x = 2$ پر y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے لہذا یہ دونوں نقطہ تصریف ہیں (شکل 4.45)۔

چوتھا قدم: دوسرے اور تیسرے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے ہر وقفہ پر تقابل کا عمومی خاکہ کھینچیں۔ ان خاکوں کو اکٹھا کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.46)۔

پانچواں قدم: (ا) اگر موزوں ہو تب) ترسیم پر وہ نقطے ظاہر کریں جہاں یہ x اور y محور کو قطع کرتی ہے۔ اسی طرح وہ نقطے جہاں y' اور y'' صفر ہیں کی نشاندہی کریں۔ مقامی انتہائی نقطے اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔ چوتھے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.46)۔

□



شکل 4.47: اتار اور چڑھاؤ (مثال 4.19)

$y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. y' اور y'' حاصل کریں۔
2. منحنی کی اتار اور چڑھاؤ تعین کریں۔
3. منحنی کی مقعر کا تعین کریں۔
4. اجمال کرتے ہوئے مختلف خطوں میں ترسیم کا عمومی خاکہ بنائیں۔
5. ان اشکال کو ملا کر تقابل ترسیم کریں۔

مثال 4.19: تقابل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ ترسیم کریں۔
حل: پہلا قدم: y' اور y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 y &= x^{5/3} - 5x^{2/3} = x^{2/3}(x - 5) & \text{قطع محدود } x = 0 \text{ اور } x = 5 \\
 y' &= \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x - 2) & \text{نقطہ فاصل } x = 0 \text{ اور } x = 2 \\
 y'' &= \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(x + 1) & \text{مکملہ نقطہ تصریف } x = 0 \text{ اور } x = -1
 \end{aligned}$$

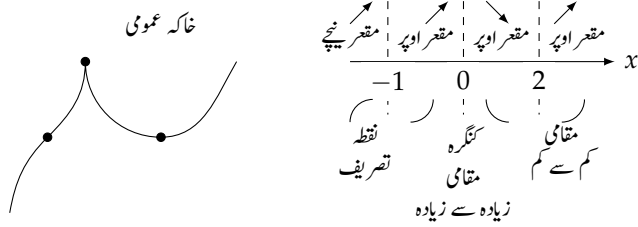
دوسرا قدم: اتار اور چڑھاؤ۔ (شکل 4.47)

تیسرا قدم: مقعر (شکل 4.48)

y'' کی علامت کی نقش سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x = -1$ پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے لیکن $x = 0$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ البتہ یہ جانتے ہوئے کہ

$\frac{10}{9}x^{-4/3}$	+	+	+
$(x+1)$	-	+	+
$\frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1)$	-	+	+
	-1	0	
	مقعر نیچے	مقعر اوپر	مقعر اوپر
	نقطہ تشریف		

شکل 4.48: مقعر (مثال 4.19)



شکل 4.49: اجمال اور خاکے (مثال 4.19)

1. تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ استمراری ہے۔

2. $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $y' \rightarrow \infty$ اور $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $y' \rightarrow -\infty$ ہوتا ہے (دوسرے قدم میں y' کا کلیہ دیکھیں)۔

3. $x = 3$ پر مقعر تبدیل نہ ہونے (تیسرا قدم) سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $x = 0$ پر کنگرہ پایا جاتا ہے۔

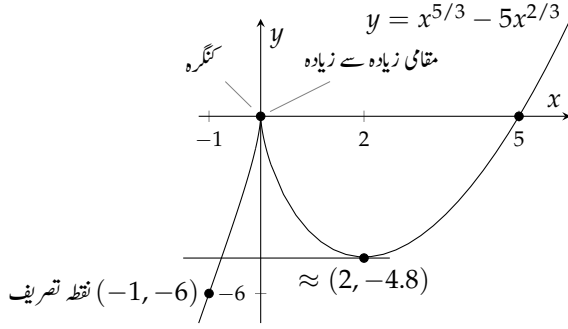
چوتھا قدم: اجمال (شکل 4.49)

□

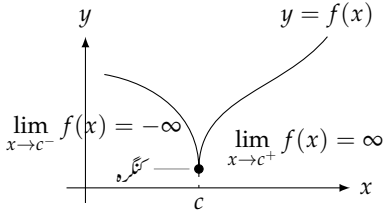
پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور ترسیم (شکل 4.50)

کنگرہ

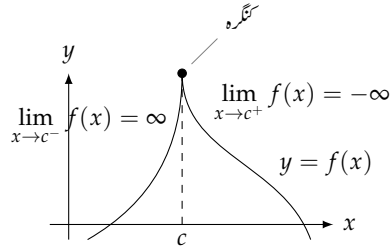
تفاعل $y = f(x)$ کا $x = c$ پر اس صورت کنگرہ پایا جاتا ہے جب x کے دونوں اطراف تفاعل کا مقعر ایک جیسا ہو اور یا (i) $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = \infty$ اور $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ ہوں (شکل 4.51-ا)، اور یا (ب) $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = -\infty$ اور $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ ہوں (شکل 4.51-ب)۔



شکل 4.50: قاع $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ کی ترسیم (مثال 4.19)۔

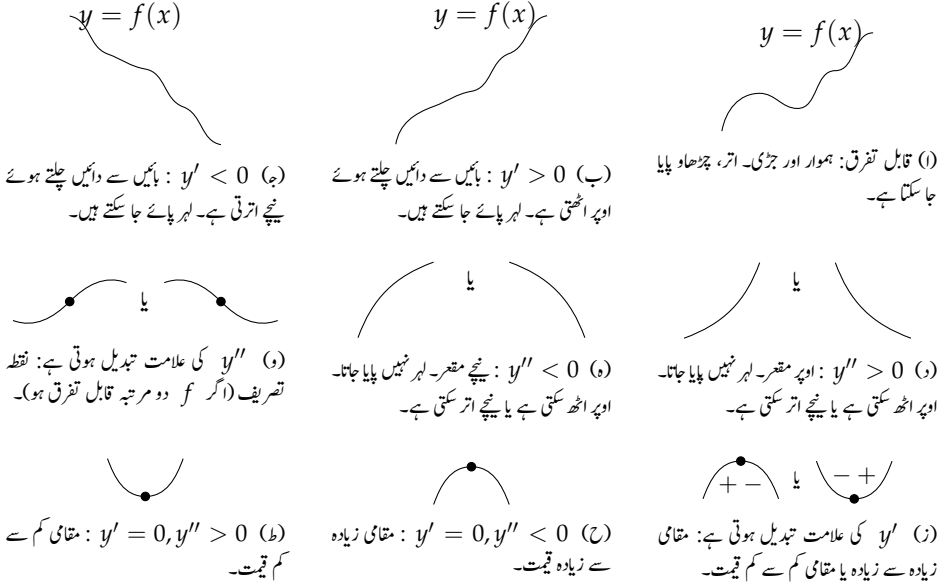


(ب)



(ا)

شکل 4.51: کنگرہ، مقامی زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم نقطہ ہو سکتا ہے۔



شکل 4.52: ترسیم کے بارے میں تفرق کیا بتلاتا ہے۔

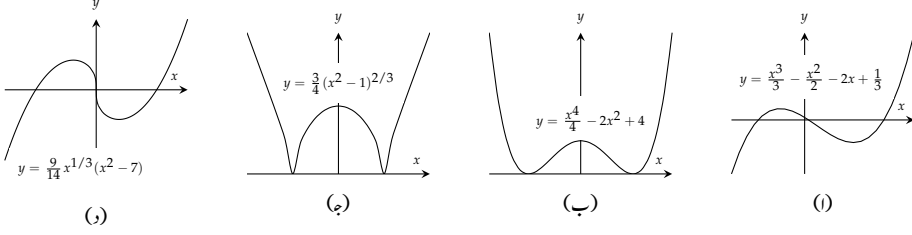
تفرق سے تفاعل کی معلومات کا حصول

آپ نے مثال 4.18 اور مثال 4.19 میں دیکھا کہ y' کو دیکھ کر قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی تقریباً تمام اہم معلومات دریافت کی جاسکتی ہیں۔ ہم ترسیم کی اتار اور چڑھاؤ، اور مقامی انتہا جان سکتے ہیں۔ ہم y' کا تفرق لے کر اتار اور چڑھاؤ کے وقفوں میں تفاعل کی مقعر دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم تفاعل کی ترسیم کی عمومی شکل جان سکتے ہیں۔ ہم صرف xy مستوی میں ترسیم کا مقام نہیں جان سکتے ہیں۔ یہ معلومات مختلف x پر تفاعل کی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ حقیقت میں جیسا ہم نے حصہ 4.2 میں دیکھا، y' کے علاوہ ہمیں f کی قیمت صرف ایک نقطہ پر چاہیے۔

شکل 4.52 میں تفرق اور ترسیم کے تعلق دکھائے گئے ہیں۔

سوالات

ترسیم شدہ تفاعل کا تجزیہ
سوال 4.142 تا سوال 4.149 میں دیے ترسیم کی نقطہ تعریف، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ کی نشاندہی کریں۔ ان وقفوں کہ نشاندہی کریں جن پر ترسیم اوپر مقعر اور جن پر نیچے مقعر ہے۔



شکل 4.53: ترسیمات برائے سوال 4.142 تا سوال 4.145

سوال 4.142: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$ ، شکل 4.53-ا
جواب: $x = -1$ پر $\frac{3}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = 2$ پر -3 مقامی کم سے کم، نقطہ تعریف $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ ، چڑھاؤ $(-\infty, -1)$ اور $(2, \infty)$ پر، اتار $(-1, 2)$ پر، اوپر مقعر $(\frac{1}{2}, \infty)$ پر جبکہ نیچے مقعر $(-\infty, \frac{1}{2})$ پر۔

سوال 4.143: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$ ، شکل 4.53-ب

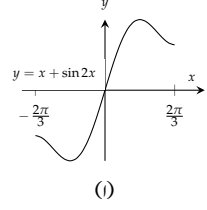
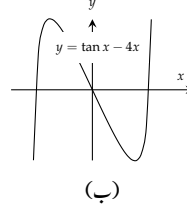
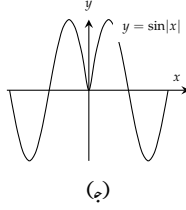
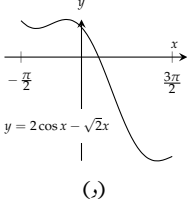
سوال 4.144: $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$ ، شکل 4.53-ج
جواب: $x = 0$ پر $\frac{3}{4}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = \pm 1$ پر 0 مقامی کم سے کم، $(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ اور $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ پر نقطہ تعریف، چڑھاؤ $(-1, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر، اتار $(-\infty, -1)$ اور $(0, 1)$ پر، $(-\infty, -\sqrt{3})$ اور $(\sqrt{3}, \infty)$ پر مقعر اوپر، $(-\sqrt{3}, 3)$ پر مقعر نیچے۔

سوال 4.145: $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$ ، شکل 4.53-د

سوال 4.146: $y = x + \sin 2x$ ، شکل 4.54-ا، $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$
جواب: $x = -\frac{\pi}{3}$ پر $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -\frac{\pi}{3}$ پر $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی کم سے کم، $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ اور $(0, 0)$ پر نقطہ تعریف، $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ پر چڑھاؤ، $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ اور $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ پر اتار، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ پر مقعر اوپر، $(0, \frac{\pi}{2})$ اور $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$ پر مقعر نیچے۔

سوال 4.147: $y = \tan x - 4x$ ، شکل 4.54-ب، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 4.148: $y = \sin|x|$ ، شکل 4.54-ج، $-2\pi \leq x \leq 2\pi$
جواب: $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر 1 مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -2\pi$ اور $x = 2\pi$ پر -1 مقامی کم سے کم، $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ اور $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پر نقطہ تعریف، $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ اور $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پر چڑھاؤ، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, 0)$ پر اتار، $(-2\pi, -\pi)$ اور $(\pi, 2\pi)$ پر مقعر اوپر، $(-\pi, \pi)$ پر مقعر نیچے۔



شکل 4.54: ترسیمات برائے سوال 4.146 تا سوال 4.149

سوال 4.149: $y = 2 \cos x - \sqrt{2}x$, $-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ، شکل 4.54۔

مساوات کی ترسیم
صفحہ 376 پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے سوال 4.150 تا سوال 4.181 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ مقامی انتہا اور نقطہ تشریف کی نشاندہی کریں۔

سوال 4.150: $y = x^2 - 4x + 3$
جواب: شکل 4.55۔

سوال 4.151: $y = 6 - 2x - x^2$

سوال 4.152: $y = x^3 - 3x + 3$
جواب: شکل 4.55۔

سوال 4.153: $y = x(6 - 2x)^2$

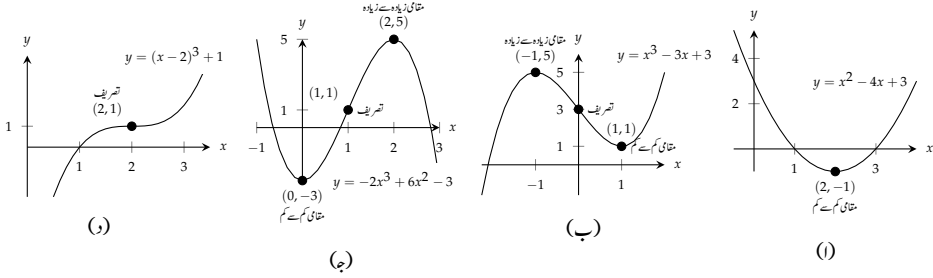
سوال 4.154: $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
جواب: شکل 4.55۔

سوال 4.155: $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

سوال 4.156: $y = (x - 2)^3 + 1$
جواب: شکل 4.55۔

سوال 4.157: $y = 1 - (x + 1)^3$

سوال 4.158: $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$



شکل 4.55: حل ترسیمات برائے سوال 4.150 تا سوال 4.156

جواب: شکل 4.56-ا

سوال 4.159: $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

سوال 4.160: $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$
جواب: شکل 4.56-ب

سوال 4.161: $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

سوال 4.162: $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$
جواب: شکل 4.56-ج

سوال 4.163: $y = x(\frac{x}{2} - 5)^4$

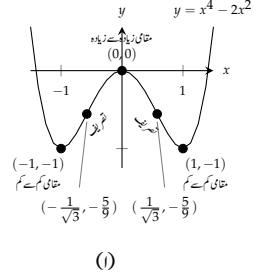
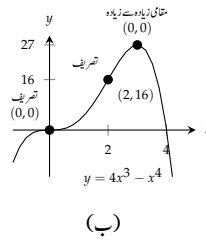
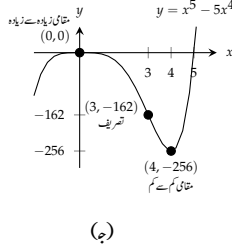
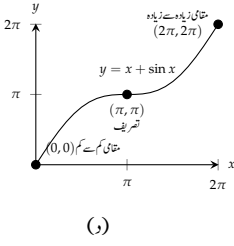
سوال 4.164: $y = x + \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$
جواب: شکل 4.56-د

سوال 4.165: $y = x - \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$

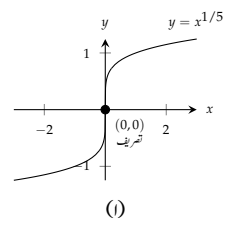
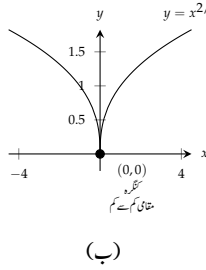
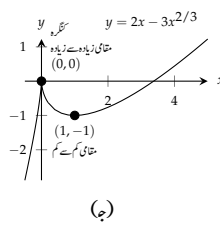
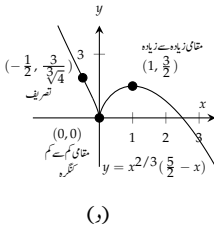
سوال 4.166: $y = x^{1/5}$
جواب: شکل 4.57-ا

سوال 4.167: $y = x^{3/5}$

سوال 4.168: $y = x^{2/5}$
جواب: شکل 4.57-ب



شکل 4.56: حل ترسیمات برائے سوال 4.158 تا سوال 4.164



شکل 4.57: حل ترسیمات برائے سوال 4.166 تا سوال 4.172

سوال 4.169: $y = x^{4/5}$

سوال 4.170: $y = 2x - 3x^{2/3}$
جواب: شکل 4.57 ج

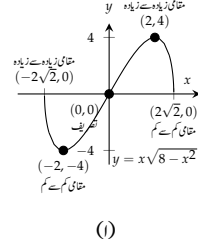
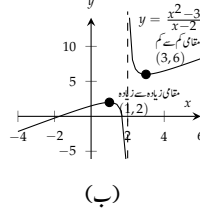
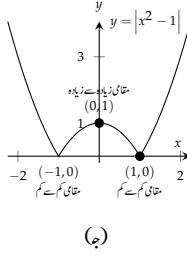
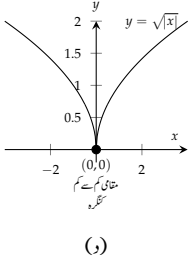
سوال 4.171: $y = 5x^{2/5} - 2x$

سوال 4.172: $y = x^{2/3}(\frac{5}{2} - x)$
جواب: شکل 4.57 د

سوال 4.173: $y = x^{2/3}(x - 5)$

سوال 4.174: $y = x\sqrt{8 - x^2}$
جواب: شکل 4.58 ا

سوال 4.175: $y = (2 - x^2)^{3/2}$



شکل 4.58: ترسیمات برائے سوال 4.174 تا سوال 4.180

سوال 4.176: $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, x \neq 2$
جواب: شکل 4.58 ب

سوال 4.177: $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

سوال 4.178: $y = |x^2 - 1|$
جواب: شکل 4.58 ج

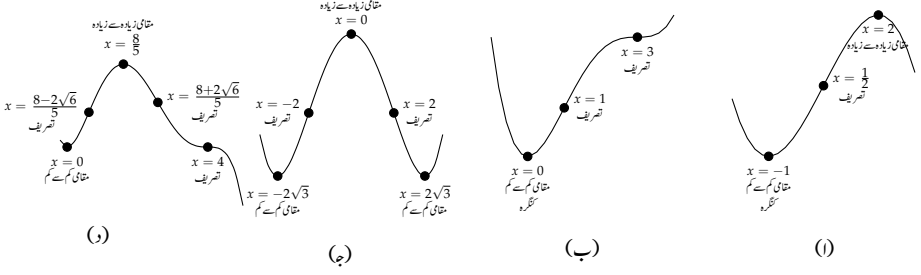
سوال 4.179: $y = |x^2 - 2x|$

سوال 4.180: $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$
جواب: شکل 4.58 د

سوال 4.181: $y = \sqrt{|x - 4|}$

y' سے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ
سوال 4.182 تا سوال 4.203 میں استمراری تفاعل $y = f(x)$ کا تفریق y' دیا گیا ہے۔ y'' تلاش کرتے ہوئے صفحہ 376 پر دیا گیا لانچر عمل استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

سوال 4.182: $y' = 2 + x - x^2$
جواب: شکل 4.59 ا



شکل 4.59: ترسیمات برائے سوال 4.182 تا سوال 4.188

سوال 4.183: $y' = x^2 - x - 6$

سوال 4.184: $y' = x(x-3)^2$
جواب: شکل 4.59-ب

سوال 4.185: $y' = x^2(2-x)$

سوال 4.186: $y' = x(x^2 - 12)$
جواب: شکل 4.59-ج

سوال 4.187: $y' = (x-1)^2(2x+3)$

سوال 4.188: $y' = (8x-5x^2)(4-x)^2$
جواب: شکل 4.59-د

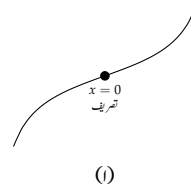
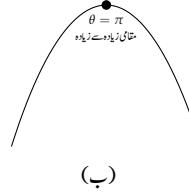
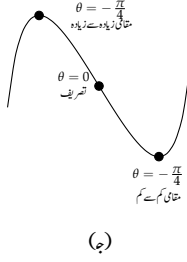
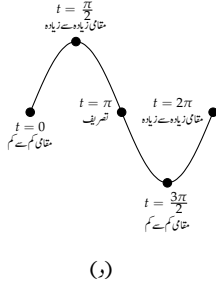
سوال 4.189: $y' = (x^2 - 2x)(x-5)^2$

سوال 4.190: $y' = \sec^2 x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.60-ا

سوال 4.191: $y' = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 4.192: $y' = \cot \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$
جواب: شکل 4.60-ب

سوال 4.193: $y' = \csc^2 \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$



شکل 4.60: حل ترسیمات برائے سوال 4.190 تا سوال 4.196

سوال 4.194: $y' = \tan^2 \theta - 1, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.60 ج

سوال 4.195: $y' = 1 - \cot^2 \theta, 0 < \theta < \pi$

سوال 4.196: $y' = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$
جواب: شکل 4.60 د

سوال 4.197: $y' = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 4.198: $y' = (x+1)^{-2/3}$
جواب: شکل 4.61 ا

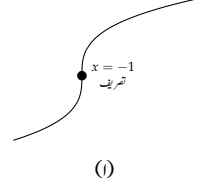
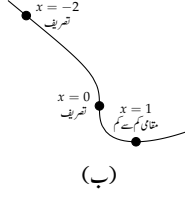
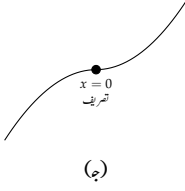
سوال 4.199: $y' = (x-2)^{-1/3}$

سوال 4.200: $y' = x^{-2/3}(x-1)$
جواب: شکل 4.61 ب

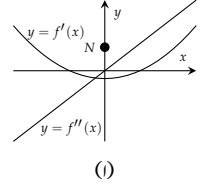
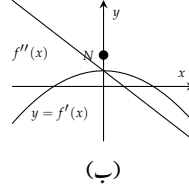
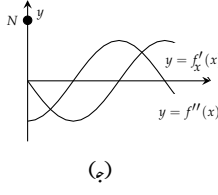
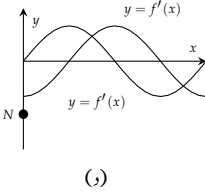
سوال 4.201: $y' = x^{-4/5}(x+1)$

سوال 4.202: $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$
جواب: شکل 4.61 ج

سوال 4.203: $y' = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$



شکل 4.61: حل ترسیمات برائے سوال 4.198 تا سوال 4.202



شکل 4.62: ترسیمات برائے سوال 4.204 تا سوال 4.207

y' اور y'' سے y کا خاکہ بنانا
سوال 4.204 تا سوال 4.207 میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے تقابل $y = f(x)$ کے یک رتبی تفرق y' اور دور تبی تفرق y'' کی ترسیم دی گئیں ہیں۔ ان کی نقل کر کے اس پر y کی تخمینی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 4.204: ترسیمات شکل 4.62-ا میں دیے گئے ہیں۔
جواب: حل ترسیم شکل 4.63-ا

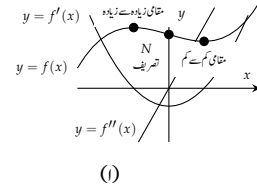
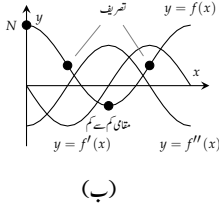
سوال 4.205: ترسیمات شکل 4.62-ب میں دیے گئے ہیں۔

سوال 4.206: ترسیمات شکل 4.62-ج میں دیے گئے ہیں۔
جواب: حل ترسیم شکل 4.63-ب

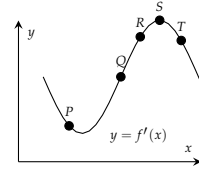
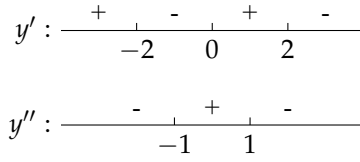
سوال 4.207: ترسیمات شکل 4.62-د میں دیے گئے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں
سوال 4.208: دو مرتبہ قابل تفرق تقابل $y = f(x)$ کو شکل 4.64 میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے پانچ نقطوں پر بتائیں کہ y'

باب 4. تفریق کا استعمال



شکل 4.63: حل ترسیمات برائے سوال 4.204 تا سوال 4.207



شکل 4.65: ترسیم برائے سوال 4.211

شکل 4.64: ترسیم برائے سوال 4.208

اور y'' مثبت، منفی یا صفر ہیں۔
جواب:

	y'	y''
P	-	+
Q	+	0
R	+	-
S	0	-
T	-	-

سوال 4.209: درج ذیل پر پورا اترتا ہوا ہموار ترسیم کیجیے۔

$$f(-2) = 8,$$

$$f(0) = 4,$$

$$f(2) = 0,$$

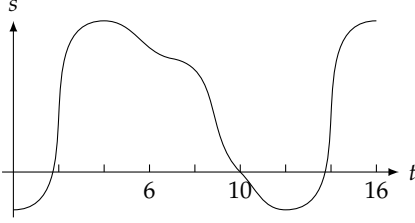
$$f'(x) > 0, |x| > 2,$$

$$f'(2) = f'(-2) = 0$$

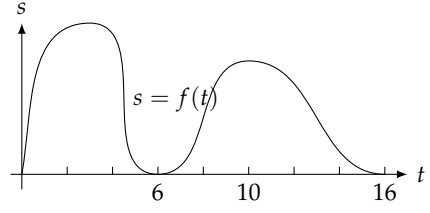
$$f'(x) < 0, |x| < 2$$

$$f''(x) < 0, x < 0$$

$$f''(x) > 0, x > 0$$



شکل 4.67: ترسیم برائے سوال 4.213



شکل 4.66: ترسیم برائے سوال 4.212

سوال 4.210: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو کو ترسیم کریں۔

x	y	تفرق
$x < 2$		$y < 0, y'' > 0$
2	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
4	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
6	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

جواب: شکل 4.70

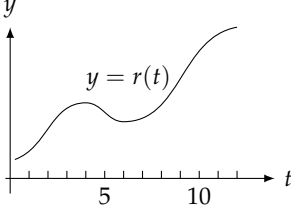
سوال 4.211: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو نقطہ $(-2, 2)$ ، $(-1, 1)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ اور $(2, 2)$ سے گزرتا ہے اور جس کے یک رتبہ تفرق کی علامت کا نقش شکل 4.65 میں دیا گیا ہے کو ترسیم کریں۔

سوال 4.212: سمتی رفتار اور اسراع محدودی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.66 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

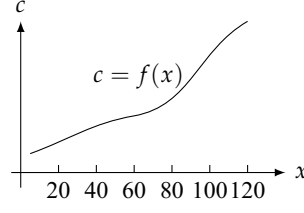
سوال 4.213: سمتی رفتار اور اسراع محدودی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.67 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

سوال 4.214: حاشیہ لاگت $c = f(x)$ کو شکل 4.68 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کتنی پیداوار پر حاشیہ لاگت گٹھنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے؟ جواب: تقریباً 60 پیداوار پر۔

سوال 4.215: ماہوار آمدنی $y = r(t)$ بالمقابل ماہ کو شکل 4.69 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کس دوران حاشیہ آمدنی بڑھ رہی ہے اور کب گھٹ رہی ہے؟



شکل 4.69: آمدن بالمقابل سال (سوال 4.215)



شکل 4.68: لاگت بالمقابل پیداوار (سوال 4.214)

سوال 4.216: تفاعل $y = f(x)$ کا تفریق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ (اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)$$

جواب: $x = 2$ پر مقامی کم سے کم، $x = 1$ اور $x = \frac{5}{3}$ پر تصریف۔

سوال 4.217: تفاعل $y = f(x)$ کا تفریق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ (اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4)$$

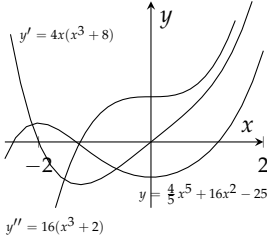
سوال 4.218: $x > 0$ کے لئے ایسا تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں جس کا $f(1) = 0$ اور $f'(x) = \frac{1}{x}$ ہے۔ کیا تفاعل کی مقعر کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.219: تفاعل $y = f(x)$ کا دور تہی تفریق استمراری اور غیر صفر ہے۔ کیا اس کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

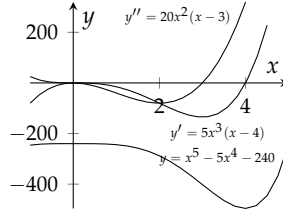
سوال 4.220: مستقل b ، c اور d کی صورت میں b کی کس قیمت کے لئے مضغی $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $b = -3$

سوال 4.221: افقی مماس۔ درست یا غلط؟ سمجھائیں

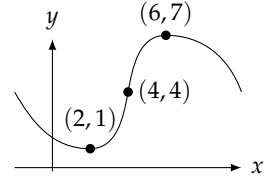
1. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت جفت ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔



شکل 4.72: حل ترسیم سوال 4.228



شکل 4.71: حل ترسیم سوال 4.226



شکل 4.70: حل ترسیم برائے سوال 4.210

2. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت طاق ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

سوال 4.222: قطع مکانی

1. قطع مکانی $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ کا کنگرہ تلاش کریں۔

2. قطع مکانی کب اوپر مقعر اور کب نیچے مقعر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (i) $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ؛ (ب) $a > 0$ کی صورت میں اوپر مقعر جبکہ $a < 0$ کی صورت میں نیچے مقعر۔

سوال 4.223: کیا یہ درست ہے کہ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی مقعر ہر ایسے نقطہ پر تبدیل ہوتی ہے جہاں $f''(x) = 0$ ہو؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.224: دو درجی منحنی۔ آپ دو درجی منحنی $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.225: کعبی منحنی۔ آپ کعبی منحنی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.226 تا سوال 4.236 میں تفاعل کی ترسیم پر نقطہ تصریف (اگر موجود ہو)، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطے تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کی نشاندہی کریں۔ ساتھ ہی تفاعل کا ایک رتبی تفرق اور دو رتبی تفرق بھی ترسیم کریں۔ جہاں یہ ترسیمات x محدود کو قطع کرتی ہیں، ان کا تفاعل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اس کے علاوہ تفرق کے تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلقات ہیں؟

سوال 4.226: $y = x^5 - 5x^4 - 240$ اور $y' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ تصریف ہیں۔ شکل 4.71

سوال 4.227: $y = x^3 - 12x^2$

سوال 4.228: $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ تصریف ہیں۔ تصریف $x = -\sqrt[3]{2}$ پر اور مقامی زیادہ سے زیادہ $x = -2$ پر ہیں۔ شکل 4.72

سوال 4.229: $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

سوال 4.230: تقابل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ اور اس کے پہلے دو تفریق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 4.231: تقابل $f(x) = x \cos x$ اور اس کے پہلے دو تفریق کو $0 \leq x \leq 2\pi$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 4.232:

1. $k = 0$ اور اس کی قریبی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + kx$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ k کی قیمت کا ترسیم کی صورت پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟

2. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

3. k کی دیگر قیمتوں کے ساتھ تجربہ کر کے دیکھیں۔ $k \rightarrow \infty$ اور $k \rightarrow -\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

جواب: (ب) $f'(x) = 3x^2 + k; -12k$ ؛ مثبت اگر $k < 0$ ، منفی اگر $k > 0$ ہو، اگر $k = 0$ ہو؛ اگر $k < 0$ ہو تب f' کے دو صفر ہوں گے، $k = 0$ کی صورت میں ایک صفر اور $k > 0$ کی صورت میں کوئی صفر نہیں ہو گا۔

سوال 4.233:

1. $k = -4$ اور اس کے قریبی قیمتوں کے لئے ایک ساتھ $-1 \leq x \leq 4$ پر $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$ ترسیم کریں۔ k کی قیمت ترسیم کی صورت پر کس طرح اثر انداز ہوتی ہے؟

ب. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

سوال 4.234:

ا. $-3 \leq x \leq 3$ کے لئے $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی استعمال سے مقعر، انحناء اور نیچے گرنے کی تصدیق کریں۔ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر منحني کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

جواب: (ب) چونکہ $\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \infty$ اور $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = -\infty$ ہیں لہذا کنگرہ ہو گا۔

سوال 4.235:

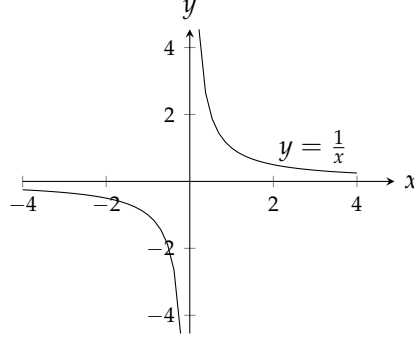
ا. $-0.5 \leq x \leq 1.5$ پر $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی مدد سے مقعر، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطوں کی تصدیق کریں۔ مبادا کے بائیں جانب کون سی مقعر ہے؟ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر ترسیم کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال 4.236: کیا $x = -3$ کے قریب $y = x^2 + 3 \sin 2x$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: y' کی ترسیم $x = -3$ کے قریب محور کو قطع کرتی ہے لہذا $x = -3$ کے قریب y کا افقی مماس ہو گا۔

4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \rightarrow \mp\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔



شکل 4.73: تقابل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

پر $x \rightarrow \pm\infty$ حد

تقابل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گھٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار بتدریج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \rightarrow \pm\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

2. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

□

لا متناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$x \rightarrow \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کے حد حاصل کیے۔ اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کی بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

با ضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$(4.7) \quad \lim_{x \rightarrow \mp\infty} k = k, \quad \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال 4.323 اور سوال 4.324 کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ب.}$$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

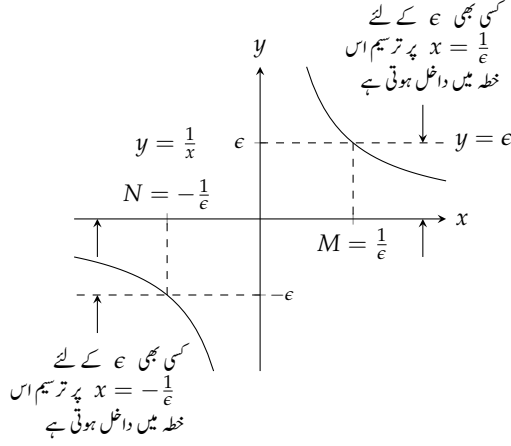
$$x > M, \quad \implies \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

$M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \quad \implies \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

$N = -\frac{1}{\epsilon}$ یا $-\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔



شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 4.20)

□

مساوات 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6: $x \rightarrow \mp\infty$ پر حل کیے خواص
 اگر $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) + g(x)] = L + M \quad \text{قاعدہ مجموعہ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) - g(x)] = L - M \quad \text{قاعدہ فرق:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M \quad \text{قاعدہ ضرب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} kf(x) = kL \quad \text{قاعدہ ضرب مستقل:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n} \quad \text{قاعدہ طاقت: اگر } m \text{ اور } n \text{ عدد صحیح ہوں تب}$$

یہ خواص بالکل مسئلہ 2.1 (صفحہ 113) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ} \\ &= 5 + 0 = 5 && \text{معلوم قیمتیں}\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں}\end{aligned}$$

□

مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 4.75)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

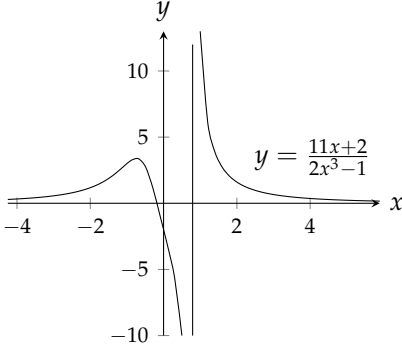
□

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 4.76)

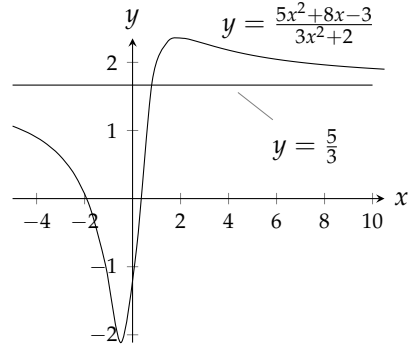
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{11}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0\end{aligned}$$

□

مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ (شکل 4.77)



شکل 4.76: ترسیم تقابل اور حد (مثال 4.23)



شکل 4.75: ترسیم تقابل اور حد (مثال 4.22)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{3}{x}}{7 + \frac{4}{x}} = -\infty$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو x سے تقسیم کریں

ا.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 7x}{2x^2 - 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + \frac{7}{x}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو x^2 سے تقسیم کریں

ب.

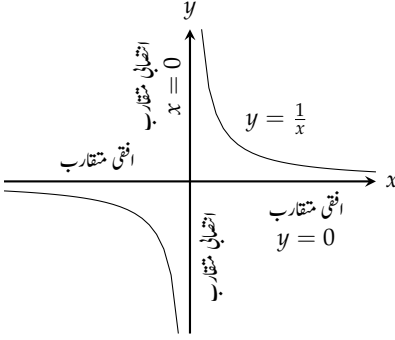
□

مثال 4.22 تا مثال 4.24 سے $x \rightarrow \mp \infty$ پر ناطق تقابل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

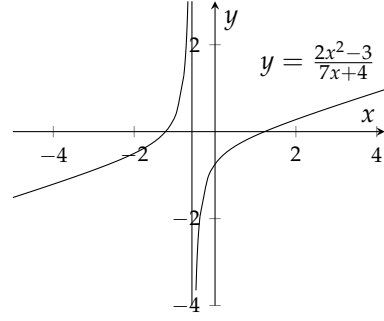
ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تقابل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تقابل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تقابل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔



شکل 4.78: محدوی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے مقارب ہیں۔



شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 4.24

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انتظامی مقارب

اگر مبدا سے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصل صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک مقارباتی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا مقارب¹³ کہتے ہیں۔

مثال 4.25: محدودی محور تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل 4.78)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہیں لہذا x محور $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ہیں لہذا y محور بھی $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

یاد رہے کہ $x = 0$ پر نسب نما صفر ہے لہذا تفاعل غیر معین ہے۔

□

تعریف: تفاعل $y = f(x)$ کا خط $y = b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

ہو۔

تفاعل $y = f(x)$ کا خط $x = a$ اس صورت انتصابی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

ہو۔

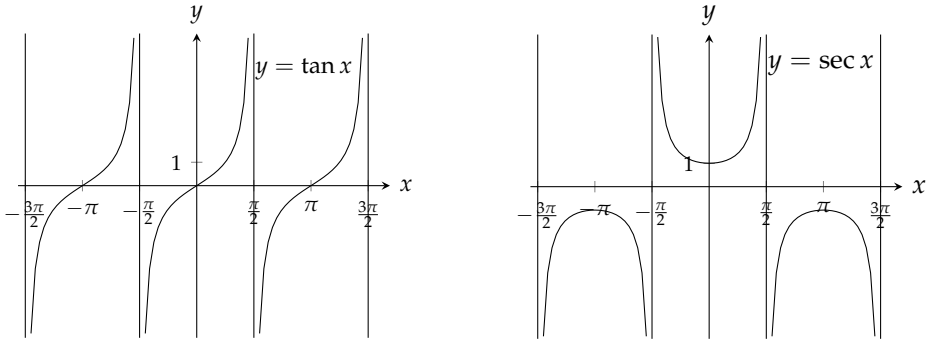
□

مثال 4.26: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.79)۔

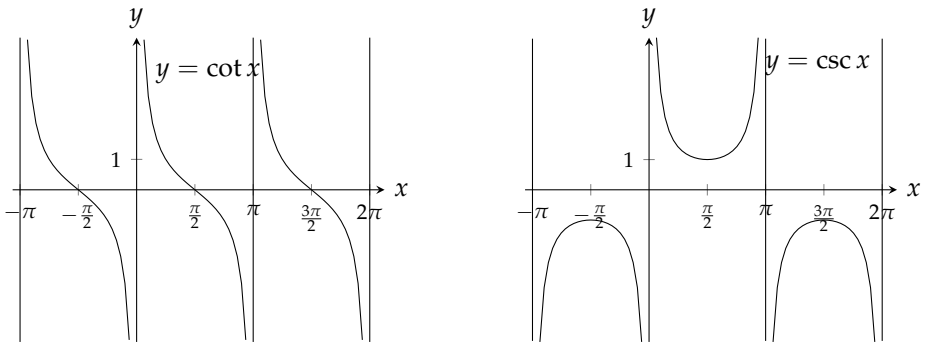
$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.80)۔

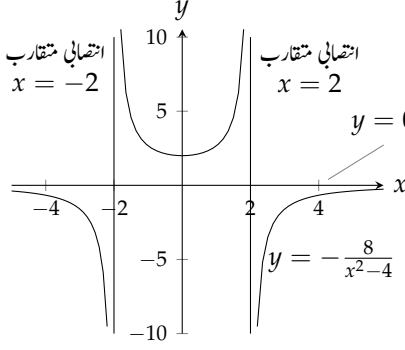
$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



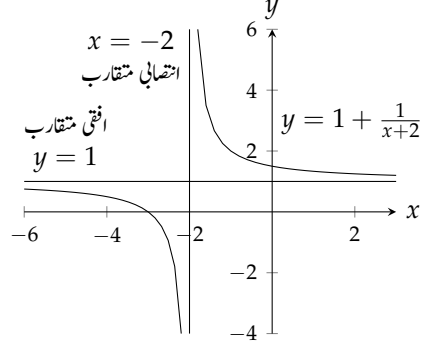
شکل 4.79: انتصابی مقارب (مثال 4.26)



شکل 4.80: انتصابی مقارب (مثال 4.26)



شکل 4.82: انتصابی مقارب (مثال 4.28)



شکل 4.81: انتصابی مقارب (مثال 4.27)

□

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم $x \rightarrow \pm\infty$ پر اور $x \rightarrow -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے $x+3$ اور $x+2$ سے تقسیم کر کے

$$y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

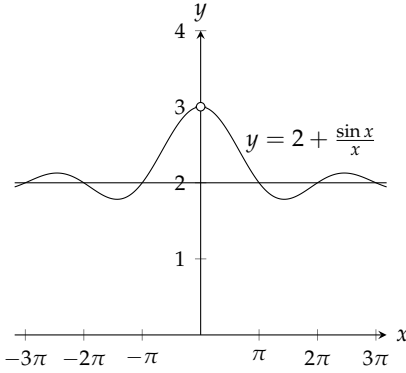
لکھا جاسکتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہوگی۔ یوں محدودی محور کی بجائے خط $y = 1$ اور خط $x = -2$ مقارب خط ہوں گے۔

□

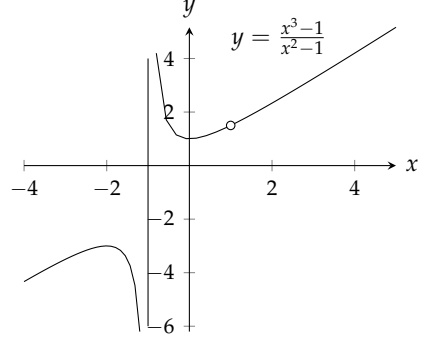
مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا مقارب تلاش کریں۔

$$y = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

حل: ہم $x \rightarrow \pm\infty$ اور $x = \pm 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔



شکل 4.84: منحنی اپنے مقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کر سکتی ہے
(مثال 4.30)۔



شکل 4.83: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x = 1$ پر
عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے لہذا اس کی صرف $x = -1$ پر
مقاربی خط ہو گا۔

چونکہ $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0$ لہذا افقی مقارب خط $y = 0$ ہے (شکل 4.82)۔ چونکہ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ سے $x = 2$ مقاربی خط حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $x = -2$ بھی مقاربی خط حاصل ہو گا۔
□

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

کا $x = -1$ پر انتصابی مقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

□ لکھا جاسکتا ہے لہذا عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے اور $x \rightarrow 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل 4.83)۔

مسئلہ 2.4 (صفحہ 119 مسئلہ 119) بھی $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال 4.30: مسئلہ بیچ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم $x \rightarrow 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \rightarrow \pm\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہذا مبدا پر کوئی مقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

اور $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$ ہے لہذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2$$

□

ہو گا لہذا منحنی کے بائیں اور دائیں مقارباتی خط $y = 2$ ہو گا (شکل 4.84)۔

ترچھے مقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا مقارب پایا جائے گا جو نا افقی اور نا انتہائی ہو گا۔

مثال 4.31: درج ذیل کے مقارب تلاش کریں۔

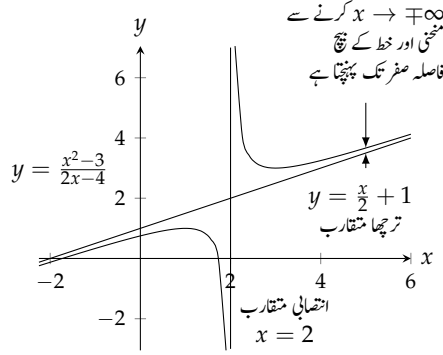
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

حل: ہم $x \rightarrow \pm\infty$ پر اور $x \rightarrow 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ $x^2 - 3$ کو $2x - 4$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

چونکہ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$ ہیں لہذا $x = 2$ دو طرفہ مقارب ہے۔
 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \rightarrow \frac{x}{2} + 1$ تک پہنچتی ہے۔ یوں $y = \frac{x}{2} + 1$ دونوں اطراف مقارباتی خط ہے (شکل 4.85)۔

□



شکل 4.85: ترچھا مقارب (مثال 4.31)

مقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1$$

x کی بڑی قیمتوں کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{2x - 4}$$

2 کے قریب x کی قیمتوں کے لئے

بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہذا $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا غلبہ¹⁴ ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ غالب¹⁵ ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

dominates¹⁴
dominant¹⁵

مثال 4.32: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3 + 1}{x}$$

حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاؤ، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔

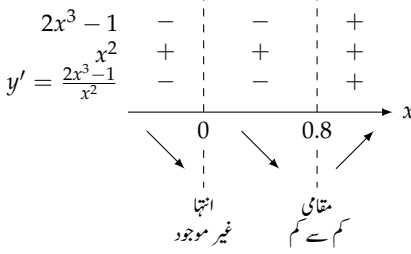
دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(4.8) \quad y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$|x|$ کی بری قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات 4.8 میں $x = 0$ پر انتہائی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔
تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاؤ۔ ایک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔



$$2x - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - 1 = 0$$

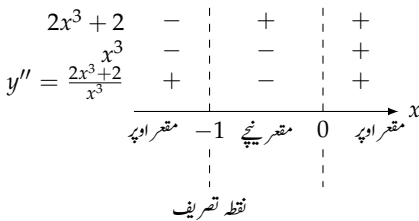
$$x^3 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8$$

چوتھا قدم: مقعر۔ دور رتبی تفرق

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 + 2}{x^3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

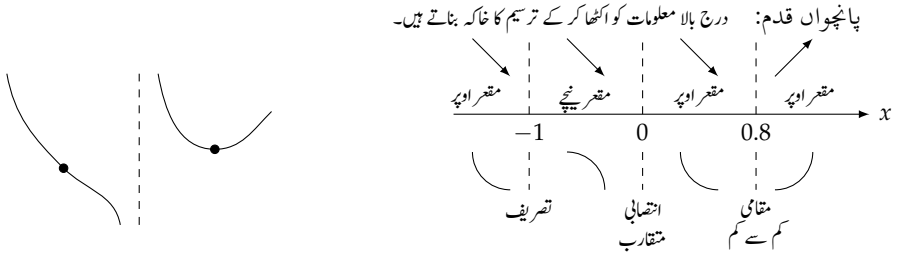


$$2 + \frac{2}{x^3} = 0$$

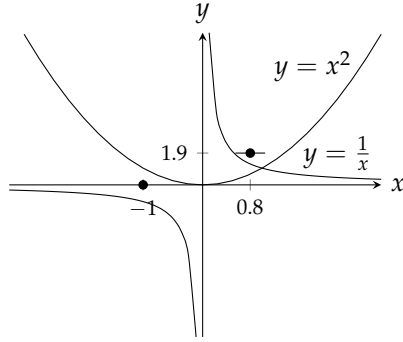
$$2x^3 + 2 = 0$$

$$x^3 = -1$$

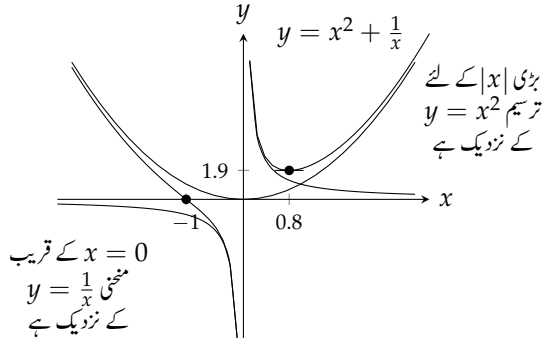
$$x = -1$$



چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تفاعل کی نشاندہی کریں۔
کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟
3. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کشیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔
4. متقارب خطوط اور قابل ہٹاؤ عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
 $x \rightarrow \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟
5. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاؤ دریافت کریں۔
6. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔
7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔
8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدود، پر f کی قیمت تلاش کریں۔
9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

سوال 4.237 تا سوال 4.242 میں (i) $x \rightarrow \infty$ پر (ب) $x \rightarrow -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 4.237: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$
جواب: (i) -3 ، (ب) -3

سوال 4.238: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 4.239: $g(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$
جواب: (i) $\frac{1}{2}$ ، (ب) $\frac{1}{2}$

سوال 4.240: $g(x) = \frac{1}{8 - \frac{5}{x^2}}$

$$h(x) = \frac{-5 + \frac{7}{x}}{3 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{سوال 4.241}$$

$$\text{جواب: (i) } -\frac{5}{3}, \text{ (ب) } -\frac{5}{3}$$

$$h(x) = \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{\sqrt{2}}{x^2}} \quad \text{سوال 4.242}$$

سوال 4.243 تا سوال 4.246 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} \quad \text{سوال 4.243}$$

جواب: 0

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\cos \theta}{3\theta} \quad \text{سوال 4.244}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2 - t + \sin t}{t + \cos t} \quad \text{سوال 4.245}$$

جواب: -1

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r + \sin r}{2r + 7 - 5 \sin r} \quad \text{سوال 4.246}$$

ناطق تفاعل کی حد

سوال 4.247 تا سوال 4.260 میں دیے ناطق تفاعل کی (i) $x \rightarrow \infty$ اور (ب) $x \rightarrow -\infty$ پر حد تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{2x+3}{5x+7} \quad \text{سوال 4.247}$$

جواب: (i) $\frac{2}{5}$, (ب) $\frac{2}{5}$

$$f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7} \quad \text{سوال 4.248}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \quad \text{سوال 4.249}$$

جواب: (i) 0, (ب) 0

$$f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2} \quad \text{سوال 4.250}$$

$$f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12} \quad \text{سوال 4.251}$$

جواب: (i) $-\infty$, (ب) ∞

$$g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1} \quad \text{سوال 4.252}$$

$$h(x) = \frac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x} \quad \text{سوال 4.253:} \quad (i) 7, (b) 7$$

$$g(x) = \frac{3x^2 - 6x}{4x - 8} \quad \text{سوال 4.254:}$$

$$f(x) = \frac{2x^5 + 3}{-x^2 + x} \quad \text{سوال 4.255:} \quad (i) -\infty, (b) \infty$$

$$g(x) = \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6} \quad \text{سوال 4.256:}$$

$$g(x) = \frac{x^4}{x^3 + 1} \quad \text{سوال 4.257:} \quad (i) \infty, (b) -\infty$$

$$h(x) = \frac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6} \quad \text{سوال 4.258:}$$

$$h(x) = \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x} \quad \text{سوال 4.259:} \quad (i) -\frac{2}{3}, (b) -\frac{2}{3}$$

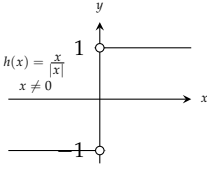
$$h(x) = \frac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9} \quad \text{سوال 4.260:}$$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت
ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔
نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 4.261 تا سوال 4.266 میں حد تلاش کریں۔

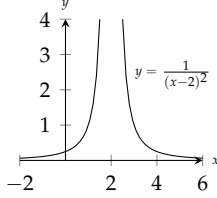
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7} \quad \text{سوال 4.261:} \quad 0 \quad \text{جواب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} \quad \text{سوال 4.262:}$$

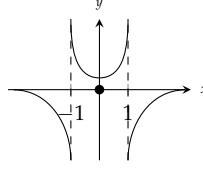
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} \quad \text{سوال 4.263:} \quad 1 \quad \text{جواب:}$$



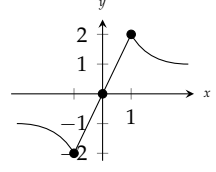
شکل 4.89: ایک ممکنہ حل
برائے سوال 4.273



شکل 4.88: ایک ممکنہ حل
برائے سوال 4.271



شکل 4.87: ایک ممکنہ حل
برائے سوال 4.269



شکل 4.86: ایک ممکنہ حل
برائے سوال 4.267

سوال 4.264: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

سوال 4.265: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

جواب: ∞

سوال 4.266: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال 4.267 تا سوال 4.270 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہذا کارتیسی محدود پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔ (ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

سوال 4.267: $f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

جواب: شکل 4.86

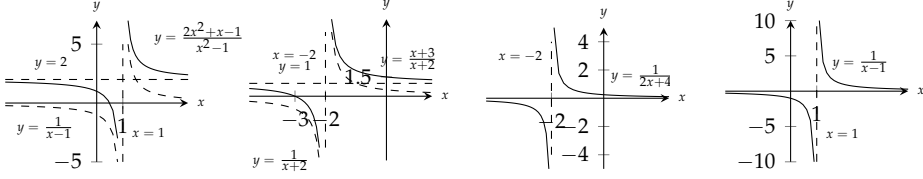
سوال 4.268: $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$

سوال 4.269: $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

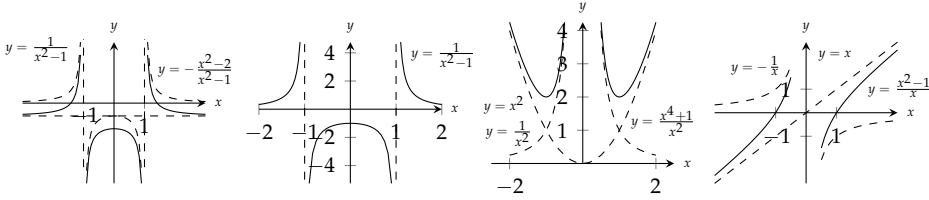
جواب: شکل 4.87

سوال 4.270: $f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$



شکل 4.90: ترسیم سوال 4.275
شکل 4.91: ترسیم سوال 4.277
شکل 4.92: ترسیم سوال 4.279
شکل 4.93: ترسیم سوال 4.281



شکل 4.94: ترسیم سوال 4.283
شکل 4.95: ترسیم سوال 4.285
شکل 4.96: ترسیم سوال 4.287
شکل 4.97: ترسیم سوال 4.289

تفاعل کی ایجاد

سوال 4.271 تا سوال 4.274 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

سوال 4.271: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$
جواب: شکل 4.88

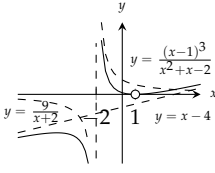
سوال 4.272: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \infty$

سوال 4.273: $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$
جواب: شکل 4.89

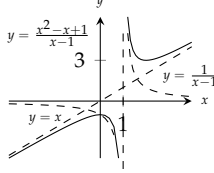
سوال 4.274: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = -\infty$

ناطق تفاعل کی ترسیم

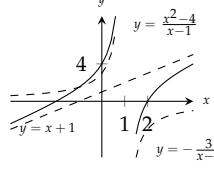
سوال 4.275 تا سوال 4.302 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ متقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔



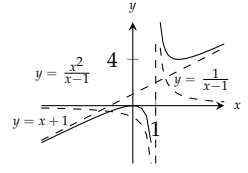
شکل 4.101: ترسیم سوال
4.297



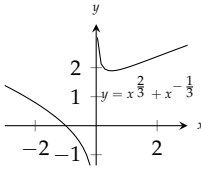
شکل 4.100: ترسیم سوال
4.295



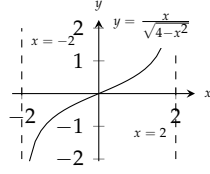
شکل 4.99: ترسیم سوال
4.293



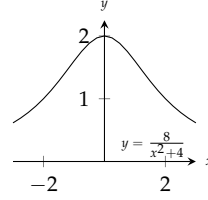
شکل 4.98: ترسیم سوال
4.291



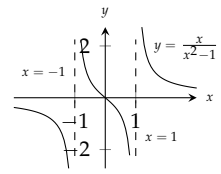
شکل 4.105: ترسیم سوال
4.305



شکل 4.104: ترسیم سوال
4.303



شکل 4.103: ترسیم سوال
4.301



شکل 4.102: ترسیم سوال
4.299

سوال 4.275: $y = \frac{1}{x-1}$
جواب: شکل 4.90

سوال 4.276: $y = \frac{1}{x+1}$

سوال 4.277: $y = \frac{1}{2x+4}$
جواب: شکل 4.91

سوال 4.278: $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 4.279: $y = \frac{x+3}{x+2}$
جواب: شکل 4.92

سوال 4.280: $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 4.281: $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.93

سوال 4.282: $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 4.283: $y = \frac{x^2-1}{x}$
جواب: شکل 4.94

سوال 4.284: $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 4.285: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$
جواب: شکل 4.95

سوال 4.286: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 4.287: $y = \frac{1}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.96

سوال 4.288: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 4.289: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.97

سوال 4.290: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

سوال 4.291: $y = \frac{x^2}{x-1}$
جواب: شکل 4.98

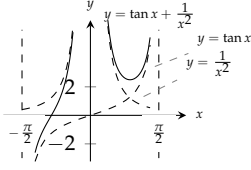
سوال 4.292: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 4.293: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$
جواب: شکل 4.99

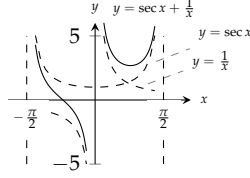
سوال 4.294: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

سوال 4.295: $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$
جواب: شکل 4.100

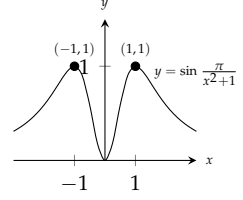
سوال 4.296: $y = -\frac{x^2-x+1}{x-1}$



شکل 4.108: ترسیم سوال
4.311



شکل 4.107: ترسیم سوال
4.309



شکل 4.106: ترسیم سوال
4.307

سوال 4.297: $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$
جواب: شکل 4.101

سوال 4.298: $y = \frac{x^3 + x - 2}{x - x^2}$

سوال 4.299: $y = \frac{x}{x^2 - 1}$
جواب: شکل 4.102

سوال 4.300: $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

سوال 4.301: $y = \frac{8}{x^2 + 4}$
جواب: شکل 4.103

سوال 4.302: $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 4.303 تا سوال 4.308 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

سوال 4.303: $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
جواب: شکل 4.104

سوال 4.304: $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

سوال 4.305: $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$
جواب: شکل 4.105

سوال 4.306: $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

سوال 4.307: $y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$

جواب: شکل 4.106

سوال 4.308: $y = -\cos\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$

اجزاء کی ترسیمات

سوال 4.309 تا سوال 4.312 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

سوال 4.309: $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

جواب: شکل 4.107

سوال 4.310: $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 4.311: $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

جواب: شکل 4.108

سوال 4.312: $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.313: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا c پایا جاتا ہے کہ $f(c)$ کی قیمت درج ذیل ہو۔

ا. -2 ب. $\cos 3$ ج. $5\,000\,000$

سوال 4.314: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$ تلاش کریں۔

سوال 4.315: تشاکی۔ فرض کریں وقفہ $x > 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x < 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟
جواب: بڑھتا

سوال 4.316: تشاکی۔ فرض کریں وقفہ $x < 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x > 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟

سوال 4.317: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 4.318: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں۔ اگر $g(x)$ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی ترسیم کا متقارب ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.319: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: 2

سوال 4.320: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
سوال 4.321:

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال 4.30) متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

$$(1) \quad x > 0 \text{ پر } f \text{ قابل تفرق ہے۔}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \text{ غیر موجود ہے۔}$$

جواب: (ب) $f(x) = 2 + \frac{1}{x} \sin x^2$ ممکن ہے۔

سوال 4.322: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = x + 1 + \frac{5}{x + 2}$$

جس کی ترجیحی متقارب $y = x + 1$ ہے۔

اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = \frac{x + 3 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

ملتا ہے جس کی متقارب $y = x + 3$ ہے۔

ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.323 اور سوال 4.324 میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \rightarrow \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 4.323: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ ہو گا۔

سوال 4.324: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے
سوال 4.325 تا سوال 4.328 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

$$y = -\frac{x^2-4}{x+1} \quad \text{سوال 4.325}$$

جواب: $x = -1, y = 1 - x$

$$y = \frac{x^2+x-6}{2x-2} \quad \text{سوال 4.326}$$

$$y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1} \quad \text{سوال 4.327}$$

جواب: $x = 1, x = -1, y = x - 1$

$$y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2} \quad \text{سوال 4.328}$$

سوال 4.329 تا سوال 4.334 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔ تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

$$y = x^3 + \frac{3}{x} \quad \text{سوال 4.329}$$

$$y = x^3 - \frac{3}{x} \quad \text{سوال 4.330}$$

$$y = 2 \sin x + \frac{1}{x} \quad \text{سوال 4.331}$$

$$y = 2 \cos x - \frac{1}{x} \quad \text{سوال 4.332}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 3 \sin 2x \quad \text{سوال 4.333}$$

$$y = (x-1)^{11} + 2 \sin 2\pi x \quad \text{سوال 4.334}$$

سوال 4.335 اور سوال 4.336 کا تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

4.5. $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، مشتق اور غالب اجزاء

ا. $x \rightarrow 0^+$ اور $x \rightarrow 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب. $x \rightarrow \mp\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج. $x \rightarrow 1$ اور $x \rightarrow -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.335: $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})^{2/3}$

جواب: (ا) $y \rightarrow \infty$ ، (ب) $y \rightarrow \infty$ ، (ج) $x = \mp 1$ پر کنگرہ

سوال 4.336: $y = \frac{3}{2}(\frac{x}{x-1})^{2/3}$

سوال 4.337: تقابل $y = -\frac{x^3-2}{x^2+1}$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

ا. $-9 \leq x \leq 9$ ب. $-90 \leq x \leq 90$ ج. $-900 \leq x \leq 900$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہوگی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہو گا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم میں $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟

جواب: جزو-ج میں فاصلے اتنے زیادہ ہیں کہ چھوٹی حرکت نظر نہیں آتی ہے۔

سوال 4.338: تقابل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$ کو وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = 1$ اور $x = -1$ کے بیچ ترسیم

نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا

بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تقابل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta \quad (\theta = \frac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جاسکتا ہے۔ سوال 4.344 تا سوال 4.339 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تا کہ ترسیم پر حد کو دیکھا جاسکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

سوال 4.339: $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} x \sin \frac{1}{x}$

جواب: 1

سوال 4.340: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$

سوال 4.341: $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{3x+4}{2x-5}$
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 4.342: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$

سوال 4.343: $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) \left(\cos \frac{1}{x}\right)$
واب: 3

سوال 4.344: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos \frac{1}{x}\right) (1 + \sin \frac{1}{x})$

4.6 بہترین بنانا

کسی چیز کو بہترین بنانے سے مراد اس چیز کی کسی خاصیت کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ بنانا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل بنانے پر کم تر لاگت آتی ہے؟ 30 cm قطر لکڑے کتنی مضبوط ترین شہتیر حاصل کی جاسکتی ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرتے ہیں۔

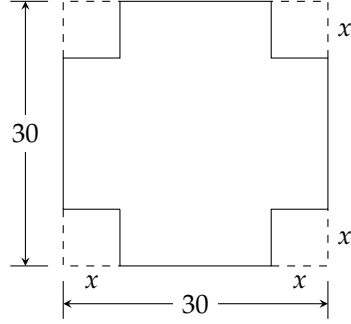
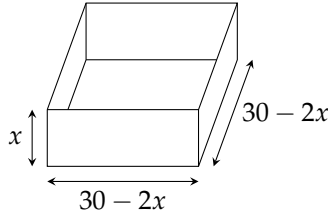
کاروبار اور صنعتی مثالیں

مثال 4.33: دھاتی چادر کا استعمال
ایک چکور چادر جس کا ضلع 30 cm ہے کے کونوں سے چھوٹے چکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہو گا؟

حل: شکل 4.109 میں کٹا ہوا چادر دکھایا گیا ہے۔ کٹے ہوئے چکور کا ضلع x سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم H مربع سنٹی میٹر

$$H(x) = x(30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

ہو گا۔ چونکہ چادر کے ضلع 30 cm ہے لہذا $0 \leq x \leq 15$ ہو گا جو تفاعل H کا دائرہ کار ہے۔



شکل 4.109: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال 4.33)۔

شکل 4.110 میں حجم بالمتبادل x دکھایا گیا ہے جس کے تحت $x = 0$ اور $x = 15$ پر حجم صفر ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خاطر x کے لحاظ سے H کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dx} = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x - 15)(x - 5) = 0,$$

یوں $x = 5$ اور $x = 15$ ملتا ہے جن میں سے صرف $x = 5$ دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر H کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$H(5) = 2000, \quad \text{نقطہ فاصل}$$

$$H(0) = 0, \quad H(15) = 0 \quad \text{آخری نقطہ}$$

□

یوں زیادہ سے زیادہ حجم 2000 cm^3 ہے جو 5 cm ضلع چکور کاٹنے سے ملے گا۔

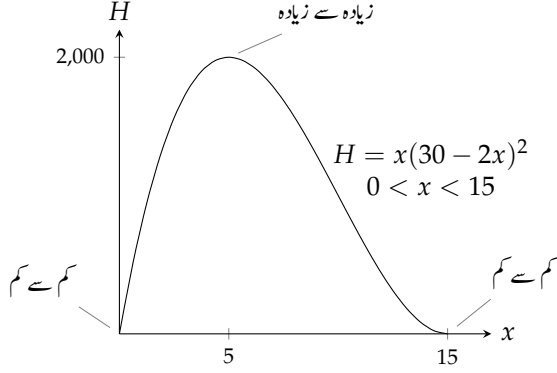
مثال 4.34: بیلن
آپ کو ایک لٹر تیل کا بلینی ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔

حل: ٹین ڈبے کی لمبائی h اور اس کا رداس r لیتے ہیں (شکل 4.111)۔ اگر h اور r کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$(4.9) \quad H = \pi r^2 * h = 1000 \quad (\text{ایک لٹر} = 1000 \text{ cm}^3)$$

درکار ہے۔ کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال 4.362 میں ٹین کے ضیاع کو شامل کیا گیا ہے)۔ ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ بیلن میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$(4.10) \quad S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{بیلن کے دوسر}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{بیلنی دیوار}}$$



شکل 4.110: حجم بالمقابل x (مثال 4.33)۔

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ $\pi r^2 h = 1000$ کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مسوات 4.10 میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات 4.9 اور مساوات 4.10 کو ملا کر ایک متغیر کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات 4.9 کو h کے لئے حل کرتے ہوئے

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

اس کو مساوات 4.10 میں پر کرتے ہوئے h سے چکارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

r کی چھوٹی قیمت کے لئے $\frac{2000}{r}$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نکلی یا پائپ نما ہو گا۔ r کی بڑی قیمت کے لئے $2\pi r^2$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چپٹی صورت کا ہو گا۔ r کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ کم سے کم حاصل ہو گا۔

S اپنے پورے دائرہ کار $(0, r)$ میں قابل تفرق ہے لہذا کم سے کم S قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پر

کرتے ہوئے نقطہ فاصلہ r کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \\
 \frac{dS}{dr} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{تفرق} \\
 4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 && \text{تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں} \\
 4\pi r^3 &= 2000 && \text{کے لئے حل کریں} \\
 r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} && \text{نقطہ فاصلہ}
 \end{aligned}$$

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصلہ اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے کہ S کی کم سے کم قیمت کتنی ہے اور کہاں پائی جاتی ہے۔ چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں ہے لہذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے ہیں لہذا ہمیں $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہو گا۔ ہم تفاعل کا دور تہی تفرق

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dr} &= 4\pi r - \frac{2000}{r} \\
 \frac{d^2 S}{dr^2} &= 4\pi + \frac{4000}{r^2}
 \end{aligned}$$

پر غور کرتے ہیں جو S کی پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل 4.111)۔ یوں پورے دائرہ کار پر S کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی اور $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ پر S کی قیمت کم سے کم ہو گی۔ جب

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \\
 h &= \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r
 \end{aligned}$$

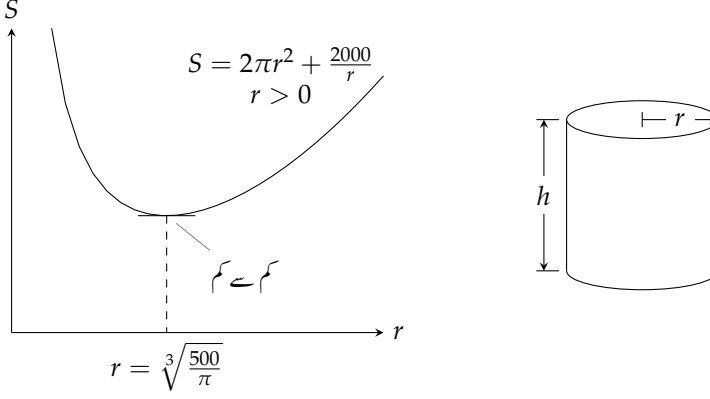
ہو۔ اس کے تحت کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42 \text{ cm}, \quad h \approx 10.84 \text{ cm}$$

□

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

1. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلوم دی گئی ہے؟ کون سی نہیں دی گئی ہے؟ کیا مطلوب ہے؟



شکل 4.111: ٹین کا ڈبہ (مثال 4.34)

2. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔

3. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلہ میں ہر تعلق کو مساوات کی صورت میں لکھیں۔

4. نا معلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نا معلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کہیں مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔

5. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتی اور دو رتی تفریق سے نقطہ فاصل (جہاں $f' = 0$ یا غیر معین ہو گا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔

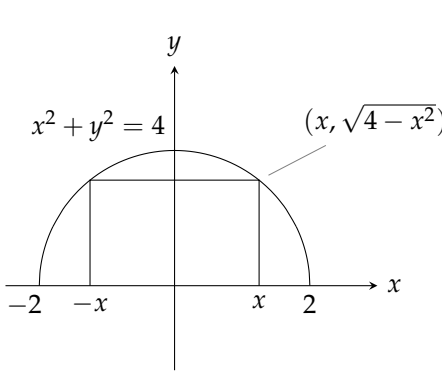
ریاضیات سے چند مثالیں

مثال 4.35: اعداد کا حاصل ضرب
ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں جن کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔

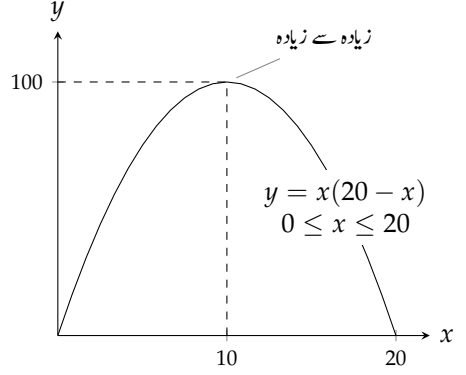
حل: اگر پہلا عدد x ہو تب دوسرا عدد $20 - x$ ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔ f کا دائرہ کار بند وقفہ $0 \leq x \leq 20$ ہے۔



شکل 4.113: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال 4.36)۔



شکل 4.112: x اور $(20 - x)$ کے حاصل ضرب کی زیادہ سے زیادہ قیمت 100 ہے (مثال 4.35)۔

ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر f کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

پورے وقفہ $0 \leq x \leq 20$ پر معین ہے اور صرف $x = 10$ پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$

$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

ہیں۔ یوں $f(10) = 100$ زیادہ سے زیادہ قیمت ہوگی اور درکار اعداد 10 اور $10 = (20 - 10)$ ہوں گے (شکل 4.112)۔ □

مثال 4.36: جیومیٹری

رد اس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہوگا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

حل: نصف دائرے کو کارتیسی محدود کے مہدا پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل 4.113 میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا x پر ہے۔ ہم مستطیل کے اضلاع اور رقبہ S کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$2x\sqrt{4 - x^2} \text{ : رقبہ, } \sqrt{4 - x^2}, 2x \text{ : لمبائی}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ $0 \leq x \leq 2$ میں پائی جاتی ہے۔

ہمیں استمراری تفاعل

$$S = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت وقفہ $[0, 2]$ پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل S کا تفریق

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

نقطہ $x = 2$ پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4 - x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

دونوں اطراف کو $\sqrt{4 - x^2}$ سے ضرب دیں

$x = -\sqrt{2}$ اور $x = \sqrt{2}$ میں سے صرف $x = \sqrt{2}$ تفاعل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔
دائرہ کار کی آخری نقطوں اور اس اکوتے نقطہ فاصل پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4$$

نقطہ فاصل پر قیمت

$$S(0) = 0, \quad S(2) = 0$$

آخری نقطوں پر قیمت

یوں مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ 4 ہے جب اس کی لمبائی $2x = 2\sqrt{2}$ اور چوڑائی $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$ ہوگی۔ □

پینچ و فغما اور قانون ابن سہل

خلا میں روشنی کی رفتار $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ہے۔ ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے (تقریباً اس کے $\frac{2}{3}$ تیز)۔

بصریات میں اصول فغما¹⁶ کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

¹⁶Fermat's principle

مثال 4.37: ہوا میں روشنی کی رفتار c_1 اور پانی میں روشنی کی رفتار c_2 لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ A سے پانی میں نقطہ B تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ ہوا اور پانی کا سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل: ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو x محور پر رکھتے ہوئے A تا B وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہوگا (شکل 4.114)۔ ایک یکساں ذریعہ میں شعاع کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی ہے لہذا اس میں کم سے کم وقت سے مراد کم سے کم فاصلہ ہے اور شعاع دو نقطوں کے بیچ سیدھے خط پر حرکت کرتی ہے۔ یوں A تا B راہ دو سیدھے خطوط پر مشتمل ہوگی۔ پہلا خط A سے N تک ہوگا اور دوسرا خط N سے B تک ہوگا۔ N وہ نقطہ ہے جہاں شعاع ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتی ہے۔ فاصل اور وقت کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \text{وقت}$$

یوں A سے N تک درکار وقت

$$t_1 = \frac{AN}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

اور N سے B تک درکار وقت

$$t_2 = \frac{NB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

ہوگا۔ A سے B تک پہنچنے کے لئے درکار کل وقت دونوں کا مجموعہ ہوگا۔

$$(4.11) \quad t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

اس مساوات میں t متغیر x کا قابل تفرق تقابل ہے اور تقابل کا دائرہ کار $[0, d]$ ہے۔ ہم اس بند دائرہ کار پر کم سے کم وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم تفرق

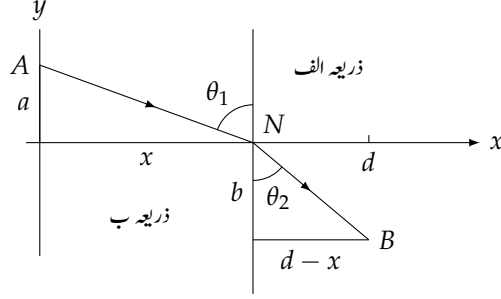
$$(4.12) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

لیتے ہیں جس کو شکل 4.114 کی مدد سے θ_1 اور θ_2 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.13) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin \theta_1}{c_1} - \frac{\sin \theta_2}{c_2}$$

مساوات 4.12 سے ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر $\frac{dt}{dx} < 0$ اور $x = d$ پر $\frac{dt}{dx} > 0$ ہوگا۔ یوں اند نقطوں کے درمیان کسی نقطہ x_0 پر $\frac{dt}{dx} = 0$ ہوگا۔ چونکہ $\frac{dt}{dx}$ مسلسل بڑھتا تقابل ہے (سوال 4.396) لہذا صرف ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہوگا۔

$$(4.14) \quad \frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$$



شکل 4.114: ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتے ہوئے شعاع کی راہ (مثال 4.37)

□

مساوات 4.14 کو ابن سہل کا قانون انعطاف¹⁷ کہتے ہیں¹⁸۔

معاشیات میں لاگت اور آمدنی

نظریہ معاشیات میں احصاء کے اہم کردار ہے۔ اس کی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال لاگت، آمدنی اور منافع کے تعلق کے بارے میں ہے۔

فرض کریں کہ

x ارکان فروخت کرنے سے آمدنی $r(x)$ ہے۔

x ارکان کی لاگت پیداوار $c(x)$ ہے۔

x ارکان فروخت کرنے سے منافع $p(x) = r(x) - c(x)$ ہے۔

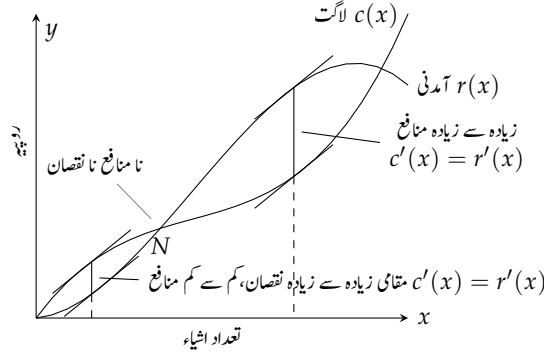
حاشیہ آمدنی اور حاشیہ لاگت پیداوار درج ذیل ہیں۔

$$\frac{dr}{dx} = \text{حاشیہ آمدنی}$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{حاشیہ لاگت}$$

¹⁷ Ibn Sahl's law of relection

¹⁸ مغربی دنیا میں اس کو Snell's law کہتے ہیں۔



شکل 4.115: عموماً تفاعل لاگت کا مقعر پہلے نیچے اور بعد میں اوپر ہوتا ہے۔ تفاعل لاگت تفاعل آمدنی کو نا منافع نا نقصان کے نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ N کے بائیں خسارہ اور اس کے دائیں منافع ہو گا۔

ان تفرق کا آمدنی کے ساتھ تعلق کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 4.7: زیادہ سے زیادہ منافع (اگر پایا جاتا ہو) اس صورت ہو گا جب حاشیہ لاگت پیداوار اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام $x > 0$ پر $r(x)$ اور $c(x)$ قابل تفرق ہیں لہذا $p(x) = r(x) - c(x)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر پائی جاتی ہو) $p'(x) = 0$ پر پائی جائے گی۔ چونکہ $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ ہے لہذا $p'(x) = 0$ سے مراد

$$r'(x) - c'(x) = 0, \quad \text{یعنی} \quad r'(x) = c'(x)$$

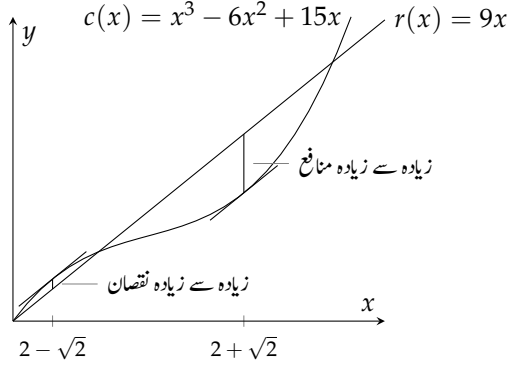
ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے (شکل 4.115)۔

□

ہمیں مسئلہ 4.7 سے کیا ہدایت ملتی ہے؟ ایسی سطح پیداوار جہاں $p'(x) = 0$ ہو، پر زیادہ سے زیادہ منافع یا زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ لیکن معاشی پیشگوئی کرتے ہوئے پیداوار کی ان سطحوں پر نظر رکھیں جہاں حاشیہ لاگت اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔ اگر زیادہ سے زیادہ منافع پایا جاتا ہو، وہ ان سطح پیداوار میں سے ایک پر ہو گا۔

مثال 4.38: لاگت اور آمدنی تفاعل درج ذیل ہیں

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$



شکل 4.116: لاگت بالمتقابل منافع (مثال 4.38)

جہاں تعداد پیداوار x ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار پائی جاتی ہے جس پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب زیادہ سے زیادہ منافع کس سطح پیداوار پر ہو گا؟

حل:

$$\begin{aligned}
 r(x) &= 9x, & c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x \\
 r'(x) &= 9, & c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15 \\
 3x^2 - 12x + 15 &= 9 & r' \text{ اور } c' \text{ تلاش کریں} \\
 3x^2 - 12x + 6 &= 0 & \text{ایک دوسرے کے برابر پر کریں} \\
 x^2 - 4x + 2 &= 0 & \text{ترتیب دیں} \\
 x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} & \text{دو درجی مساوات حل کریں} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} \\
 &= 2 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

زیادہ سے زیادہ منافع کا امکان $2 + \sqrt{2}$ یا $2 - \sqrt{2}$ سطح پیداوار پر حاصل ہو گا (شکل 4.116)۔ آپ دونوں نقطوں پر آمدنی کا حساب کر کے دیکھیں گے کہ $x = 2 + \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ منافع حاصل ہو گا جبکہ $x = 2 - \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ □

بہترین سطح پیداوار کو کم سے کم اوسط لاگت والی سطح پیداوار تصور کیا جاسکتا ہے۔ اگلے مسئلہ میں یہ سطح پیداوار حاصل کی گئی ہے۔

مسئلہ 4.8: اوسط کم سے کم لاگت پیداوار (اگر پائی جاتی ہو) اس سطح پیداوار پر ہو گی جس پر اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$x > 0 \text{ اشیاء کی لاگت پیداوار } c(x)$$

$$\frac{c(x)}{x} \text{ اشیاء کی اوسط لاگت پیداوار}$$

قابل تفرق ہیں۔

اگر لاگت کو کم سے کم کرنا ممکن ہو، یہ اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{c(x)}{x} \right) &= 0 \\ \frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} &= 0 && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\ xc'(x) - c(x) &= 0 && x^2 \text{ سے ضرب دیں} \\ \underbrace{c'(x)}_{\text{حاشیہ لاگت}} &= \underbrace{\frac{c(x)}{x}}_{\text{اوسط لاگت}} \end{aligned}$$

□

ہمیں دھیان سے مسئلہ 4.8 استعمال کرنا ہو گا جو یہ نہیں کہتا ہے کہ کم سے کم اوسط لاگت کی سطح پیداوار موجود ہے بلکہ کہتا ہے کہ اگر ایسی سطح موجود ہو تب اس کو کہاں تلاش کرنا چاہیے۔ جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں وہاں دیکھیں کہ آیا کم سے کم اوسط لاگت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.39: تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار ہے جہاں اوسط لاگت کم سے کم ہو؟ اگر ایسا ہو تب اس سطح پیداوار کو تلاش کریں۔

حل: ہم جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں، وہاں دیکھتے ہیں۔

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \quad \text{لاگت}$$

$$c'(x) = 3x^2 - 12x + 15 \quad \text{حاشیہ لاگت}$$

$$\frac{c(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 \quad \text{اوسط لاگت}$$

$$3x^2 - 12x + 15 = x^2 - 6x + 15$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 3$$

چونکہ $x > 0$ ہے لہذا کم سے کم اوسط لاگت صرف $x = 3$ ہزار کی پیداوار پر ممکن ہے۔

ہم تفریق کو دیکھتے ہیں۔

$$\frac{c(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 \quad \text{اوسط لاگت}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{c(x)}{x} \right) = 2x - 6$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{c(x)}{x} \right) = 2 > 0$$

□

دور تہی تفریق مثبت ہے لہذا $x = 3$ پر مطلق کم سے کم ہوگا۔

غیر مسلسل مظہر کا نمونہ بذریعہ تفریقی تفاعل

اگر آپ سوچ رہے ہوں کہ جب x عدد صحیح ہے (چونکہ مکمل اشیاء پیدا کیے جاتے ہیں) تب ہم لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرنے کے لئے قابل تفریق تفاعل $c(x)$ اور $r(x)$ کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

جب x کی قیمت بڑی ہو تب ہم لاگت اور آمدنی کو ہموار منحنیات $c(x)$ اور $r(x)$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جو نا صرف x کی عدد صحیح قیمتوں بالکل ان کے بیچ تمام قیمتوں پر قابل تفریق ہیں۔ ان قابل تفریق تفاعل، جو x کی عدد صحیح قیمتوں کے لئے لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرتے ہیں، کی قیمتوں پر ہم احصاء کی مدد سے غور کر سکتے ہیں۔ یوں حاصل نتائج کو ہم حقیقی دنیا میں منتقل کرتے ہوئے امید کرتے ہیں کہ ہم اس سے فائدہ اٹھا سکیں۔ جب ہم ایسا کرتے ہوں، جیسا نظریہ معاشیات میں ہم نے کیا، ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل حقیقت کا اچھا نمونہ ہے۔

ایسی صورتوں میں جب احصاء کہتا ہو کہ بہترین پیداوار x کی غیر عدد صحیح قیمت پر ہوگی، جیسا مثال 4.38 میں $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کا جواب حاصل ہوا، تب ہم اس کا قریب ترین موزوں عدد صحیح لیتے ہیں۔ اگر ہم 20 اشیاء کو ڈبوں میں بند کرتے ہوں تب $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کی صورت میں ہم 3410 یا 3420 لے سکتے ہیں۔

سوالات

ہر سوال کو حل کرنے سے پہلے بہتر ہو گا کہ موزوں دائرہ کار لیتے ہوئے تفاعل کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔
جیومیٹری کے مسائل

سوال 4.345: رداس r دائرہ کے محیط پر دو نقطوں سے وسط تک سیدھی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ اس خطہ کے محیط کی لمبائی $(2r + s)$ ہے جو 100 m کے برابر ہے۔ r اور s کی کن قیمتوں سے خطے کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا؟
جواب: $r = 25\text{ m}, s = 50\text{ m}$

سوال 4.346: ایک قائمہ مثلث کا وتر 5 cm ہے۔ اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 4.347: ایک مستطیل جس کا رقبہ 16 cm^2 ہے کالم سے کم محیط کتنا ہو گا؟
جواب: 16 cm

سوال 4.348: دکھائیں کہ ایک محیط کے تمام مستطیل میں اس کا رقبہ سب سے زیادہ ہو گا جو چکور ہو۔

سوال 4.349: ایک قائمہ مساوی الساقین مثلث کا وتر 2 اکائیاں لمبا ہے۔ اس میں محصور مستطیل کو شکل 4.117 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. N کے محدود کو x کی صورت میں لکھیں۔ (خط AB کی مساوات لکھ کر آپ ایسا کر سکتے ہیں۔)

ب. مستطیل کا رقبہ x کی صورت میں لکھیں۔

ج. مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

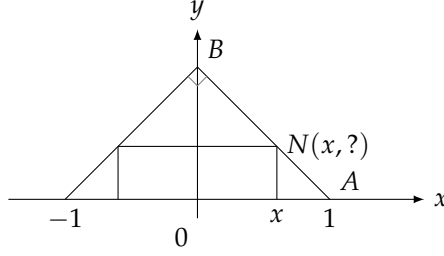
جواب: (i) $(x, 1 - x)$ ، (ب) $A(x) = 2x(1 - x)$ ، (ج) $\frac{1}{2}$ مربع اکائیاں

سوال 4.350: ایک مستطیل کا سلا x محور پر ہے جبکہ اس کے بالائی دو راس قطع مکانی $y = 12 - x^2$ پر ہیں۔ اس مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 4.351: آپ $15\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ چادر کے کونوں سے چکور چادر کاٹ کر کھلا مستطیل ڈبہ بنانا چاہتے ہیں۔ اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟

جواب: $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}\text{ cm}^3$

سوال 4.352: آپ $(a, 0)$ سے $(0, b)$ تک لکیر کھینچ کر ریلج اول میں بند خطہ بناتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس خطے کا رقبہ اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $a = b$ ہو۔



شکل 4.117: مثلث میں محصور مستطیل (سوال 4.349)

سوال 4.353: ایک دریا کے کنارے مستطیل رقبے کو تین اطراف سے 800 m کل لمبائی کی دیوار سے گھیرا جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟
جواب: $80\,000\text{ m}^2$

سوال 4.354: 216 m^2 مستطیل رقبے کو دھاتی تار سے گھیرا جاتا ہے۔ کسی ایک ضلع کے متوازی تار سے اس خطے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ کم سے کم تار استعمال کرنا مقصود ہے۔ مستطیل کی جسامت کیا ہونی چاہیے؟ تار کی کم سے کم لمبائی کیا ہوگی؟

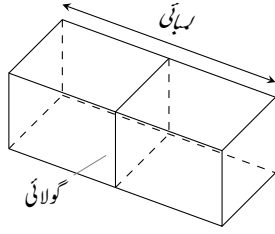
سوال 4.355: کم ترین وزنی فولادی ٹینکی
بغیر ڈھکن ٹینکی جس کا تلاء پکور ہو درکار ہے جس کا حجم 256 m^3 ہو۔ یہ ٹینکی 1 cm موٹی فولادی چادر سے بنائی جائے گی۔ بطور انجینئر آپ کا کام ہے کہ ہلکی ترین ٹینکی بنانے کے لئے ٹینکی کا اضلاع تلاش کریں۔ اضلاع کیا ہوں گے؟
جواب: $8 \times 8 \times 4\text{ m}^3$

سوال 4.356: بارش کا پانی
ہارانی علاقے میں بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لئے زمین کی کھدائی کر کے بغیر ڈھکن 1125 m^3 حجم کی ٹینکی بنائی جاتی ہے جس کا تلاء پکور ہے۔ ٹینکی کی گہرائی y میٹر جبکہ تلاء کی ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔ ٹینکی کا تلاء اور اطراف پر لاگت کے ساتھ ساتھ کھدائی کی لاگت بھی ہے جو حاصل ضرب xy کے راست متناسب ہے۔ اگر کل لاگت $c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$ ہو تب لاگت کو کم سے کم رکھنے کی خاطر x اور y کی ہوں گے؟

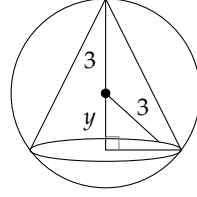
سوال 4.357: ایک مستطیل اشتہار میں 50 cm^2 رقبے پر لکھائی ہوگی۔ بالائی اور نچلے جانب 4 cm اور اطراف پر 2 cm خالی جگہ ہوگی۔ کم سے کم کاغذ استعمال کرنے کے لئے مستطیل اشتہار کے اضلاع کیا ہوں گے؟
جواب: $9\text{ cm} \times 18\text{ cm}$

سوال 4.358: رداس $r = 3$ کی کرہ میں محصور دائری مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے (شکل 4.358)؟

سوال 4.359: ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں a اور b ہیں جن کے بیچ زاویہ θ ہے۔ θ کی کون سے قیمت مثلث کی زیادہ



شکل 4.119: ڈبہ برائے سوال 4.363



شکل 4.118: کرہ میں مخروط (سوال 4.358)

سے زیادہ رقبہ دے گی۔ (اشارہ: $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$)
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 4.360: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{5}$ ہے جبکہ اس کے باقی اضلاع x اور y ہیں۔ تفاعل $s = 2x + y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

سوال 4.361: 1000 cm حجم کا بغیر ڈھکن قائمہ دائری بیلن بنایا جاتا ہے۔ کم سے کم بیلن کی جسامت تلاش کریں۔
جواب: $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}$

سوال 4.362: 1000 cm حجم کا قائمہ دائری بیلنی ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ چادر سے بیلن کے اطراف کاٹتے ہوئے کوئی مال ضائع نہیں ہوتا ہے البتہ بالائی اور نیچے دائری حصے کو $2r \times 2r$ چکور سے کاٹتے ہوئے مال ضائع ہوتا ہے۔ یوں ایک ڈبہ بنانے کے لئے $S = 8r^2 + 2\pi rh$ رقبے کی چادر درکار ہوگی تاکہ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (مثال 4.34)۔ مثال 4.34 میں کم سے کم لاگت کے لئے r اور h کا تعلق $h = 2r$ تھا۔ اب ان کا تعلق کیا ہوگا؟

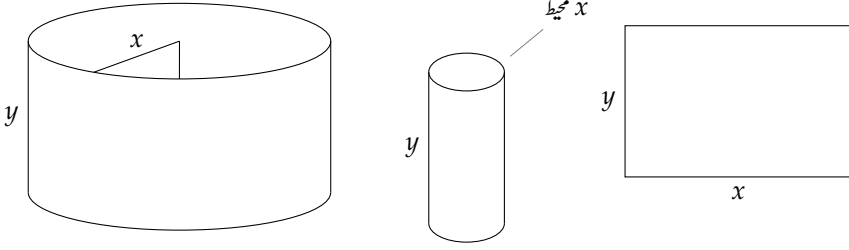
سوال 4.363: (i) ایک مستطیل ڈبہ کی لمبائی اور گولائی کا مجموعہ 108 cm ہے (شکل 4.119)۔ اس ڈبے کے سر چکور ہیں۔ اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس ڈبے کی لمبائی بالمقابل حجم ترسیم کریں اور جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $18 \text{ cm} \times 18 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$

سوال 4.364: گزشتہ سوال میں چکور سروں کی بجائے چکور اطراف تصور کریں۔ یوں ڈبے کا حجم $h \times h \times w$ اور گولائی $2h + 2w$ ہوگی۔ اب ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہوگی؟

سوال 4.365: (i) ایک مستطیل چادر جس کا محیط 36 cm اور اضلاع x اور y ہیں کو گول کرتے ہوئے بیلن بنایا جاتا ہے جس کے سر کھلے ہیں۔ اس بیلن کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس مستطیل چادر کے ایک کنارے کو محور تصور کرتے ہوئے، چادر کو اس محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو خیالی بیلنی صورت بناتا ہے۔ اس بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہوگا؟ (شکل 4.120)
جواب: (i) 6 cm ، 12 cm ؛ (ب) 6 cm ، 12 cm

سوال 4.366: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{3}$ ہے۔ اس کو ایک ضلع کے گرد گھما کر فرضی مخروط بنایا جاتا ہے۔ اس مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ممکن ہے اور اس کا رداس اور قد کیا ہوں گے؟

سوال 4.367: دائرہ بالمقابل چکور



شکل 4.120: چادر اور بیلن (سوال 4.365)

ا. 4 m لمبی تار کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک چکڑ اور ایک دائرہ بنایا جاتا ہے۔ ان ٹکڑوں کی لمبائیاں کیا ہوں گی کہ دائرے اور چکڑ کا مجموعی رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو؟

ب. چکڑ اور دائرے کے مجموعی رقبے کو دائرے کی رداس کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں۔ جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

ج. اب کل رقبے کو چکڑ کے ضلع کی لمبائی کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں اور جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

جواب: (i) دائرے کا محیط 4 m ہے۔

سوال 4.368: مکعب اور کرہ کی سطحی رقبوں کے مجموعے کو مستقل رکھیں۔ مکعب کے ضلع اور کرہ کے رداس کی کون سی نسبت (i) کم سے کم، (ب) زیادہ سے زیادہ مجموعی حجم دے گی؟

سوال 4.369: ایک مستطیل شیشہ کے اوپر نصف دائری شیشہ مل کر کھڑکی بناتے ہیں (شکل 4.121)۔ مستطیل شیشہ شفاف ہے جبکہ نصف دائری شیشہ ہلکا سیاہ ہے اور فی مربع رقبہ نصف روشنی کو گزرنے دیتا ہے۔ کھڑکی کا محیط مستقل ہے۔ زیادہ سے زیادہ روشنی کے لئے کھڑکی کی جسامت تلاش کریں۔

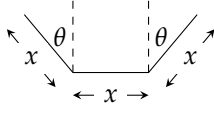
جواب: اگر نصف دائرے کا رداس r ، مستطیل کا قاعدہ $2r$ اور اس کی بلندی h ہوں تب $\frac{2r}{h} = \frac{8}{4+\pi}$ ہو گا۔

سوال 4.370: ایک بیلنی گودام تعمیر کرنی ہے جس کی چھت نصف کرہ کی ہوگی۔ فی مربع سطحی رقبہ نصف کرہ پر لاگت بیلنی دیوار کی فی مربع سطحی رقبہ کی لاگت سے دگنی ہے۔ مستقل حجم کی صورت میں کم سے کم کل لاگت کے لئے گودام کی جسامت تلاش کریں۔ تعمیر میں چلی سطح (زمین) پر لاگت اور ضیاع کو نظر انداز کریں۔

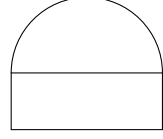
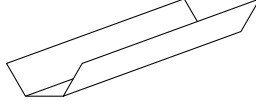
سوال 4.371: ایک پانی کی نالی تعمیر کرنی ہے جس کی جسامت شکل 4.122 میں دکھائی گئی ہے۔ صرف زاویہ θ متغیر ہے۔ زیادہ سے زیادہ حجم کے لئے θ کی قیمت تلاش کریں۔

جواب: $\frac{\pi}{6}$

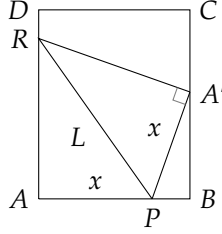
سوال 4.372: ایک مستطیل $8.5 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ کاغذ کو مستوی پر رکھا جاتا ہے (شکل 4.123)۔ کونا A کو مخالف لمبے ضلع پر رکھ کر کاغذ کو چپٹا کیا جاتا ہے۔ لمبائی RP کو کم سے کم کرنا مقصود ہے۔



شکل 4.122: پانی کی نالی (سوال 4.371)



شکل 4.121: کھڑکی (سوال 4.369)



شکل 4.123: کاغذ برائے سوال 4.372

ا. کاغذ استعمال کرتے ہوئے اس لمبائی کو کم سے کم کریں۔

ب. دکھائیں $L^2 = \frac{2x^3}{2x-8.5}$

ج. x کی کون سی قیمت L^2 کو کم سے کم بناتی ہے؟

د. x کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

ه. x بالمقابل L ترسیم کریں اور جزو-ب کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

طبعی استعمال

سوال 4.373: انتظامی حرکت کرتی ایک جسم کی اونچائی $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, $g > 0$ ہے جہاں t سیکنڈوں اور s میٹروں میں ہے۔ جسم کی زیادہ سے زیادہ اونچائی کیا ہوگی؟

جواب: $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$

سوال 4.374: ایک عمارت سے 9 m کے فاصلے پر 2.5 m اونچی دیوار ہے۔ دیوار کی دوسری طرف سے عمارت تک سیزھی لگائی جاتی ہے۔ سیزھی کی کم سے کم لمبائی کیا ہوگی؟

سوال 4.375: شہتیر کہ مضبوطی M اس کی چوڑائی w ضرب مربع گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $M = kwd^2$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. 30 cm قطر کے کٹڑے سے کس جسامت کی مضبوط شہتیر حاصل کی جاسکتی ہے؟

ب. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہوگا؟

$$\text{جواب: } \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ cm} \times \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ cm (i)}$$

سوال 4.376: شہتیر کی سختی S اس کی چوڑائی w ضرب کعب گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $S = kwd^3$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. 30 cm قطر کی کٹڑے سے سخت سے سخت شہتیر حاصل کریں۔ شہتیر کی جسامت کیا ہوگی؟

ب. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہوگا؟

سوال 4.377: لمحہ t پر ایک بلب میں برقی رو $i = 2 \cos t + 2 \sin t$ ہے۔ رو کی زیادہ سے زیادہ لمحاتی قیمت کیا ہوگی؟
جواب: $2\sqrt{2} \text{ A}$

سوال 4.378: بے رگڑ ریڑھی کو افقی مستوی پر رکھ کر اسپرنگ کے ذریعہ قریبی دیوار کے ساتھ باندھا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ساکن مقام سے اس کو 10 cm دور کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے تاکہ یہ 4 سینڈوں کے لئے مستوی پر آگے پیچھے حرکت کر سکے۔ لمحہ t پر اس کا مقام $s = 10 \cos \pi t$ ہے۔

ا. ریڑھی کی زیادہ سے زیادہ رفتار کب اور کتنی ہوگی؟ تب ریڑھی کا مقام اور اس کی اسراع کیا ہوگی؟

ب. جس لمحہ ریڑھی کی اسراع زیادہ سے زیادہ ہو اس لمحہ ریڑھی کا مقام کیا ہوگا؟ تب اس کی رفتار کیا ہوگی؟

سوال 4.379: علیحدہ علیحدہ اسپرنگ کے ذریعہ چھت سے دو کمیتوں کو قریب قریب لٹکایا جاتا ہے۔ ان کے مقام بالترتیب $s_1 = 2 \sin t$ اور $s_2 = \sin 2t$ ہیں۔

ا. کس لمحہ کمیت ایک دوسرے کے قریب سے گزرتے ہیں؟ (اشارہ: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$)

ب. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ کے دوران ان کے درمیان انتہائی فاصلہ زیادہ سے زیادہ کب اور کتنا ہو گی؟
(اشارہ: $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$)

جواب: (i) جب π کا عدد صحیح مضرب t ہو۔ (ب) $t = \frac{2\pi}{3}$ ، $t = \frac{4\pi}{3}$ ، $t = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 4.380: s محور پر دو ذرات کے مقام $s_1 = \sin t$ اور $s_2 = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ ہیں۔

ا. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں دونوں ذرات ایک دوسرے سے کم ملتے ہیں؟

ب. ذرات ایک دوسرے سے کب دور ترین ہوتے ہیں؟

ج. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں ان کے بیچ فاصلہ کی تبدیلی تیز ترین ہو گی؟

سوال 4.381: لمحہ t پر x محور پر ایک ذرے کا مقام $x = (t-1)(t-4)^4$ ہے۔

ا. ذرہ ساکن کب ہو گا؟

ب. کس وقفے کے دوران ذرہ بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. بائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی تیز سے تیز رفتار کیا ہو گی؟

د. وقفہ $0 \leq t \leq 6$ کے لئے x بالمقابل t ترسیم کریں۔ اسی وقفہ کے لئے $\frac{dx}{dt}$ بالمقابل t کو بھی ترسیم کریں۔ ترسیمات کا ایک دوسرے کے ساتھ اور حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: (i) $t = \frac{8}{5}$ ، $t = 4$ ؛ (ب) $4 < t < \frac{8}{5}$ ؛ (ج) $\frac{2187}{125}$ اکائی فی وقت

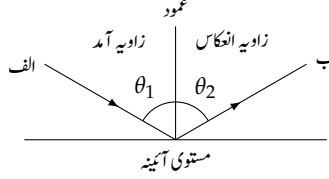
سوال 4.382: دوپہر کے وقت $t = 0$ بحری جہاز ب کے عین شمال میں بحری جہاز الف موجود ہے۔ بحری جہاز الف 24 km h^{-1} کی رفتار سے جنوب کی طرف رواں ہے جبکہ بحری جہاز ب مشرق کی طرف 16 km h^{-1} کی رفتار سے رواں ہے۔

ا. ان کے بیچ فاصلہ s کو t کی صورت میں لکھیں جہاں s کلومیٹر اور t گھنٹوں میں ہے۔

ب. دوپہر کے وقت ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ ایک گھنٹہ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

ج. اس دن حد نظر 10 km تھی۔ کیا ان بحری جہازوں نے ایک دوسرے کو دیکھا ہو گا؟

د. $0 \leq t \leq 3$ کے لئے s بالمقابل t اور $\frac{ds}{dt}$ بالمقابل t ترسیم کریں۔ ترسیمات کا حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 4.124: زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے (سوال 4.383)

۰. ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ربع اول میں $\frac{ds}{dt}$ کی ترتیم کا افقی متقارب پایا جاتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $t \rightarrow \infty$ کرنے سے $\frac{ds}{dt}$ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ اس حد کو تلاش کریں۔ اس حد کا انفرادی رفتاروں کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 4.383: بصریات میں اصول فغما کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی اس راستے سے پہنچتی ہے جس پر کم سے کم وقت درکار ہو۔ شکل 4.124 میں نقطہ الف سے شعاع خارج ہو کر آئینہ سے انعکاس کرتے ہوئے نقطہ ب تک پہنچتی ہے۔ دکھائیں کہ اگر شعاع اصول فغما کو مطمئن کرتا ہو تب زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔ (یہ نتیجہ بغیر احصاء کے خالصتاً جیومیٹری کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔)

سوال 4.384: عمل انگیز: عمل انگیز¹⁹ اس مادہ کو کہتے ہیں جس کی موجودگی کیمیائی تعامل کی شرح پر اثر انداز ہوتی ہے اور جو خود جوں کا توں رہتا ہے۔ خود عمل انگیز²⁰ کیمیائی تعامل اس کو کہتے ہیں جس میں حاصل کیمیا خود اس تعامل کے عمل انگیز ہوں۔ خود عمل انگیز کیمیائی تعامل کی ایک مثال 13°C سے کم درجہ پر پڑا ہوا دھاتی ٹین کا کچھ عرصہ میں سفید براہہ میں تبدیل ہونا ہے۔ یہ براہہ خود اس کیمیائی تعامل کا عمل انگیز ہے۔ اس قسم کے تعامل کی شرح شروع میں کم ہوتی ہے جو عمل انگیز پیدا ہونے کے بعد رفتار پکڑتی ہے اور آخر میں ابتدائی کیمیا کم ہونے کی بنا دوبارہ آہستہ ہوتی ہے۔

اس قسم کے تعامل کی رفتار $v = \frac{dx}{dt}$ ابتدائی مواد اور پیدا مواد کے حاصل ضرب کے راست متناسب ہوگی، یعنی

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

جہاں a مواد کی ابتدائی مقدار، x پیدا مواد کی مقدار اور k تناسبی مستقل ہے۔ x کی وہ قیمت تلاش کریں جو زیادہ سے زیادہ v دے گی؟ v کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہوگی؟

ریاضیاتی استعمال

سوال 4.385: کیا تعامل $f(x) = x^2 - x + 1$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ تفصیل پیش کریں۔
جواب: نہیں۔ تعامل کی مطلق کم سے کم قیمت $\frac{3}{4}$ ہے۔

سوال 4.386: آپ سے پوچھا گیا ہے کہ آیا تعامل $f(x) = 3 + 4 \cos x + \cos 2x$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے۔

¹⁹ catalyst
²⁰ autocatalyst

ا. سمجھائیں کہ آپ کو کیوں وقفہ $[0, 2\pi]$ میں x کی قیمتوں کے لئے تقابل پر غور کرنا ہو گا۔

ب. کیا f کبھی منفی ہو گا؟ سمجھائیں۔

سوال 4.387: منحنی $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $(c, 0)$ کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔ (i) $c \geq \frac{1}{2}$ ہے، (ب) $c < \frac{1}{2}$ ہے۔
جواب: (i) $(c - \frac{1}{2}, \sqrt{c - \frac{1}{2}})$ (ب) $(0, 0)$

سوال 4.388: a کی کس قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کا (i) $x = 2$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 1$ پر نقطہ تعریف ہو گا۔

سوال 4.389: a اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ (i) $x = -1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 4$ پر مقامی کم سے کم اور $x = 1$ پر نقطہ تعریف ہو گا۔
جواب: (i) $a = -9, b = -24$ (ب) $a = -3, b = -24$

سوال 4.390: دکھائیں کہ a کی کسی بھی قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کی مقامی کم سے کم قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔
سوال 4.391:

ا. وقفہ $0 < x < \pi$ پر تقابل $y = \cos x - \sqrt{2} \csc x$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تقابل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: (i) $y = -1$

سوال 4.392:

ا. وقفہ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ پر تقابل $y = \tan x + 3 \cot x$ کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تقابل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

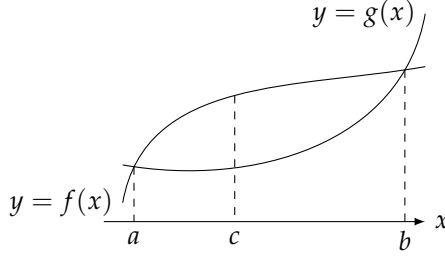
سوال 4.393: منحنی $y = \sqrt{x}$ نقطہ $(\frac{1}{2}, 16)$ کے کتنا نزدیک آتی ہے؟

جواب: $\frac{7\sqrt{17}}{2}$

سوال 4.394: فرض کریں کہ $f(x)$ اور $g(x)$ قابل تفرق ہیں جنہیں شکل 4.125 میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے بیچ زیادہ سے زیادہ فاصلہ نقطہ $x = c$ پر پایا جاتا ہے۔ کیا اس نقطہ پر ان تقابل کے مماس میں کوئی خاص بات پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.395: دکھائیں کہ مثبت عدد صحیح a, b, c, d کی صورت میں $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16$ ہو گا۔

سوال 4.396: (مثال 4.37 کا $\frac{dt}{dx}$)



شکل 4.125: تزییات برائے سوال 4.394

ا. دکھائیں کہ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تقابل ہے۔

ب. دکھائیں کہ $g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا گھٹتا تقابل ہے۔

ج. دکھائیں کہ $\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تقابل ہے۔

دوا

سوال 4.397: حاسبت دو۔ (سوال 3.115 دیکھیں)

دوا کی وہ مقدار جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو معلوم کرنے کی خاطر M کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر تفریق $\frac{dR}{dM}$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی جہاں $R = M^2(\frac{C}{2} - \frac{M}{3})$ اور C مستقل ہے۔
جواب: $M = \frac{C}{2}$

سوال 4.398: کھانسی

ا. کھانسی کے دوران سانس کی نالی سکڑ کر ہوا کی رفتار کو تیز کرتی ہے۔ کیا سانس کی نالی اتنی سکڑتی ہے کہ ہوا کی رفتار زیادہ سے زیادہ ہو؟

سانس کی نالی کی پلک اور اس کی دیوار کا ہوا کی بہاؤ کو مزاحمت کی مناسب قیمتیں لیتے ہوئے ہوا کی اوسط رفتار v کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm s}^{-1}, \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0$$

جہاں آرام کی صورت میں سانس کی نالی کا رداس r_0 سنٹی میٹر ہے اور c مثبت مستقل جس کی قیمت سانس کی لمبائی پر (بھی) منحصر ہے۔

دکھائیں کہ v کی زیادہ سے زیادہ قیمت $r = \frac{2}{3}r_0$ پر حاصل ہوگی یعنی جب سانس کی نالی 33% سکڑے۔ کھانسی کے دوران سانس کی نالی کی ایکس رے ثابت کرتی ہے کہ کھانسی کے دوران سانس کی نالی اتنی ہی سکڑتی ہے۔

ب. $r_0 = 0.5$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے وقفہ $0 \leq r \leq 0.5$ پر v ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ آیا زیادہ سے زیادہ رفتار $r = \frac{2}{3}r_0$ پر نظر آتی ہے۔

اقتصادیات اور کاروبار
سوال 4.399: ایک قمیض تیار کرنے پر c روپیہ لاگت آتی ہے اور اس کی قیمت فروخت x روپیہ ہے۔ فروخت قمیضوں کی تعداد $n = \frac{a}{x-c} + \frac{b}{100-x}$ ہے جہاں a اور b مثبت مستقل ہیں۔ زیادہ سے زیادہ منافع کس قیمت فروخت پر ہو گا؟
جواب: $\frac{b}{\frac{c}{2} + 50}$

سوال 4.400: آپ سیر و سیاحت کا کاروبار کرتے ہیں۔ آپ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

ا. اگر 50 افراد (جو کم سے کم تعداد ہے) سیر و سیاحت پر جائیں تب ہر فرد 200 روپیہ ادا کرے گا۔

ب. 80 افراد کی حد تک ہر اضافی فرد کی صورت میں تمام افراد کو 2 روپیہ کم ادا کرنے ہوں گے۔

کل لاگت 6000 روپیہ کی مستقل مقدار اور فی فرد 32 روپیہ ہے۔ زیادہ سے زیادہ منافع کے لئے کتنے افراد درکار ہیں؟

سوال 4.401: انتظام تجارت مال کا ایک کلیہ کہتا ہے کہ مال کی فرمائش، ادائیگی اور رکھوالی پر فی ہفتہ $A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$ لاگت آتی ہے جہاں q کھپ میں اشیاء کی تعداد ہے، k لمحہ فرمائش پر ادائیگی ہے (جو ہر فرمائش پر ادا کرنی ہوگی)، c فی رکن قیمت ہے، m ایک ہفتہ میں فروخت اشیاء کی تعداد ہے، اور h فی رکن ہفتہ وار رکھوالی کا خرچ ہے جس میں کرایہ وغیرہ شامل ہے۔ q کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $A(q)$ کی قیمت کم سے کم ہوگی۔
جواب: $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

سوال 4.402: (تسلسل سوال 4.401)
خرچ ترسیل بعض اوقات کھپ کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے۔ جب ایسا ہو تب k کی جگہ $k + bq$ استعمال کیا جاتا ہے جہاں b مستقل ہے۔ اب کھپ کی بہترین جسامت کیا ہوگی؟

سوال 4.403: اگر تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ اور تفاعل آمدنی $r(x) = 6x$ ہوں تب دکھائیں کہ آپ نا منافع نا نقصان سے زیادہ بہتر صورت حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔

سوال 4.404: فرض کریں x اشیاء کی پیداوار میں لاگت $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20000x$ ہے۔ کتنی پیداوار اوسط لاگت پیداوار کو کم سے کم کرے گی؟

4.7 خط بندی اور تفرقات

بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی خط بندی²¹ پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات dx اور dy متعارف کرتے ہیں جو $\frac{dy}{dx}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیمائش میں خلل اور حساسیت کو dy سے ظاہر کریں گے۔

خطی تخمین

آپ شکل 4.126 میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔ نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔

شکل 4.127 کی علامت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ہے۔ یوں مماس درج ذیل تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جاسکتا ہے۔

تعریف:

اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

$$(4.15) \quad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

نقطہ a پر f کی خط بندی²² ہوگی۔ f کی درج ذیل تخمین L

$$f(x) \approx L(x)$$

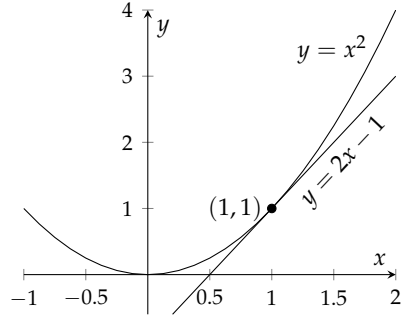
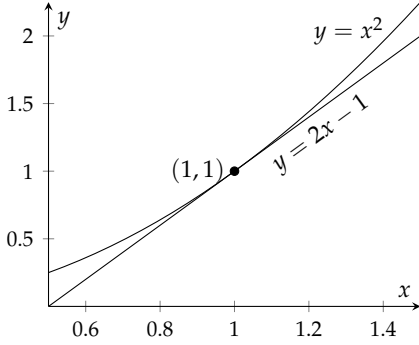
نقطہ a پر تفاعل f کی معیاری خطی تخمین²³ ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا وسط²⁴ ہے۔

²¹linearization

²²linearization

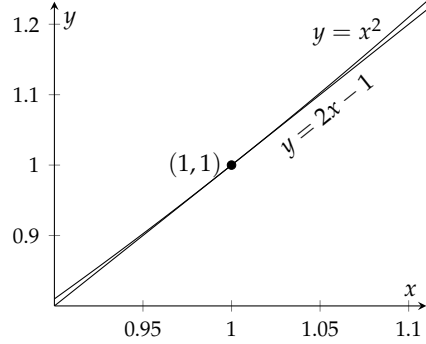
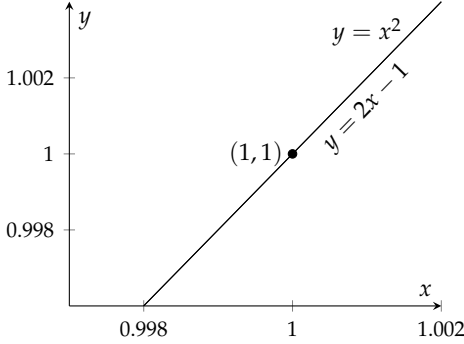
²³standard linear approximation

²⁴center



(ب) نقطہ (1, 1) کے نزدیک منحنی اور مماس قریب قریب ہیں

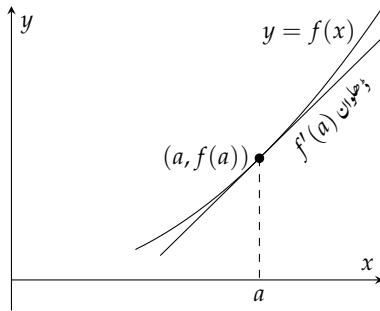
(ا) منحنی اور اس کا نقطہ (1, 1) پر مماس



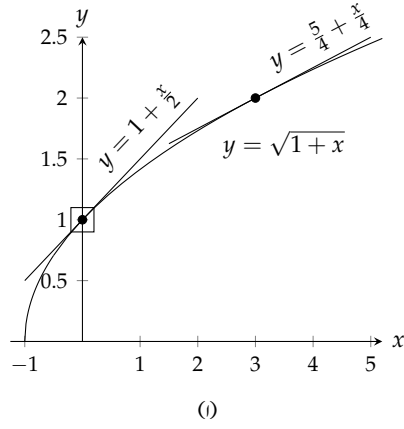
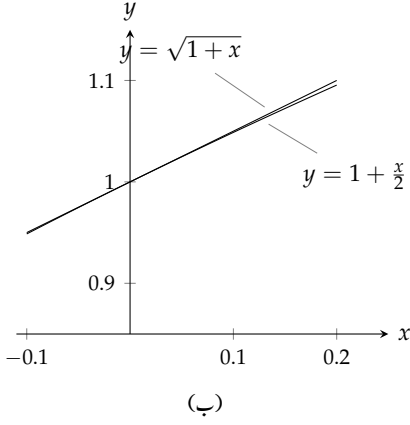
(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

شکل 4.126: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینہ طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جاسکتا ہے



شکل 4.127: نقطہ a پر قائل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ہوگا



شکل 4.128: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کی خط بندی۔

□

مثال 4.40: $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی تلاش کریں۔
حل: ہم $a = 0$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہذا

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

ہو گا۔ شکل 4.128-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔ اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔

□

تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل 4.128-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$$

2 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$$

3 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$$

5 اعشاریہ درست

وسط سے دور خط بندی میں خلل ناقابل نظر انداز ہو گا۔ یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جاسکتا ہے۔ آپ کو $x = 3$ پر نئی خط بندی حاصل کرنی ہوگی۔

مثال 4.41: $x = 3$ پر تقابل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: ہم $a = 3$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

ہے لہذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

ہو گا (شکل 4.128)۔ اس خط بندی سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے 0.00061 ہٹ کر ہے۔

اگر ہم مثال 4.40 میں حاصل خط بندی استعمال کریں تب

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

حاصل ہو گا جس میں % 25 خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال 4.42: جذروں اور طاقتوں کے لئے اہم ترین خط بندی درج ذیل ہے (سوال 4.424)۔

$$(4.16) \quad (1+x)^k \approx 1 + kx \quad k \text{ کوئی عدد ہے؛ } x \approx 0$$

□ $x = 0$ کے نزدیک یہ تقابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔

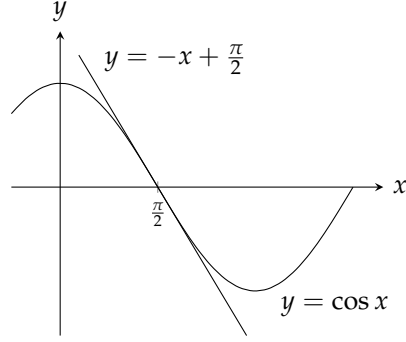
مساوات 4.16 سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \quad k = -1$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \quad k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} \quad k = -\frac{1}{2}$$



شکل 4.129: کو سائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خط بندی۔

دیگر اہم خط بندی درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

مثال 4.43: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: درج ذیل

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

لیتے ہوئے خط بندی درج ذیل ہو گی (شکل 4.129)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 0 + (-1)(x - \frac{\pi}{2}) = -x + \frac{\pi}{2}$$

□

تفرقات

تعریف:

فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق متعلقہ ہے۔ تفرق dx غیر تابع متغیر ہے۔ تفرق dy درج ذیل ہے۔

$$dy = f'(x) dx$$

□

عموماً تفرق dx غیر تابع متغیر میں تبدیلی Δx ہوگی۔ البتہ تعریف میں ہم dx پر یہ شرط لاگو نہیں کرتے ہیں۔ تفرق dy ہر صورت تابع ہوگا اور اس کی قیمت x اور dx پر منحصر ہوگی۔

مثال 4.44: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لئے dy تلاش کریں۔
حل:

$$dy = (5x^4 + 37) dx, \quad dy = (3 \cos 3x) dx$$

□

اگر $dx \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $dy = f'(x) dx$ کے دونوں اطراف کو dx سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $dx \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ تفرقات کا حاصل تقسیم ہوگا۔

بعض اوقات ہم $df'(x) dx$ کی بجائے

$$df = f'(x) dx$$

لکھتے ہیں اور df کو f کا تفرق کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x dx$$

ہوگا۔

تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

کے دونوں اطراف کو dx سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$d(u+v) = du + dv$$

حاصل ہو گی۔ چند تفریقی کلیات پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} dc &= 0, & d(cu) &= c du, & d(u+v) &= du + dv, \\ d(uv) &= u dv + v du, & d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2}, & d(u^n) &= nu^{n-1} du, \\ d(\sin u) &= \cos u du, & d(\cos u) &= -\sin u du, & d(\tan u) &= \sec^2 u du, \\ d(\cot u) &= -\csc^2 u du, & d(\sec u) &= \sec u \tan u du, & d(\csc u) &= -\csc u \cot u du \end{aligned}$$

مثال 4.45:

$$\begin{aligned} d(\tan 2x) &= \sec^2(2x) d(2x) = 2 \sec^2 2x dx \\ d\left(\frac{x}{x+1}\right) &= \frac{(x+1) dx - x d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x dx + dx - x dx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

□

تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + dx$ پر جانے سے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کتنی ہو گی۔ اگر dx نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کی خط بندی L ایک دوسرے کے برابر تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب زیادہ آسان ہے لہذا اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

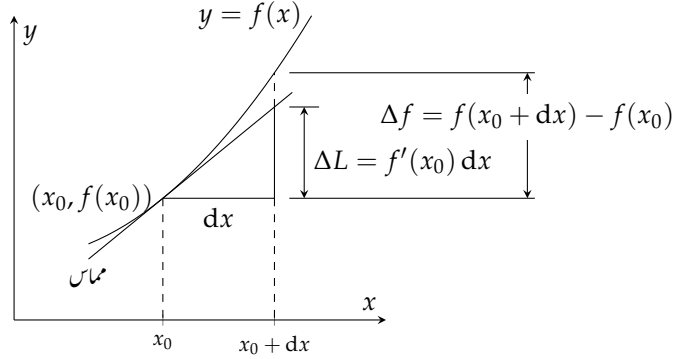
شکل 4.130 میں دیے علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$$

L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(x_0 + dx) - L(x_0) \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + dx) - x_0]}_{L(x_0+dx)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)} \\ &= f'(x_0) dx \end{aligned}$$

تفرق $df = f'(x) dx$ کا جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $x = x_0$ پر df کی قیمت حاصل کی جائے تب $df = \Delta L$ ہو گا یعنی خط بندی میں تبدیلی df کے برابر ہو گی۔ تفرقی تبدیلی کی اندازاً قیمت



شکل 4.130: چھوٹے dx کی صورت میں f کی خط بندی تقریباً f میں تبدیلی کے برابر ہوگی۔

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + dx$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہوگا۔

$$df = f'(x_0) dx$$

مثال 4.46: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10$ cm سے 10.1 cm کیا جاتا ہے۔ dS کا حساب کرتے ہوئے اس کے رقبہ S میں تبدیلی حاصل کریں۔ اس کا موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔
حل: چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہذا اندازاً تبدیلی

$$dS = S'(r_0) dr = 2\pi r_0 dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2$$

ہوگی۔ حقیقی تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{dS} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{غل}}$$

□

مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی

x_0 سے نزدیک نقطہ $x_0 + dx$ منتقل ہوتے ہوئے ہم f میں تبدیلی کو تین طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 4.1: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

اندازاً	اصل	
$df = f'(x_0) dx$	$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$	حتمی تبدیلی
$\frac{df}{f(x_0)}$	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	اضافی تبدیلی
$\frac{df}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	فی صد تبدیلی

مثال 4.47: گزشتہ مثال میں فی صف اندازاً تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{dS}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\%$$

□

مثال 4.48: زمین کا سطحی رقبہ

زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \pm 0.1 \text{ km}$ ہے۔ زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟
حل: رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی بنا S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$dS = \left(\frac{dS}{dr}\right) dr = 8\pi r dr = 8\pi(6371)(0.1) = 16012 \text{ km}^2$$

□

مثال 4.49: رداس r کے کرہ کا رقبہ 1% درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہو گا؟
حل: ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|\Delta S| \leq \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

ہم اس عدم مساوات میں ΔS کی جگہ

$$dS = \left(\frac{dS}{dr}\right) dr = 8\pi r dr$$

پر کرتے ہیں۔ یوں

$$|8\pi r dr| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \implies |dr| \leq \frac{1}{8\pi r} \cdot \frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2} \frac{r}{100}$$

□ حاصل ہوتا ہے۔ یوں رداس میں خلل اصل رداس کے 0.5 % سے کم ہونا ضروری ہے۔

مثال 4.50: بند شریانوں کا کھولنا (انجیوپلاستی²⁵)

جزوی طور پر بند شریانوں کی رداس کو بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاؤ حاصل کی جاسکتی ہے۔ 1830 کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزو نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \quad (k \text{ مستقل})$$

جو مستقل دباؤ پر فی اکائی وقت میں ایک چھوٹی نالی میں حجم بہاؤ H دیتا ہے۔ اس نالی کا رداس r ہے۔ رداس 10 % بڑھانے سے بہاؤ پر کیا اثر ہوگا؟
حل: r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$dH = \frac{dH}{dr} dr = 4kr^3 dr$$

یوں

$$\frac{dH}{H} = \frac{4kr^3 dr}{kr^4} = 4 \frac{dr}{r}$$

ہو گا یعنی H میں اضافی تبدیلی r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔ یوں r میں 10 % تبدیلی سے H میں 40 % تبدیلی پیدا ہوگی۔
□

حسابیت

مختلف x پر مساوات $df = f'(x) dx$ ہمیں f کی حسابیت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی dx کے لئے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہوگی۔

مثال 4.51: آپ ایک پل کی اونچائی ناپنے کی خاطر ایک پتھر کو پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ $s = 4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حسابیت کیا ہوگی؟
حل: مساوات $ds = 9.8t dt$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔ اگر $t = 2$ ہو تب

$$ds = 9.8(2)(0.1) = 1.96 \text{ m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t = 5 \text{ s}$ پر خلل درج ذیل ہوگا۔

$$ds = 9.8(5)(0.1) = 4.9 \text{ m}$$

□

تخمین $\Delta f \approx df$ میں خلل

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) && \text{اصل تبدیلی} \\ d &= f'(x_0)\Delta x && \text{تفرقی اندازہ}\end{aligned}$$

df اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم خلل تخمین کو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{خلل تخمین} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x\end{aligned}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے ($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔ یوں تو سین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لئے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔ درحقیقت $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon \rightarrow 0$ ہو گا جب Δx چھوٹا ہو تخمین خلل $\epsilon \Delta x$ مزید چھوٹا ہو گا۔

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon \Delta x}_{\text{خلل}}$$

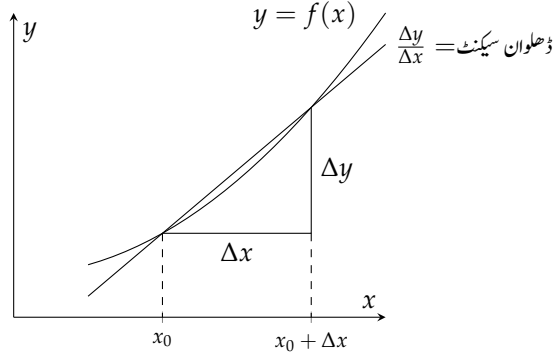
اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں ہے کہ خلل کتنا چھوٹا ہو گا یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$(4.17) \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

ہو گی جہاں $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon \rightarrow 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔



شکل 4.131: $x = x_0$ پر y کے تفرق سے مراد $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ہے۔

زنجیری تفرق کا ثبوت

زنجیری قاعدہ کے بارے میں ہم حصہ 3.5 میں بات کی گئی جہاں اس کا ثبوت پیش نہیں کیا گیا۔ انہیں مساوات 4.17 کی مدد سے زنجیری قاعدے کا ثبوت پیش کریں۔

فرض کریں $f(u)$ متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $u = g(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ اگر x_0 پر g قابل تفرق ہو اور $g(x_0)$ پر f قابل تفرق ہو تب مرکب تفاعل x_0 پر قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

فرض کریں x میں اضافہ Δx ہے اور فرض کریں کہ u اور y میں مطابقتی اضافے بالترتیب Δu اور Δy ہیں۔ جیسا آپ شکل 4.131 میں دیکھ سکتے ہیں

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ہو گا لہذا ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ یہ حد $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ کے برابر ہو گا۔

مساوات 4.17 کے تحت

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

ہو گا جہاں $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ہو گا۔ اسی طرح

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

ہو گا جہاں $\Delta u \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ہو گا۔ Δu اور Δy کی مساواتوں کو ملا کر

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

حاصل ہوتا ہے لہذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

ہو گا۔ چونکہ $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \rightarrow 0$ اور $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ہوں گے لہذا دائیں ہاتھ تین اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

کمیت کا توانائی میں تبادل

نیوٹن کا دوسرا قانون

$$F = \frac{d}{dx}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma$$

کمیت کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔ جیسا آپ جانتے ہیں حقیقت میں کمیت کی قیمت سمتی رفتار پر منحصر ہے یعنی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

جہاں ساکن کمیت m_0 ہے اور روشنی کی رفتار $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ہے۔ اگر کمیت کی سمتی رفتار v روشنی کی رفتار سے بہت کم ہو تب ہم تخمینی طور پر

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

یعنی

$$(4.18) \quad m = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

ہو گا۔ مساوات 4.18 رفتار کی بنا کمیت میں اضافہ بیان کرتی ہے۔

طبیعیات نیوٹن میں $\frac{1}{2} m_0 v^2$ کو جسم کی حرکی توانائی کہتے ہیں اور اگر ہم مساوات 4.18 کو

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

لکھیں تب

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_0 (0)^2 = \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

یعنی

$$(4.19) \quad (\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

ہو گا۔ یوں صفر سمتی رفتار سے v سمتی رفتار تک پہنچنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی تقریباً $(\Delta m)c^2$ ہو گی۔

مساوات 4.19 میں $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ پر کرتے ہوئے

$$\Delta(\text{حرکی توانائی}) \approx 90\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \Delta m$$

توانائی حاصل ہو گی جہاں کمیت کی اکائی kg اور توانائی کی اکائی جاول J ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کمیت میں معمولی تبدیلی سے توانائی میں بہت بڑی تبدیلی آتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم میں ایک گرام سے کم کمیت توانائی میں تبدیل ہوتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم سے مراد وہ ایٹمی بم ہے جو 20 000 ٹن یعنی $2 \times 10^7 \text{ kg}$ بارودی مواد (ٹی این ٹی²⁶) کے دھماکے کے برابر توانائی خارج کرتا ہو۔

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال 4.405 تا سوال 4.410 میں $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی $L(x)$ تلاش کریں۔

سوال 4.405: $f(x) = x^4, \quad x = 1$

سوال 4.406: $f(x) = x^{-1}, \quad x = 2$

سوال 4.407: $f(x) = x^3 - x, \quad x = 1$

سوال 4.408: $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x = 2$

سوال 4.409: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 4$

سوال 4.410: $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad x = -4$

آپ سوال 4.411 تا سوال 4.416 میں دیے تفاعل کی خط بندی استعمال کرنا چاہتے ہیں۔ بعد کا کام آسان بنانے کی خاطر آپ خط بندی کے وقفے کا وسط دیے گئے نقطہ x_0 کے نزدیک عدد صحیح پر رکھنا چاہیں گے جہاں تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ خط بندی تلاش کریں۔

سوال 4.411: $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$

سوال 4.412: $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.6$

سوال 4.413: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$

سوال 4.414: $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$

سوال 4.415: $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$

سوال 4.416: $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1.3$

تکونیاتی تفاعل کی خط بندی

سوال 4.417 تا سوال 4.420 میں $x = a$ پر تفاعل f کی خط بندی تلاش کریں۔ دو مختلف نقطوں پر دو مختلف حد بندی درکار ہیں۔ تفاعل اور تفاعل کی خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 4.417: $f(x) = \sin x, \quad x = 0, x = \pi$

سوال 4.418: $f(x) = \cos x, \quad x = 0, x = -\frac{\pi}{2}$

سوال 4.419: $f(x) = \sec x, \quad x = 0, x = -\frac{\pi}{3}$

سوال 4.420: $f(x) = \tan x, \quad x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$

سوال 4.421: x کی قیمت صفر کے قریب لیتے ہوئے درج ذیل تفاعل کی خطی تخمین تلاش کریں۔ کلیہ $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کریں۔

$$f(x) = (1+x)^2 \quad \text{ا.} \quad g(x) = \frac{2}{1-x} \quad \text{ج.} \quad h(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}} \quad \text{د.}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^5} \quad \text{ب.} \quad g(x) = (1-x)^6 \quad \text{د.} \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad \text{و.}$$

سوال 4.422: کیلو لیٹر سے لیٹر تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمتیں حاصل کریں۔

$$\text{ا. } (1.0002)^{50} \quad \text{ب. } \sqrt[3]{1.009}$$

سوال 4.423: $x=0$ پر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کا $\sqrt{1+x}$ اور $\sin x$ کی انفرادی خط بندی کے ساتھ کیا رشتہ ہے؟

سوال 4.424: ہم طاقی قاعدہ سے جانتے ہیں کہ تمام ناطق اعداد k کے لئے مساوات

$$\frac{d}{dx}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

مطمئن ہوتی ہے۔ ہم باب 7 میں دیکھیں گے کہ یہ مساوات غیر ناطق اعداد کے لئے بھی مطمئن ہوتی ہے۔ یہی یہاں فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x=0$ پر $f(x) = (1+k)^k$ کی خط بندی $L(x) = 1+kx$ ہے۔

تفرقات

سوال 4.425 تا سوال 4.436 میں dy تلاش کریں۔

$$\text{سوال 4.425: } y = x^3 - 3\sqrt{x}$$

$$\text{سوال 4.426: } y = x\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{سوال 4.427: } y = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\text{سوال 4.428: } y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$$

$$\text{سوال 4.429: } 2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$$

$$\text{سوال 4.430: } xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$$

سوال 4.431: $y = \sin(5\sqrt{x})$

سوال 4.432: $y = \cos(x^2)$

سوال 4.433: $y = 4 \tan(\frac{x^3}{3})$

سوال 4.434: $y = \sec(x^2 - 1)$

سوال 4.435: $y = 3 \csc(1 - 2\sqrt{x})$

سوال 4.436: $y = 2 \cot(\frac{1}{\sqrt{x}})$

خلل تخمین
سوال 4.437 تا سوال 4.442 میں x کی قیمت x_0 سے $x_0 + dx$ ہونے کی بنا قائل $f(x)$ کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ درج ذیل تلاش کریں (مثلاً 4.130)۔

ا. تبدیلی $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$

ب. اندازاً تبدیلی $df = f'(x_0) dx$

ج. خلل تخمین $|\Delta f - df|$

سوال 4.437: $f(x) = x^2 + 2x, x_0 = 0, dx = 0.1$

سوال 4.438: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, x_0 = -1, dx = 0.1$

سوال 4.439: $f(x) = x^3 - x, x_0 = 1, dx = 0.1$

سوال 4.440: $f(x) = x^4, x_0 = 1, dx = 0.1$

سوال 4.441: $f(x) = x^{-1}, x_0 = 0.5, dx = 0.1$

سوال 4.442: $f(x) = x^3 - 2x + 3, x_0 = 2, dx = 0.1$

تبدیلی کا تفرقی اندازہ

سوال 4.443 تا سوال 4.448 میں رقبہ یا حجم میں تبدیلی کی تفرقی صورت لکھیں۔

سوال 4.443: رداس r کے کرہ کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ میں تبدیلی جب رداس r_0 سے $r_0 + dr$ ہوتا ہے۔

سوال 4.444: مکعب کے حجم $H = x^3$ میں تبدیلی جب اس کے ضلع کی لمبائی x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + dx$ ہوتی ہے۔

سوال 4.445: مکعب کی سطحی رقبہ $S = 6x^2$ میں تبدیلی جب اس کا ضلع x_0 سے $x_0 + dx$ ہوتا ہے۔

سوال 4.446: قائمہ مخروط کا رقبہ پہلو $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ جب رداس r_0 سے $r_0 + dr$ ہوتا ہے جبکہ اس کی اونچائی h تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

سوال 4.447: قائمہ بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ جب اس کا رداس r_0 سے تبدیل ہو کر $r_0 + dr$ ہو جبکہ اس کی لمبائی h تبدیل نہ ہو۔

سوال 4.448: قائمہ بیلن کا رقبہ پہلو $S = 2\pi r h$ جب اس کی لمبائی h_0 سے $h_0 + dh$ ہو جائے جبکہ اس کا رداس تبدیل نہ ہو۔

استعمال

سوال 4.449: ایک دائرے کا رداس 2 m سے بڑھ کر 2.02 m ہو جاتا ہے۔

ا. رقبے میں تبدیلی تلاش کریں۔

ب. رقبہ میں تبدیلی اور ابتدائی رقبہ کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 4.450: ایک درخت کا قطر 30 cm تھا۔ اگلے سال اس کا محیط 2 cm بڑھ گیا۔ درخت کا قطر کتنا بڑھا؟ درخت کا رقبہ عمودی تراش کتنا بڑھا؟

سوال 4.451: ایک مکعب کی اضلاع کی لمبائی 10 cm ہے جس میں 1% خلل متوقع ہے۔ اس کے حجم میں کتنا فی صد خلل ہو گا؟

سوال 4.452: ایک چکور کے رقبہ میں 2% سے کم خلل قابل قبول ہے۔ اس کے ضلع کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 4.453: ایک کرہ کا قطر 100 ± 1 cm ناپا جاتا ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم حاصل کیا جاتا ہے۔ حجم میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال 4.454: ایک کرہ کے حجم میں 3% تک خلل قابل قبول ہے۔ اس کے قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 4.455: ایک قائمہ بیلن کا رداس اور اس کی لمبائی ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یوں اس کا حجم πh^3 ہو گا۔ اس کے حجم میں 1% خلل قابل قبول ہے۔ اس کی لمبائی کی پیمائش میں قابل قبول خلل کتنا ہو گا؟

سوال 4.456: ایک قائمہ ٹینکی کا قد 10 m ہے۔ اس کی پیمائش حجم اور اصل حجم میں 1% کا فرق قابل قبول ہے۔ اس کے اندرونی قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا۔

سوال 4.457: ایک دائری قرص کے رداس میں کتنا فرق dr قابل قبول ہو گا تاکہ اس کی کیت میں فرق اصل کیت کے $\frac{1}{1000}$ سے کم ہو۔ قرص کی موٹائی میں خلل کو نظر انداز کریں۔

سوال 4.458: خون کے بہاؤ میں 50% اضافہ حاصل کرنے کی خاطر مثال 4.50 میں r کو کتنا فی صد بڑھانا ہو گا؟

سوال 4.459: دکھائیں کہ مثال 4.51 میں t میں 5% خلل کی بنا s میں 10% خلل پیدا ہو گا۔

سوال 4.460: دل پر خلائی مشق کے اثرات اکائی وقت میں دل درج ذیل

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

کام کرتا ہے جہاں W اکائی وقت میں کام ہے، P دباؤ خون ہے، V دل سے اکائی وقت میں خارج خون کا حجم ہے، δ خون کی کثافت ہے، v دل سے اخراج کے وقت خون کی اوسط رفتار ہے، اور g ثقلی اسراع ہے۔

مستقل P ، V ، δ اور v کی صورت میں W صرف g کا تفاعل ہو گا۔ ایسی صورت میں یہ مساوات درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(4.20) \quad W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ مستقل})$$

آپ چاند پر g میں تبدیلی dg اور زمین پر g میں اتنی ہی تبدیلی dg کا W پر اثر دیکھنا چاہتے ہیں۔ چاند پر $g = 1.6 \text{ m s}^{-2}$ اور زمین پر $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ہیں۔ مساوات 4.20 سے چاند dW اور زمین dW کی نسبت حاصل کریں۔ نتیجہ کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

سوال 4.461: مکعب کا حجم $H = x^3$ ہے۔ اس کے کنارے کی لمبائی میں Δx کے اضافہ سے حجم میں ΔH اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اضافی حجم ΔH کا خاکہ بنا کر اس کو درج ذیل کا مجموعہ ظاہر کریں۔

ا. تین تختے جن کے اطراف x ، x اور Δx ہیں۔

ب. تین ڈنڈے جن کے اطراف x ، Δx اور Δx ہیں۔

ج. ایک کعب جس کے اطراف Δ ، Δx اور Δx ہیں۔

تفرقی کلیہ $dH = 3x^2 dx$ حجم میں تبدیلی کو تین تختوں کے حجم (جزو-ا) سے حاصل کرتی ہے۔

سوال 4.462: گھڑیال کی لنکن کی لمبائی اٹل رکھنے کی خاطر اس کا درجہ حرارت برقرار رکھا جاتا ہے۔ لنکن کا دوری عرصہ T لنکن کی لمبائی L اور کروی اسراع g پر منحصر ہے۔ یوں سطح زمین پر گھڑیال کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے g کی مقامی قیمت میں معمولی تبدیلی کی بنا T میں معمولی تبدیلی پیدا ہوگی۔ ΔT پر نظر رکھنے سے g میں تبدیلی $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

ا. L کو اٹل اور g کو متغیر تصور کرتے ہوئے dT کی مساوات حاصل کر کے جزو-ب اور جزو-ج کے جوابات دیں۔

ب. g بڑھنے سے T بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے؟ کیا گھڑیال کم وقت یا زیادہ وقت دے گا؟

ج. 100 cm لنکن والے گھڑیال کو ایک مقام جہاں $g = 980 \text{ cm s}^{-2}$ ہو سے دوسرے مقام پر منتقل کیا جاتا ہے جس کی بنا دوری عرصہ $\Delta T = 0.001 \text{ s}$ بڑھ جاتا ہے۔ dg حاصل کرتے ہوئے نئے مقام پر g کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.463: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبداء پر $\sqrt{1+x}$ کی خط بندی $x \rightarrow 0$ کرنے سے بہتر ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} = 1$$

سوال 4.464: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبداء پر $x \rightarrow 0$ کرنے سے $\tan x$ کی خط بندی بہتر ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

سوال 4.465: فرض کریں تفاعل $f(x)$ کی ترسیم کا $x = a$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔ کیا $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.466: ڈھلوان سے تفرق کا حصول۔ قابل تفرق منحنی کو بڑا کرنے سے مقامی نقطے پر منحنی سیدھا خط نما نظر آتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے پر منحنی کا تفرق ترسیم کی ڈھلوان ناپ کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔

ا. یہ عمل دیکھنے کی خاطر $y = x^2$ کی ترسیم کو کمپیوٹر کے شیشے پر اتنا بڑا کریں کہ $x = 1$ پر ترسیم سیدھا خط نظر آتا ہو۔ $x = 1$ پر اس سیدھے خط کا ڈھلوان 2 ہو گا جو اس نقطے پر ترسیم کا تفرق ہو گا۔

ب. اب $y = e^x$ کی ترسیم کو باری باری $x = 0$ ، $x = 1$ اور $x = -1$ پر بڑا کر کے دیکھیں۔ ہر نقطے پر ترسیم کی ڈھلوان کا موازنہ اس نقطے پر e^x کی قیمت کے ساتھ کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال 4.467: نقطہ تعریف پر خط بندی۔ جیسا شکل 4.129 سے واضح ہے، نقطہ تعریف پر خط بندی مزید بہتر بیٹھتی ہے۔ اس کی وضاحت بعد میں اس کتاب میں کی جائے گی۔ ترسیم سے $x = 0$ اور $x = \sqrt{3}$ پر $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

سوال 4.468: خط بندی بہترین خطی تخمین ہے۔ (خط بندی استعمال کرنے کی وجہ۔) فرض کریں $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہے اور c اور m ایک خطی تفاعل ہے جہاں $g(x) = m(x - a) + c$ مستقل ہیں۔ اگر $x = a$ کے نزدیک خلل $E(x) = f(x) - g(x)$ بہت کم ہو تب ہم خط بندی $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ کی بجائے g کو بطور خطی تخمین استعمال کر سکتے ہیں۔ دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط لاگو کرنے سے $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ حاصل ہو گا۔

$$1. \quad E(a) = 0 \quad x = a \quad \text{پر تخمینی خلل صفر ہے}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{x - a} = 0 \quad x - a \quad \text{کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔}$$

یوں خط بندی $L(x)$ وہ واحد خطی تخمین ہے جو $x = a$ پر صفر خلل دیتا ہے اور جس کا خلل $x - a$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

سوال 4.469: کیلکولیٹر میں 2 کا ہندسہ لکھ کر بار بار جذر لیں۔ آپ کیا ترتیب دیکھتے ہیں؟ بار بار $\sqrt[10]{}$ لینے سے کیا ترتیب دیکھنے کو ملتی ہے؟

سوال 4.470: گزشتہ سوال کو 2 کی بجائے 0.5 کے لئے دہرائیں۔ اب کیا دیکھنے کو ملتا ہے؟ کیا 2 کی جگہ کوئی بھی مثبت عدد x استعمال کیا جا سکتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.471 تا 4.474 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے وقفہ I پر تفاعل کی بجائے خط بندی استعمال کرتے ہوئے خلل کی مقدار کا اندازہ لگانا ہو گا۔ درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ I پر تفاعل f ترسیم کریں۔

ب. نقطہ $x = a$ پر تفاعل کی خط بندی L تلاش کریں۔

ج. f اور L کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں۔

د. وقفہ I پر مطلق خلل $|f(x) - L(x)|$ ترسیم کر کے اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں۔

۵. جزو-د کی ترسیم سے $\delta > 0$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں جو $|f(x) - L(x)| < \epsilon$ $|x - a| < \delta \implies$ کو مطمئن کرتی ہو جہاں $\epsilon = 0.5, 0.1, 0.01$ لیں۔ ترسیم کو دیکھ کر بتائیں آیا آپ کی تخمینہ δ کی قیمتیں درست ہیں؟

سوال 4.471: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, $[-1, 2]$, $a = 1$

سوال 4.472: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}$, $[-\frac{3}{4}, 1]$, $a = \frac{1}{2}$

سوال 4.473: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2)$, $[-2, 3]$, $a = 2$

سوال 4.474: $f(x) = \sqrt{x} - \sin x$, $[0, 2\pi]$, $a = 2$

4.8 ترکیب نیوٹن

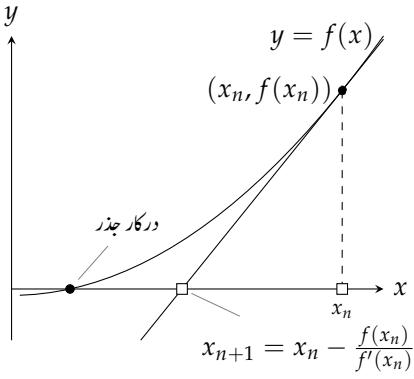
ہم خطی اور دو درجی مساوات حل کرنے کے سادہ کلیات جانتے ہیں۔ تین درجی اور چار درجی مساوات حل کرنے کے نسبتاً مشکل کلیات بھی پائے جاتے ہیں۔ ناروے کے ریاضی دان نیلز ہنری اہل (1802 – 1829) نے ثابت کیا کہ چار سے زیادہ درجے کی مساوات حل کرنے کا کوئی کلیہ نہیں پایا جاتا ہے۔

جب $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا بالکل درست حل حاصل کرنا ممکن نہ ہو تب ہم احصاء کے اعدادی طریقوں کو استعمال کرتے ہوئے حل کی تخمینہ حاصل کرتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن ایسی ایک ترکیب ہے۔ اس ترکیب میں، جن نقطوں پر $f(x)$ صفر ہو ان نقطوں کے نزدیک $y = f(x)$ کو مماس سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں بھی خط بندی کے ذریعہ مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

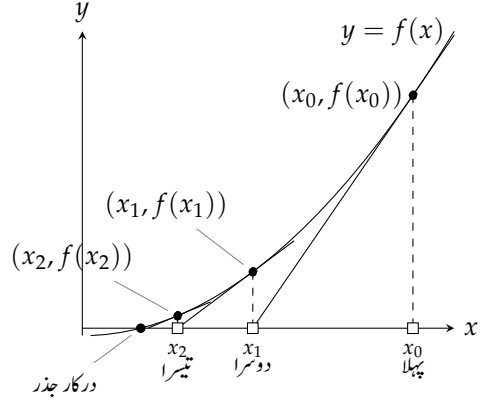
نظریہ

ترکیب نیوٹن مساوات $f(x) = 0$ کے حل کی تخمینہ قیمتوں کی ترتیب حاصل کرتا ہے جو اصل حل تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے۔ ہم اس ترتیب کا پہلا عدد x_0 منتخب کرتے ہیں۔ موزوں صورتوں میں یہ ترتیب قدم با قدم آگے بڑھتے ہوئے دیگر نقطے دیتا ہے۔ x_0 پر f کا مماس x محور کو ترتیب کے اگلے نقطہ x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 4.132)۔

ابتدائی نقطہ x_0 کو ترسیم دیکھ کر یا قیاساً منتخب کیا جاسکتا ہے۔ یہ ترکیب نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر تقاطع کے مماس کو تقاطع کا تخمینہ لیتے ہوئے مماس اور x محور کے مقطع کو x_1 کہتا ہے جو ترتیب کا دوسرا عدد ہو گا۔ عموماً x_0 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح نقطہ $(x_1, f(x_1))$ پر تقاطع کا مماس x محور کو x_2 پر قطع کرے گا جو ترتیب کا تیسرا عدد ہو گا۔ عموماً x_1 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی



شکل 4.133: x_n سے منحنی تک جا کر مماس کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے x_{n+1} تک پہنچتے ہیں۔



شکل 4.132: ترکیب نیوٹن ابتدائی قیاس x_0 سے شروع ہو کر (موزوں صورت میں) بندرتج بہتر جواب دیتی ہے۔

طرح قدم با قدم چلتے ہوئے بہتر سے بہتر حل کی ترتیب حاصل کی جاتی ہے۔ یہ ترتیب اصل حل کے نزدیک سے نزدیک ہوتی چلی جاتی ہے۔ قابل قبول حل تک پہنچ کر ہم رک جاتے ہیں۔

ہم یک بعد دیگرے تخمینہ قیمتوں کے حصول کا کلیہ اخذ کر سکتے ہیں۔ دیے گئے تخمینہ x_n پر تفاعل کے مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$(4.21) \quad y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

جو x محور کو اس نقطے پر قطع کرے گا جہاں $y = 0$ ہو۔ مساوات 4.21 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے نقطہ قطع یعنی اگلا نقطہ x_{n+1} حاصل کرتے ہیں

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \implies x = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

جہاں $f'(x_n) \neq 0$ فرض کیا گیا ہے (شکل 4.133)۔

ترکیب نیوٹن کا لائحہ عمل

ا. مساوات $f(x) = 0$ کے جذر کی قیمت قیاساً حاصل کریں۔ مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم مددگار ثابت ہو گی۔

ب. درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے پہلی تخمینہ سے دوسری تخمینہ، دوسری تخمینہ سے تیسری تخمینہ، وغیرہ، حاصل کریں

$$(4.22) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (f'(x_n) \neq 0)$$

جہاں نقطہ x_n پر تفاعل کا تفرق $f'(x_n)$ ہے۔

ہم اپنی پہلی مثال میں $\sqrt{2}$ کا مثبت جذر مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

مثال 4.52: مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ کا مثبت جذر تلاش کریں۔
حل: $f(x) = x^2 - 2$ اور $f'(x) = 2x$ لیتے ہوئے مساوات 4.22 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

کم سے کم حساب و کتاب کی خاطر ہم اس مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

سے درج ذیل بتدریج بہتر تخمینہ قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

	درست ہندسوں کی تعداد	غلل
$x_0 = 1$	1	-0.41421
$x_1 = 1.5$	1	0.08579
$x_2 = 1.41667$	3	0.00246
$x_3 = 1.41422$	5	0.00001

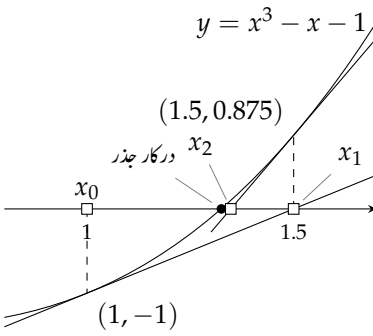
□

چونکہ ترکیب نیوٹن کی مرکزیت بہت تیز ہے (جس پر جلد بات کی جائے گی) لہذا عموماً کیلکولیٹر جذر کا حصول ترکیب نیوٹن سے تلاش کرتے ہیں۔ اگر درج بالا جدول میں 5 کی بجائے 13 اعشاریہ درست ہندسے لیے جاتے تب اگلے قدم میں $\sqrt{2}$ کی قیمت 10 اعشاریہ درست حاصل ہوتی۔

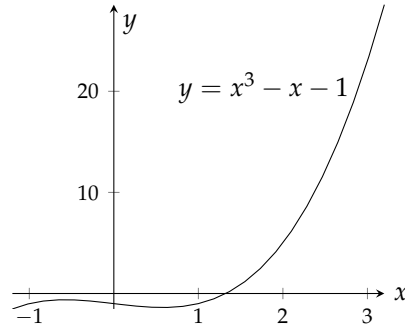
مثال 4.53: اس نقطے کا x محدود تلاش کریں جس پر منحنی $y = x^3 - x$ افقی خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔
حل: منحنی اس خط کو اس نقطے پر قطع کرتی ہے جہاں $x^3 - x = 1$ یعنی $x^3 - x - 1 = 0$ ہو۔ کہاں $f(x) = x^3 - x - 1$ صفر ہو گا؟ شکل 4.134 میں ترسیم کا ایک جذر $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ دیکھا جاسکتا ہے۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن کو f پر لاگو کرتے ہیں۔ نتائج جدول 4.2 اور شکل 4.135 میں دیے گئے ہیں۔
□

جدول 4.2: ابتدائی قیمت $x_0 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^3 - x - 1$ پر ترکیب نیوٹن کی اطلاق کے نتائج۔

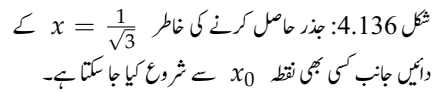
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.347 826 087
2	1.347 826 087	0.100 682 173	4.449 905 482	1.325 200 399
3	1.325 200 399	0.002 058 362	4.268 468 293	1.324 718 174
4	1.324 718 174	0.000 000 924	4.264 634 722	1.324 717 957
5	1.324 717 957	-1.0437×10^{-9}	4.264 632 997	1.324 717 957



شکل 4.135: جدول 4.2 کی پہلی تین قیمتیں۔



شکل 4.134: منحنی $f(x) = x^3 - x - 1$ محور x کو $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔



جیسا شکل 4.136 میں دکھایا گیا ہے ہم $B_0(3, 23)$ کو ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے تھے جہاں $x_0 = 3$ ہو گا۔ اگرچہ B_0 افقی محور سے بہت دور ہے لیکن $x_0 = 3$ پر مخفی کا مماس افقی محور کو $x_1 = 2.11$ پر قطع کرتا ہے جو x_0 سے بہتر نقطہ ہے۔ اب $f(x) = x^3 - x - 1$ اور $f'(x) = 3x^2 - 1$ لیتے ہوئے پہلے کی طرح مساوات 4.22 کی بار بار استعمال سے چھٹے قدم پر 9 اعشاریہ جواب $x_6 = x_5 = 1.324717957$ حاصل ہو گا۔

ارتکاز عموماً یقینی ہوگا

ترکیب نیوٹن بہت تیزی سے مرکوز ہوتا ہے، لیکن چونکہ مرکوزیت لازمی نہیں ہوتی لہذا یہ دیکھنا لازمی ہو گا کہ آیا ترکیب مرکوز ہے یا نہیں۔ مرکوزیت یقینی بنانے کی خاطر ہم نقاط ترسیم کر کے موزوں ابتدائی نقطہ x_0 منتخب کر سکتے ہیں۔ صفر کے قریب ہونے کو $|f(x_n)|$ کی قیمت سے دیکھا جاسکتا ہے جبکہ مرکوزیت کو $|x_n - x_{n+1}|$ سے پرکھا جاسکتا ہے۔

اس زمرے میں نظریہ بھی کچھ مدد مہیا کرتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ جذر r پر وقفہ (جس میں r پایا جاتا ہو) میں تمام x کے لئے

$$(4.23) \quad \left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

کی صورت میں اس وقفہ کے اندر کسی بھی ابتدائی نقطہ x_0 کے لئے ترکیب مرکبز ہو گی۔ حقیقتاً اس مسئلے کا اطلاق مشکل ثابت ہوتا ہے لہذا $f(x_n)$ اور $|x_n - x_{n+1}|$ کی قیمتوں سے مرکبیت دیکھی جاتی ہے۔

عدم مساوات 4.23 مرکبیت کے لئے کافی ناکہ لازمی شرط ہے۔ ایسی مثالیں پائی جاتی ہیں جہاں جذر r پر ایسا کوئی وقفہ نہیں پایا جاتا ہے جس پر عدم مساوات 4.23 مطمئن ہوتی ہو لیکن ترکیب نیوٹن مرکبز ہوتی ہے۔ ایسے تمام وقفے پر ترکیب نیوٹن مرکبز ہو گی جس میں x_0 اور درکار جذر کے بیچ وقفے پر منحنی $y = f(x)$ محور x کی طرف محدب (بھکا) ہو (شکل 4.137)۔

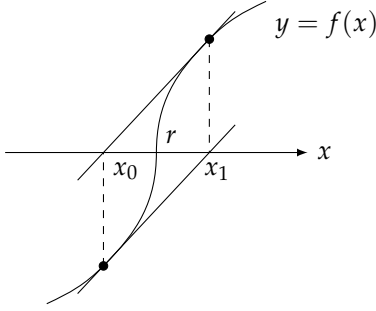
سازگار حالات میں ترکیب نیوٹن کی جذر r کو ارتکاز کی رفتار درج ذیل اعلیٰ احصاء کا کلیہ دیتا ہے

$$(4.24) \quad \underbrace{|x_{n+1} - r|}_{e_{n+1} \text{ غل}} \leq \frac{|f''| \text{ زیادہ سے زیادہ}}{|f'| \text{ کم سے کم}} |x_n - r|^2 = c \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{e_n \text{ غل}}$$

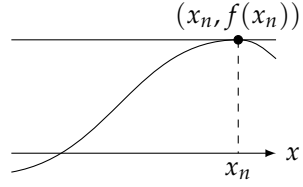
جہاں c مستقل ہے، اور زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت r پر وقفہ میں پائی جاتی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں ہیں۔ درج بالا کلیہ کہتا ہے کہ قدم $n+1$ میں غل کی قیمت قدم n میں غل کی قیمت کے مربع ضرب مستقل سے زیادہ نہیں ہو گی۔ اس بات کی گہرائی سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ $c \leq 1$ ہے اور $|x_n - r| < 10^{-3}$ ہے تب $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$ ہو گا۔ یوں ایک ہی قدم میں درستی 3 اعشاریہ سے 6 اعشاریہ ہو گئی ہے۔ عدم مساوات 4.23 اور عدم مساوات 4.24 میں ہم فرض کرتے ہیں کہ $f'(r) \neq 0$ "اچھا" تفاعل ہے۔ عدم مساوات 4.24 میں اس سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کا r پر واحد ایک جذر پایا جاتا ہو لہذا $f'(r) \neq 0$ ہو گا۔ اگر r پر ایک سے زیادہ جذر پائے جاتے ہوں تب ارتکاز کی رفتار کم ہو سکتی ہے۔

لیکن چیزیں غلطی کی طرف جاسکتی ہیں

اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب x_n پر منحنی کا مماس x محور کو قطع نہیں کرے گا لہذا x_{n+1} ناقابل معلوم ہو گا اور ترکیب نیوٹن رک جائے گا (شکل 4.138)۔ ایسی صورت میں نئے ابتدائی نقطہ سے شروع کریں۔ اب عین ممکن ہے کہ f اور f' دونوں کا مشترک جذر پایا جاتا ہو۔ یہ جاننے کے لئے کہ آیا ایسا ہے آپ $f'(x) = 0$ کا حل تلاش کر کے ان قیمتوں پر f کی قیمتیں دیکھ سکتے ہیں یا f اور f' کو ایک ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں۔



شکل 4.139: ترکیب نیوٹن کی عدم مرکزیت۔



شکل 4.138: اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب نقطہ قطع نہیں پایا جاتا ہے لہذا ترکیب نیوٹن رک جاتی ہے اور x_{n+1} ناقابل معلوم ہو گا۔

ترکیب نیوٹن بعض اوقات غیر مرکوز ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r \end{cases}$$

جس کو شکل 4.139 میں دکھایا گیا ہے لیتے ہیں۔ اگر ہم $x_0 = r - h$ سے شروع کریں تب $x_1 = r + h$ ہو گا اور ہر قدم پر یہی دو قیمتیں دہرائی جاتی ہیں۔ ہم جتنے قدم بھی لیں، حاصل تخمین ابتدائی قیاس سے زیادہ بہتر نہیں ہو گا۔

اگر ترکیب نیوٹن مرکوز ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ جذر پر مرکوز ہو گا۔ حقیقت میں عموماً ایسا ہی ہو گا البتہ بعض اوقات یہ کسی ایسے نقطے پر مرکوز ہو گا جہاں کوئی جذر نہ پایا جائے گا۔ ہماری خوش قسمتی سے ایسے مواقع بہت کم پائے جاتے ہیں۔

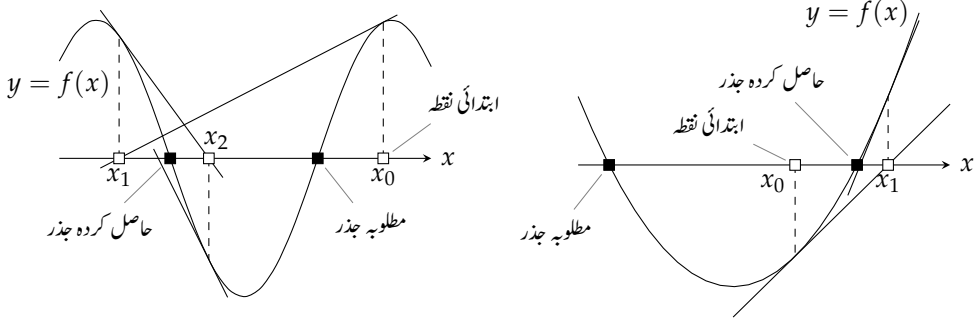
بعض اوقات آپ ایک جذر کو تلاش کرنا چاہیں گے جبکہ ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو گا۔ شکل 4.140 میں ایسے دو مثالیں دی گئی ہیں۔

ایسی صورت میں، کمپیوٹر پر تفاعل کی ترسیم یا احصاء کے ترکیب استعمال کرتے ہوئے درکار جذر کے قریب ابتدائی نقطہ تلاش کرتے ہوئے حل کریں۔ امید کی جاتی ہے کہ اس سے مسئلہ حل ہو جائے گا۔

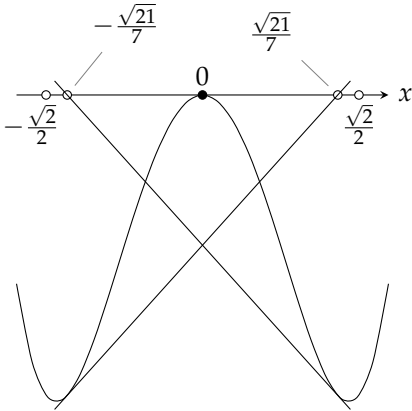
ترکیب نیوٹن میں ابتری

ترکیب نیوٹن سے جذر کا حصول ابتری کا شکار ہو سکتا ہے یعنی کئی مساوات کے لئے حاصل جذر کی قیمت ابتدائی نقطے کی مقام کو بہت حساس ہو گی۔

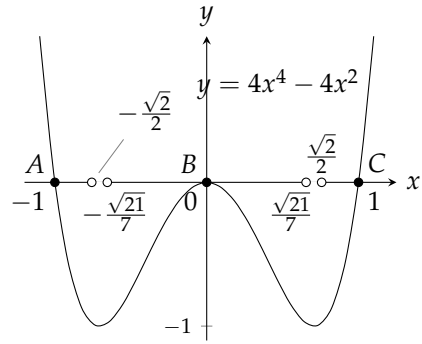
مساوات $4x^4 - 4x^2 = 0$ ایسی ایک مثال ہے جس کو شکل 4.141 میں دکھایا گیا ہے۔ وقفہ $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7})$ اور $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ میں ابتدائی نقطہ منتخب کرنے سے بالترتیب جذر A ، B اور C ملتا ہے۔ نقطے $x = \pm \frac{\sqrt{21}}{7}$ ایک دوسرے کو



شکل 4.140: ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو سکتا ہے۔



شکل 4.141: ترکیب نیوٹن ابتری کا شکار ہے۔



دہراتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ نقطوں کے ایسے لامتناہی کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر A کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان وقفوں کے بیچ، نقطوں کے ایسے کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر C کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان کھلے وقفوں کے آخری سر (جن کی تعداد لامتناہی ہے) کوئی جذر نہیں دیتے ہیں بلکہ یہ ایک دوسرے کو دہراتے ہیں۔ یہی عمل وقفہ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{7})$ میں بھی پایا جاتا ہے۔

$\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ (یا $\frac{\sqrt{21}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ) انتہائی کی بہترین مثال دیکھنے کو ملتی ہے۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ تک دائیں سے پہنچنے ہوئے ان نقطوں کے بیچ فرق کرنا مشکل ہو جاتا ہے جو جذر A اور جذر C دیتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ کے ایک ہی طرف رہتے ہوئے انتہائی قریب قریب ایسے نقطے پائے جاتے ہیں جن سے حاصل جذر ایک دوسرے سے بہت دور پائے جاتے ہیں۔

سوالات

حصول جذر
سوال 4.475: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے مساوات $x^2 + x - 1 = 0$ کا حل حاصل کریں۔ اب
لیتے ہوئے دوسرا حل تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔
جواب: $x_2 = \frac{13}{21}, -\frac{4}{3}$

سوال 4.476: $x_0 = 0$ لیتے ہوئے $x^3 + 3x + 1 = 0$ کا ایک حقیقی حل ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ اس کے بعد
 x_2 تلاش کریں۔

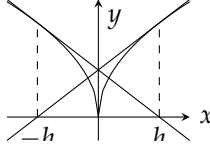
سوال 4.477: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے تقابل $f(x) = x^4 + x - 3$ کا بائیں صفر اور $x_0 = 1$
لیتے ہوئے اس کا دایاں صفر تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔
جواب: $x_2 = \frac{5763}{4945}, -\frac{51}{31}$

سوال 4.478: تقابل $f(x) = 2x - x^2 + 1$ کے دونوں جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ $x_0 = 0$ سے شروع
کرتے ہوئے بائیں ہاتھ صفر اور $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے دائیں ہاتھ صفر حاصل کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال 4.479: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل ترکیب نیوٹن سے کرتے ہوئے 2 کا مثبت چوتھا جذر تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ
 $x_0 = 1$ لیں۔ x_2 کیا ہوگا؟
جواب: $x_2 = \frac{2387}{2000}$

سوال 4.480: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل کرتے ہوئے 2 کا منفی چوتھا جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ
 $x_0 = -1$ لیں۔ x_2 کیا ہوگا؟

سوال 4.481: x کی کس قیمت پر $\cos x = 2x$ ہوگا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔
جواب: $x \approx 0.45$



شکل 4.142: ترسیم برائے سوال 4.487

سوال 4.482: x کی کس قیمت پر $\cos x = -x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

سوال 4.483: متوسط قیمت مسئلہ (صفحہ 174) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $f(x) = x^3 + 2x - 4$ کا ایک جذر $x = 2$ اور $x = 1$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس جذر کو ترکیب نیوٹن کی مدد سے 5 اعشاریہ درستی تک تلاش کریں۔
جواب: 1.17951

سوال 4.484: π کی قیمت کا تخمینہ مساوات $\tan x = 0$ کے حل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ نقطہ $x_0 = 3$ سے شروع کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے، کیلکولیٹر کی استعمال کے ساتھ، π کی قیمت جتنے اعشاریہ درستی تک ممکن ہو حاصل کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال
سوال 4.485: فرض کریں آپ کا منتخب کردہ ابتدائی نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہوتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f'(x_0)$ معین اور غیر صفر ہے۔ ایسی صورت میں x_1 اور دیگر تخمینے کیا حاصل ہوں گے؟

سوال 4.486: آپ $\frac{\pi}{2}$ کی قیمت 5 اعشاریہ درست ترکیب نیوٹن سے $\cos x = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ کیا ابتدائی نقطہ کی کوئی اہمیت ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.487: ارتعاش۔ اگر $h > 0$ ہو تب ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x_0 = h$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل تفاعل کے لئے $x_1 = -h$ حاصل ہو گا

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

اور $x_0 = -h$ منتخب کرنے سے $x_1 = h$ حاصل ہو گا۔ اس مسئلے کی ترسیم کھینچ کر اس عمل کی وضاحت کریں۔
جواب: شکل 4.142

سوال 4.488: گزرتی ہوئی تخمینے تفاعل $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیتے ہوئے x_1, x_2, x_3 اور x_4 تلاش کریں۔ $|x_n|$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ $n \rightarrow \infty$ کرنے سے $|x_n|$ کو کیا ہو گا؟ تصویر کشی کر کے وضاحت کریں۔

سوال 4.489: سمجھائیں کہ درج ذیل چار فقرے ایک ہی معلومات پوچھ رہی ہیں۔

ا. تقابل $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کا جذر تلاش کریں۔

ب. منحنی $y = x^3$ اور خط $y = 3x + 1$ کی نقطہ تقاطع کا x محدود تلاش کریں۔

ج. منحنی $y = x^3 - 3x$ جہاں $y = 1$ کو قطع کرتی ہے اس نقطے کا x محدود تلاش کریں۔

د. x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + 5$ کا تفرق صفر ہو گا۔

جواب: چاروں فقرے جزو-الف کا جذر تلاش کرنے کو کہتے ہیں۔

سوال 4.490: ایک سیارے کا مقام تلاش کرنے کی خاطر ہمیں $x = 1 + 0.5 \sin x$ حل کرنا ہو گا۔ تقابل $f(x) = x - 1 - 0.5 \sin x$ کو ترسیم کرتے ہوئے ایک جذر $x = 1.5$ کے قریب حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطہ سے شروع کرتے ہوئے بہتر حل x_1 تلاش کریں۔ (5 اعشاریہ درست حل $x = 1.49870$ ہے۔)

سوال 4.491:

ا. ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے دو منفی جذر 5 اعشاریہ درست تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2.5 \leq x \leq -2$ پر $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ترسیم کو جذر کے قریب بڑا کرتے ہوئے جذر کو 5 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔

ج. تقابل $g(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 - x + 5$ کو ترسیم کریں۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے x کی 5 اعشاریہ درست وہ قیمت تلاش کریں جہاں ترسیم کا مماس افقی ہو۔

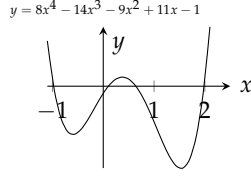
جواب: $-0.34730, -1.53209$

سوال 4.492: ترسیم $y = \tan x$ خط $y = 2x$ کو $x = 0$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔ ترکیب نیوٹن سے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔

جواب: 1.165561185207211

سوال 4.493: ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ کے دو حقیقی جذر تلاش کریں۔
جواب: $0.6301153961638432, 2.573271963535193$

سوال 4.494: $\sin 3x = 0.99 - x^2$ کے کتنے حل ہوں گے؟ ترکیب نیوٹن سے ان حل کو تلاش کریں۔
جواب: $0.350035015, -1.0261731615301$



شکل 4.143: ترسیم برائے سوال 4.497

سوال 4.495: کیا $\cos 3x$ کبھی x کو قطع کرتا ہے؟ اپنے جواب جی وجہ پیش کریں۔ ترکیب نیٹن استعمال کرتے ہوئے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔
جواب: 0.390 040 316 667 547

سوال 4.496: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ کے چار حقیقی صفر تلاش کریں۔
جواب: $\pm 1.306 562 964 876 4, \pm 0.541 196 100 146 19$

سوال 4.497: تجزی $8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$ میں r_1, r_2, r_3 اور r_4 تلاش کریں (شکل 4.143)۔
جواب: $-0.976 823 589, 0.100 363 332, 0.642 746 671, 1.983 713 87$

باب 5

تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

5.1 غیر قطعی کمالات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق $f(x)$ سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق f ہے۔ ان تفاعل کو f کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو f کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمیل

تعریف: تفاعل $f(x)$ کا الٹ تفرق تب $F(x)$ ہو گا جب f کے دائرہ کار میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

f کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ x کے لحاظ سے f کا غیر قطعی تکمیل¹ ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x) dx$$

علامت \int کو علامت تکمیل کہتے ہیں۔ تفاعل f کو متکمل² اور x کو تکمیل کا متغیر³ کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل f کے حاصل کردہ الٹ تفرق F اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکمیلی علامت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$(5.1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

مستقل C کو تکمیل کا مستقل⁴ یا اختیاری مستقل⁵ کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " x کے لحاظ سے تفاعل f کا غیر قطعی تکمیل $F(x) + C$ ہے۔" $F(x) + C$ کے حصول کو f کے تکمیل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1: $\int 2x dx$ تلاش کریں۔
حل:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$2x$ کا الٹ تفرق x^2 ہے اور C تکمیل کا مستقل ہے۔ کلیہ $x^2 + C$ تفاعل $2x$ کے تمام تفرقات دیتا ہے۔ یوں $x^2 + 1$ ، $x^2 - \pi$ اور $x^2 + \sqrt{2}$ تفاعل $2x$ کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔ جدول 5.1 میں غیر قطعی کمالات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

indefinite integral¹
integrand²
variable of integration³
constant of integration⁴
arbitrary constant⁵

جدول 5.1: مکمل کے کلیات

تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے	غیر قطعی مکمل
$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$	1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, n \text{ نا طق}$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = \int 1 dx = x + C$ (خصوصی صورت)
$\frac{d}{dx} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) = \sin kx$	2. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin kx}{k} \right) = \cos kx$	3. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	4. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx} (-\cot x) = \csc^2 x$	5. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	6. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx} (-\csc x) = \csc x \cot x$	7. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں $n = 5$ لیتے ہوئے:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں $n = -\frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں $k = 2$ لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں $k = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمیل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق مکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{d}{dx}(x \sin x + \cos x + C) = x \cos x + \sin x - \sin x + 0 = x \cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمیل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی تکمل کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ:	$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
(k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	
2. منفی کے لئے قاعدہ:	$\int -f(x) dx = - \int f(x) dx$
(قاعدہ 1 میں $k = -1$ لیا گیا ہے۔)	
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x) \mp g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

- ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب kf کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ f کے الٹ تفرق ضرب k کے برابر ہو۔
- بالخصوص ایک تفاعل اس صورت $-f$ کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ f کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔
- ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق $f \mp g$ کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ f کے الٹ تفرق اور g کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکملی علامت میں لکھنے سے غیر قطعی تکمل کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: تکمل کا مستقل

جدول 5.2، قاعدہ 1	$\int 5 \sec x \tan x dx = 5 \int \sec x \tan x dx$
جدول 5.1، کلیہ 6	$= 5(\sec x + C)$
غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت	$= 5 \sec x + 5C$
مستقل $5C$ کو مستقل C' لکھا گیا ہے	$= 5 \sec x + C'$
C' ایک مستقل ہے جس کو ہم اب C سے ظاہر کرتے ہیں	$= 5 \sec x + C$

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل C' کو بغیر علامت (!) لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, dx = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا مکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ مکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل مکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو مکمل۔

درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx$$

اگر ہم دیکھ کر بتا سکیں کہ $x^2 - 2x + 5$ کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو مکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو C لکھا جاسکتا ہے یعنی $C_1 + C_2 + C_3 = C$ جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو مکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے C لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل C لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے کمالات

بعض اوقات جن کمالات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکنیکی تماش کی مدد سے ان کمالات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔ $\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے کمالات عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماش کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

□

سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 5.1 تا سوال 5.18 میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 5.1: $x^2 - 2x + 1$ (ج)، x^2 (ب)، $2x$ (ا)
جواب: $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$ (ج)، $\frac{x^3}{3}$ (ب)، x^2 (ا)

سوال 5.2: $x^7 - 6x + 8$ (ج)، x^7 (ب)، $6x$ (ا)

سوال 5.3: $x^{-4} + 2x + 3$ (ج)، x^{-4} (ب)، $-3x^{-4}$ (ا)
جواب: $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$ (ج)، $-\frac{1}{3}x^{-3}$ (ب)، x^{-3} (ا)

سوال 5.4: $-x^{-3} + x - 1$ (ج)، $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ (ب)، $2x^{-3}$ (ا)

سوال 5.5: $2 - \frac{5}{x^2}$ (ج)، $\frac{5}{x^2}$ (ب)، $\frac{1}{x^2}$ (ا)
جواب: $2x + \frac{5}{x}$ (ج)، $-\frac{5}{x}$ (ب)، $-\frac{1}{x}$ (ا)

سوال 5.6: $x^3 - \frac{1}{x^3}$ (ج)، $\frac{1}{2x^3}$ (ب)، $-\frac{2}{x^3}$ (ا)

سوال 5.7: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (ج)، $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ب)، $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ (ا)
جواب: $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$ (ج)، \sqrt{x} (ب)، $\sqrt{x^3}$ (ا)

سوال 5.8: $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (ج)، $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ (ب)، $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ (ا)

سوال 5.9: $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ (ج)، $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ (ب)، $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ (ا)
جواب: $x^{-1/3}$ (ج)، $x^{1/3}$ (ب)، $x^{2/3}$ (ا)

سوال 5.10: $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ (ج)، $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ (ب)، $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ (ا)

سوال 5.11: $\sin \pi x - 3 \sin 3x$ (ج)، $3 \sin x$ (ب)، $-\pi \sin \pi x$ (ا)
جواب: $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + \cos(3x)$ (ج)، $-3 \cos x$ (ب)، $\cos(\pi x)$ (ا)

سوال 5.12: $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$ (ج)، $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ (ب)، $\pi \cos \pi x$ (ا)

سوال 5.13: $-\sec^2 \frac{3x}{2}$ (ج)، $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ (ب)، $\sec^2 x$ (ا)
جواب: $-\frac{2}{3} \tan(\frac{3x}{2})$ (ج)، $2 \tan(\frac{x}{3})$ (ب)، $\tan x$ (ا)

سوال 5.14: $1 - 8 \csc^2 2x$ (ج)، $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$ (ب)، $\csc^2 x$ (ا)

سوال 5.15: $(i) \csc x \cot x$ ، $(ب) -\csc 5x \cot 5x$ ، $(ج) -\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$
 جواب: $(i) -\csc x$ ، $(ب) \frac{1}{5} \csc(5x)$ ، $(ج) 2 \csc(\frac{\pi x}{2})$

سوال 5.16: $(i) \sec x \tan x$ ، $(ب) 4 \sec 3x \tan 3x$ ، $(ج) \sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 5.17: $(\sin x - \cos x)^2$
 جواب: $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 5.18: $(1 + 2 \cos x)^2$

تکمیل کا حصول
 سوال 5.19 تا سوال 5.58 میں مکمل حاصل کریں۔ مکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 5.19: $\int (x + 1) dx$
 جواب: $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 5.20: $\int (5 - 6x) dx$

سوال 5.21: $\int (3t^2 + \frac{t}{2}) dt$
 جواب: $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 5.22: $\int (\frac{t^2}{2} + 4t^3) dt$

سوال 5.23: $\int (2x^3 - 5x + 7) dx$
 جواب: $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 5.24: $\int (1 - x^2 - 3x^5) dx$

سوال 5.25: $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}) dx$
 جواب: $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 5.26: $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x) dx$

سوال 5.27: $\int x^{-\frac{1}{3}} dx$
 جواب: $\frac{3}{2} x^{2/3} + C$

$$\int x^{-\frac{5}{4}} dx \quad \text{سوال 5.28}$$

$$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx \quad \text{سوال 5.29}$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \text{سوال 5.30}$$

$$\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}} \right) dy \quad \text{سوال 5.31}$$

$$4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}} \right) dy \quad \text{سوال 5.32}$$

$$\int 2x(1 - x^{-3}) dx \quad \text{سوال 5.33}$$

$$x^2 + \frac{2}{x} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int x^{-3}(x+1) dx \quad \text{سوال 5.34}$$

$$\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt \quad \text{سوال 5.35}$$

$$2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt \quad \text{سوال 5.36}$$

$$\int (-2 \cos t) dt \quad \text{سوال 5.37}$$

$$-2 \sin t + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int (-5 \sin t) dt \quad \text{سوال 5.38}$$

$$7 \sin \frac{\theta}{3} d\theta \quad \text{سوال 5.39}$$

$$-21 \cos \frac{\theta}{3} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int 3 \cos 5\theta d\theta \quad \text{سوال 5.40}$$

$$\int (-3 \csc^2 x) dx \quad \text{سوال 5.41}$$

$$3 \cot x + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3} \right) dx \quad \text{سوال 5.42}$$

سوال 5.43: $\int \frac{\csc \theta \cot \theta}{2} d\theta$
 جواب: $-\frac{1}{2} \csc \theta + C$

سوال 5.44: $\frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta d\theta$

سوال 5.45: $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x) dx$
 جواب: $4 \sec x - 2 \tan x + C$

سوال 5.46: $\int \frac{1}{2} (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx$

سوال 5.47: $\int (\sin 2x - \csc^2 x) dx$
 جواب: $-\frac{1}{2} \cos 2x + \cot x + C$

سوال 5.48: $\int (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) dx$

سوال 5.49: $\int 4 \sin^2 y dy$
 جواب: $2y - \sin 2y + C$

سوال 5.50: $\int \frac{\cos^2 y}{7} dy$

سوال 5.51: $\int \frac{1+\cos 4t}{2} dt$
 جواب: $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 5.52: $\int \frac{1-\cos 6t}{2} dt$

سوال 5.53: $\int (1 + \tan^2 \theta) d\theta$ اشارہ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
 جواب: $\tan \theta + C$

سوال 5.54: $\int (2 + \tan^2 \theta) d\theta$

سوال 5.55: $\int \cot^2 x dx$
 جواب: $-\cot x - x + C$

سوال 5.56: $\int (1 - \cot^2 x) dx$

سوال 5.57: $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta$
 جواب: $-\cos \theta + \theta + C$

$$\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta \quad \text{سوال 5.58}$$

تکملی کلیہ کی تصدیق

سوال 5.59 تا سوال 5.64 میں دیے تکملی کلیات کی تصدیق بذریعہ تفریق کریں۔ ہم حصہ 5.3 میں دیکھیں گے کہ ایسے کلیات کہاں سے آتے ہیں۔

$$\int (7x - 2)^3 dx = \frac{(7x-2)^4}{28} + C \quad \text{سوال 5.59}$$

$$\int (3x + 5)^{-2} dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C \quad \text{سوال 5.60}$$

$$\int \sec^2(5x - 1) dx = \frac{1}{5} \tan(5x - 1) + C \quad \text{سوال 5.61}$$

$$\int \csc^2\left(\frac{x-1}{3}\right) dx = -3 \cot\left(\frac{x-1}{3}\right) + C \quad \text{سوال 5.62}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C \quad \text{سوال 5.63}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C \quad \text{سوال 5.64}$$

سوال 5.65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C \quad \text{ج۔}$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 5.66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{\sec^3 \theta}{3} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec^2 \theta \quad \text{ج۔}$$

سوال 5.67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int (2x+1)^2 dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int 3(2x+1)^2 dx = (2x+1)^3 + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int 6(2x+1)^2 dx = (2x+1)^3 + C \quad \text{ج۔}$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 5.68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3 + C \quad \text{ج۔}$$

نظریہ اور مثالیں
سوال 5.69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int f(x) dx \quad \text{ا۔} \quad \int [f(x) + g(x)] dx \quad \text{و۔}$$

$$\int g(x) dx \quad \text{ب۔} \quad \int [f(x) - g(x)] dx \quad \text{د۔}$$

$$\int [-f(x)] dx \quad \text{ج۔} \quad \int [x + f(x)] dx \quad \text{ز۔}$$

$$\int [-g(x)] dx \quad \text{د۔} \quad \int [g(x) - 4] dx \quad \text{ح۔}$$

جواب: (ا) $-\sqrt{x} + C$ ، (ب) $x + C$ ، (ج) $\sqrt{x} + C$ ، (د) $-x + C$ ، (و) $x - \sqrt{x} + C$ ، (ز) $-x - \sqrt{x} + C$ ، (ح) $\frac{x^2}{2} - \sqrt{x} + C$ ، (د) $-3x + C$

سوال 5.70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 5.69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{d}{dx}e^x, \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x \sin x)$$

5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی مکمل میں سے مخصوص الٹ تفرقی منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لئے یہ عمل ضروری ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل صورت کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو تفرقی مساوات⁶ کہلاتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

اس مساوات میں x آزاد متغیر جبکہ y تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم x کا ایسا تفاعل y جانتا چاہتے ہیں جس کی نقطہ x_0 پر قیمت y_0 ہو۔ اس کو ابتدائی قیمت مسئلہ⁷ کہتے ہیں۔ جیسا مثال 5.7 میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدموں میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال 5.7: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول
سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 \text{ m s}^{-2}$$

اگر جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جائے تب t سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہوگی؟

حل: ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$\frac{dv}{dt} = 9.8$	تفرقی مساوات
$v(0) = 0$	ابتدائی معلومات

⁶differential equation
⁷initial value problem

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ $t = 0$ پر ساکن جسم کی سمتی رفتار $v = 0$ ہے جس کو مختصراً $v(0) = 0$ لکھا جاتا ہے۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 9.8 && \text{تفرقی مساوات} \\ \int \frac{dv}{dt} dt &= \int 9.8 dt && t \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ v + C_1 &= 9.8t + C_2 && \text{مکمل کا نتیجہ} \\ v &= 9.8t + C && \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں} \end{aligned}$$

آخری مساوات کے تحت لمحہ t پر جسم کی رفتار $9.8t + C$ ہو گی جہاں C نامعلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} v &= 9.8t + C \\ 0 &= 9.8(0) + C && v(0) = 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t \text{ m s}^{-2}$$

□

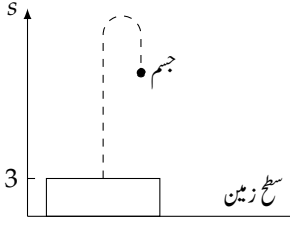
تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی مکمل $F(x) + C$ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x)$ کا عمومی حل⁸ $y = F(x) + C$ دیتا ہے۔ عمومی حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل⁹ تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ x_0 پر y کی قیمت y_0 ہے جس کو مختصراً $y(x_0) = y_0$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک نقطہ اور ڈھلوان سے منحنی کا حصول
ایک منحنی جو نقطہ $(1, -1)$ سے گزرتی ہے کا نقطہ (x, y) پر ڈھلوان $3x^2$ ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

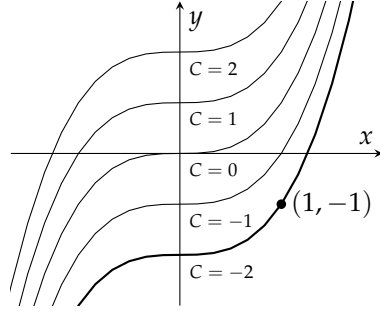
حل: ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 && \text{منحنی کی ڈھلوان} \\ y(1) &= -1 && \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

general solution⁸
particular solution⁹



شکل 5.2: تصویر کشی برائے مثال 5.9



شکل 5.1: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال 5.8

ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ \int \frac{dy}{dx} dx &= \int 3x^2 dx \\ y &= x^3 + C\end{aligned}$$

مکمل کے مستقلوں کی یکساں کیا گیا ہے

عمومی حل $y = x^3 + C$ ہے جس کو C کی مختلف قیمتوں کے لئے شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پر کر کے نامعلوم مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \\ C &= -2\end{aligned}$$

عمومی حل میں C پر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل 5.1 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

□

اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ مکمل لینا ہو گا۔ پہلا مکمل

$$\int \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{ds}{dt} + C$$

تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔ دوسرا مکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال 5.9: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول
زمین سے 3 m بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ $t = 0$ پر سیدھا اوپر 160 m s^{-1} کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ 9.8 m s^{-2} کی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو بطور t کا تفاعل تلاش کریں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہوگی؟

حل: اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل 5.2) جہاں لمحہ t پر زمین سے جسم کی بلندی کو s سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s متغیر t کا دوگنا قابل تفرق تفاعل ہے لہذا جسم کی رفتار اور اسراع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

چونکہ ہمارے ریاضی نمونہ میں اسراع گھٹتے ہوئے s کے رخ عمل کرتی ہے لہذا ہمارا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= -9.8 && \text{تفرقی مساوات} \\ \frac{ds}{dt}(0) &= 160, \quad s(0) = 3 && \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

ہم تفرقی مساوات کو t کے لحاظ سے مکمل کر کے $\frac{ds}{dt}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2s}{dt^2} dt &= \int (-9.8) dt \\ \frac{ds}{dt} &= -9.8t + C_1 \end{aligned}$$

ہم پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C_1 تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 160 &= -9.8(0) + C_1 && \frac{ds}{dt}(0) = 160 \\ C_1 &= 160 \end{aligned}$$

یوں $\frac{ds}{dt}$ کا کلیہ مکمل ہوتا ہے:

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + 160$$

ہم t کے لحاظ سے $\frac{ds}{dt}$ کا مکمل لیتے ہوئے s تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{dt} dt &= \int (-9.8t + 160) dt \\ s &= -4.9t^2 + 160t + C_2 \end{aligned}$$

ہم دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے C_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$3 = -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$

یوں مخصوص حل s کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر t ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لحہ $t = 3$ پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں $t = 3$ پر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9 \text{ m}$$

□

ایک رتی تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال 5.7 اور مثال 5.8 میں دیکھا گیا، جبکہ در رتی تفرق تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال 5.9 میں دیکھا گیا۔ اسی طرح تین رتی تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہوگی۔ ہر بار الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ابتدائی قیمت درکار ہوگی۔

منحنی حل کا خاکہ

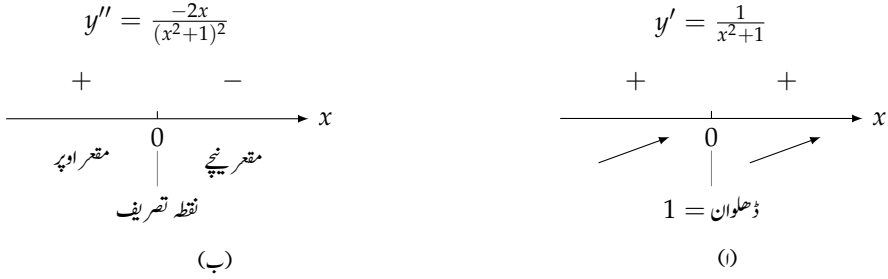
تفرقی مساوات کے حل کی ترسیم کو منحنی حل¹⁰ یا منحنی تکمل¹¹ کہتے ہیں۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ کے حل $y = C + x^3$ کو شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x)$ کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم $f(x)$ کا الٹ تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرقی مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

مثال 5.10: درج ذیل تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

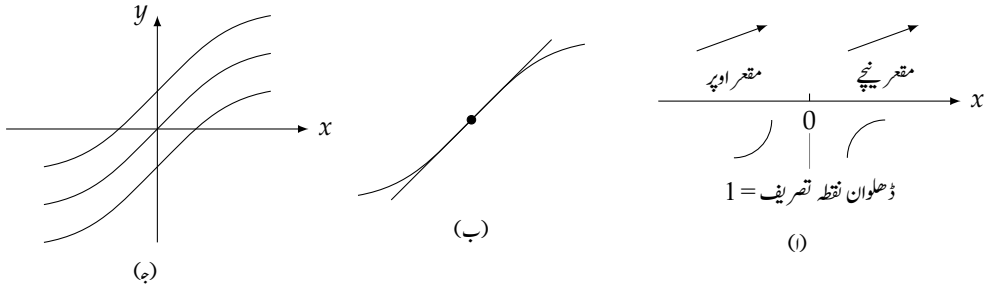
$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

حل: پہلا قدم: y' اور y'' : منحنی کی عمومی صورت y' اور y'' پر منحصر ہوتی ہے (حصہ 4.4)۔ ہم $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$ پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق y'' دیتا ہے:

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$



شکل 5.3: منحنی کی اتار چڑھاؤ اور مقعر (مثال 5.10)



شکل 5.4: منحنی کی عمومی صورت (مثال 5.10)

دوسرا قدم: اتار چڑھاؤ۔ y' کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ہے۔ نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا ہے لہذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔ چونکہ $y' > 0$ ہے لہذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے (شکل 5.3-ا)۔

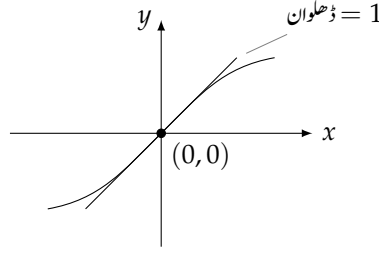
تیسرا قدم: مقعر۔ دو گنا تفرق $x = 0$ پر $(+)$ سے تبدیل ہو کر $(-)$ ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا $x = 0$ پر نقطہ تصریف پایا جائے گا (شکل 5.3-ب)۔

چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کی جھکاؤ شکل 5.4-ا اور اس کی عمومی صورت شکل 5.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔

پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

یوں $x \rightarrow \pm\infty$ پر منحنی افقی ہو گی۔



شکل 5.5: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال 5.11)

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے لہذا y محور کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل 5.4-ج۔

□

مثال 5.11: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$y(0) = 0 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

حل: ہم نے مثال 5.10 میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل 5.4-ج میں دکھایا گیا ہے۔ ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ $(0, 0)$ سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کی درکار مخصوص حل ہے جس کو شکل 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔

□

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x)$ میں تفاعل $f(x)$ کے الٹ تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے، جیسا کہ آپ باب 7 میں دیکھیں گے، جبکہ تفاعل $g(x) = \sqrt{1 + x^4}$ کا الٹ تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^4}$ کو ہم تریسی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

ریاضیاتی نمونہ کشی

ریاضیاتی نمونہ کشی عموماً چار اقدام پر مبنی ہوتا ہے۔ ہم پہلے حقیقی دنیا میں کسی عمل (مثلاً گیند کا گرنا یا کھانسی کے دوران سانس کی نالی کا سکڑنا) کا مشاہدہ کرتے ہوئے اس کے اہم خصوصیات کو ظاہر کرنے والے ریاضی متغیرات کا نظام بناتے ہیں اور معلومات کا ریاضی استعارہ کرتے ہیں۔ اس کے بعد متغیرات کے تعلقات کو (عموماً) موجودہ ریاضی کی زبان میں لکھتے ہوئے نتائج اخذ کرتے ہیں۔ اس کے بعد ریاضیاتی حاصل نتائج کو زیر غور نظام پر لاگو کرتے ہیں۔ آخر میں ہم ریاضی نمونہ سے حاصل نتائج کا مشاہدے کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ پیش گوئی کر

سکتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ دیگر نظام پر قابل اطلاق ہو گا۔ بہترین نمونہ وہ ہے جس کے نتائج مشاہدے کے عین مطابق ہوں، جو پیش گوئی کر سکے، جس کا استعمال وسیع اور آسان ہو۔

گیند کے گرنے کو مثال بناتے ہوئے مذکورہ بالا اقدام واضح کرتے ہیں۔ پہلے قدم پر ہم درج ذیل متغیرات اور مشاہدے اکٹھے کرتے ہیں۔
متغیرات:

فاصلہ: s

وقت: t

ابتدائی قیمتیں:

لحہ $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 0$ ہیں۔

فرض کیا گیا تعلق: $s = 4.9t^2$

دوسرے قدم پر احصاء استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ریاضی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

$$v = 9.8t$$

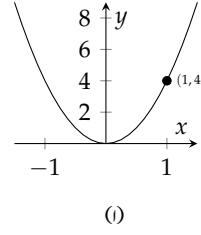
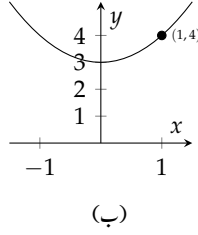
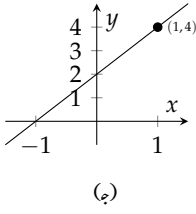
$$a = 9.8$$

تیسرے قدم پر نتائج کی تشریح کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے لحاظ سے مفہوم بیان کرتے ہیں۔ یوں لحہ t پر رفتار $9.8t$ میٹر فی سیکنڈ ہو گا جبکہ کسی بھی گرتے ہوئے جسم کی اسراع 9.8 ms^{-2} ہو گی۔

آخری قدم پر ہم آزادانہ گرنے والے جسم کی لحاتی رفتار اور اسراع ناپ کر تصدیق کرتے ہیں کہ ریاضی نمونہ درست نتائج کی پیش گوئی کر سکتا ہے۔

نقل اترنا بذریعہ کمپیوٹر

کسی بھی نظام کو سمجھنے کی خاطر ہم مختلف حالات میں اس کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض پیچیدہ نظام کا مشاہدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ (مثلاً جب مشاہدہ بہت مہنگا یا خطرناک ہو یا اس کے لئے بہت وقت درکار ہو)۔ ایٹم بم یا سیلابی تباہی یا کہکشاں کا مشاہدہ اس زمرے میں آتے ہیں۔ ان نظام پر غور کرنے کے لئے ہم ریاضی نمونہ کا سہارا لیتے ہیں۔ جہاں نظام کا حساب پیچیدہ یا بہت لمبا ہو وہاں کمپیوٹر کا استعمال سودمند ثابت ہوتا ہے۔ بلند عمارت، دریا پر پل یا برقیاتی ادوار بنانے سے پہلے ان کے نمونوں پر کمپیوٹر کی مدد سے غور کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ ہم کمپیوٹر پر عمل کا نقل اتارتے¹² ہیں۔



شکل 5.6: ترسیمات برائے سوال 5.71

سوالات

ابتدائی قیمت مسائل
سوال 5.71: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.6 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y(1) = 4$$

جواب: (ب)

سوال 5.72: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.7 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y(-1) = 1$$

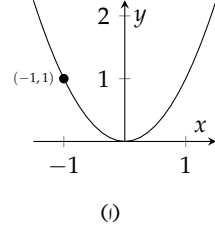
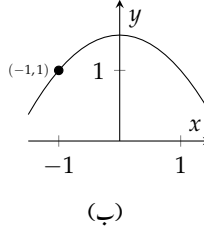
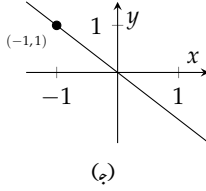
جواب: (ب)

سوال 5.73 تا سوال 5.92 میں دیے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 5.73: $\frac{dy}{dx} = 2x - 7$, $y(2) = 0$

جواب: $y = x^2 - 7x + 10$

سوال 5.74: $\frac{dy}{dx} = 10 - x$, $y(0) = -1$



شکل 5.7: ترمیمات برائے سوال 5.72

سوال 5.75: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x$, $x > 0$, $y(2) = 1$
جواب: $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

سوال 5.76: $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5$, $y(-1) = 0$

سوال 5.77: $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}$, $y(-1) = -5$
جواب: $y = 9x^{1/3} + 4$

سوال 5.78: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y(4) = 0$

سوال 5.79: $\frac{ds}{dt} = 1 + \cos t$, $s(0) = 4$
جواب: $s = t + \sin t + 4$

سوال 5.80: $\frac{ds}{dt} = \cos t + \sin t$, $s(\pi) = 1$

سوال 5.81: $\frac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta$, $r(0) = 0$
جواب: $r = \cos(\pi\theta) - 1$

سوال 5.82: $\frac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta$, $r(0) = 1$

سوال 5.83: $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \sec t \tan t$, $v(0) = 1$
جواب: $v = \frac{1}{2} \sec t + \frac{1}{2}$

سوال 5.84: $\frac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t$, $v(\frac{\pi}{2}) = -7$

سوال 5.85: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x$, $y'(0) = 4$, $y(0) = 1$
جواب: $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

سوال 5.86: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, y'(0) = 2, y(0) = 0$

سوال 5.87: $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=1} = 1, r(1) = 1$
 جواب: $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

سوال 5.88: $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{3t}{8}, \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=4} = 3, s(4) = 4$

سوال 5.89: $\frac{d^3 y}{dx^3} = 6, y''(0) = -8, y'(0) = 0, y(0) = 5$
 جواب: $y = x^3 - 4x^2 + 5$

سوال 5.90: $\frac{d^3 \theta}{dt^3} = 0, \theta''(0) = -2, \theta'(0) = -\frac{1}{2}, \theta(0) = \sqrt{2}$

سوال 5.91: $y^{(4)} = -\sin t + \cos t, y'''(0) = 7, y''(0) = y'(0) = -1, y(0) = 0$
 جواب: $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

سوال 5.92: $y^{(4)} = -\cos x + 8 \sin 2x, y'''(0) = 0, y''(0) = y'(0) = 1, y(0) = 3$

رفتار سے مقام معلوم کرنا
 سوال 5.93 تا سوال 5.96 میں رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 5.93: $v = 9.8t + 5, s(0) = 10$
 جواب: $s = 4.9t^2 + 5t + 10$

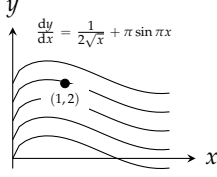
سوال 5.94: $v = 32t - 2, s(1/2) = 4$

سوال 5.95: $v = \sin \pi t, s(0) = 0$
 جواب: $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

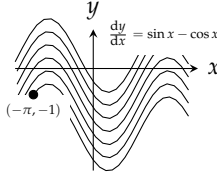
سوال 5.96: $v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, s(\pi^2) = 1$

اسراع سے مقام کی تلاش
 سوال 5.97 تا سوال 5.100 میں اسراع $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ ، ابتدائی رفتار اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

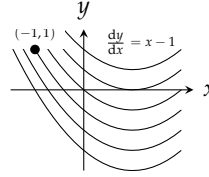
سوال 5.97: $a = 32, v(0) = 20, s(0) = 5$
 جواب: $s = 16t^2 + 20t + 5$



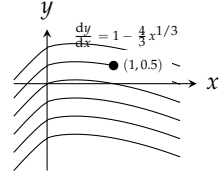
شکل 5.11: منحنيات برائے
سوال 5.106



شکل 5.10: منحنيات برائے
سوال 5.105



شکل 5.9: منحنيات برائے
سوال 5.104



شکل 5.8: منحنيات برائے
سوال 5.103

سوال 5.98: $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

سوال 5.99: $a = -4 \sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$
جواب: $s = \sin(2t) - 3$

سوال 5.100: $a = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

ترسیم کا حصول

سوال 5.101: ایسی ترسیم $y = f(x)$ تلاش کریں جو نقطہ $(9, 4)$ سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $3\sqrt{x}$ ہو۔
جواب: $y = 2x^{3/2} - 50$

سوال 5.102: منحنی $y = f(x)$ نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کا مماس افقی ہے۔ یہ ترسیم $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ کو مطمئن کرتی ہے۔ اس ترسیم کو تلاش کریں۔

منحنیات حل (تکملی منحنیات)

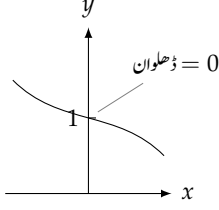
سوال 5.103 تا سوال 5.106 میں منحنی حل دکھائے گئے ہیں۔ دیے نقطے پر منحنی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 5.103: ترسیمات کو شکل 5.103 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

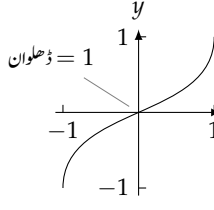
سوال 5.104: ترسیمات کو شکل 5.104 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5.105: ترسیمات کو شکل 5.105 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = -\sin x - \cos x - 2$

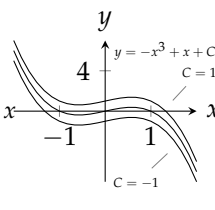
سوال 5.106: ترسیمات کو شکل 5.106 میں دکھایا گیا ہے۔



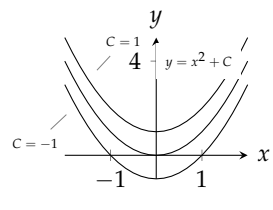
شکل 5.15



شکل 5.14



شکل 5.13



شکل 5.12

تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچنا مثال 5.10 میں سکھایا گیا۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے سوال 5.107 تا سوال 5.110 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کے خاکے بنائیں۔

سوال 5.107: $\frac{dy}{dx} = 2x$

جواب: شکل 5.12

سوال 5.108: $\frac{dy}{dx} = -2x + 2$

سوال 5.109: $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$

جواب: شکل 5.13

سوال 5.110: $\frac{dy}{dx} = x^2$

سوال 5.111 تا سوال 5.114 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ مثال 5.10 اور مثال 5.11 کی طرح بنائیں۔

سوال 5.111: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad y(0) = 0$

جواب: شکل 5.14

سوال 5.112: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}, \quad y(0) = 1$

سوال 5.113: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

جواب: شکل 5.15

سوال 5.114: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}, \quad y(0) = 0$

عملی استعمال

سوال 5.115: چاند پر ثقلی اسراع 1.6 m s^{-2} ہے۔ ایک پتھر کو چاند پر گھرے شکاف میں گرایا جاتا ہے۔ اس کی رفتار اس لمحہ پر کیا

ہو گی جب یہ 30 سیکنڈ بعد شگاف کی تہہ تک پہنچتا ہے؟
جواب: 48 m s^{-1}

سوال 5.116: ایک راکٹ سطح زمین سے سیدھا اوپر رخ 20 m s^{-2} کی اسراع سے اڑتا ہے۔ ایک منٹ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال 5.117: 10 m بلندی سے پانی میں کھودا جاتا ہے۔ پانی میں داخل ہوتے ہوئے لمحے پر آپ کی رفتار کیا ہو گی؟ $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ لیں۔
جواب: 14 m s^{-1}

سوال 5.118: مریخ پر سطح کے نزدیک نقلی اسراع 3.72 m s^{-2} ہے۔ ایک راکٹ جس کو مریخ کی سطح سے 93 m s^{-1} کی ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جائے کس بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 5.119: آپ اسلام آباد تا لاہور موٹروے پر 100 km h^{-1} کی رفتار سے صفر کر رہے ہیں جب آپ کو سامنے ایک حادثہ نظر آتا ہے۔ آپ یکدم گاڑی کو روکنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گاڑی 75 m میں مکمل رک جاتی ہے۔ رکنے کی اسراع تلاش کریں۔ اس کا جواب حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔
پہلا قدم: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -k \quad \text{مستقل } k$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = 100, \quad s(0) = 0 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

دوسرا قدم: t کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $\frac{ds}{dt} = 0$ حاصل ہو گا۔ (آپ کے جواب میں k پایا جائے گا۔)
تیسرا قدم: k کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $s = 75$ حاصل ہوتا ہے۔
جواب: $t = \frac{100}{k}, k = \frac{200}{3} \text{ km h}^{-2}$

سوال 5.120: موٹر سائیکل پر با حفاظت صفر کے لئے لازمی ہے کہ آپ 50 km h^{-1} کی رفتار سے 14 m میں رک سکیں۔ ایسا کرنے کے لئے کتنی اسراع درکار ہو گی؟

سوال 5.121: ایک ذرہ محوری کبیر پر $\frac{d^2 s}{dt^2} = 15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر $s = 0$ اور $\frac{ds}{dt} = 4$ ہیں۔ لمحہ t پر $v = \frac{ds}{dt}$ اور s تلاش کریں۔
جواب: $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}, s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

سوال 5.122: چاند پر اپلو-15 پرواز کے داؤد سکاٹ نے پر اور ہتھوڑے کو تقریباً 1.25 m بلندی سے ایک ساتھ گرنے دیا۔ چاند پر ہوا کی غیر موجودگی کی بنا دونوں کے گرنے کی رفتار یکساں تھی۔ بتائیں گرنے کا دورانیہ کتنا تھا؟ گرنے کا دورانیہ دریافت کرنے کے لئے درج ذیل

ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے تفاعل s تلاش کریں جس کا آزاد متغیر t ہو۔ اس کے بعد t کی وہ قیمت تلاش کریں جو $s = 0$ دے۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -1.6 \text{ m s}^{-2} \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = 0, s(0) = 1.25 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 5.123: محدودی لکیر پر مستقل اسراع a سے حرکت کرتے ہوئے جسم کے مقام s کی معیاری مساوات درج ذیل ہے

$$(5.2) \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار v_0 اور مقام s_0 ہیں۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے اس مساوات کو اخذ کریں۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = v_0, s(0) = s_0 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 5.124: سیارہ کی سطح کے نزدیک آزادی کے ساتھ گرتے ہوئے جسم کا مقام درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$(5.3) \quad s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

جہاں ثقلی اسراع a ، سطح سیارہ سے جسم کی ابتدائی بلندی s_0 اور جسم کی ابتدائی رفتار v_0 ہے۔ چونکہ اسراع نیچے رخ (بلندی s کے الٹ) ہے لہذا مساوات میں منفی کی علامت پائی جاتی ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار اوپر رخ ہو تب v_0 مثبت ہو گا اور اگر اس کا رخ نیچے کو ہو تب v_0 منفی ہو گا۔

مساوات 5.2 استعمال کیے بغیر آپ مساوات 5.3 ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ ابتدائی قیمت مسئلہ کیا ہو گا؟ اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.3 کو حاصل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.125: رفتار کی الٹ تفرق سے ہٹاؤ کا تعین۔

ا. فرض کریں محور s پر ایک جسم کی رفتار $v = 9.8t - 3$ ہے۔ $\frac{ds}{dt}$

1. اگر $t = 0$ پر $s = 5$ ہو تب $t = 1$ و $t = 3$ جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

2. اگر $t = 0$ پر $s = -2$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

3. اگر $t = 0$ پر $s = s_0$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

ب. فرض کریں محدودی کثیر پر ایک جسم کا مقام s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کیا یہ درست ہے کہ $\frac{ds}{dt}$ کا الٹ تفرق جانتے ہوئے دورانہ $t = a$ تا $t = b$ کے لئے آپ جسم کا ہٹاؤ جان سکتے ہیں اگرچہ ان دونوں لمحات پر آپ کو جسم کا ہٹاؤ معلوم نہیں ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) 33.2 m ، 33.2 m ، 33.2 m ، (ب) درست

سوال 5.126: یکتائی حل
اگر قابل تفرق تفاعل $y = F(x)$ اور $y = G(x)$ وقفہ I پر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل ہوں تب کیا I میں ہر x کے لئے $F(x) = G(x)$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

5.3 مکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق

بعض اوقات انجناے مکمل میں متغیرات کی تبدیلی سے جانا پہچانا مکمل حاصل ہوتا ہے۔ مکمل کے اس طریقہ کو ترکیب بدل کہتے ہیں۔ مکمل کے حصول کا یہ ایک اہم ترین طریقہ ہے۔ انہیں اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

عمومی طاقتی قاعدہ کی مکملی صورت

جب u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور n ناطق عدد ہو جس کی قیمت -1 نہ ہو تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = u^n \frac{du}{dx}$$

اس مساوات کو ایک دوسری نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $u^n \frac{du}{dx}$ کا ایک الٹ تفرق $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int \left(u^n \frac{du}{dx} \right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

اس مساوات کے بائیں ہاتھ کو عموماً درج ذیل سادہ تفرقی روپ میں لکھا جاتا ہے

$$\int u^n du$$

جہاں دونوں dx کو آپس میں کٹا گیا ہے۔ درج بالا دو مساوات کو ملا کر درج ذیل ملتا ہے

$$(5.4) \quad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1, \text{ناطق } n)$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے اور du اس کا تفرق ہے۔

مساوات 5.4 حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے، اگرچہ یہ متغیر اس کلیہ میں نہیں پایا جاتا ہے اور اس کی علامت اہم نہیں ہے۔ ہم اس متغیر کو کسی بھی علامت مثلاً θ ، t ، y وغیرہ سے ظاہر کر سکتے تھے۔ مساوات 5.4 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی مکمل کو درج ذیل روپ میں لکھ سکیں

$$\int u^n du, \quad (n \neq -1)$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہو اور du اس کا تفرق ہو تب اس کا حل $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ہو گا۔

مثال 5.12: درج ذیل مکمل حل کریں۔

$$\int (x+2)^5 dx$$

حل: ہم اس مکمل کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\int u^n du$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم $u = x + 2$ لیتے ہیں لہذا $du = dx$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int (x+2)^5 dx &= \int u^5 du & u = x+2, du = dx \\ &= \frac{u^6}{6} + C & \text{مساوات 5.4 میں } n = 5 \\ &= \frac{(x+2)^6}{6} + C & \text{واپس } u = x+2 \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

□

مثال 5.13: $u = x^2 + 2x - 3$ لیتے ہوئے $\frac{1}{2} du =$ اور $du = 2x dx + 2 dx = 2(x + 1) dx$ ہو گا۔ یوں مکمل $(x + 1) dx$

$$\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1) dx$$

کو ترکیب بدل سے حل کیا جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1) dx &= \int u^2 \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^2 du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} u^3 + C \quad u \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ &= \frac{1}{6} (x^2 + 2x - 3)^3 + C \quad u \text{ بدلیں} \end{aligned}$$

□

آخری قدم پر u کی قیمت واپس پر کی گئی ہے۔

مثال 5.14:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 t \cos t dt &= \int u^4 du \quad u = \sin t, du = \cos t dt \\ &= \frac{u^5}{5} + C \quad u \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ &= \frac{\sin^5 t}{5} + C \quad u \text{ بدلیں} \end{aligned}$$

□

ترکیب بدل کی کامیابی اس بات پر منحصر ہے کہ ہم ایسا بدل تلاش کر سکیں جو مشکل مکمل کو جانے پہچانے مکمل میں تبدیل کرتا ہو۔ بعض اوقات پہلے بدل کے بعد دوسرا اور تیسرا بدل بھی درکار ہوتا ہے (سوال 5.173 اور سوال 5.174 کرنے کے بعد آپ کو اس بات کی سمجھ آئے گی) یا ہم کوئی دوسرا بدل استعمال کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات کئی مختلف بدل قابل استعمال ہوں گے (اگلا مثال دیکھیں)۔

مثال 5.15: درج ذیل مکمل حل کریں۔

$$\int \frac{2z dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}}$$

حل: ہم متکمل کے مشکل ترین حصے کی سادہ صورت تلاش کرنے کی غرض سے $u = z^2 + 1$ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} & u = z^2 + 1, \, du = 2z \, dz \\
 &= \int u^{-1/3} \, du \\
 &= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\
 &= \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\
 &= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{2/3} + C & u \text{ کا بدل } z^2 + 1 \text{ پر کریں}
 \end{aligned}$$

□

مثال 5.16:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1 + y^2} \cdot 2y \, dy &= \int u^{1/2} \, du & u = 1 + y^2, \, du = 2y \, dy \\
 &= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\
 &= \frac{2}{3} (1 + y^2)^{3/2} + C & u \text{ کی جگہ } 1 + y^2 \text{ پر کریں}
 \end{aligned}$$

□

مثال 5.17:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{4t - 1} \, dt &= \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{4} \, du & u = 4t - 1, \, du = 4 \, dt, \, \frac{1}{4} \, du = dt \\
 &= \frac{1}{4} \int u^{1/2} \, du \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\
 &= \frac{1}{6} u^{3/2} + C \\
 &= \frac{1}{6} (4t - 1)^{3/2} + C & u \text{ کی جگہ } 4t - 1 \text{ پر کریں}
 \end{aligned}$$

□

تکوینیاتی تفاعل

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $\sin u$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ زنجیری قاعدہ ہمیں $\sin u$ کا تفرق دیتا ہے:

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

اسی مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sin u$ مضرب $\cos u \cdot \frac{du}{dx}$ کا الٹ تفرق ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int \left(\cos u \frac{du}{dx} \right) dx = \sin u + C$$

بائیں ہاتھ دونوں dx کو باضابطہ کاٹ کر درج ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.5) \quad \int \cos u \, du = \sin u + C$$

مساوات 5.5 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی مکمل کو $\int \cos u \, du$ روپ میں لکھ سکیں، ہم u کے لحاظ سے اس کا مکمل لیتے ہوئے $\sin u + C$ حاصل کریں گے۔

مثال 5.18:

$$\begin{aligned} \int \cos(7\theta + 5) \, d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7} \, du & u = 7\theta + 5, du = 7 \, d\theta, \frac{1}{7} \, du &= d\theta \\ &= \frac{1}{7} \int \cos u \, du \\ &= \frac{1}{7} \sin u + C & u &\text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ &= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C & u &\text{ کی جگہ } 7\theta + 5 \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

□

مساوات 5.5 کی جوڑی مساوات درج ذیل ہے جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے۔

$$(5.6) \quad \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

مثال 5.19:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x^3) dx &= \int \sin(x^3) \cdot x^2 dx \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} du \quad u = x^3, du = 3x^2 dx, \frac{1}{3} du = x^2 dx \\
&= \frac{1}{3} \int \sin u du \\
&= \frac{1}{3} (-\cos u + C') \quad u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\
&= -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C \quad \frac{C'}{3} = C \text{ اور } u = x^3
\end{aligned}$$

□

قابل تفرق تفاعل u کے لئے زنجیری قاعدہ کی مدد سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

$$(5.7) \quad \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$(5.8) \quad \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$(5.9) \quad \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$(5.10) \quad \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

ہر کلیہ میں u حقیقی متغیر کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کلیہ کو پرکھنے کے لئے دائیں ہاتھ کا u کے لحاظ تفرق حاصل کریں۔ ایسا کرنے سے بائیں ہاتھ کا متکمل حاصل ہو گا۔

مثال 5.20:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 2\theta} d\theta &= \int \sec^2 2\theta d\theta & \sec 2\theta &= \frac{1}{\cos 2\theta} \\
&= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2} du & u = 2\theta, d\theta &= \frac{1}{2} du \\
&= \frac{1}{2} \int \sec^2 u du \\
&= \frac{1}{2} \tan u + C & \text{مساوات 5.7} \\
&= \frac{1}{2} \tan 2\theta + C & u \text{ کی جگہ } 2\theta \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

مکمل کا ترکیب بدل

مذکورہ بالا تمام مثالیں درج ذیل عمومی کلیہ کی انفرادی مثالیں ہیں۔

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= \int f(u) du & u = g(x), du &= g'(x) dx \\ &= F(u) + C & F(u) & \text{ کا الٹ تفرق } f(u) \\ &= F(g(x)) + C & u & \text{ کی جگہ } g(x) \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

یہ تین اقدام مکمل کا ترکیب بدل ہیں۔ یہ ترکیب اس لئے کام کرتی ہے کہ $f(g(x)) \cdot g'(x)$ کا الٹ تفرق $F(g(x))$ ہے جہاں f کا الٹ تفرق F ہے:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(g(x)) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) & \text{زنجیری قاعدہ} \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x) & \text{چونکہ } F' = f \end{aligned}$$

ترکیب بدل پر مزید غور اگلے ابواب میں کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 5.127 تا سوال 5.138 میں دیا گیا بدل استعمال کرتے ہوئے غیر قطعی مکمل کو معیاری روپ میں لاتے ہوئے حل کریں۔

$$\begin{aligned} \int \sin 3x dx, \quad u = 3x &: 5.127 \text{ سوال} \\ -\frac{1}{3} \cos 3x + C &: \text{جواب} \end{aligned}$$

$$\int x \sin(2x^2) dx, \quad u = 2x^2 : 5.128 \text{ سوال}$$

$$\begin{aligned} \int \sec 2t \tan 2t dt, \quad u = 2t &: 5.129 \text{ سوال} \\ \frac{1}{2} \sec 2t + C &: \text{جواب} \end{aligned}$$

$$\int (1 - \cos \frac{t}{2})^2 \sin \frac{t}{2} dt, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2} : 5.130 \text{ سوال}$$

$$\begin{aligned} \int 28(7x - 2)^{-5} dx, \quad u = 7x - 2 &: 5.131 \text{ سوال} \\ -(7x - 2)^{-4} + C &: \text{جواب} \end{aligned}$$

$$\int x^3(x^4 - 1)^2 dx, \quad u = x^4 - 1 : 5.132 \text{ سوال}$$

سوال 5.133: $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} dr, \quad u = 1 - r^3$
 جواب: $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$

سوال 5.134: $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y) dy, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

سوال 5.135: $\int \sqrt{x} \sin^2(x^{3/2} - 1) dx, \quad u = x^{3/2} - 1$
 جواب: $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6} \sin(2x^{3/2} - 2) + C$

سوال 5.136: $\int \frac{1}{x^2} \cos^2(\frac{1}{x}) dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

سوال 5.137: $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta d\theta, \quad u = \cot 2\theta, \quad u = \csc 2\theta$
 جواب: $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C, \quad -\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

سوال 5.138: $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}, \quad u = 5x + 8, \quad u = \sqrt{5x+8}$

سوال 5.139 تا سوال 5.172 میں مکمل حل کریں۔

سوال 5.139: $\int \sqrt{3-2s} ds$
 جواب: $-\frac{1}{3}(3-2s)^{3/2} + C$

سوال 5.140: $\int (2x+1)^3 dx$

سوال 5.141: $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}} ds$
 جواب: $\frac{2}{5}(5s+4)^{1/2} + C$

سوال 5.142: $\int \frac{3dx}{(2-x)^2}$

سوال 5.143: $\int \theta \sqrt[4]{1-\theta^2} d\theta$
 جواب: $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{5/4} + C$

سوال 5.144: $\int 8\theta \sqrt[3]{\theta^2-1} d\theta$

سوال 5.145: $\int 3y \sqrt{7-3y^2} dy$
 جواب: $-\frac{1}{3}(7-3y^2)^{3/2} + C$

سوال 5.146: $\int \frac{4y dy}{\sqrt{2y^2+1}}$

سوال 5.147: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$
 جواب: $(-\frac{2}{1+\sqrt{x}}) + C$

سوال 5.148: $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$

سوال 5.149: $\int \cos(3z+4) dz$
 جواب: $\frac{1}{3} \sin(3z+4) + C$

سوال 5.150: $\int \sin(8z-5) dz$

سوال 5.151: $\int \sec^2(3x+2) dx$
 جواب: $\frac{1}{3} \tan(3x+2) + C$

سوال 5.152: $\int \tan^2 x \sec^2 x dx$

سوال 5.153: $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx$
 جواب: $\frac{1}{2} \sin^6(\frac{x}{3}) + C$

سوال 5.154: $\int \tan^7 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx$

سوال 5.155: $\int r^2 (\frac{r^3}{18} - 1)^5 dr$
 جواب: $(\frac{r^3}{18} - 1)^6 + C$

سوال 5.156: $\int r^4 (7 - \frac{r^5}{10})^3 dr$

سوال 5.157: $\int x^{1/2} \sin(x^{3/2} + 1) dx$
 جواب: $-\frac{2}{3} \cos(x^{3/2} + 1) + C$

سوال 5.158: $\int x^{1/3} \sin(x^{4/3} - 8) dx$

سوال 5.159: $\int \sec(v + \frac{\pi}{2}) \tan(v + \frac{\pi}{2}) dv$
 جواب: $\sec(v + \frac{\pi}{2}) + C$

سوال 5.160: $\int \csc(\frac{v-\pi}{2}) \cot(\frac{v-\pi}{2}) dv$

$$\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)} dt \quad \text{سوال 5.161}$$

$$\frac{1}{2\cos(2t+1)} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3} dt \quad \text{سوال 5.162}$$

$$\int \sqrt{\cot y} \csc^2 y dy \quad \text{سوال 5.163}$$

$$-\frac{2}{3}(\cot^3 y)^{1/2} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}} dz \quad \text{سوال 5.164}$$

$$\int \frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt \quad \text{سوال 5.165}$$

$$-\sin\left(\frac{1}{t} - 1\right) + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t} + 3) dt \quad \text{سوال 5.166}$$

$$\int \frac{1}{\theta^2} \sin \frac{1}{\theta} \cos \frac{1}{\theta} d\theta \quad \text{سوال 5.167}$$

$$-\frac{\sin^2(\frac{1}{\theta})}{2} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \sin^2 \sqrt{\theta}} d\theta \quad \text{سوال 5.168}$$

$$\int (s^3 + 2s^2 - 5s + 5)(3s^2 + 4s - 5) ds \quad \text{سوال 5.169}$$

$$\frac{(s^3 + 2s^2 - 5s + 5)^2}{2} + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int (\theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2)(\theta^3 - \theta + 2) d\theta \quad \text{سوال 5.170}$$

$$\int t^3(1 + t^4)^3 dt \quad \text{سوال 5.171}$$

$$\frac{1}{16}(1 + t^4)^4 + C \quad \text{جواب:}$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx \quad \text{سوال 5.172}$$

قدم با قدم تکمیل کی سادہ روپ کا حصول

اگر آپ مکمل کی سادہ روپ کے لئے درکار بدل نہ جانتے ہوں تب مکمل کی سادہ روپ قدم با قدم تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ مکمل کو دیکھ کر اندازے سے بدل منتخب کرتے ہوئے مکمل کو کچھ سادہ بنائیں۔ اگلے قدم میں اس کو مزید سادہ بنانے کی کوشش کریں۔ بدل منتخب کرنے کی صلاحیت اس طرز کے سوالات حل کرنے سے بڑھتی ہے۔ اگلے دو سوالات حل کرنے سے آپ اس طریقے کو سمجھ پائیں گے۔

سوال 5.173:

$$\int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^3 x)^2} dx$$

5.3. مکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق

ا. $u = \tan x$ پر کر کے $v = u^3$ اور اس کے بعد $w = 2 + v$ پر کریں۔

ب. $u = \tan^3 x$ کے بعد $v = 2 + u$ پر کریں۔

ج. $u = 2 + \tan^3 x$ پر کریں۔

جواب: (الف) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$ ، (ب) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$ ، (ج) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$

سوال 5.174:

$$\int \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} \sin(x-1) \cos(x-1) dx$$

ا. $u = x - 1$ پر کرنے کے بعد $v = \sin u$ اور اس کے بعد $w = 1 + v^2$ پر کریں۔

ب. $u = \sin(x-1)$ کے بعد $v = 1 + u^2$ پر کریں۔

ج. $u = 1 + \sin^2(x-1)$ پر کریں۔

اگلے دو تکملات حل کریں۔

سوال 5.175: $\int \frac{(2r-1) \cos \sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}} dr$

جواب: $\frac{1}{6} \sin \sqrt{3(2r-1)^2+6} + C$

سوال 5.176: $\int \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \cos^3 \sqrt{\theta}} d\theta$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال 5.177 تا سوال 5.184 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 5.177: $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2 - 1)^3$, $s(1) = 3$

جواب: $s = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)^4 - 5$

سوال 5.178: $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 8)^{-1/3}$, $y(0) = 0$

سوال 5.179: $\frac{ds}{dt} = 8 \sin^2(t + \frac{\pi}{12})$, $s(0) = 8$

جواب: $s = 4t - 2 \sin(2t + \frac{\pi}{6}) + 9$

سوال 5.180: $\frac{dr}{d\theta} = 3 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta)$, $r(0) = \frac{\pi}{8}$

سوال 5.181: $\frac{d^2s}{dt^2} = -4 \sin(2t - \frac{\pi}{2})$, $s'(0) = 100$, $s(0) = 0$
 جواب: $s = \sin(2t - \frac{\pi}{2}) + 100t + 1$

سوال 5.182: $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \sec^2 2x \tan 2x$, $y'(0) = 4$, $y(0) = -1$

سوال 5.183: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی رفتار تمام t کے لئے $v = \frac{ds}{dt} = 6 \sin 2t \text{ m s}^{-1}$ ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ ہو تب $t = \frac{\pi}{2}$ سینڈ پر s کیا ہو گا؟
 جواب: 6 m

سوال 5.184: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی اسراع تمام t کے لئے $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \pi^2 \cos \pi t \text{ m s}^{-2}$ ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 8 \text{ m s}^{-1}$ ہوں تب $t = 1$ سینڈ پر s کیا ہو گا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.185: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ہم $2 \sin x \cos x$ کا تکمل تین مختلف طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

ا.

$$\begin{aligned} \int 2 \sin x \cos x \, dx &= \int 2u \, du & u &= \sin x \\ &= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1 \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} \int 2 \sin x \cos x \, dx &= \int -2u \, du & u &= \cos x \\ &= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2 \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned} \int 2 \sin x \cos x \, dx &= \int \sin 2x \, dx & 2 \sin x \cos x &= \sin 2x \\ &= -\frac{\cos 2x}{2} + C_3 \end{aligned}$$

کیا تینوں طریقے درست ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5.186: $u = \tan x$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

جبکہ $u = \sec x$ پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

کیا دونوں مکمل درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

5.4 اندازہ بذریعہ متنہائی مجموعہ

اس حصہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح عملی سوالات ہمیں متنہائی مجموعہ¹³ سے تخمینہ کے حصول تک لے کر جاتے ہیں۔

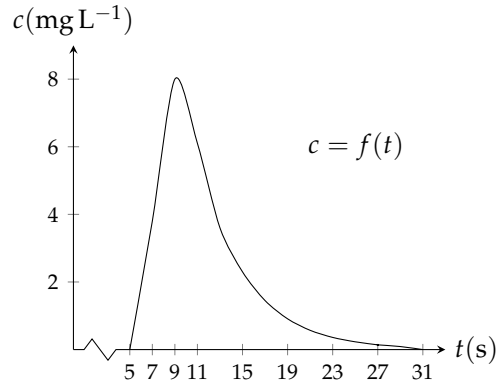
رقبہ اور اخراج قلب

فی منٹ چنے لڑ خون آپ کا قلب خارج کرتا ہے اس کو اخراج قلب کہتے ہیں۔ سکون کی حالت میں کسی شخص کا اخراج قلب 5 یا 6 لٹر فی منٹ ہو سکتا ہے۔ سخت ورزش کے دوران یہ شرح 30 لٹر فی منٹ ہو سکتی ہے۔ بیماری بھی اس شرح کو بہت زیادہ متاثر کر سکتی ہے۔

اخراج قلب کی پیمائش کے لئے طبیب صفحہ 321 پر سوال 3.415 میں دیا گیا طریقہ اختیار کرنے کی بجائے رقت رنگ کی ترکیب استعمال کر سکتا ہے۔ رقت رنگ کی ترکیب میں قلب کے قریب مرکزی داخلی رگ میں 5 mg سے 10 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا جاتا ہے جو قلب کے دائیں حصے میں داخل ہو کر کیچا سے ہوتے ہوئے قلب کے بائیں حصے سے مرکزی شریان میں خارج کیا جاتا ہے جہاں ہر چند سیکنڈ بعد گزرتے ہوئے خون میں رنگ کی کثافت ناپی جاتی ہے۔ جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک تندرست شخص جو آرام کر رہا ہو کے نتائج دکھائے گئے ہیں جس کو 5.6 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا گیا ہے۔ خون کی دوبارہ گردش کو مد نظر رکھتے ہوئے نتائج پیش کیے گئے ہیں۔

جدول 5.3: رقت رنگ کے ترکیب کے نتائج۔

لحمہ	کثافت رنگ	لحمہ	کثافت رنگ
5	0.0	19	0.91
7	3.8	21	0.57
9	8.0	23	0.36
11	6.1	25	0.23
13	3.6	27	0.14
15	2.3	29	0.09
17	1.45	31	0.00



شکل 5.16: جدول میں دی گئی رنگ کی کثافت بالمقابل وقت کو ترسیم کیا گیا ہے۔

مریض کے قلب کا اخراج معلوم کرنے کی خاطر ہم رنگ کی مقدار کو شکل 5.16 میں دیے کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبے سے تقسیم کر کے 60 سے ضرب دیتے ہیں۔

$$(5.11) \quad \text{رنگ کی مقدار} = \frac{\text{اخراج قلب}}{\text{منحنی کے نیچے رقبہ}} \times 60$$

اس مساوات میں مختلف مقداروں کی اکائیوں پر نظر ڈال کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات درست جواب دے گی۔ رنگ کی مقدار mg میں ہے جبکہ منحنی کے نیچے رقبہ کی اکائی $\text{mg L}^{-1} \times \text{s}$ ہوگی لہذا درج بالا مساوات خون کا اخراج لٹرن فی منٹ میں دے گا۔

$$\frac{\text{mg}}{\text{mg} \cdot \text{L}} \cdot \frac{\text{سیکنڈ}}{\text{منٹ}} = \frac{\text{لٹر}}{\text{منٹ}}$$

درج ذیل مثال میں ہم شکل 5.16 میں دیے منحنی کے نیچے رقبہ کی تخمینی قیمت تلاش کرتے ہوئے مریض کا اخراج قلب معلوم کرتے ہیں۔

مثال 5.21: جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک مریض کے ترکیب رقت رنگ کے نتائج دیے گئے ہیں۔ اس کا اخراج قلب تلاش کریں۔

حل: رنگ کی مقدار 5.6 mg ہے لہذا ہمیں صرف منحنی کے نیچے رقبہ چاہیے۔ ہم رقبہ تلاش کرنے کا ایسا کوئی کلیہ نہیں جانتے ہیں جو اس قسم کی ناہموار منحنی کے لئے قابل استعمال ہو۔ البتہ ہم منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیلی حصوں میں تقسیم کر کے تمام مستطیلوں کے رقبے جمع کرتے ہوئے رقبے کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں (شکل 5.17)۔ ہر مستطیل کا کچھ حصہ اصل رقبے سے کم رقبہ گھیرتا ہے جبکہ اس کا باقی حصہ اصل رقبے سے زیادہ رقبہ گھیرتا ہے۔ ہم نے تمام مستطیلوں کی چوڑائی 2 منتخب کی ہے۔ ایسا کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ ہر مستطیل کی چوڑائی مختلف منتخب کی جاسکتی ہے۔ ہر مستطیل کا قد مستطیل کے چوڑائی کے دوران تفاعل کی تقریباً اوسط قیمت ہوگی۔ ہم تمام مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

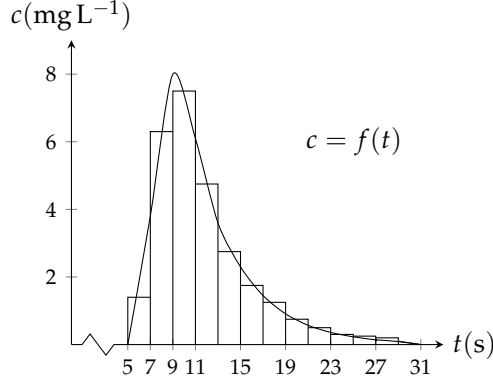
$$\begin{aligned} \text{منحنی کے نیچے رقبہ} &\approx f(6) \cdot 2 + f(8) \cdot 2 + f(10) \cdot 2 + \dots + f(28) \cdot 2 + f(30) \cdot 2 \\ &\approx (1.4)(2) + (6.3)(2) + (7.5)(2) + \dots + (0.1)(2) + (0.045)(2) \\ &\approx (28.8)(2) = 57.6 \text{ mg s L}^{-1} \end{aligned}$$

رنگ کی مقدار کو اس رقبے سے تقسیم کرتے ہوئے 60 سے ضرب دینے سے اخراج قلب حاصل ہوگا۔

$$\text{اخراج قلب} \approx \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{رقبہ}} \times 60 = \frac{5.6}{57.6} \times 60 \approx 5.8 \text{ L min}^{-1}$$

□

مریض کا اخراج قلب تقریباً 5.8 L min^{-1} ہے۔



شکل 5.17: منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیل رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

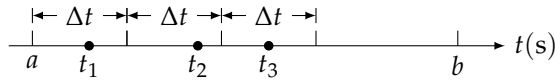
طے شدہ فاصلہ

فرض کریں ہمیں ایک گاڑی کی رفتار تفاعل $v = \frac{ds}{dt} = f(t) \text{ m s}^{-1}$ معلوم ہے۔ ہم جانا چاہتے ہیں کہ وقفہ $a \leq t \leq b$ یہ گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اگر ہمیں f کا الٹ تفرق F معلوم ہو تب تب ہم گاڑی کا مقام تفاعل $s = F(t) + C$ تلاش کر سکتے ہیں جس کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی دورانیے میں طے شدہ فاصل تلاش کیا جاسکتا ہے (سوال 5.125)۔

رفتار تفاعل $v = f(t)$ کا الٹ تفرق نہ جانتے ہوئے طے شدہ فاصلے کو مجموعہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کو چھوٹے چھوٹے ذیلی وقفوں میں یوں تقسیم کرتے ہیں کہ ہر ذیلی وقفے میں رفتار کی قیمت تقریباً غیر متغیر ہو۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دوران فاصلہ درج ذیل کلیہ سے اخذ کرتے ہوئے

$$\text{فاصلہ} = \text{وقت} \times \text{رفتار} = f(t) \cdot \Delta t$$

وقفہ $[a, b]$ کے تمام ذیلی وقفوں میں طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ لیتے ہوئے کل فاصلہ دریافت کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کو درج ذیل ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جہاں ہر ذیلی وقفہ Δt کے برابر ہے۔



پہلے ذیلی وقفے پر t_1 ایک نقطہ ہے۔ اگر یہ ذیلی وقفہ نہایت چھوٹا ہو تب اس دوران رفتار میں تبدیلی قابل نظر انداز ہوگی۔ یوں اس دوران گاڑی تقریباً $f(t_1)\Delta t$ فاصلہ طے کرے گی۔ اگر t_2 دوسرے ذیلی وقفے میں ایک نقطہ ہو تب اس دوران گاڑی $f(t_2)\Delta t$ فاصلہ طے کرے گی۔ اسی طرح باقی تمام ذیلی وقفوں کے دوران طے شدہ فاصل بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں حاصل تمام ذیلی وقفوں کے دوران

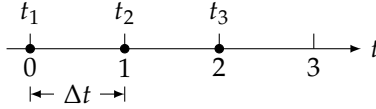
طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ تقریباً $[a, b]$ کے دوران کل طے فاصلہ D ہو گا۔ اگر ہم n عدد ذیلی وقفے میں تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t \quad (5.12)$$

آئیں مثال 5.9 کے نتائج پر اس کلیہ کو استعمال کریں۔ ایک گولا کو سیدھا اوپر رخ پھینکا گیا۔ لمحہ t پر اس کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ تھی۔ ابتدائی 3 سیکنڈوں میں گولا 3 m کی ابتدائی بلندی سے 438.9 m کی بلندی تک پہنچا۔ یوں ابتدائی تین سیکنڈوں میں گولے نے 438.9 m فاصلہ طے کیا۔

مثال 5.22: سیدھا اوپر رخ پھینکے گئے گولے کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ ہے۔ مجموعہ کا ترکیب استعمال کرتے ہوئے ابتدائی 3 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ کا تخمینہ لگائیں۔ بالکل ٹھیک جواب 435.9 m ہے۔

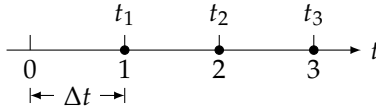
حل: ہم ذیلی وقفوں کی مختلف تعداد اور ذیلی وقفوں میں مختلف نقطوں کی انتخاب کے لئے اس مسئلے کو حل کرتے ہیں۔ ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہوگی۔



f کی قیمت 0، 1 اور 2 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t && \text{(مساوات 5.12)} \\ &\approx [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &\approx 450.6 \end{aligned}$$

ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہوگی۔



جدول 5.4: ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہوتا ہے (مثال 5.22)۔

ذیلی وقفوں کی تعداد	ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی	بائیں سر نقطہ مجموعہ	دائیں سر نقطہ مجموعہ
3	1	450.6	421.2
6	0.5	443.25	428.55
12	0.25	439.58	432.23
24	0.125	437.74	434.06
48	0.0625	436.82	434.98
96	0.03125	436.36	435.44
192	0.015625	436.13	435.67

f کی قیمت 1، 2 اور 3 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t \quad (\text{مساوات 5.12})$$

$$\approx [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1)$$

$$\approx 421.2$$

کل 6 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے پہلے بائیں اور بعد میں دائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\frac{1}{2}$ ہو گی۔ نتائج درج ذیل ہیں۔

$$D \approx 443.25 \quad \text{بائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں}$$

$$D \approx 428.55 \quad \text{دائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 6 ذیلی وقفے لیتے ہوئے بہتر جواب حاصل ہوتے ہیں۔ مزید زیادہ ذیلی وقفے لینے سے جواب میں مزید بہتری پیدا ہوتی ہے۔ جدول 5.4 میں چند نتائج دکھائے گئے ہیں۔

جدول 5.4 سے ہم دیکھتے ہیں کہ بائیں سر نقطہ مجموعہ اصل جواب تک اوپر سے پہنچتا ہے جبکہ دائیں سر نقطہ مجموعہ اصل جواب تک نیچے سے پہنچتا ہے۔ حقیقت میں جواب ان دونوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جدول میں دیا آخری مجموعہ اور اصل جواب میں فرق درج ذیل ہے۔

$$\text{فی صد خلل} = \frac{435.9 - 435.67}{435.9} \times 100 = 0.05\%$$

□

آپ مثال 5.21 اور مثال 5.22 میں مشابہت دیکھ سکتے ہیں۔ دونوں میں تفاعل f ایک بند وقفہ میں معین ہے جس کی وقفوں پر قیمت کو وقفہ سے ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ ہم اسی ترکیب کو حجم کی تلاش کے لئے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

جسم

درج ذیل دو مثالوں میں ہم تنہائی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کرتے ہیں۔

مثال 5.23: ایک ٹھوس جسم $x = \pm 2$ ، $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$ اور $z = \pm \sqrt{9 - x^2}$ سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کریں (شکل 5.18-الف)۔

حل: ہم x محور پر وقفہ $[-2, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطے پر جسم کا رقبہ عمودی تراش ایک چکور ہو گا (شکل 5.18-ب) جہاں ذیلی وقفوں کے بائیں سر $x = 1, 0, -1, -2$ پر پائے جاتے ہیں۔ ہم ایسے ہر چکور پر فرضی 1 موٹائی کا تختہ بناتے ہیں (شکل 5.18-ج)۔ ان تمام تختوں کے حجم کا مجموعہ اندازاً اصل جسم کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

ایک تختے کا حجم ہم $H = Sh$ سے اخذ کر سکتے ہیں جہاں H ، S اور h بالترتیب تختے کا حجم، رقبہ عمودی تراش اور موٹائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ x پر تختے کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = (2\sqrt{9 - x^2})^2 = 4(9 - x^2)$ ہے جبکہ تختے کی موٹائی 1 ہے لہذا چار تختوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H_4 &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + S(x_4)\Delta x \\ &= 4(9 - x_1^2)(1) + 4(9 - x_2^2)(1) + 4(9 - x_3^2)(1) + 4(9 - x_4^2)(1) \\ &= 4[(9 - (-2)^2) + (9 - (-1)^2) + (9 - (0)^2) + (9 - (1)^2)] \\ &= 4[(9 - 4) + (9 - 1) + (9 - 0) + (9 - 1)] \\ &= 4[36 - 6] = 120 \end{aligned}$$

یہ جواب جسم کے اصل حجم $H = \frac{368}{3} \approx 122.67$ کے بہت نزدیک ہے (سوال 5.431)۔ جواب میں فی صد غلط درج ذیل ہے۔

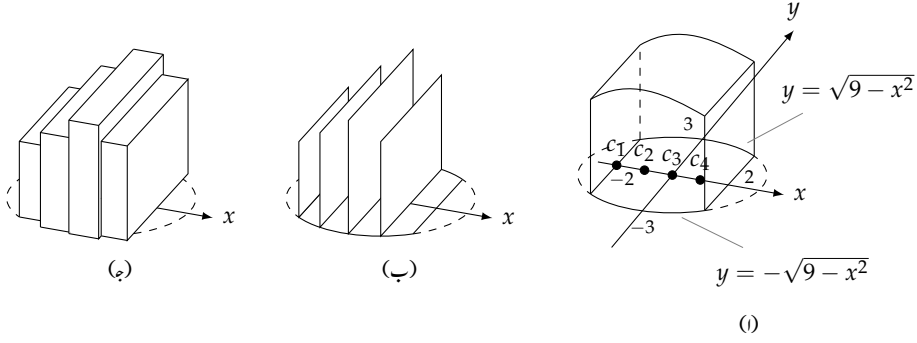
$$= \frac{|H - H_4|}{H} = \frac{\left| \frac{368}{3} - 120 \right|}{\frac{368}{3}} \approx 2.2\%$$

□

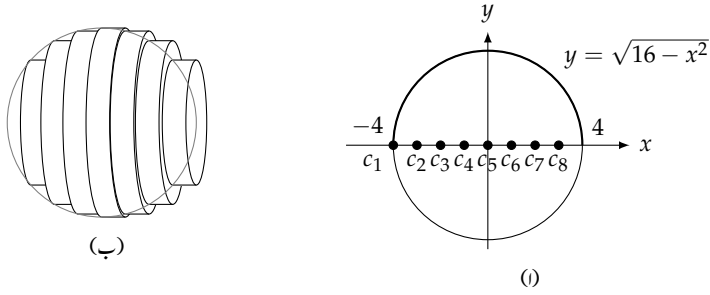
وقفہ $[-2, 2]$ پر ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے تختوں کی موٹائی کم ہو گی جبکہ حاصل حجم زیادہ درست ہو گا۔

مثال 5.24: ایک کرہ کا رداس 4 ہے (شکل 5.19-ا)۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم تقابل $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ کو x محور کے گرد گما کر کرہ کی سطح حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم وقفہ $-4 \leq x \leq 4$ کو آٹھ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطے c_1 تا c_7 پر پائے جاتے ہیں (شکل 5.19-ا)۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر رقبہ کا پیلن جس کی لمبائی 1 ہو



شکل 5.18: ٹھوس جسم برائے مثال 5.23



شکل 5.19: نصف دائرہ $y = \sqrt{16 - x^2}$ کو x محور کے گرد گما کر کرہ حاصل کیا جاتا ہے (مثال 5.24)۔

لیتے ہیں (شکل 5.24-ب)۔ ان تمام بیلیوں کے حجم کا مجموعہ تقریباً کرہ کے حجم کے برابر ہو گا۔ ہر ایک بیلیں کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا جہاں بیلیں کا رداس r اور اس کی لمبائی h ہے۔ آٹھوں بیلیوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H_8 &= \pi[f(x_1)]^2 \Delta x + \pi[f(x_2)]^2 \Delta x + \pi[f(x_3)]^2 \Delta x + \cdots + \pi[f(x_8)]^2 \Delta x \\ &= \pi \left[\sqrt{16 - x_1^2} \right]^2 \Delta x + \pi \left[\sqrt{16 - x_2^2} \right]^2 \Delta x + \pi \left[\sqrt{16 - x_3^2} \right]^2 \Delta x + \\ &\quad \cdots + \pi \left[\sqrt{16 - x_8^2} \right]^2 \Delta x \\ &= \pi[(16 - (-4)^2) + (16 - (-3)^2) + (16 - (-2)^2) + \cdots + (16 - (3)^2)] \\ &= \pi[0 + 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7] \\ &= 84\pi \end{aligned}$$

کرہ کا اصل حجم درج ذیل ہے (سوال 5.432)۔

$$H = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (4)^3 = \frac{256\pi}{3}$$

تنہائی مجموعہ سے حاصل حجم میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} &= \frac{|H - H_8|}{H} \times 100 = \frac{\frac{256\pi}{3} - 84\pi}{\frac{256\pi}{3}} \times 100 \\ &= \frac{256 - 252}{256} = \frac{1}{64} \approx 1.6\% \end{aligned}$$

□

غیر منفی تفاعل کی اوسط قیمت

تنہائی تعداد قیمتوں کی اوسط حاصل کرنے کی خاطر ہم تمام قیمتوں کا مجموعہ لے کر قیمتوں کی تعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔ اب لا تنہائی تعداد کی قیمتوں کے اوسط سے کیا مراد ہو گا؟ مثال کے طور پر وقفہ $[-1, 1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی اوسط قیمت سے کیا مراد ہے؟ ایسے "استمراری" اوسط کا مطلب سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ ہم $x = -1$ تا $x = 1$ کے بیچ بلا منصوبہ x کی مختلف قیمتوں پر تفاعل کی نمونی قیمتوں کے مربع کا اوسط حاصل کرتے ہیں۔ نمونی جسامت بڑھانے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ اوسط کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گا۔ اس قیمت کو ہم وقفہ $[-1, 1]$ پر تفاعل کا اوسط¹⁴ کہتے ہیں۔

مثال 5.25: وقفہ $[-1, 1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم وقفہ $[-1, 1]$ کو 6 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 5.20)۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{1}{3}$ ہو گی۔

اب تک کی مثالوں میں متناہی مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم ہر ذیلی وقفہ کے سر پر تفاعل کی قیمت لیتے رہے ہیں۔ اس سے بہتر نتائج اس صورت حاصل ہوتے ہیں جب تفاعل کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کی وسط میں لیا جائے۔ چھ ذیلی وقفوں کی وسط میں تفاعل کی قیمتوں کے اوسط کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{اوسط قیمت} &\approx \frac{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2}{6} \\ &\approx \frac{1}{6} \cdot \frac{25 + 9 + 1 + 1 + 9 + 25}{36} = \frac{70}{216} \approx 0.324 \end{aligned}$$

اس تفاعل کا اصل اوسط $\frac{1}{3}$ ہے۔

درج ذیل پر غور کریں۔

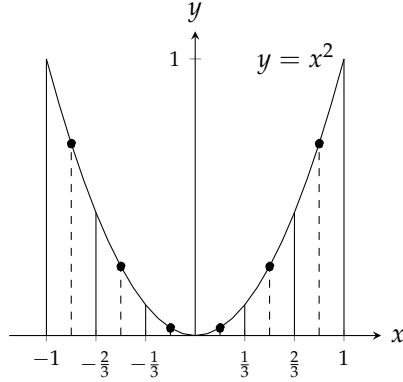
$$\begin{aligned} &\frac{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2}{6} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{[-1, 1] \text{ لمبائی}} \cdot \left[f\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + f\left(-\frac{3}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + \cdots + f\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{[-1, 1] \text{ لمبائی}} \cdot [\text{تفاعل کی قیمتیں ضرب ذیلی وقفہ کی لمبائی کا مجموعہ}] \end{aligned}$$

□ اس بار بھی اندازاً قیمت حاصل کرنے کی خاطر تفاعل کی قیمت کو ذیلی وقفہ کی لمبائی سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ حاصل کیا گیا ہے۔

نتیجہ

اس حصہ میں ہم نے تفاعل کی قیمت کو ذیلی وقفوں کی لمبائی سے ضرب دے کر مجموعہ حاصل کرنے سے درکار قیمتوں کا اندازہ لگایا گیا۔

ہم نے مثال 5.22 میں دیکھا کہ ذیلی وقفوں کی لمبائی کم کرنے سے اصل جواب، جس کو ہم الٹ تفرق سے حاصل کر چکے تھے، کے زیادہ قریب نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ کیا ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم کرنے سے حاصل نتیجہ کی تحدیدی قیمت اصل جواب تک پہنچتی؟ کیا اس مثال میں مجموعہ اور الٹ تفرق کا تعلق اتفاقی ہے؟ کیا ہم مثال 5.21 میں رقبہ، مثال 5.23 اور مثال 5.24 میں حجم اور مثال 5.25 میں اوسط قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں؟ جیسا ہم دیکھیں گے، ان سوالات کے جوابات ہیں "جی ہاں ایسا کیا جاسکتا ہے"، "نہیں یہ اتفاق نہیں ہے" اور "جی ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں۔"



شکل 5.20: تقابل کا اوسط (مثال 5.25)۔

سوالات

اخراج قلب

سوال 5.187: ایک مریض کے اخراج قلب کو رنگ کی ترکیب سے ناپا گیا۔ پیمائش کے نتائج شکل 5.21 میں دیے گئے ہیں جہاں خون کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار 5 mg تھی۔ کثافت رنگ کی مٹخنی کے نیچے رقبہ کو مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر حاصل کریں۔ اخراج قلب کتنا ہے؟ (مثال 5.21 دیکھیں)۔
جواب: $\approx 44.8, 6.7 \text{ L min}^{-1}$

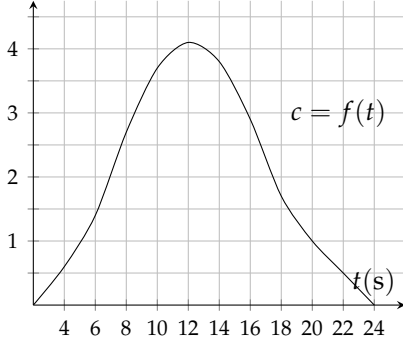
سوال 5.188: ایک مریض کا اخراج قلب جاننے کی خاطر ترکیب رنگ استعمال کیا جاتا ہے۔ کی گئی پیمائش کو جدول 5.5 میں پیش کیا گیا ہے جہاں خوب کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار 10 mg ہے۔ پیمائش کو ہموار مٹخنی سے ترسیم کریں۔ رقبے کا اندازہ مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر تلاش کریں۔ اخراج قلب دریافت کریں۔

فاصلہ

سوال 5.189: ایک ریل گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت شکل 5.22-1 میں دی گئی ہے۔ دس سیکنڈ وقفے کو 10 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ کے (i) بائیں سر، (ب) دائیں سر پر قیمتیں لیتے ہوئے طے فاصل تلاش کریں۔
جواب: (i) 87 m، (ب) 86m

سوال 5.190: نہر کے پانی میں ایک بوتل کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.22-ب میں دیا گیا ہے۔ ایک گھنٹہ کے وقفہ کو 12 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں۔ ان ذیلی وقفوں کے (i) بائیں سر قیمتیں، (ب) دائیں سر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے وہ فاصل تلاش کریں جو بوتل اس گھنٹہ میں طے کرتا ہے۔

$c(\text{mg L}^{-1})$



لحہ	ت	کثافت رنگ
0	2	
0.6	4	
1.4	6	
2.7	8	
3.7	10	
4.1	12	
3.8	14	
2.9	16	
1.7	18	
1.0	20	
0.5	22	
0	24	

شکل 5.21: اخراج قلب جانے کے لئے کثافت رنگ بالمقابل وقت کی پیمائش (سوال 5.187)۔

جدول 5.5: وقت بالمقابل کثافت رنگ برائے سوال 5.188۔

لحہ	کثافت رنگ	لحہ	کثافت رنگ
t	c	t	c
16	7.9	0	0
18	7.8	2	0
20	6.1	4	0.1
22	4.7	6	0.6
24	3.5	8	2.0
26	2.1	10	4.2
28	0.7	12	6.3
30	0	14	7.5

لفحہ	لفحہ	لفحہ	لفحہ
$v(\text{m s}^{-1})$	$t(\text{min})$	$v(\text{m s}^{-1})$	$t(\text{min})$
1.2	35	1	0
1.0	40	1.2	5
1.8	45	1.7	10
1.5	50	2.0	15
1.2	55	1.8	20
0	60	1.6	25
		1.4	30

(ب) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 5.190

لفحہ	لفحہ	لفحہ	لفحہ
$v(\text{m s}^{-1})$	$t(\text{s})$	$v(\text{m s}^{-1})$	$t(\text{s})$
11	6	0	0
6	7	12	1
2	8	22	2
6	9	10	3
0	10	5	4
		13	5

(i) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 5.189

شکل 5.22: رفتار بالمقابل وقت کی پیمائشی قیمتیں۔

لفحہ	لفحہ	لفحہ	لفحہ
km h^{-1}	گھنٹے	km h^{-1}	گھنٹے
116	0.006	0	0
125	0.007	40	0.001
132	0.008	62	0.002
137	0.009	82	0.003
142	0.010	96	0.004
		108	0.005

(ب) برائے سوال 5.192

لفحہ	لفحہ	لفحہ	لفحہ
km h^{-1}	سیکنڈ	km h^{-1}	سیکنڈ
15	70	0	0
22	80	44	10
35	90	15	20
44	100	35	30
30	110	30	40
35	120	44	50
		35	60

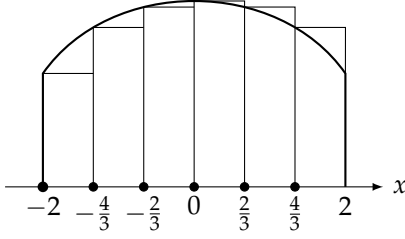
(i) برائے سوال 5.191

شکل 5.23: گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت۔

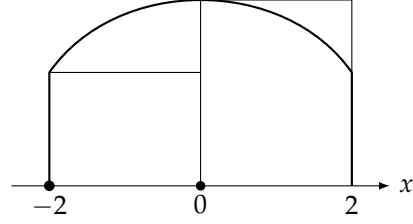
سوال 5.191: ایک گاڑی جس کا رفتار پیماکار آمد لیکن مسافت پیمایہ غیر کارآمد ہے میں آپ سفر کر رہے ہیں۔ آپ ہر 10 سیکنڈ اس کی رفتار قلم بند کرتے ہیں۔ ان نتائج کو شکل 5.23-1 میں دکھایا گیا ہے۔ سڑک کی لمبائی کی اندازاً قیمت کو (i) بائیں سرنقطی قیمتیں، (ب) دائیں سرنقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: (i) 969 m، (ب) 1067 m

سوال 5.192: ساکن حال سے 36 سیکنڈ میں ایک گاڑی 142 km h^{-1} کی رفتار تک پہنچتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔ (i) مستطیل استعمال کرتے ہوئے ان 36 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ب) گاڑی تقریباً کتنی دیر میں آدھے فاصلہ تک پہنچی؟ اس لمبے پر گاڑی کی رفتار کتنی تھی؟

سوال 5.193: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 2 چکور بلینوں سے کرتے ہیں (شکل 5.24-1)۔ (i) حجم H_2 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_2|$ کی H کے لحاظ سے فی صد قیمت حاصل کریں۔



(ب) جسم کے حجم کو 6 چکور بیلیوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔



(ا) جسم کے حجم کو 2 چکور بیلیوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

شکل 5.24: حجم کے ذیلی وقفے (سوال 5.193 اور سوال 5.194)

جواب: (ا) 112، (ب) 9%

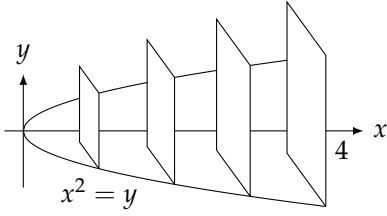
سوال 5.194: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 6 چکور بیلیوں سے کرتے ہیں (شکل 5.24-ب)۔ (ا) حجم H_6 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_6|$ کو H کی فی صد کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال 5.195: فرض کریں ہم مثال 5.24 میں کرہ کا حجم حاصل کرنے کے لئے وقفہ $-4 \leq x \leq 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلیں لیتے ہیں۔ (بائیں ترین بیلیں کا رقبہ عمودی تراش صفر ہو گا۔) (ا) ان بیلیوں کا مجموعی حجم H_4 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_4|$ کو H کی فی صد لکھیں؟
جواب: (ا) 80π ، (ب) 6%

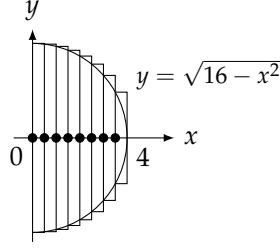
سوال 5.196: ایک کرہ جس کا رداس 5 ہے کا حجم درکار ہے۔ آپ اس کے قطر کو پانچ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ 2 کے برابر ہو گا۔ آپ ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطوں پر قطر کے عمودی کرہ کو کاٹ کر رقبہ عمودی تراش حاصل کرتے ہیں۔ آپ اتنی ہی رقبہ عمودی تراش والے ایسے بیلیں لیتے ہیں جن کی موٹائی 2 ہو۔ ان بیلیوں کے مجموعی حجم سے آپ کرہ کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔ (ا) بیلیوں کا مجموعی حجم H_5 کیا ہو گا؟ (ب) خلل $|H - H_5|$ کو H کی فی صد لکھیں۔

سوال 5.197: رداس 4 کے کرہ کا حجم درکار ہے۔ اس کا محور تشاکل x محور پر وقفہ $[0, 4]$ ہے۔ آپ اس وقفہ کو 8 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلیں جس کی موٹائی ذیلی وقفہ کی لمبائی جتنی ہو کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم تلاش کیا جاتا ہے (شکل 5.25)۔ (ا) مجموعی حجم H_8 تلاش کریں (جو نصف کرہ کا حجم ہو گا)۔ (ب) کیا H_8 نصف کرہ کے حجم H سے کم یا زیادہ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_8|$ کو H کی فی صد لکھیں۔
جواب: (ا) $\frac{93\pi}{2}$ زیادہ اندازہ، (ب) 9%

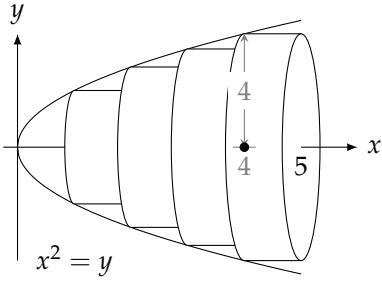
سوال 5.198: گزشتہ سوال (سوال 5.197) میں ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطے پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلیں لیتے ہوئے دوبارہ جوابات حاصل کریں۔



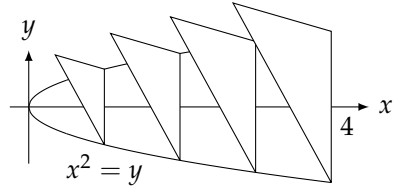
شکل 5.26: برائے سوال 5.199



شکل 5.25: نصف کرہ (سوال 5.197)



شکل 5.28: راکٹ کی نوک (سوال 5.203)



شکل 5.27: برائے سوال 5.200

سوال 5.199: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل

نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش چکور ہے جس کے کنارے قطع مکانی $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کو مس کرتے ہیں (شکل 5.26)۔ (i) وقفہ $0 \leq x \leq 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے دائیں سر نقطہ رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 32$ ہے۔ خلل $|H - H_4|$ کو H کے لحاظ سے فی صد کی صورت میں لکھیں۔ (ج) اس مسئلے کو دوبارہ H_8 کے لئے حل کریں۔

جواب: (i) 40، (ب) 25 %، (ج) 36، 12.5 %

سوال 5.200: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل

نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش متساوی الاضلاع شکل کا ہے جس کے قاعدہ قطع مکانی $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کو مس کرتا ہے (شکل 5.27)۔ (i) وقفہ $0 \leq x \leq 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے بائیں سر نقطہ رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 8\sqrt{3}$ ہے۔ H کے لحاظ سے خلل $|H - H_4|$ کی فی صد قیمت کتنی ہے؟ (ج) سوال کو دوبارہ H_8 کے لئے حل کریں۔

جدول 5.6: تالاب میں پانی کی گہرائی (سوال 5.202)

مقام	گہرائی	مقام	گہرائی
x	h	x	h
0	2.0	6	3.83
1	2.73	7	3.97
2	3.03	8	4.1
3	3.3	9	4.23
4	3.5	10	4.33
5	3.67		

سوال 5.201: ایک پانی کی ٹینکی نصف کروی پیالے کی مانند ہے جس کا رداس 8 m ہے۔ اس میں پانی کی گہرائی 4 m ہے۔ (i) پانی کی گہرائی کو آٹھ ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی چلی سطح کا رقبہ عمودی تراش والے بیلین استعمال کرتے ہوئے H_8 تلاش کریں۔ (ب) اصل حجم جو آپ سوال 5.433 میں تلاش کریں گے $H = \frac{320\pi}{3} \text{ m}^3$ ہے۔ H کے لحاظ سے خلل $|H - H_8|$ کی فی صد قیمت تلاش کریں۔
جواب: (i) 118.5π یا تقریباً 372.28 m^3 ، (ب) تقریباً 11 % خلل

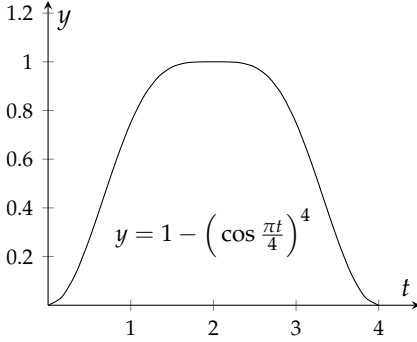
سوال 5.202: تیراکی کے ایک مستطیل تالاب کی لمبائی 10 m اور چوڑائی 6 m ہے۔ تالاب کے ایک سرے سے دوسرے سر تک 1 m وقفوں پر پانی کی گہرائی (میٹر) جدول 5.6 میں دی گئی ہے۔ (i) h کی بائیں سر نقطہ قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تالاب میں پانی کا حجم تلاش کریں۔ (ب) دائیں سر نقطہ قیمت استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال 5.203: منحنی $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 5$ کو y محور کے گرد گمانے سے ایک راکٹ کی قطع مکانی مجسمہ نوک حاصل ہوتی ہے جہاں x کی پینائٹس میٹروں میں ہے (شکل 5.28)۔ اس نوک کا حجم معلوم کرنے کی خاطر ہم $[0, 5]$ کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر حصے کی لمبائی 1 ہوگی۔ ہر حصہ کے بائیں سر نقطہ پر x محور کے قائمہ جسم کو کانا جاتا ہے اور ان نقطوں پر جسم کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلین استعمال کرتے ہوئے نوک کا حجم دریافت کیا جاتا ہے۔ بیلینوں کی لمبائی 1 ہوگی۔ (i) مجموعہ H_5 تلاش کریں۔ کیا H_5 کی قیمت H سے کم یا زیادہ ہوگی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) نوک کا اصل حجم جو آپ سوال 5.434 میں تلاش کریں گے $H = 2\pi \text{ m}^3$ ہے۔ خلل $|H - H_5|$ کو H کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔
جواب: (i) 1.6π ، (ب) 20 %

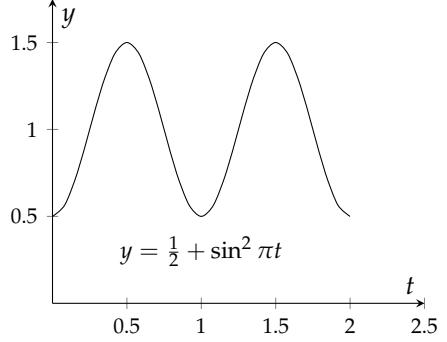
سوال 5.204: ہر ذیلی وقفے کے دائیں سر نقطہ رقبہ عمودی تراش استعمال کرتے ہوئے سوال 5.203 کو دوبارہ حل کریں۔

تفاعل کی اوسط قیمت

سوال 5.205 تا سوال 5.208 میں تفاعل f کی اوسط قیمت درکار ہے۔ دیے گئے وقفہ کو چار ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی وسط میں تفاعل کی قیمت استعمال کرتے ہوئے قتنا ہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے اوسط حاصل کریں۔



شکل 5.30: ترسیم برائے سوال 5.208



شکل 5.29: ترسیم برائے سوال 5.207

سوال 5.205: $f(x) = x^3$, $[0, 1]$
جواب: $\frac{31}{16}$

سوال 5.206: $f(x) = \frac{1}{x}$, $[1, 9]$

سوال 5.207: $f(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \pi t$, $[0, 2]$
جواب: 1

سوال 5.208: $f(t) = 1 - (\cos \frac{\pi t}{4})^4$, $[0, 4]$

رفتار اور فاصلہ

سوال 5.209: ایک جسم کو جہاز سے گرنے دیا جاتا ہے۔ جسم کی رفتار مسلسل بڑھتی ہے لیکن ہوائی رگڑ کی بنا گرنے کی اسراع بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ وقت بالتقابل جسم کی اسراع کو درج ذیل جدول میں پیش کیا گیا ہے۔

$t(s)$	0	1	2	3	4	5
$a(m s^{-2})$	9.8	5.92	3.59	2.18	1.32	0.80

(i) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی چلی حد تلاش کریں۔ (ج) لمحہ $t = 3$ میں گرنے والے فاصلہ کی بالائی حد تلاش کریں۔

جواب: (i) $22.81 m s^{-1}$ ، (ب) $13.81 m s^{-1}$ ، (ج) $35.175 m$

سوال 5.210: ایک جسم کو سمندری سطح سے سیدھا اوپر $125 m s^{-1}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ اس جسم پر صفر ثقلی قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ (i) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی چلی حد تلاش کریں۔ ثقلی اسراع کو $9.8 m s^{-2}$ لیں۔

آلودگی پر قابو پانا

سوال 5.211: تیل کے جہاز سے سمندر میں تیل رس رہا ہے۔ رستا تیل کی مقدار (لٹر فی گھنٹہ) بالمتقابل وقت (گھنٹہ) کو نیچے جدول میں دیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صورت حال بتدریج خراب ہو رہی ہے۔

گھنٹہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Lh^{-1}	50	70	97	136	190	265	369	516	720

(i) ان پانچ گھنٹوں میں خارج تیل کی مقدار کی بالائی اور نیچی حد تلاش کریں۔ (ب) آٹھ گھنٹوں میں خارج تیل کی بالائی اور نیچی حد تلاش کریں۔
(ج) ابتدائی آٹھ گھنٹوں بعد تیل مسلسل $720 Lh^{-1}$ سے رستا ہے۔ اگر جہاز میں ابتدائی طور کل 25 000 L تیل ہو تب تمام تیل خارج ہونے کے لئے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنا وقت درکار ہو گا۔
جواب: (i) 758 L ، 543 L ، (ب) 2363 L ، 1693 L ، (ج) 31.4 h ، 32.4 h

سوال 5.212: ایک بجلی گھر تیل کو جلا کر برقی طاقت پیدا کرتا ہے۔ تیل جلنے سے پیدا آلودگی کو کم کرنے کی خاطر دھواں کش کو چھلنی سے گزارا جاتا ہے جو نجاست کو روک دیتا ہے۔ وقت کے ساتھ ساتھ چھلنی کی کارگزاری کم پڑ جاتی ہے اور اس کو تبدیل کرنا لازمی ہو جاتا ہے۔ ہر مہینے کی آخر میں ہوا میں خارج نجاست کی شرح ناپی جاتی ہے، اگر یہ مقدار سرکاری حد سے زیادہ ہو تب چھلنی کو تبدیل کیا جاتا ہے۔ اس پیمائش کی ایک مثال نیچے جدول میں دکھائی گئی ہے جہاں یومیہ خارج نجاست کی مقدار کی اکائی ٹن (kg 1000) ہے۔

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
نجاست	0.2	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

(i) تمام مہینوں کو 30 دنوں کا تصور کریں۔ فرض کریں نئی چھلنی سے یومیہ 0.05 ٹن نجاست نکل پاتی ہے۔ جون کے مہینے کی آخر تک ہوا میں کل خارج نجاست کی مقدار کی بالائی حد کیا ہو گی؟ اس کی نیچی حد کیا ہو گی؟ (ب) بہترین حالات میں کل 125 ٹن نجاست کتنے عرصہ میں ہوا میں خارج ہو گا؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 5.213 تا 5.216 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے (i) دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) وقفہ کو $n = 100$ ،
 $n = 200$ اور $n = 1000$ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی وسط میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔ (ج)
جزو-ب میں حاصل قیمتوں سے تفاعل کی اوسط تقریباً تلاش کریں۔ (د) $n = 1000$ کے لئے حاصل اوسط تقریباً استعمال کرتے ہوئے
مساوات $f(x) = \frac{1}{x}$ کو حل کریں۔

سوال 5.213: $f(x) = \sin x$, $[0, \pi]$

سوال 5.214: $f(x) = \sin^2 x$, $[0, \pi]$

سوال 5.215: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

سوال 5.216: $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$, $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

5.5 ریسمان مجموعے اور قطعی نکلمات

گزشتہ حصے میں ہم نے فاصلے، رقبے، حجم اور اوسط قیمتوں کو متناہی مجموعوں کی مدد سے حاصل کیا۔ منتخب تفاعل کی قیمتوں کو وقفوں کی لمبائیوں کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے یہ مجموعے حاصل کیے گئے۔ اس حصہ میں ان وقفوں کی لمبائیوں کو کم سے کم اور تعداد کو زیادہ سے زیادہ کرتے ہوئے مجموعہ کی تحدیدی قیمت پر غور کیا جائے گا۔ متعدد ارکان پر مشتمل مجموعے کو ظاہر کرنے کی علامت پہلے متعارف کرتے ہیں۔

متناہی مجموعہ کی علامت

درج ذیل مجموعہ کو

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t$$

یونانی حروف تہجی کا بڑا حرف Σ ("سگما") استعمال کرتے ہوئے $\sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو k کی 1 تا n قیمتوں کے لئے Δt ضرب t_k پر f کی قیمتوں کا مجموعہ ہے۔ مجموعہ کی یوں اظہار کو سگما علامتی اظہار کہتے ہیں۔

تعریف: متناہی مجموعہ کا سگما علامتی اظہار
علامت $\sum_{k=1}^n a_k$ سے مراد مجموعہ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ہے۔ مجموعہ کے ارکان a_1 تا a_n ہیں جہاں a_1 مجموعہ کا پہلا اور a_n مجموعہ کا آخری رکن ہے۔ متغیر k مجموعی سلسلہ کا اشاریہ ¹⁶ کہلاتا ہے۔ k کی قیمتیں 1 تا n عدد صحیح ہیں۔ مجموعی سلسلہ کا زیریں حد ¹⁷ 1 جبکہ مجموعی سلسلہ کا بالائی حد ¹⁸ n ہے۔ زیریں اور بالائی حدود کوئی بھی دو عدد صحیح ممکن ہیں۔

□

مثال 5.26:

مجموعہ کی قیمت	ارکان کی صورت میں مجموعہ	مجموعہ کی نگما صورت
15	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$\sum_{k=1}^5 k$
$-1 + 2 - 3 = -2$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$\sum_{k=1}^3 (-1)^k k$
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\sum_{k=1}^2 \frac{k}{k+1}$

¹⁵ terms

¹⁶ index of summation

¹⁷ lower limit of summation

¹⁸ upper limit of summation

□

مجموعی سلسلہ کا زیریں حد 1 سے ہٹ کر ہو سکتا ہے۔

مثال 5.27: مجموعہ $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ کو سنگما علامتی روپ میں لکھیں۔

حل:

$$\sum_{k=0}^4 (2k+1) \quad k=0 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

$$\sum_{k=1}^5 (2k-1) \quad k=1 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

□

متناہی مجموعہ کا الجبرا

متناہی مجموعوں کے ساتھ کام کرتے ہوئے درج ذیل قواعد بروئے کار لائے جاسکتے ہیں۔

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{قاعدہ مجموعہ:}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{قاعدہ فرق:}$$

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{قاعدہ ضرب مستقل: جہاں } c \text{ کوئی عدد ہے۔}$$

$$\sum_{k=1}^n c = n \cdot c \quad \text{قاعدہ مستقل قیمت: جہاں } c \text{ کوئی مستقل قیمت ہے۔}$$

اس فہرست میں کوئی حیران کن حقیقت پیش نہیں کی گئی ہے۔ ان کے باضابطہ ثبوت (انکراچی) الجبرائی ماخوذ سے حاصل کیے جاسکتے ہیں جنہیں ضمیرہ میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال 5.28:

$$\sum_{k=1}^n (3k - k^2) = 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\sum_{k=1}^n (-a_k) = \sum_{k=1}^n (-1) \cdot a_k = -1 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = - \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (k + 4) &= \sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 4 \\ &= (1 + 2 + 3) + (3 \cdot 4) \\ &= 6 + 12 = 18 \end{aligned} \quad \text{قاعدہ مستقل قیمت}$$

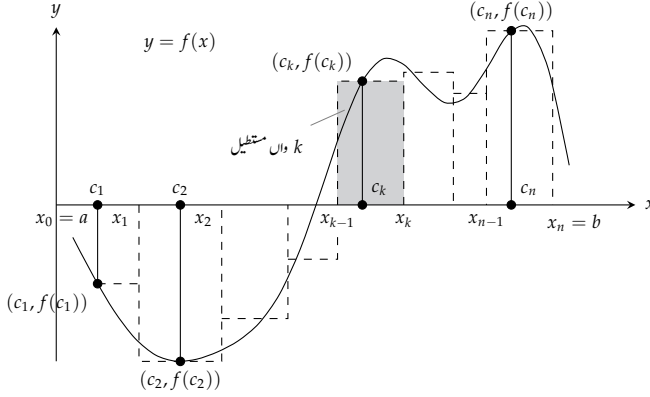
□

مثبت عدد صحیح کے کلیات مجموعہ

تناہی مجموعوں کے کئی کلیات پائے جاتے ہیں جن میں سے مشہور ترین کلیات شروع کے n عدد صحیح کا مجموعہ ہے (جو گاوس نے 5 سال کی عمر میں اخذ کیا) اور شروع کے n عدد صحیح کے مربع اور مکعب کے مجموعوں کے کلیات ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح} \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مربع} \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مکعب} \end{aligned} \quad (5.13)$$

مثال 5.29: $\sum_{k=1}^4 (k^2 - 3k)$ تلاش کریں۔



شکل 5.31: بند وقفہ $[a, b]$ پر عمومی تقاعل $y = f(x)$ - تقاعل اور x محور کے بیچ رقبہ کو تختہ بندی طور پر مستطیلوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ c_1 کو عین x_0 پر منتخب کیا ہوا دکھایا گیا ہے۔

حل: ہم مجموعہ کو مجموعی سلسلہ کے روپ میں لکھے بغیر الجبرائی قواعد استعمال کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (k^2 - 3k) &= \sum_{k=1}^4 k^2 - 3 \sum_{k=1}^4 k && \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل} \\ &= \frac{4(4+1)(8+1)}{6} - 3 \left(\frac{4(4+1)}{2} \right) && n = 4 \text{ لیتے ہوئے مساوات 5.13} \\ &= 30 - 30 = 0 \end{aligned}$$

□

ریمان مجموعے

ہم نے حصہ 5.4 میں تختہ بندی مجموعوں پر غور کیا جو زیادہ عمومی ریمان مجموعہ کی مخصوص مثالیں تھیں۔ ان مثالوں میں تقاعل کی قیمتیں غیر منفی تھیں جبکہ ریمان مجموعہ میں ایسی پابندی نہیں پائی جاتی ہے۔ وقفہ $[a, b]$ پر دیے گئے اختیاری استراری تقاعل $y = f(x)$ کو a اور b کے بیچ نقاط x_1, x_2, \dots, x_{n+1} پر n ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (شکل 5.31)۔ یہ نقطے صرف درج ذیل شرط کے تحت منتخب کیے جاتے ہیں۔

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

اس علامتی روپ میں مطابقت پیدا کرنے کی خاطر a کو x_0 اور b کو x_n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل سلسلہ

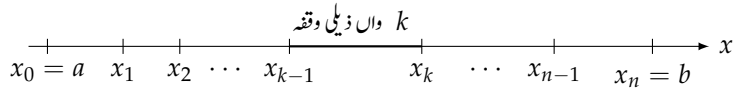
$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

کو $[a, b]$ کی خانہ بندی¹⁹ کہتے ہیں۔

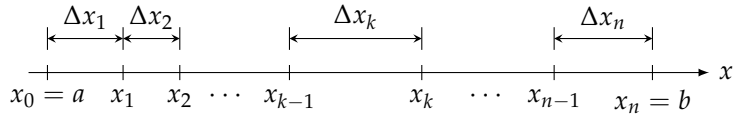
P کی خانہ بندی درج ذیل n عدد بند ذیلی وقفوں²⁰ کو ظاہر کرتی ہے۔

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

بند ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کو P کا k واں ذیلی وقفہ کہتے ہیں۔



k ویں ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ہے۔



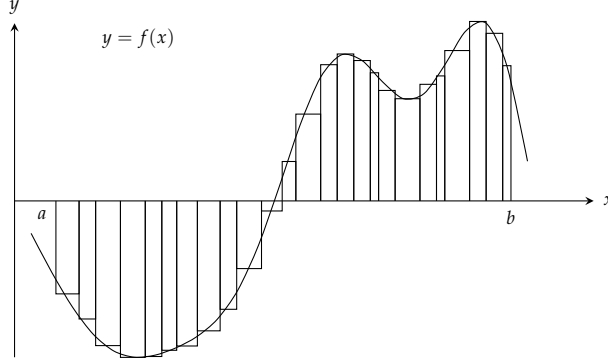
ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں ہم کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ذیلی وقفہ میں تقابل $y = f(x)$ پر نقطہ $(c_k, f(c_k))$ تک مستطیل بناتے ہیں۔ جب تک نقطہ c_k ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں پایا جاتا ہو اس کا مقام غیر اہم ہے (شکل 5.31)۔

اگر $f(c_k)$ مثبت ہو تب عدد $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے قد ضرب قاعدہ یعنی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ اگر $f(c_k)$ منفی عدد ہو تب $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے رقبہ کے نفی کے برابر ہو گا۔ ہم ان تمام $f(c_k)\Delta x_k$ حاصل ضرب جن کی تعداد n ہے کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k$$

یہ مجموعہ جو P اور c_k کی انتخاب پر منحصر ہے وقفہ $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ²¹ کہلاتا²² ہے۔

$[a, b]$ کے خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرتے ہوئے خانہ بندی سے حاصل مستطیل تقابل f اور x محور کے قح خطہ کو بہتر سے بہتر ظاہر کرتے ہیں (شکل 5.32 کا شکل 5.31 کے ساتھ موازنہ کریں)۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ ہماری



شکل 5.32: وقفہ $[a, b]$ کے زیادہ باریک خانہ بندی سے مستطیلوں کی تعداد بڑھتی ہے جن کے متلا نسبتاً چھوٹے ہوتے ہیں۔

اس توقع کو پرکھنے کی خاطر ہمیں خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کو ریاضیاتی صورت میں لکھنا ہو گا اور جاننا ہو گا کہ آیا مطابقتی مجموعہ کی کوئی تحدیدی قیمت پائی جاتی ہے۔ ہم درج ذیل تعریف کی مدد سے ایسا کر پائیں گے۔

خانہ بندی P کی معیار 23 سے مراد سب سے لمبے خانے کی لمبائی ہے جس کو درج ذیل علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|P\| \quad (\text{اس کو "P کا معیار" پڑھیں})$$

خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کی بجائے اب ہم کہتے ہیں کہ خانوں کی معیار صفر تک پہنچائی جاتی ہے۔ جیسے جیسے معیار کی قیمت صفر کے نزدیک ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم اور ان کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہوتی جاتی ہے۔ خانوں کی چوڑائی کم کرنے سے باریک مستطیل پیدا ہوں گے۔

مثال 5.30: وقفہ $[0, 2]$ کی خانہ بندی سلسلہ $P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ ہے۔ P کے پانچ ذیلی وقفے درج ذیل ہیں۔

$$[0, 0.2], [0.2, 0.6], [0.6, 1], [1, 1.5], [1.5, 2]$$

ان ذیلی وقفوں کی لمبائیاں $\Delta x_1 = 0.2$ ، $\Delta x_2 = 0.4$ ، $\Delta x_3 = 0.4$ ، $\Delta x_4 = 0.5$ اور $\Delta x_5 = 0.5$ ہیں۔ ان میں سب سے لمبے ذیلی وقفہ کی لمبائی 0.5 ہے لہذا خانہ بندی P کا معیار $\|P\| = 0.5$ ہے۔ اس مثال میں دو ذیلی وقفوں کی لمبائی 0.5 ہے۔ □

¹⁹partition
²⁰subintervals
²¹Riemann sum

²²جرمنی کے ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے ایسے مجموعوں کی تحدیدی قیمتوں پر کام کیا۔
²³norm

تعریف: قطعی تکمل بطور ریمان مجموعوں کا حد فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ ایک معین تفاعل ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $\|P\| \rightarrow 0$ کرتے ہوئے وقفہ $[a, b]$ پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ کا حد اس صورت عدد I ہو گا جب درج ذیل شرط پورا ہوتا ہو:

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابق عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کسی بھی منتخب عدد c_k کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\|P\| < \delta \implies \left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \right| < \epsilon$$

□

اگر یہ حد موجود ہو تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I$$

وقفہ $[a, b]$ پر عدد I تفاعل f کا قطعی تکمل²⁴ کہلاتا ہے، اور ہم کہتے ہیں کہ $[a, b]$ پر f قابل تکمل²⁵ ہے اور $[a, b]$ پر f کاریمان مجموعہ عدد I پر مرکوز²⁶ ہے۔

ہم عموماً I کو $\int_a^b f(x) dx$ لکھتے ہیں جو " a تا b تفاعل f کا مکمل" پڑھا جاتا ہے۔ یوں اگر حد موجود ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ خانہ بندی تبدیل کرتے ہوئے اور ہر خانے میں c_k کا مقام تبدیل کرنے کے باوجود استمراری f کی صورت میں $\|P\| \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعوں $\sum f(c_k) \Delta x_k$ کی تحدیدی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ ریمان نے 1854 میں درج ذیل مسئلہ ثابت کرتے ہوئے اس حقیقت کی تصدیق کر دی۔ ریمان کے ثبوت کی جدید صورت احصاء کی تقریباً تمام اعلیٰ کتابوں میں پایا جاتا ہے۔

مسئلہ 5.1: قطعی تکمل کی موجودگی

تمام استمراری تفاعل قابل مکمل ہیں۔ یعنی وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل f کا $[a, b]$ پر قطعی مکمل موجود ہو گا۔

definite integral²⁴
integrable²⁵
converges²⁶

ہم کیوں یقین کریں کہ یہ مسئلہ کارآمد ہو گا؟ وقفہ $[a, b]$ کی عمومی خانہ بندی P فرض کریں۔ چونکہ تقابل f استمراری ہے لہذا ہر ذیلی وقفہ پر اس کی کوئی کم سے کم قیمت k_L اور کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت k_H ہو گی۔ کم سے کم قیمتوں (شکل 5.33-ا) سے حاصل ضرب $k_L \Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا زیریں مجموعہ L ²⁷ کہلاتا ہے۔

$$L = k_{L1}\Delta x_1 + k_{L2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Ln}\Delta x_n$$

اسی طرح زیادہ سے زیادہ قیمتوں (شکل 5.33-ب) سے حاصل ضرب $k_H \Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا بالائی مجموعہ H کہلاتا ہے۔

$$H = k_{H1}\Delta x_1 + k_{H2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Hn}\Delta x_n$$

ان کا فرق $H - L$ شکل 5.33-ج میں دکھائے گئے سیاہ ڈبوں کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ جیسا جیسا $\|P\| \rightarrow 0$ کیا جائے ان ڈبوں کی تعداد بڑھتی جائے گی جبکہ ان کی چوڑائی اور لمبائی کم سے کم ہوتی جائے گی۔ ہم $\|P\|$ کو صفر کے کافی نزدیک کرتے ہوئے غیر منفی عدد $H - L$ کو کسی بھی چھوٹے سے چھوٹے مثبت عدد ϵ سے کم کر سکتے ہیں، یعنی

$$(5.14) \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} (H - L) = 0$$

اور جیسا اعلیٰ نصاب میں دکھایا گیا ہے درج بالا سے مراد درج ذیل ہے۔

$$(5.15) \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} H$$

بند وقفوں پر استمراری تقابل کی ایک خاصیت جس کو یکساں استمرار²⁸ کہتے ہیں کی بدولت مساوات 5.14 اور مساوات 5.15 کارآمد ہیں۔ یہ خاصیت ممکن بناتی ہے کہ $\|P\| \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ان ڈبوں، جو H اور L کے فرق کو ظاہر کرتے ہیں، کی چوڑائی کو کم سے کم کرتے ہوئے ان کی قد کو کم سے کم بنایا جاسکتا ہے اور ہم ان کی چوڑائی کم کرتے ہوئے ان کے قد کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ چونکہ یکساں استمرار سے منسلک ϵ بالقابل δ کی دلیل ہم نے یہاں پیش نہیں کی ہے لہذا ہم مساوات 5.15 کو ثبوت نہیں مان سکتے ہیں البتہ مذکورہ بالا دلائل اصل ثبوت کی روح پیش کرتے ہیں۔

ہم وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تقابل f کے لئے مساوات 5.15 کو درست تصور کرتے ہوئے P کے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے رییمان مجموعہ $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ لکھتے ہیں۔ اب ہر k کے لئے $k_L \leq f(c_k) \leq k_H$ ہو گا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$L \leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \leq H$$

f کا ریمان مجموعہ H اور L کے قچ پایا جاتا ہے۔ مسئلہ قچ (مسئلہ 2.4) کی ترمیم شدہ روپ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\|P\| \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کا حد موجود ہو گا اور یہ L اور H کی مشترکہ تحدیدی قیمت ہوگی:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} H$$

ایک لمحہ رک کر اس نتیجہ پر غور کریں۔ اس نتیجہ کے تحت ہم c_k کو جس طرح بھی منتخب کریں، $\|P\| \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت وہی حاصل ہوگی۔ ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی کم سے کم قیمت منتخب کر کے وہی حد حاصل ہوگا۔ اسی طرح ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت منتخب کر کے بھی وہی حد حاصل ہوگا۔ c_k کو بلا منصوبہ منتخب کر کے بھی یہی حد حاصل ہوگا۔

اگرچہ ہم نے قطعی مکمل کی موجودگی کا مسئلہ بالخصوص استمراری تفاعل کے لئے پیش کیا، حقیقت میں کئی غیر استمراری تفاعل بھی قابل مکمل ہیں۔ غیر محدود تفاعل کی مکمل پر اسی باب میں غور کیا جائے گا۔

بغیر ریمان مکمل والے تفاعل

غیر استمراری تفاعل، ماسوائے چند، ناقابل مکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا $[0, 1]$ پر کوئی ریمان مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ناطق} \\ 0, & \text{غیر ناطق} \end{cases}$$

وقفہ $[0, 1]$ کے کسی بھی خانہ بندی P کے لئے بالائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

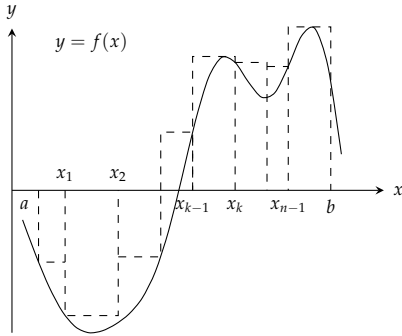
$$H = \sum k_H \Delta x_k = \sum 1 \cdot \Delta x_k = \sum \Delta x_k = 1,$$

$$L = \sum k_L \Delta x_k = \sum 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

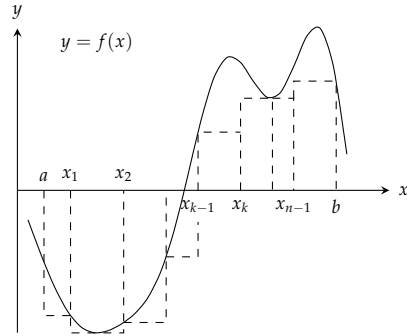
وقفہ $[0, 1]$ پر f کے مکمل کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ $\|P\| \rightarrow 0$ سے H اور L کی ایک جیسی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} L = 0, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} H = 1$$

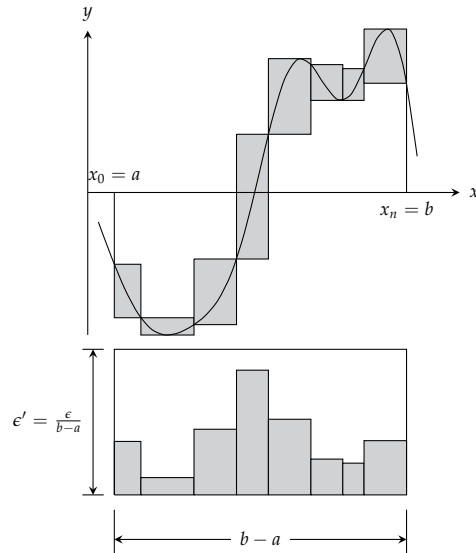
یوں $[0, 1]$ پر f کا مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔ مستقل مضرب $k f$ کا بھی مکمل نہیں پایا جاتا ہے ماسوائے جب k صفر ہو۔



$$H = \sum_{k=1}^n k_H \Delta x_k \quad (\text{ب}) \text{ بالائی مجموعہ}$$



$$L = \sum_{k=1}^n k_L \Delta x_k \quad (\text{ل}) \text{ زیدی مجموعہ}$$

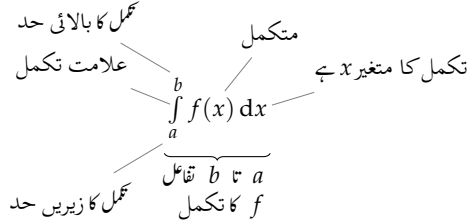


(ج) فرق $H - L$ کو $\epsilon' \cdot (b - a)$ یعنی ϵ سے کم بنایا جا سکتا ہے۔

شکل 5.33: بالائی اور زیدی مجموعوں میں فرق۔

اصطلاحات

علامت $\int_a^b f(x) dx$ کے ساتھ بہت ساری اصطلاح وابستہ ہیں۔ یوں \int کو علامت تکمیل کہتے ہیں، a مکمل کا زیریں حد جبکہ b مکمل کا بالائی حد ہے، f متکمل ہے، x مکمل کا متغیر ہے، جبکہ $\int_a^b f(x) dx$ سے مراد a تا b تفاعل f کا تکمیل ہے۔ مکمل حل کرنے سے مراد مکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔



کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی مکمل کی قیمت تفاعل پر منحصر ہوتی ہے تاکہ غیر تفاعل متغیر کی علامت پر۔ یوں مکمل میں غیر تفاعل متغیر کو x کی بجائے u یا t سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x) dx \text{ کی بجائے } \int_a^b f(u) du \text{ یا } \int_a^b f(t) dt \text{ لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں مکمل سے مراد ریسمان مجموعہ ہے لہذا غیر تفاعل متغیر کا مکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہوگا اور تینوں مکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہوگی۔ اسی لیے مکمل کے متغیر کو نقلی متغیر²⁹ کہتے ہیں۔

مثال 5.31: درج ذیل ریسمان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو مکمل کی صورت میں لکھیں جہاں P وقفہ $[-1, 3]$ کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k$$

حل: نقطہ c_k پر تفاعل $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ $[-1, 3]$ کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں -1 تا 3 تفاعل f کا مکمل درکار ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k = \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx$$

□

مستقل تفاعل

ہمیں مسئلہ 5.1 قطعی تکمل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں ایک دوسرا مسئلہ (حصہ 5.7) زیر استعمال ہو گا۔ مستقل تفاعل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ $[a, b]$ پر f ایک مستقل تفاعل $f(x) = c$ ہو تب c_k کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k && f(c_k) \text{ ہر نقطہ پر } c \text{ کے برابر ہے} \\ &= c \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب} \\ &= c(b-a) && \sum_{k=1}^n \Delta x_k \text{ وقفہ } [a, b] \text{ کی لمبائی } b-a \text{ ہے} \end{aligned}$$

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت $c(b-a)$ کے برابر ہے لہذا تکمل کی قیمت بھی یہی ہوگی۔ یوں درج ذیل درست ہو گا۔

وقفہ $[a, b]$ جس پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت مستقل c ہے کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

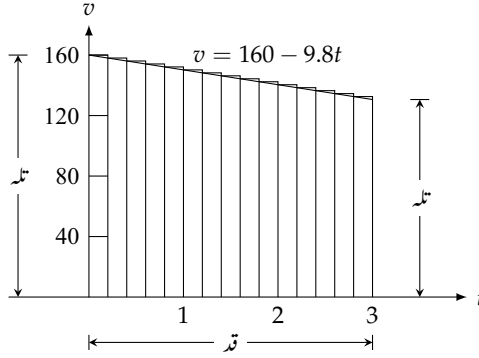
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$$

مثال 5.32:

$$\int_{-1}^4 3 dx = 3(4 - (-1)) = (3)(5) = 15 \text{ ا.}$$

$$\text{ب. } \int_{-1}^4 (-3) dx = -3(4 - (-1)) = (-3)(5) = -15$$

□



شکل 5.34: وقفہ $[0, 3]$ پر سستی رفتار تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے ریمان رقبہ کے لئے مستطیل۔

غیر منفی تفاعل کے ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال 5.22 میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ $[0, 3]$ پر گولا کی تفاعل رفتار

$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے ریمان مجموعے تھے۔ شکل 5.34 میں t محور اور تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس ذوزنقہ رقبہ کا قدر 3، زیریں تلا 160 اور بالائی تلا 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہے، اتنا اصل رقبہ پر مستطیل بہتر بیٹھتے ہیں۔ ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$\text{رقبہ} = \frac{\text{زیریں تلا} + \text{بالائی تلا}}{2} \cdot \text{قد} = 3 \cdot \frac{130.6 + 160}{2} = 435.9$$

آپ کو یاد ہو گا کہ مثال 5.22 میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ ہم مکمل کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں:

$$\int_0^3 (160 - 9.8t) dt = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$

ہم مکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں x محور اور استراری غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ رقبہ کا کلیہ معلوم ہو تب ہم مکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے مکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x) \geq 0$ استراری ہے۔ تفاعل f کے ترسیم اور x محور کے بیچ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

□

ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لئے پیش کیا۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لئے بھی کارآمد ہو گا؟ اس کا جواب ہے، "جی ہاں"، البتہ یہ ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

مثال 5.33: رقبہ استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت کا تلاش
درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_a^b x \, dx, \quad 0 < a < b$$

حل: ہم خطہ $a < x < b$ کے لئے $y = x$ ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل 5.35)۔ تکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش کرتے ہیں۔

$$\int_a^b x \, dx = (b - a) \cdot \frac{a + b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

یوں $a = 1$ اور $b = \sqrt{5}$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_1^{\sqrt{5}} x \, dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

□

دھیان رہے کہ x کا الٹ تفرق $\frac{x^2}{2}$ ہے جو تکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔

مثال 5.34: قطعی تکمل سے رقبے کا حصول
قطع مکانی $y = x^2$ اور x محور کے بیچ وقفہ $[0, b]$ پر رقبہ تلاش کریں (شکل 5.36)۔

حل: ہم تکمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تقاض کو ترسیم کر کے وقفہ $[0, b]$ کو n یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$ ہو گی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x, \quad x_n = n\Delta x = b$$

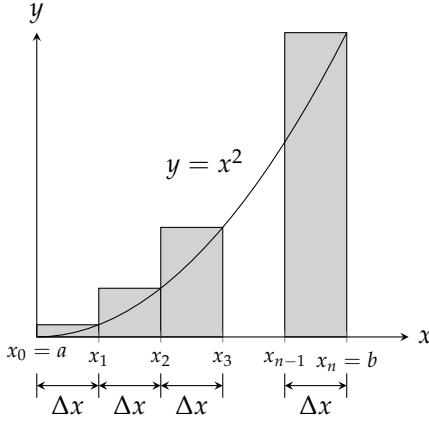
ہم جس طرح چاہیں c_k نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو c_k منتخب کرتے ہیں۔ یوں $c_1 = x_1$ ، $c_2 = x_2$ ، وغیرہ ہو گا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$f(c_1)\Delta x = f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x = (1^2)(\Delta x)^3$$

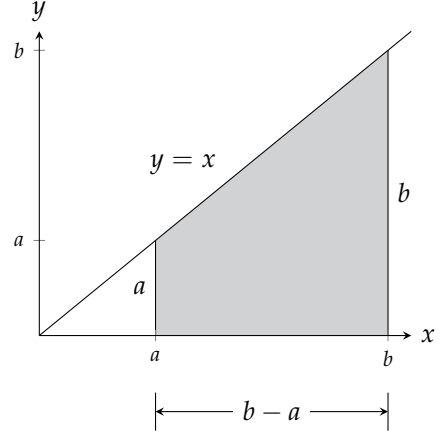
$$f(c_2)\Delta x = f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2\Delta x = (2^2)(\Delta x)^3$$

⋮

$$f(c_n)\Delta x = f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2\Delta x = (n^2)(\Delta x)^3$$



شکل 5.36: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال 5.34)



شکل 5.35: خطہ برائے مثال 5.33

ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 (\Delta x)^3 \\
 &= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

$(\Delta x)^3$ مستقل ہے

مساوات 5.13 میں $\Delta x = \frac{b}{n}$

اب قطعی تکمیل کی تعریف

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

استعمال کرتے ہوئے $x = 0$ تا $x = b$ قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n && \text{یہاں } 0 \rightarrow \|P\| \text{ سے مراد } n \rightarrow \infty \text{ ہے} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\ &= \frac{b^3}{6} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

یوں $b = 1$ اور $b = 1.5$ کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{1.5} x^2 dx = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

□

یہاں بھی دھیان رہے کہ x^2 کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3}$ ہے۔

سوالات

سگما روپ

سوال 5.217 تا سوال 5.222 میں مجموعہ کو سگما روپ میں لکھنے کے بعد اس کی قیمت تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^2 \frac{6k}{k+1} \quad \text{سوال 5.217} \\ &\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7 \quad \text{جواب:} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{k-1}{k} \quad \text{سوال 5.218}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^4 \cos k\pi \quad \text{سوال 5.219} \\ &\cos(1\pi) + \cos(2\pi) + \cos(3\pi) + \cos(4\pi) = 0 \quad \text{جواب:} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^5 \sin k\pi \quad \text{سوال 5.220}$$

سوال 5.221: $\sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$
 جواب: $\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$

سوال 5.222: $\sum_{k=1}^4 (-1)^k \cos k\pi$

سوال 5.223: درج ذیل میں سے کونسی $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ کی سکما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^6 2^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^5 2^k$ ج. $\sum_{k=-1}^4 2^{k+1}$

جواب: تمام

سوال 5.224: درج ذیل میں سے کونسی $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ کی سکما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^6 (-2)^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^5 (-1)^k 2^k$ ج. $\sum_{k=-2}^3 (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

سوال 5.225: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum_{k=2}^4 \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{k+1}$ ج. $\sum_{k=-1}^1 \frac{(-1)^k}{k+2}$

جواب: ب

سوال 5.226: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum_{k=1}^4 (k-1)^2$ ب. $\sum_{k=-1}^3 (k+1)^2$ ج. $\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

سوال 5.227 تا سوال 5.232 میں دیے مجموعوں کو سکما روپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلہ کی زیریں حد پر منحصر ہو گا۔

سوال 5.227: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
 جواب: $\sum_{k=1}^6 k$

سوال 5.228: $1 + 4 + 9 + 16$

سوال 5.229: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
 جواب: $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{2^k}$

سوال 5.230: $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

سوال 5.231: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
 جواب: $\sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

سوال 5.232: $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

متناہی مجموعہ کی قیمت

سوال 5.233: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^n a_k = -5$ اور $\sum_{k=1}^n b_k = 6$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^n 3a_k$ ج. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ د. $\sum_{k=1}^n (b_k - 2a_k)$

ب. $\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{6}$ د. $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$

جواب: (ا) -15، (ب) 1، (ج) 1، (د) -11، (ه) 16

سوال 5.234: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ اور $\sum_{k=1}^n b_k = 1$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^n 8a_k$ ب. $\sum_{k=1}^n 250b_k$ ج. $\sum_{k=1}^n (a_k + 1)$ د. $\sum_{k=1}^n (b_k - 1)$

سوال 5.235 تا سوال 5.244 میں دیے گئے الجبرائی نعروں کی قیمتوں کو صفحہ 536 پر دیے گئے متناہی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات 5.13 میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال 5.235:

$$\sum_{k=1}^{10} k^3 \quad \text{ج.}$$

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 \quad \text{ب.}$$

$$\sum_{k=1}^{10} k \quad \text{ا.}$$

جواب: (ا) 55، (ب) 385، (ج) 3025

سوال 5.236:

$$\sum_{k=1}^{13} k^3 \quad \text{ج.}$$

$$\sum_{k=1}^{13} k^2 \quad \text{ب.}$$

$$\sum_{k=1}^{13} k \quad \text{ا.}$$

$$\sum_{k=1}^7 (-2k) \quad \text{سوال 5.237:}$$

جواب: -56

$$\sum_{k=1}^5 \frac{\pi k}{15} \quad \text{سوال 5.238:}$$

$$\sum_{k=1}^6 (3 - k^2) \quad \text{سوال 5.239:}$$

جواب: -73

$$\sum_{k=1}^6 (k^2 - 5) \quad \text{سوال 5.240:}$$

$$\sum_{k=1}^5 k(3k + 5) \quad \text{سوال 5.241:}$$

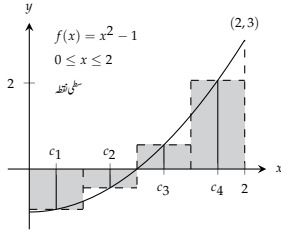
جواب: 240

$$\sum_{k=1}^7 k(2k + 1) \quad \text{سوال 5.242:}$$

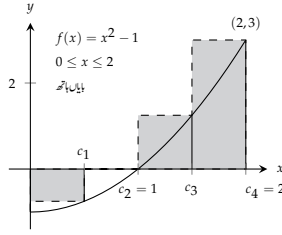
$$\sum_{k=1}^5 \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^5 k \right)^3 \quad \text{سوال 5.243:}$$

جواب: 3376

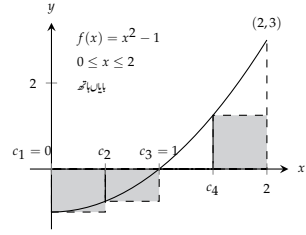
$$\left(\sum_{k=1}^7 k \right)^2 - \sum_{k=1}^7 \frac{k^3}{4} \quad \text{سوال 5.244:}$$



(ا)

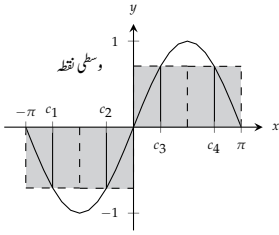


(ب)

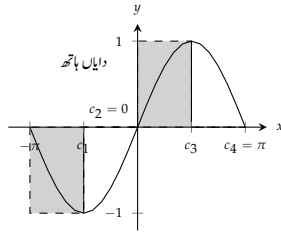


(ج)

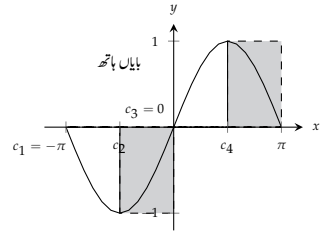
شکل 5.37: رییمان مجموعے برائے سوال 5.245



(ا)



(ب)



(ج)

شکل 5.38: رییمان مجموعے برائے سوال 5.247

ریمان مجموعوں کے لئے مستطیلیں
سوال 5.245 تا سوال 5.248 میں تقابل $f(x)$ کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کی ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^4 f(c_k) \Delta x_k$ کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں k ویں ذیلی وقفہ کا (i) بائیں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ c_k ہے۔ (بائیں، دائیں اور وسطی نقطوں کے لئے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

سوال 5.245: $f(x) = x^2 - 1, [0, 2]$
جواب: شکل 5.37

سوال 5.246: $f(x) = -x^2, [0, 1]$

سوال 5.247: $f(x) = \sin x, [-\pi, \pi]$
جواب: شکل 5.38

سوال 5.248: $f(x) = \sin x + 1, [-\pi, \pi]$

سوال 5.249: خانہ بندی $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ کا معیار تلاش کریں۔
جواب: 1.2

سوال 5.250: خانہ بندی $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ کا معیار تلاش کریں۔

حد کا بطور تکمیل اظہار
سوال 5.251 تا سوال 5.258 میں دیے گئے حد کو بطور قطعی عمل ظاہر کریں۔

سوال 5.251: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k$ جہاں $[0, 2]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_0^2 x^2 dx$

سوال 5.252: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2c_k^3 \Delta x_k$ جہاں $[-1, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 5.253: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-7, 5]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_{-7}^5 (x^2 - 3x) dx$

سوال 5.254: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \Delta x_k$ جہاں $[1, 4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 5.255: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$ جہاں $[2, 3]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_2^3 \frac{1}{1-x} dx$

سوال 5.256: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$ جہاں $[0, 1]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 5.257: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\sec c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-\pi/4, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_{-\pi/4}^0 \sec x dx$

سوال 5.258: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\tan c_k) \Delta x_k$ جہاں $[0, \pi/4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

مستقل تفاعل
سوال 5.259 تا سوال 5.264 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5.259: $\int_{-2}^1 5 dx$
جواب: 15

سوال 5.260: $\int_3^7 (-20) dx$

سوال 5.261: $\int_0^3 (-160) dt$
جواب: -480

سوال 5.262: $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2} d\theta$

سوال 5.263: $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5 ds$
جواب: 2.75

سوال 5.264: $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2} dr$

رقبہ سے مکمل کی قیمت کا حصول
سوال 5.265 تا سوال 5.272 میں مکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبہ سے مکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 5.265: $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx$
جواب: رقبہ = 21 مربع اکائیاں

5.5. ریمان مجموعے اور قطعی نکلات

سوال 5.266: $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4) dx$

سوال 5.267: $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$
جواب: رقبہ $\frac{9\pi}{2}$ مربع اکائیاں ہے۔

سوال 5.268: $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2} dx$

سوال 5.269: $\int_{-2}^1 |x| dx$
جواب: رقبہ 2.5 مربع اکائیاں ہے۔

سوال 5.270: $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

سوال 5.271: $\int_{-1}^1 (2 - |x|) dx$
جواب: رقبہ 3 مربع اکائیاں ہے۔

سوال 5.272: $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^2}) dx$

سوال 5.273 تا سوال 5.276 میں مکمل کی قیمت کو رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال 5.273: $\int_0^b x dx, \quad b > 0$
جواب: $\frac{b^2}{2}$

سوال 5.274: $\int_0^b 4x dx, \quad b > 0$

سوال 5.275: $\int_a^b 2s ds, \quad 0 < a < b$
جواب: $b^2 - a^2$

سوال 5.276: $\int_a^b 3t dt, \quad 0 < a < b$

قیمت کی تلاش

سوال 5.277 تا سوال 5.288 میں دیے مکمل کی قیمت کو مثال 5.33 اور مثال 5.34 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 5.277: $\int_1^{\sqrt{2}} x dx$
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 5.278: $\int_{0.5}^{2.5} x \, dx$

سوال 5.279: $\int_{\pi}^{2\pi} \theta \, d\theta$
جواب: $\frac{3\pi^2}{2}$

سوال 5.280: $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r \, dr$

سوال 5.281: $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 \, dx$
جواب: $\frac{7}{3}$

سوال 5.282: $\int_0^{0.3} s^2 \, ds$

سوال 5.283: $\int_0^{1/2} t^2 \, dt$
جواب: $\frac{1}{24}$

سوال 5.284: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \, d\theta$

سوال 5.285: $\int_0^{2a} x \, dx$
جواب: $\frac{3a^2}{2}$

سوال 5.286: $\int_a^{\sqrt{3}a} x \, dx$

سوال 5.287: $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 \, dx$
جواب: $\frac{b}{3}$

سوال 5.288: $\int_0^{3b} x^2 \, dx$

رقبے کی تلاش

سوال 5.289: سوال 5.292 میں وقفہ $[0, b]$ پر x محور اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ قطعی تکمیل کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 5.289: $y = 3x^2$
جواب: $\Delta x = \frac{b}{n}$ لمبائی کے n ذیلی وقفوں کے دائیں سر قیثیں لیتے ہوئے: $\int_0^b 3x^2 \, dx = b^3$ رقبہ

سوال 5.290: $y = \pi x^2$

سوال 5.291: $y = 2x$ لہائی $\Delta x = \frac{b}{n}$ کے n ذیلی وقفوں کے دائیں سر قیمتیں لیتے ہوئے: $\int_0^b 2x \, dx = b^2$ رقبہ

سوال 5.292: $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.293: درج ذیل مکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔ (اشارہ: مکمل کہاں مثبت ہے؟)

$$\int_a^b (x - x^2) \, dx$$

جواب: $a = 0$ اور $b = 1$ مکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

سوال 5.294: درج ذیل مکمل کی قیمت کم سے کم کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) \, dx$$

سوال 5.295: بڑھتے قفائل کے بالائی اور زیریں مجموعے

(i) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، قفائل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج اوپر اٹھتی ہے۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی n عدد یکساں لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں خانہ بندی P ہے جہاں ایک خانے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہے۔ شکل 5.39 کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس خانہ بندی پر f کے بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق کو تریسی طور پر مستطیل R سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جس کی جسامت $[f(b) - f(a)]$ ضرب Δx ہے۔ (اشارہ: فرق $H - L$ ان رقبوں کا مجموعہ ہے جن کے وتر $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$ اس ترسیم پر پائے جاتے ہیں۔ انہیں افقی مستطیل R پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔)

(ب) فرض کریں ذیلی وقفوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں بلکہ خانہ بندی $[a, b]$ پر مختلف ذیلی وقفوں کی لمبائی Δx_k مختلف ہے۔ اگر Δx_H خانہ بندی P کا معیار ہو تب دکھائیں کہ

$$H - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_H$$

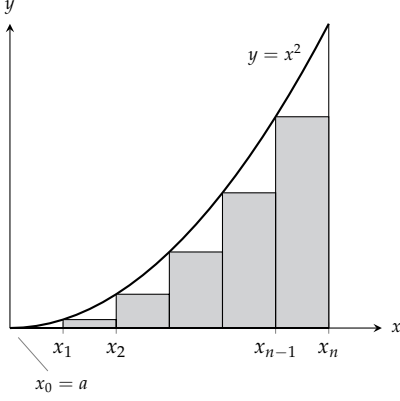
ہو گا لہذا $\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} (H - L) = 0$ ہو گا۔

سوال 5.296: گھٹتے قفائل کے بالائی اور زیریں مجموعے

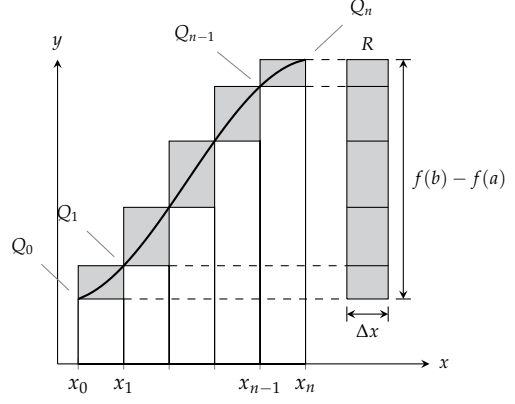
(i) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، قفائل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج نیچے گرتی ہے۔ سوال 5.295 کی طرح اس کا خاکہ بنائیں۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P ہے جہاں تمام خانوں کی لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہیں۔ سوال 5.295 کی طرح فرق $H - L$ تلاش کریں۔

(ب) فرض کریں کہ خانوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہے بلکہ ہر Δx_k مختلف ہے۔ دکھائیں کہ سوال 5.295 کی عدم مساوات

$$H - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_H$$



شکل 5.40: ریمان مستطیل برائے سوال 5.297



شکل 5.39: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق $[f(b) - f(a)]\Delta x$ ہو گا۔

اب بھی کار آمد ہے لہذا $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (H - L) = 0$ ہو گا۔

سوال 5.297: مکمل $\int_0^b x^2 dx, b > 0$ کی قیمت مثال 5.34 کی طرز پر حاصل کریں البتہ اب ہر خانے کا بائیں سر نقطہ قیمت استعمال کریں (شکل 5.40)۔
جواب: $\frac{b^3}{3}$

سوال 5.298: دکھائیں کہ مجموعہ

$$S_n = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \right]$$

درحقیقت $\int_0^1 x dx$ کا تخمینہ رقبہ دیتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ $[0, 1]$ کا یکساں n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کا بائیں سر نقطہ قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبہ کا مجموعہ لکھیں۔)

سوال 5.299: درج ذیل

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

کو

$$S_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right]$$

روپ میں لکھیں جس کو $\int_0^1 x^2 dx$ کی تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ $[0, 1]$ کو n برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں اور ہر خانے کے بائیں سر نقطہ قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیں۔)

سوال 5.300: درج ذیل کلیہ استعمال

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \dots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos(m+1/2)h}{2 \sin(h/2)}$$

کرتے ہوئے $y = \sin x$ کے نیچے $x = 0$ تا $x = \pi/2$ رقبہ درج ذیل دو اقدام سے تلاش کریں۔

ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ کو n برابر لمبائیوں کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مطابقتی بالائی مجموعہ H تلاش کریں۔

ب. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ اور $n \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے H کا حد تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 5.301 تا سوال 5.306 میں دیے گئے نکل پر مرکوز ریمان مجموعوں کے ساتھ منسلک مستطیلوں کو کمپیوٹر پر بنائیں۔ ذیلی وقفوں کی تعداد $n = 4, 10, 20, 50$ لیں اور ان کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر لیں۔

سوال 5.301: $\int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$

سوال 5.302: $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$

سوال 5.303: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0$

سوال 5.304: $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx = 1$

سوال 5.305: $\int_{-1}^1 |x| dx = 1$

سوال 5.306: $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$

سوال 5.307: (i) مجموعہ S_n جس کو سوال 5.298 میں پیش کیا گیا ہے کو سنگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تلاش کریں۔ (ب) سوال 5.299 میں دیے گئے S_n کے لئے دوبارہ حل کریں۔

سوال 5.308: مجموعہ $\sin h + \sin 2h + \dots + \sin mh$ جسے سوال 5.300 میں پیش کیا گیا ہے کو سنگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر کی مدد سے $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تلاش کریں۔

سوال 5.309: بائیں نقطہ قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مثال 5.23 کے مجموعہ کی سنگما علامتی روپ درج ذیل ہے۔

$$S_4 = \sum_{k=1}^4 4[9 - (-2 + (k-1))^2]$$

ا. سنگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_8 اور S_{25} لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{4}{8}$ اور $\frac{4}{25}$ ہوگی۔

ب. سنگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_n لکھیں جو n خانوں پر مشتمل ہے اور جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{4}{n}$ ہے۔

ج. حد $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 5.310: بائیں سر نقطی قیمت مجموعہ برائے مثال 5.24 درج ذیل ہے۔

$$S_8 = \sum_{k=1}^8 \pi [16 - (-1 + (k-1))^2]$$

ا. بائیں سر نقطی مجموعہ S_{16} اور S_{80} کو سنگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{10}$ ہوگی۔

ب. بائیں سر نقطی مجموعہ S_n کو سنگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{8}{n}$ اور خانوں کی تعداد n ہوگی۔

ج. حد $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہوگا؟

5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ

اس حصہ میں مکمل کے قواعد اور مکمل کا رقبہ کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ اوسط قیمت پر دوبارہ غور کیا جائے گا۔

قطعی مکمل کے خواص

ہم عموماً قطعی مکملوں کا مجموعہ اور فرق حاصل کرنا چاہتے ہیں یا مکمل کو مستقل سے ضرب دینا چاہتے ہیں یا ان کا موازنہ دیگر قطعی مکمل کے ساتھ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ایسا درج ذیل قواعد کے تحت کرتے ہیں۔

قواعد برائے قطعی تکمل

$$1. \text{ صفر: } \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{تعریف})$$

$$2. \text{ مکمل کی ترتیب: } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (\text{تعریف})$$

$$3. \text{ مستقل مضرب: } \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے})$$

$$(k = -1) \quad \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \text{ مجموعہ اور فرق: } \int_a^b (f(x) \mp g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \mp \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \text{ جمع پذیری: } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

6. کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات: اگر وقفہ $[a, b]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت f_H اور کم سے کم قیمت f_L ہو تب درج ذیل ہو گا:

$$f_L \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f_H \cdot (b - a)$$

7. غلبہ: اگر $[a, b]$ پر $f(x) \geq g(x)$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

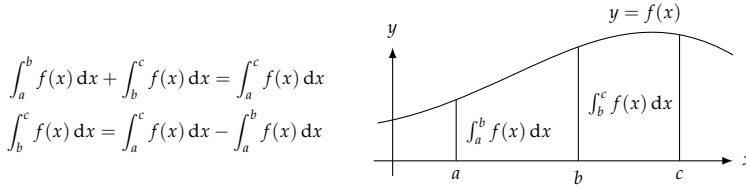
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

اگر $[a, b]$ پر $f(x) \geq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

ماسوائے پہلے دو قواعد کے تمام کو قطعی مکمل کی تعریف بذریعہ رییمان مجموعہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ ان قواعد کے ثبوت نہایت آسان ہوں گے۔ چونکہ رییمان مجموعہ یہ خواص رکھتا ہے لہذا آپ سوچتے ہوں گے کہ مجموعہ کا حد بھی یہی خواص رکھتا ہو گا۔ حقیقت میں ثبوت پیش کرتے ہوئے ذیلی وقفوں کے معیار کے $\epsilon - \delta$ کے پیچیدہ دلائل درکار ہوں گے۔ یقیناً ان قواعد کے ثبوت اتنے آسان نہیں ہیں۔ ہم صرف دو قواعد کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ باقی قواعد کے ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پائے جاتے ہیں۔

دھیان رہے کہ قاعدہ 1 درحقیقت ایک تعریف ہے۔ ہم چاہیں گے کہ صفر لمبائی کے تمام مکمل کی قیمت صفر ہو۔ پہلا قاعدہ قطعی مکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $a = b$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 2 بھی تعریف ہے جو قطعی مکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $b < a$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 3 اور قاعدہ 4 حد اور غیر قطعی مکمل کے مماثل قواعد کی طرح ہیں۔ دو تفاعل کے مکمل جانتے ہوئے ہم ان کے تمام مستقل مضرب، مجموعہ اور فرق کے مکمل جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ 3 اور 4 کو بار بار استعمال کرتے ہوئے



شکل 5.41: قطعی تکمل کی جمع پذیری

اختیاری قابل تکمل تفاعل کے کسی بھی تنہا خطی میل کا جزو در جزو تکمل حاصل کر سکتے ہیں۔ کسی بھی مستقل c_1, \dots, c_n جن کی علامتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں، اور وقفہ $[a, b]$ پر قابل تکمل تفاعل $f_1(x), \dots, f_n(x)$ کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx$$

جس کا ثبوت، جو ریاضی مانوڈ سے حاصل کیا جاسکتا ہے، کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

شکل 5.41 میں مثبت تفاعل کے لئے قاعدہ 5 دکھایا گیا ہے جو کسی بھی تفاعل کے لئے درست ہے۔

ثبوت: قاعدہ 3

قاعدہ 3 کے تحت تفاعل ضرب k کا تکمل تفاعل کا تکمل ضرب k ہو گا۔ یہ درج ذیل کی بنا پر درست ہے۔

$$\begin{aligned} \int_a^b k f(x) dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

□

ثبوت: قاعدہ 6

قاعدہ 6 کہتا ہے کہ $[a, b]$ پر تکمل کی قیمت کبھی بھی f کی کم سے کم قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے کم نہیں ہو گی اور نا ہی یہ کبھی f

کی زیادہ سے زیادہ قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے زیادہ ہو گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $[a, b]$ کی کسی بھی خانہ بندی اور c_k کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 f_L \cdot (b - a) &= f_L \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n f_L \cdot \Delta x_k \\
 &\leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \\
 &\leq f_H \cdot \Delta x_k \\
 &= f_H \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\
 &= f_H \cdot (b - a)
 \end{aligned}$$

مختصراً وقفہ $[a, b]$ پر f کے تمام رییمان مجموعے درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$f_L \cdot (b - a) \leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \leq f_H \cdot (b - a)$$

لہذا ان کا حد، یعنی مکمل، بھی اس شرط کو مطمئن کرتا ہو گا۔

□

مثال 5.35: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 5, \quad \int_1^4 f(x) dx = -2, \quad \int_{-1}^1 h(x) dx = 7$$

درج ذیل ہوں گا۔

1.

$$\int_4^1 = - \int_1^4 f(x) dx = -(-2) = 2 \quad \text{قاعدہ 2}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)] dx &= 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 h(x) dx \\
 &= 2(5) + 3(7) = 31 \quad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}
 \end{aligned}$$

.3

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 + (-2) = 3 \quad \text{قاعدہ 5}$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں درج ذیل تین عمومی نکلات کا حصول سیکھا۔

$$(5.16) \quad \int_a^b c dx = c(b-a) \quad (\text{مستقل } c)$$

$$(5.17) \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad (0 < a < b)$$

$$(5.18) \quad \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \quad (b < 0)$$

صفحہ 562 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتائج کو وسعت دی جاسکتی ہے۔

$$\text{مثال 5.36:} \quad \text{قیمت تلاش کریں:} \quad \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - 7t + 5 \right) dt$$

حل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - 7t + 5 \right) dt &= \frac{1}{4} \int_0^2 t^2 dt - 7 \int_0^2 t dt + \int_0^2 5 dt \quad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2^3}{3} \right) - 7 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 5(2-0) \quad \text{مساوات 5.16 تا مساوات 5.18} \\ &= \frac{2}{3} - 14 + 10 = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

□

$$\text{مثال 5.37:} \quad \text{قیمت تلاش کریں:} \quad \int_2^3 x^2 dx$$

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx &= \int_0^3 x^2 dx && \text{قاعدہ 5} \\
\int_2^3 x^2 dx &= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^2 x^2 dx && \text{درج بالا حل کریں} \\
&= \frac{3^2}{3} - \frac{2^3}{3} && \text{مساوات 5.18} \\
&= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

□

ہم $\int_2^3 x^2 dx$ کے حل پر مزید غور حصہ 5.7 میں کریں گے۔

قطعی تکمیل کا کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات (کمتر بلند تر عدم مساوات، قاعدہ 6) کہتا ہے کہ $\int_a^b f dx$ کا $f_L \cdot (b - a)$ کم سے کم حد ہے جبکہ $f_H \cdot (b - a)$ زیادہ سے زیادہ حد ہے۔

مثال 5.38: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$ کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔حل: وقفہ $[0, 1]$ پر $\sqrt{1 + \cos x}$ کی زیادہ سے زیادہ (بلند تر) قیمت $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ ہے لہذا

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx &\leq \sqrt{1 + \cos x} \text{ بلند تر} \cdot (1 - 0) && \text{قاعدہ 6} \\
&\leq \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

تکمیل کی قیمت $\sqrt{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے لہذا تکمیل 2 نہیں ہو سکتا ہے۔

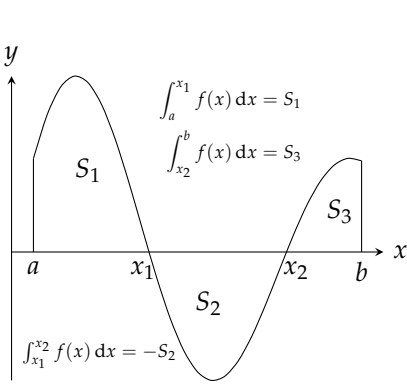
مثال 5.39: عدم مساوات $\cos x \geq (1 - x^2/2)$ تمام x کے لئے درست ہے۔ تکمیل $\int_0^1 \cos x dx$ کی کم سے کم (کمتر) قیمت تلاش کریں۔

حل:

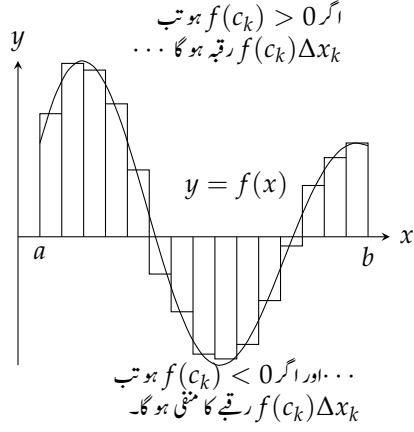
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos x dx &\geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx && \text{قاعدہ 7} \\
&\geq \int_0^1 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx && \text{قاعدہ 3، 4} \\
&\geq 1 \cdot (1 - 0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1)^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83
\end{aligned}$$

□

تکمیل کی قیمت کم از کم $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔



(ب) a تا b تقابل f کا مکمل درج ذیل ہو گا۔
 $\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^b = S_1 - S_2 + S_3$



(i) رییمان مجموعہ رقبوں کا الجبرائی مجموعہ ہے اور دونوں کی تحدیدی قیمت مکمل ہے۔

شکل 5.42: مکمل اور کل رقبہ کا تعلق۔

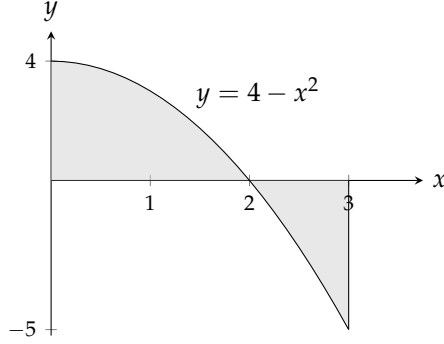
مکمل اور کل رقبہ

اگر وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ قابل مکمل تقابل ہو جس کی قیمت کہیں مثبت اور کہیں منفی ہو تب $[a, b]$ پر f کا رییمان مجموعہ x محور کے بالائی جانب مستطیلوں کے رقبوں اور x محور کے نیچے جانب مستطیلوں کے رقبوں کی منفی قیمتوں کا مجموعہ ہو گا (شکل 5.42)۔ چونکہ مثبت اور منفی مقادیر ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں لہذا اس مجموعے کی تحدیدی قیمت تقابل اور x محور کے نیچے کل رقبہ سے کم ہو گی۔ مکمل کی قیمت محور سے اوپر جانب رقبہ منفی محور سے نیچے جانب رقبہ کے برابر ہو گی۔

اس کا مطلب ہے کہ رقبہ کو مکمل سے حاصل کرتے ہوئے دھیان رکھنا ہو گا۔

مثال 5.40: وقفہ $0 \leq x \leq 3$ پر منفی $y = 4 - x^2$ اور x محور کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

حل: x پر وقفہ $[0, 3]$ کو منفی دو خانوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ایک خانے میں $f(x) = 4 - x^2$ کی قیمت مثبت اور دوسرے خانے میں منفی ہے (شکل 5.43)۔ منفی اور x محور کے نیچے رقبہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان خانوں پر مکمل لے کر جوابات کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔



شکل 5.43: کچھ رقبہ x محور سے اور کچھ اس سے نیچے پایا جاتا ہے (مثال 5.40)۔

وقفہ $[0, 2]$ پر مکمل:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4 - x^2) dx &= \int_0^2 4 dx - \int_0^2 x^2 dx \\ &= 4(2 - 0) - \frac{(2)^3}{3} \\ &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

مساوات 5.16 اور مساوات 5.18

وقفہ $[2, 3]$ پر مکمل:

$$\begin{aligned}\int_2^3 (4 - x^2) dx &= \int_2^3 4 dx - \int_2^3 x^2 dx \\ &= 4(3 - 2) - \left(\frac{(3)^2}{3} - \frac{(2)^2}{3} \right) \\ &= 4 - \frac{19}{3} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

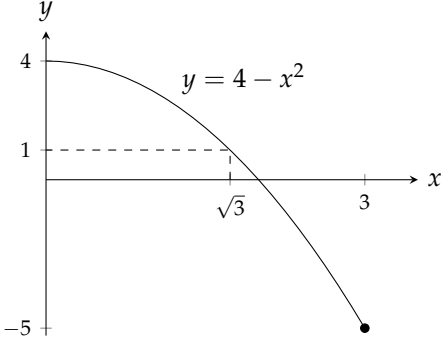
مساوات 5.16 اور مثال 5.37

□

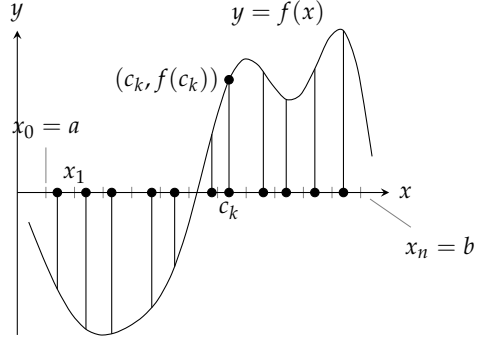
کل رقبہ $\frac{16}{3} + \left| -\frac{7}{3} \right| = \frac{23}{3}$ ہو گا۔

اختیاری استمراری تفاعل کی اوسط قیمت

ہم نے مثال 5.25 میں غیر منفی استمراری تفاعل کی اوسط قیمت پر تبصرہ کیا۔ ہم اب f کا غیر منفی ہونے کی شرط کو ختم کرتے ہوئے تفاعل کی اوسط قیمت کی تعریف پیش کرنے کے قابل ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر استمراری تفاعل کم از کم ایک بار اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔



شکل 5.45: وقفہ $[0, 3]$ پر تفاعل $f = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت 1 کو تفاعل $x = \sqrt{3}$ پر اختیار کرتا ہے (مثال 5.41)۔



شکل 5.44: وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل کی نمونی قیمتیں۔

ہم دوبارہ ریاضیات سے اوسط قیمت کا تصور لیتے ہیں جہاں n اعداد کی انفرادی قیمتوں کے مجموعہ کو n سے تقسیم کرنے سے اعداد کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔ بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل f کے لئے لامتناہی تعداد کے اعداد کو لینا ہو گا لیکن ہم یکساں وقفوں پر تفاعل سے نمونہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کو برابر لمبائیوں کے n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہو گی۔ ہم ہر ذیلی وقفے پر f کی قیمت نقطہ c_k پر حاصل کرتے ہیں (شکل 5.44)۔ ان n نمونوں کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(c_k) && \text{مجموعہ کی نگار روپ} \\ &= \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x}_{[a, b] \text{ پر } f \text{ کا ریمان مجموعہ}} \end{aligned}$$

یوں نمونی قیمتوں کی اوسط قیمت ہر صورت $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ ضرب $\frac{1}{b-a}$ ہو گی۔ ہم جیسے جیسے نمونہ کی جسامت (تعداد) بڑھاتے جائیں اور خانہ بندی کے معیار کو صفر کے قریب تر کریں، یہ اوسط قیمت $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ تک پہنچے گی۔ اس نتیجہ سے ہمیں درج ذیل تعریف ملتی ہے۔

تعریف: اگر $[a, b]$ پر f قابل تکمل تفاعل ہو تب $[a, b]$ پر f کی اوسط قیمت³⁰ درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

مثال 5.41: وقفہ $[0, 3]$ پر $f(x) = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ کیا دیے گئے وقفے میں کسی نقطے پر f کی قیمت اس اوسط جتنی ہو گی؟

حل:

$$\begin{aligned} f_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 (4 - x^2) dx = \frac{1}{3} \left(\int_0^3 4 dx - \int_0^3 x^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(4(3-0) - \frac{(3)^3}{3} \right) = \frac{1}{3} (12 - 9) = 1 \end{aligned}$$

وقفہ $[0, 3]$ پر f کی اوسط قیمت 1 ہے۔ تفاعل کی قیمت یہی تب ہو گی جب $4 - x^2 = 1$ ہو گا جس سے $x = \pm\sqrt{3}$ ملتے ہیں۔ چونکہ ان دو نقطوں میں سے صرف $x = \sqrt{3}$ وقفہ $[0, 3]$ پر پایا جاتا ہے لہذا دیے گئے وقفے میں $x = \sqrt{3}$ پر f کی قیمت اوسط قیمت 1 کے برابر ہو گی (شکل 5.45)۔

□

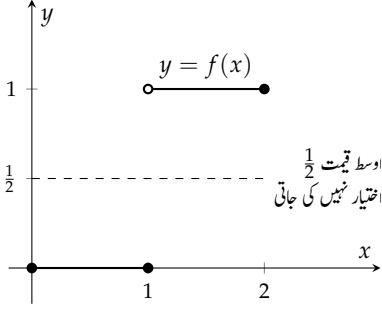
اوسط قیمت مسئلہ برائے قطعی کمالات

بند وقفہ پر استمراری تفاعل کی قیمت، بند وقفہ پر کم از کم ایک بار، تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی۔ اس فقرے کو قطعی کمالات کا اوسط قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔

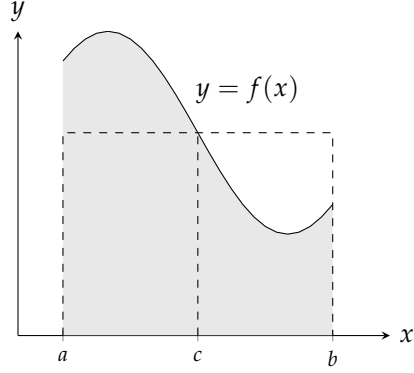
مسئلہ 5.2: مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی کمالات
اگر $[a, b]$ پر f قابل مکمل ہو تب $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر درج ذیل ہو گا (شکل 5.46)۔

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ہم نے مثال 5.41 میں f کو حاصل اوسط قیمت کے برابر پر کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کی جہاں تفاعل اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔ البتہ اس سے یہ حقیقت ثابت نہیں ہوتی ہے کہ ایسا نقطہ موجود ہونا لازمی ہے۔ اس سے صرف اتنا ثابت ہوتا ہے کہ مثال 5.41 میں ایسا نقطہ موجود تھا۔ مسئلہ 5.2 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں زیادہ عمومی دلیل درکار ہو گی۔



شکل 5.47: غیر استمراری تفاعل ضروری نہیں کہ اوسط قیمت اختیار کرے۔



شکل 5.46: وقفہ $[a, b]$ کے کسی نقطہ c پر
 $f(c) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$ ہو گا۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.2
 اگر ہم قاعدہ 6 میں (کمتر بلند تر قاعدہ) دونوں اطراف کو $(b - a)$ سے تقسیم کریں تب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f_L \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f_H$$

چونکہ f استمراری ہے لہذا استمراری تفاعل کے مسئلہ 2.9 کے تحت تفاعل f_L اور f_H کے سچ تمام قیمتیں اختیار کرے گا۔ اس طرح f ہر صورت وقفہ $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ قیمت بھی اختیار کرے گا۔

□

تفاعل کا استمراری ہونا یہاں ضروری ہے۔ غیر استمراری تفاعل اپنی اوسط قیمت کے اوپر سے چھلانگ لگا کر گزر سکتا ہے (شکل 5.47)۔

ہم مسئلہ 5.2 سے مزید کیا جان سکتے ہیں؟ ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5.42: اگر $[a, b]$ پر f قابل مکمل ہو جہاں $a \neq b$ ہے اور اگر

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

تو تب $[a, b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x) = 0$ ہو گا۔

حل: وقفہ $[a, b]$ پر f کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

□

مسئلہ 5.2 کے تحت $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر f کی اوسط قیمت اختیار کرے گا۔

سوالات

معلوم خواص اور قیمتوں سے دیگر تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال 5.311: فرض کریں f اور g استمراری ہیں اور درج ذیل کمالات دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^2 f(x) dx = -4, \quad \int_1^5 f(x) dx = 6, \quad \int_1^5 g(x) dx = 8$$

صفحہ 562 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \int_2^2 g(x) dx \quad \text{ج. } \int_1^2 3f(x) dx \quad \text{د. } \int_1^5 [f(x) - g(x)] dx$$

$$\text{ب. } \int_5^1 g(x) dx \quad \text{د. } \int_2^5 f(x) dx \quad \text{و. } \int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx$$

جواب: (ا) 0، (ب) -8، (ج) -12، (د) 10، (و) -2، (و) 16

سوال 5.312: فرض کریں f اور h استمراری ہیں اور درج ذیل دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^9 f(x) dx, \quad \int_7^9 f(x) dx, \quad \int_7^9 h(x) dx = 4$$

صفحہ 562 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \int_1^9 -2f(x) dx \quad \text{ج. } \int_7^9 [2f(x) - 3h(x)] dx \quad \text{د. } \int_1^7 f(x) dx$$

$$\text{ب. } \int_7^9 [f(x) + h(x)] dx \quad \text{د. } \int_9^1 f(x) dx \quad \text{و. } \int_9^7 [h(x) - f(x)] dx$$

سوال 5.313: فرض کریں $\int_1^2 f(x) dx = 5$ دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \int_1^2 f(u) du & \quad \text{ب. } \int_2^1 f(t) dt \\ \text{ج. } \int_1^2 [-f(x)] dx & \quad \text{د. } \int_1^2 \sqrt{3}f(z) dz \end{aligned}$$

جواب: (ا) 5، (ب) $5\sqrt{3}$ ، (ج) -5، (د) -5

سوال 5.314: فرض کریں $\int_{-3}^0 g(t) dt = \sqrt{2}$ دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} \text{ا. } \int_0^{-3} g(t) dt & \quad \text{ب. } \int_{-3}^0 g(u) du \\ \text{ج. } \int_{-3}^0 [-g(x)] dx & \quad \text{د. } \int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}} dr \end{aligned}$$

سوال 5.315: فرض کریں f استمراری ہے جبکہ $\int_0^3 f(z) dz = 3$ اور $\int_0^4 f(z) dz = 7$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \int_3^4 f(z) dz \quad \text{ب. } \int_4^3 f(t) dt$$

جواب: (ا) 4، (ب) -4

سوال 5.316: فرض کریں h استمراری ہے جبکہ $\int_{-1}^1 h(r) dr = 0$ اور $\int_{-1}^3 h(r) dr = 6$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \int_1^3 h(r) dr \quad \text{ب. } -\int_3^1 h(u) du$$

سوال 5.317 تا سوال 5.328 میں دیے نکل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} \text{سوال 5.317: } \int_3^1 7 dx & \\ \text{جواب: } -14 & \end{aligned}$$

$$\text{سوال 5.318: } \int_0^{-2} \sqrt{2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{سوال 5.319: } \int_0^2 5x dx & \\ \text{جواب: } 10 & \end{aligned}$$

$$\text{سوال 5.320: } \int_3^5 \frac{x}{8} dx$$

سوال 5.321: $\int_0^2 (2t - 3) dt$
جواب: -2

سوال 5.322: $\int_0^{\sqrt{2}} (t - \sqrt{2}) dt$

سوال 5.323: $\int_2^1 (1 + \frac{z}{2}) dz$
جواب: $-\frac{7}{4}$

سوال 5.324: $\int_3^0 (2z - 3) dz$

سوال 5.325: $\int_1^2 3u^2 du$
جواب: 7

سوال 5.326: $\int_{1/2}^1 24u^2 du$

سوال 5.327: $\int_0^2 (3x^2 + x - 5) dx$
جواب: 0

سوال 5.328: $\int_1^0 (3x^2 + x - 5) dx$

رقبہ
سوال 5.329 تا سوال 5.332 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

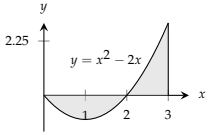
سوال 5.329: $x = 0$ تا $x = 2$ کے مابین منحنی $y = x^2 - 1$ اور y محور کے بیچ رقبہ (شکل 5.48)۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 5.330: رقبہ شکل 5.49 میں دکھایا گیا ہے۔

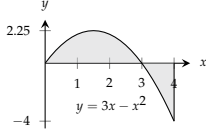
سوال 5.331: رقبہ شکل 5.50 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\frac{19}{3}$

سوال 5.332: رقبہ شکل 5.51 میں دکھایا گیا ہے۔

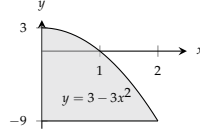
سوال 5.333 تا سوال 5.336 میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد (i) دیے وقفے پر تفاعل کھمبل کریں، اور (ب) تفاعل اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔



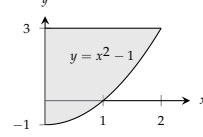
شکل 5.51: رقبہ سوال 5.332



شکل 5.50: رقبہ سوال 5.331



شکل 5.49: رقبہ سوال 5.330



شکل 5.48: رقبہ سوال 5.329

سوال 5.333: $y = x^2 - 6x + 8$, $[0, 3]$
جواب: (ا) 6، (ب) $\frac{22}{3}$

سوال 5.334: $y = -x^2 + 5x - 4$, $[0, 2]$

سوال 5.335: $y = 2x - x^2$, $[0, 3]$
جواب: (ا) 0، (ب) $\frac{8}{3}$

سوال 5.336: $y = x^2 - 4x$, $[0, 5]$

اوسط قیمت
سوال 5.337 تا سوال 5.344 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اس وقفے پر تفاعل کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ دیے گئے وقفہ پر کس نقطہ یا نقطوں پر تفاعل کی قیمت اس کی اوسط قیمت کے برابر ہوگی؟

سوال 5.337: $f(x) = x^2 - 1$, $[0, \sqrt{3}]$
جواب: $x = 1$ پر اوسط قیمت $f_{\text{اوسط}} = 0$ اختیار کی جاتی ہے۔

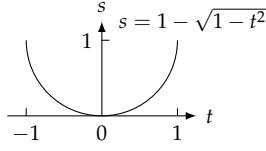
سوال 5.338: $f(x) = -\frac{x^2}{2}$, $[0, 3]$

سوال 5.339: $f(x) = -3x^2 - 1$, $[0, 1]$
جواب: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ پر اوسط قیمت $f_{\text{اوسط}} = -2$ اختیار کی جاتی ہے۔

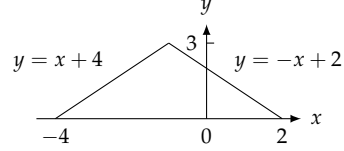
سوال 5.340: $f(x) = 3x^2 - 3$, $[0, 1]$

سوال 5.341: $f(t) = (t - 1)^2$, $[0, 3]$
جواب: $t = 0$ اور $t = 2$ پر اوسط قیمت $f_{\text{اوسط}} = 1$ اختیار کی جاتی ہے۔

سوال 5.342: $f(t) = t^2 - t$, $[-2, 1]$



شکل 5.53



شکل 5.52

سوال 5.343: $g(x) = |x| - 1$, $[-1, 3]$ (ج), $[1, 3]$ (ب), $[0, 3]$ (ا)
 جواب: (ا) $x = \pm \frac{1}{2}$ پر اوسط قیمت $g_{\text{اوسط}} = -\frac{1}{2}$ اختیار کی جاتی ہے۔ (ب) $x = 2$ پر $g_{\text{اوسط}} = 1$ اختیار کی جاتی ہے۔
 (ج) $x = \frac{5}{4}$ پر $g_{\text{اوسط}} = \frac{1}{4}$ اختیار کی جاتی ہے۔

سوال 5.344: $h(x) = -|x|$, $[-1, 1]$ (ج), $[0, 1]$ (ب), $[-1, 0]$ (ا)

سوال 5.345 تا سوال 5.348 دیے گئے وقفہ پر تفاعل کی اوسط قیمت (بغیر مکمل) تلاش کریں۔

سوال 5.345:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & -4 \leq x \leq -1 \\ -x + 2, & -1 < x \leq 2 \end{cases} \quad [-4, 2] \quad \text{شکل 5.52}$$

جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 5.346: وقفہ $[-1, 1]$ پر تفاعل $f(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$ جس کو شکل 5.53 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5.347: وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $f(t) = \sin t$ دیا گیا ہے۔
 جواب: 0

سوال 5.348: وقفہ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ پر تفاعل $f(\theta) = \tan \theta$ دیا گیا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.349: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

جواب: بالائی حدود = 1، زیریں حدود = 1/2

سوال 5.350: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کا بہتر اندازہ حاصل کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

سوال 5.351: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ کی قیمت کسی صورت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 5.352: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{x+8} dx$ کی قیمت $2\sqrt{2}$ اور 3 کے بیچ پائی جاتی ہے۔

سوال 5.353: فرض کریں f استمراری ہے اور $\int_1^2 f(x) dx = 4$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[1, 2]$ پر کم از کم ایک بار $f(x) = 4$ ہو گا۔

سوال 5.354: فرض کریں $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہیں جہاں $a \neq b$ ہے۔ مزید $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = 0$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[a, b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x) = g(x)$ ہو گا۔

سوال 5.355: غیر منفی تفاعل کا مکمل
کمتر بلند تر عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل مکمل ہے۔

$$f(x) \geq 0, \quad [a, b] \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

سوال 5.356: غیر مثبت تفاعل کا مکمل
درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل مکمل ہے۔

$$f(x) \leq 0, \quad [a, b] \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

سوال 5.357: عدم مساوات $\sin x \leq x$ کسی بھی $x \geq 0$ کے لئے درست ہے۔ مکمل $\int_0^1 \sin x dx$ کی قیمت کی بالائی حد تلاش کریں۔
جواب: بالائی حد $1/2$

سوال 5.358: وقفہ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پر عدم مساوات $\sec x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ درست ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے $\int_0^1 \sec x \, dx$ کی قیمت کی زیریں حد تلاش کریں۔

سوال 5.359: اگر $[a, b]$ پر قابل عمل f کی عمومی قیمت $f_{\text{اوسط}}$ ہو تب $[a, b]$ پر عدد $f_{\text{اوسط}}$ اور f کے مکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ کیا ایسا ہوتا ہے؟ کیا درج ذیل درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b f_{\text{اوسط}} \, dx = \int_a^b f \, dx$$

سوال 5.360: کیا اچھا ہوتا کہ وقفہ $[a, b]$ پر قابل عمل تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل قواعد پر پورا اترتی۔

ا. $(f + g)_{\text{اوسط}} = f_{\text{اوسط}} + g_{\text{اوسط}}$

ب. $(kf)_{\text{اوسط}} = k(f_{\text{اوسط}})$

ج. $f(x) \leq g(x)$ اگر $f_{\text{اوسط}} \leq g_{\text{اوسط}}$

سوال 5.361: اگر 150 km h^{-1} فاصلہ طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار 30 km h^{-1} اور واپسی اسی راہ کو طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار 50 km h^{-1} ہو تب دونوں اطراف کو ملا کر آپ کی اوسط رفتار کتنی ہو گی؟
جواب: 37.5 km h^{-1}

سوال 5.362: ایک ڈیم سے $10 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے 1000 m^3 پانی خارج کیا گیا اور اس کے بعد $20 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے مزید 1000 m^3 پانی خارج کیا گیا۔ پانی خارج کرنے کی اوسط شرح دریافت کریں۔

5.7 بنیادی مسئلہ

اس حصہ میں تکنیکی احصاء کا بنیادی مسئلہ پیش کیا جائے گا جو مکمل اور تفرق کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اس مسئلہ نے ریاضیات میں بہت زیادہ ترقی کو ممکن بنایا جس نے اگلے دو صدیوں تک سائنس میں پہل چلا دی۔ انسانی تاریخ میں اس مسئلہ کی دریافت کو سب سے زیادہ اہم تصور کیا جاتا ہے۔ لہنز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس مسئلہ کو دریافت کیا۔

بنیادی مسئلہ، جزو اول

قابل مکمل تقابل $f(t)$ کا مقررہ عدد a سے عدد x تک مکمل از خود ایک تقابل F ہو گا جس کی x پر قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$(5.19) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

مثال کے طور پر اگر f غیر منفی ہو اور a کے دائیں جانب x پایا جاتا ہو تب a تا x ترسیم کے نیچے رقبہ $F(x)$ ہو گا۔ مکمل کا بالائی حد x ہے اور F کسی بھی حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تقابل کی طرح ایک تقابل ہے۔ یوں متغیر x کی ہر قیمت کے لئے $F(x)$ ایک مخصوص قیمت دیگا جو a تا x تقابل f کا مکمل ہو گا۔

نئے تقابل متعارف کرنے کی ایک اہم ترکیب مساوات 5.19 دیتی ہے جو تفرقی مساوات کا حل بھی دیتی ہے (جس پر کچھ دیر میں غور کیا جائے گا)۔ مساوات 5.19 کا یہاں ذکر کرنا اس لئے ضروری ہے کہ یہ مکمل اور تفرق کے بیچ تعلق بیان کرتی ہے۔ یوں اگر f کوئی بھی استمراری تقابل ہو تب F متغیر x کا قابل تفرق تقابل ہو گا جس کا تفرق f ہو گا۔ اس طرح ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

یہ تصور اتنا اہم ہے کہ یہ احصاء کے بنیادی مسئلہ کا پہلا جزو دیتا ہے۔

مسئلہ 5.3: احصاء کا بنیادی مسئلہ، جزو اول
اگر $[a, b]$ پر f استمراری ہو تب $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ کا درج ذیل تفرق پایا جائے گا۔

$$(5.20) \quad \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

یہ نتیجہ خوبصورت، طاقتور اور حیران کن ہے اور عین ممکن ہے کہ مساوات 5.20 پوری ریاضیات میں اہم ترین مساوات ہو۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تقابل f کے لئے تفرقی مساوات $\frac{dF}{dx} = f$ کا حل موجود ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تقابل f کسی دوسرے تقابل، یعنی $\int_a^x f(t) dt$ کا تفرق ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تقابل کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے۔ اور یہ کہتی ہے کہ مکمل اور تفرق کے عمل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.3
ہم تفرق کی تعریف کو تقابل $F(x)$ پر لاگو کرتے ہوئے اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل حاصل تقسیم

$$(5.21) \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

لکھ کر دکھاتے ہیں کہ $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے اس کا حد $f(x)$ ملتا ہے۔

مساوات 5.21 میں $F(x+h)$ اور $F(x)$ کی کھلی روپ پر کرنے سے شمار کنندہ درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

صفحہ 562 پر جمع پذیری کا قاعدہ برائے کھلات دائیں ہاتھ کی درج ذیل سادہ روپ دیتی ہے

$$\int_x^{x+h} f(t) dt$$

لہذا مساوات 5.21 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} [F(x+h) - F(x)] \\ (5.22) \quad &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی کھلات (مسئلہ 5.2) کے تحت مساوات 5.22 میں دی گئی آخری تعلق کی قیمت، وقفہ x تا $x+h$ پر f کی کسی ایک قیمت کے برابر ہوگی۔ یوں اس وقفہ میں کسی عدد c پر درج ذیل ہوگا۔

$$(5.23) \quad \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

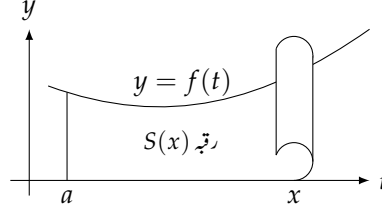
یوں $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے $\frac{1}{h}$ ضرب کھل $\int_x^{x+h} f(t) dt$ کی قیمت جاننے کی لئے ہم $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے $f(c)$ کی قیمت پر نظر رکھتے ہیں۔

جیسے جیسے $h \rightarrow 0$ ہوتا ہے ویسے ویسے وقفے کا سر $x+h$ اس کے سر x کے قریب سے قریب ہوتا جاتا ہے جس کی وجہ سے c بھی x کے قریب سے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ چونکہ x پر f استمراری ہے لہذا $f(c)$ کی قیمت $f(x)$ کے قریب سے قریب پہنچتی ہے:

$$(5.24) \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

دوبارہ شروع سے بات کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} && \text{تفرق کی تعریف} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt && \text{مساوات 5.22} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) && \text{مساوات 5.23} \\ &= f(x) && \text{مساوات 5.24} \end{aligned}$$



شکل 5.54: نقطہ x پر زمین کو قالین شرح $f(x) = \frac{dA}{dx}$ سے ڈھانپتا ہے۔

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگر f کی قیمتیں مثبت ہوں تب درج ذیل مساوات

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

کی ایک خوبصورت جیومیٹریائی معنی اخذ کی جاسکتی ہے۔ چونکہ تب a تا x تفاعل f کا مکمل a تا x محور x اور f کے پچھ رقبہ ہو گا۔ فرض کریں کہ آپ اس رقبہ پر بائیں سے دائیں چلتے ہوئے ایک قالین بچھاتے ہیں جس کی متغیر چوڑائی $f(t)$ ہو۔ جب قالین نقطہ x سے گزرتا ہے اس لمحہ زمین ڈھانپنے کی شرح $f(x)$ ہوگی (شکل 5.54)۔

مثال 5.43:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\pi}^x \cos t dt &= \cos x & \text{مساوات 5.20 میں } f(t) &= \cos t \\ \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{1}{1+x^2} & \text{مساوات 5.20 میں } f(t) &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

□

مثال 5.44: اگر $y = \int_1^{x^2} \cos t dt$ ہو تب $\frac{dy}{dx}$ کیا ہوگا؟

حل: دھیان رہے کہ مکمل کا بالائی حد x^2 ہے تاکہ x لہذا $\frac{dy}{dx}$ تلاش کرتے ہوئے y کو

$$y = \int_1^u \cos t dt \quad \text{اور} \quad u = x^2$$

کا مرکب تصور کر کے زنجیری قاعدہ استعمال کرنا ہو گا:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} && \text{زنجیری قاعدہ} \\
 &= \frac{d}{du} \int_1^u \cos t \, dt \cdot \frac{du}{dx} && y \text{ کا کلیہ پر کیا گیا ہے} \\
 &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} && \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \cos t \text{ ہے} \\
 &= \cos x^2 \cdot 2x && u = x^2 \\
 &= 2x \cos x^2 && \text{جواب کی عمومی صورت}
 \end{aligned}$$

□

مثال 5.45: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کو مکمل کی صورت میں لکھیں۔

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \tan x && \text{تفرقی مساوات} \\
 y(1) &= 5 && \text{ابتدائی معلومات}
 \end{aligned}$$

حل: درج ذیل تفاعل

$$F(x) = \int_1^x \tan t \, dt$$

$\tan t$ کا الٹ تفرق ہے۔ یوں مساوات کا عمومی حل

$$y = \int_1^x \tan u \, dt + C$$

ہو گا جہاں مستقل C کی قیمت ابتدائی معلومات سے اخذ ہو گی:

$$\begin{aligned}
 5 &= \int_1^1 \tan t \, dt + C && y(1) = 5 \\
 5 &= 0 + C \\
 C &= 5
 \end{aligned}$$

(5.25)

ابتدائی قیمت مسئلے کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \int_1^x \tan t \, dt + 5$$

تفاعل $F(x)$ لکھتے ہوئے ہم نے مکمل کا زیریں حد 1 کیوں منتخب کیا؟ درحقیقت ہم کسی بھی عدد کو زیریں حد منتخب کر سکتے ہیں لیکن ابتدائی معلومات میں دی گئی x کی ابتدائی قیمت $x = 1$ بہترین انتخاب ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ابتدائی شرط لاگو کرتے ہوئے مکمل کی قیمت صفر حاصل ہوتی ہے (جیسے مساوات 5.25 میں ہوئی) اور C خود بخود y کی ابتدائی قیمت کے برابر حاصل ہو گی۔ □

قطعی مکمل کی قیمت کا حصول

ہم اب احصاء کے بنیادی مسئلے کے جزو دوم کی بات کرتے ہیں جو قطعی مکمل کی قیمت حاصل کرنے کے بارے میں ہے۔

مسئلہ 5.4: احصاء کا بنیادی مسئلہ، جزو دوم
اگر $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر f استمراری ہو اور $[a, b]$ پر f کا الٹ تفرق F ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$(5.26) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

درج بالا مسئلہ کہتا ہے کہ a تا b استمراری تفاعل f کے مکمل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہمیں f کا الٹ تفرق F چاہیے جس سے قطعی مکمل کی قیمت $F(b) - F(a)$ حاصل ہو گی۔ الٹ تفرق کی موجودگی کو بنیادی مسئلے کا جزو اول یقینی بناتا ہے۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.4
ہم جانتے ہیں کہ ایک جیسے تفرق رکھنے والے تفاعل میں صرف مستقل کا فرق ممکن ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ درج ذیل ایک تفاعل ہے جس کا تفرق f ہے۔

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

یوں اگر F ایسا دوسرا تفاعل ہو جس کا تفرق f ہو تب پورے $[a, b]$ پر درج ذیل ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

$$(5.27) \quad F(x) = G(x) + C$$

آئیں مساوات 5.27 سے $F(b) - F(a)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt - 0 = \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

یوں مساوات 5.26 حاصل ہوتا ہے جس کے ساتھ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 5.46:

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0 \quad \text{ا.}$$

$$\int_{-\pi/4}^0 \sec x \tan x \, dx = \sec x \Big|_{-\pi/4}^0 = \sec 0 - \sec(-\pi/4) = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ب.}$$

ج.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx &= \left[x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{x} \right]_1^4 \\ &= \left[(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{4} \right] - \left[(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{1} \right] \\ &= [8 + 1] - [5] = 4 \end{aligned}$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں x اور x^2 کے مکمل کے کلیات دریافت کیے جن کی وضاحت مسئلہ 5.4 کرتا ہے۔ ہم اب دیکھ سکتے ہیں کہ a اور b کی علامتوں پر کسی پابندی کے بغیر درج ذیل ہو گا۔

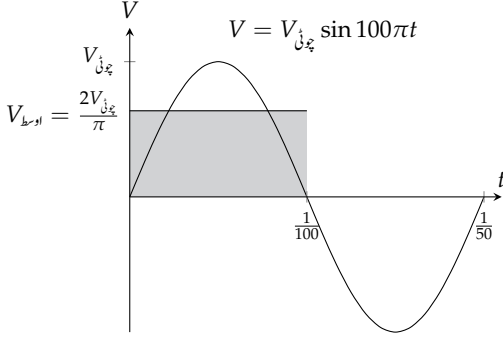
$$\int_a^b x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{چونکہ } x \text{ کا الٹ تفرق } \frac{x^2}{2} \text{ ہے}$$

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \text{چونکہ } x^2 \text{ کا الٹ تفرق } \frac{x^3}{3} \text{ ہے}$$

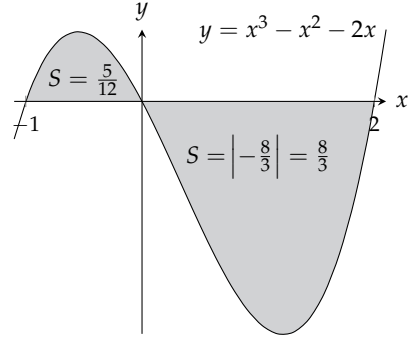
مثال 5.47: تقابل $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ کی ترسیم اور x محور کے بیچ $x = -1$ تا $x = 2$ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلے f کے صفر تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ f کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$



شکل 5.56: گھریلو برقی دباؤ کی ترسیم۔ نصف چکر کا اوسط
جگہ مکمل چکر کا اوسط صفر ہے۔
 $\frac{2V_{\text{پیک}}}{\pi}$



شکل 5.55: تقاطع $y = x^3 - x^2 - 2x$ اور x
محور کے بیچ رقبہ (مثال 5.47)۔

لہذا اس کے صفر $x = 0$ ، $x = -1$ اور $x = 2$ ہوں گے جو $[-1, 2]$ کو دو خانوں میں تقسیم کرتا ہے (شکل 5.55)۔
خانہ $[-1, 0]$ میں $f \geq 0$ اور خانہ $[0, 2]$ میں $f \leq 0$ ہے۔ ہم f کا مکمل دونوں ذیلی وقفوں پر علیحدہ علیحدہ حاصل کر
کے ان کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right] = \frac{5}{12} \end{aligned} \quad \text{ذیلی وقفہ } [-1, 0] \text{ پر مکمل}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 \\ &= \left[4 - \frac{8}{3} - 4 \right] - 0 = -\frac{8}{3} \end{aligned} \quad \text{ذیلی وقفہ } [0, 2] \text{ پر مکمل}$$

$$\text{کل رقبہ} = \frac{5}{12} + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12}$$

□

مثال 5.48: گھریلو برقی
ہمارے گھروں میں بدلتی رو برقی دباؤ فراہم کی جاتی ہے جس کی نمونہ کشی درج ذیل سائن تقاطع کرتا ہے

$$V = V_{\text{پیک}} \sin 100\pi t$$

جہاں V اور t کی اکائیاں بالترتیب وولٹ اور سیکنڈ ہیں۔ اس تقاطع کی تعدد 50 ہرٹز یعنی پچاس چکر فی سیکنڈ ہے۔ مثبت مستقل
کو دباؤ کی چوٹی³¹ کہتے ہیں۔

³¹ peak voltage

نصف چکر ($\frac{1}{100}$ دورانیہ) پر V کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں (شکل 5.56)۔

$$\begin{aligned} V_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right) - 0} \int_0^{1/100} V_{\text{چُنّی}} \sin 100\pi t \, dt \\ &= 100V_{\text{چُنّی}} \left[-\frac{1}{100\pi} \cos 100\pi t \right]_0^{1/100} \\ &= \frac{V_{\text{چُنّی}}}{\pi} [-\cos \pi + \cos 0] \\ &= \frac{2V_{\text{چُنّی}}}{\pi} \end{aligned}$$

□

مکمل چکر پر گھریلو برقی دباؤ کی اوسط صفر ہے جو شکل 5.56 کو دیکھ کر ظاہر ہے (سوال 5.426 بھی دیکھیں)۔ اوسط برقی دباؤ پینا ہماری گھریلو برقی دباؤ کو صفر ناچے گی۔

برقی دباؤ کی پینائش موثر طریقہ سے کرنے کی خاطر ہم ایسا آلہ استعمال کرتے ہیں جو برقی دباؤ کے مربع کی اوسط کے جذر ($V_{\text{موثر}}$) کی پینائش کرتا ہو:

$$V_{\text{موثر}} = \sqrt{(V^2)_{\text{اوسط}}}$$

چونکہ $V^2 = (V_{\text{چُنّی}})^2 \sin^2 100\pi t$ کی ایک چکر پر اوسط قیمت درج ذیل ہے

$$(5.28) \quad (V^2)_{\text{اوسط}} = \frac{1}{(1/50) - 0} \int_0^{1/50} (V_{\text{چُنّی}})^2 \sin^2 100\pi t \, dt = \frac{(V_{\text{چُنّی}})^2}{2}$$

لہذا موثر برقی دباؤ درج ذیل ہو گی (سوال 5.426-ج)۔

$$(5.29) \quad V_{\text{موثر}} = \sqrt{\frac{(V_{\text{چُنّی}})^2}{2}} = \frac{V_{\text{چُنّی}}}{\sqrt{2}}$$

گھریلو برقی دباؤ اور برقی رو کی قیمتوں کا ذکر کرتے ہوئے ان کی موثر قیمتیں بتائی جاتی ہیں۔ یوں 230 وولٹ بدلتا برقی دباؤ سے مراد برقی دباؤ کی موثر قیمت ہے جس کی چوٹی درج ذیل ہو گی جو موثر قیمت سے کافی زیادہ ہے۔

$$V_{\text{چُنّی}} = \sqrt{2} V_{\text{موثر}} = \sqrt{2} \cdot 230 = 325 \quad (\text{وولٹ})$$

سوالات

تکمیل کی قیمت کا حصول
سوال 5.363 تا سوال 5.388 میں تکمیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-2}^0 (2x + 5) dx \quad \text{سوال 5.363}$$

جواب: 6

$$\int_{-3}^4 (5 - \frac{x}{2}) dx \quad \text{سوال 5.364}$$

$$\int_0^4 (3x - \frac{x^3}{4}) dx \quad \text{سوال 5.365}$$

جواب: 8

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 2x + 3) dx \quad \text{سوال 5.366}$$

$$\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx \quad \text{سوال 5.367}$$

جواب: 1

$$\int_0^5 x^{3/2} dx \quad \text{سوال 5.368}$$

$$\int_1^{32} x^{-6/5} dx \quad \text{سوال 5.369}$$

جواب: $\frac{5}{2}$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2} dx \quad \text{سوال 5.370}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad \text{سوال 5.371}$$

جواب: 2

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx \quad \text{سوال 5.372}$$

$$\int_0^{\pi/3} 2 \sec^2 x dx \quad \text{سوال 5.373}$$

جواب: $2\sqrt{3}$

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \csc^2 x dx \quad \text{سوال 5.374}$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc \theta \cot \theta \, d\theta \quad \text{سوال 5.375:}$$

جواب: 0

$$\int_0^{\pi/3} 3 \sec u \tan u \, du \quad \text{سوال 5.376:}$$

$$\int_{\pi/2}^0 \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt \quad \text{سوال 5.377:}$$

جواب: $-\frac{\pi}{4}$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt \quad \text{سوال 5.378:}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8y^2 + \sin y) \, dy \quad \text{سوال 5.379:}$$

جواب: $\frac{2\pi^3}{3}$

$$\int_{-\pi/3}^{-\pi/4} (4 \sec^2 t + \frac{\pi}{t^2}) \, dt \quad \text{سوال 5.380:}$$

$$\int_1^{-1} (r+1)^2 \, dr \quad \text{سوال 5.381:}$$

جواب: $-\frac{8}{3}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)(t^2+4) \, dt \quad \text{سوال 5.382:}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^1 (\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}) \, du \quad \text{سوال 5.383:}$$

جواب: $-\frac{3}{4}$

$$\int_{1/2}^1 (\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^4}) \, dv \quad \text{سوال 5.384:}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2} \, ds \quad \text{سوال 5.385:}$$

جواب: $\sqrt{2} - \sqrt[4]{8} + 1$

$$\int_9^4 \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \, du \quad \text{سوال 5.386:}$$

$$\int_{-4}^4 |x| \, dx \quad \text{سوال 5.387:}$$

جواب: 16

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos x + |\cos x|) \, dx \quad \text{سوال 5.388:}$$

تکمیل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل
سوال 5.389 تا سوال 5.396 میں بدل کی استعمال سے الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے بنیادی مسئلہ کی مدد سے تکمیل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5.389: $\int_0^1 (1 - 2x)^3 dx$
جواب: 0

سوال 5.390: $\int_1^2 \sqrt{3x + 1} dx$

سوال 5.391: $\int_0^1 t\sqrt{t^2 + 1} dt$
جواب: $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

سوال 5.392: $\int_{-1}^2 \frac{t dt}{\sqrt{2t^2 + 8}}$

سوال 5.393: $\int_0^\pi \sin^2(1 + \frac{\theta}{2}) d\theta$
جواب: $\frac{\pi}{2} + \sin 2$

سوال 5.394: $\int_{3\pi/8}^{\pi/2} \sec^2(\pi - 2\theta) d\theta$

سوال 5.395: $\int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} dx$
جواب: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

سوال 5.396: $\int_{2\pi/3}^\pi \tan^3 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} dx$

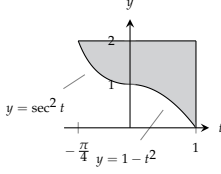
رقبہ
سوال 5.397 تا سوال 5.402 میں دیے وقفے پر تفاعل کی ترسیم اور x محور کے بیچ کل رقبہ تلاش کریں۔

سوال 5.397: $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \leq x \leq 2$
جواب: $\frac{28}{3}$

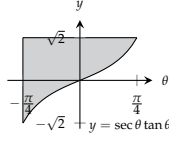
سوال 5.398: $y = 3x^2 - 3, \quad -2 \leq x \leq 2$

سوال 5.399: $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$
جواب: $\frac{1}{2}$

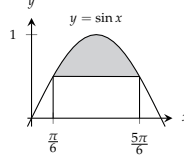
سوال 5.400: $y = x^3 - 4x, \quad -2 \leq x \leq 2$



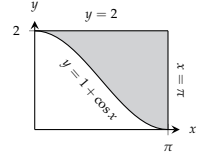
شکل 5.60



شکل 5.59



شکل 5.58



شکل 5.57

سوال 5.401: $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 8$
جواب: $\frac{51}{4}$

سوال 5.402: $y = x^{1/3} - x$, $-1 \leq x \leq 8$

سوال 5.403 تا سوال 5.406 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 5.403: وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر تقاطع $y = 1 + \cos x$ اور $y = 2$ کے رقبہ (شکل 5.57)۔
جواب: π

سوال 5.404: وقفہ $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ پر $y = \sin x$ اور $y = \frac{1}{2}$ کے رقبہ (شکل 5.58)۔

سوال 5.405: وقفہ $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ پر $y = \sec \theta \tan \theta$ اور $y = \sqrt{2}$ کے رقبہ (شکل 5.59)۔
جواب: $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

سوال 5.406: وقفہ $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0$ پر $y = \sec^2 t$ اور وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر $y = 1 - t^2$ ہے۔ ان تقاطع اور $y = 2$ کے رقبہ (شکل 5.60)۔

تکمل کا تفرق سوال 5.407 تا سوال 5.410 میں (i) مکمل حل کر کے جواب کا تفرق لیں، (ب) مکمل سے سیدھا تفرق حاصل کریں۔

سوال 5.407: $\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t \, dt$
جواب: $(\cos \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

سوال 5.408: $\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} 3t^2 \, dt$

سوال 5.409: $\frac{d}{dt} \int_0^{t^4} \sqrt{u} \, du$
جواب: $4t^5$

سوال 5.410: $\frac{d}{d\theta} \int_0^{\tan \theta} \sec^2 y \, dy$

سوال 5.411 تا سوال 5.416 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 5.411: $y = \int_0^x \sqrt{1+t^2} \, dt$
جواب: $\sqrt{1+x^2}$

سوال 5.412: $y = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt, \quad x > 0$

سوال 5.413: $y = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) \, dt$
جواب: $\frac{1}{2}x^{-1/2} \sin x$

سوال 5.414: $y = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} \, dt$

سوال 5.415: $y = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$
جواب: 1

سوال 5.416: $y = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل تفاعل سوال 5.417 تا سوال 5.420 میں کسی ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔ کون سا تفاعل کس مسئلے کو حل کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ا. $y = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt - 3$ ج. $y = \int_{-1}^x \sec t \, dt + 4$

ب. $y = \int_0^x \sec t \, dt + 4$ د. $y = \int_{\pi}^x \frac{1}{t} \, dt - 3$

سوال 5.417: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$
جواب: چونکہ $y' = \frac{1}{x}$ اور $y(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{t} \, dt - 3 = -3$ ہیں لہذا درست ہے۔

سوال 5.418: $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

سوال 5.419: $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$
جواب: چونکہ $y = \sec x$ اور $y(0) = \int_0^0 \sec t \, dt + 4 = 4$ ہیں لہذا درست ہے۔

سوال 5.420: $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

سوال 5.421 تا سوال 5.424 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل کو مکمل کی صورت میں لکھیں۔

سوال 5.421: $\frac{dy}{dx} = \sec x$, $y(2) = 3$
جواب: $y = \int_2^x \sec t \, dt + 3$

سوال 5.422: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2}$, $y(1) = -2$

سوال 5.423: $\frac{ds}{dt} = f(t)$, $s(t_0) = s_0$
جواب: $s = \int_{t_0}^t f(x) \, dx + s_0$

سوال 5.424: $\frac{dv}{dt} = g(t)$, $v(t_0) = v_0$

عملی استعمال

سوال 5.425: قطع مکانی کے رقبہ کا آرشیڈی کلیہ
آرشیڈس (212-287 قبل مسیح) نے قطع مکانی کے نیچے رقبہ کا کلیہ دریافت کیا جس کے تحت قد ضرب قاعدہ کی دو تہائی رقبہ ہو گا۔

ا. مکمل کی مدد سے درج محراب $y = 6 - x - x^2$, $-3 \leq x \leq 2$ کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

ب. محراب کا قد تلاش کریں۔

ج. دکھائیں کہ قاعدہ b ضرب قد h کی دو تہائی اس رقبہ کے برابر ہو گا۔

د. b اور h کو مثبت تصور کرتے ہوئے $-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}$ پر قطع مکانی محراب $y = h - (\frac{4h}{b^2})x^2$ ترسیم کریں۔ احصاء کی مدد سے اس محراب اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

جواب: (ا) $\frac{125}{6}$, (ب) $h = \frac{25}{4}$, (ج) $d = \frac{2}{3}bh$

سوال 5.426: تسلسل (مثال 5.48)

ا. درج ذیل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ ایک پورے چکر پر $V = V_{چٹی} \sin 100\pi t$ کی اوسط قیمت صفر ہو گی۔

$$\frac{1}{(1/50) - 0} \int_0^{1/50} V_{چٹی} \sin 100\pi t \, dt$$

ب. کئی ممالک میں گھریلو صارفین کو 110V فراہم کی جاتی ہے۔ ان کے ہاں برقی دباؤ کی چوٹی کتنی ہو گی؟

ج. درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_0^{1/50} (V_{پن})^2 \sin^2 100\pi t \, dt = \frac{(V_{پن})^2}{100}$$

سوال 5.427: حاشیہ لاگت سے لاگت
اشتہار چھاپنے کی حاشیہ لاگت $\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ہے جہاں x تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ (i) اشتہار 2 تا 100 چھاپنے کی لاگت
(1) $c(100) - c(1)$ تلاش کریں۔ (ب) اشتہار 101 تا 400 چھاپنے کی لاگت تلاش کریں۔
جواب: (i) 9، (ب) 10

سوال 5.428: حاشیہ آمدنی سے آمدنی
فرض کریں ایک ادارہ مرغی کے انڈے مارنے والی مشین بناتی ہے جس کی پیداوار اور فروخت سے ادارے کو $\frac{dr}{dx} = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}$ حاشیہ
آمدنی حاصل ہوتی ہے جہاں r کی اکائی ہزار روپیہ اور x کی اکائی ہزار مشین ہے۔ اگر انڈے مارنے والی مشینوں کی پیداوار $x = 3$ ہزار
ہو تب کتنی آمدنی متوقع ہوگی؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر حاشیہ آمدنی کا مکمل $x = 0$ تا $x = 3$ لیں۔

ترسیم سے حرکت کے بارے میں نتائج اخذ کرنا
سوال 5.429: فرض کریں کہ f جسے شکل 5.61 میں دکھایا گیا ہے قابل تفرق تفاعل ہے اور محور پر حرکت کرتے ہوئے ذرے کا لمحہ
 t پر مقام $s = \int_0^t f(x) \, dx$ میٹر ہے۔ شکل کی مدد سے درج ذیل کا جواب دیں اور اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. لمحہ $t = 5$ پر ذرے کی رفتار کتنی ہے؟

ب. لمحہ $t = 5$ پر ذرے کی اسراع مثبت کہ منفی ہے؟

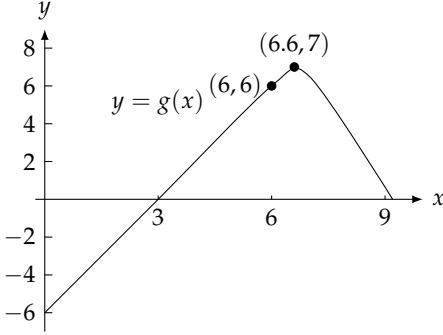
ج. لمحہ $t = 3$ پر ذرے کا مقام کیا ہے۔

د. ابتدائی 9 سیکنڈوں میں s کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہے؟

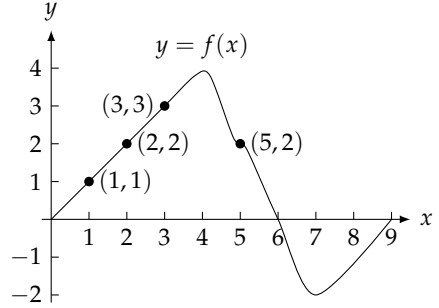
ه. کس لمحے پر اسراع تقریباً صفر ہے؟

و. ذرہ کب مبداء کی طرف اور کب اس سے دور حرکت کرتا ہے؟

ز. لمحہ $t = 9$ پر مبداء کے کس جانب ذرہ پلایا جائے گا؟



شکل 5.62: تقابل کا ترسیم برائے سوال 5.430



شکل 5.61: تقابل کا ترسیم برائے سوال 5.429

- جواب: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^1 f(x) dx = f(t) \implies v(5) = f(5) = 2 \text{ ms}^{-1}$ (ا)
 (ب) لمحہ $t = 5$ پر مماس منفی ہے لہذا $a = \frac{df}{dt}$ منفی ہو گا۔
 (ج) $s = \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2} \text{ m}$ مکمل کی قیمت درحقیقت $t = 0$ تا $t = 3$ تقابل f اور x محور کے نیچے نکتہ رقبہ ہے۔
 (د) لڑیادہ سے زیادہ فاصلہ $t = 6$ پر ہو گا چونکہ اس کے بعد $t = 6$ تا $t = 9$ تقابل f منفی ہے جس سے رقبہ گھٹائے گا۔
 (ه) $t = 4$ اور $t = 7$ پر جہاں مماس افقی ہیں۔
 (و) لمحہ $t = 6$ تا $t = 9$ رفتار منفی ہے لہذا اس دور ان ذرہ مبداء کی جانب حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ تا $t = 6$ رفتار مثبت ہے لہذا ذرہ مبداء سے دوری کے رخ حرکت کرتا ہے۔
 (ز) چونکہ $t = 0$ تا $t = 9$ مثبت رقبہ زیادہ ہے لہذا ذرہ مثبت (دائیں) جانب ہو گا۔

سوال 5.430: فرض کریں g قابل تفرق تقابل ہے (شکل 5.62) اور محور پر حرکت کرتے ہوئے ذرے کا لمحہ t پر مقام $s = \int_0^t g(x) dx$ میٹر ہے۔ ترسیم سے درج ذیل کے جوابات دیں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

- لمحہ $t = 3$ پر ذرے کی رفتار کتنی ہو گی؟
- کیا لمحہ $t = 3$ پر ذرے کی اسراع مثبت یا منفی ہے؟
- لمحہ $t = 3$ پر ذرے کا مقام کیا ہے؟
- د. رہ کس لمحے پر مبداء سے گزرتا ہے؟
- اسراع کب صفر ہے؟
- ذرہ کب مبداء سے دور اور کب مبداء کی جانب حرکت کرتا ہے؟

ز. لمحہ $t = 9$ پر ذرہ مبدا کے کس جانب ہو گا؟

حجم برائے حصہ 5.4

سوال 5.431: برائے حصہ 5.4 کی مثال 5.23

حصہ 5.4 کی مثال 5.23 میں جسم کے حجم کا تخمینہ مجموعہ درحقیقت مکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے مکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس مکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

جواب: $\int_{-2}^2 4(9 - x^2) dx = \frac{368}{3}$

سوال 5.432: برائے حصہ 5.4 کی مثال 5.24

حصہ 5.4 کی مثال 5.24 میں کرہ کے حجم کا تخمینہ مجموعہ مکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے مکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس مکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال 5.433: برائے حصہ 5.4 کا سوال 5.201

حصہ 5.4 کے سوال 5.201 میں پانی کے حجم کا تخمینہ مجموعہ مکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے مکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس مکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

جواب: $\int_4^8 \pi(64 - x^2) dx = \frac{320\pi}{3}$

سوال 5.434: برائے حصہ 5.4 کا سوال 5.203

حصہ 5.4 کے سوال 5.203 میں راکٹ کے نوک کے حجم کا تخمینہ مجموعہ مکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے مکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس مکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.435: دکھائیں کہ مثبت k کی صورت میں x محور اور محراب $y = \sin kx$ کے قیاس رقبہ $\frac{2}{k}$ ہے۔

سوال 5.436: درج ذیل تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$$

سوال 5.437: فرض کریں $\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x + 1$ ہے تب $f(x)$ تلاش کریں۔
جواب: $2x - 2$

سوال 5.438: اگر $\int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$ ہو تب $f(4)$ کتنا ہو گا؟

سوال 5.439: نقطہ $x = 1$ پر $f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt$ کی خط بندی تلاش کریں۔
جواب: $-3x + 5$

سوال 5.440: نقطہ $x = -1$ پر $g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t - 1) dt$ کی خط بندی تلاش کریں۔

سوال 5.441: فرض کریں تمام x پر f کا تفرق مثبت ہے اور $f(1) = 0$ ہے۔ تقابل $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ کے لئے درج ذیل میں سے کون سے فقرے درست ہوں گے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا. g متغیر x کا قابل تفرق تقابل ہے۔

ب. g متغیر x کا استمراری تفرق تقابل ہے۔

ج. g کے ترسیم کا $x = 1$ پر افقی مماسل پایا جاتا ہے۔

د. $x = 1$ پر g کا مقامی زیادہ سے زیادہ پایا جاتا ہے۔

ه. $x = -1$ پر g کا مقامی کم سے کم پایا جاتا ہے۔

و. $x = 1$ پر g کے ترسیم پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے۔

ز. $\frac{dg}{dx}$ کا ترسیم x محور کو $x = 1$ پر قطع کرتا ہے۔

جواب: (ا) درست، چونکہ f استمراری ہے لہذا احصاء کے بنیادی مسئلے کے جزو اول کی بنا پر g قابل تفرق ہو گا۔ (ب) درست۔ چونکہ g قابل تفرق ہے لہذا یہ استمراری ہو گا۔ (ج) درست چونکہ $g'(1) = f(1) = 0$ ہے۔ (د) غلط۔ چونکہ $g''(1) = f'(1) > 0$ ہے۔ (ه) درست۔ چونکہ $g'(1) = 0$ اور $g''(1) = f'(1) > 0$ ہیں۔ (و) غلط۔ $g''(x) = f'(x) > 0$ لہذا g'' کی علامت کبھی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ (ز) درست۔ چونکہ $g'(1) = f(1) = 0$ اور x کے ساتھ $g'(x) = f(x)$ بڑھتا تقابل ہے (چونکہ $f'(x) > 0$ ہے)۔

سوال 5.442: فرض کریں تمام x پر f کا تفرق منفی ہے اور $f(1) = 0$ ہے۔ تقابل $h(x) = \int_0^x f(t) dt$ کے لئے درج ذیل میں سے کون سے فقرے درست ہوں گے؟

ا. h متغیر x کا دو بار قابل تفرق تقابل ہے۔

ب. h اور $\frac{dh}{dx}$ دونوں استمراری ہیں۔

ج. h کے ترسیم کا $x = 1$ پر افقی مماسل پایا جاتا ہے۔

د. h کا مقامی زیادہ سے زیادہ $x = 1$ ہے۔

ه. h کا مقامی کم سے کم $x = 1$ ہے۔

و. h کے ترسیم کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر ہے۔

ز. $\frac{dh}{dx}$ کا ترسیم x محور کو $x = 1$ پر قطع کرتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 5.443: بنیادی مسئلہ

اگر f استمراری ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ کی قیمت بنیادی مسئلے کے جزو اول کی طرح $f(x)$ ہو گی۔ مثال کے طور پر اگر $f(t) = \cos t$ ہو تب

$$(5.30) \quad \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \cos t dt = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

ہو گا۔ مساوات 5.30 کا دایاں ہاتھ $\sin x$ کے تفرق کا حاصل تقسیم ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ $h \rightarrow 0$ کی صورت میں یہ $\cos x$ کے برابر ہو گا۔

تقابل $\cos x$ کو $-\pi \leq x \leq 2\pi$ پر ترسیم کریں۔ اب باری باری $h = 2$ ، $h = 1$ ، $h = 0.5$ اور $h = 0.1$ لیتے ہوئے مساوات 5.30 کے دائیں ہاتھ کو بھی x کے لحاظ سے (مختلف رنگوں میں) ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \rightarrow 0$ کرنے سے یہ ترسیم کیسے $\cos x$ کے ترسیم پر بیٹھتی ہے۔

سوال 5.444: تقابل $f(t) = 3t^2$ کے لئے سوال 5.443 دوبارہ حل کریں۔ درج ذیل کیا ہو گا؟

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} 3t^2 dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

تقابل $f(x) = 3x^2$ کو وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر ترسیم کریں۔ اب باری باری $h = 1$ ، $h = 0.5$ ، $h = 0.2$ اور $h = 0.1$ لیتے ہوئے $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ کو بھی ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \rightarrow 0$ کرنے سے یہ ترسیم کیسے $3x^2$ کے ترسیم پر بیٹھتی ہے۔

سوال 5.445 تا سوال 5.448 میں وقفہ $[a, b]$ پر تقابل f کے لئے $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ لیں۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے سوالات کے جوابات دیں۔

ا. وقفہ $[a, b]$ پر f اور F کو اکٹھے ترسیم کریں۔

ب. مساوات $F(x) = 0$ کو حل کریں۔ جس نقطہ پر $F(x) = 0$ ہے اس نقطہ پر f اور F کی ترسیمات کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ کیا آپ کا مشاہدہ ایک بار تفرق کی دی گئی قیمت اور بنیادی مسئلے کے جزو اول کو مطمئن کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ج. کس (تینوں) وقفہ پر تقابل F بڑھتا ہے اور کس پر گھٹتا ہے؟ ان وقفوں پر f کے بارے میں کیا درست ہو گا؟

د. F اور تفرق f' کو اکٹھے ترسیم کریں۔ جس نقطہ پر $f'(x) = 0$ ہے اس نقطہ پر F کی ترسیم کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ کیا آپ کا مشاہدہ بنیادی مسئلے کے جزو اول کو مطمئن کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 5.445: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

سوال 5.446: $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad [0, \frac{9}{2}]$

سوال 5.447: $f(x) = \sin 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

سوال 5.448: $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

سوال 5.449 تا سوال 5.452 میں دیے گئے a ، u اور f کے لئے $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ لیں۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے درج ذیل کے جواب دیں۔

ا. F کا دائرہ کار تلاش کریں۔

ب. $F'(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس کے صفر حاصل کریں۔ اپنے دائرہ کار میں کہاں F بڑھتا اور کہاں گھٹتا ہے؟

ج. F'' تلاش کرتے ہوئے اس کے صفر حاصل کریں۔ F کے مقامی انتہا اور نقطہ تصرف حاصل کریں۔

د. جزو-ا تا جزو-ج کے نتائج استعمال کرتے ہوئے $y = F(x)$ کا اپنے دائرہ پر خاکہ کھینچیں۔ اب کمپیوٹر پر $F(x)$ کی ترسیم کھینچ کر اس خاکے کی تصدیق کریں۔

سوال 5.449: $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

سوال 5.450: $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

سوال 5.451: $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

سوال 5.452: $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

سوال 5.453: تقابل $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt$ کا حساب کرتے ہوئے کمپیوٹر کی مدد سے نتیجے کی تصدیق کریں۔

سوال 5.454: تقابل $\frac{d^2}{dx^2} \int_a^{u(x)} f(t) dt$ کا حساب کرتے ہوئے کمپیوٹر کی مدد سے نتیجے کی تصدیق کریں۔

5.8 قطعی تکمیل میں بدل

قطع تکمیل کو بدل کی مدد سے حل کرنے کے دو طریقے پائے جاتے ہیں اور دونوں بہترین کام کرتے ہیں۔ ایک طریقہ میں بدل کے ذریعہ مطابقتی غیر قطعی تکمیل حاصل کرتے ہوئے اس کا کوئی ایک الٹ تفرق استعمال کرتے ہوئے قطعی تکمیل کو بنیادی مسئلہ سے حل کیا جاتا ہے۔ دوسری ترکیب میں درج ذیل کلیہ استعمال کیا جاتا ہے۔

قطعی تکمیل میں بدل کا کلیہ

$$(5.31) \quad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

اس کلیہ میں $u = g(x)$ پر کرتے ہوئے $du = g'(x) dx$ لکھ کر $g(a)$ تا $g(b)$ تکمیل لیں۔

قطعی تکمیل حل کرنے کی خاطر وہی u تفاعل پر کریں جو آپ غیر قطعی تکمیل کے حل میں استعمال کریں گے۔ اس کے بعد $x = a$ پر u کی قیمت سے $x = b$ پر u کی قیمت تک تکمیل لیں۔

مثال 5.49: قطعی تکمیل $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ حل کریں۔

حل: ہمارے پاس دو راستے ہیں۔

پہلی ترکیب: دیے گئے تفاعل کو غیر قطعی تکمیل میں بدلیں جس کو حل کرنے کے بعد متغیر کو واپس x صورت میں لکھیں اور x کے بالائی اور زیریں حدود استعمال کریں۔

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int \sqrt{u} du & u &= x^3 + 1, dy = 3x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} u^{3/2} + C & u &\text{ کے لحاظ سے تکمیل لیں} \\ &= \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{3/2} + C & \text{واپس } u &= x^3 + 1 \text{ پر کریں} \\ \int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{3/2} \Big|_{-1}^1 & \text{حاصل تکمیل استعمال کریں} \\ &= \frac{2}{3} [(1^3 + 1)^{3/2} - ((-1)^3 + 1)^{3/2}] \\ &= \frac{2}{3} [2^{3/2} - 0^{3/2}] = \frac{2}{3} [2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

دوسری ترکیب: مکمل کو بدل کر مساوات 5.31 میں دیے گئے نئے حدود استعمال کریں۔ ہم $u = x^3 + 1$ لیتے ہیں۔ یوں $du = 3x^2 dx$ ہو گا جبکہ حدود $u(x = -1) = 0$ اور $u(x = 1) = 2$ ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int_0^2 \sqrt{u} du & u = x^3 + 1, du = 3x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^2 & \text{نئے قطعی مکمل کی قیمت حاصل کریں} \\ &= \frac{2}{3} [2^{3/2} - 0^{3/2}] = \frac{2}{3} [2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

□

اس مثال میں دوسری ترکیب زیادہ آسان معلوم ہوتی ہے اگرچہ ایسا ہر بار نہیں ہو گا۔ آپ کو دونوں ترکیب آنے چاہیے۔

آئیں ایک اور مثال دیکھیں۔

مثال 5.50:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot \theta \csc^2 \theta d\theta &= \int_1^0 u \cdot (-du) & u = \cot \theta, du = -\csc^2 \theta d\theta \\ &= -\int_1^0 u du \\ &= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0 \\ &= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

کمپیوٹر کا استعمال

بعض اوقات الٹ تفرق کا حصول مشکل ہوتا ہے۔ بہت سارے قابل مکمل تفاعل مثلاً

$$f(x) = e^{-x^2}$$

جو نظریہ احتمال میں اہم کردار ادا کرتا ہے کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے، اگرچہ بنیادی مسئلہ کے جزو اول سے ہم جانتے ہیں کہ f کا الٹ تفرق موجود ہے۔ کمپیوٹر پر درج ذیل تکمیلی تفاعل

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ترسیم کریں۔ آپ $F(x)$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ یہ کہاں بڑھتا اور کہاں گھٹتا ہے؟ اس کے انتہا (اگر ہوں) کہاں پائے جاتے ہیں؟ اس کے ترسیم کے مقعر کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

سوالات

قطعی تکمل کی قیمت کا حصول
سوال 5.455 تا سوال 5.478 کو حل کریں۔

سوال 5.455: (ا) $\int_0^3 \sqrt{y+1} dy$ (ب) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1} dy$ (ج) $\frac{14}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

سوال 5.456: (ا) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr$ (ب) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2} dr$

سوال 5.457: (ا) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx$ (ب) $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x dx$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

سوال 5.458: (ا) $\int_0^{\pi} 3 \cos^2 x \sin x dx$ (ب) $\int_{2\pi}^{3\pi} 3 \cos^2 x \sin x dx$

سوال 5.459: (ا) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3 dt$ (ب) $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3 dt$ (ج) $\frac{15}{16}$ (د) 0

سوال 5.460: (ا) $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3} dt$ (ب) $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3} dt$

سوال 5.461: (ا) $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} dr$ (ب) $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} dr$ (ج) $\frac{1}{8}$ (د) 0

سوال 5.462: (ا) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} dv$ (ب) $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{1+v^{3/2}} dv$

سوال 5.463: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (i) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (ب) جوابات: (i) 4، (ب) 0

سوال 5.464: $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx$ (i) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx$ (ب)

سوال 5.465: $\int_0^{\pi/6} (1 - \cos 3t) \sin 3t dt$ (i) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos 3t) \sin 3t dt$ (ب) جوابات: (i) $\frac{1}{6}$ ، (ب) $\frac{1}{2}$

سوال 5.466: $\int_{-\pi/2}^0 (2 + \tan \frac{t}{2}) \sec^2 \frac{t}{2} dt$ (i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + \tan \frac{t}{2}) \sec^2 \frac{t}{2} dt$ (ب)

سوال 5.467: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3 \sin z}} dz$ (i) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3 \sin z}} dz$ (ب) جوابات: (i) 0، (ب) 0

سوال 5.468: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{3+2 \cos w} dw$ (i) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2 \cos w)^2} dw$ (ب)

سوال 5.469: $\int_0^1 \sqrt{t^5 + 2t} (5t^4 + 2) dt$ جواب: $2\sqrt{3}$

سوال 5.470: $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

سوال 5.471: $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta d\theta$ جواب: $\frac{3}{4}$

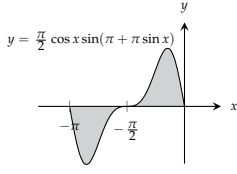
سوال 5.472: $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5 \frac{\theta}{6} \sec^2 \frac{\theta}{6} d\theta$

سوال 5.473: $\int_0^{\pi} 5(5 - 4 \cot t)^{1/4} \sin t dt$ جواب: $9^{5/4} - 1$

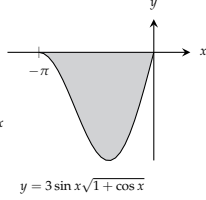
سوال 5.474: $\int_0^{\pi/4} (1 - \sin 2t)^{3/2} \cos 2t dt$

سوال 5.475: $\int_0^1 (4y - y^2 + 4y^3 + 1)^{-2/3} (12y^2 - 2y + 4) dy$ جواب: 3

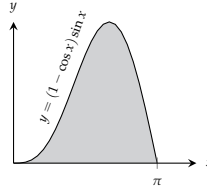
سوال 5.476: $\int_0^1 (y^3 + 6y^2 - 12y + 9)^{-1/2} (y^2 + 4y - 4) dy$



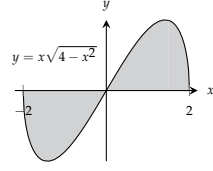
شکل 5.66



شکل 5.65



شکل 5.64



شکل 5.63

سوال 5.477: $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta} \cos^2(\theta^{3/2}) d\theta$
جواب: $\frac{\pi}{3}$

سوال 5.478: $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2} \sin^2(1 + \frac{1}{t}) dt$

سوال 5.479: رقبہ
سوال 5.482 تا سوال 5.481 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 5.479: ترسیم شکل 5.63 میں دی گئی ہے۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 5.480: ترسیم شکل 5.64 میں دی گئی ہے۔

سوال 5.481: ترسیم شکل 5.65 میں دی گئی ہے۔
جواب: $2^{5/2}$

سوال 5.482: ترسیم شکل 5.66 میں دی گئی ہے۔

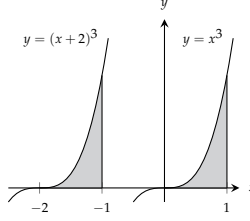
نظریہ اور مثالیں
سوال 5.483: اگر $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x > 0$ کا الٹ تفرق $F(x)$ ہو تب $\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x} dx$ کو F کی روپ میں لکھیں۔

جواب: $F(6) - F(2)$

سوال 5.484: دکھائیں کہ استمراری f کی صورت میں $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx$ ہو گا۔

سوال 5.485: اگر $\int_0^1 f(x) dx = 3$ ہو تب (i) طاق f ، (ب) جفت f کی صورت میں $\int_{-1}^0 f(x) dx$ کتنا ہو گا؟

جواب: (i) -3 ، (ب) 3



شکل 5.67: قطعی مکمل کی عدم تبدیلی بصورت خطی انتقال۔

سوال 5.486: (i) درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_{-a}^a h(x) dx = \begin{cases} 0, & h \text{ طاق} \\ 2 \int_0^a h(x) dx, & h \text{ جفت} \end{cases}$$

(ب) $a = \frac{\pi}{2}$ لیے ہوئے $h(x) = \sin x$ اور $h(x) = \cos x$ کے لئے جزو-۱ کی تصدیق کریں۔

سوال 5.487: استمراری f کے لئے درج ذیل مکمل حل کرنے کی خاطر بدل $u = a - x$ پر کر کے حاصل مکمل کے نتیجہ کو I کے ساتھ جمع کریں۔

$$I = \int_0^a \frac{f(x) dx}{f(x) + f(a-x)}$$

جواب: $I = \frac{a}{2}$

سوال 5.488: موزوں بدل استعمال کر کے تمام مثبت x اور y اعداد کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{dt}{t}$$

قطعی مکمل کی خاصیت انتقال
خطی انتقال کی صورت میں قطعی مکمل کی عدم تبدیلی جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے قطعی مکمل کی بنیادی خاصیت ہے۔

$$(5.32) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c) dx$$

یہ مساوات درکار x پر معین اور قابل تکمل f کے لئے مطمئن ہوتی ہے، مثلاً (شکل 5.67):

$$(5.33) \quad \int_{-2}^{-1} (x+2)^3 dx = \int_0^1 x^3 dx$$

سوال 5.489: کوئی بدل استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.32 کی تصدیق کریں۔

سوال 5.490: درج ذیل تمام تفاعل کے لئے $[a, b]$ پر $f(x)$ اور $[a-c, b-c]$ پر $f(x+c)$ کو ترسیم کرتے ہوئے اپنی یقین دہانی کریں کہ مساوات 5.32 مطمئن ہوتی ہے۔

$$f(x) = x^2, a = 0, b = 1, c = 1 \quad (i)$$

$$f(x) = \sin x, a = 0, b = \pi, c = \frac{\pi}{2} \quad (ب)$$

$$f(x) = \sqrt{x-4}, a = 4, b = 8, c = 5 \quad (ج)$$

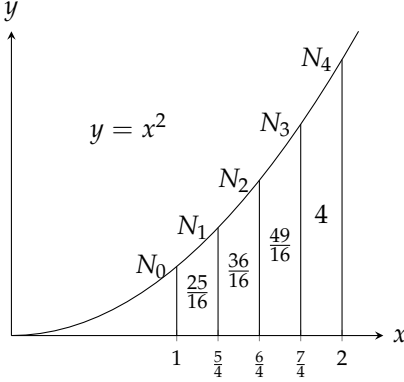
5.9 اعدادی تکمل

ہم نے دیکھا کہ $f(x)$ کے الٹ تفرق $F(x)$ کے کلیہ سے قطعی تکمل $\int_a^b f(x) dx$ کی قیمت $F(b) - F(a)$ حاصل کی جاسکتی ہے۔ بعض اوقات الٹ تفرق معلوم کرنا مشکل ہوتا ہے بلکہ بعض تفاعل، مثلاً $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم یہ نہیں کہہ رہے ہیں کہ $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کے کلیات اب تک کوئی حاصل کرنے میں کامیاب نہیں ہوا بلکہ ہم کہہ رہے ہیں کہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ان تفاعل کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے۔

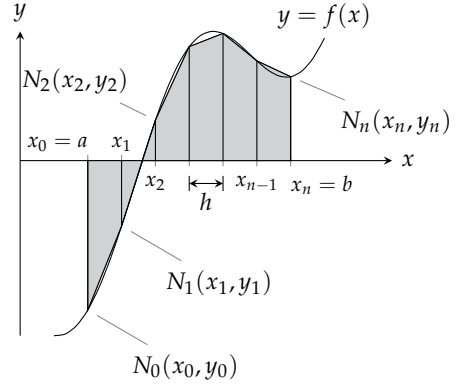
ہم جب بھی قطعی تکمل کی قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کرنے میں ناکام ہوں، ہم اعدادی تراکیب، مثلاً قاعدہ ذوزنقہ یا قاعدہ سمن بروئے کار لاتے ہیں جن پر اس حصہ میں غور کیا جائے گا۔

5.10 قاعدہ ذوزنقہ

جب کسی تفاعل جس کی قطعی تکمل کی قیمت درکار ہو کے متکمل f کا الٹ تفرق ہم دریافت نہ کر سکیں تب ہم تکمل کے وقفہ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ پر f کو تخمیناً موزوں کثیر رکنی سے ظاہر کر کے ان کثیر رکنیوں کا تکمل لے کر تمام جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں جو تکمل کی تخمینہ قیمت کے برابر ہو گا۔ کسی بھی خانہ بندی کے لئے جتنی زیادہ درجے کے کثیر رکنی منتخب کی جائیں حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔



شکل 5.69: ذوزنقہ قاعدہ تقابل $y = x^2$ کا رقبہ کچھ زیادہ دیتا ہے۔



شکل 5.68: ذوزنقہ قاعدہ برائے اعدادی مکمل۔

کسی بھی درجے کی کثیر رکنی کے لئے جتنی باریک خانہ بندی کی جائے حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا حتیٰ کہ ہم پور و پور خلل یا حد فی خلل اتنا بڑھ جائے کہ مزید باریک خانہ بندی سے حاصل جواب کی درستگی کم ہونا شروع ہو جائے۔

کم درجے کی کثیر رکنی سے بھی اچھے نتائج حاصل ہوتے ہیں بلکہ مستقیم قطعات (درجہ 1 کثیر رکنی) بھی بہترین تخمین دیتے ہیں پس ان کی تعداد کافی ہونی چاہیے۔ اس کی وجہ سمجھنے کے لئے فرض کریں ہم f کے وقفہ $[a, b]$ کو $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n قطعات میں تقسیم کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑتے ہیں (شکل 5.68)۔ لمبائی $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ کو لمبائی قدم³² کہتے ہیں جس کو یہاں Δx کی بجائے h سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ n قدموں³³ کی تعداد ہے۔ ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں سے تقسیمی نقطوں تک انتظامی لکیریں کھینچنے سے متعدد ذوزنقہ حاصل ہوتے ہیں جو منحنی اور x محور کے بیچ خطہ کی تخمین ہوں گے۔ ہم ان ذوزنقہ کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں جہاں x محور سے اوپر رقبہ کو مثبت جبکہ اس سے نیچے رقبہ کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\ &= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

یہاں $y_0 = f(a)$ ، $y_1 = f(x_1)$ ، \dots ، $y_{n-1} = f(x_{n-1})$ اور $y_n = f(x_n)$ ہیں۔

قاعدہ 5.1: ذوزنقہ قاعدہ

مکمل $\int_a^b f(x) dx$ کو تخمیناً درج ذیل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (جہاں n ذیلی وقفوں کی لمبائی قدم $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور

³²step size
³³steps

$$y_k = f(x_k) \text{ ہے۔}$$

$$(5.34) \quad T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

مثال 5.51: تکمیل $\int_1^2 x^2 dx$ کو ذوزنقہ قاعدہ سے $n = 4$ لے کر حل کریں۔ اصل رقبہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

حل: ہم وقفہ $[1, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک وقفہ کی لمبائی $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ہوگی۔ ان ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں پر تقاطع $y = x^2$ کی قیمت درج ذیل ہے۔

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

اب $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.34 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{8}(1 + 2(\frac{25}{16}) + 2(\frac{36}{16}) + 2(\frac{49}{16}) + 4) = \frac{75}{32} \\ &= 2.34375 \end{aligned}$$

تکمیل کی اصل قیمت درج ذیل ہے۔

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.\bar{3}$$

□

یہاں تخمینی قیمت اصل قیمت سے زیادہ ہے۔ درحقیقت تمام ذوزنقے مطابقتی خطہ میں کچھ زیادہ رقبہ گھیرتا ہے (شکل 5.69)۔

ذوزنقہ تخمین میں قابو خلل

مختلف تقابل کے ترسیم کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لمبائی قدم h کم کرنے سے چونکہ ذوزنقہ تقابل پر بہتر بیٹھتا ہے لہذا ذوزنقہ تخمین میں خلل

$$E_T = \int_a^b f(x) dx - T \quad (5.35)$$

کم ہو گی۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر f کا دہرا تفرق استمراری ہو تب یقینی طور پر ایسا ہی ہو گا۔

ذوزنقہ قاعدہ میں اندازہ خلل
اگر f'' استمراری ہو اور $[a, b]$ پر $|f''|$ کی قیمت کی بالائی حد بندی M ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M \quad (5.36)$$

اگرچہ نظریہ کہتا ہے کہ ہر صورت M کی کم ترین قیمت پائی جائے گے عموماً حقیقت میں یہ قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم عام طور پر M کی بہتر سے بہتر اندازاً قیمت معلوم کر کے اسی سے $|E_T M|$ حاصل کرتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا اچھا نہیں لگتا ہے لیکن یہ طریقہ چلتا ہے۔ کسی بھی M کے لئے $|E_T|$ کی قیمت کم کرنے کی خاطر ہم h کو چھوٹا کرتے ہیں۔

مثال 5.52: مکمل $\int_1^2 x^2 dx$ کی تخمینہ قیمت مثال 5.51 میں حاصل کی گئی۔ اس تخمینہ قیمت میں خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

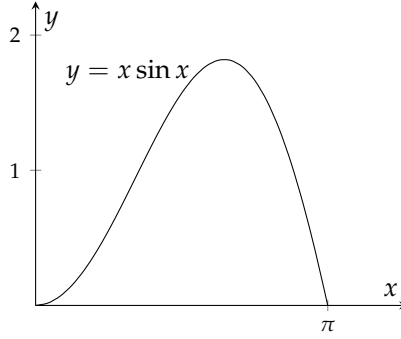
حل: وقفہ $1 \leq x \leq 2$ پر $f(x) = x^2$ کا دہرا تفرق $f''(x) = 2$ ہے جس کی قیمت اٹل ہے لہذا ہم $M = 2$ لے سکتے ہیں۔ اب $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ سے مساوات 5.36 درج ذیل دیتی ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^2 (2) = \frac{1}{96}$$

ہم $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$ سے $T = \frac{75}{32}$ منفی کر کے یہی خلل $\left| -\frac{1}{96} \right| = \left| \frac{7}{3} - \frac{75}{32} \right|$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں ہم خلل کی بالکل درست مطلق قیمت حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ ایسا ہر بار نہیں ہو گا۔ □

مثال 5.53: ذوزنقہ قاعدہ میں $n = 10$ قدم لیتے ہوئے درج ذیل مکمل کی تخمینہ قیمت تلاش کریں (شکل 5.70)۔

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$



شکل 5.70: متکمل برائے مثال 5.53

حل: $a = 0$ ، $b = \pi$ اور $h = \frac{\pi-0}{10}$

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 M = \frac{\pi^3}{1200} M$$

میتا ہے جہاں $[0, \pi]$ پر $f(x) = x \sin x$ کے دہرا تفرق کی کوئی بھی بالائی حد بندی ہو سکتی ہے۔ چونکہ

$$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

کے برابر ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |2 \cos x - x \sin x| \\ &\leq 2|\cos x| + |x||\sin x| & |a+b| \leq |a| + |b| \text{ تنکوئی عدم مساوات} \\ &\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi & |\sin x| \text{ اور } |\cos x| \text{ ایک سے بڑھ نہیں سکتے ہیں} \end{aligned}$$

ہم $M = 2 + \pi$ لیتے ہیں۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133 \quad \text{بطور حفاظت اوپر کو پورا کیا گیا ہے}$$

حاصل ہوتا ہے لہذا خلل کسی صورت بھی 0.133 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ زیادہ درست جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم M کی بہتر قیمت تلاش کرنے کی بجائے زیادہ قدم لیں گے، مثلاً $n = 100$ قدم لیتے ہوئے $h = \frac{1\pi}{100}$ ہو گا جس سے خلل کم ہو کر درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{100} \right)^2 M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{120000} < 0.00133 = 1.33 \times 10^{-3}$$

□

مثال 5.54: جیسا ہم باب 7 میں دیکھیں گے $\ln 2$ کی قیمت درج ذیل مکمل سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

ذوزلقہ قاعدہ سے مکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے خلل کو 10^{-4} سے کم رکھنے کی خاطر ہمیں کتنے قدم منتخب کرنے ہوں گے۔

حل: قدموں کی تعداد n یعنی ذیلی وقفوں کی تعداد منتخب کرنے کی خاطر ہم مساوات 5.36 بروئے کار لاتے ہیں۔ یوں

$$b - a = 2 - 1 = 1, \quad h = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{n}, \quad f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

سے

$$|E_T| \leq \frac{b - a}{12} h^2 |f''(x)|_{\text{بلندتر}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left|\frac{2}{x^3}\right|_{\text{بلندتر}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں وقفہ $[1, 2]$ پر بلندتر $|f''|$ درکار ہے۔

یہ وہ شاندار موقع ہے جب ہم بلندتر $|f''|$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ وقفہ $[1, 2]$ پر $y = \frac{2}{x^3}$ کی قیمت $y = 2$ سے گھٹ کر $y = \frac{1}{4}$ ہوتی ہے۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

ہو گا لہذا خلل کی مطلق قیمت 10^{-3} سے تب کم ہوگی جب $\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$ ہو جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$$

$$\frac{10^4}{6} < n^2$$

$$\frac{100}{\sqrt{6}} < |n|$$

$$\frac{100}{\sqrt{6}} < n$$

$$40.83 < n$$

دونوں اطراف کو $10^4 n^2$ سے ضرب کریں

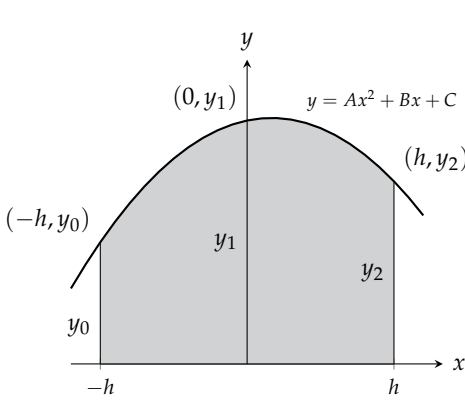
جذر لیں

n مثبت ہے

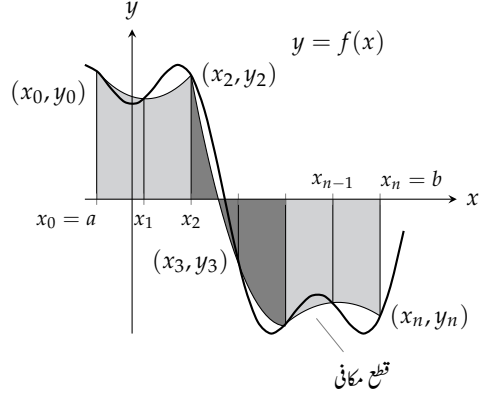
حفاظتی طور پر اور کو پورا کیا گیا ہے۔

عدد 40.83 سے بڑا پہلا عدد صحیح 41 ہے۔ یوں $n = 41$ یا اس سے بھی زیادہ ذیلی وقفے لیتے ہوئے ذوزلقہ ترکیب سے $\ln 2$ کی قیمت میں خلل کو یقینی طور پر 10^{-4} سے کم رکھا جاسکتا ہے۔

□



شکل 5.72: سایہ دار رقبہ $\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ ہے۔



شکل 5.71: قاعدہ سمسن میں ذیلی وقفوں کی جوڑی کو انفرادی قطع مکانی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سمسن قاعدہ

قاعدہ سمسن میں $\int_a^b f(x) dx$ کے حصول میں f کو مستقیم خطوط کی بجائے دور تہی کثیر رکنی (قطع مکانی) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم ترسیم کو سیدھی لکیروں کی بجائے قطع مکانی قوسین سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 5.71)۔ دور تہی کثیر رکنی $y = Ax^2 + Bx + C$ کا $x = -h$ تا $x = h$ مکمل درج ذیل ہو گا (شکل 5.72)۔

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^h \\ &= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch \\ &= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) \end{aligned}$$

کثیر رکنی کی مساوات سے

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

لکھے جاسکتے ہیں جن سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} C &= y_1 \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1 \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1 \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1 \end{aligned}$$

یوں حاصل مکمل میں C اور $2Ah^2$ کی قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}[(y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

یعنی

$$(5.37) \quad \int_{-h}^h f(Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ملتا ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کو برابر لمبائی کی چھت تعداد کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.37 کو یک بعد دیگرے ذیلی وقفوں کی جوڑیوں پر لاگو کر کے ان کا مجموعہ لینے سے قاعدہ سمسن حاصل ہو گا۔

قاعدہ سمسن مکمل $\int_a^b f(x) dx$ کا تخمینہ حاصل کرنے کے لئے درج ذیل استعمال کریں جو قاعدہ سمسن³⁴ کہلاتا ہے۔

$$(5.38) \quad S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

y کی قیمتیں نقطہ خانہ بندی

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = b$$

پر لیے جاتے ہیں جہاں n چھت اور $h = \frac{b-a}{n}$ ہے۔

قاعدہ سمسن میں قابو خلل

قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار

$$(5.39) \quad E_S = \int_a^b f(x) dx - S$$

لمبائی قدم گھٹانے سے کم ہوتی ہے (جیسا قاعدہ ذوزلقہ بھی ہوتا ہے) البتہ قاعدہ سمسن میں خلل قابو کرنے کے لئے درکار عدم مساوات میں f کے چار بار تفرق کا استمراری ہونا ضروری ہے۔ اس بار بھی قابو خلل کا کلیہ اعلیٰ احصاء دیتی ہے:

قاعدہ سمسن میں اندازاً خلل

اگر $[a, b]$ میں $f^{(4)}$ استمراری ہو اور $|f^{(4)}|$ کی بالائی حد بندی کی کوئی ایک قیمت M ہو تب مطلق خلل درج ذیل ہو گی۔

$$(5.40) \quad |E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M$$

قاعدہ ذوزلفہ کی طرح ہم یہاں بھی عموماً M کی کم سے کم قیمت دریافت نہیں کر پائیں گے۔ ہم M کی کوئی موزوں قیمت تلاش کر کے اسی کو استعمال کرتے ہوئے $|E_S|$ کی تخمینہ قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 5.55: درج ذیل مکمل کو قاعدہ سمسن سے حل کرتے ہوئے $n = 4$ لیں۔

$$\int_0^1 5x^4 dx$$

اس تخمینہ میں مساوات 5.40 کے تحت خلل انداز لگتی ہوگی؟

حل: ہم وقفہ مکمل کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کر کے تقسیمی نقطوں پر مکمل $f(x) = 5x^4$ کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	0	$\frac{5}{256}$	$\frac{80}{256}$	$\frac{405}{256}$	5

ہم $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.38 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{12} \left[0 + 4 \left(\frac{5}{256} \right) + 2 \left(\frac{80}{256} \right) + 4 \left(\frac{405}{256} \right) + 5 \right] \approx 1.00260 \end{aligned}$$

خلل جاننے سے پہلے ہمیں وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x) = 5x^4$ کے چار بار تفرق $f^{(4)}$ کی بالائی حد بندی کی ایک قیمت M چاہیے۔ چونکہ $f^{(4)}(x) = 120$ مستقل ہے لہذا ہم بلا خطر $M = 120$ لے سکتے ہیں۔ یوں $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.40 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$|E_S| \leq \frac{b-1}{180} h^4 M = \frac{1}{180} \left(\frac{1}{4} \right)^4 (120) = \frac{1}{384} < 0.00261$$

□

کونسا قاعدہ بہتر نتائج دیتا ہے؟

قابو خلل کے کلیات

$$|E_T| \leq \frac{b-1}{12} h^2 M, \quad |E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M$$

سے یہ جانا جا سکتا ہے کہ کونسا کلیہ بہتر نتیجہ دینگا جہاں بائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f''|$ کی بالائی حد بندی ہے جبکہ دائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f^{(4)}|$ کی بالائی حد بندی ہے۔ اس کے علاوہ قاعدہ سمسن میں جزو $\frac{b-a}{180}$ قاعدہ ذوزنقہ میں جزو $\frac{b-a}{12}$ سے 15 گنا کم ہے۔ مزید قاعدہ سمسن میں h^4 جبکہ قاعدہ ذوزنقہ میں h^2 استعمال ہوتا ہے۔ یوں اگر $h = \frac{1}{10}$ ہو تب $h^2 = \frac{1}{100}$ جبکہ $h^4 = \frac{1}{10000}$ ہو گا۔ اس طرح اگر دونوں M کی قیمت 1 اور $b - a = 1$ ہوں تب $h = \frac{1}{10}$ کی صورت میں درج ذیل ہوں گے۔

$$|E_T| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{10} \right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{1200}$$

$$|E_S| \leq \frac{1}{180} \left(\frac{1}{10} \right)^4 \cdot 1 = \frac{1}{1800000} = \frac{1}{1500} \cdot \frac{1}{1200}$$

ایک جتنی حسابی کوشش سے اس مثال میں قاعدہ سمسن بہت بہتر نتیجہ دیتا ہے۔

h^4 بالمقابل h^2 وہ اجزاء ہیں جن پر نظر رکھنی چاہیے۔ اگر h کی قیمت 1 سے کم ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت کم ہو گی۔ اگر h کی قیمت 1 ہو تب $h^4 = h^2$ ہو گا۔ اگر h کی قیمت 1 سے زیادہ ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت زیادہ ہو گی۔ ان آخری دو صورتوں میں قابو خلل کلیات ہمیں زیادہ مدد فراہم نہیں کر سکتے ہیں اور ہمیں $y = f(x)$ کی منحنی کو دیکھ کر فیصلہ کرنا ہو گا کہ قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ میں سے کونسا قاعدہ بہتر نتیجہ (اگر دیتا ہو) دیگا۔

اعدادی مواد کے ساتھ کام

تجربہ گاہ میں پینائش سے حاصل قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے قاعدہ سمسن کے ذریعہ ایسے تفاعل کے مکمل کی قیمت کو اگلے مثال میں حاصل کیا جائے گا جس کا کلیہ ہم نہیں جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ ذوزنقہ کو بھی اسی طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 5.56: ایک شہر میں گندے پانی کا تالاب پایا جاتا ہے جس کو بھرنا مقصود ہے۔ یہ تالاب 2.5 m گہرا ہے (شکل 5.73)۔ تالاب سے پانی کی نکاسی کرنے کے بعد اس کو مٹی سے بھرا جائے گا۔ کتنی مٹی درکار ہو گی؟

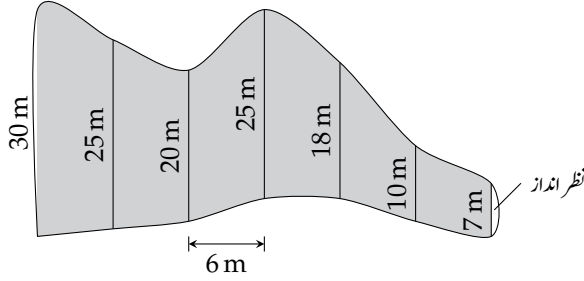
حل: تالاب کا حجم جاننے کے لئے ہم اس کا سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیں گے۔ سطحی رقبہ کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہیں جہاں $h = 6$ m ہے جبکہ y کی قیمتوں کو تالاب پر ناپا گیا ہے (شکل 5.73)۔

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$= \frac{6}{3} (30 + 100 + 40 + 100 + 36 + 40 + 7) = 706$$

□

سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیتے ہوئے تقریباً 1765 m^3 حجم حاصل ہوتا ہے۔



شکل 5.73: گندے پانی کا تالاب۔ افقی فاصلے 6 m ہیں (مثال 5.56)۔

پور و پور خلل

اگرچہ لمبائی قدم h کم کرنے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمن میں خلل کی مقدار کم ہوگی، حقیقت میں بعض اوقات اس کے برعکس بھی ہوتا ہے۔ جب h کی قیمت بہت کم ہو، مثلاً $h = 10^{-5}$ ، تب S اور T کی حساب میں پور و پور خلل اتنا بڑھ سکتا ہے کہ نتائج میں بہتری کی بجائے خرابی پیدا ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت میں آپ کلیات خلل، جو پور و پور خلل کو جاننے سے قاصر ہیں، پر بھروسہ نہیں کر سکتے ہیں۔ لمبائی قدم h کو کسی خاص قیمت سے کم کرنے سے حقیقتاً نتائج خراب ہو سکتے ہیں۔ اس کتاب میں ایسی صورت حال پیدا نہیں ہوگی۔ اگر آپ کو ایسی صورت حال کا سامنا ہو، بہتر ہوگا کہ آپ اعدادی تراکیب پر لکھی گئی کسی کتاب کا سہارا لیں۔

سوالات

تکمیل کی قیمت کا اندازہ
سوال 5.491 تا سوال 5.500 میں دو جزو پائے جاتے ہیں۔ ایک جزو قاعدہ ذوزنقہ اور دوسرا جزو قاعدہ سمن کے لئے ہے۔

1. قاعدہ ذوزنقہ

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمیل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.36 سے خلل $|E_T|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. تکمیل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.35 سے $|E_T|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_T|$ کو اصل تکمیل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

2. قاعدہ سمن

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر مکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.40 سے خلل $|E_S|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. مکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.39 سے $|E_S|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_S|$ کو اصل مکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 5.491: $\int_1^2 x \, dx$: جواب: 1: (ا) 1.5، 0، (ب) 1.5، 0، (ج) 0%، 2: (ا) 1.5، 0، (ب) 1.5، 0، (ج) 0%

سوال 5.492: $\int_1^3 (2x - 1) \, dx$

سوال 5.493: $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) \, dx$: جواب: 1: (ا) 2.75، 0.08، (ب) 2.67، 0.08، (ج) 3% ≈ 0.0312 : 2: (ا) 2.67، 0، (ب) 2.67، 0، (ج) 0%

سوال 5.494: $\int_{-2}^0 (x^2 - 1) \, dx$

سوال 5.495: $\int_0^2 (t^3 + t) \, dt$: جواب: 1: (ا) 6.25، 0.5، (ب) 6، 0.25، (ج) 4% ≈ 0.0417 : 2: (ا) 6، 0، (ب) 6، 0، (ج) 0%

سوال 5.496: $\int_{-1}^1 (t^3 + 1) \, dt$

سوال 5.497: $\int_1^2 \frac{1}{s^2} \, ds$: جواب: 1: (ا) 0.509، 0.03125، (ب) 0.5، 0.009، (ج) 2% ≈ 0.018 : 2: (ا) 0.5، 0.002604، (ب) 0.5، 0.0004، (ج) 0%

سوال 5.498: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2} \, ds$

سوال 5.499: $\int_0^\pi \sin t \, dt$: جواب: 1: (ا) 1.8961، 0.161، (ب) 2، 0.1039، (ج) 5% ≈ 0.052 : 2: (ا) 2.0045، 0.0066، (ب) 2، 0.00454، (ج) 0%

سوال 5.500: $\int_0^1 \sin \pi t \, dt$

سوال 5.501 تا سوال 5.504 میں (i) قاعدہ ذوزنقہ، (ب) قاعدہ سمسن استعمال کرتے ہوئے دی گئی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے آٹھ قدم $n = 8$ کے لئے مکمل حل کریں۔ اپنے جواب کو 5 اعشاریہ درستی تک پور و پور کریں۔ (ج) اس کے بعد مکمل کی اصل قیمت حاصل کریں اور خلل $|E_T|$ کو مساوات 5.35 اور خلل $|E_S|$ کو مساوات 5.39 سے حاصل کریں۔

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \quad \text{سوال 5.501}$$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$x\sqrt{1-x^2}$	0.0	0.12402	0.24206	0.34763	0.43301	0.48789	0.49608	0.42361	0

جواب: (i) 0.31929، (ب) 0.32812، (ج) $\frac{1}{3}$ ، 0.01404، 0.00521

$$\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}} d\theta \quad \text{سوال 5.502}$$

θ	0	0.375	0.75	1.125	1.5	1.875	2.25	2.625	3.0
$\frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}$	0.0	0.09334	0.18429	0.27075	0.35112	0.42443	0.49026	0.58466	0.6

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3 \cos t}{(2+\sin t)^2} dt \quad \text{سوال 5.503}$$

t	-1.5708	-1.1781	-0.7854	-0.3927	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708
$\frac{3 \cos t}{(2+\sin t)^2}$	0.0	0.99138	1.26906	1.05961	0.75	0.48821	0.28946	0.13429	0

جواب: (i) 1.95643، (ب) 2.00421، (ج) 2، 0.04357، -0.00421

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y) \sqrt{\cot y} dy \quad \text{سوال 5.504}$$

y	0.78540	0.88357	0.98175	1.07992	1.17810	1.27627	1.37445	1.47262	1.57080
$(\csc^2 y) \sqrt{\cot y}$	2.0	1.51606	1.18237	0.93998	0.75402	0.60145	0.46364	0.31688	0

ذیلی وقفوں کی کم سے کم تعداد
سوال 5.505 تا سوال 5.516 میں خلل کی مقدار 10^{-4} سے کم مطلوب ہے۔ (i) قاعدہ ذوزنقہ اور (ب) قاعدہ سمسن استعمال کریں۔
مساوات 5.36 اور مساوات 5.40 کی مدد سے ذیلی وقفوں کی درکار تعداد تلاش کریں۔ (سوال 5.505 تا سوال 5.512 درحقیقت سوال 5.491 تا سوال 5.498 ہیں۔)

$$\int_1^2 x dx \quad \text{سوال 5.505}$$

جواب: (i) 1، (ب) 2

سوال 5.506: $\int_1^3 (2x - 1) dx$

سوال 5.507: $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$
جواب: (i) 116، (ب) 2

سوال 5.508: $\int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx$

سوال 5.509: $\int_0^2 (t^3 + t) dt$
جواب: (i) 283، (ب) 2

سوال 5.510: $\int_{-1}^1 (t^3 + 1) dt$

سوال 5.511: $\int_1^2 \frac{1}{s^2} ds$
جواب: (i) 71، (ب) 10

سوال 5.512: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2} ds$

سوال 5.513: $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$
جواب: (i) 76، (ب) 12

سوال 5.514: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

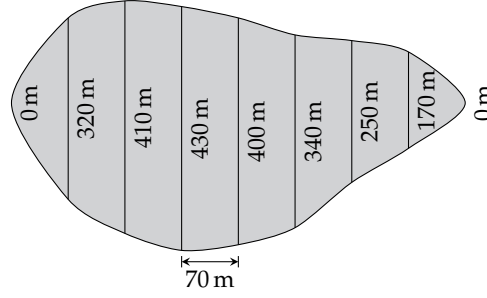
سوال 5.515: $\int_0^2 \sin(x+1) dx$
جواب: (i) 82، (ب) 8

سوال 5.516: $\int_{-1}^1 \cos(x + \pi) dx$

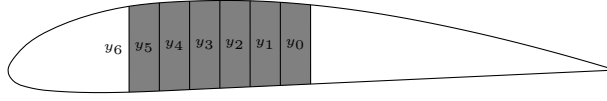
عملی استعمال

سوال 5.517: آپ کے شہر میں ایک جھیل ہے جس کی اوسط گہرائی 7 m ہے جبکہ اس کا سطحی رقبہ شکل 5.74 میں دکھایا گیا ہے۔ مانی گیری کے موسم کی شروع میں اوسطاً $9 m^3$ ایک مچھلی پائی جاتی ہے۔ مانی گیری کے ایک اجازت نامہ پر اوسطاً فی موسم 20 مچھلیاں شکار کی جاتی ہیں۔ موسم کے اختتام پر جھیل میں پہلے دن کے لحاظ سے 25% مچھلی باقی رہنا ضروری ہے۔ مانی گیری کے موسم میں کتنے اجازت نامے منظور کیے جاسکتے ہیں؟ ترکیب سمسن استعمال کریں۔

جواب: 4873



شکل 5.74: جھیل برائے سوال 5.517



شکل 5.75: ہوائی پترا

سوال 5.518: جہاز کا ہوائی پترا³⁵ شکل 5.75 میں دکھایا گیا ہے جس میں 25 000 L تیل کی ٹینکی واضح ہے۔ تیل کی کثافت 0.708 kg L^{-1} ہے۔ درج ذیل معلومات دی گئی ہیں جن کے بیچ افقی فاصلہ 30 cm ہے۔ تیل کی ٹینکی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y_0 = 45 \text{ cm}, y_1 = 48 \text{ cm}, y_2 = 54 \text{ cm}, y_3 = 57 \text{ cm}, y_4 = 60 \text{ cm}, y_5 = y_6 = 63 \text{ cm}$$

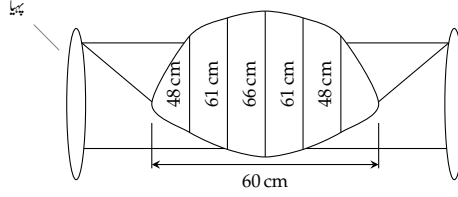
سوال 5.519: شمسی چادر سے حاصل برقی طاقت سے چلنے والی گاڑی کا رقبہ عمودی تراش شکل 5.76 میں دکھایا گیا ہے۔ ہوائی مزاحمت کا کچھ حصہ رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتا ہے لہذا کوشش کی جاتی ہے کہ رقبہ عمودی تراش کو کم سے کم رکھا جائے۔ اس گاڑی کا رقبہ عمودی تراش قاعدہ سمسن سے دریافت کریں۔

$$\text{جواب: } 2973 \text{ cm}^2$$

سوال 5.520: ایک گاڑی ساکن حالت سے روانہ ہو کر 130 km h^{-1} تک 37.1 s میں پہنچ پاتی ہے۔ اس کی رفتار بالمتبادل وقت درج ذیل ہے۔

km h^{-1}	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
s	0	2.2	3.2	4.5	5.9	7.8	10.2	12.7	16	20.6	26.2	37.1

اس رفتار تک پہنچنے ہوئے گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟



شکل 5.76: شمسی گاڑی برائے سوال 5.519

نظریہ اور مثالیں
سوال 5.521: کم درجی کثیر رکتیاں
کمل $\int_a^b f(x) dx$ میں خلل

$$|E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(c)|$$

ہے جہاں وقفہ $[a, b]$ میں c (عموماً نامعلوم) نقطہ ہے۔ اگر f متغیر x کا خطی تفاعل ہو تب $f''(c) = 0$ لہذا $E_T = 0$ ہو گا اور کسی بھی h کے لئے کمل کی اصل قیمت T ہو گی۔ یہ تعجب کی بات نہیں ہے چونکہ خطی تفاعل کی صورت میں ترسیم کو تخمینی طور پر ظاہر کرنے والے قطعات ترسیم پر ٹھیک بیٹھیں گے۔ تعجب کی بات سمسن خلل

$$|E_S| = \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(c)|$$

ہے جو درجہ چار سے کم کثیر رکتی f کی صورت میں ہر c کے لئے $f^{(4)}(c) = 0$ کی بنا $E_S = 0$ ہو گا اور یوں اگر ہم صرف دو قدم بھی استعمال کریں تب بھی S کمل کی اصل قیمت ہو گی۔ یہ دیکھنے کی خاطر $n = 2$ لیتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت قاعدہ سمسن سے تلاش کر کے کمل کی اصل قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

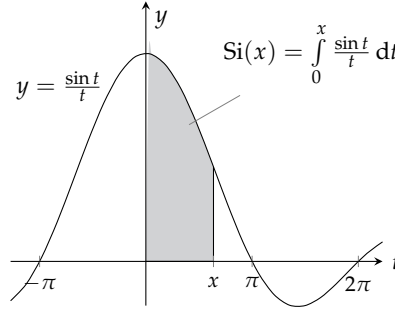
$$\int_0^2 x^3 dx$$

جواب: 4 ، 4

سوال 5.522: تفاعل سائن کمل کی قابل استعمال قیمتیں
تفاعل سائن کمل

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad x \text{ کا سائن کمل}$$

ان تفاعل میں سے ایک ہے جنہیں بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہے۔ تفاعل $\frac{\sin t}{t}$ کے الٹ تفرق کا کلیہ نہیں پایا جاتا ہے البتہ اعدادی تراکیب سے $\text{Si}(x)$ کی قیمتیں با آسانی حاصل کی جاسکتی ہیں۔



شکل 5.77: تقاض سائن مکمل (سوال 5.522)

اگرچہ مکمل سائن لکھتے ہوئے یہ حقیقت بظاہر نظر نہیں آتی ہے درحقیقت ہم درج ذیل تقاض کا مکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

جو $\frac{\sin t}{t}$ کی وقفہ $[0, x]$ تک استمراری توسیع ہے۔ اس تقاض کی دائرہ کار کے ہر نقطہ پر تقاض کے ہر رتبہ کے تفرق پائے جاتے ہیں۔ اس کا ترسیم ہموار ہے (شکل 5.77) اور ہم قاعدہ سمسن سے بہترین نتائج توقع کرتے ہیں۔

ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ پر $|f^{(4)}| \leq 1$ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $n = 4$ لیتے ہوئے درج ذیل کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہوئے خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

$$\text{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$$

ب. $n = 4$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے $\text{Si}(\pi/2)$ حاصل کریں۔

ج. جزو-1 میں خلل کو جزو-2 میں قیمت کافی حد تک لکھیں۔

سوال 5.523: خلل کی حد بندی مساوات 5.36 اور مساوات 5.40 دیتی ہیں۔ حقیقت میں قاعدہ ذوزلفقہ اور قاعدہ سمسن کے نتائج اس سے بہتر ہوں گے۔ مثال 5.53 میں $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ کی اندازاً قیمت کو قاعدہ ذوزلفقہ سے حاصل کیا گیا۔

ا. قاعدہ ذوزلفقہ میں $n = 10$ لیتے ہوئے مکمل کو دوبارہ حل کریں۔

ب. مکمل کی اصل قیمت π اور آپ کے حاصل کردہ جواب میں فرق دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ مثال 5.53 میں $n = 10$ کے لئے حاصل خلل 0.133 سے موجودہ خلل بہت کم ہے۔

ج. ہم $[0, \pi]$ پر $|f''(x)| = |2 \cos x - x \sin x|$ کی بہتر حد بندی معلوم کر کے مثال 5.53 میں $|E_T|$ کی بالائی حد بندی کو 0.133 سے بہتر بنا سکتے ہیں۔ $|f''(x)|$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطہ کو بڑا کرتے ہوئے بہتر بالائی حد بندی دریافت کر کے اس کو بطور M لے کر $|E_T|$ کی بہتر قیمت تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-1 میں حاصل نتیجہ اس سے بھی بہتر ہو ہے۔

جواب: (ا) 3.11571، (ب) 0.02588، (ج) $M = 3.11$ سے $|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200}(3.11) < 0.081$ ہے۔

سوال 5.524:

ا. دکھائیں کہ $f(x) = x \sin x$ کا چار بار تفرق $f^{(4)}(x) = -4 \cos x + x \sin x$ ہے۔ کمپیوٹر پر اس کو وقفہ $[0, \pi]$ پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطہ کو بڑا کر کے اس کی بالائی حد بندی دیکھ کر دریافت کریں۔

ب. جزو-1 میں حاصل قیمت کو M لے کر قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لیتے ہوئے درج ذیل تکمیل حاصل کرنے میں خلل کی بالائی حد بندی کو مساوات 5.40 سے حاصل کریں۔

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

ج. قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لے کر $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ کی قیمت حاصل کریں۔

د. تکمیل کی اصل قیمت π اور جزو-ج میں حاصل جواب میں فرق کو 6 اعشاریہ درستی تک لکھیں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-ب میں حاصل خلل کافی درست ہے۔

آپ سوال 5.525 اور سوال 5.526 کو قاعدہ سمسن سے حل کرنے سے پہلے درکار درستی حاصل کرنے کی خاطر لمبائی قدم h کو مساوات 5.40 سے جاننا چاہتے ہیں۔ کیا ہوتا ہے؟ کیا قاعدہ ذوزنقہ اور مساوات 5.36 استعمال کرنے سے مسئلہ حل ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_0^4 x^{3/2} \, dx \quad \text{سوال 5.525:}$$

$$\int_0^1 x^{5/2} \, dx \quad \text{سوال 5.526:}$$

اعدادی تکمیل بذریعہ کمپیوٹر جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، بعض مشکل کے الٹ تفرق کا کلیہ نہیں پایا جاتا ہے یا بہت مشکل سے حاصل ہوتا ہے۔ اس طرز کے قطعی تکمیل کی قیمت کو اعدادی ترکیب سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سوال 5.527 تا سوال 5.530 کو کمپیوٹر کے ذریعہ اعدادی ترکیب سے حل کریں۔

سوال 5.527: $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$
 جواب: 1.08943

سوال 5.528: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ تقسیم صفر سے بچنے کی خاطر آپ مکمل کو 0 کی بجائے بہت چھوٹے مثبت عدد مثلاً 10^{-6} سے شروع کریں گے۔

سوال 5.529: $\int_0^{\pi/2} \sin(x^2) dx$ انکسار شعاع سے منسلک مکمل۔
 جواب: 0.82812

سوال 5.530: $\int_0^{\pi/2} 40\sqrt{1-0.64\cos^2 t} dt$ تزخیم $1 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$ کی لمبائی۔

باب 6

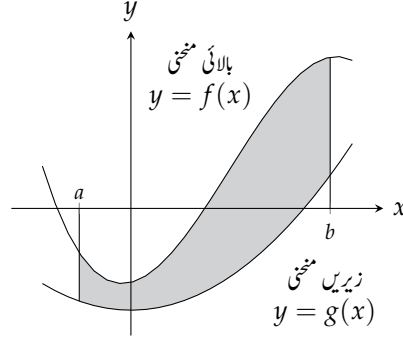
تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے بیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبہ، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین پانی کی نکاسی کے لئے درکار کام، سیلاب دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدود۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریماں مجموعوں کے حد یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدود کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکمل کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جاسکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کی طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ

محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطہ کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔



شکل 6.1: منحنیات $y = f(x)$ ، $y = g(x)$ اور لکیر $x = a$ ، $x = b$ کے بیچ خط۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کا حد

فرض کریں ایک خط کی بالائی سرحد منحنی $y = f(x)$ اور زیریں سرحد منحنی $y = g(x)$ ہیں جبکہ اس کا پایاں اور دایاں سرحد بالترتیب خط $x = a$ اور $x = b$ ہیں (شکل 6.1)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری f اور g کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو مکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

مکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ $[a, b]$ پر خانہ بندی $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ کے تحت خطہ کو n انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.2) جہاں k ویں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل 6.3)۔

$$\Delta S_k = [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \quad \text{چوڑائی} \times \text{قد}$$

اس کے بعد ہم خطے کے رقبہ کو تخمیناً ان n مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

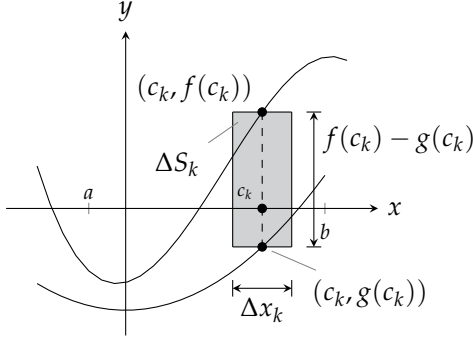
$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \quad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ f اور g استمراری ہیں لہذا $\|P\| \rightarrow 0$ کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ ہو گا:

$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

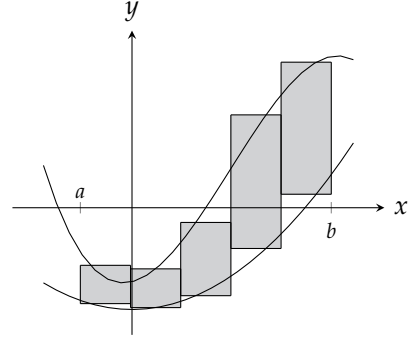
تعریف: اگر پورے $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہوں اور $f(x) \geq g(x)$ ہو تب a تا b منحنیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ رقبہ a تا b مکمل $[f - g]$ کا مکمل ہو گا:

$$(6.1) \quad S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



شکل 6.3: k ویں مستطیل کا قد $f(c_k) - g(c_k)$ اور اس کی چوڑائی Δx_k لہذا اس کا رقبہ $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$ ہو گا۔

□



شکل 6.2: ہم خط کو تجزیہاً x محور کے عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔

مساوات 6.1 کو استعمال کرنے کے لئے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

دو منحنيات کے بیچ رقبے کی تلاش

1. منحنيات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔ اس سے معلوم ہو گا کہ کوئی منحنی بالائی f اور کوئی زیریں g ہے۔ اس سے مکمل کے حد تعین کرنے میں بھی مدد ملتی ہے۔

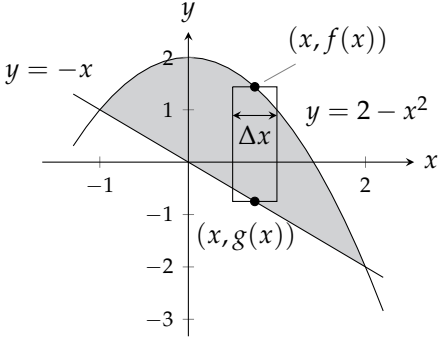
2. مکمل کے حد تلاش کریں۔

3. مکمل $f(x) - g(x)$ کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

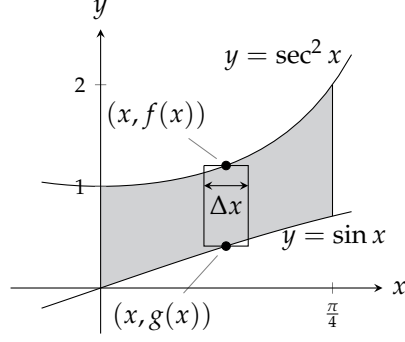
4. مکمل $[f(x) - g(x)]$ کا مکمل a تا b حاصل کریں۔ قطعی مکمل سے حاصل عدد رقبہ ہو گا۔

مثال 6.1: منحنيات $y = \sec^2 x$ اور $y = \sin x$ کے تقارب 0 تا $\frac{\pi}{4}$ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم منحنيات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.4)۔ بالائی قوس $f(x) = \sec^2 x$ کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس $g(x) = \sin x$ کی منحنی ہے۔
دوسرا قدم: مکمل کے حد $a = 0$ اور $b = \frac{\pi}{4}$ دیے گئے ہیں۔



شکل 6.5: خطہ برائے مثال 6.2



شکل 6.4: خطہ برائے مثال 6.1

تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = \sec^2 x - \sin x$
چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x) dx = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ پایا جاتا ہو تب نقاط تقاطع سے مکمل کے حد حاصل ہوں گے۔

مثال 6.2: قطع مکانی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $y = -x$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل 6.5)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم $f(x) = 2 - x^2$ اور $g(x) = -x$ لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے x محدود مکمل کے حد ہوں گے۔
دوسرا قدم: مکمل کے حد جاننے کے لئے ہم $y = 2 - x^2$ اور $y = -x$ کو ایک ساتھ x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 \\ x &= -1, \quad x = 2 \end{aligned}$$

$f(x)$ اور $g(x)$ کو برابر پر کریں
ایک جانب منتقلی
تجزی
حل

خط $x = -1$ اور $x = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔
 تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 + x - x^2$
 چوتھا قدم:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

□

فنیات دو ترسیمات کا تقاطع
 مکمل کے حصول میں بعض اوقات مکمل کے حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یا تو ایک تفاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کا نقاط تقاطع۔

مساوات $f(x) = g(x)$ حل کرنے کے لئے ہم $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات $f(x) - g(x) = 0$ کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل 6.6)۔

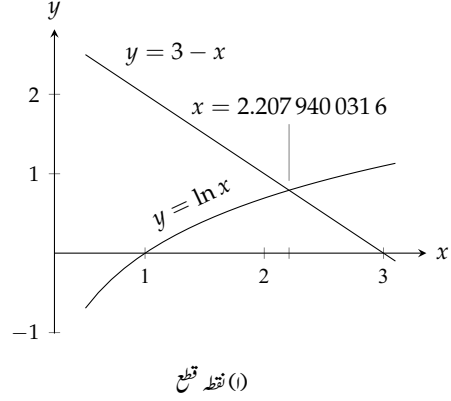
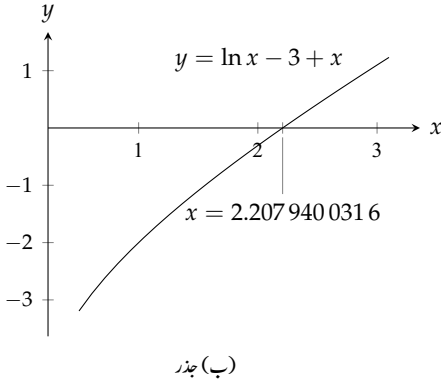
$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = 3 - x$$

6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی خطے پر علیحدہ علیحدہ مساوات 6.1 کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال 6.3: ربع اول میں $y = \sqrt{x}$ کے نیچے اور $y = x - 2$ کے اوپر رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ترسیم (شکل 6.7) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد $f(x) = \sqrt{x}$ ہے جبکہ $0 \leq x \leq 2$ پر اس کی پچلی سرحد $g(x) = 0$ اور $2 \leq x \leq 4$ پر پچلی سرحد $g(x) = x - 2$ ہے (نقطہ $x = 2$ پر $g(x)$ کے دونوں کلیات ایک جیسے ہیں)۔ ہم $x = 2$ پر خطہ کو دو ذیلی حصوں A اور B میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لئے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔



شکل 6.6: تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کے حل کی تلاش۔

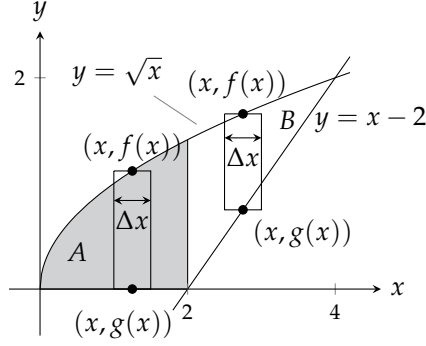
دوسرا قدم: خطہ A میں مکمل کے حد $a = 0$ اور $b = 2$ ہیں۔ خطہ B کا پایاں حد $a = 2$ ہے۔ اس کے دایاں حد جاننے کے لئے ہم مساوات $y = \sqrt{x}$ اور $y = x - 2$ کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= x - 2 \\ x &= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 \\ x &= 1, \quad x = 4\end{aligned}$$

$f(x)$ اور $g(x)$ کے برابر پر کریں
مرلع لیں
ایک جانب منتقلی
تجزی
حل

صرف $x = 4$ مساوات $\sqrt{x} = x - 2$ کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مربع لینے کی وجہ سے حل $x = 1$ پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں دایاں حد $b = 4$ ہے۔
تیسرا قدم:

$$\begin{aligned}f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2, & 2 \leq x \leq 4\end{aligned}$$



شکل 6.7: خطہ برائے مثال 6.3

چوتھا قدم: ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 \\
 &= \frac{2}{3} (2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3} (4)^{3/2} - 8 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} (2)^{3/2} - 2 + 4 \right) \\
 &= \frac{2}{3} (8) - 2 = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

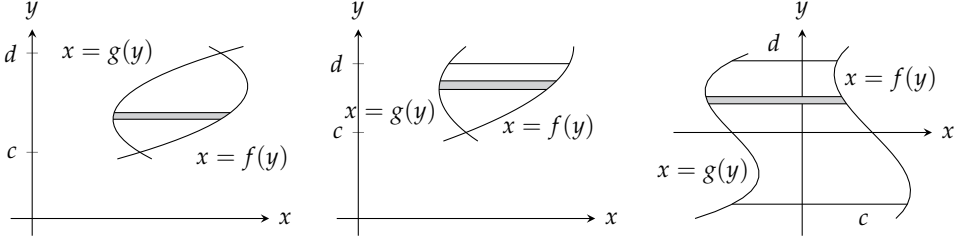
□

تکمل بلحاظ y

اگر سرحد کی مساواتیں y کی تفاعل ہوں تب تعین مستطیل کو انتصابی کی بجائے افقی بنایا جاتا ہے اور بنیادی کلیہ میں x کی جگہ y پایا جائے گا (شکل 6.8):

$$(6.2) \quad S = \int_c^d [f(y) - g(y)] \, dy$$

مثال 6.4: درج بالا مثال 6.3 کو اس بار مساوات 6.2 کی مدد سے حل کریں۔



شکل 6.8: ان اشکال میں دایاں سرحد f اور بایاں سرحد g ہو گا لہذا $f(y) - g(y)$ غیر منفی ہو گا۔

حل: پہلا قدم: ہم خطہ ترسیم کر کے نمائندہ افقی مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.8)۔ خطے کا دایاں سرحد لکیر $x = y + 2$ ہے لہذا $f(y) = y + 2$ ہو گا۔ خطے کا بایاں سرحد $x = y^2$ ہے لہذا $g(y) = y^2$ ہو گا۔
دوسرا قدم: تکامل کا زیریں حد $y = 0$ ہے۔ تکامل کا بالائی حد جاننے کے لئے ہم $x = y + 2$ اور $x = y^2$ کو y کے لئے حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} y + 2 &= y^2 & f \text{ کو } g \text{ کے برابر پر کرتے ہیں} \\ y^2 - y - 2 &= 0 & \text{ایک ہاتھ منتقل} \\ (y + 1)(y - 2) &= 0 & \text{تجزی} \\ y &= -1, \quad y = 2 & \text{حل} \end{aligned}$$

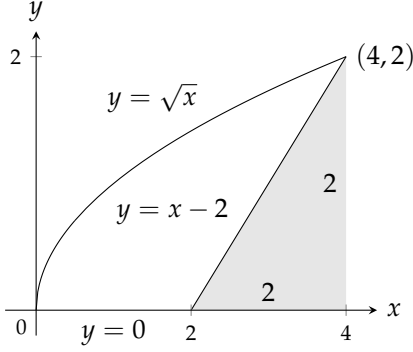
تکامل کا بالائی حد $y = 2$ ہے (چونکہ $y = -1$ افقی محور سے نیچے تقاطع کا نقطہ قطع دیتا ہے)۔
تیسرا قدم:

$$f(y) - g(y) = y + 2 - y^2 = 2 + y - y^2$$

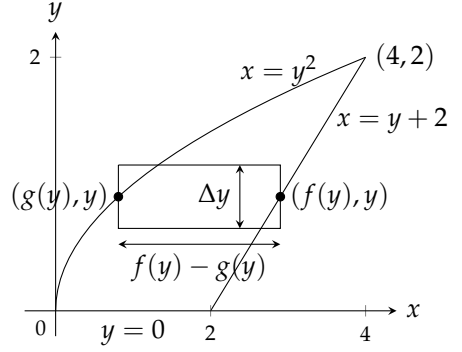
چوتھا قدم:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f(y) - g(y)] dy = \int_0^2 [2 + y - y^2] dy \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

یہ وہی جواب ہے جو مثال 6.3 میں حاصل کی گیا۔ مثال 6.3 میں دو تکامل حل کرنے کی ضرورت پیش آئی جبکہ یہاں ایک ہی تکامل سے رقبہ معلوم کرنا ممکن تھا۔
□



شکل 6.10: بالائی منحنی کے نیچے خط سے تکتوں منفی کرنے سے رقبہ حاصل ہو گا۔



شکل 6.9: خط برائے مثال 6.4

تکمل کے ساتھ جیومیٹریائی کلیات کا استعمال

تکمل اور جیومیٹریائی کلیات کو ملا کر رقبہ نسبتاً زیادہ جلد حاصل ہوتا ہے۔

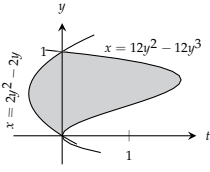
مثال 6.5: مزید ایک بار مثال 6.3 میں دیے گئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم $0 \leq x \leq 4$ محور x اور $y = \sqrt{x}$ کے تقارب سے تلا 2 اور قد 2 کے تکتوں کا رقبہ منفی کرتے ہوئے درکار خطے کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

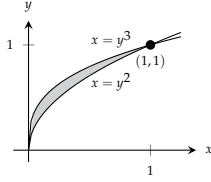
$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \frac{1}{2}(2)(2) \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^4 - 2 \\ &= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

□

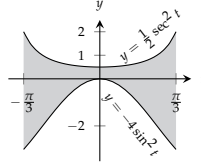
گزشتہ تین مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ دو منحنیات کے تقارب بعض اوقات x کی بجائے y کے ساتھ تکمل لے کر نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بعض اوقات تکمل اور جیومیٹری کے کلیات کو ملا کر جلد جواب حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکمل لکھنے سے پہلے مسئلے پر غور کرنا بہتر ہو گا۔



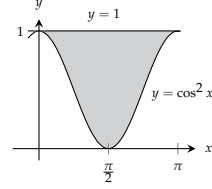
شکل 6.14



شکل 6.13



شکل 6.12



شکل 6.11

سوالات

سوال 6.1 تا سوال 6.8 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.1: سایہ دار خطہ شکل 6.11 جہاں سرحد $y = \cos^2 x$ اور $y = 1$ ہیں۔
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 6.2: سایہ دار خطہ شکل 6.12 جہاں سرحد $y = \frac{1}{2} \sec^2 t$ ، $y = -4 \sin^2 t$ ، $y = -\frac{\pi}{3}$ اور $y = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔

سوال 6.3: سایہ دار خطہ شکل 6.13 جہاں سرحد $x = y^2$ اور $x = y^3$ ہیں۔
جواب: $\frac{1}{12}$

سوال 6.4: سایہ دار خطہ شکل 6.14 جہاں سرحد $x = 12y^2 - 12y^3$ اور $x = 2y^2 - 2y$ ہیں۔

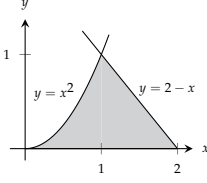
سوال 6.5: سایہ دار خطہ شکل 6.15 جہاں سرحد $y = 2x^2$ اور $y = x^4 - 2x^2$ ہیں۔
جواب: $\frac{128}{15}$

سوال 6.6: سایہ دار خطہ شکل 6.16 جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = -2x^4$ ، $x = -1$ اور $x = 1$ ہیں۔

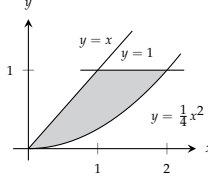
سوال 6.7: سایہ دار خطہ شکل 6.17 جہاں سرحد $y = 1$ ، $y = x$ اور $y = \frac{x^2}{4}$ ہیں۔
جواب: $\frac{5}{6}$

سوال 6.8: سایہ دار خطہ شکل 6.18 جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ اور $y = 0$ ہیں۔

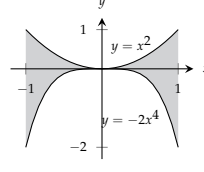
سوال 6.9 تا سوال 6.12 میں کل سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔



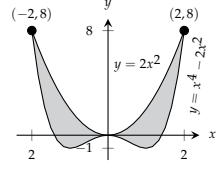
شکل 6.18



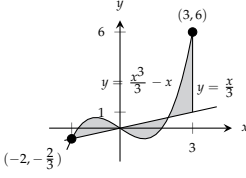
شکل 6.17



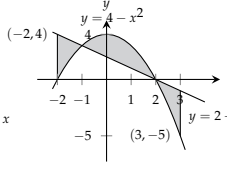
شکل 6.16



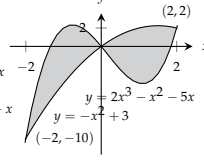
شکل 6.15



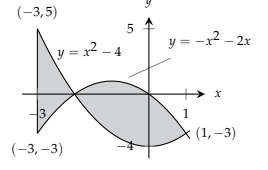
شکل 6.22



شکل 6.21



شکل 6.20



شکل 6.19

سوال 6.9: سایہ دار رقبہ شکل 6.19 جہاں سرحد $y = x^2 - 4$ ، $y = -x^2 - 2x$ اور $x = -3$ ہیں۔
جواب: $\frac{38}{3}$

سوال 6.10: سایہ دار رقبہ شکل 6.20 جہاں سرحد $y = -x^2 + 3x$ اور $y = 2x^3 - x^2 - 5x$ ہیں۔

سوال 6.11: سایہ دار رقبہ شکل 6.21 جہاں سرحد $y = 4 - x^2$ ، $y = 2 - x$ ، $x = -2$ اور $x = 3$ ہیں۔
جواب: $\frac{49}{6}$

سوال 6.12: سایہ دار رقبہ شکل 6.22 جہاں سرحد $y = \frac{x^3}{3} - x$ ، $y = \frac{x}{3}$ اور $x = 3$ ہیں۔

سوال 6.13: سوال 6.22 میں محیط خطے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 6.13: $y = x^2 - 2$ ، $y = 2$
جواب: $\frac{32}{3}$

سوال 6.14: $y = 2x - x^2$ ، $y = -3$

سوال 6.15: $y = x^4$ ، $y = 8x$
جواب: $\frac{48}{5}$

سوال 6.16: $y = x^2 - 2x$, $y = x$

سوال 6.17: $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x$
جواب: $\frac{8}{3}$

سوال 6.18: $y = 7 - 2x^2$, $y = x^2 + 4$

سوال 6.19: $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$
جواب: 8

سوال 6.20: $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, $y = 0$

سوال 6.21: $y = \sqrt{|x|}$, $5y = x + 6$ کتنے نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں؟
جواب: $\frac{5}{3}$ تین نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں۔

سوال 6.22: $y = |x^2 - 4|$, $y = \frac{x^2}{2} + 4$

سوال 6.23 تا سوال 6.30 میں دی گئی منحنیات اور لکیریوں کے چچر رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.23: $x = 2y^2$, $x = 0$, $y = 3$
جواب: 18

سوال 6.24: $x = y^2$, $x = y + 2$

سوال 6.25: $y^2 - 4x = 4$, $4x - y = 16$
جواب: $\frac{243}{8}$

سوال 6.26: $x - y^2 = 0$, $x + 2y^2 = 3$

سوال 6.27: $x + y^2 = 0$, $x + 3y^2 = 2$
جواب: $\frac{8}{3}$

سوال 6.28: $x - y^{2/3} = 0$, $x + y^4 = 2$

سوال 6.29: $x = y^2 - 1$, $x = |y| \sqrt{1 - y^2}$
جواب: 2

سوال 6.30: $x = y^3 - y^2, \quad x = 2y$

سوال 6.31 تا سوال 6.34 میں محیط رقبہ تلاش کریں۔ رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔

سوال 6.31: $4x^2 + y = 4, \quad x^4 - y = 1$
جواب: $\frac{104}{15}$

سوال 6.32: $x^3 - y = 0, \quad 3x^2 - y = 4$

سوال 6.33: $x + 4y^2 = 4, \quad x + y^4 = 1, \quad x \geq 0$
جواب: $\frac{56}{15}$

سوال 6.34: $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 0$

سوال 6.35 تا سوال 6.42 میں محیط رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ رقبہ معلوم کریں۔

سوال 6.35: $y = 2 \sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$
جواب: 4

سوال 6.36: $y = 8 \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

سوال 6.37: $y = \cos(\frac{\pi x}{2}), \quad y = 1 - x^2$
جواب: $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$

سوال 6.38: $y = \sin(\frac{\pi x}{2}), \quad y = x$

سوال 6.39: $y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 6.40: $x = \tan^2 y, \quad x = -\tan^2 y, \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

سوال 6.41: $x = 3 \sin y \sqrt{\cos y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: 2

سوال 6.42: $y = \sec^2(\frac{\pi x}{3}), \quad y = x^{1/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال 6.43: ہوائی جہاز کے پیکھے کی طرح کا خطہ $x - y^3 = 0$ اور $x - y = 0$ گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا رقبہ دریافت کریں۔
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 6.44: پنکھا نما خطہ $x - y^{1/3} = 0$ اور $x - y^{1/5} = 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 6.45: ربع اول میں کلیئر $y = x$ ، کلیئر $x = 2$ ، منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور محور x کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔
جواب: 1

سوال 6.46: ربع اول میں بائیں جانب y محور اور دائیں جانب منحنیات $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ تکون نما خطہ گھیرتے ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 6.47: بالائی جانب کلیئر $y = 4$ اور نیچے سے قطع مکانی $y = x^2$ میں محیط رقبہ کو افقی خط $y = c$ دو برابر ذیلی خطوں میں تقسیم کرتا ہے۔

ا. خطے کا خاکہ کھینچیں اور اس پر افقی کلیئر $y = c$ اندازاً درست مقام پر بنائیں۔ قطع مکانی اور افقی کلیئر جن نقطوں پر متقاطع ہیں، ان نقطوں کو c کی روپ میں دریافت کر کے خاکے پر دکھائیں۔

ب. y کے لحاظ سے مکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (مکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)

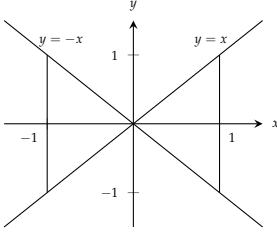
ج. x کے لحاظ سے مکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (اس بار بھی مکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)

جواب: (ا) $(\pm\sqrt{c}, c)$ ، (ب) $c = 4^{2/3}$ ، (ج) $c = 4^{2/3}$

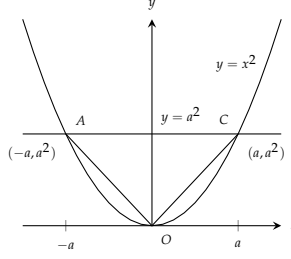
سوال 6.48: منحنی $y = 3 - x^2$ اور کلیئر $y = -1$ کے بیچ رقبہ (ا) x کے لحاظ سے، (ب) y کے لحاظ سے مکمل لے کر معلوم کریں۔

سوال 6.49: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے کلیئر $y = \frac{x}{4}$ ، بالائی بائیں منحنی $y = 1 + \sqrt{x}$ اور بالائی دائیں منحنی $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں۔
جواب: $\frac{11}{3}$

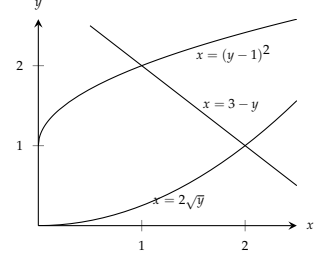
سوال 6.50: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے کلیئر $x = 2\sqrt{y}$ ، بالائی بائیں منحنی $x = (y - 1)^2$ اور بالائی دائیں منحنی $x = 3 - y$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں (شکل 6.23)۔



شکل 6.25: خطہ برائے سوال 6.53



شکل 6.24: خطہ برائے سوال 6.51



شکل 6.23: خطہ برائے سوال 6.50

سوال 6.51: قطع مکانی $y = x^2$ میں محصور تکتون AOB شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ تکتون کا بالائی ضلع لکیر $y = a^2$ ہے۔ تکتون اور قطع مکانی کے رقبوں کی نسبت کی حد $a \rightarrow 0$ کر کے تلاش کریں۔
جواب: $\frac{3}{4}$

سوال 6.52: مثبت استمراری تفاعل f اور $a \leq x \leq b$ پر x محور کے تقارب 4 ہے۔ منحنی $y = f(x)$ اور $y = 2f(x)$ کے تقارب $x = a$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.53: درج ذیل میں سے کونسا مکمل شکل 6.25 میں دکھایا گیا رقبہ دیتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$ا. \int_{-1}^1 (x - (-x)) dx = \int_{-1}^1 2x dx$$

$$ب. \int_{-1}^1 (-x - (x)) dx = \int_{-1}^1 -2x dx$$

جواب: کوئی نہیں

سوال 6.54: کیا استمراری تفاعل $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ اور انتصابی لکیروں $x = a$ اور $x = b$ جہاں $a < b$ ہے کے تقارب درج ذیل دیتا ہے؟ درست، کبھی کبھار درست یا کبھی نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 6.55 تا سوال 6.58 میں مستوی میں منحنیات کے تقارب تلاش کریں۔ جہاں منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کرنا دشوار ہو وہاں کمپیوٹر کا سہارا لیتے ہوئے درج ذیل اقدام سرانجام دیں۔

ا. منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے خطہ کی عمومی صورت دیکھیں اور نقاط تقاطع کی تعداد جانیں۔

ب. نقاط تقاطع کو اعدادی تراکیب سے تلاش کریں۔

ج. یک بعد دیگرے جوڑی نقاط تقاطع کے بیچ $|f(x) - g(x)|$ کا مکمل حل کریں۔

د. جزو-ج میں مکمل کی حاصل قیمتوں کا مجموعہ لیں۔

سوال 6.55: $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$, $g(x) = x - 1$

سوال 6.56: $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10$, $g(x) = 8 - 12x$

سوال 6.57: $f(x) = x + \sin(2x)$, $g(x) = x^3$

سوال 6.58: $f(x) = x^2 \cos x$, $g(x) = x^3 - x$

6.2 ٹکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش

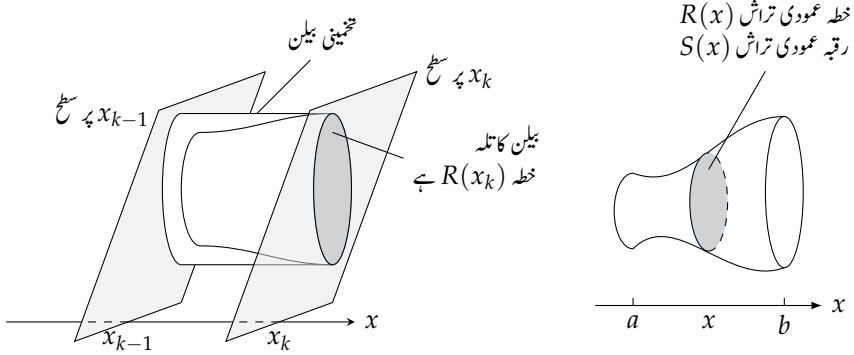
قوسی سرحد کے خطوط کے رقبہ عمودی تراش سے بیلیجی حجم معلوم کرنے کے لئے رقبہ عمودی تراش کو بیلیجی کے قد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرز کے بیلیجی حجم سے دیگر اشکال کے خطوط کا حجم تلاش کیا جاسکتا ہے۔

ٹکلیاں

فرض کریں ہم شکل 6.26 میں دکھائے گئے ٹھوس جسم کا حجم دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ x پر جسم کا عمودی تراش خطہ $R(x)$ ہے جس کا رقبہ $S(x)$ ہے۔ یوں S متغیر x کا حقیقی قیمت تفاعل ہو گا جو x کا استمراری تفاعل بھی ہو گا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے جسم کے حجم کی تعریف پیش کی جاسکتی ہے جس کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

ہم x محور کے لحاظ سے وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے جسم کو خانہ بند نقطوں پر x محور کے عمودی سطحوں سے ستلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں نقطہ x_{k-1} اور x_k پر سطحوں کے بیچ k ویں کٹلا کا حجم تقریباً اس بیلیجی جتنا ہو گا جو ان سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے اور جس کا عمودی تراش خطہ $R(x_k)$ ہے (شکل 6.27)۔ اس بیلیجی کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H_k &= \text{قد} \times \text{رقبہ تلاء} \\ &= S(x_k) \times (\text{بیچ فاصلہ کے } x_k \text{ اور } x_{k-1}) \\ &= S(x_k) \Delta x_k \end{aligned}$$



شکل 6.27: سطح x_{k-1} اور x_k کے بیچ کٹلا کو بڑا کر کے دکھایا گیا ہے اور ساتھ ہی تختینی بیلن بھی دکھایا گیا ہے۔

شکل 6.26: عمودی تراش $R(x)$ کا رقبہ $S(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم ٹھوس جسم کا حجم $x = a$ تا $x = b$ تفاعل $S(x)$ کا مکمل لے کر حاصل کر سکتے ہیں۔

اس طرح تمام چھوٹے بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تجميعاً ٹھوس جسم کے حجم کے برابر ہو گا:

$$\sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x_k$$

یہ وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $S(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں۔ کہ جیسے جیسے $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچے ویسے ویسے یہ مجموعے اصل حجم کی بہتر سے بہتر عکاسی کریں گے۔ یوں ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف ان مجموعوں کا تحدیدی مکمل ہو گا۔

تعریف: ایسا ٹھوس جسم جس کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ قابل مکمل تفاعل ہو، کا $x = a$ سے $x = b$ تک حجم V کا مکمل S تفاعل $x = b$ ہو گا:

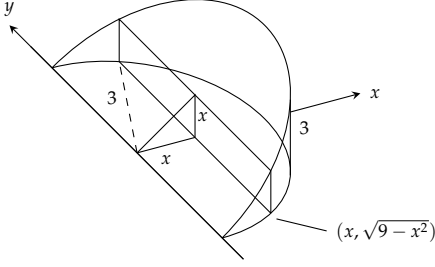
$$H = \int_a^b S(x) dx \quad (6.3)$$

□

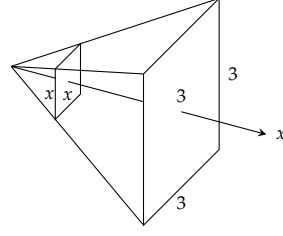
مساوات 6.3 استعمال کرنے کے لئے درج ذیل تین اقدام کرنے ہوں گے۔

ٹھوس جسم کی ٹکیوں سے حجم کی تلاش

1. ٹھوس جسم اور اس کے نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ کھینچیں۔



شکل 6.29: قوسی پچر (مثال 6.7)



شکل 6.28: اہرام (مثال 6.6)

2. رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

3. مکمل کا زیریں اور بالائی حد تلاش کریں۔

4. حجم معلوم کرنے کی خاطر $S(x)$ کا مکمل حل کریں۔

مثال 6.6: ایک اہرام کا قد 3 m اور اس کے چکور بنیاد کا ضلع 3 m ہے۔ اہرام کی چوٹی سے x میٹر نیچے اہرام کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا جس کا ضلع x میٹر ہو گا۔ اس اہرام کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم اہرام کی چوٹی کو مبدا پر رکھ کر اہرام کو x محور پر لیٹا ہوا بنا کر نمائندہ رقبہ عمودی تراش بناتے ہیں (شکل 6.28)۔

دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$ ۔ چونکہ چکور رقبہ عمودی تراش کا ضلع x میٹر ہے لہذا اس کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = x^2$ ہو گا۔

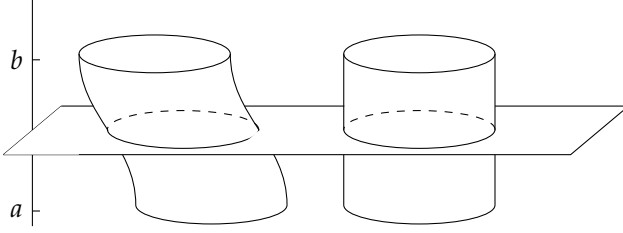
تیسرا قدم: مکمل کے حد۔ چکور $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں لہذا $a = 0$ اور $b = 3$ ہوں گے۔
چوتھا قدم: حجم۔

$$H = \int_a^b S(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 9$$

□

یوں اہرام کا حجم 9 m^3 ہو گا۔

مثال 6.7: رداس 3 کے بیلن کو دو مستوی سے کاٹ کر قوسی پچر بنایا جاتا ہے۔ ایک مستوی بیلن کے محور کا عمودی ہے جبکہ دوسرا مستوی پہلے مستوی کو بیلن کے وسط پر 45° سے قطع کرتا ہے۔ پچر کا حجم تلاش کریں۔



شکل 6.30: ان اجسام کا حجم ایک دوسرے جیسا ہے۔ آپ سکوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم پیچر اور نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.29)۔ عمودی تراش x محور کے عمودی ہے۔ دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$ ۔ نقطہ x پر مستطیل عمودی تراش کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = (\text{چوڑائی})(\text{قد}) = (x)(2\sqrt{9-x^2}) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

تیسرا قدم: مکمل کے حد۔ مستطیل $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں۔
چوتھا قدم: حجم۔ درج ذیل میں $u = 9 - x^2$ لہذا $du = -2x dx$ لے کر مکمل حاصل کریں۔

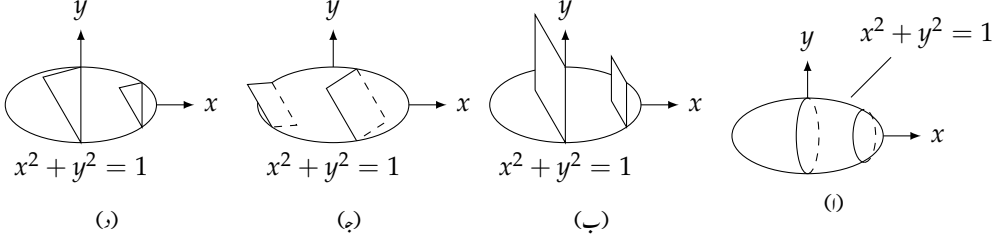
$$\begin{aligned} H &= \int_a^b S(x) dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx \\ &= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} \Big|_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

□

مثال 6.8: مسئلہ کو الیئرے¹ محور x پر پڑے ہوئے ایسے دو اجسام جن کا ہر x پر رقبہ عمودی تراش ایک دوسرے جیسا ہو گا حجم بھی ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ یہ حقیقت مساوات 6.3 سے صاف ظاہر ہے چونکہ دونوں اجسام کا رقبہ عمودی تراش تفاعل $S(x)$ ایک دوسرے جیسا ہے (شکل 6.30)۔

□

¹ اطالوی ریاضی دان بوئادینورا کوالیئرے [1598-1647]



شکل 6.31: عمودی تراش برائے سوال 6.59

سوالات

رقبہ عمودی تراش
سوال 6.59 اور سوال 6.60 میں x محور کے عمودی، ٹھوس جسم کے، رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 6.59: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش نصف دائرہ $y = -\sqrt{1-x^2}$ اور نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ب)۔

ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنا ہوتی ہے (شکل 6.31-ج)۔

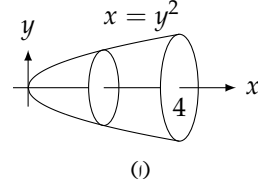
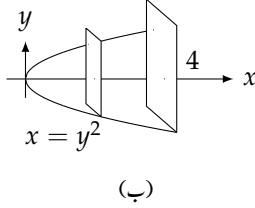
د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-د)۔

جواب: (ا) $S(x) = \pi(1-x^2)$ ، (ب) $S(x) = 4(1-x^2)$ ، (ج) $S(x) = 2(1-x^2)$ ، (د) $S(x) = \sqrt{3}(1-x^2)$

سوال 6.60: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش، قطع مکانی $y = -\sqrt{x}$ اور قطع مکانی $y = \sqrt{x}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.32-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.60-ب)۔



شکل 6.32: عمودی تراش برائے سوال 6.60

ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔

د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں۔

ٹکئیوں سے حجم کی تلاش
سوال 6.61 تا سوال 6.70 میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 6.61: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش کی صورت چکور ہے جو x محور کے عمودی ہیں اور جن کے وتر قطع مکانی $y = -\sqrt{x}$ سے قطع مکانی $y = \sqrt{x}$ تک ہیں۔
جواب: 16

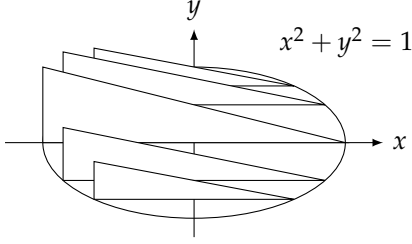
سوال 6.62: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر دائری اقراس ہیں جو قطع مکانی $y = x^2$ سے قطع مکانی $y = 2 - x^2$ تک ہیں۔

سوال 6.63: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے تلاء کے کنارے نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔
جواب: $\frac{16}{3}$

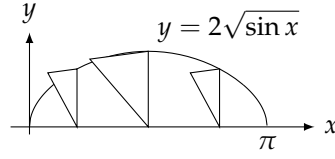
سوال 6.64: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے وتر نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنا ہوتی ہے۔

سوال 6.65: ایک ٹھوس جسم کا تلاء منحنی $y = 2\sqrt{\sin x}$ اور x محور پر وقفہ $[0, \pi]$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی عمودی تراش درج ذیل ہیں۔

ا. مساوی الاضلاع مثلث جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں (شکل 6.33)۔



شکل 6.34: عمودی تراش (سوال 6.68)



شکل 6.33: عمودی تراش (سوال 6.65)

ب. انتظامی چکور جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں۔

جواب: (i) $2\sqrt{3}$ ، (ب) 8

سوال 6.66: ایک ٹھوس جسم $x = -\frac{\pi}{3}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کی خواص درج ذیل ہیں۔

ا. دائری اقراص جن کے قطر $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

ب. انتظامی چکور جن کے قاعدے $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

سوال 6.67: ایک ٹھوس جسم $y = 0$ اور $y = 2$ پر y محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے دائری عمودی تراش y محور کے عمودی ہیں جن کے قطر y محور سے قطع مکانی $x = \sqrt{5}y^2$ تک ہیں۔
جواب: 8π

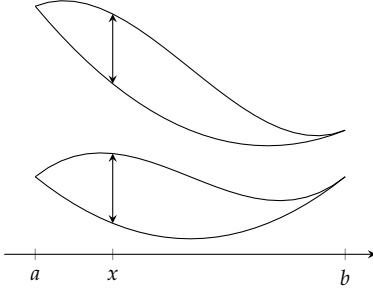
سوال 6.68: ایک ٹھوس جسم کا تلا قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ ہے۔ عمودی تراش $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ y محور کے عمودی ہیں جو مساوی الساقین مثلث ہیں جن کا ایک ضلع قرص میں پایا جاتا ہے (شکل 6.34)۔

مسئلہ کوالٹیرے
سوال 6.69: بلندار ٹھوس جسم

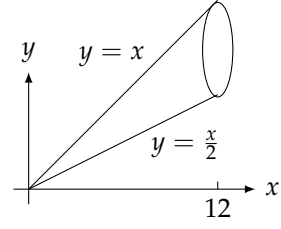
ایک چکور جس کا ضلع s ہے لکیر L کے عمودی مستوی میں پایا جاتا ہے۔ چکور کا ایک راس L پر پایا جاتا ہے۔ یہ چکور L پر h فاصلہ طے کرتے ہوئے ایک چکر کاٹ کر بیچ نما جسم دیتا ہے جس کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا۔

ا. اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

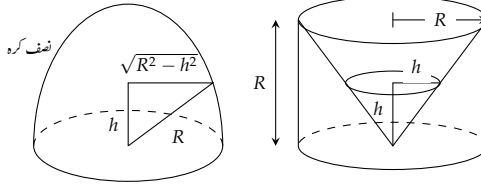
ب. اگر چکور ایک کی بجائے دو بار چکر کاٹتا تب حجم کتنا ہوتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



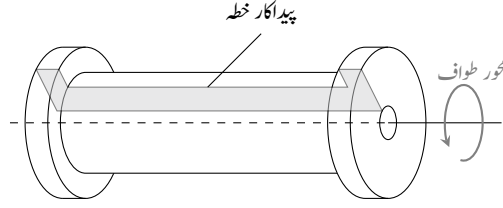
شکل 6.36: وقفہ $[a, b]$ پر کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جتنی ہے (مسئلہ کوالیئرے)۔



شکل 6.35: عمودی تراش (سوال 6.70)



شکل 6.37: کرہ اور پیلن سے مخروط منہی کر کے ایک جیسا حجم ملتا ہے (سوال 6.72)۔



شکل 6.38: مستوی خطہ کو کسی محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

جواب: (i) s^2h ، (ب) s^2h

سوال 6.70: ایک ٹھوس جسم $x = 01$ اور $x = 12$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر لکیر $y = \frac{x}{2}$ سے لکیر $y = x$ تک ہیں (شکل 6.35)۔ اس جسم کا حجم کیوں اس قائمہ مخروط جتنا ہو گا جس کا قد 12 اور جس کے تلا کا رداس 3 ہو؟

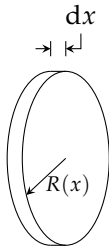
سوال 6.71: مسئلہ کوالیئرے کی ابتدائی صورت
کوالیئرے نے طالب علمی کے دوران دریافت کیا کہ اگر دو مستوی خطوں کو x محور کے یکساں وقفہ پر یوں رکھنا ممکن ہو کہ کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جیسی ہو تب دونوں خطوں کا رقبہ ایک دوسرے جیسا ہو گا (شکل 6.36)۔ ٹھوس اجسام کے لئے یہی مسئلہ کوالیئرے نے کبھی ثابت نہیں کیا۔ اگر شکل 6.71 میں بالائی اور زیریں سرحدیں استمراری تفاعل ہوں تب اس مسئلے کو ثابت کریں۔

سوال 6.72: نصف کرہ کا حجم بذریعہ مسئلہ کوالیئرے
نصف کرہ کا حجم $H = \frac{2}{3}\pi R^3$ ہے جہاں R رداس ہے۔ رداس R اور قد R کے قائمہ نیلن سے رداس R اور قد R کا قائمہ مخروط ہٹا کر نصف کرہ کا عمودی تراش حاصل ہوتا ہے۔ مخروط کو نوک کے بل رکھا تصور کریں (شکل 6.37)۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے نصف کرہ کا حجم تلاش کریں۔

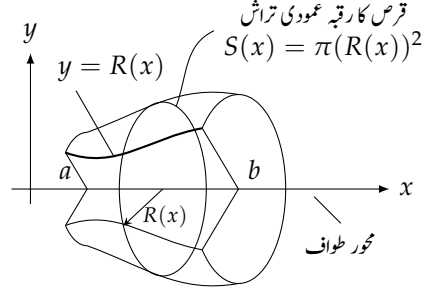
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا

مستوی خطہ کو کسی محور کے گرد گمانے سے جسم طواف² پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.38)۔ جسم طواف پیدا کرنے کے لئے گھمائے جانے والے مستوی خطہ کو پیدا کار خطہ³ کہتے ہیں۔ جسم طواف کا حجم نکلیوں کی ترکیب سے نہایت خوش اسلوبی سے حاصل ہوتا ہے۔

solid of revolution²
generating region³



(ب) قرص کا حجم $dH = \pi(R(x))^2 dx$ ہے۔



(ا) استمراری تقابل $y = R(x)$ کو $x = a$ تا $x = b$ محور x کے گرد گھمایا گیا ہے۔

شکل 6.39: جسم طواف کے حجم کا حصول بذریعہ ترکیب قرص۔

اگر ہم مستوی خطہ کو استمراری تقابل $y = R(x)$, $a \leq x \leq b$ اور x کے بیچ خطہ سے ظاہر کر سکیں اور اگر x محور گھومنے کا محور (محور طواف⁴) بھی ہو تب ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 6.39)۔

محور طواف کے لحاظ سے عمودی تراش کا رداس $R(x)$ اور رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi[R(x)]^2$$

جسم کا حجم، $x = a$ تا $x = b$ ، تقابل S کا مکمل ہو گا۔

جسم طواف کا حجم (محور طواف x محور ہے)

استمراری تقابل $y = R(x)$, $a \leq x \leq b$ کو x محور کے گرد گمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$(6.4) \quad H = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

مثال 6.9: منحنی $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ کو x محور کے گرد گمانے سے ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ رداس بناتے ہیں (شکل 6.40)۔ حجم درج ذیل ہو گا۔

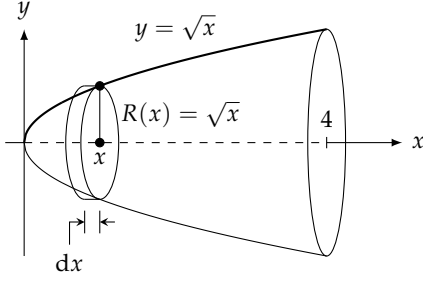
$$H = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

مساوات 6.4

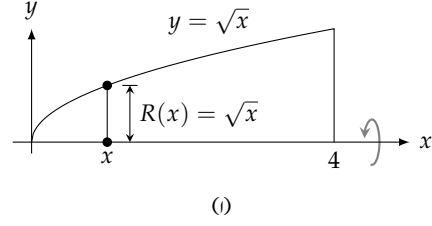
$$= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2 dx$$

$$R(x) = \sqrt{x}$$

$$= \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi$$



(ب)



شکل 6.40: مستوی خط اور جسم طواف (مثال 6.9)

□

مساوات 6.4 سے حجم حاصل کرنے کا طریقہ

ا. خطے کا خاکہ بنائیں اور رداس $R(x)$ کی نشاندہی کریں۔

ب. یوں رقبہ عمودی تراش $\pi[R(x)]^2$ ہو گا۔

ج. رقبہ عمودی تراش کا مکمل حجم ہو گا۔

اگلے مثال میں محور طواف x محور نہیں ہے، لیکن حجم حاصل کرنے کا اصول تبدیل نہیں ہوتا: مکمل کے موزوں حد استعمال کریں۔

مثال 6.10: تقاطع $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $y = 1$ اور لکیر $x = 4$ کے بیچ خطہ کو لکیر $y = 1$ کے گرد گما کر ٹھوس جسم پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم خطہ اور نمائندہ رداس بنا کر ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.41)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_1^4 \pi[R(x)]^2 dx$$

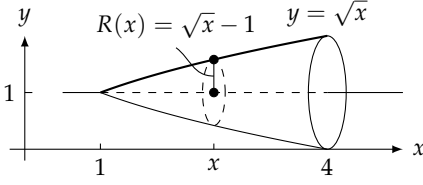
مساوات 6.4

$$= \int_1^4 \pi[\sqrt{x} - 1]^2 dx$$

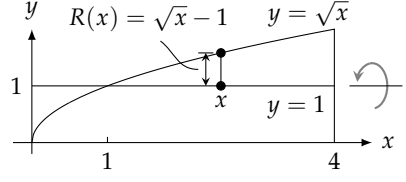
$$R(x) = \sqrt{x} - 1$$

$$= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}$$



(ب)



(i)

شکل 6.41: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.10)

□

منحنی $x = R(y)$, $c \leq y \leq d$ کو y محور کے گرد گما کر ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے جس کا حجم تلاش کرتے ہوئے مساوات 6.4 میں x کی جگہ y لکھا جاتا ہے۔

جسم طواف کا حجم (محور طواف y محور ہے) استمراری تقاطع $x = R(y)$, $c \leq y \leq d$ کو y محور کے گرد گمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$(6.5) \quad H = \int_c^d \pi [R(y)]^2 dy = \int_c^d \pi [R(y)]^2 dy$$

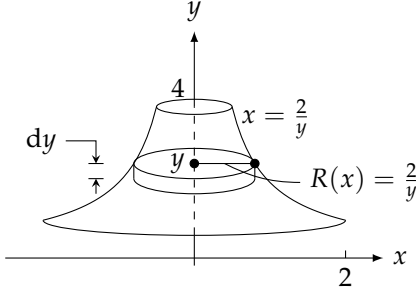
مثال 6.11: منحنی $x = \frac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$ کو y محور کے گرد گما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔

حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ قرص اور رداس بناتے ہیں (شکل 6.42)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

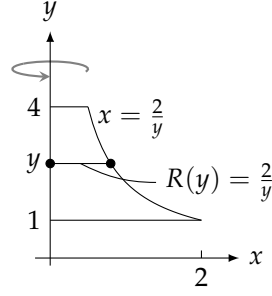
$$\begin{aligned} H &= \int_1^4 \pi [R(y)]^2 dy && \text{مساوات 6.5} \\ &= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy && R(y) = \frac{2}{y} \\ &= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi \end{aligned}$$

□

مثال 6.12: قطع مکانی $x = y^2 + 1$ اور لکیر $x = 3$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = 3$ کے گرد گما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔



(ب)



(i)

شکل 6.42: مستوی خط، جسم طواف اور قرص (مثال 6.11)

حل: ہم منحنی اور لکیر کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر جسم طواف کا خاکہ بناتے ہیں اور عمودی تراش کی نمائندہ رداس کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 6.43)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

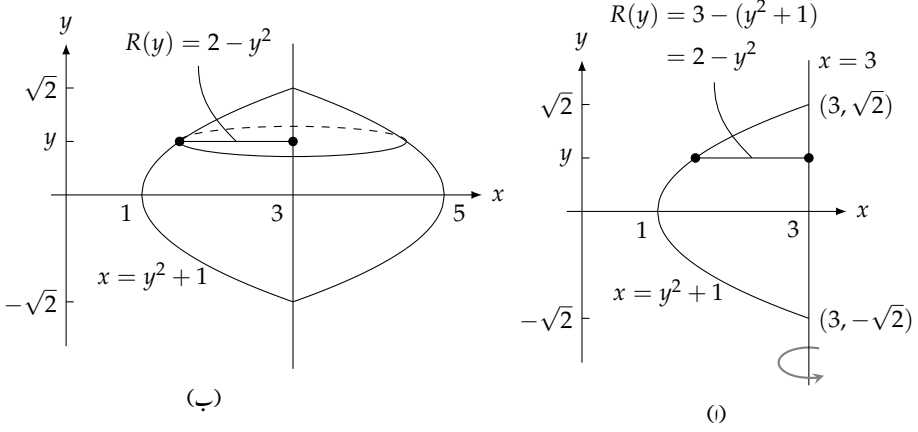
$$\begin{aligned}
 H &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [R(y)]^2 dy & \text{مساوات 6.5} \\
 &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [2 - y^2]^2 dy & R(y) = 3 - (y^2 + 1) \\
 &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] dy \\
 &= \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
 \end{aligned}$$

□

ترکیب چھلا

اگر گھمائے جانے والا خطہ محور طواف کو قطع نہ کرتا ہو اور نا ہی محور طواف کو مس کرتا ہو تب جسم طواف میں سوراخ پایا جائے گا (شکل 6.44)۔ ایسے جسم کا بیرونی رداس $R(x)$ اور اندرونی رداس $r(x)$ ہو گا۔ یوں اس کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi [R(x)]^2 - \pi [r(x)]^2 = \pi ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$



شکل 6.43: مستوی نقطہ اور جسم طواف (مثال 6.12)

حجم تلاش کرنے کا کلیہ

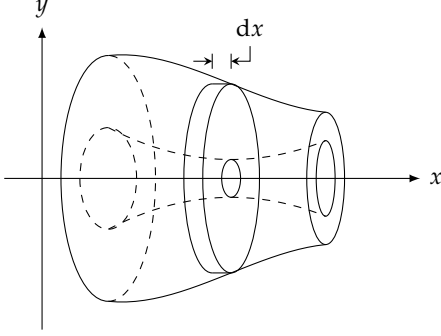
$$(6.6) \quad H = \int_a^b \pi ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$

دھیان رہے کہ مساوات 6.6 میں تقابل $\pi(R^2 - r^2)$ کا مکمل لیا جاتا ہے تاکہ تقابل $\pi(R - r)^2$ کا۔ اگر پورے وقفہ $[a, b]$ پر اندرونی رداس صفر ہو تب درج بالا سے مساوات 6.4 حاصل ہوتی ہے۔ یوں ترکیب نکلیا در حقیقت ترکیب چھلا کی مخصوص صورت ہے۔

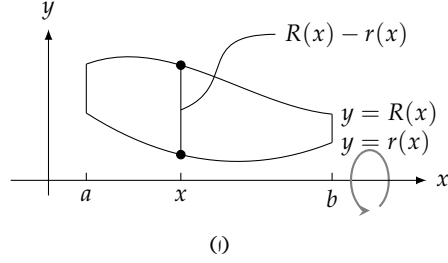
مثال 6.13: منحنی $y = x^2 + 1$ اور لکیر $y = -x + 3$ کے بیچ خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنی اور لکیر ترسیم کر کے خطہ کا خاکہ بنا کر خطے پر محور طواف کے عمودی لکیر کھینچیں (شکل 6.45)۔
دوسرا قدم: نقاط تقاطع سے مکمل کے حد تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x &= -2, \quad x = 1 \end{aligned}$$



(ب)



(i)

شکل 6.44: یہاں جسم طواف قرص کی بجائے چھلا نما ہے جس میں سوراخ پایا جاتا ہے لہذا مکمل $\int_a^b S(x) dx$ ذرہ مختلف صورت اختیار کرتا ہے۔

تیسرا قدم: بیرونی اور اندرونی رداس کی نشاندہی کریں۔

$$R(x) = -x + 3$$

بیرونی رداس

$$r(x) = x^2 + 1$$

اندرونی رداس

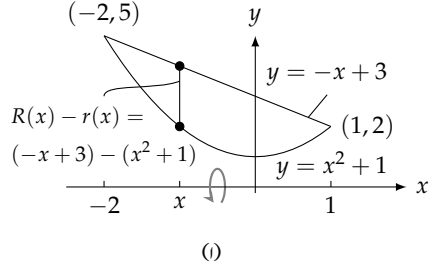
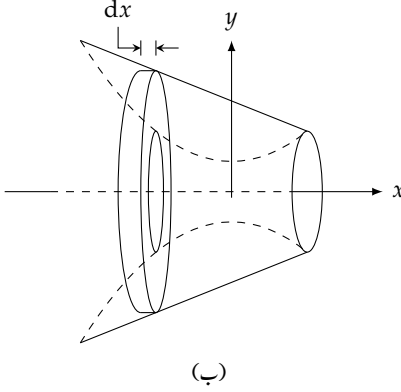
چوتھا قدم: مکمل سے حجم حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b \pi ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 \pi ([-x + 3]^2 - [x^2 + 1]^2) dx \\ &= \int_{-2}^1 \pi (8 - 6x - x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5} \end{aligned}$$

□

ترکیب چھلا سے حجم کی تلاش

۱. خطے کا خاکہ بنا کر اس پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع کیجییں۔ خطہ کو محور طواف کے گرد گھمانے سے یہ قطع نمائندہ عمودی تراش دے گا۔



شکل 6.45: مستوی خط اور چھلا نما جسم طواف (مثال 6.13)

ب. مکمل کے حد دریافت کریں۔

ج. عمودی تراش کا بیرونی اور اندرونی رداس کو لکیری قطع سے حاصل کریں۔

د. مکمل کی ذریعہ حجم حاصل کریں۔

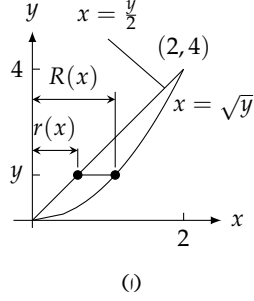
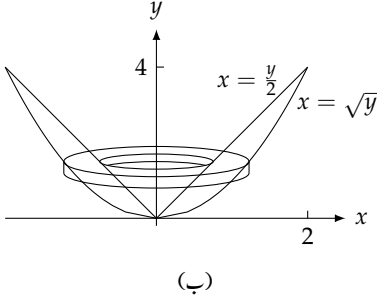
اگر خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب درج بالا اقدام استعمال کرتے ہوئے x کی بجائے y کے ساتھ مکمل لیں۔

مثال 6.14: ربع اول میں قطع مکانی $y = x^2$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ کھینچ کر خطے پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع بنائیں (شکل 6.46)۔ یہاں محور طواف y محور ہے۔
دوسرا قدم: قطع مکانی اور لکیر ایک دوسرے کو $y = 0$ اور $y = 4$ پر قطع کرتے ہیں لہذا مکمل کے حد $c = 0$ اور $d = 4$ ہوں گے۔

تیسرا قدم: رقبہ عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \sqrt{y}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{y}{2}$ ہے۔
چوتھا قدم: مکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_c^d \pi ([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy \\ &= \int_0^4 \pi \left([\sqrt{y}]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2 \right) dy \\ &= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right]_0^4 = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$



شکل 6.46: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.14)

□

مثال 6.15: ربع اول میں قطع مکانی $y = x^2$ ، لکیر $y = 1$ اور y محور کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم دریافت کریں۔

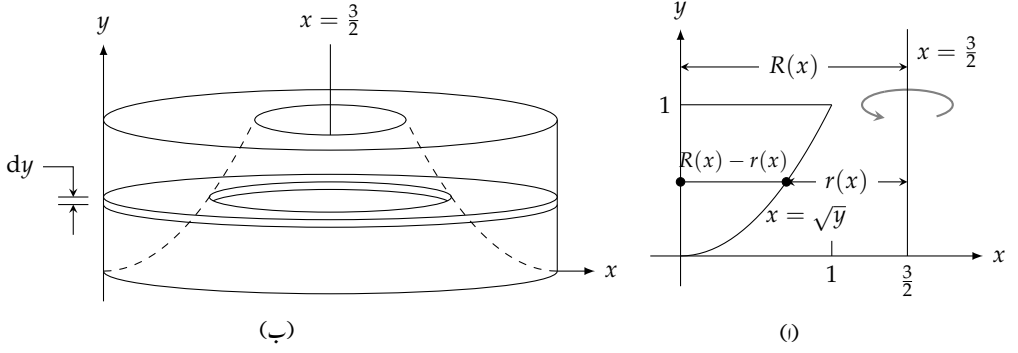
حل: پہلا قدم: خطے کے خاکہ پر محور طواف $x = \frac{3}{2}$ کے عمودی، لکیری قطع بنائیں (شکل 6.47)۔
 دوسرا قدم: مکمل کے حد $y = 1$ اور $y = 0$ ہیں۔
 تیسرا قدم: عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \frac{3}{2}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{y}$ ہے۔
 چوتھا قدم: مکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy \\ &= \int_0^1 \pi\left(\left[\frac{3}{2}\right]^2 - \left[\frac{3}{2} - \sqrt{y}\right]^2\right) dy \\ &= \pi \int_0^1 (3\sqrt{y} - y) dy = \pi \left[2y^{3/2} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

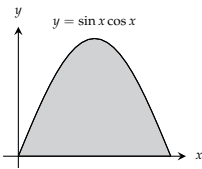
□

سوالات

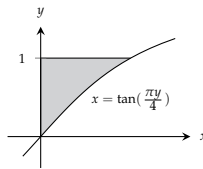
حجم بذریعہ ترکیب نکلیا
 سوال 6.73 تا سوال 6.76 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔



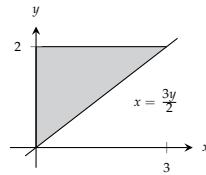
شکل 6.47: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.15)



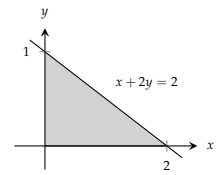
شکل 6.51



شکل 6.50



شکل 6.49



شکل 6.48

سوال 6.73: سایہ دار خطہ شکل 6.48 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x + 2y = 2$ ہے۔
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 6.74: سایہ دار خطہ شکل 6.49 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x = \frac{3y}{2}$ ہے۔

سوال 6.75: سایہ دار خطہ شکل 6.50 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x = \tan\left(\frac{\pi y}{4}\right)$ ہے۔
جواب: $4 - \pi$

سوال 6.76: سایہ دار خطہ شکل 6.51 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $y = \sin x \cos x$ ہے۔

سوال 6.77 تا سوال 6.82 میں منحنیات اور لکڑوں کے بیچ خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.77: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$
جواب: $\frac{32\pi}{5}$

سوال 6.78: $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$

سوال 6.79: $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$
جواب: 36π

سوال 6.80: $y = x - x^2$, $y = 0$

سوال 6.81: $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = 0$
جواب: π

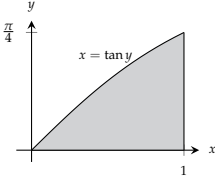
سوال 6.82: $y = \sec x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$

سوال 6.83 اور سوال 6.84 میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

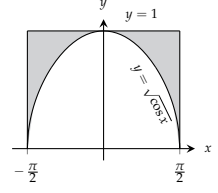
سوال 6.83: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y = \sqrt{2}$ ، زیریں سرحد منحنی $y = \sec x \tan x$ اور بائیں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y = \sqrt{2}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{11}{3}\right)$

سوال 6.84: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y = 2$ ، زیریں سرحد منحنی $y = \sec x \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ اور بائیں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 6.85 تا سوال 6.90 میں منحنیات اور لکڑوں کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم دریافت کریں۔



شکل 6.53



شکل 6.52

سوال 6.85: $x = \sqrt{5}y^2$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$
جواب: 2π

سوال 6.86: $x = y^{3/2}$, $x = 0$, $y = 2$

سوال 6.87: $x = \sqrt{2 \sin 2y}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $x = 0$
جواب: 2π

سوال 6.88: $x = \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}}$, $-2 \leq y \leq 0$, $x = 0$

سوال 6.89: $x = \frac{2}{y+1}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$
جواب: 3π

سوال 6.90: $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2+1}$, $x = 0$, $y = 1$

حجم بذریعہ ترکیب چھلا
سوال 6.91 اور سوال 6.91 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.91: خطہ شکل 6.52 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\pi^2 - 2\pi$

سوال 6.92: خطہ شکل 6.53 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.93 تا سوال 6.100 میں دیے منحنیات اور کلیروں کے بیچ خطے کو x محور گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.93: $y = x$, $y = 1$, $x = 0$
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 6.94: $y = 2x, \quad y = x, \quad x = 1$

سوال 6.95: $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$
جواب: 2π

سوال 6.96: $y = -\sqrt{x}, \quad y = -2, \quad x = 0$

سوال 6.97: $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$
جواب: $\frac{117\pi}{5}$

سوال 6.98: $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

سوال 6.99: $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
جواب: $\pi(\pi - 2)$

سوال 6.100: $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

سوال 6.101 تا سوال 6.106 میں خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

سوال 6.101: مثلث میں محیط خطہ جہاں مثلث کی راسیں $(1, 0)$ ، $(2, 1)$ اور $(1, 1)$ ہیں۔
جواب: $\frac{4\pi}{3}$

سوال 6.102: مثلث جس کی راسیں $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ اور $(1, 1)$ ہیں میں محیط خطہ۔

سوال 6.103: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد قطع مکانی $y = x^2$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد کلیئر $x = 2$ ہے۔
جواب: 8π

سوال 6.104: خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = \sqrt{x}$ اور زیریں سرحد کلیئر $y = x$ ہے۔

سوال 6.105: ربع اول میں خطہ جس کا بایاں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 3$ ، دایاں سرحد کلیئر $x = \sqrt{3}$ اور بالائی سرحد کلیئر $y = \sqrt{3}$ ہے۔
جواب: $\sqrt{3}\pi$

سوال 6.106: خطے کی بائیں سرحد کلیئر $x = 4$ اور دائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ہے۔

سوال 6.107 اور سوال 6.108 میں خطے کو دئے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 6.107: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = x^2$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد کلیئر $x = 1$ ہیں۔ خطے کو کلیئر $x = -1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: $\frac{7\pi}{6}$

سوال 6.108: ربع دوم میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = -x^3$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد کلیئر $x = -1$ ہیں۔ خطے کو کلیئر $x = -2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جسم طواف کے حجم
سوال 6.109: ایک خطہ جس کی سرحدیں $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ اور $x = 0$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ٹھوس جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

ا. محور x :

ب. محور y :

ج. کلیئر $y = 2$:

د. کلیئر $x = 4$

جواب: (ا) 8π ، (ب) $\frac{32\pi}{5}$ ، (ج) $\frac{8\pi}{3}$ ، (د) $\frac{224\pi}{15}$

سوال 6.110: ایک تیکونی خطی جس کی سرحدیں $y = 2x$ ، $y = 0$ اور $x = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. کلیئر $x = 1$:

ب. کلیئر $x = 2$

سوال 6.111: ایک خطہ جس کی سرحدیں قطع مکافی $y = x^2$ اور $y = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

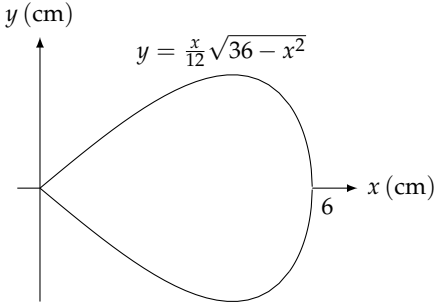
ا. کلیئر $y = 1$:

ب. کلیئر $y = 2$:

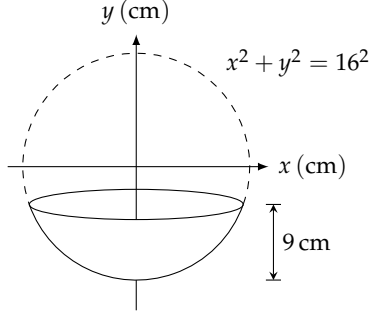
ج. کلیئر $y = -1$

جواب: (ا) $\frac{16\pi}{15}$ ، (ب) $\frac{56\pi}{15}$ ، (ج) $\frac{64\pi}{15}$

سوال 6.112: ایک مثلث جس کی راسیں $(0,0)$ ، $(b,0)$ اور $(0,h)$ ہیں میں محیط خطے کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم مکمل کی مدد سے حاصل کریں۔



شکل 6.55: ناشپاتی نما گولہ (سوال 6.114)



شکل 6.54: کروی برتن (سوال 6.113)

ا. محور x :ب. محور y :

سوال 6.113: ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کا حجم مکمل کی مدد سے دریافت کریں (شکل 6.54)۔
جواب: $H = 1053\pi \text{ cm}^3$

سوال 6.114: منحنی $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}$, $0 \leq x \leq 6 \text{ cm}$ کو x محور کے گرد گھما کر ناشپاتی نما بیٹیل کا گولہ بنایا جاتا ہے (شکل 6.55)۔ بیٹیل کی کثافت 8.5 g cm^{-3} لیں۔ گولے کی کمیت کتنی ہو گی؟

سوال 6.115: منحنی $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ کو لکیر $y = c$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں $0 \leq c \leq 1$ ہے۔

ا. ٹھوس جسم کی کم سے کم حجم c کی کتنی قیمت پر حاصل ہو گی؟ اس کم سے کم حجم کو تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0, 1]$ میں c کی کوئی قیمت زیادہ سے زیادہ حجم دے گی؟

ج. ٹھوس جسم کا حجم بالفاظ c کو پہلے $0 \leq c \leq 1$ کے لئے اور بعد میں بڑی قیمتوں کے لئے ترسیم کریں۔ جیسے جیسے c کی قیمت وقفہ $[0, 1]$ سے دور ہوتی جاتی ہے، جسم کے حجم کو کیا ہوتا ہے؟ کیا اس کا طبعی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (i) $c = \frac{2}{\pi}$ ، (ب) $c = 0$

سوال 6.116: بیلی کاپٹر کی پیچ بڑھانے کی خاطر اس کے نیچے تیل کا اضافی حوض نسب کرنا مطلوب ہے۔ منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3}$ ، $-1 \leq x \leq 1$ محور کے گرد گھما کر حوض بنایا جاتا ہے۔ اس حوض میں کتنے لٹر تیل آئے گا؟

سوال 6.117: اندر سے کا حجم دائری قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو تکبیر $y = b$ ($b > a$) کے گرد گھما کر اندر سے⁵ پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ۔ $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^2}{2}$ ہو گا چونکہ یہ رداس a کے نصف دائرے کا رقبہ ہے۔) جواب: $H = 2a^2 b \pi^2$

سوال 6.118: (i) نصف کروی برتن جس کا رداس a ہے میں پانی کی گہرائی h ہے۔ پانی کی مقدار معلوم کریں۔ (ب) نصف کروی حوض جس کا رداس 5 m ہے میں پانی داخل ہونے کی شرح $0.2\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$ ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی 4 m ہو، اس لمحہ گہرائی بڑھنے کی شرح کیا ہوگی؟

سوال 6.119: اس حصہ میں حجم کے تمام تعریف جیومیٹریائی تعریف کے عین مطابق ہیں۔

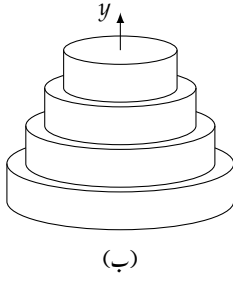
ا. نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کو محور کے گرد گھما کر کرہ حاصل ہوتا ہے۔ قرص کے حجم کا کلیہ مساوات 6.4 استعمال کرتے ہوئے کرہ کے حجم کا کلیہ $H = \frac{4}{3}\pi a^3$ حاصل کریں۔

ب. رداس r اور قد h کا قائمہ مخروط کا حجم احصاء کی مدد سے حاصل کریں۔

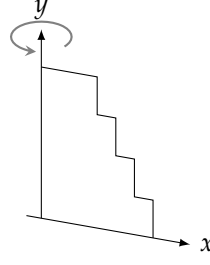
جواب: (ب) $H = \frac{\pi r^2 h}{3}$

6.4 نکلی چھلے

اجسام طواف کا حجم تلاش کرتے ہوئے بعض اوقات چھلا کی بجائے نکلی خول استعمال کرنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے (شکل 6.56)۔



(ب)



(i)

شکل 6.56: تکلی جسم طواف

تکلی کلیہ

فرض کریں ہم x محور اور وقفہ $[a, b]$ پر تقابل $y = f(x)$ کے پچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کرتے ہیں۔ ہمیں جسم طواف کا حجم درکار ہے۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P پر منحصر مستطیلوں کو خطے کا تخمینہ رقبہ لے سکتے ہیں۔ ایک نمائندہ مستطیل کی چوڑائی Δx_k اور قد $f(c_k)$ ہوگا، جہاں نمائندہ مستطیل کے قاعدے کا وسط c_k ہے (شکل 6.57)۔ ہم جیومیٹری سے جانتے ہیں کہ ایسے مستطیل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم

$$\Delta H_k = 2\pi \times \text{خول کا قد} \times \text{خول کا اوسط رداس}$$

ہوگا جو موجودہ صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$\Delta H_k = 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k$$

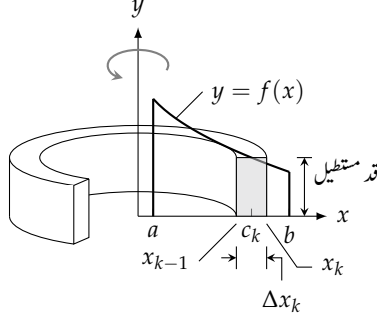
ہم P پر منحصر n مستطیلوں کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل حجم کے مجموعہ کو تخمیناً جسم طواف کا حجم لیتے ہیں۔

$$H \approx \sum_{k=1}^n \Delta H_k = \sum_{k=1}^n 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k \quad \text{ریمان مجموعہ}$$

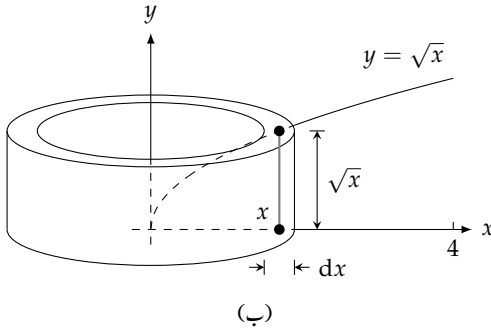
$\|P\| \rightarrow 0$ کرتے ہوئے اس مجموعہ کا حد ٹھوس جسم کا حجم ہوگا:

$$H = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

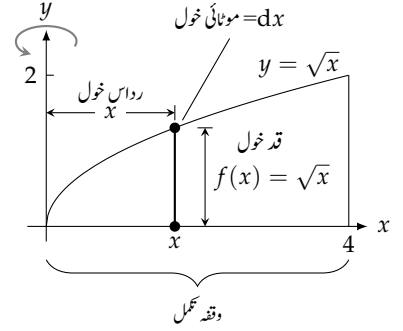
کلیہ خول برائے y محور کے گرد طواف
استمراری تقابل $y = f(x)$, $0 \leq a \leq x \leq b$ اور محور x کے پچ خطے کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا



شکل 6.57: k ویں مستطیل کو گھمانے سے حاصل تکلی خول۔



(ب)



(ج)

شکل 6.58: تکلی خول (مثال 6.16)

جسم درج ذیل ہو گا۔

$$(6.7) \quad H = \int_a^b 2\pi (\text{رداس خول}) (\text{قد خول}) dx = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

مثال 6.16: معنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $x = 4$ اور x محور کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ بنا کر محور گردش کے متوازی اس پر قطع دکھائیں۔ قطع کا قد (خول کا قد) اور محور گردش سے قطع کے فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی چوڑائی dx خول کی چوڑائی ہو گی۔ ہم نے شکل 6.58 میں خول دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی

ضرورت نہیں ہے۔
دوسرا قدم: مکمل کے حد معلوم کریں۔ خطے میں x کی قیمت a تا b تبدیل ہوتی ہے لہذا مکمل کے حد a اور b ہوں گے۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول}) dx && \text{مسوات 6.7} \\ &= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x}) dx && \text{جزو-1 اور جزو-2 میں حاصل قیمتیں} \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = \frac{128\pi}{5} \end{aligned}$$

□

محور y کے گرد خطہ گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم مساوات 6.7 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کریں تب حجم تلاش کرنے کی خاطر مساوات 6.7 میں x کی جگہ y استعمال کیا جائے گا۔

کلیہ خول برائے x محور کے گرد طواف

$$(6.8) \quad H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول}) dy = \int_c^d 2\pi y f(y) dy$$

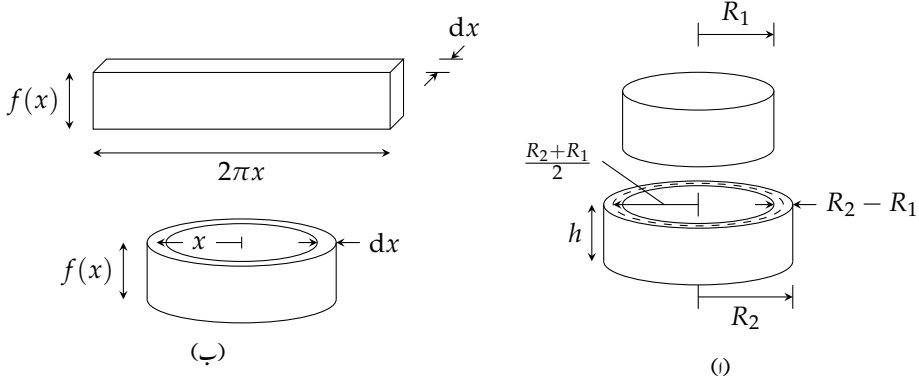
درج بالا مساوات میں $f(y) > 0$ اور $0 \leq c \leq y \leq d$ ہیں۔

خول کا جیومیٹریائی حجم

ایک ٹھوس بیلن جس کا رداس R_2 اور قد h ہو کا حجم $\pi R_2^2 h$ ہو گا۔ اگر اس جسم سے رداس R_1 کا ٹھوس بیلن کاٹا جائے تب حاصل خول کا حجم $\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h$ ہو گا (شکل 6.59) جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} \text{حجم خول} &= \pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h \\ &= \pi(R_2^2 - R_1^2)h \\ &= \pi(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)h && R_2^2 - R_1^2 = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) \\ &= 2\pi\left(\frac{R_2 + R_1}{2}\right)(R_2 - R_1)h && 2 \text{ سے ضرب اور تقسیم} \\ &= 2\pi(\text{قد خول})(\text{موناٹی خول})(\text{رداس خول}) \end{aligned}$$

جہاں خول کا اوسط رداس $\frac{R_2 + R_1}{2}$ ہے، خول کی موناٹی $R_2 - R_1$ ہے اور خول کا قد h ہے۔



شکل 6.59: خول کا حجم۔

ایک خول جس کا اوسط رداس x ، موٹائی dx اور قد $f(x)$ ہو کو شکل 6.59-ب میں کھول کر پٹی کی شکل دی گئی ہے۔ اس پٹی کا حجم درج ذیل ہو گا جو خول کے حجم کا کلیہ ہے (مساوات 6.7 اور مساوات 6.8 کو یاد رکھنے کا یہ بہترین طریقہ ہے)۔

$$H = 2\pi x f(x) dx$$

مثال 6.17: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $x = 4$ اور x محور کے بیچ خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ بنائیں اور اس پر محور گردش کے متوازی قطع دکھائیں۔ قطع کی لمبائی (قد خول) اور محور طواف سے اس کا فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی موٹائی، خول کی چوڑائی dy ہو گی۔ ہم نے شکل 6.60 میں y محور کے گرد بیلن دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا بنانے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: مکمل کے حد معلوم کریں۔ چونکہ خطے میں y کی قیمت $c = 0$ تا $d = 2$ ہو سکتی ہے لہذا یہی اس کے حد ہیں۔ تیسرا قدم:

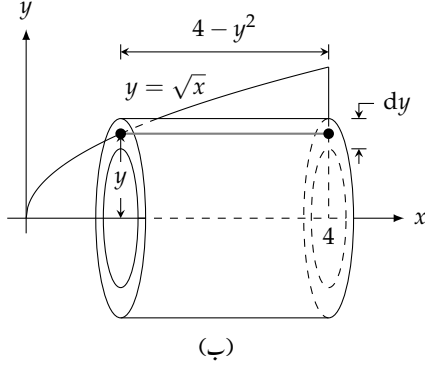
$$H = \int_c^d 2\pi(y)(\quad) dy \quad \text{مساوات 6.8}$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2) dy \quad \text{جزو-1 اور جزو-2 میں حاصل قیمتیں}$$

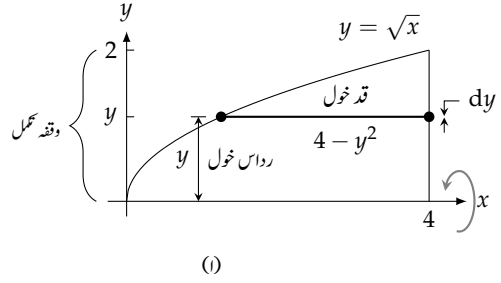
$$= 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi$$

□

یہ نتیجہ مثال 6.9 میں ترکیب قرص سے حاصل جواب کے عین مطابق ہے۔



شکل 6.60: محور x کے گرد طواف (مثال 6.17)



(i)

ترکیب خول کا استعمال

محور طواف (افقی یا انتظامی) جیسا بھی ہو ترکیب خول کے اقدام درج ذیل ہوں گے۔

ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس میں محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد یا لمبائی (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موٹائی (چوڑائی خول) کی نشاندہی کریں۔

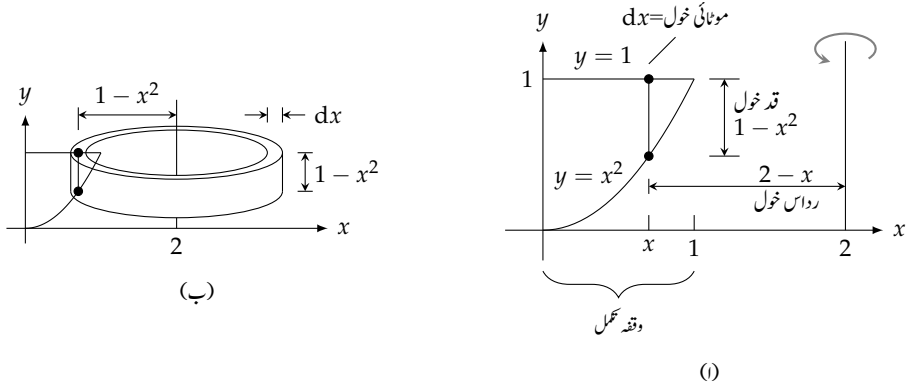
ب. مکمل کے حد معلوم کریں

ج. مکمل (2π) (رداس خول) (قد خول) کا موزوں متغیر $(x$ یا $y)$ کے ساتھ مکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے حجم دریافت کریں۔

اگلی مثال میں محور طواف افقی لکیر $x = 2$ ہے۔

مثال 6.18: ربع اول میں قطع مکانی $y = x^2$ ، لکیر $y = 1$ اور محور y کے بیچ خطے کو محور طواف $x = 2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے پر محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موٹائی (چوڑائی خول dx) کی نشاندہی کریں (شکل 6.61)۔ ہم نے خول بھی بنایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔



شکل 6.61: خطہ اور خول (مثال 6.18)

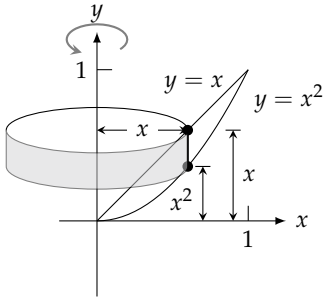
دوسرا قدم: مکمل کے حد $a = 0$ اور $b = 1$ ہیں۔
تیسرا قدم:

$$\begin{aligned}
 H &= \int_a^b 2\pi (\text{قد خول}) (\text{رداس خول}) dx && \text{مساوات 6.7} \\
 &= \int_0^1 2\pi (2 - x)(1 - x^2) dx && \text{جزو-1 اور جزو-2 میں حاصل قیمتیں} \\
 &= 2\pi \int_0^1 (2 - x - 2x^2 + x^3) dx \\
 &= \frac{13\pi}{6}
 \end{aligned}$$

□

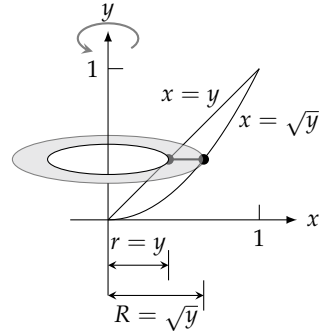
تفاعل $y = x^2$ اور $y = x$ کے بیچ خطہ کو مثال بناتے ہوئے شکل 6.62 میں ترکیب چھلا اور ترکیب خول دونوں دکھائے گئے ہیں۔ شکل 6.62-1 اور 2 میں y محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے جبکہ شکل 6.62-3 اور 4 میں x محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے۔ دونوں صورتوں میں حجم کو ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے حل کیا گیا ہے۔ اس مخصوص خطہ کے لئے دونوں محور طواف کے لئے دونوں ترکیب کارآمد ہیں لیکن ایسا ہر صورت میں نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر y محور کے گرد گھماتے ہوئے ترکیب چھلا میں ہمیں y کے لحاظ سے مکمل حل کرنا ہو گا۔ البتہ عین ممکن ہے کہ مکمل کو y کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔ ایسی صورت میں ہمیں ترکیب خول استعمال کرنی ہوگی جو ہمیں x کے لحاظ سے مکمل لینے کی اجازت دیگا۔

ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے ہر صورت ایک جیسے حجم حاصل ہوں گے۔ ہم حصہ 7.1 کے سوال 7.52 میں ان کی برابر کو ثابت کر پائیں گے۔



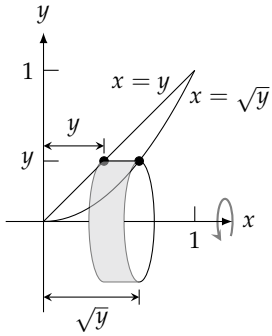
$$H = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi(x)(x - x^2) dx = \frac{\pi}{6}$$

(ب)



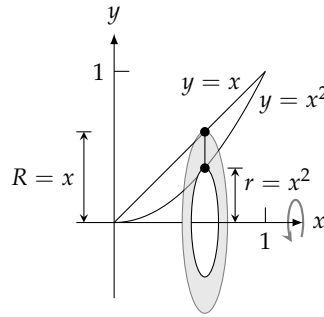
$$H = \int_{y=0}^{y=1} \pi[(\sqrt{y})^2 - (y)^2] dy = \frac{\pi}{6}$$

(د)



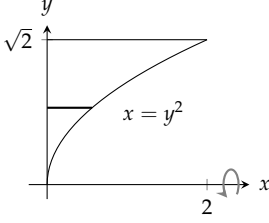
$$H = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi(y)(\sqrt{y} - y) dy = \frac{2\pi}{15}$$

(ج)

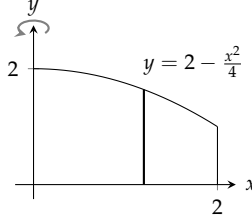


$$H = \int_{x=0}^{x=1} \pi[(x)^2 - (x^2)^2] dx = \frac{2\pi}{15}$$

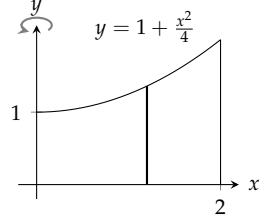
(ه)



شکل 6.63



شکل 6.64



شکل 6.65

سوالات

سوال 6.120 تا سوال 6.125 میں خطے کو دکھائے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم ترکیب خول سے دریافت کریں۔

سوال 6.120: خطہ شکل 6.63 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: 6π

سوال 6.121: خطہ شکل 6.64 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.122: خطہ شکل 6.65 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: 2π

سوال 6.123: خطہ شکل 6.66 میں دکھایا گیا ہے۔

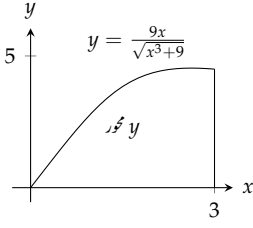
سوال 6.124: خطہ شکل 6.67 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\frac{14\pi}{3}$

سوال 6.125: خطہ شکل 6.68 میں دکھایا گیا ہے۔

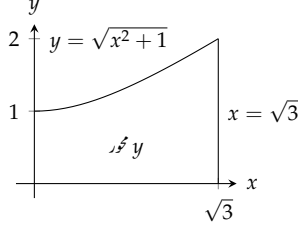
سوال 6.126 تا سوال 6.133 میں دیے منحنیات اور لکیروں میں محیط خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول سے تلاش کریں۔

سوال 6.126: $y = x$, $y = -\frac{x}{2}$, $x = 2$
جواب: 8π

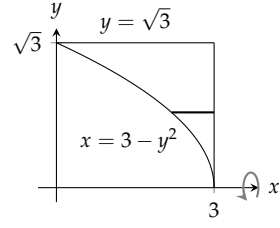
سوال 6.127: $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$, $x = 1$



شکل 6.68



شکل 6.67



شکل 6.66

سوال 6.128: $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$, $(x \geq 0)$: جواب: $\frac{5\pi}{6}$

سوال 6.129: $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, $x = 0$

سوال 6.130: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$: جواب: $\frac{128\pi}{5}$

سوال 6.131: $y = 2x - 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$

سوال 6.132: $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$: جواب: 3π

سوال 6.133: $y = \frac{3}{2\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

سوال 6.134 تا سوال 6.141 میں طواف جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔ منحنیات اور لکیروں میں محیط رقبہ کو y محور کے گرد گھمایا گیا ہے۔

سوال 6.134: $x = \sqrt{y}$, $x = -y$, $y = 2$: جواب: $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$

سوال 6.135: $x = y^2$, $x = -y$, $y = 2$

سوال 6.136: $x = 2y - y^2$, $x = 0$: جواب: $\frac{8\pi}{3}$

سوال 6.137: $x = 2y - y^2$, $x = y$

سوال 6.138: $y = |x|$, $y = 1$
جواب: $\frac{4\pi}{3}$

سوال 6.139: $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$

سوال 6.140: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$
جواب: $\frac{16\pi}{3}$

سوال 6.141: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2 - x$

سوال 6.142 اور سوال 6.143 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔

سوال 6.142: خطے کو شکل 6.69 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. محور x کے گرد،

ب. محور طواف لکیر $y = 1$ ہے،

ج. محور طواف لکیر $y = \frac{8}{5}$ ہے،

د. لکیر $y = -\frac{2}{5}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جواب: (ا) $\frac{6\pi}{5}$ ، (ب) $\frac{4\pi}{5}$ ، (ج) 2π ، (د) 2π

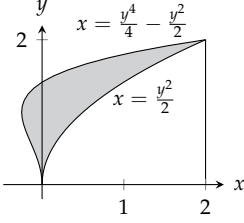
سوال 6.143: خطے کو شکل 6.70 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. محور x کے گرد،

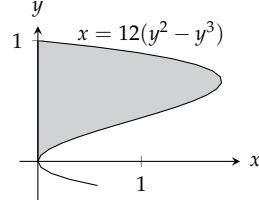
ب. محور طواف لکیر $y = 2$ ہے،

ج. محور طواف لکیر $y = 5$ ہے،

د. لکیر $y = -\frac{5}{8}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔



شکل 6.70



شکل 6.69

سوال 6.144 تا سوال 6.144 میں خطوں کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔ آپ ترکیب چھلایا ترکیب خول استعمال کر سکتے ہیں۔

سوال 6.144: تینوں جس کے راس $(1,1)$ ، $(1,2)$ اور $(2,2)$ ہیں۔ (i) x محور کے گرد، (ب) y محور کے گرد، (ج) کلیئر $x = \frac{10}{3}$ کے گرد، اور (د) کلیئر $y = 1$ کے گرد۔
جواب: (i) $\frac{5\pi}{3}$ ، (ب) $\frac{4\pi}{3}$ ، (ج) 2π ، (د) $\frac{2\pi}{3}$

سوال 6.145: ربع اول میں منحنی $x = y - y^3$ اور y محور میں محیط خطہ کو (i) محور x ، (ب) کلیئر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے

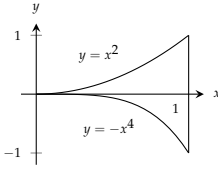
سوال 6.146: ربع اول میں $x = y - y^3$ ، $x = 1$ اور $y = 1$ میں محیط خطہ کو (i) محور x ، (ب) محور y ، (ج) کلیئر $x = 1$ اور (د) کلیئر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (i) $\frac{11\pi}{15}$ ، (ب) $\frac{97\pi}{105}$ ، (ج) $\frac{121\pi}{210}$ ، (د) $\frac{23\pi}{30}$

سوال 6.147: تینوں خطہ جس کے سرحد کلیئر $2y = x + 4$ ، $y = x$ ، اور $x = 0$ ہیں کو (i) محور x ، (ب) محور y ، (ج) کلیئر $x = 4$ اور (د) کلیئر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

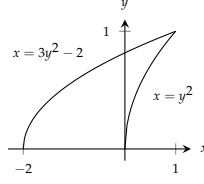
سوال 6.148: ربع اول میں $y = x^3$ ، $y = 4x$ کے تقاطع خطہ کو (i) محور x اور (ب) کلیئر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (i) $\frac{512\pi}{21}$ ، (ب) $\frac{832\pi}{21}$

سوال 6.149: سرحد $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{x^2}{8}$ میں محیط خطہ کو (i) محور x اور (ب) محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

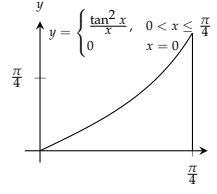
سوال 6.150: سرحد $y = 2x - x^2$ اور $y = x$ میں محیط خطہ کو (i) محور y اور (ب) کلیئر $x = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (i) $\frac{\pi}{6}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$



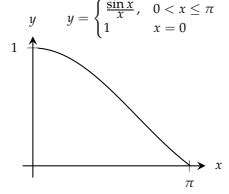
شکل 6.74



شکل 6.73



شکل 6.72



شکل 6.71

سوال 6.151: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $y = 2$ اور $x = 0$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور، x ، (ب) محور، y ، (ج) لکیر (د) لکیر $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 6.152: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = x^{-1/4}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{16}$ ، اور نیچے جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔
جواب: $\frac{9\pi}{16}$

سوال 6.153: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = \sqrt{x}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{4}$ ، اور نیچے جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطہ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔

سوال 6.154: درج ذیل متقابل فرض کریں (شکل 6.71)۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$ ہو گا۔

ب. اس متقابل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

جواب: (ب) 4π

سوال 6.155: درج ذیل متقابل فرض کریں (شکل 6.72)۔

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \tan x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ہو گا۔

ب. اس تفاعل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.156: محور x کے گرد شکل 6.73 میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے جسم طواف کا حجم تلاش کیا جاسکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے مکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: قرص: دو مکمل، چھلا: دو مکمل، خول: ایک مکمل

سوال 6.157: محور y کے گرد شکل 6.74 میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے جسم طواف کا حجم تلاش کیا جاسکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے مکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.158: فرض کریں وقفہ $x \geq 0$ پر تفاعل $f(x)$ غیر منفی اور استمراری ہے۔ منفی f ، کلیئر $x = b$ اور کارتیسی محدود کے قح خطہ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں b کوئی مثبت عدد ہے۔ اس جسم طواف کا حجم $2\pi b^3$ ہے۔ تفاعل $f(x)$ دریافت کریں۔
جواب: $3x$

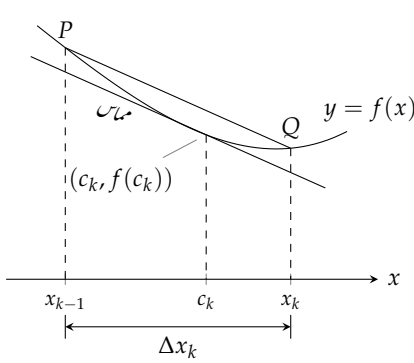
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں

نقشہ پر سڑک کی لمبائی جاننے کی خاطر ہم فیثہ استعمال کرتے ہوئے نقشہ پر سڑک کی منحنی پر قریب قریب نقطوں کے مابین قطعات کو سیدھا تصور کرتے ہوئے ان کی لمبائیوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اس طرح اندازاً لمبائی کی درستگی کی حد قطعات کی تعداد اور ناپنے کی درستگی پر منحصر ہوگی۔

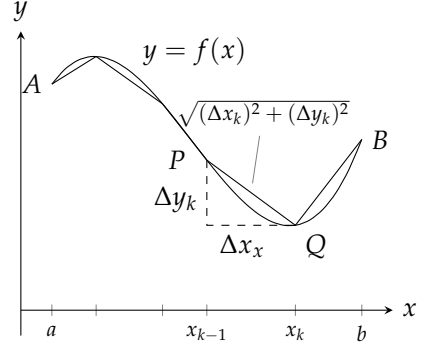
احصاء کو استعمال کرتے ہوئے ہم نقطوں کو قریب سے قریب رکھ کر بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔ ان نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع حاصل ہوگا۔ زیادہ سے زیادہ قطعات لینے سے کثیر الاضلاع کی لمبائی، اصل منحنی کی لمبائی کے زیادہ قریب ہوگی۔ کثیر الاضلاع کی لمبائی کی حد کو مکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم $x = a$ سے $x = b$ تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی عام طریقہ سے کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع بناتے ہیں جو اصل منحنی کو تخمیناً ظاہر کرتا ہے (شکل 6.75)۔ اگر ہم کثیر الاضلاع کی لمبائی کا کلیہ تلاش کر سکیں ہم اسی کلیہ کو منحنی کی لمبائی کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔



شکل 6.76: نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پر ماس اور قطع متوازی ہیں۔



شکل 6.75: منحنی AB کے قطع PQ کی لمبائی $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ہو گی۔

قطع PQ کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ ہو گی (شکل 6.75)۔ یوں منحنی کی لمبائی تخمیناً درج ذیل مجموعہ ہو گا۔

$$(6.9) \quad \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی باریک کرنے سے حاصل مجموعہ تخمیناً زیادہ بہتر ہو گا۔ ہم دکھانا چاہیں گے کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.9 کا مجموعہ قابل معلوم حد دیگا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم مساوات 6.9 کو ایسی روپ میں لکھتے ہیں کہ اس پر مسئلہ 5.1 (صفحہ 541) کا اطلاق ممکن ہو۔ ہم تفرق کے مسئلہ اوسط قیمت سے شروع کرتے ہیں۔

تعریف: ایسا تقاعل جس کا پہلا تفرق استمراری ہو ہموار⁶ کہلاتا ہے اور اس کی منحنی کو ہموار منحنی⁷ کہتے ہیں۔

□

اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ منحنی پر ایک ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پایا جائے گا جہاں منحنی کا مماس قطع PQ کا متوازی ہو گا (شکل 6.76)۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \quad \implies \Delta y_k = f'(c_k) \Delta x_k$$

smooth⁶
smooth curve⁷

مساوات 6.9 میں Δy_k کی اس قیمت کو پر کرنے سے درج ذیل روپ ملتا ہے۔

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k \quad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ $[a, b]$ پر $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ استمراری ہے لہذا خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ ہو گا۔ منحنی کی لمبائی کی تعریف اس قطعی مکمل کی قیمت ہے۔

تعریف: اگر $[a, b]$ پر f ہموار ہو تب a سے b تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$(6.10) \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

□

مثال 6.19: درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

حل: ہم $a = 0$ ، $b = 1$ اور

$$\begin{aligned} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= (2\sqrt{2}x^{1/2})^2 = 8x \end{aligned}$$

لیتے ہوئے مساوات 6.10 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x} dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (1 + 8x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

□

تفرق $\frac{dy}{dx}$ میں عدم استمرار

کبھی کبھار منحنی پر $\frac{dy}{dx}$ غیر موجود لیکن $\frac{dx}{dy}$ موجود ہو گا اور ہم x کو y کا تفاعل لکھ کر منحنی کی لمبائی مساوات 6.10 کی درج ذیل مشابہ سے حاصل کر پاتے ہیں۔

منحنی $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ کی لمبائی کا کلیہ:

$$(6.11) \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

مثال 6.20: منحنی $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ کی لمبائی $x = 0$ تا $x = 2$ معلوم کریں۔

حل: منحنی کا تفرق

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین یعنی غیر موجود ہے لہذا منحنی کی لمبائی حاصل کرنے کے لئے مساوات 6.10 نا قابل استعمال ہے۔

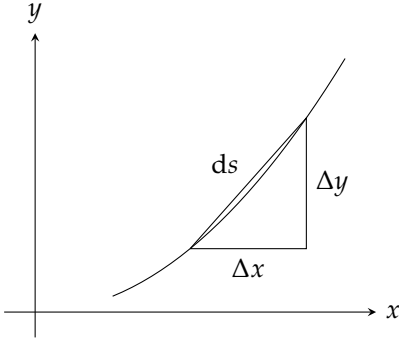
ہمیں x کو y کی صورت میں لکھنا ہو گا (شکل 6.77):

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \\ y^{3/2} &= \frac{x}{2} \\ x &= 2y^{3/2} \end{aligned}$$

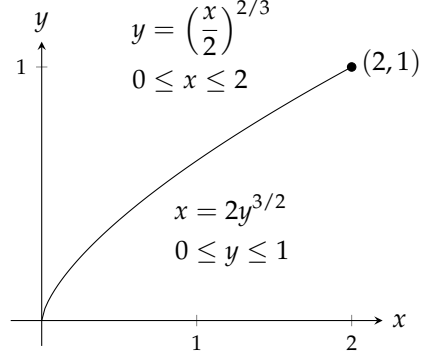
یوں ہم دیکھتے ہیں کہ درکار منحنی کو تفاعل $x = 2y^{3/2}$ سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں منحنی کے سر $y = 0$ اور $y = 1$ پر ہوں گے۔

اس کا تفرق

$$\frac{dx}{dy} = 2 \left(\frac{3}{2}\right) y^{1/2} = 3y^{1/2}$$



شکل 6.78: تعلق $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ کا حصول۔



شکل 6.77: منحنی برائے مثال 6.20

وقفہ $[0, 1]$ پر استمراری ہے لہذا منحنی کی لمبائی کی خاطر مساوات 6.11 قابل استعمال کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y} dy \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9y)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1) \approx 2.27 \end{aligned}$$

□

مختصر تفریقی کلیہ

لمبائی معلوم کرنے کی مساوات

$$(6.12) \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

کو عموماً تفرقی روپ کی بجائے تفریقی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ایسا باضابطہ طور پر کرنے کے لئے تفرق کو تفریقیوں کا حاصل تقسیم تصور کریں۔ یوں پہلے مکمل میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx = \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2} dx^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

دوسرے مکمل میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} dy = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{dy^2}} dy = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

اس طرح مساوات 6.12 میں دیے دونوں مکمل درج ذیل ایک تفریقی کلیہ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$(6.13) \quad L = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ظاہر ہے کہ dx اور dy کو ایک جیسا متغیر کی صورت میں لکھنا ضروری ہے اور مساوات 6.13 میں دیا مکمل حل کرنے کے لئے مکمل کے موزوں حد بھی جاننا ضروری ہیں۔

ہم مساوات 6.13 کو مزید چھوٹا کر سکتے ہیں۔ dx^2 اور dy^2 کو ایک چھوٹے مثلث کے اضلاع تصور کریں۔ مسئلہ فیثا غورث سے اس مثلث کا وتر $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ہو گا (شکل 6.78)۔ تفریق ds کو اب قوس کی تفریقی لمبائی تصور کیا جاسکتا ہے جس کا موزوں حدود کے بیچ مکمل لے کر قوس کی لمبائی دریافت کی جاسکتی ہے۔ مساوات 6.13 میں $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ کو ds لکھنے سے مساوات کو ds کا مکمل لکھا جاسکتا ہے۔

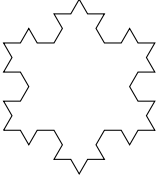
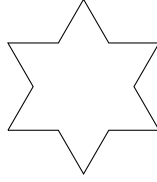
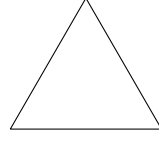
تعریف: تفریقی لمبائی قوس اور لمبائی قوس کا تفریقی کلیہ درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} & \text{تفریقی لمبائی قوس} \\ L &= \int ds & \text{لمبائی قوس کا تفریقی کلیہ} \end{aligned}$$

□

لائسنس لمبائی کے قوسین

برف کی روٹی پر صفحہ 299 پر غور کیا گیا۔ لائنیں کئی کثیر الاضلاع کی ترتیب $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ کی تحدیدی صورت کو برف کی روٹی K کہتے ہیں۔ شکل 6.79 میں اس ترتیب کی پہلی تین صورتیں دکھائی گئی ہیں۔ بناوٹ کے دوران ہر نیا متعارف کردہ راس بعد کے تمام منحنیات میں بطور راس پایا جاتا ہے اور تحدیدی منحنی K میں بطور نقطہ نظر آتا ہے۔ یوں ہر منحنی C از خود منحنی K کی تخمینی صورت ہو گی۔ یوں K کی لمبائی منحنیات C_n کی تحدیدی لمبائی کے برابر ہو گی۔ ہموار منحنیات کی لمبائی کی تعریف کے تحت کم از کم ایسا ہی ہونا چاہیے۔

(ج) منحنی C_3 (ب) منحنی C_2 (ا) منحنی C_1

شکل 6.79: برف کی روئی۔

آئیں C_n کی تحدیدی لمبائی تلاش کریں۔ اگر ابتدائی مثلث اضلاع کے ضلع کی لمبائی 1 ہو تب C_1 کی کل لمبائی 3 ہو گی۔ C_2 سے حاصل کرتے ہوئے ہم C_1 کے ہر ضلع کی جگہ چار اضلاع بناتے ہیں جہاں ہر ضلع ابتدائی ضلع کا $\frac{1}{3}$ واں حصہ ہے۔ یوں C_2 کی کل لمبائی $3(\frac{4}{3}) = 3 \times 4 \times \frac{1}{3} = 4$ ہو گی۔ اسی طرح C_3 کی لمبائی حاصل کرنے کی خاطر ہمیں C_2 کی لمبائی کو $\frac{4}{3}$ سے ضرب دینا ہو گا۔ یہی عمل دہراتے ہوئے C_n کی کل لمبائی $3(\frac{4}{3})^{n-1}$ حاصل ہوتی ہے۔ ان نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

شمار منحنی	1	2	3	...	n	...
کل لمبائی	3	$3(\frac{4}{3})$	$3(\frac{4}{3})^2$...	$3(\frac{4}{3})^{n-1}$...

منحنی C_{10} کی لمبائی تقریباً 40 ہے جبکہ C_{100} کی لمبائی 7 000 000 000 000 سے زیادہ ہے۔ لمبائی اتنی تیزی سے بڑھتی ہے کہ اس کی تحدیدی قیمت متناہی نہیں ہو سکتی ہے۔ یوں برف کی روئی کی لمبائی نہیں پائی جاتی ہے، یعنی، اس کی لمبائی لامتناہی ہے۔

لمبائی کی تعریف ہموار منحنیات کے لئے پیش کی گئی تھی جن کا ہر نقطہ پر مماس استمراری ملتا ہے۔ برف کی روئی اتنی ناہموار ہے کہ لمبائی کا کلیے کا اس پر اطلاق کرنا ممکن نہیں ہے۔

بنوا منڈلبرا کا نظریہ گنچ غیر ہموار منحنیات⁸ ایسے متعدد منحنیات پیش کرتا ہے جن کی لمبائی لامتناہی ہے۔ ایسی منحنیات کو بڑا کر کے دیکھنے سے یہ اتنی ہی غیر ہموار نظر آتی ہیں جتنی بغیر بڑا کئے نظر آتی ہیں۔ سمندر کے ساحل کی طرح، ان منحنیات کو بڑا کر کے ہموار نہیں بنایا جاسکتا ہے۔

سوالات

لمبائی قوس کے تکمیل کا حصول
سوال 6.159 تا سوال 6.166 میں

ا. لمبائی قوس کا مکمل لکھیں۔

ب. منحنی ترسیم کر کے دیکھیں کیسی لگتی ہے۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے مکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 6.159: $y = x^2, -1 \leq x \leq 2$ (i) $\int_{-1}^2 \sqrt{1+4x^2} dx$ (ج) ≈ 6.13 جواب:

سوال 6.160: $y = \tan x, -\frac{\pi}{3} \leq x \leq 0$

سوال 6.161: $x = \sin y, 0 \leq y \leq \pi$ (i) $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 y} dy$ (ج) ≈ 3.82 جواب:

سوال 6.162: $x = \sqrt{1-y^2}, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

سوال 6.163: $y^2 + 2y = 2x + 1$ نقطہ $(-1, -1)$ سے $(7, 3)$ تک۔ (i) $\int_{-1}^3 \sqrt{1+(y+1)^2} dy$ (ج) ≈ 9.29 جواب:

سوال 6.164: $y = \sin x - x \cos x, 0 \leq x \leq \pi$

سوال 6.165: $y = \int_0^x \tan t dt, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ (i) $\int_0^{\pi/6} \sec x dx$ (ج) ≈ 0.55 جواب:

سوال 6.166: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1} dt, -\frac{\pi}{3} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

لمبائی قوس کا حصول

سوال 6.167 تا سوال 6.176 میں قوس کی لمبائی تلاش کریں۔ بہتر ہو گا کہ منحنیات کو ترسیم کر کے دیکھیں۔

سوال 6.167: $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ سے $x = 0$ تک، $x = 3$ (ج) 12 جواب:

سوال 6.168: $y = x^{3/2}$ سے $x = 0$ تک، $x = 4$

سوال 6.169: $y = 1$ سے $y = 3$ تک، $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$ (اشارہ۔ $1 + (\frac{dx}{dy})^2$ مکمل مربع ہے۔) (ج) $\frac{53}{6}$ جواب:

سوال 6.170: $y = 1$ سے $y = 9$ تک، $x = \frac{y^{3/2}}{3} - y^{1/2}$ (اشارہ: $1 + (\frac{dx}{dy})^2$ مکمل مربع ہے۔)

سوال 6.171: $y = 1$ سے $y = 2$ تک، $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$ (اشارہ: $1 + (\frac{dx}{dy})^2$ مکمل مربع ہے۔)
جواب: $\frac{123}{32}$

سوال 6.172: $y = 2$ سے $y = 3$ تک، $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$ (اشارہ: $1 + (\frac{dx}{dy})^2$ مکمل مربع ہے۔)

سوال 6.173: $y = \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{3}{8}x^{2/3} + 5$ ، $1 \leq x \leq 8$
جواب: $\frac{99}{8}$

سوال 6.174: $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{4x+4}$ ، $0 \leq x \leq 2$

سوال 6.175: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1} dt$ ، $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$
جواب: 2

سوال 6.176: $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1} dt$ ، $-2 \leq x \leq -1$

سوال 6.177: (i) نقطہ $(1, 1)$ میں سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات 6.10)۔

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

(ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (i) $y = \sqrt{x}$ یا $y = -\sqrt{x} + 2$ ، (ب) دو

سوال 6.178: (i) نقطہ $(0, 1)$ میں سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات 6.11)۔

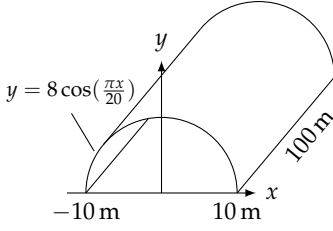
$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} dy$$

(ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

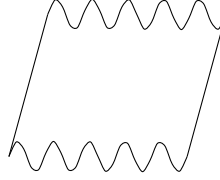
سوال 6.179: $x = 0$ سے $x = \frac{\pi}{4}$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} dt$$

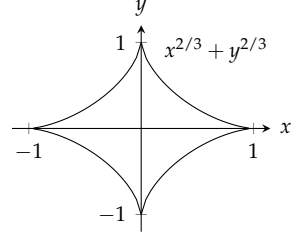
جواب: 1



شکل 6.82: سرنگ۔



شکل 6.81: نالیدار چادر۔



شکل 6.80: ستارہ نما۔

سوال 6.180: ستارہ نما کی لمبائی
مسوات $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ خطوط کی ایک ایسی نسل کو ظاہر کرتی ہے جس کو ستارہ نما کہتے ہیں (شکل 6.80)۔ نصف ربع اول میں قوس کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دے کر کل لمبائی حاصل ہو گی۔ یوں $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq 1$ پر منحنی $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دیں۔

اعدادی تکمیل
آپ سوچ رہے ہوں گے کہ کیوں اب تک لمبائی قوس میں زیادہ تر منحنیات کی مساواتیں پیچیدہ تھیں۔ اس کی وجہ لمبائی قوس کے مکمل میں $\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$ ہے جو عموماً مکمل مربع نہیں ہوتا ہے اور جس کی بنا مکمل کا الٹ تفرق ہم حاصل نہیں کر پاتے ہیں۔ حقیقت میں عموماً یہی جذر غیر بنیادی مکمل کا باعث بنتا ہے۔ اسی لئے، سوال 6.181 اور سوال 6.182 کی طرح، لمبائی قوس اور سطحی رقبہ کے مکمل عموماً اعدادی طریقوں سے حل کئے جاتے ہیں۔

سوال 6.181: آپ کا ادارہ چھتوں کے لئے لوہے کی نالیدار چادریں بناتا ہے۔ نالیدار چادروں کا عمودی تراش درج ذیل کے مطابق درکار ہے (شکل 6.81)۔

$$y = \sin \frac{3\pi}{50}x, \quad 0 \leq x \leq 50 \text{ cm}$$

مستوی چادر سے نالیدار چادر بناتے ہوئے چادر کی چوڑائی یا لمبائی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ درکار مستوی چادر کی چوڑائی معلوم کریں۔ اعدادی تراکیب استعمال کرتے ہوئے سائن نما چادر کی لمبائی تین اعشاریہ تک تلاش کریں۔
جواب: 50.44 cm

سوال 6.182: آپ کے انجینئری ادارے کو سرنگ بنانے کا کام ملا ہے۔ سرنگ کی لمبائی 100 m جبکہ اس کی چوڑائی 20 m ہے (شکل 6.82)۔ سرنگ کا عمودی تراش $y = 8 \cos(\frac{\pi x}{20})$ کے مطابق ہے۔ مکمل ہونے کے بعد سرنگ کو اندر سے پن روک مسالہ کیا جائے گا جس پر 2000 روپیہ فی مربع لاگت متوقع ہے۔ مسالہ کرنے پر کل کتنا لاگت آئے گا؟ (اشارہ۔ اعدادی طریقہ سے کوسائن تعامل کی لمبائی دریافت کریں۔)

نظریہ اور مثالیں

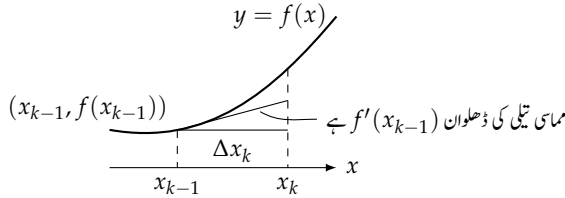
سوال 6.183: کیا ایسی ہموار منحنی $y = f(x)$ ہو سکتی ہے جس کی وقفہ $0 \leq x \leq a$ پر لمبائی $\sqrt{2a}$ ہو۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.184: مماسی تیلیوں سے لمبائی قوس کے کلیہ کا حصول۔
فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں۔ ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں نقطہ $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ پر مماسی تیلی بنائیں (نیچے شکل دیکھیں)۔

ا. دکھائیں کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر k ویں مماسی تیلی کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ب. دکھائیں کہ a تا b منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی L درج ذیل ہے۔

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\text{ک} \text{ ویں تیلی کی لمبائی}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



کمپیوٹر کا استعمال

سوال 6.185 تا سوال 6.190 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. منحنی ترسیم کریں۔ خانہ بندی کے نقطے $n = 2, 4, 8$ لیتے ہوئے تخمینی کثیر الاضلاع ترسیم کریں۔

ب. مطابقتی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ لے کر قوس کی تخمینی لمبائی معلوم کریں۔

ج. مکمل سے قوس کی اصل لمبائی تلاش کریں۔ اصل لمبائی اور $n = 2, 4, 8$ لے کر حاصل تخمینی لمبائیوں کا موازنہ کریں۔ n بڑھانے سے تخمینی لمبائی اور اصل لمبائی کا مقابلہ کریں۔ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

$$\text{سوال 6.185: } f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{سوال 6.186: } f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{سوال 6.187: } f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$\text{سوال 6.188: } f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\text{سوال 6.189: } f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\text{سوال 6.190: } f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

6.6 سطح طواف کا رقبہ

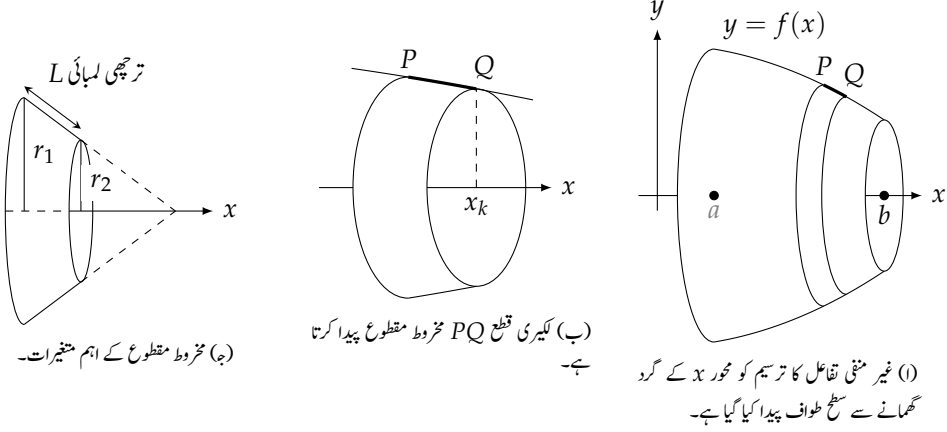
بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسی گھماتے ہوئے رسی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو سطح طواف⁹ کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسی کی لمبائی اور رسی کے ہر حصے کی جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کا رقبہ اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔ زیادہ پیچیدہ سطحوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تقاطع $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ کو x محور کے گرد گھما کر پیدا کردہ سطح طواف کا سطحی رقبہ جانا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل 6.83-1 میں نمائندہ حصہ PQ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

قوس PQ محور x کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے جس کو بڑا کر کے شکل 6.83-2 میں دکھایا گیا ہے۔ محور x اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو مخروط مقطوع¹⁰ کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبہ کا تخمینہ ہو گا۔

⁹ surface of revolution
¹⁰ frustum



شکل 6.83: سطح طواف کو قوس PQ سے پیدا پٹیوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مخروط مقطوع (شکل 6.83-ج) کا سطحی رقبہ 2π ضرب دونوں سروں کے رداس کا اوسط ضرب ترچھاقد کے برابر ہو گا۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

قطع PQ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع (شکل 6.84) کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کی پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

$$(6.14) \quad \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

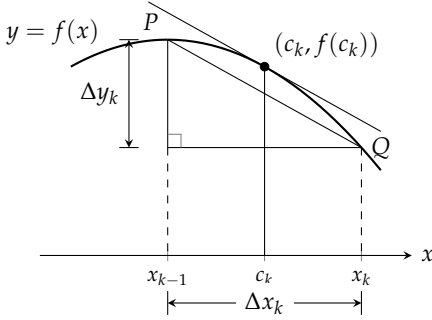
ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے مساوات 6.14 میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات 6.14 کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تفاعل کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔ لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفرقات کے مسئلہ اوسط قیمت کی طرف دیکھتے ہیں۔

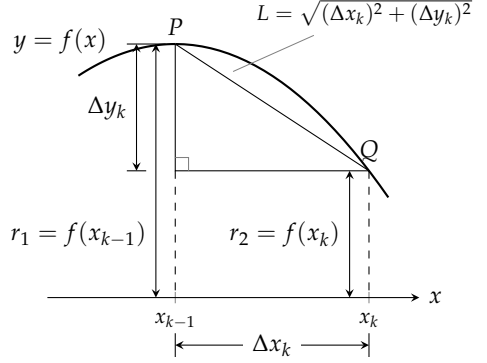
اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطع PQ کے متوازی ہو گا (شکل 6.85)۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

$$\Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$



شکل 6.85: خط مستقیم PQ اور نقطہ c_k پر مماس متوازی ہیں۔



شکل 6.84: لکیر اور قوس PQ کے ساتھ وابستہ متغیرات۔

مساوات 6.14 میں درج بالا Δy_k پر کرتے ہیں۔

$$(6.15) \quad \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ = \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$$

اب یہاں ایک بری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بری خبر یہ ہے کہ مساوات 6.15 میں x_{k-1} ، x_k اور c_k ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک دوسرے جیسا کسی صورت نہیں بنایا جاسکتا ہے لہذا مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ ریہان مجموعہ نہیں ہے۔ اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا مسئلہ بس کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل کو مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

جو ہم چاہتے ہیں۔ یوں a تا b تقابل f کی ترسیم کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی شکل کو لیتے ہیں۔

تعریف: محور x کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ

اگر $[a, b]$ پر تقابل $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تقابل $y = f(x)$ کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(6.16) \quad S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

□

مساوات 6.16 میں جذر وہی ہے جو پیدا کار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیہ میں پایا جاتا ہے۔

مثال 6.21: محور x کے گرد منحنی $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.86)۔ اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a = 1, b = 2, y = 2\sqrt{x}, \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

مساوات 6.16 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1} dx \\ &= 4\pi \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{8\pi}{3} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

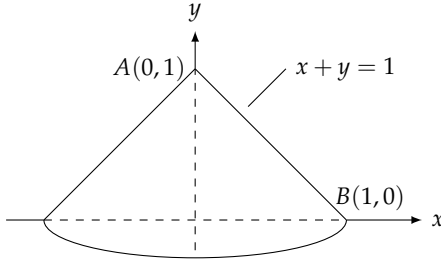
□

محور y کے گرد سطح طواف

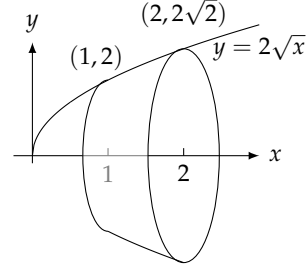
محور y کے گرد سطح طواف کے لئے ہم مساوات 6.16 میں x اور y کی جگہیں تبدیل کرتے ہیں۔

محور y کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \geq 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(6.17) \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$



شکل 6.87: سطح طواف برائے مثال 6.22



شکل 6.86: سطح طواف برائے مثال 6.21

مثال 6.22: لکیری قطع $x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے (شکل 6.87)۔ اس کا رقبہ پہلو تلاش کریں۔

حل: اس رقبہ کو جیومیٹری سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0, d = 1, x = 1 - y, \frac{dx}{dy} = -1$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

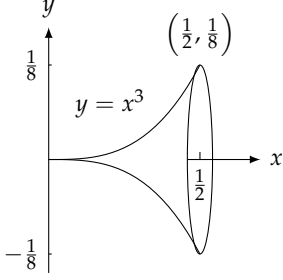
مساوات 6.17 سے اس رقبہ کا حاصل کریں۔

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2} dy$$

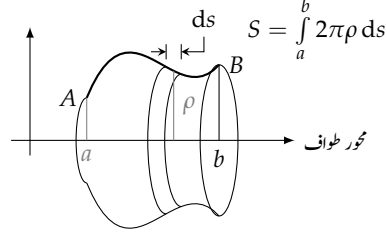
$$= 2\pi\sqrt{2} \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \pi\sqrt{2}$$

□

دونوں نتائج ایک جیسے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔



شکل 6.89: قوس $y = x^3$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔



شکل 6.88: قوس AB کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کا رقبہ $\int_a^b 2\pi \rho ds$ ہو گا۔

مختصر تفریقی روپ

درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

کو عموماً تفریقی لمبائی قوس $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے:

$$S = \int_a^b 2\pi y ds \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x ds$$

بایاں مساوات میں x محور سے قطع ds تک فاصلہ y ہے۔ دایاں مساوات میں y محور سے قطع ds کا فاصلہ x ہے۔ ان دونوں کلیوں کو

$$S = \int 2\pi (\text{چوڑائی پٹی}) (\text{رداس}) = \int 2\pi \rho ds$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں رکن لمبائی قوس ds تک محور طواف سے فاصلہ ρ ہے (شکل 6.88)۔

مختصر تفریقی روپ

$$S = \int 2\pi \rho ds$$

کسی مخصوص مسئلے میں آپ رکن لمبائی قوس ds اور رداس ρ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر مکمل کے حدود بھی اسی متغیر کی روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال 6.23: معنی $y = x^3, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.89)۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم مختصر تفریقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho \, ds \\ &= \int 2\pi y \, ds \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

ہم نے یہاں فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا ds کو dx یا dy کی روپ میں لکھیں۔ معنی کی مساوات $y = x^3$ سے dy کو dx کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3, \, dy = 3x^2 \, dx, \, \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2 \, dx)^2} = \sqrt{1 + 9x^4} \, dx$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے مکمل کا متغیر x ہو گا۔

$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_0^{1/2} 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} \, dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{36} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (1 + 9x^4)^{3/2} \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] \\ &= \frac{\pi}{27} \left[\left(\frac{25}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] \\ &= \frac{\pi}{27} \left(\frac{125}{64} - 1 \right) \\ &= \frac{61\pi}{1728} \end{aligned}$$

□

سوالات

سطحی رقبہ کے مکمل سوال 6.191 تا سوال 6.198 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا مکمل لکھیں۔

ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ کو بھی ترسیم کریں۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس مکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 6.191: $y = \tan x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \quad x$ محور
جواب: (i) $2\pi \int_0^{\pi/4} \tan x \sqrt{1 + \sec^2 x} dx \approx 3.84$ (ج)

سوال 6.192: $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2; \quad x$ محور

سوال 6.193: $xy = 1, \quad 1 \leq y \leq 2; \quad y$ محور
جواب: (i) $2\pi \int_1^2 \frac{1}{y} \sqrt{1 + y^{-4}} dy \approx 5.02$ (ج)

سوال 6.194: $x = \sin y, \quad 0 \leq y \leq \pi; \quad y$ محور

سوال 6.195: $x^{1/2} + y^{1/2} = 3, \quad$ نقطہ $(4, 1)$ سے $(1, 4)$ تک x محور
جواب: (i) $2\pi \int_0^4 (3 - \sqrt{x})^2 \sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2} dx \approx 63.37$ (ج)

سوال 6.196: $y + 2\sqrt{y} = x, \quad 1 \leq y \leq 2; \quad y$ محور

سوال 6.197: $x = \int_0^y \tan t dt, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}; \quad y$ محور
جواب: (i) $2\pi \int_0^{\pi/3} (\int_0^y \tan t dt) \sec y dy \approx 2.08$ (ج)

سوال 6.198: $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{5}; \quad x$ محور

سطحی رقبہ کا حصول

سوال 6.199: لکیری قطع $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 4$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ $= \frac{1}{2} (\text{محیط تلہ}) (\text{ترچھا قد})$) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $4\pi\sqrt{5}$

سوال 6.200: لکیری قطع $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 4$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 6.201: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \quad 1 \leq x \leq 3$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع $= \pi (r_1 + r_2) (\text{ترچھا قد})$) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $3\pi\sqrt{5}$

سوال 6.202: کلیئر قلع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, $1 \leq x \leq 3$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیئر (رقبہ مخروط مقطوع) $\pi(r_1 + r_2)$ (ترجیاً) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 6.203 تا سوال 6.212 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال 6.203: محور x $y = \frac{x^3}{9}$, $0 \leq x \leq 2$, جواب: $\frac{98\pi}{81}$

سوال 6.204: محور x $y = \sqrt{x}$, $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{15}{4}$,

سوال 6.205: محور x $y = \sqrt{2x - x^2}$, $0.5 \leq x \leq 1.5$, جواب: 2π

سوال 6.206: محور x $y = \sqrt{x+1}$, $1 \leq x \leq 5$,

سوال 6.207: محور y $x = \frac{y^3}{3}$, $0 \leq y \leq 1$, جواب: $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

سوال 6.208: محور y $x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}$, $1 \leq y \leq 3$,

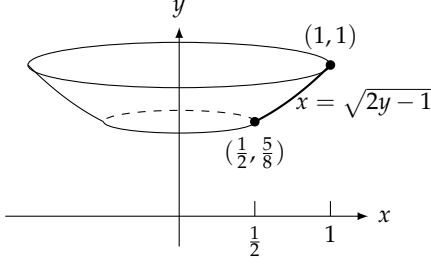
سوال 6.209: محور y $x = 2\sqrt{4-y}$, $0 \leq y \leq \frac{15}{4}$, (شکل 6.90) جواب: $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

سوال 6.210: محور y $x = \sqrt{2y-1}$, $\frac{5}{8} \leq y \leq 1$, (شکل 6.91)

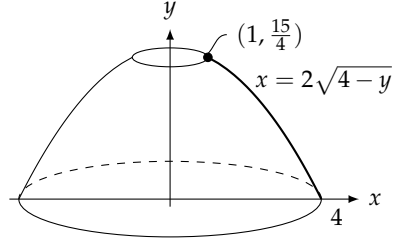
سوال 6.211: محور x $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$, $1 \leq y \leq 2$, (اشارہ۔ مکمل میں $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ کو dy کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi y ds$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔) جواب: $\frac{253\pi}{20}$

سوال 6.212: محور y $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, (اشارہ۔ مکمل میں $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ کو dx کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi x ds$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

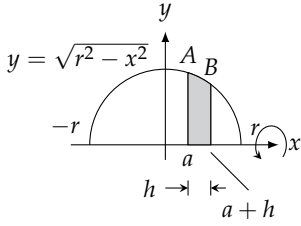
سوال 6.213: نئی تعریف کی پرکھ
تقابل $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ کو x محور کے گرد گھمانے سے کروی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات
6.16 سے بھی رداس a کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔



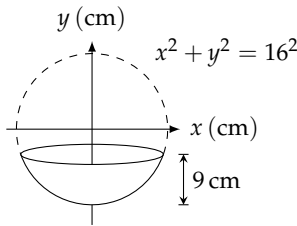
شکل 6.91



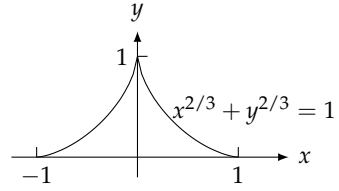
شکل 6.90



شکل 6.94



شکل 6.93



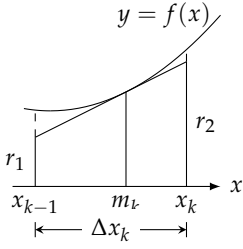
شکل 6.92

سوال 6.214: نئی تعریف کی پرکھ
 لکیری قطع $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$ کو x محور کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ ہوگا۔ مکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد h اور اس کے تلا کا رداس r ہے لہذا اس کے ترچھا قد $\sqrt{r^2 + h^2}$ ہوگا۔ مکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ دریافت کر کے اس کلیہ کی تصدیق کریں۔

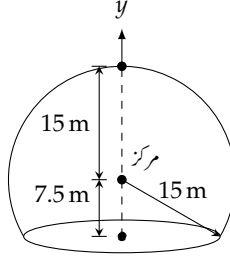
سوال 6.215: (i) منحنی $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف کے رقبہ کا مکمل لکھیں جس کو حل کرنا بعد میں سکھایا جائے گا۔ (ب) اس سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔
 جواب: (i) $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx \approx 14.4236$ (ب)

سوال 6.216: ستارہ نما کا سطحی رقبہ
 ستارہ نما $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ کا وہ حصہ جو x محور سے اوپر پایا جاتا ہے کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.92)۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں منحنی کے حصہ $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$ کو x محور کے گرد گھما کر نتیجہ کو دوگنا کریں۔)

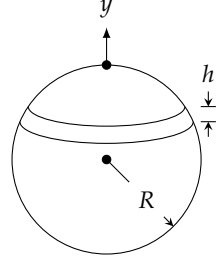
سوال 6.217: رنگ
 ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جاسکتا ہے (شکل 6.93)۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے



شکل 6.97



شکل 6.96



شکل 6.95

رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی 0.5 mm موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لئے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔
جواب: 452.4 L

سوال 6.218: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ
ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروٹی ڈبل روٹی کے ایک جتنی موٹی سٹلوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے (شکل 6.94)؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور x پر وقفہ h کے اوپر نصف دائرے کا قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو x محور کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبہ کی قیمت h کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ (کرارا رقبہ کی قیمت h پر منحصر ہوگی۔)

سوال 6.219: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ h ہے رداس R کے کروٹی سطح سے ایک پٹی کاٹتے ہیں (شکل 6.95)۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہو گا۔

سوال 6.220: موسمیاتی ریڈار کو شکل 6.96 میں دکھائے گئے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہو گا؟ (تلا کو شامل نہ کریں۔)

سوال 6.221: محور طواف کو قطع کرنے والے منحنیات سے حاصل سطح طواف
وقفہ $[a, b]$ پر تقابل f کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات 6.16 اخذ کی گئی۔ جہاں تقابل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات 6.16 کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$(6.18) \quad S = \int 2\pi \rho \, ds = \int 2\pi |f(x)| \, ds$$

تقابل $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرا مخروط کا سطحی رقبہ مساوات 6.18 استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔
جواب: $5\sqrt{2}\pi$

سوال 6.222: قوس $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات 6.18 میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہو گا؟

اعدادی تکمل

سوال 6.223 تا سوال 6.223 میں محور x کے گرد دیے گئے منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گے۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درستی تک معلوم کریں۔

سوال 6.223: $y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$
جواب: 14.4

سوال 6.224: $y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2$

سوال 6.225: $y = x + \sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$
جواب: 54.9

سوال 6.226: $y = \frac{x}{12} \sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 6$

سوال 6.227: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ
فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں اور k ویں ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کے وسطی نقطہ $m_k = \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)$ پر منحنی کی مماس لکیر بنائیں (شکل 6.97)۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ k ویں ذیلی وقفہ میں مماسی قطع کی لمبائی $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k) \Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطع کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k) \sqrt{1 + (f'(m_k))^2} \Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ کو محور x گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (k \text{ ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو}) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت

بہت سارے ساخت اور میکانیکی نظام کا رویہ ایسا ہوتا ہے جیسا ان کی کمیت ایک نقطہ میں سموئی ہو جس کو مرکز کمیت کہتے ہیں۔ اس نقطہ کا مقام جاننا اہم ہے جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس باب میں یک بعدی اور دو بعدی چیزوں پر توجہ دی جائے گی۔ تین بعدی چیزوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

کلیر پر کمیت

ہم اپنا ریاضی نمونہ بتدریج تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی منزل میں ہم محور x جس کا مبدا اس کا پول ہو، پر کمیت m_1 ، m_2 اور m_3 تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دار و مدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر منحصر ہے۔



ہر کمیت m_k پر نیچے رخ قوت $m_k g$ عمل کرتا ہے جہاں g ثقلی اسراع ہے (قوت $m_k g$ کو کمیت k_k کا وزن کہتے ہیں)۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو قوت مروڑ¹¹ کہتے ہیں۔ قوت $m_k g$ کو مبدا سے فاصلہ x_k سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کمیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے جبکہ مبدا سے دائیں جانب کمیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام گھومنے کے رجحان کا ناپ ہے۔ اس مجموعہ کو نظام کی قوت مروڑ¹² کہتے ہیں۔

$$(6.19) \quad \text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

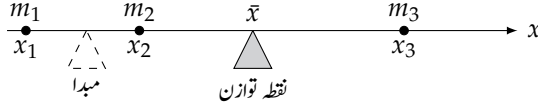
لکھا جاسکتا ہے جہاں g اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے جبکہ عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ نظام کی خاصیت ہے جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

torque¹¹
system torque¹²

عدد $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ کو مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر کہتے ہیں جو انفرادی کیت کے معیار اثر m_1x_1 ، m_2x_2 اور m_3x_3 کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \sum m_k x_k = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ \bar{x} پر رکھنے سے نظام کا قوت مروڑ صفر ہو گا۔



اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے ہر کیت کا قوت مروڑ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{(نیچے رخ قوت)} (\bar{x} \text{ سے } m_k \text{ کا فاصلہ}) &= \bar{x} - x_k \\ &= (x_k - \bar{x})m_k g \end{aligned}$$

ان معیار اثر کے مجموعہ کو صفر کے برابر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم \bar{x} کے لئے حل کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} \sum (x_k - \bar{x})m_k g &= 0 && \text{معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے} \\ g \sum (x_k - \bar{x})m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب} \\ \sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) &= 0 && g \text{ سے تقسیم اور } m_k \text{ پھیلا یا گیا ہے} \\ \sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ فرق} \\ \sum m_k x_k &= \bar{x} \sum m_k && \text{مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی} \\ \bar{x} &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} && \bar{x} \text{ کے لئے حل} \end{aligned}$$

یہ آخری مساوات کہتی ہے کہ \bar{x} معلوم کرنے کے لئے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کیت سے تقسیم کریں۔

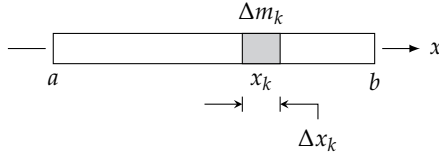
$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کیت}}$$

نقطہ \bar{x} کو نظام کا مرکز کمیت¹³ کہتے ہیں۔

تار اور پتلے سلاخ

بہت سارے موقعوں پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کی کیت کا مرکز مطلوب ہوتا ہے۔ ایسی صورتوں میں اگر ہم تقسیم کیت کو استمراری تفاعل کی صورت میں لکھ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کی بجائے مکمل ہو گا جیسے نیچے سمجھایا گیا ہے۔

فرض کریں ایک لمبی پٹی $x = a$ تا $x = b$ محور x پر پڑی ہے۔ ہم $[a, b]$ اس پٹی کی خانہ بندی کرتے ہوئے اس کو Δm_k کیت کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ k ویں ٹکڑے کی لمبائی Δx_k ہے اور یہ مبدا سے تقریباً x_k فاصلے پر پایا جاتا ہے۔ اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔



اول، پٹی کا مرکز کیت \bar{x} اور نقطہ x_k پر کیت Δm_k رکھنے سے حاصل نظام کا مرکز کیت تقریباً ایک ہی مقام پر ہوں گے:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کیت}}$$

دوم، مبدا کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً $x_k \Delta m_k$ ہو گا لہذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام $x_k \Delta m_k$ کا مجموعہ ہو گا:

$$\text{نظام کا معیار اثر} \approx \sum x_k \Delta m_k$$

سوم، اگر x_k پر پٹی کی کثافت $\delta(x_k)$ ہو جہاں δ استمراری ہے (اور کثافت کی پیکش کیت فی لمبائی ہے) تب Δm_k تخمیناً $\delta(x_k) \Delta x_k$ ہو گا:

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k) \Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(6.20) \quad \bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کیت}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k) \Delta x_k}{\sum \delta(x_k) \Delta x_k}$$

مساوات 6.20 کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل $x\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفہ پر تفاعل $\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات 6.20 میں تخمین بہتر ہوں گے لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x) dx}{\int_a^b \delta(x) dx}$$

ہم \bar{x} کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

محور x پر کثافتی تفاعل $\delta(x)$ کے سلاخ یا پٹی کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b x\delta(x) dx && \text{مبدأ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int_a^b \delta(x) dx && \text{کمیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کمیت} \end{aligned} \quad (6.21)$$

مساوات 6.21 کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور کثافت سے مراد کمیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیمائش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔ یوں تار، سلاخ اور پٹی کے لئے ہم کمیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں جبکہ مستوی سطحوں کے لئے کمیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

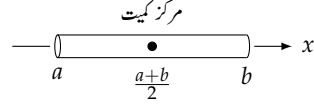
مثال 6.24: مستقل کثافت کا سلاخ یا پٹی
مستقل کثافت والے سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: ہم محور x پر $x = a$ سے $x = b$ کو سلاخ تصور کرتے ہیں (شکل 6.98)۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہذا اس کو مکمل کے باہر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b \delta x dx = \delta \int_a^b x dx = \delta \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{\delta}{2} (b^2 - a^2) \\ M &= \int_a^b \delta dx = \delta \int_a^b dx = \delta [x]_a^b = \delta (b - a) \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2} (b^2 - a^2)}{\delta (b - a)} = \frac{b + a}{2} \end{aligned}$$

□

مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کمیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطہ پر ہو گا۔



شکل 6.99: متغیر موٹائی کے سیدھے سلاخ کو متغیر کثافت کا سیدھا سلاخ تصور کیا جاسکتا ہے۔

شکل 6.98: مستقل کثافت کے پتلے سیدھے سلاخ کا مرکز کیت دونوں سروں کے وسطی نقطہ پر ہو گا۔

مثال 6.25: متغیر کثافت
ایک سلاخ جس کی لمبائی 10 m ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹا ہوتا ہے (شکل 6.99) لہذا اس کی کثافت مستقل ہونے کی بجائے $\delta(x) = 1 + \frac{x}{10} \text{ kg m}^{-1}$ ہے۔ سلاخ کا مرکز کیت معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات 6.21 استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{10} x \delta(x) dx = \int_0^{10} x \left(1 + \frac{x}{10}\right) dx = \int_0^{10} \left(x + \frac{x^2}{10}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3} \text{ kg m} \end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی kg m ہے۔ سلاخ کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int_0^{10} \delta(x) dx = \int_0^{10} \left(1 + \frac{x}{10}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 10 + 5 = 15 \text{ kg}$$

مرکز کیت درج ذیل ہو گا۔

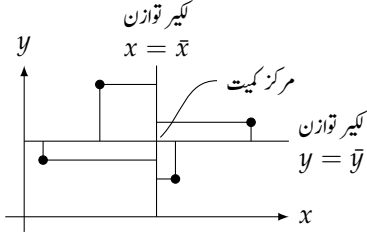
$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56 \text{ m}$$

□

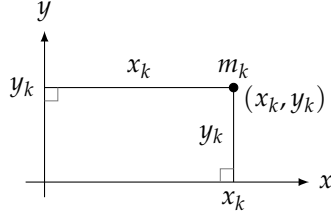
مستوی پر تقسیم کیت

فرض کریں ایک مستوی میں متناہی تعداد میں کیت پائے جاتے ہیں۔ یوں نقطہ (x_k, y_k) پر کیت m_k ہو گا (شکل 6.100)۔ اس نظام کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \sum m_k \quad \text{نظام کی کیت}$$



شکل 6.101: دو بعدی کمیتوں کا جھرمٹ اپنے مرکز کمیت پر متوازن ہو گا۔



شکل 6.100: ہر کمیت m_k کا ہر انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔

ہر کمیت m_k کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور x کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k y_k$ ہو گا جبکہ محور y کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k x_k$ ہو گا۔ دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \sum m_k y_k \quad \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$

$$M_y = \sum m_k x_k \quad \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$

نظام کے مرکز کمیت کا x محدود درج ذیل ہو گا۔

$$(6.22) \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$

ایک بعدی صورت کی طرح \bar{x} کی اس قیمت کے لئے نظام کلیر $x = \bar{x}$ پر توازن میں ہو گا (شکل 6.101)۔

نظام کے مرکز کمیت کا y محدود درج ذیل ہو گا۔

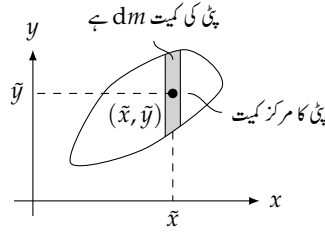
$$(6.23) \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$$

ایک بعدی صورت کی طرح \bar{y} کی اس قیمت کے لئے نظام کلیر $y = \bar{y}$ پر توازن میں ہو گا۔ کلیر $y = \bar{y}$ کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو منسوخ کر کے صفر قوت مروڑ پیدا کرتے ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ اس نظام کی پوری کمیت نقطہ (\bar{x}, \bar{y}) میں پائی جاتی ہے۔ اس نقطہ کو نظام کی کمیت کا مرکز¹⁴ کہتے ہیں۔

پتلی مستوی چادر

کئی بار ہمیں پتلی مستوی چادر کا مرکز کمیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کمیت کی تقسیم استمراری ہے لہذا \bar{x} اور \bar{y} کے کلیات میں متناہی مجموعوں کی بجائے مکمل پائے جاتے ہیں۔ آئیں اس پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں xy مستوی میں ایک پتلی چادر پائی جاتی

¹⁴center of mass



شکل 6.102: چادر کو انتصابی پتلی بیٹوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ نمائندہ پتلی کا کسی ایک انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر وہی ہو گا جو پتلی کی کیت dm کو پتلی کی مرکز کیت پر منجمد کرنے سے حاصل ہو گا۔

ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک بیٹوں میں تقسیم کریں (شکل 6.102 میں پٹیاں محور y کے متوازی ہیں)۔ کسی ایک نمائندہ پتلی کی کیت کا مرکز (\bar{x}, \bar{y}) ہو گا۔ ہم پتلی کی کیت Δm کو نقطہ (\bar{x}, \bar{y}) پر منجمد تصور کرتے ہیں۔ یوں محور y کے لحاظ سے پتلی کا معیار اثر $\bar{x} \Delta m$ ہو گا جبکہ محور x کے لحاظ سے پتلی کا معیار اثر $\bar{y} \Delta m$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 6.22 اور مساوات 6.23 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \bar{x} \Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \bar{y} \Delta m}{\sum \Delta m}$$

ایک بعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریماں مجموعے پائے جاتے ہیں جن کی قیمتیں، پتلی کی چوڑائی کم سے کم کرنے سے قطعی کھمبات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان کھمبات کو علامت طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x} dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int \bar{y} dm}{\int dm}$$

مستوی میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کیت۔

$$\begin{aligned} M_x &= \int \bar{y} dm && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M_y &= \int \bar{x} dm && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int dm && \text{کیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کیت} \end{aligned} \quad (6.24)$$

ان کھمبات کی حصول کے لئے ہم چادر کو محدودی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدود کے متوازی ایک نمائندہ پتلی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پتلی کی کیت اور مرکز کیت کے محدود (\bar{x}, \bar{y}) کو x اور y کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد محدودی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے چھ $\bar{y} dm$ ، $\bar{x} dm$ اور dm کے کھمبات لیتے ہیں۔

مثال 6.26: ایک ٹکونی چادر جس کو شکل 6.103-1 میں دکھایا گیا ہے کی مستقل کثافت $\delta = 3 \text{ g cm}^{-3}$ ہے۔ (i) محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر M_y معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کیت M معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کیت کے مرکز کا \bar{x} محدود معلوم کریں۔

حل: پہلی ترکیب: انتہائی پٹیاں (شکل 6.103-ب)
(i) نمائندہ پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{مرکز کیت: } (\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) \quad \text{چوڑائی: } dx$$

$$\text{کیت: } dm = \delta dA = 3 \cdot 2x dx = 6x dx \quad \text{لمبائی: } 2x$$

$$\text{رقبہ: } dS = 2x dx \quad \text{مرکز کیت کا محور } y \text{ سے فاصلہ: } \bar{x} = x$$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\bar{x} dm = x \cdot 6x dx = 6x^2 dx$$

ہو گا لہذا پوری چادر کا محور y کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \bar{x} dm = \int_0^1 6x^2 dx = 2x^3 \Big|_0^1 = 2 \text{ g cm}$$

(ب) چادر کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int dm = \int_0^1 6x dx = 3x^2 \Big|_0^1 = 3 \text{ g}$$

(ج) چادر کے مرکز کیت کا x محدود درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

دوسری ترکیب: افقی پٹیاں (شکل 6.103-ج)

(i) نمائندہ انتہائی پٹی کے مرکز کیت کا y محدود y ہو گا:

$$\bar{y} = y$$

پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں x محدود پایا جائے گا:

$$\bar{x} = \frac{\frac{y}{2} + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$dm = \delta dS = 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy \quad \text{کیت:}$$

$$1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2} \quad \text{لمبائی:}$$

$$dy \quad \text{چوڑائی:}$$

$$\bar{x} = \frac{y+2}{4} \quad \text{مرکز کیت کا محور } y \text{ سے فاصلہ:}$$

$$dS = \frac{2-y}{2} dy \quad \text{رقبہ:}$$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\bar{x} dm = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy = \frac{3}{8} (4-y^2) dy$$

ہو گا اور محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \bar{x} dm = \int_0^2 \frac{3}{8} (4-y^2) dy = \frac{3}{8} \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{3}{8} \left(\frac{16}{3} \right) = 2 \text{ g cm}$$

(ب) چادر کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2} (2-y) dy = \frac{3}{2} \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{3}{2} (4-2) = 3 \text{ g}$$

(ج) چادر کی مرکز کیت کا x مجدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

□

ہم اسی طرح M_x اور \bar{y} بھی تلاش کر سکتے ہیں۔

اگر پتی چادر میں کیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب کیت کا مرکز محور تشاکل پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کیت دونوں محور کے نقطہ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

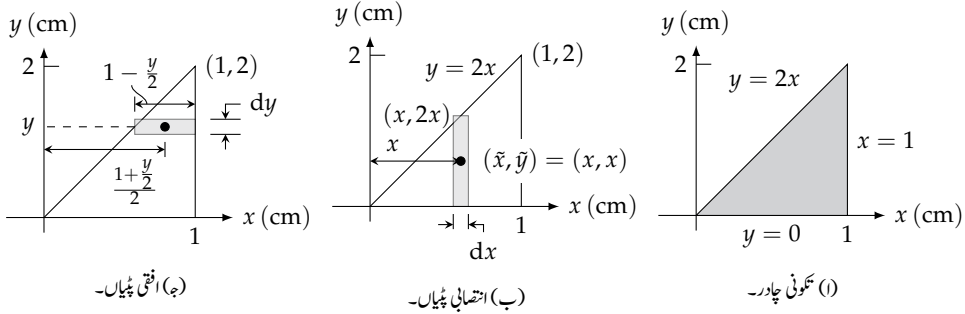
مثال 6.27: مستقل کثافت ایک پتلا مستوی خط جس کی کثافت مستقل δ ہے کو بالائی طرف سے قطع مکانی $y = 4 - x^2$ اور زیریں طرف سے محور x گھیرتا ہے (شکل 6.104)۔ اس خطے کا مرکز کیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ خطے کی کثافت مستقل ہے اور تقسیم کیت محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہذا مرکز کیت محور y پر پایا جائے گا۔ یوں $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ ہمیں صرف $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ معلوم کرنا ہے۔

افقی پٹیاں لینے سے درج ذیل مشکل مکمل پیدا ہوتا ہے

$$M_x = \int_0^4 2\delta y \sqrt{4-y} dy$$

لہذا ہم انتہائی پٹیاں لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ نمائندہ انتہائی پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔



شکل 6.103: چادر برائے مثال 6.26

مرکز کیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$ رقبہ: $dS = (4 - x^2) dx$

لمبائی: $4 - x^2$ کیت: $dm = \delta dS = \delta(4 - x^2) dx$

چوڑائی: dx مرکز کیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$

محور x کے لحاظ سے پٹیاں کا معیار اثر

$$\tilde{y} dm = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2) dx = \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2 dx$$

ہو گا لہذا محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$(6.25) \quad M_x = \int \tilde{y} dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2 dx$$

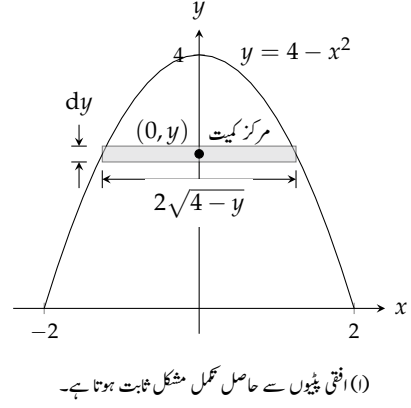
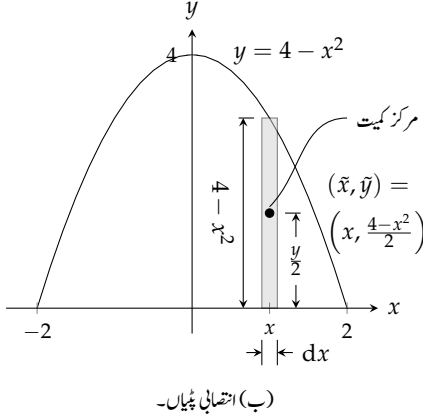
$$(6.26) \quad = \frac{\delta}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx = \frac{256}{15} \delta$$

چادر کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$(6.27) \quad M = \int dm = \int_{-2}^2 \delta(4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \delta$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{15} \delta}{\frac{32}{3} \delta} = \frac{8}{5}$$



شکل 6.104: چادر برائے مثال 6.27

چادر کی کیت کا مرکز درج ذیل نقطہ ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

□

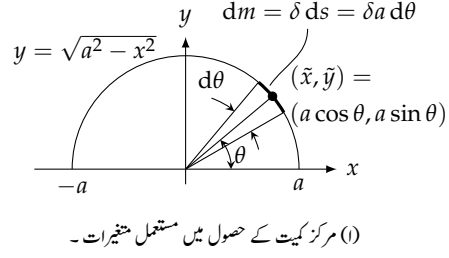
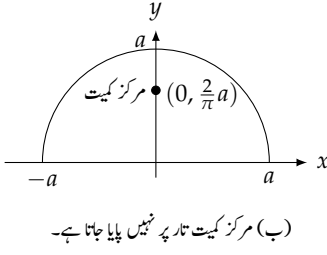
مثال 6.28: متغیر کثافت نقطہ (x, y) پر مثال 6.27 کی چادر کی کثافت $\delta = 2x^2$ لیتے ہوئے چادر کی کیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: کیت اب بھی محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ یوں $\delta = 2x^2$ کے لئے مساوات 6.25 اور مساوات 6.27 درج ذیل صورت اختیار کریں گے۔

$$\begin{aligned} M_x &= \int \bar{y} dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2} (4 - x^2)^2 dx = \int_{-2}^2 x^2 (4 - x^2)^2 dx \\ &= \int_{-2}^2 (16x^2 - 8x^4 + x^6) dx = \frac{2048}{105} \\ M &= \int dm = \int_{-2}^2 \delta (4 - x^2) dx = \int_{-2}^2 2x^2 (4 - x^2) dx \\ &= \int_{-2}^2 (8x^2 - 2x^4) dx = \frac{256}{15} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$



شکل 6.105: نصف دائری تار (مثال 6.29)

چادر کی کیت کا نیا مرکز درج ذیل ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

□

مثال 6.29: ایک تار جس کی کثافت δ مستقل ہے سے رداس a کا نصف دائرہ بنایا جاتا ہے۔ اس کی کیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم نصف دائرے کو تقاطع $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 6.105)۔ کیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشابکی ہے لہذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ ہم تصور میں تار کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے \bar{y} تلاش کرتے ہیں۔ نمائندہ قطع کے لئے درج ذیل ہو گا۔

مرکز کیت کا محور x سے فاصلہ: $\bar{y} = a \sin \theta$

لمبائی: $ds = a d\theta$

کیت: $dm = \delta ds = \delta a d\theta$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{\int \bar{y} dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a \sin \theta \cdot \delta a d\theta}{\int_0^\pi \delta a d\theta} = \frac{\delta a^2 [-\cos \theta]_0^\pi}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a$$

□

مرکز کیت $(0, 2a/\pi)$ ہو گا جو مبداء سے تقریباً $\frac{2}{3}$ ادا ہے۔

6.7.1 وسطانی مرکز

مستقل کثافت کی صورت میں \bar{x} اور \bar{y} کی کلیات میں نسب نما اور شمار کنندہ میں پائے جانے والے δ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ یوں \bar{x} اور \bar{y} کی نقطہ نظر سے δ کو شروع سے اکائی تصور کیا جاسکتا ہے۔ مستقل کثافت کی صورت میں کسی چیز کی کیت کا مرکز اس چیز کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نہ کہ اس مادے پر جس سے یہ چیز بنی ہو۔ ایسی صورت میں مرکز کیت کو عموماً وسطانی مرکز¹⁵ کہتے ہیں۔ یوں اگر آپ سے کہا جائے کہ تکیوں، مخروط یا کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ \bar{x} اور \bar{y} کو معیار اثر تقسیم کیت سے معلوم کرتے ہوئے $\delta = 1$ لیں۔

سوالات

پتلے سلاخ
سوال 6.228: ایک بچہ جس کی کیت 40 kg اور دوسرا بچہ جس کی کیت 50 kg ہے ہنڈولا پر جھول رہے ہیں۔ اگر 40 kg بچہ چول سے 2 m فاصلے پر ہو تب ہنڈولا کو متوازن رکھنے کی خاطر دوسرا بچہ چول سے دوسری جانب کتنے فاصلے پر ہو گا؟
جواب: $\frac{8}{5} m$

سوال 6.229: ایک شہتیر کے سروں کو دو ترازوؤں پر رکھا جاتا ہے جو 100 kg اور 20 kg کی پیمائش دیتے ہیں۔ شہتیر کی کیت کا مرکز کہاں ہو گا؟

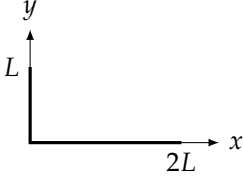
سوال 6.230: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو وسط سے 90° زاویہ پر موڑ کر فریم بنایا جاتا ہے (شکل 6.106)۔ فریم کی کیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی حصے کا مرکز کیت کہاں ہو گا؟)
جواب: $(\frac{L}{4}, \frac{L}{4})$

سوال 6.231: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو 90° پر موڑ کر فریم بنایا جاتا ہے جہاں ایک بازو کی لمبائی دوسرے بازو کی لمبائی سے دگنی ہے (شکل 6.107)۔ فریم کی کیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کی کیت کے مراکز کہاں ہوں گے؟)

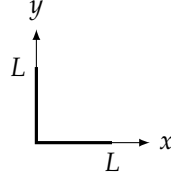
سوال 6.232 تا سوال 6.239 میں محور x کے مختلف وقفوں پر پڑی ہوئی پتلی سلاخ کی کثافتی تفاعل دیے گئے ہیں۔ مساوات 6.21 استعمال کرتے ہوئے مبداء کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر، کیت اور مرکز کیت تلاش کریں۔

سوال 6.232: $\delta(x) = 4, \quad 0 \leq x \leq 2$
جواب: $M_0 = 8, M = 8, \bar{x} = 1$

سوال 6.233: $\delta(x) = 4, \quad 1 \leq x \leq 3$



شکل 6.107: فریم برائے سوال 6.231



شکل 6.106: لوہے کا فریم برائے سوال 6.230

سوال 6.234: $\delta(x) = 1 + \frac{x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 3$
 جواب: $M_0 = \frac{15}{2}, M = \frac{9}{2}, \bar{x} = \frac{5}{3}$

سوال 6.235: $\delta(x) = 2 - \frac{x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 4$

سوال 6.236: $\delta(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \leq x \leq 4$
 جواب: $M_0 = \frac{73}{6}, M = 5, \bar{x} = \frac{73}{30}$

سوال 6.237: $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \leq x \leq 1$

سوال 6.238: $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
 جواب: $M_0 = 3, M = 3, \bar{x} = 1$

سوال 6.239: $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

مستقل کثافت والے پتلی چادریں
 سوال 6.240 تا سوال 6.251 میں وہ خطہ دیا گیا ہے جہاں مستقل کثافت δ والی پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کی کیت کا مرکز تلاش کریں۔

سوال 6.240: قطع مکانی $y = x^2$ اور کیر $y = 4$ میں محیط خطہ۔
 جواب: $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{12}{5}$

سوال 6.241: قطع مکانی $y = 25 - x^2$ اور محور x میں محیط خطہ۔

سوال 6.242: قطع مکانی $y = x - x^2$ اور کیر $y = -x$ میں محیط خطہ۔
 جواب: $\bar{x} = 1, \bar{y} = -\frac{3}{5}$

سوال 6.243: قطع مکانی $y = x^2 - 3$ اور $y = -2x^2$ میں محیط خطہ۔

سوال 6.244: محور y اور قطع مکانی $x = y - y^3, 0 \leq y \leq 1$ کے قع خطہ۔
جواب: $\bar{x} = \frac{16}{105}, \bar{y} = \frac{8}{15}$

سوال 6.245: قطع مکانی $x = y^2 - y$ اور لکیر $y = x$ میں محیط خطہ۔

سوال 6.246: محور x اور منحنی $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کے قع خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

سوال 6.247: محور x اور منحنی $y = \sec^2 x, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ کے قع خطہ۔

سوال 6.248: قطع مکانی $y = 2x^2 - 4x$ اور $y = 2x - x^2$ میں محیط خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 1, \bar{y} = \frac{2}{5}$

سوال 6.249: (i) ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے اندر خطہ۔ (ب) محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{9 - x^2}$ کے قع خطہ۔ جزو-ا کے نتیجہ کے ساتھ جواب کا موازنہ کریں۔

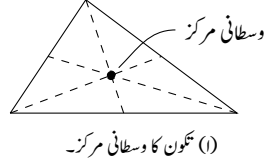
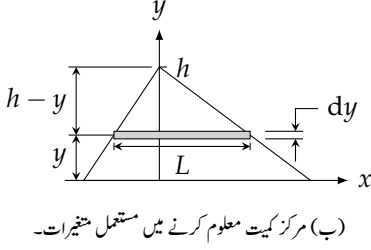
سوال 6.250: (i) ربع اول میں لکیر $x = 3$ ، لکیر $y = 3$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے قع ٹکوئی خطہ۔ (اشارہ۔ رقبے کو جیومیٹری کی مدد سے حاصل کریں۔)
جواب: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4-\pi}$

سوال 6.251: وہ خطہ جس کا بالائی سرحد $y = \frac{1}{x^3}$ ، زیریں سرحد $y = -\frac{1}{x^3}$ ، بایاں سرحد $x = 1$ اور دایاں سرحد $x = a > 1$ ہوں۔ اس کے علاوہ $\lim_{a \rightarrow \infty} \bar{x}$ بھی معلوم کریں۔

متغیر کثافت والے پتلی چادریں
سوال 6.252: محور x اور منحنی $y = \frac{2}{x^2}, 1 \leq x \leq 2$ کے قع چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = x^2$ ہے کا مرکز کیت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{1}{2}$

سوال 6.253: لکیر $y = x$ سے نیچے اور قطع مکانی $y = x^2$ سے اوپر پتلی چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = 12x$ ہے کا مرکز کیت تلاش کریں۔

سوال 6.254: لکیر $x = 1$ ، لکیر $x = 4$ اور منحنی $y = \pm \frac{4}{\sqrt{x}}$ کے قع چادر کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (i) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{1}{x}$ ہو تب چادر کی



شکل 6.108: تکیوں برائے سوال 6.256

کیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کیت کا مرکز دکھائیں۔
جواب: (الف) $\frac{224\pi}{3}$ ، (ب) $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$

سوال 6.255: منحنی $y = \frac{2}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ و $x = 4$ کے بیچ چادر کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ل) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \sqrt{x}$ ہو تب چادر کی کیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کیت کا مرکز دکھائیں۔

تکیوں کے وسطانی مراکز
سوال 6.256: تکیوں کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکیوں کا وسطانی مرکز ہو گا۔
تکیوں کی راس سے مخالف ضلع کی وسط تک قطع کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ ضلع سے $\frac{1}{3}$ فاصلہ پر وسطانیہ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل 6.108)۔ دکھائیں کہ تکیوں کا وسطانی مرکز بھی اسی نقطہ پر پایا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تکیوں کے کسی ایک ضلع کو محور x پر رکھ کر اس میں نمائندہ افقی پٹی L لیں۔ کیت dm کو L اور dy کی صورت میں لکھیں۔
ب. متناہہ مثلثات کی مدد سے $L = \frac{b}{h}(h - y)$ لکھ کر dm کے کلیہ میں ڈالیں۔

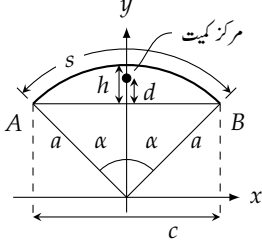
ج. دکھائیں کہ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ ہو گا۔

د. اسی دلیل کو باقی دو وسطانیوں پر بھی لاگو کریں۔

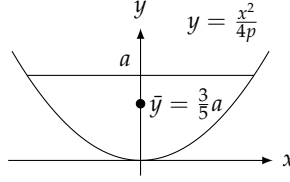
سوال 6.257 تا سوال 6.261 مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ سوال 6.256 کا نتیجہ استعمال کر کر مثلث کا وسطانی مرکز دریافت کریں۔

سوال 6.257: $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$

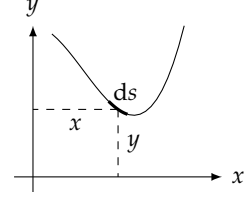
سوال 6.258: $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$
جواب: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{3}$



شکل 6.111: برائے سوال 6.268



شکل 6.110: برائے سوال 6.267



شکل 6.109: برائے سوال 6.266

سوال 6.259: $(0,0), (a,0), (0,a)$ سوال 6.260: $(0,0), (a,0), (0,b)$
جواب: $\bar{x} = \frac{a}{3}, \bar{y} = \frac{b}{3}$ سوال 6.261: $(0,0), (a,0), (\frac{a}{2}, b)$

پتلی تار
سوال 6.262: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = \sqrt{x}$ پر $x = 0$ سے $x = 2$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $\frac{13\delta}{6}$

سوال 6.263: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = x^3$ پر $x = 0$ سے $x = 1$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 6.264: کثافت $\delta = k \sin \theta$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔
جواب: $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

سوال 6.265: کثافت $\delta = 1 + k|\cos \theta|$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔

کلیات انجینئری
سوال 6.266 تا سوال 6.269 میں دیے گئے فکروں اور کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال 6.266: قابل تفرق مستوی منحنی کے وسطانی مراکز کے محدود درج ذیل ہوں گے (شکل 6.109)۔

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\text{لمبائی}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\text{لمبائی}}$$

سوال 6.267: قوس $y = \frac{x^2}{4p}$ میں $p > 0$ کی قیمت جو بھی ہو، شکل 6.110 میں دکھائے گئے قطع مکانی خطے کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{3}{5}a$ ہو گا۔

سوال 6.268: مستقل کثافت کی باریک تار سے، محور y کے لحاظ سے تفاعلی، دائری قوس بنایا جاتا ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے (شکل 6.111)۔ اس کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$ ہو گا۔

سوال 6.269: گزشتہ سوال کو جاری رکھا گیا ہے
دکھائیں کہ جب α کی قیمت کم ہو تب وسطانی مرکز سے قطع AB تک فاصلہ d تقریباً $\frac{2h}{3}$ ہو گا۔ ایسا درج ذیل اقدام سے ہو گا۔

1. درج ذیل دکھائیں۔

$$(6.28) \quad \frac{d}{h} = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

2. درج ذیل تفاعل کو

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

کمپیوٹر پر ترسیم کر کے بڑا کر کے دکھائیں کہ $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$ ہو گا۔ (حصہ 7.6 میں سوال 7.423 میں آپ اس کی تصدیق کر پائیں گے۔)

ب. آپ $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ لے کر مساوات 6.28 کا دایاں ہاتھ حل کر کے دیکھیں کہ 45° سے بڑے زاویوں کے لئے بھی غلط (یعنی d اور $\frac{2}{3}$ میں فرق) بہت کم ہے۔

6.8 کام

روزمرہ زندگی میں کام سے مراد وہ عمل ہے جو جسمانی یا ذہنی قوت سے سرانجام دیا جائے۔ سائنس میں کام کی تعریف اس سے مختلف ہے۔ اس حصہ میں کام کی سائنسی تعریف پیش کی جائے گی اور کام کی قیمت کا حصول سکھایا جائے گا۔

مستقل قوت اور کام

جب کوئی جسم جس پر مستقل قوت F عمل کرتی ہو، قوت کی سمت میں سیدھی لکیر پر فاصلہ d حرکت کرے تب ہم (سائنسی طور پر) کہتے ہیں کہ قوت F اس جسم پر کام W کرتی ہے:

$$(6.29) \quad W = Fd$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائنس میں لفظ کام کی معنی روزمرہ زندگی میں استعمال معنی سے مختلف ہے۔ اگر آپ کسی گاڑی کو سڑک پر دکھا لگا کر ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کریں تب آپ کی روزمرہ خیال کے مطابق آپ نے کام کیا اور مساوات 6.29 کے تحت بھی آپ نے کام کیا۔ اس کے برعکس اگر آپ پورا دن گاڑی کو دکھا لگاتے رہیں لیکن گاڑی اپنی جگہ سے حرکت نہ کرے تب اگرچہ آپ کا خیال ہو گا کہ آپ نے بہت کام کیا لیکن مساوات 6.29 کے تحت آپ نے کوئی کام نہیں کیا۔

مساوات 6.29 سے واضح ہے کہ قوت کی اکائی کو فاصلہ کی اکائی سے ضرب دینے سے کام کی اکائی حاصل ہوگی۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں قوت کی اکائی نیوٹن N اور فاصلہ کی اکائی میٹر m ہے لہذا اس نظام میں کام کی اکائی نیوٹن میٹر $N \cdot m$ ہوگی جس کو خصوصی نام جاول¹⁶ دیا گیا ہے اور جس کو J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 6.30: فرض کریں آپ 80 kg کمیت کو 30 cm بلندی تک اٹھاتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے آپ درج ذیل کام کرتے ہیں۔

$$W = Fd = (80)(9.8)(0.3) = 235.2 J$$

□

متغیر قوت اور کام

اگر آپ پانی کی ایسی بالٹی کو اٹھائیں جس سے پانی چپکتا ہو تب لاگو قوت کی قیمت بلندی کے ساتھ تبدیل ہوگی۔ ایسی صورت میں قوت کا کلیہ $W = Fd$ تبدیل کرتے ہوئے مکمل کا استعمال ضروری ہو گا جو قوت کی تبدیلی کا حساب رکھ سکے۔

فرض کریں کہ محور x سے اس لکیر کو ظاہر کرنا ممکن ہے جس پر قوت عمل کرتی ہے اور قوت کی مقدار F کو فاصلہ x کا استمراری تفاعل تصور کیا جاسکتا ہے۔ ہم وقفہ $x = a$ تا $x = b$ پر قوت کے کام کو معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ اگر ذیلی وقفہ چھوٹا ہو تب x_{k-1} سے x_k تک کے فاصلہ

میں استراری قوت F کی تبدیلی (استراری ہونے کی بنا) بہت کم ہوگی جس کو رد کیا جاسکتا ہے۔ یوں x_{k-1} سے x_k تک حرکت کے دوران کام کی قیمت تخمیناً $F(c_k)\Delta x_k$ ہوگی۔ یوں درج ذیل ریمان مجموعہ $x = a$ سے $x = b$ تک قوت F کا کام دے گا۔

$$(6.30) \quad \sum_{k=1}^n F(c_k)\Delta x_k$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہو ویسے ویسے یہ تخمین مزید بہتر ہوگی لہذا ہم $x = a$ سے $x = b$ تک F کے مکمل کو a سے b تک قوت F کے کام کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: محور x پر $x = a$ سے $x = b$ تک لاگو متغیر قوت $F(x)$ درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$(6.31) \quad W = \int_a^b F(x) dx$$

□

کام کی اکائی جاوول J ہے۔

مثال 6.31: قوت $F(x) = \frac{1}{x^2} \text{ N}$ محور x پر $x = 1 \text{ m}$ تا $x = 10 \text{ m}$ عمل کرتی ہے۔ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}$$

□

مثال 6.32: گاؤں میں کنواں سے پانی نکالنے کے لئے بوکا استعمال کیا جاتا ہے۔ کھوہ کی گہرائی 20 m ، خالی بوکا کی کمیت 2 kg اور رسی کی کمیت 0.1 kg m^{-1} ہے۔ بوکا میں ابتدائی طور پر 10 L پانی ہوتا ہے۔ چونکہ بوکا سے پانی رستا ہے لہذا جتنی دیر میں بوکے کو نیچے سے اوپر کھینچا جاتا ہے اتنی دیر میں بوکا خالی ہو جاتا ہے۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔ درج ذیل کام معلوم کریں۔

ا. صرف پانی بلند کرنے کا کام۔

ب. پانی اور بوکا بلند کرنے کا کام۔

ج. پانی، بوکا اور رسی بلند کرنا کا کام۔

حل:

ا. صرف پانی: پانی اٹھانے کے لئے درکار قوت پانی کے وزن جتنا ہو گا جو ابتدا میں $98 \text{ N} = (9.8)(10)$ اور آخر میں صفر ہے۔ یوں مبداء کو کتوں کی تہہ میں رکھتے ہوئے قوت کو

$$F(x) = \underbrace{98}_{\text{ابتدائی وزن}} \underbrace{\left(\frac{20-x}{20}\right)}_{\text{اونچائی } x \text{ پر باقی تناسب}} = 98\left(1 - \frac{x}{20}\right) = 98 - 4.9x \text{ N}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x) dx \\ &= \int_0^{20} (98 - 4.9x) dx = \left[98x - \frac{4.9x^2}{2} \right]_0^{20} = 1960 - 980 = 980 \text{ J} \end{aligned}$$

ب. صرف بوکا: صرف بوکا اٹھانے کے لئے درکار کام مساوات 6.29 کے تحت $392 \text{ J} = (2)(9.8)(20)$ ہو گا۔ یوں پانی اور بوکا دونوں کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 = 1372 \text{ J}$$

ج. پانی، بوکا اور رسی: مبداء سے x بلندی پر پانی، بوکا اور رسی کی کمیت کو $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل درکار قوت حاصل ہوتی ہے۔

$$F(x) = \underbrace{(98 - 4.9x)}_{\text{پانی کا متغیر وزن}} + \underbrace{(19.6)}_{\text{بوکا کا مستقل وزن}} + \underbrace{(0.1)(9.8)(20 - x)}_{\text{رسی کا متغیر وزن}}$$

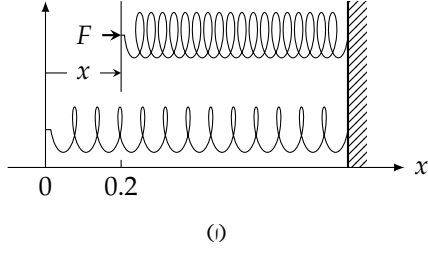
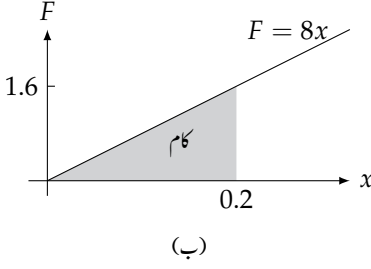
صرف رسی کو اوپر کھینچنے کا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{20} (0.1)(9.8)(20 - x) dx = \int_0^{20} (19.6 - 0.98x) dx \\ &= \left[19.6x - \frac{0.98x^2}{2} \right]_0^{20} = 392 - 196 = 196 \text{ J} \end{aligned}$$

یوں پانی، بوکا اور رسی تینوں کو کھینچنے کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 + 196 = 1568 \text{ J}$$

□



شکل 6.112: اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی اور قوت راست تناسب ہیں۔

قانون ہک برائے اسپرنگ

قانون ہک¹⁷ کے تحت کسی بھی اسپرنگ کی قدرتی لمبائی کو تان کر یا دبا کر x اکائیاں تبدیل کرنے کے لئے درکار قوت لمبائی x کے راست متناسب ہوگی:

$$(6.32) \quad F = kx$$

مستقلہ اسپرنگ k جو اسپرنگ کی خاصیت ہے کو مقیاس چمک¹⁸ کہتے ہیں۔ مقیاس چمک کو قوت فی اکائی لمبائی میں ناپا جاتا ہے۔ جب تک لاگو قوت اسپرنگ کی دھاتی تار کو بگاڑ نہ دے قانون ہک (مساوات 6.32) بہترین نتائج دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ لاگو قوت اسپرنگ کو خراب نہیں کرتی ہے۔

مثال 6.33: ایک اسپرنگ جس کا مقیاس چمک $k = 8 \text{ N m}^{-1}$ ہے کی لمبائی کو 1 m سے تبدیل کر کے 0.8 m کیا جاتا ہے۔ درکار کام تلاش کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کو محور x پر پڑا ہوا تصور کرتے ہیں (شکل 6.112)۔ اسپرنگ کا ایک سر مبداء پر ہے جبکہ اس کا دوسرا سر $x = 1$ پر باندھا ہوا ہے۔ یوں ہم قوت کو $F = 8x$ لکھ سکتے ہیں جہاں x کی قیمت 0 تا 0.2 m ہوگی۔ درکار کام درج ذیل ہوگا۔

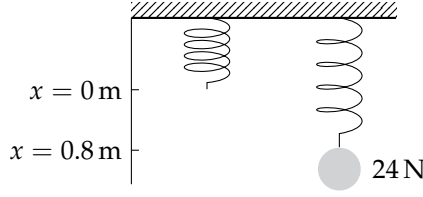
$$W = \int_0^{0.2} 8x \, dx = \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^{0.2} = 0.16 \text{ J}$$

□

مثال 6.34: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی 1 m ہے کو 24 N قوت سے تان کر 1.8 m لمبا کیا جاتا ہے۔

ا. مقیاس چمک k تلاش کریں۔

¹⁷ Hooke's law
¹⁸ spring constant



شکل 6.113: قوت نے اسپرنگ کی لمبائی کو بڑھایا ہے۔

ب. اسپرنگ کی لمبائی کو 2 m تبدیل کرنے کے لئے درکار کام تلاش کریں۔

ج. اسپرنگ کی لمبائی میں 45 N کی قوت کتنی تبدیلی پیدا کرے گی؟

حل:

ا. مقیاس پلک: قیاس پلک کو مساوات 6.32 سے حاصل کرتے ہیں۔ اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی 0.8 m ہے۔

$$24 = k(0.8) \implies k = \frac{24}{0.8} = 30 \text{ N m}^{-1}$$

ب. کام: ہم اسپرنگ کو چھت سے یوں آویزاں تصور کرتے ہیں کہ اس کا آزاد سر $x = 0$ پر ہو (6.113)۔ اسپرنگ کی لمبائی کو اس کی قدرتی لمبائی سے x میٹر زیادہ کرنے کے لئے درکار قوت $F = kx$ ہوگی جو اسپرنگ کو نیچے رخ کھینچے گی۔ یوں $x = 0$ سے $x = 2 \text{ m}$ تک کھینچنے کے لئے کام درج ذیل ہوگا۔

$$W = \int_0^2 30x \, dx = \left[\frac{30x^2}{2} \right]_0^2 = 60 \text{ J}$$

ج. لمبائی میں تبدیلی: ہم مساوات $F = 30x$ میں $F = 45$ ڈال کر x تلاش کرتے ہیں۔

$$45 = 30x \implies x = \frac{45}{30} = 1.5 \text{ m}$$

یوں اسپرنگ کی کل لمبائی $1 + 1.5 = 2.5 \text{ m}$ ہوگی۔

□

پانی کی نکاسی

کسی برتن یا حوض سے پانی کی نکاسی کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ ہم پانی کو افقی تہوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک تہہ کو برتن سے باہر نکالتے ہیں۔ یوں اگر تہہ کی موٹائی dy اور اس کے سطحی رقبہ S ہو تب اس کی کمیت $\rho S dy$ اور وزن $\rho S g dy$ ہو گا جہاں پانی کی کثافت ρ اور کشش ثقل کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس تہہ کو بلندی h تک منتقل کرنے کے لئے $dW = Fh = \rho S g h dy$ کام کرنا ہو گا۔ یوں تمام تہوں کو نکالنے کے لئے مکمل حل کرنا ہو گا۔ اگلے مثال میں ایک ٹھوس مثال پیش کی گئی ہے۔

مثال 6.35: پانی سے بھرے ہوئے ایک بیلنی حوض کا رداس 5 m اور قد $h = 10$ m ہے۔ پانی کو 14 m بلندی پر منتقل کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

حل: ہم حوض کو کارتیسی محدود پر تصور کرتے ہوئے وقفہ $[0, 10]$ کی خانہ بندی کر کے پانی کو تہہ در تہہ تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.114)۔ سطح y اور سطح $y + dy$ کے بیچ پانی کا حجم

$$\Delta H = \pi (\text{رداس})^2 (\text{موٹائی}) = \pi (5)^2 \Delta y = 25\pi \Delta y \text{ m}^3$$

اور کمیت

$$dM = (\rho)(\Delta H) = (1000)(25\pi \Delta y) = 25000\pi \Delta y \text{ kg}$$

ہو گی جہاں پانی کی کثافت $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ہے۔ اس تہہ پر کشش ثقل کی وجہ سے نیچے رخ قوت عمل کرے گی لہذا اس تہہ کو اٹھانے کی خاطر تہہ کی وزن کے برابر قوت F درکار ہو گی:

$$F = (g)(dM) = (9.8)(25000\pi \Delta y) = 245000\pi \Delta y \text{ N}$$

یوں اس تہہ کو y کی بلندی سے 14 m کی بلندی تک اٹھانے کے لئے درج ذیل کام کرنا ہو گا۔

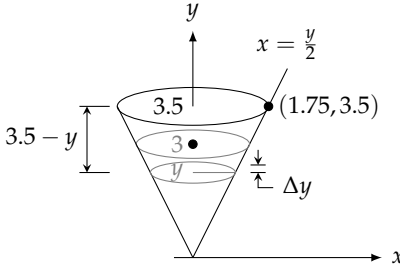
$$dW = (\text{قوت})(\text{فاصلہ}) = (245000\pi)(14 - y)\Delta y \text{ J}$$

تمام پانی کو اس بلندی تک اٹھانے کے لئے تخمیناً

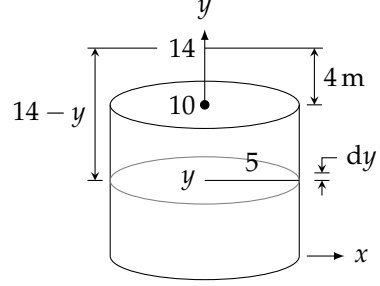
$$W \approx \sum_{0}^{10} \Delta W = \sum_{0}^{10} \Delta y \text{ J}$$

کام کرنا ہو گا جو وقفہ $0 \leq y \leq 10$ پر تعامل $(14 - y)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ حوض خالی کرنے کے لئے درکار کام $\|P\| \rightarrow 0$ کی صورت میں اس ریمان مجموعے کا حد ہو گا:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} 245000\pi(14 - y) dy = 245000\pi \int_0^{10} (14 - y) dy \\ &= 245000\pi \left[14y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{10} = 245000\pi [90] \approx 69.3 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$



شکل 6.115: زیتون تیل کی مخروط حوض (مثال 6.36)



شکل 6.114: بیانی حوض (مثال 6.35)

ایک کلو واٹ طاقت کا بجلی کا پمپ ایک سیکنڈ میں 1000 J کام کرتا ہے۔ اس پمپ کو یہ حوض خالی کرنے کے لئے تقریباً 19 گھنٹے اور 15 منٹ کا وقت درکار ہو گا۔ □

مثال 6.36: ایک مخروط حوض جس کو شکل 6.115 میں دکھایا گیا ہے کنارے سے 0.5 m نیچے تک زیتون کی تیل سے بھرا ہوا ہے۔ زیتون کی تیل کی کثافت $\rho = 930 \text{ kg m}^{-3}$ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

حل: ہم وقفہ $[0, 3]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے خانہ بندی کے نقطوں پر افقی سطیہ تصور کرتے ہوئے تیل کو باریک تہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ سطح y اور سطح $y + \Delta y$ کے بیچ تہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta H = \pi (r_{\text{داس}})^2 (\text{موہائی}) = \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4} y^2 \Delta y \text{ m}^3$$

اس تہہ کو اٹھانے کے لئے اس تہہ کی وزن کے برابر قوت $F(y)$ درکار ہو گا:

$$F(y) = \rho g \Delta H = (930)(9.8) \left(\frac{\pi}{4} y^2 \Delta y\right) = \frac{9114\pi}{4} y^2 \Delta y \text{ N}$$

حوض کے کنارے سے اس تہہ تک کا فاصلہ $3.5 - y$ ہے لہذا اس تہہ کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لئے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$\Delta W = \frac{9114\pi}{4} (3.5 - y) y^2 \Delta y \text{ J}$$

$y = 0$ سے $y = 3$ تک تمام تہوں کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لئے تخمیناً

$$W \approx \sum_0^3 \frac{9114\pi}{4} (3.5 - y) y^2 \Delta y \text{ J}$$

کام درکار ہو گا جو وقفہ $[0, 3]$ پر تفاعل $y^2(3.5 - y)$ کا رییمان مجموعہ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے درکار کام، خانہ بندی کا معیار صفر تک کرنے سے حاصل، رییمان مجموعے کا حد ہو گا:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^3 \frac{9114\pi}{4} (3.5 - y)y^2 dy \\ &= \frac{9114\pi}{4} \int_0^3 (3.5y^2 - y^3) dy \\ &= \frac{9114\pi}{4} \left[\frac{3.5y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^3 \approx 80529 \text{ J} \end{aligned}$$

□

سوالات

متغیر قوت کا کام

سوال 6.270: اگر مثال 6.32 میں بوکا کا حجم 20 L ہو لیکن اس میں سوراخ بھی بڑا ہوتا کہ اب بھی بوکا کو کنواں سے نکالتے ہوئے بوکا خالی ہو جاتا ہو۔ بوکا اور رسی کی کمیت کو شامل نہ کرتے ہوئے ایک بار بوکا نکالنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔

جواب: 1960 J

سوال 6.271: فرض کریں کہ مثال 6.32 میں بوکا کو اس رفتار سے اوپر کھینچا جاتا ہے کہ آخر میں بوکا میں 4 L پانی ہوتا ہے۔ پانی نکالنے میں کتنا کام درکار ہو گا؟ بوکا اور رسی کی کمیت کو شامل نہ کریں اور بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔

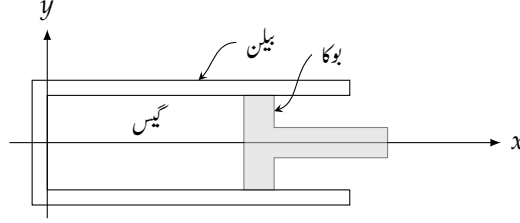
سوال 6.272: ایک کوہ پیما چٹان سے لٹکی ہوئی 50 m رسی کو اوپر کھینچتا ہے۔ رسی کی کشافنی وزن 0.624 N m^{-1} ہے۔ کتنا کام درکار ہو گا؟

جواب: 780 J

سوال 6.273: ریت کو تھیلے میں ڈال کر 6 m بلند چھت تک برقرار رفتار سے کھینچ کر پہنچایا جاتا ہے۔ تھیلے میں سوراخ سے ریت کا اخراج ہوتا ہے جس کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ابتدائی طور پر تھیلا میں 50 kg ریت ہوتی ہے جو آخر میں آدھی رہ جاتی ہے۔ رسی اور تھیلا کی کمیت کو نظر انداز کرتے ہوئے درکار کام معلوم کریں۔

سوال 6.274: آج کل بالخصوص بلند عمارتوں میں سیڑھیوں کے ساتھ ساتھ مصعد¹⁹ بھی پائے جاتے ہیں۔ مصعد کو چھت پر رکھے ہوئے موٹر کی طاقت سے چلایا جاتا ہے۔ کئی لڑیوں پر مشتمل رسی کی کشافت 6 kg m^{-1} ہونے کی صورت میں صرف رسی کو زمین سے

¹⁹lift



شکل 6.116: گاڑی کا انجن ایک پیلن جس میں بوکا چلتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ بوکے کی حرکت سے گیس کا حجم اور دباؤ تبدیل ہوتے ہیں (سوال 6.276)۔

60 m بلند عمارت کی چھت تک اٹھانے میں موٹر کتنا کام کرے گی؟
جواب: 1764 J

سوال 6.275: نقطہ $(x, 0)$ پر پائے جانے والے ذرہ جس کی کمیت m ہے پر قوت $F = \frac{k}{x^2}$ عمل کرتی ہے جہاں k مستقل ہے۔ یہ ذرہ ساکن حال سے شروع ہو کر نقطہ b سے نقطہ a پہنچتا ہے جہاں $0 < a < b$ ہیں۔ اس ذرہ پر کتنا کام ہوا؟

سوال 6.276: ایک پیلن جس کا رقبہ عمودی تراش S ہے میں موجود گیس پر میکانی دباؤ ڈالا جاتا ہے (شکل 6.116)۔ اگر گیس کا حجم V اور اس کا دباؤ p ہو تب دکھائیں کہ گیس کو (p_1, V_1) حال سے (p_2, V_2) حال تک پہنچانے میں درج ذیل کام درکار ہو گا؟

$$W = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p dV$$

(اشارہ: شکل 6.116 کو دیکھ کر بوکا پر قوت کو $F = pS$ اور چھوٹے حجم کو $dV = S dx$ لکھا جاسکتا ہے۔)

سوال 6.277: اگر گیس کا ابتدائی حجم $V_1 = 1500 \text{ cm}^3$ ، ابتدائی دباؤ 103360 N m^{-2} اور اختتامی حجم 200 cm^3 ہو تب سوال 6.276 کے مکمل سے کام دریافت کریں۔ یہاں آپ فرض کریں کہ گیس کا دباؤ ایک حرارت ناگزیر عمل²⁰ ہے جس میں حراری توانائی تبدیل ہوتی ہے۔ حرارت ناگزیر عمل کے قانون کے تحت $pV^{1.4} = c$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔

اسپرننگ
سوال 6.278: ایک اسپرننگ جس کی قدرتی لمبائی 2 m ہے کی لمبائی کو 5 m بنانے کے لئے درکار کام 1800 J ہے۔ اس اسپرننگ کا مقیاس پک تلاش کریں۔
جواب: 400 N m^{-1}

سوال 6.279: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی 30 cm ہے پر 400 N قوت لاگو کرتے ہوئے اس کو کھینچ کر 45 cm لمبائی تک پہنچایا جاتا ہے۔ (i) مقیاس پلک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کی لمبائی کو 35 cm کرنے کے لئے کتنی قوت درکار ہو گی؟ (ج) قدرتی لمبائی سے 600 N قوت اسپرنگ کی لمبائی کو کتنا زیادہ کرتی ہے؟

سوال 6.280: ایک ربڑی پٹی کی لمبائی کو 2 N کی قوت 2 cm بڑھاتی ہے۔ ربڑی پٹی پر قانون ہک کا اطلاق ہوتا ہے۔ ربڑی پٹی کی لمبائی کو 4 N کی قوت کتنا بڑھائے گی اور یہ قوت کتنا کام کرے گی؟
جواب: 4 cm ، 0.08 J

سوال 6.281: اگر 90 N کی قوت اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے 1 m زیادہ کرتی ہو تب اسپرنگ کی قدرتی لمبائی سے اس کی لمبائی کو 5 m زیادہ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

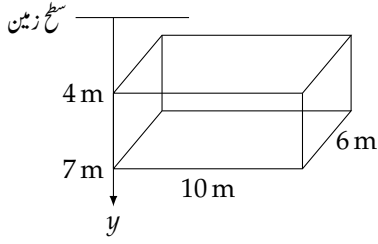
سوال 6.282: ریل گاڑی کے ڈبوں پر نسب اسپرنگ ان ڈبوں کو ایک دوسرے سے دور رکھتے ہیں اور ان کی ٹکراؤ کو محفوظ بناتے ہیں۔ ایسا ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی 20 cm ہے پر 100 000 N کی قوت لاگو کرنے سے اسپرنگ کی کم سے کم لمبائی 12 cm حاصل ہوتی ہے۔ (i) اسپرنگ کا مقیاس پلک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کو پہلا cm دبائے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا۔ اس کو دوسرا سنٹی میٹر دبائے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟
جواب: (i) $1.25 \times 10^6 \text{ N m}^{-1}$ ، (ب) 62.5 J ، 187.5 J

سوال 6.283: گھریلو استعمال کے ترازو پر 74 kg کا شخص کھڑا ہونے سے ترازو 1.5 mm دبتا ہے۔ فرض کریں کہ یہ ترازو قانون ہک کے تحت کام کرتا ہے۔ ایک شخص، جس کا ترازو پر کھڑا ہونے سے ترازو 3 mm دبتا ہو، کا وزن کتنا ہو گا؟

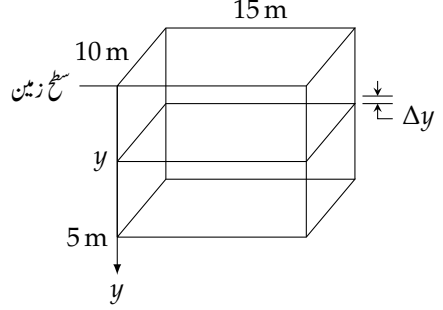
پانی کی نکاسی
ثقلی اسراع کی قیمت کو عموماً $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ لیا جاتا ہے۔ حقیقت میں سطح سمندر پر اس کی قیمت قطبین پر 9.832 m s^{-2} اور عرضی خط استوا پر 9.780 m s^{-2} ہے۔ ان دو قیمتوں میں فرق تقریباً 0.5 % ہے۔

سوال 6.284: بارانی علاقوں میں بارش کے پانی کو زیر زمین حوض میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ زیر زمین حوض جس کو شکل 6.117 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (i) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) دکھائیں کہ ابتدائی 5 گھنٹوں میں تقریباً آدھا حوض خالی ہو جائے گا۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟
جواب: (i) $18.375 \times 10^6 \text{ J}$ ، (ب) 20 گھنٹے اور 25 منٹ۔ (د) 20 گھنٹے اور 22.5 منٹ، 20 گھنٹے اور 29 منٹ۔

سوال 6.285: زیر زمین حوض جس کو شکل 6.118 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کا کنارہ سطح زمین سے 4 m نیچے ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (i) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) آدھا حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟ (پورا حوض خالی کرنے کے نصف دورانیہ سے کم وقت درکار ہو گا)۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟



شکل 6.118: زیر زمین حوض (سوال 6.285)



شکل 6.117: زیر زمین حوض (سوال 6.284)

سوال 6.286: اگر حوض کے کنارے سے 4 m بلندی کی بجائے حوض کے کنارے تک پانی کو اٹھایا جائے تب مثال 6.35 میں کتنا کام درکار ہو گا؟
جواب: 38 484 510 J

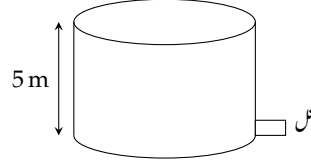
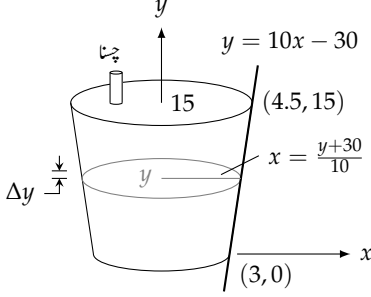
سوال 6.287: اگر مثال 6.35 میں حوض آدھا بھرا ہو تب حوض کے کنارے سے 4 m بلندی تک پانی کو پہنچانے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال 6.288: ایک بیلنی حوض جس کا رداس 4 m اور قد 10 m ہے مٹی کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ مٹی کے تیل کی کثافت 0.81 g cm^{-3} ہے۔ تمام تیل کو حوض کے بالائی کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: $19.95 \times 10^6 \text{ J}$

سوال 6.289: ایک حوض جس کا قد 5 m ہے سطح زمین پر پڑا ہوا ہے (شکل 6.119)۔ قدرتی پانی سطح زمین سے 7 m نیچے ہے۔ حوض کو اس پانی سے دو طرح بھرا جاسکتا ہے۔ (i) پمپ کے خارجی پائپ کو حوض کے کنارے پر رکھ کر حوض کو بھرا جاسکتا ہے۔ (ب) حوض کے چٹائی سر پر موجود مل کے ذریعہ پانی کو حوض تک منتقل کیا جاسکتا ہے۔ دونوں ترائیکب میں کونسا بہتر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

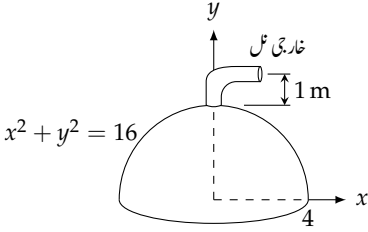
سوال 6.290: ایک مشروب جس کی کثافت 0.769 g cm^{-3} ہے سے مخروط مقطوع ڈبیا بھرا ہوا ہے (6.120)۔ اس ڈبیا کا بالائی رداس 4.5 cm، زیریں رداس 3 cm اور گہرائی 15 cm ہے۔ مشروب کو چمکا کے ذریعہ پیا جاتا ہے جو ڈبیا کی بالائی سطح سے 2.5 cm باہر نکلا ہوا ہے۔ پورا مشروب پینے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: 0.43 J

سوال 6.291: فرض کریں مثال 6.36 میں مخروط حوض دودھ سے بھرا ہوا ہے جس کی کثافت 1032 kg m^{-3} ہے۔ (i) دودھ کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ (ب) دودھ کو حوض کے کنارے سے 1 m بلندی تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

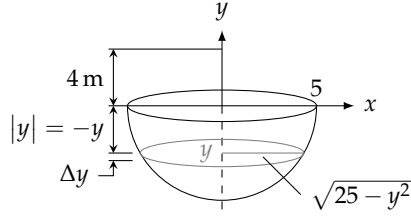


شکل 6.119: پانی حوض (سوال 6.289)

شکل 6.120: مخروط مقطوع ڈبیا (پینکشن سٹئی میٹروں میں ہے۔)



شکل 6.122: نصف کروی حوض (سوال 6.294)



شکل 6.121: نصف کروی حوض (سوال 6.293)

سوال 6.292: بے زنگ فولاد²¹ کا بڑا حوض بنانے کے لئے آپ منحنی $y = x^2, 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$ کو محور y کے گرد گھماتے ہو۔ یہ حوض سمندری پانی سے بھرا ہوا ہے جس کی کثافت تقریباً $10\,000 \text{ N m}^{-3}$ ہے۔ حوض کو خالی کرنے کی خاطر اس پانی کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: $21\,446\,605.9 \text{ J}$

سوال 6.293: نصف کروی حوض جس کا رداس 5 m ہے پانی سے بھرا ہوا ہے (شکل 6.121)۔ پانی کو حوض کے بالائی کنارے سے 4 m بلندی تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ پانی کی کثافت کو 9800 N m^{-3} لیں۔

سوال 6.294: نصف کروی حوض جس کا رداس 4 m ہے کو شکل 6.122 میں دکھایا گیا ہے جو بنزین²² سے بھرا ہوا ہے۔ بنزین کی کثافت 876 kg m^{-3} ہے۔ حوض کو خارجی ٹل، جو حوض کے بالائی سطح سے 1 m بلندی پر ہے، کے ذریعہ خارج کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: $4\,027\,512 \text{ J}$

²¹stainless steel
²²benzene

سوال 6.295: آپ کے گاؤں میں پانی کی فراہمی کے لئے 8 m قد کا ایک حوض تعمیر کیا جاتا ہے جس کا تلاء زمین سے 20 m بلندی پر ہے۔ زیر زمین پانی کی سطح 100 m نیچے ہے۔ پانی کو 10 cm رداس کے پائپ سے 3 kW پمپ کی مدد سے حوض کی تلاء میں تل کے ذریعہ بھرا جاتا ہے۔ خالی حوض کتنی دیر میں بھرے گا؟ (پائپ کو پانی سے بھرنے کے لئے درکار وقت کو نظر انداز کریں۔)

دیگر استعمال

سوال 6.296: مصنوعی سیارے کا خلائی مدار میں بھیجتا کشش ثقل کی قیمت زمین کے مرکز سے فاصلہ r پر منحصر ہوتا ہے۔ کیت m کے مصنوعی سیارے پر کشش ثقل درج ذیل ہو گا

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

جہاں زمین کی کیت $M = 5.975 \times 10^{24} \text{ kg}$ ہے جبکہ تجاذبی مستقل $G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ ہے۔ زمین کا رداس 6 370 000 m ہے۔ یوں زمین سے 35 780 km بلندی پر مدار تک 1000 kg مصنوعی سیارے کو منتقل کرنے کے لئے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$W = \int_{6370000}^{35780000} \frac{1000MG}{r^2} dr$$

حقیقت میں مصنوعی سیارہ ایک راکٹ پر نسب ہو گا جس کو یہاں نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس کھل کی قیمت تلاش کریں۔ کھل کا زیریں حد سطح زمین کو ظاہر کرتا ہے جہاں سے سیارہ روانہ ہو گا۔
جواب: $5.144 \times 10^{10} \text{ J}$

سوال 6.297: منفی برقیوں (الیکٹرانوں) کو ایک دوسرے کے قریب ہونے پر مجبور کرنا۔ دو منفی برقیے جن کے بیچ فاصلہ r ہو کے مابین درج ذیل قوت دفع پائی جاتی ہے جہاں $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ برقی مستقل ہے اور $e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ منفی برقیہ 23 کا بار 24 ہے۔

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ا. فرض کریں کہ ایک منفی برقیہ نقطہ $(1, 0)$ پر واقع ہے جبکہ دوسرے برقیے کو محور x پر نقطہ $(-1, 0)$ سے مبداء تک منتقل کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

ب. فرض کریں ایک برقیہ $(1, 0)$ اور دوسرا $(-1, 0)$ پر واقع ہیں۔ تیسرے برقیے کو $(5, 0)$ سے $(3, 0)$ تک منتقل کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

کام اور حرکی توانائی
سوال 6.298: اگر متغیر قوت $F(x)$ ایک جسم جس کی کمیت m ہو کو محور x پر x_1 سے x_2 تک منتقل کرتی ہے۔ جسم کی سمتی رفتار v کو $\frac{dx}{dt}$ لکھا جاسکتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = m \frac{dv}{dt}$ اور زنجیری قاعدہ

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

کو استعمال کرتے ہوئے دکھائی کہ اس جسم کو x_1 سے x_2 منتقل کرنے میں درج ذیل کام درکار ہو گا

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

جہاں x_1 پر جسم کی رفتار v_1 اور x_2 پر اس کی رفتار v_2 ہے۔ طبیعیات میں $\frac{1}{2}mv^2$ کو رفتار v پر چلنے والے جسم کی حرکی توانائی²⁵ کہتے ہیں۔ یوں کسی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اس جسم پر کیے گئے کام کے برابر ہو گی۔

سوال 6.299 تا سوال 6.305 میں سوال 6.298 کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال 6.299: ٹینس کا کیمبل
ایک کھلاڑی 58 g کمیت کی گیند کو زور سے مار کر 175 km h^{-1} کی رفتار تک پہنچاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال 6.300: ایک گیند جس کی کمیت 145 g ہو کو کھلاڑی 145 km h^{-1} کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟
جواب: 117.6 J

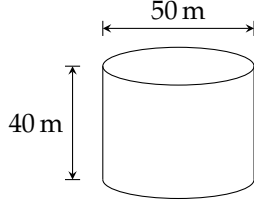
سوال 6.301: ایک سائیکل سوار جمع سائیکل کی کمیت 80 kg ہے۔ سائیکل حال سے 40 km کی رفتار تک پہنچنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

سوال 6.302: ایک گاڑی جس کی کمیت 880 kg ہے کی رفتار 40 km h^{-1} سے بڑھ کر 60 km h^{-1} کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟
جواب: 67 901 J

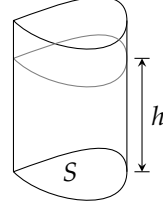
سوال 6.303: فٹ بال
ایک فٹ بال جس کی کمیت 430 g ہے کو لات سے مار کر 95 km h^{-1} کی رفتار تک پہنچایا جاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال 6.304: ایک کھلاڑی بازو کے زور سے 180 g کمیت کی گیند کو 90 km h^{-1} کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟
جواب: 56.25 J

سوال 6.305: ایک اینٹ جس کی کمیت 3.5 kg ہے 4 m بلند چھت سے گرتی ہے۔ زمین پر پہنچنے کے لمحے پر اس کی حرکی توانائی کتنی ہو گی؟



شکل 6.124: بیلی حوض برائے مثال 6.37



شکل 6.123: فشار سیال۔

6.9 فشار سیال اور قوت سیال

فشار p سے مراد وہ قوت ہے جو اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہو۔ یوں اگر رقبہ S پر قوت F عمل کرتی ہو تب فشار p درج ذیل ہو گا۔

$$p = \frac{F}{S} \quad (6.33)$$

مستقل گہرائی پر قوت سیال اور فشار سیال

شکل 6.123 میں ساکن سیال کو ایک برتن میں دکھایا گیا ہے جہاں تھلا کا رقبہ S ، سیال کی گہرائی h اور سیال کی کثافت ρ ہے۔ یوں سیال کا حجم Sh ، کثیت ρSh اور وزن $g\rho Sh$ ہو گا۔ سیال کے وزن کے برابر قوت $F = g\rho Sh$ رقبہ S پر عمل کرے گی۔ یوں اکائی رقبہ پر قوت $g\rho h$ ہو گی جس کو فشار p یاد دباؤ کہتے ہیں۔

$$p = \rho gh \quad (6.34)$$

فشار کی اکائی نیوٹن فی مربع میٹر Nm^{-2} ہے۔ آپ نے دیکھا کہ سیال کی قیمت پر برتن کی صورت کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مستقل گہرائی کے رقبہ S پر درج ذیل قوت پائی جائے گی۔

$$F = pS \quad (6.35)$$

سیال میں h گہرائی پر کسی بھی رخ فشار کی قیمت مساوات 6.34 دیتی ہے۔ یوں کسی بھی گہرائی پر افقی اور انتہائی دیواروں پر فشار کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔

مثال 6.37: ایک بیلنی حوض میں پانی کی گہرائی 40 m ہے جبکہ حوض کا رداس 25 m ہے (شکل 6.124)۔ حوض کے اطراف کی دیوار کی چلی 1 m پٹی پر فشار سیال اور قوت سیال کتنا ہو گا؟ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ لیں۔)

حل: اس ایک میٹر چوڑی پٹی کے نیچے کنارے پر فشار درج ذیل ہو گا۔

$$p = \rho gh = (1000)(9.8)(40) = 392000 \text{ N m}^{-2}$$

ایک میٹر پٹی کا رقبہ

$$S = 2\pi rh = 2\pi(25)(1) = 50\pi \text{ m}^2$$

ہے لہذا اس پر کل قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = pS = (392000)(50\pi) = 61575216.01 \text{ N}$$

□

اس مثال میں پٹی کے نیچے حصے کی گہرائی 40 m اور بالائی حصے کی گہرائی 39 m تھی لہذا ان پر فشار پر مختلف ہو گا۔ ہم نے اس حقیقت کو نظر انداز کیا۔ آئیں متغیر گہرائی کی صورت میں فشار پر غور کریں۔

متغیر گہرائی پر فشار

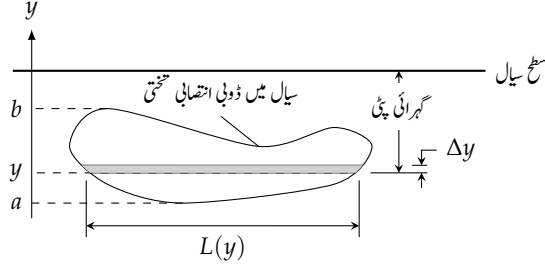
فرض کریں ہم کثافت ρ کی سیال میں ڈوبے ہوئے انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال جاننا چاہتے ہیں۔ ہم تختی کو xy مستوی میں خطہ $y = a$ تا $y = b$ تصور کرتے ہیں (شکل 6.125)۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہیں۔ ہم اس خطہ کو نقاط خانہ بندی پر محور y کے عمودی فرضی سطحوں سے ہر ایک افقی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ایک نمائندہ پٹی جو y سے $y + \Delta y$ تک ہو کی چوڑائی Δy ہو گی جبکہ اس پٹی کے چلی ضلع کی لمبائی $L(y)$ ہو گی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ متغیر y کا استمراری تفاعل ہے۔

نیچے سے اوپر چلتے ہوئے گہرائی کی تبدیلی سے پٹی پر فشار تبدیل ہوتا ہے۔ اب اگر پٹی کی چوڑائی بہت کم ہو تب فشار کی اس تبدیلی کو رد کیا جاسکتا ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ پٹی پر ہر جگہ فشار وہی ہو گا جو پٹی کی چلی کنارے پر ہے۔ یوں پٹی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{پٹی کے نیچے کنارے پر فشار}) \\ &= \rho g (\text{گہرائی پٹی}) L(y) \Delta y \end{aligned}$$

پورے تختی پر قوت تخمیناً

$$(6.36) \quad \sum_a^b \Delta F = \sum_a^b \rho g (\text{گہرائی پٹی}) L(y) \Delta y$$



شکل 6.125: ایک پتلی پٹی پر قوت سیال۔

ہو گی جو $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کا ریماں مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ ہم ان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تختی پر قوت کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: تکمیل برائے قوت سیال

فرض کریں محور y پر $y = a$ سے $y = b$ تک کا خط، سیال میں ڈوبے ہوئی ایک تختی کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ y پر اس تختی کی سطح پر افقی پٹی کی بائیں سے دائیں لمبائی $L(y)$ ہے۔ اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال درج ذیل ہو گا۔

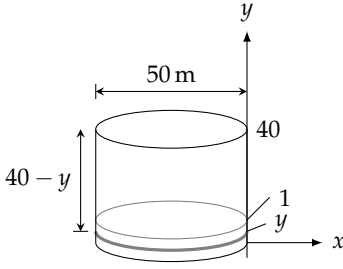
$$F = \int_a^b \rho g \cdot (\text{گہرائی پٹی}) \cdot L(y) dy \quad (6.37)$$

□

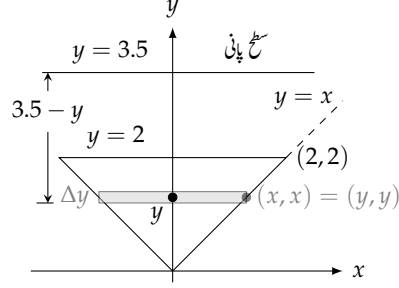
مثال 6.38: ایک مساوی الساقین مثلث تختی جس کا تالا 4 m اور قد 2 m ہے ایک پانی کے تالاب میں یوں ڈوبا ہوا ہے کہ اس کا تالا اوپر ہو۔ تالا پر پانی کی گہرائی 1.5 m ہے۔ تختی کے ایک طرف پر قوت تلاش کریں۔ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ لیں۔)

حل: ہم تختی کی چلی راس کو محدود کے مبداء پر تصور کرتے ہیں (شکل 6.126)۔ یوں سطح پانی $y = 3.5$ پر ہو گا جبکہ تختی کا بالائی کنارہ $y = 2$ پر ہو گا۔ تختی کا دایاں کنارہ $y = x$ اور بائیں کنارہ $y = -x$ ہو گا۔ یوں y پر پٹی کی لمبائی

$$L(y) = 2x = 2y$$



شکل 6.127: بیلی حوض برائے مثال 6.39



شکل 6.126: تختی پر قوت پانی (مثال 6.38)

اور پانی کی گہرائی $(3.5 - y)$ ہوگی۔ تختی کی ایک طرف پر پانی کی قوت درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned}
 F &= \int_a^b \rho g (\text{گہرائی پٹی}) L(y) dy \\
 &= \int_0^2 9800(3.5 - y)2y dy \\
 &= 9800 \int_0^2 (7y - 2y^2) dy \\
 &= 9800 \left[\frac{7y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \right]_0^2 = 84933 \text{ N}
 \end{aligned}$$

□

قوت سیال کا حصول

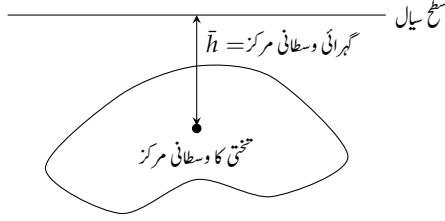
کسی بھی محدود نظام میں سیال میں ڈوبے ہوئے انتہائی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال حاصل کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. نمائندہ افقی پٹی کی لمبائی اور گہرائی کی عمومی کلیہ تلاش کریں۔

ب. انہیں آپس میں ضرب دے کر سیال کی کثافت اور ثقلی مستقل $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ سے ضرب دے کر مکمل کو موزوں حدود کے بیچ حل کریں۔

مثال 6.39: ہم اب مثال 6.37 میں بیلی حوض کی چلی ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت سیال کی بالکل ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

ہم حوض کی تلا کو $y = 0$ پر رکھتے ہیں (شکل 6.127) جبکہ محدود y کو اوپر کے رخ رکھتے ہیں۔ ہم y پر نمائندہ افقی پٹی کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔



شکل 6.128: قوت سیال اور وسطانی مرکز۔

ا. گہرائی پٹی: $40 - y$ ب. لمبائی پٹی: 50π

یوں ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^1 \rho g (\text{گہرائی}) (\text{لمبائی}) dy = \int_0^1 \rho g (40 - y) (50\pi) dy \\
 &= 9800(50\pi) \int_0^1 (40 - y) dy = 60\,805\,525.81 \text{ N}
 \end{aligned}$$

□

اس مثال میں حاصل قوت مثال 6.37 سے کچھ کم ہے جو متوقع تھا۔

قوت سیال اور وسطانی مرکز

اگر ہمیں سیال میں ڈوبے انتصابی تختی کا وسطانی مرکز معلوم ہو تب ہم اس تختی کے ایک طرف پر قوت سیال با آسانی معلوم کر سکتے ہیں (شکل 6.128)۔ مساوات 6.37 سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 F &= \int_a^b \rho g \times (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y) dy \\
 &= \rho g \int_a^b (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y) dy \\
 &= \rho g \times (\text{تختی کے خطے کا سطح سیال پر لکیر کے لحاظ سے معیار اثر}) \\
 &= \rho g \times (\text{تختی کا رقبہ}) \times (\text{تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی})
 \end{aligned}$$

قوت سیال اور وسطانی مرکز
سیال میں ڈوبی انتصابی تختی کے ایک طرف پر قوت سیال F معلوم کرنے کی لئے ρg ، تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی \bar{h} اور تختی کے رقبہ S کا حاصل ضرب لیں۔

$$F = \rho g \bar{h} S \quad (6.38)$$

مثال 6.40: ایک مثلث تختی پر قوت سیال کو مثال 6.38 میں تلاش کیا گیا۔ مساوات 6.38 استعمال کرتے ہوئے اس کو دوبارہ تلاش کریں۔

حل: مثلث کا وسطانی مرکز محدود y پر تلا سے راس کی جانب ایک تہائی فاصلہ پر پایا جاتا ہے (شکل 6.126) لہذا $\bar{h} = 1.5 + \frac{13}{6} = \frac{2}{3}$ ہو گا۔ مثلث کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$S = \frac{1}{2}(\text{قاعدہ})(\text{قد}) = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

یوں تختی کے ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گا۔

$$F = \rho g \bar{h} S = (1000 \times 9.8) \left(\frac{13}{6} \right) (4) = 84933 \text{ N}$$

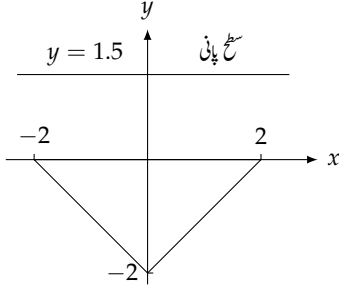
□

مساوات 6.38 کہتی ہے کہ سیال میں ڈوبی انتصابی تختی پر قوت سیال وہی ہو گا جو تختی کے پورے رقبے کو تختی کے وسطانی مرکز، جو \bar{h} گہرائی پر ہے، منتقل کرنے سے حاصل ہو گا۔ عموماً اشکال کا وسطانی مرکز جدول سے دیکھا جاسکتا ہے اور یوں مساوات 6.38 قوت سیال معلوم کرنے کا ایک آسان ذریعہ بنتا ہے۔ ظاہر ہے کہ وسطانی مرکز حاصل کرتے ہوئے کسی نے مساوات 6.37 کی مکمل کی طرح کا مکمل حل کرتے ہوئے وسطانی مرکز حاصل کیا ہو گا۔ چونکہ اس وقت آپ سیکھ رہے ہیں لہذا فی الحال قوت سیال دریافت کرنے کے لئے مسئلے کا خاکہ بنائیں اور مساوات 6.37 استعمال کریں۔

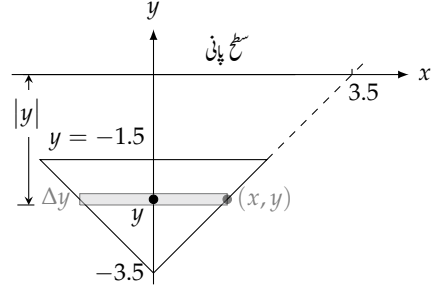
سوالات

سوال 6.306: حوض کی اندرونی سطح پر مثال 6.37 میں کل کتنی قوت سیال ہو گی؟
جواب: $1.23 \times 10^9 \text{ N}$

سوال 6.307: اگر مثال 6.37 میں حوض نصف بھرا ہو تب غلی ایک میٹر پٹی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟
جواب: $6.08 \times 10^7 \text{ N}$



شکل 6.130: مثلث تختی (سوال 6.309)



شکل 6.129: مثلث تختی (سوال 6.308)

سوال 6.308: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال 6.38 میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل 6.129 کا محدود استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال 6.309: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال 6.38 میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل 6.130 کا محدود استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال 6.310: اگر مثال 6.38 میں تختی کو مزید دو میٹر نیچے منتقل کیا جائے تب اس کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟
جواب: 163 333 N

سوال 6.311: اگر مثال 6.38 میں تختی کو اتنا اوپر منتقل کیا جائے کہ اس کا تلاء سطح پانی پر ہو تب اس کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟

سوال 6.312: مساوی الساقین مثلث تختی کو شکل 6.131 میں دکھایا گیا ہے جس کا تلاء سطح پانی سے 1 m نیچے ہے۔

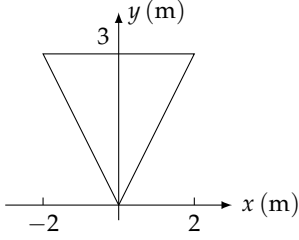
ا. تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. اگر صاف پانی کی بجائے سمندری پانی ہو تب قوت سیال کتنی ہو گی؟ سمندری پانی کی کثافت 1029 kg m^{-3} ہے۔

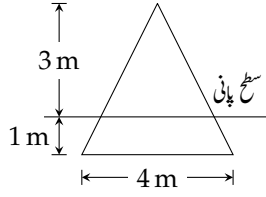
جواب: (i) 182 933 N، (ب) 188 238 N

سوال 6.313: اگر گزشتہ سوال میں تختی کو تلاء کے گرد آدھا پکڑ گھمایا جائے تب اس کا کچھ حصہ پانی سے باہر ہو گا (شکل 6.132)۔ اب تختی کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟

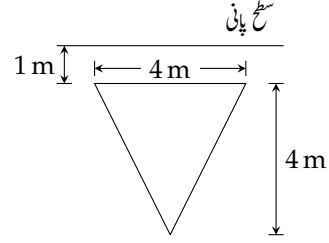
سوال 6.314: ایک حوض کے سر مساوی الساقین مثلث ہیں (شکل 6.133)۔



شکل 6.133: مثلث الساقین (سوال 6.314)



شکل 6.132: مثلث الساقین (سوال 6.313)



شکل 6.131: مثلث الساقین (سوال 6.312)

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کے سر پر قوت کو آدھا کرنے کے لئے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

ج. کیا حوض کی لمبائی سے حوض کے سر پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) 58 800 N، (ب) 61.9 cm، (ج) چونکہ فشار صرف گہرائی پر منحصر ہے لہذا لمبائی کا قوت سیال پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

سوال 6.315: پانی کے حوض کے سر چکور ہیں جہاں چکور کا ضلع 2 m ہے۔

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

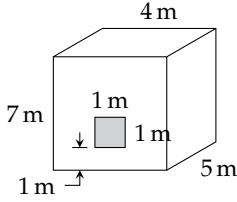
ب. حوض کے سر پر قوت کو آدھا کرنے کے لئے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

ج. کیا حوض کی لمبائی سے حوض کے سر پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

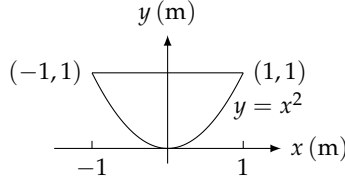
سوال 6.316: مچھلیاں دیکھنے کے لئے ایک مچھلی گھر کی دیوار میں 2 m چوڑا اور 1 m اونچا شیشہ نصب ہے۔ شیشے کا تلاء سطح پانی سے 1.25 m نیچے ہے۔ اس شیشے پر قوت پانی کتنی ہو گا۔ (سمندری پانی کی کثافت 1029 kg m^{-3} ہے۔) جواب: 15 126.3 N

سوال 6.317: مچھلیوں کے حوض کا تلاء $1.5 \times 0.5 \text{ m}$ اور اس کی گہرائی 0.75 m ہے۔ پانی کی سطح بالائی کنارے سے 5 cm نیچے ہے۔

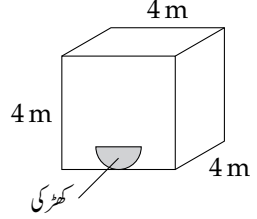
ا. حوض کے اطراف پر قوت سیال دریافت کریں۔



شکل 6.135: حوض میں چکور کھڑکی
(سوال 6.323)۔



(ب) قطع مکانی کھڑکی کی تفصیل۔



(i) حوض میں کھڑکی۔

شکل 6.134: حوض میں قطع مکانی کھڑکی (سوال 6.322)

ب. حوض کی تلا پر قوت سیال دریافت کریں۔

سوال 6.318: دودھ کے ڈبے کا تلا $10 \times 10 \text{ cm}$ اور اس کا قد 20 cm ہے۔ دودھ سے بھرے ہوئے ڈبے کی ایک طرف پر قوت سیال معلوم کریں۔ کثافت دودھ کو 1032 kg m^{-3} لیں۔
جواب: 20.2 N

سوال 6.319: زیتون کی تیل کے ڈبے کا تلا $14 \times 12 \text{ cm}$ اور قد 26.5 cm ہے۔ بھرے ہوئے ڈبے کی تلا اور ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔ زیتون کی تیل کی کثافت 930 kg m^{-3} لیں۔

سوال 6.320: ایک دائری تختی کا آدھا حصہ پانی میں انتصابی ڈوبا ہے۔ تختی کا رداس 0.25 m ہے۔ تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔
جواب: 102.08 N

سوال 6.321: دودھ کی فراہمی کے لئے ٹرک پر نسب 2 m قطر کا افقی بیلی حوض استعمال کیا جاتا ہے۔ آدھے بھرے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

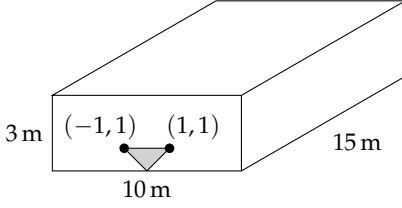
سوال 6.322: ایک مکعب حوض کی دیوار میں قطع مکانی کھڑکی دی گئی ہے جو $150\,000 \text{ N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل 6.134)۔ اس حوض میں $25\,000 \text{ kg m}^{-3}$ کثافت کا سیال بھرا جائے گا۔

ا. جب حوض میں سیال کی گہرائی 1.25 m ہو تب کھڑکی پر قوت سیال کتنا ہو گا؟

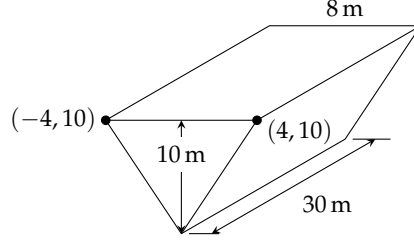
ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

جواب: (i) $22\,827 \text{ N}$ ، (ب) 2.6544 m

سوال 6.323: پانی کی ایک مکعب حوض کی دیوار میں $1 \times 1 \text{ m}$ چکور کھڑکی دی گئی ہے جو $40\,000 \text{ N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل 6.135)۔



شکل 6.137: پانی کا مستطیل تالاب (سوال 6.325)



شکل 6.136: حوض کے آخری سر تکونی ہیں (سوال 6.324)۔

ا. اگر حوض میں پانی کی گہرائی 3 m ہو تب کھڑکی پر قوت سیال کتنا ہو گا؟

ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

سوال 6.324: پانی کے حوض کو شکل 6.136 میں دکھایا گیا ہے۔ حوض کے آخری تکونی سر $1\,200\,000\text{ N}$ قوت برداشت کر سکتے ہیں۔ حوض میں پانی کی وہ حجم تلاش کریں جس پر حوض کے تکونی سر اپنی برداشت کی حد پر ہوں گے۔
جواب: 1133.77 m^3

سوال 6.325: ایک مستطیل تالاب شکل 6.137 میں دکھایا گیا ہے جس کی ایک طرف میں تکونی کھڑکی دی گئی ہے جو $62\,000\text{ N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے۔ اس خالی تالاب میں $10\text{ m}^3\text{ h}^{-1}$ سے پانی بھرا جا رہا ہے۔ تکونی کھڑکی کتنی دیر میں اپنی برداشت کے حد پر ہو گی؟

سوال 6.326: ایک انتصابی تختی جس کا قد a اور چوڑائی b ہے کو کثافت ρ کے سیال میں ڈبو یا جاتا ہے۔ تختی کا بالائی کنارہ سطح سیال پر ہے۔ تختی کے کے لیے کنارے پر اوسط فشار سیال کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.327: دکھائیں کہ سوال 6.326 میں تختی کی ایک طرف پر قوت کی مقدار سوال 6.326 میں حاصل اوسط فشار ضرب تختی کا رقبہ ہو گا۔

6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال

اس باب میں ریمان مجموعہ کے استعمال سے ہم نے چیزوں کا حساب کرنا سیکھا۔ یہ عمل درج ذیل تین اقدام پر مشتمل ہے۔

ا. مطلوبہ چیز کو ایک یا ایک سے زائد تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے جو بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری ہوں۔

ب. وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے ہر ذیلی وقفہ میں ایک نقطہ c_k منتخب کیا جاتا ہے۔ k ویں ذیلی وقفہ کی لمبائی Δx_k ہوگی۔

مطلوبہ چیز کی تخمینی قیمت کو مجموعہ کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

اس مجموعہ کی شناخت بطور وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کی ریمان مجموعہ کی جاتی ہے۔

ج. خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے ریمان مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔

ریمان مجموعہ کا حد قطعی مکمل ہو گا۔

قطعی مکمل استعمال کرتے ہوئے چیز کا حساب لگایا جاتا ہے۔

درج بالا اقدام سے لکیر کی لمبائی، خطے کا رقبہ، اجسام کا حجم، کام، وغیرہ کا حساب ممکن ہے۔

حقیقت میں انجینئری، حیاتیات، علم کیمیا، اقتصادیات، ارضیات، طب، اور دیگر شعبوں میں ہزاروں کی تعداد میں چیزوں کو ان اقدام سے حل کیا جا سکتا ہے۔

اس حصہ میں ان اقدام پر دوبارہ غور کیا جائے گا اور کئی نئے مکمل متعارف کیے جائیں گے جو ان اقدام سے پیدا ہوتے ہیں۔

فاصلہ بالمقابل ہٹاؤ

اگر کسی محدود لکیر پر ایک جسم کا مقام تفاعل $s(t)$ دیتا ہو اور یہ جسم ایک ہی سمت میں حرکت کرتا ہو تب $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کے سمتی رفتار تفاعل $v(t)$ کا مکمل اس دورانیے میں طے شدہ فاصلہ دے گا۔ اگر جسم اس دورانیے میں سمت تبدیل کرتا ہو تب طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لئے ہمیں جسم کی رفتار $|v(t)|$ کا مکمل لینا ہو گا۔ جسم کی سمتی رفتار کا مکمل جسم کا ہٹاؤ $s(b) - s(a)$ دے گا جو اس کی ابتدائی اور اختتامی مقامات کے بیچ فاصلہ ہے۔

یہ دیکھنے کے لئے ہم وقتی وقفہ $a \leq t \leq b$ کی خانہ بندی کرتے ہیں جہاں k ویں وقفے کی لمبائی Δt_k ہے۔ اگر Δt_k بہت کم ہو تب دورانیہ t_{k-1} تا t_k جسم کی سمتی رفتار $v(t)$ میں تبدیلی قابل نظر انداز ہوگی لہذا اس ذیلی وقفے کی دائیں سر پر جسم کی سمتی رفتار $v(t_k)$ کو اس ذیلی وقفہ پر جسم کی سمتی رفتار تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں k ویں ذیلی وقفہ کے دوران جسم کے مقام میں تبدیلی درج ذیل ہوگی۔

$$v(t_k) \Delta t_k$$

اگر $v(t_k)$ مثبت ہو تب یہ تبدیلی مثبت ہوگی اور اگر $v(t_k)$ منفی ہو تب یہ تبدیلی منفی ہوگی۔ دونوں صورتوں میں k ویں ذیلی وقفہ میں جسم

$$|v(t_k)| \Delta t_k$$

فاصلہ طے کرے گا۔ یوں پورے وقفے پر جس کل درج ذیل فاصلہ طے کرے گا۔

$$(6.39) \quad \sum_{k=1}^n |v(t_k)| \Delta t_k$$

مساوات 6.39 میں مجموعہ، وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل رفتار $|v(t)|$ کا رییمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ تخمینہ مجموعہ بہتر نتیجہ دے گا۔ یوں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ میں جسم کا طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لئے درج ذیل مکمل استعمال کیا جاسکتا ہے۔

$$(6.40) \quad \int_a^b |v(t)| dt = \text{طے شدہ فاصلہ}$$

یہ ریاضیاتی نمونہ ہر بار بالکل درست فاصلہ دیتا ہے۔

اگر ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقتی دورانیے کی اختتام پر ابتدائی مقام سے جسم کتنا دور ہو گا تب ہم $v(t)$ کا مکمل ناکہ $|v(t)|$ کا مکمل لیں گے۔

آئیں دیکھیں ایسا کیوں ہو گا۔ فرض کریں کی تفاعل $s(t)$ جسم کا مقام دیتا ہے اور F تفاعل v کا الٹ تفرق ہے۔ تب

$$s(t) = F(t) + C$$

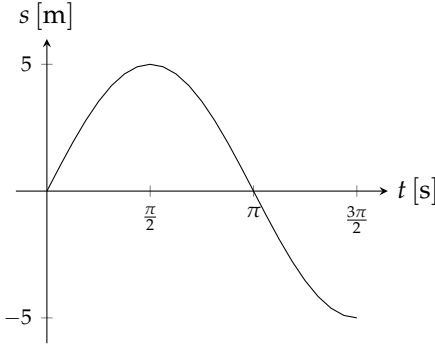
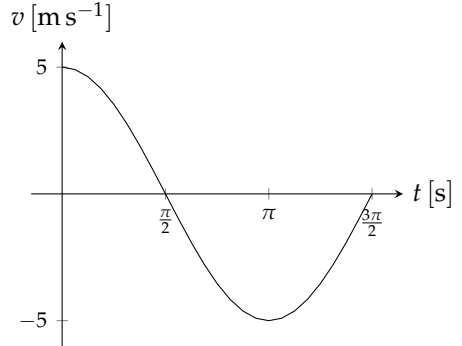
ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ یوں لمحہ $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کا ہٹاؤ

$$s(b) - s(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b v(t) dt$$

ہو گا یعنی:

$$(6.41) \quad \int_a^b v(t) dt = \text{ہٹاؤ}$$

مثال 6.41: ایک کثیر پر لمحہ $t = 0$ سے لمحہ $t = \frac{3\pi}{2}$ تک ایک جسم کی رفتار $v(t) = 5 \cos t \text{ ms}^{-1}$ ہے۔ یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟ اس کا کل ہٹاؤ کتنا ہو گا؟

(ب) ابتدائی نقطہ $s(0)$ سے جسم کا ہٹاؤ۔

(i) سمتی رفتار تقاقل۔

شکل 6.138: سمتی رفتار تقاقل اور ہٹاؤ (مثال 6.41)

حل:

$$\begin{aligned}
 \text{رفتار لا مکمل فاصلہ ہو گا} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |5 \cos t| dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-5 \cos t) dt \\
 &= 5 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 5 \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
 &= 5(1 - 0) - 5(-1 - 1) = 5 + 10 = 15 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{سمتی رفتار کا مکمل ہٹاؤ ہو گا} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 5 \cos t dt \\
 &= 5 \sin t \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = 5(-1) - 5(0) = -5 \text{ m}
 \end{aligned}$$

اس دورانیے میں جسم 5 m آگے اور 10 m پیچھے سفر کرتا ہے۔ یوں یہ 15 m فاصلے طے کرتا ہے جبکہ اس کا ہٹاؤ -5 m ہو گا (شکل 6.138)۔

□

قاعدہ دولس

آپ جانتے ہیں کہ چننے کے بعد سیب کا ذائقہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں شکر وقت کے ساتھ نشاستہ میں تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں نشاستہ کی مقدار معلوم کرنے کے لئے ہم سیب کا ایک باریک کتلے کو خوردبین میں دیکھتے ہیں۔ نشاستہ کے ہر دانہ کا سطح عمودی تراش خوردبین

میں صاف نظر آتا ہے لہذا سکتے کی سطح میں نشاستہ کے رقبہ عمودی تراش کا تناسب معلوم کیا جاسکتا ہے۔ یہ دو بعدی تناسب سبب میں نشاستہ کے تین بعدی تناسب کے برابر ہو گا۔ دو بعدی اور تین بعدی تناسب کی یکسانیت اوسط قیمت کی تصور پر مبنی ہے۔

فرض کریں ہم کسی ٹھوس جسم میں دانہ دار مادہ کی تناسب جاننا چاہتے ہیں۔ ہم ٹھوس جسم سے موزوں نمونہ حاصل کرتے ہیں جس کو کاٹ کر ایک مکعب حاصل کیا جاتا ہے۔ اس مکعب کا ضلع L ہے۔ اس مکعب کو شکل 6.139 میں دکھایا گیا ہے جہاں مکعب کا ضلع x محور پر ہے۔ ہم وقفہ $[0, L]$ کے عمودی سطحوں سے اس مکعب کو سکتوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں x پر دانہ دار مادے کے رقبہ کا تناسب $r(x)$ ہے۔ فرض کریں کہ $r(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہے۔

اب وقفہ $[0, L]$ کی خانہ بندی کریں۔ نقطہ خانہ بندی پر x محور کے عمودی سطحوں سے مکعب کو سکتوں میں تقسیم کریں۔ k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δx_k ہو گی جو نقطہ x_{k-1} اور نقطہ x_k پر موجود سطحوں کے بیچ فاصلہ ہو ہے۔ اگر یہ سطحیں کافی قریب ہوں تب یہ دانوں کو بیانی شکل میں کاٹیں گے۔ ان بیانیوں کا قاعدہ x_k پر ہو گا۔ ان سطحوں کے بیچ دانہ دار مادہ کی صحیح تناسب وہی ہو گی جو x_k پر سطح میں دانہ دار مادہ کی سطحی تناسب ہے جو ان بیانیوں کے قاعدہ کے برابر ہے جو از خود تقریباً $r(x)$ ہو گا۔ یوں دو قریبی سطحوں کے بیچ دانہ دار مادہ کی مقدار درج ذیل ہو گی۔

$$(کٹے کا حجم) \times (تناسب) = r(x)L^2\Delta x_k$$

پورے مکعب میں دانہ دار مادہ کی مقدار

$$\sum_{k=1}^n r(x)L^2\Delta x_k$$

ہو گی جو وقفہ $[0, L]$ پر تفاعل $r(x)L^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب پہنچانے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا لہذا درج ذیل مکمل، جو ریمان مجموعہ کی حد کو ظاہر کرتا ہے، مکعب میں دانہ دار مادہ کی مقدار دے گا۔

$$\int_0^L r(x)L^2 dx$$

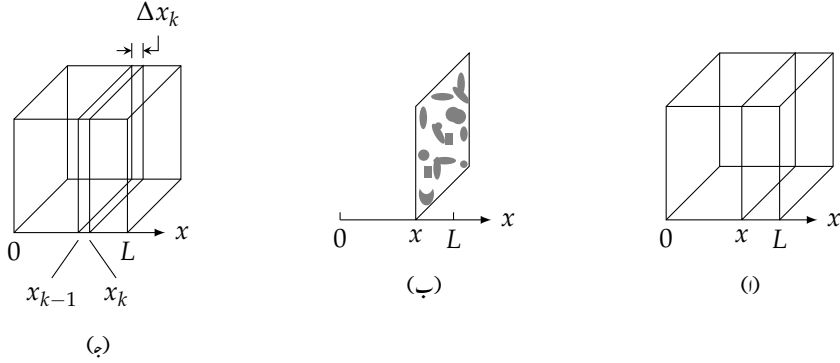
اس مقدار کو مکعب کے حجم L^3 سے تقسیم کرنے سے مکعب میں دانہ دار مادہ کی تناسب حاصل ہو گی۔ اگر ہم نے موزوں نمونی مکعب منتخب کیا ہو تب پورے ٹھوس جسم میں دانہ دار مادہ کا تناسب وہی ہو گا جو اس نمونی مکعب میں ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\text{مکعب میں دانہ دار مادہ کا تناسب} = \text{ٹھوس جسم میں دانہ دار مادہ کا تناسب}$$

$$= \frac{\int_0^L r(x)L^2 dx}{L^3}$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L r(x) dx$$

نمائندہ سطح عمودی تراش میں دانہ دار مادے کا سطحی تناسب



شکل 6.139: قاعدہ دوسل کے مراحل۔

یہ قاعدہ دولس²⁸ ہے جسے فرانسیسی ماہر ارضیات اشلے ارنسٹ دولس [1817 – 1881] نے دریافت کیا۔ یوں وقفہ $[0, L]$ پر $r(x)$ کی اوسط قیمت \bar{r} سے ٹھوس جسم میں دانہ دار مادے کا تناسب حاصل ہو گا۔ حقیقت میں کئی رقبہ عمودی تراش پر \bar{r} حاصل کر کے ان کی اوسط لی جاتی ہے۔

جناب دولس پتھر میں دانہ دار مادہ کی تناسب میں دلچسپی رکھتے تھے۔ وہ نمونی پتھر کی ایک سطح کو اچھی طرح چمکدار بنا کر سطح کے برابر مومی کاغذ کو چمکیلی سطح پر رکھ کر دانہ دار خطوں کی نشاندہی کرتے۔ کاغذ کا وزن کرنے کے بعد، دانہ دار خطوں کو کاغذ سے کاٹ کر کاغذ کا وزن دوبارہ کرتے۔ یوں دانہ دار خطوں کے رقبہ کا تناسب حاصل کیا جاتا۔ یہ ترکیب آج بھی تیل کی تلاش میں استعمال کیا جاتا ہے۔

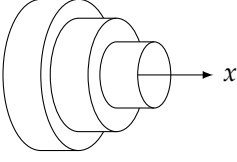
ناکارہ مکمل، ناکارہ نمونہ کشی

بعض اوقات ریمان مجموعہ سے حاصل مکمل ہمارے کسی کام کے نہیں ہوتا ہے۔ اس کا دار و مدار مسئلے کی نمونہ کشی پر منحصر ہے۔ بعض طریقہ کار موزوں اور بعض غیر موزوں ہوتے ہیں۔ انہیں ایک غیر موزوں ریمان مجموعہ کی مثال دیکھیں۔

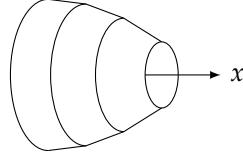
ہم شکل 6.140 میں سطحی رقبہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ مخروطی نکلیاں لینے سے شکل 6.140-1 حاصل ہوتا ہے جس سے سطحی رقبے کا کلیہ

$$(6.42) \quad S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ ہر بار بالکل درست نتیجہ دیتا ہے جو دیگر ذرائع سے حاصل معلومات کے عین مطابق ہوتا ہے۔



(ب) سطحی رقبہ بیلی پیوں سے حاصل نہیں ہوتا ہے۔



(i) سطحی رقبہ مخروطی پیوں سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.140: مخروط پٹی لینے سے کارآمد مکمل جبکہ بیلی پٹی سے غیر کارآمد مکمل حاصل ہو گا۔

آئیں شکل 6.140-ب کی طرح بیلی پیوں لے کر ریمان مجموعہ حاصل کر کے دیکھیں۔ یہ ریمان مجموعہ بھی مرکب ہوتا ہے جو درج ذیل نسبتاً آسان مکمل دیتا ہے۔

$$(6.43) \quad S = \int_a^b 2\pi f(x) dx$$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ حجم کی تلاش میں ہم نے بیلی پیوں استعمال کیں لہذا یہاں بھی ان کا استعمال درست ہو گا۔ حقیقت میں مساوات 6.43 کوئی پیش گوئی نہیں کرتا ہے اور نا ہی اس سے کبھی درست نتائج حاصل ہوتا ہیں جو دیگر تراکیب سے حاصل جوابات کے ساتھ مشابہت رکھتے ہوں۔ نمونہ کشی کے دوران موازنہ کے قدم پر یہ کلیہ ناکام ثابت ہوتا ہے۔

یاد رہے کہ اگر آپ ایک بہت اچھا نظر آنے والے مکمل حاصل کرنے میں کامیاب ہوں، اس کا یہ مطلب نہیں ہے کہ حاصل مکمل درست نتائج بھی دے گا۔ آپ کو مکمل کے نتائج کو پرکھنا بھی ہو گا۔

مسئلہ پاپس

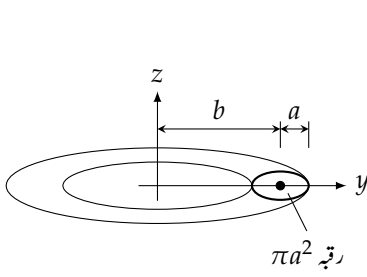
وسطانی مراکز کا سطح طواف کے رقبہ اور جسم طواف کے حجم کے ساتھ تعلق کو مسئلہ پاپس²⁹ پیش کرتا ہے³⁰۔

مسئلہ 6.1: مسئلہ پاپس برائے حجم اگر کسی مستوی خطہ کو سطح مستوی میں لکیر کے گرد گھمایا جائے جہاں خطے کو لکیر قطع نہ کرتی ہو تب جسم طواف کا حجم خطے کا رقبہ ضرب وہ فاصلہ جو ایک چکر کے دوران وسطانی نقطہ طے کرتا ہو کے برابر ہو گا۔ اگر خطے کا رقبہ S اور وسطانی نقطے کا محور سے فاصلہ ρ ہو تب جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

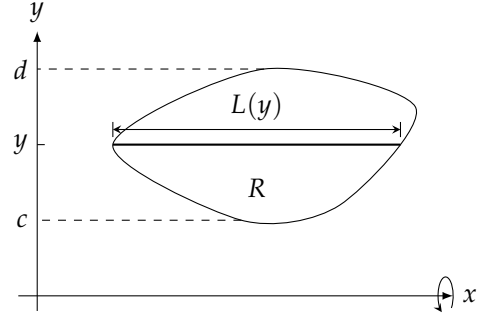
$$(6.44) \quad H = 2\pi\rho S$$

²⁹Pappus's theorem

³⁰اسکندریا کا رہائشی قدیم یونانی ریاضی دان۔ مسائل پاپس تقریباً 1700 سال قدیم ہیں۔



شکل 6.142: اندر سہ (مثال 6.42)



شکل 6.141: خطہ R کو ایک بار محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

ثبوت: ہم محور طواف کو محور x اور خطہ R کو ربع اول میں لیتے ہیں۔ ہم y پر، محور y کے عمودی، خطہ کے عمودی تراش کی لمبائی کو $L(y)$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 6.141)۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ استراری ہے۔ اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

ہم نکلی خول کی ترکیب سے اس جسم طواف کا حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$(6.45) \quad H = \int_c^d 2\pi (\text{رداس خول}) (\text{قد خول}) dy = 2\pi \int_c^d yL(y) dy$$

خطہ R کے وسطانی مرکز کا y محدد

$$\int_c^d yL(y) dy = S\bar{y}$$

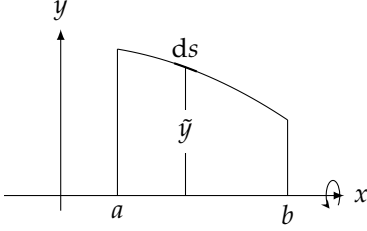
ہو گا جس کو مساوات 6.45 کے آخری کمل میں پر کرنے سے $H = 2\pi\bar{y}S$ ملتا ہے۔ اس میں رداس \bar{y} کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $H = 2\pi\rho S$ حاصل ہوتا ہے۔

□

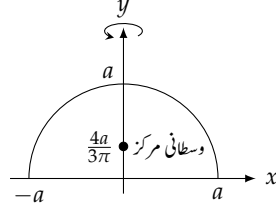
مثال 6.42: رداس a کے دائری قرص کو محور کے گرد گھما کر اندر سہ³¹ پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.142)۔ قرص کے مرکز اور محور کے بیچ فاصلہ $b \geq a$ ہے۔ اس اندر سہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2$$

³¹torus



شکل 6.144: مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ (مسئلہ 6.2)



شکل 6.143: نصف کرہ کا وسطانی مرکز (مثال 6.43)

□

مثال 6.43: نصف کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

حل: ربع اول میں محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھمانے سے نصف کرہ حاصل ہوتا ہے (شکل 6.143)۔ تشکیلی کی بنا وسطانی مرکز کا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ مساوات 6.44 میں ρ کی جگہ \bar{y} لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{H}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3}{2\pi(\frac{1}{4}\pi a^2)} = \frac{4a}{3\pi}$$

□

مسئلہ 6.2: مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ

اگر ایک ہموار مستوی تختی کے قوس کو ایسی لکیر کے گرد ایک بار گھمایا جائے جو اس قوس کو قطع نہ کرتی ہو تب قوس کی لمبائی ضرب ایک چکر کے دوران قوس کی وسطانی مرکز کا طے شدہ فاصلہ، طواف قوس سے پیدا سطح کا رقبہ ہو گا۔ اگر محور طواف سے وسطانی مرکز کا فاصلہ ρ اور قوس کی لمبائی L ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(6.46) \quad S = 2\pi\rho L$$

اس مسئلے کی ثبوت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ محور طواف کو محور x سے ظاہر کیا جاسکتا ہے اور قوس کو متغیر x کو استراری تفاعل تصور کیا جاسکتا ہے۔

ثبوت: ہم محور x کو محور طواف لیتے ہیں اور ربع اول میں $x = a$ تا $x = b$ تک قوس پایا جاتا ہے۔ اس قوس کے طواف سے درج ذیل رقبہ حاصل ہو گا۔

$$(6.47) \quad S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y \, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y \, ds$$

قوس کے وسطانی مرکز کا y محدود

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \bar{y} \, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y \, ds}{L}$$

ہو گا جس کو مساوات 6.47 کے آخری نکل میں پر کرنے سے $S = 2\pi \bar{y} L$ ملتا ہے۔ رداس \bar{y} کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $S = 2\pi \rho L$ حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 6.44: اندر سے کا سطحی رقبہ (مثال 6.42 میں) درج ذیل ہو گا۔

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba$$

□

سوالات

فاصلہ اور ہٹاؤ
سوال 6.328 تا سوال 6.335 میں ایک جسم محدودی کثیر پر سمتی رفتار $v(t)$ سے حرکت کرتا ہے۔ (ا) سمتی رفتار کو ترسیم کر کے دیکھیں کہیں یہ مثبت اور کہاں منفی ہے۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے دورانیے میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ج) جسم کا ہٹاؤ بھی تلاش کریں۔

سوال 6.328: $v(t) = 5 \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
جواب: (ب) 20 m، (ج) 0 m

سوال 6.329: $v(t) = \sin \pi t, \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال 6.330: $v(t) = 6 \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: (ب) 6 m، (ج) 2 m

سوال 6.331: $v(t) = 4 \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

سوال 6.332: $v(t) = 49 - 9.8t, \quad 0 \leq t \leq 10$
جواب: (ب) 245 m، (ج) 0 m

سوال 6.333: $v(t) = 8 - 1.6t, \quad 0 \leq t \leq 10$

سوال 6.334: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \leq t \leq 2$
جواب: (ب) 6 m، (ج) 4 m

سوال 6.335: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال 6.336: تقابل $s = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے جہاں $t \geq 0$ ہے۔ (t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ب. کب جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ج. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام معلوم کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہوگا؟

ه. تقابل s بالقابل t ترسیم کریں اور مقام جسم کا ترسیم کے ساتھ تعلق پر تبصرہ کریں۔

جواب: (ب) $2 < t < 4$ ، (ج) 6 m، (د) $\frac{22}{3}$ m

سوال 6.337: تقابل $s = -t^3 + 6t^2 - 9t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے جہاں $t \geq 0$ ہے۔ (t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

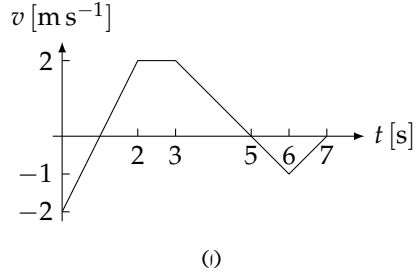
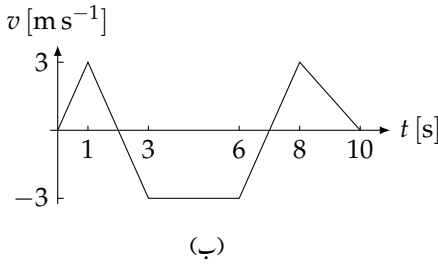
ب. کب جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ج. کیا جسم کبھی بھی مبدا کے کے دائیں جانب ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

ه. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہوگا؟

و. تقابل s بالقابل t ترسیم کریں اور مقام جسم کا ترسیم کے ساتھ تعلق پر تبصرہ کریں۔



شکل 6.145: سمتی رفتار (سوال 6.338)

سوال 6.338: دو اجسام محدودی کبیر پر حرکت کرتے ہیں۔ ان اجسام کی سمتی رفتاروں کو شکل 6.145 میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے وقفے کے لئے اجسام کتنا فاصلہ طے کرتے ہیں اور ان کا ہٹاؤ کتنا ہو گا؟
جواب: (i) کل فاصلہ 7 ، ہٹاؤ 3 ؛ (ب) کل فاصلہ 19.5 ، ہٹاؤ -4.5

سوال 6.339: ایک نمونی ریل گاڑی کی 10 سیکنڈوں کے لئے پٹری پر آگے پیچھے حرکت درج ذیل ہے۔ قاعدہ سمن سے کل فاصلہ اور ہٹاؤ تلاش کریں۔

سمتی رفتار	وقت	سمتی رفتار	وقت
-11	6	0	0
-6	7	12	1
2	8	22	2
6	9	10	3
0	10	-5	4
		-13	5

مسطحی رقبہ کی نمونہ کشی
سوال 6.340: کبیر $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کا رقبہ

$$\text{سطح طواف} = \frac{1}{2}(\text{ترچھا قد})(\text{ملا کا محیط}) = \frac{1}{2}(2\pi)(2) = 2\pi$$

ہونا چاہیے۔ مساوات 6.43 میں $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ پر کرنے سے کیا حاصل ہوتا ہے؟
جواب: $\sqrt{3}\pi$

سوال 6.341: وہ واحد شکل جس کے لئے مساوات 6.43 درست نتائج دیتا ہے بیان ہے۔ کبیر $y = r$, $0 \leq x \leq h$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کریں۔ دکھائیں کہ مساوات 6.43 سے اس سطح طواف کا رقبہ $S = 2\pi rh$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.342: ہر وہ جسم جو مائع میں تیرتا ہو اپنی کمیت کے برابر مائع کی جگہ لیتا ہے (اصول آرشیمیڈی)۔ یوں ہٹائے گئے مائع کی کمیت معلوم کر کے اس جسم کی کمیت معلوم کی جاسکتی ہے۔ ایک کشتی کی کمیت جاننے کی خاطر ہم خط آب کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کر کے نقطہ خانہ بندی پر کشتی کے ڈوبے ہوئے حصے کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ معلوم کرتے ہیں۔ اس کے بعد قاعدہ سمسن استعمال کر کے $S(x)$ کے مکمل کی تخمین تلاش کرتے ہیں۔ نقاط خانہ بندی پر ڈوبے ہوئے رقبے $S(x)$ درج ذیل ہیں جہاں نقطوں کے بیچ فاصلہ 1 m ہے اور رقبہ کی اکائی m^2 ہے۔

نقطہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
رقبہ	0	1.07	3.84	7.82	12.20	15.18	16.14	14.00	9.21	3.24	0

ا. ہٹائے گئے پانی کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ کشتی کتنی کمیت کا پانی بناتی ہے؟ سمندری پانی کی کثافت 1029 kg m^{-3} ہے۔

جواب: (i) 82.67 m^3 ، (ب) 85071 kg

مسئلہ پاپس

سوال 6.343: ایک چکور خطہ کے راس $(0, 2)$ ، $(2, 0)$ ، $(4, 2)$ اور $(2, 4)$ ہیں۔ اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر ایک ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم اور سطحی رقبہ تلاش کریں۔

جواب: $S = 32\sqrt{2}\pi$ ، $H = 32\pi$

سوال 6.344: کلیئر $2x + y = 6$ اور محدود کلیئروں کے بیچ ٹکونی خطہ کو کلیئر $x = 5$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم مسئلہ پاپس کی مدد سے معلوم کریں۔ (جیسا آپ صفحہ 714 پر سوال 6.256 میں دیکھ چکے ہیں، ٹکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع ٹکون کا وسطانی مرکز ہو گا اور یہ قاعدہ کی وسطی نقطہ سے مخالف راس کی جانب کلیئر پر ایک تہائی فاصلہ پر ہو گا۔)

سوال 6.345: دائرہ $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ کو محور y کے گرد گھما کر اندر سے پیدا کیا جاتا ہے۔ اس اندر سے کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $4\pi^2$

سوال 6.346: مسئلہ پاپس سے عمودی دائرہ مخروط کا سطحی رقبہ پہلو تلاش کریں۔

سوال 6.347: راس a کے کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ پاپس سے نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز معلوم کریں۔
جواب: $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$ ، $\bar{x} = 0$

سوال 6.348: آپ نے سوال 6.347 میں دریافت کیا کہ نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز $(0, \frac{2a}{\pi})$ ہے۔ اس نصف دائرہ کو کلیئر $y = a$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.349: محور x اور $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطہ R کا رقبہ $\frac{1}{2}\pi ab$ ہے۔ خطہ R کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ہے۔ خطہ R کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ a پر منحصر نہیں ہو گا۔
جواب: $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$ ، $\bar{x} = 0$

سوال 6.350: محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز $(0, \frac{4a}{3\pi})$ ہے۔ اس خطہ کو لکیر $y = -a$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.351: لکیر $y = x - a$ کے گرد سوال 6.350 کا خطہ گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $\frac{\sqrt{2}\pi a^3(4+3\pi)}{6}$

سوال 6.352: نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز $(0, \frac{2a}{\pi})$ ہے۔ اس نصف دائرہ کو لکیر $y = x - a$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.353: محور x کے لحاظ سے مثال 6.43 کے نصف دائری خطہ کا معیار اثر تلاش کریں۔ اگر آپ پہلے سے جانتے ہوئے معلومات استعمال کریں تب آپ کو مکمل لینے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔
جواب: $\frac{2a^3}{3}$

باب 7

ماورائی تفاعل

وہ تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل روپ کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو الجبرائی¹ کہلاتا ہے۔

$$P_n y^n + \dots + P_1 y + P_0 = 0$$

اس مساوات میں تمام P متغیر x کے کثیر رکنی ہیں جہاں کثیر رکنیوں کے عددی سرناطقی ہیں۔ یوں $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ الجبرائی ہے چونکہ یہ مساوات $(x+1)y^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے جس میں $P_2 = x+1$ ، $P_1 = 0$ اور $P_0 = -1$ ہیں۔ کثیر رکنی اور ناطق عددی سروالے ناطق تفاعل، الجبرائی ہوں گے۔ اسی طرح الجبرائی تفاعل کے مجموعے، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، ناطق طاقت اور ناطق جذر بھی الجبرائی ہوں گے۔

وہ تفاعل جو الجبرائی نہیں ہوں ماورائی² کہلاتے ہیں۔ چھ بنیادی تکنیکی تفاعل \sin ، \cos ، \tan ، \csc ، \sec ، \cot اور ان کے الٹ ماورائی ہیں۔ اسی طرح قوت نمائی تفاعل اور لوگار تھمی تفاعل بھی ماورائی تفاعل ہیں۔

وہ اعداد جو ناطق عددی سروالے کثیر رکنی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں الجبرائی کہلاتے ہیں۔ چونکہ $x+2=0$ مساوات x کو مطمئن کرتا ہے لہذا -2 الجبرائی عدد ہے۔ اسی طرح $x^2-3=0$ کو $\sqrt{3}$ مطمئن کرتا ہے لہذا $\sqrt{3}$ بھی الجبرائی عدد ہے۔ وہ اعداد جو الجبرائی نہ ہوں ماورائی کہلاتے ہیں۔ e اور π ماورائی اعداد ہیں۔

ریاضیات میں بہت سے تفاعل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔ غالباً سب سے زیادہ جانی پہچانی الٹ تفاعل کی جوڑی $\ln x$ اور e^x ہے۔ موزوں وقفہ پر پابند تکنیکی تفاعل کے اہم الٹ پائے جاتے ہیں۔ پابند وقفہ پر تفاعل کو پابند شدہ تفاعل کہتے ہیں۔ اسی طرح لوگار تھمی اور قوت نمائی تفاعل کے دیگر الٹ جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ ہذلولی تفاعل اور ان کے الٹ تفاعل کا استعمال آویزاں رسی، منتقلی حرکی توانائی، اور ہوا میں گرتے ہوئے جسم پر قوت رگڑ کے مسائل میں کام آتے ہیں۔ اس باب میں ان تمام تفاعل پر غور کیا جائے گا۔ ان مسئلوں کا بھی ذکر کیا جائے گا جنہیں یہ تفاعل حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

algebraic¹
transcendental²

7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

اس حصہ میں ہم الٹ تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں اور ان کی کلیات، ترسیمات، اور الٹ جوڑیوں کے تفرق پر غور کرتے ہیں۔

ایک ایک تفاعل

تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو اپنی دائرہ کار کے ہر نقطہ کو اپنی سعت میں ایک قیمت مختص کرتا ہو۔ بعض تفاعل ایک ہی قیمت کو ایک سے زیادہ نقطوں کے لئے مختص کرتے ہیں۔ یوں -1 کا مربع اور 1 کا مربع 1 ہے؛ اسی طرح $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ اس کے برعکس دیگر تفاعل کسی ایک قیمت کو کبھی بھی دو بار مختص نہیں کرتے ہیں۔ مختلف اعداد کے جذر المربع اور جذر المکعب ہر صورت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔ ایسا تفاعل جس کے انفرادی نقطوں پر منفرد قیمت ہو کو ایک ایک تفاعل³ کہتے ہیں۔

تعریف: دائرہ کار D پر تفاعل $f(x)$ تب ایک ایک ہو گا جب $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $f(x_1) \neq f(x_2)$ ہو۔

□

مثال 7.1: چونکہ کسی بھی غیر منفی اعداد کے لئے $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ ہے لہذا $f(x) = \sqrt{x}$ غیر منفی اعداد کے کسی بھی دائرہ کار پر یہ ایک ایک تفاعل ہے۔

□

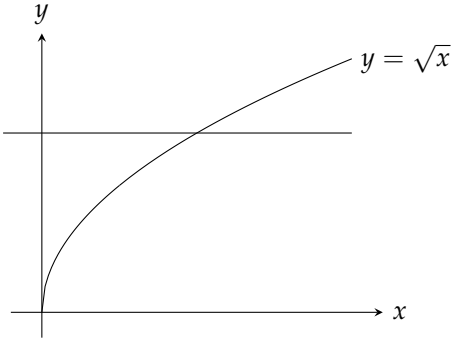
مثال 7.2: چونکہ $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ ہے لہذا وقفہ $[0, \pi]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل نہیں ہے۔ اس کے برعکس چونکہ ربع اول میں تمام زاویوں کے سائن مختلف ہیں لہذا وقفہ $[0, \frac{\pi}{2}]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل ہے۔

□

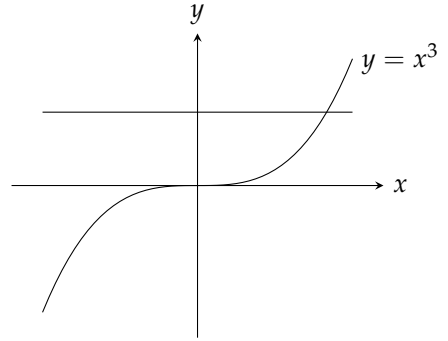
ایک ایک تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے۔ اگر کسی تفاعل کی ترسیم کسی افقی لکیر کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہو تب یہ تفاعل y کی اس قیمت کو ایک سے زیادہ مرتبہ اختیار کرتا ہے لہذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہو گا (شکل 7.1)۔

افقی لکیر کا پرکھ

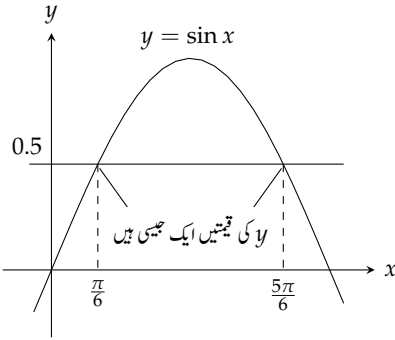
کوئی بھی تفاعل $y = f(x)$ صرف اور صرف اس صورت میں ایک ایک تفاعل ہو گا جب اس کی ترسیم ہر افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہو۔



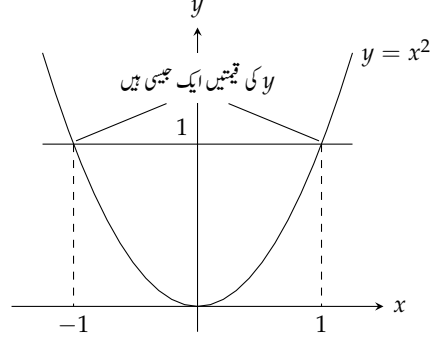
(ب) ایک ایک تفاعل۔



(ا) ایک ایک تفاعل۔

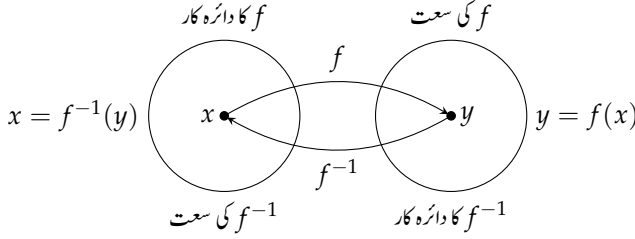


(د) غیر ایک ایک تفاعل۔



(ج) غیر ایک ایک تفاعل۔

شکل 7.1: ایک ایک تفاعل کی ترسیم کسی بھی افقی کلیئر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے جبکہ غیر ایک ایک تفاعل کی ترسیم، ایک یا ایک سے زیادہ افقی کلیئروں کو ایک سے زیادہ بار قطع کرتی ہے۔



شکل 7.2: تفاعل f کا الٹ ہر بخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجتا ہے جہاں سے وہ آیا۔

الٹ

چونکہ ایک ایک تفاعل کا ہر بخارج انفرادی مداخل سے آتا ہے لہذا ایک ایک تفاعل کو الٹ کرتے ہوئے ہر بخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجا جا سکتا ہے جس سے یہ بخارج حاصل ہوتا ہے (شکل 7.2)۔ ایک ایک تفاعل f کو الٹ کر کے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اس کو f کا الٹ⁴ کہتے ہیں جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں f^{-1} میں -1 کو طاقت نہ سمجھا جائے: یعنی $f^{-1}(x)$ سے مراد $\frac{1}{f(x)}$ نہیں ہے۔ ہم f^{-1} کو " f کا الٹ" پڑھتے ہیں۔

جیسا شکل 7.2 سے ظاہر ہے، f سے f^{-1} یا f^{-1} سے f حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی x کے لئے $f(x)$ حاصل کر کے اس $f(x)$ کا الٹ $f^{-1}(f(x))$ حاصل کیا جاسکتا ہے جو x ہو گا۔ تفاعل $f^{-1}(f(x))$ یا تفاعل $f(f^{-1}(x))$ میں x پر کرنے سے واپس x ملتا ہے۔ ایسا تفاعل جو ہر عدد کو اسی عدد کے لئے مختص کرتا ہو شناختی تفاعل⁵ کہلاتا ہے۔ یوں تفاعل f اور g کو ایک دوسرے کا الٹ تفاعل ہونے کے لئے پرکھا جاسکتا ہے۔ اگر $(g \circ f)(x) = x$ اور $(f \circ g)(x) = x$ ہو تب f اور g ایک دوسرے کے الٹ تفاعل ہوں گے ورنہ یہ ایک دوسرے کے الٹ تفاعل نہیں ہوں گے۔ اگر f اپنے دائرہ کار کا مکعب لیتا ہو تب g اس صورت f کا الٹ ہو گا اگر g جذر الگب لیتا ہو ورنہ یہ f کا الٹ نہیں ہو گا۔

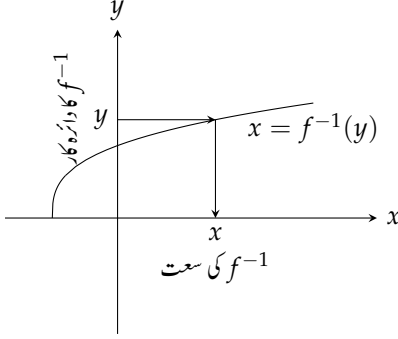
تفاعل f اور g ایک دوسرے کے الٹ صرف اور صرف اس صورت ہوں گے جب

$$f(g(x)) = x \quad \text{اور} \quad g(f(x)) = x$$

ہوں۔ ایسی صورت میں $g = f^{-1}$ اور $f = g^{-1}$ ہوں گے۔

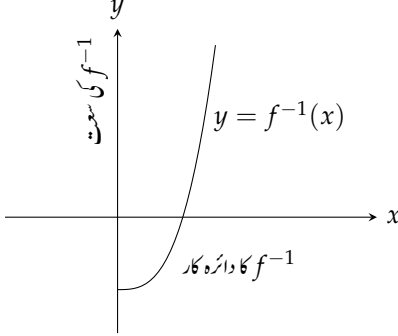
ایک تفاعل کا الٹ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب یہ ایک ایک تفاعل ہو۔ یوں بڑھتے تفاعل کا الٹ تفاعل ہو گا اور گھٹتے تفاعل کا بھی الٹ تفاعل ہو گا۔ جن تفاعل کا تفرق مثبت ہو وہ اپنے دائرہ کار میں بڑھتے ہیں لہذا ان کا الٹ ہو گا (صفحہ 350 پر مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3)۔ اسی طرح جن تفاعل کا تفرق منفی ہو وہ اپنے دائرہ کار میں گھٹتے ہیں لہذا ان کا الٹ ہو گا۔

⁴inverse
⁵identity function

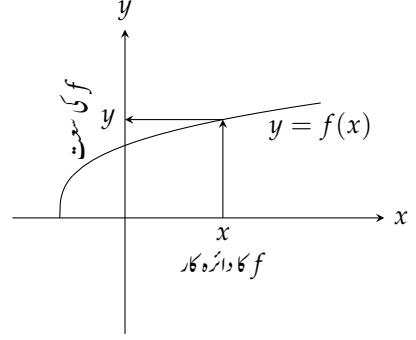


(ب)

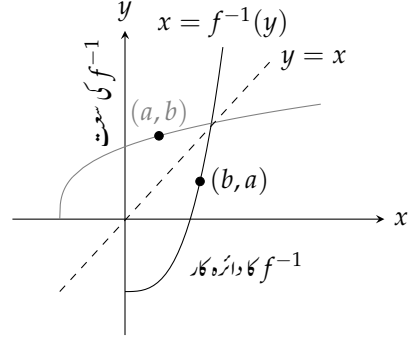
تفاعل f کی ترسیم کو f^{-1} کی ترسیم تصور کیا جاسکتا ہے۔ وہ x جو y دینا ہو کو تلاش کرنے کی خاطر، ہم y سے افقی رخ ترسیم تک اور پھر انتصابی رخ محور x تک پہنچ کر درکار x پڑھتے ہیں۔ f کا دائرہ کار f^{-1} کی سعت ہو گی جبکہ f کی سعت f^{-1} کا دائرہ کار ہو گا۔



(د) آخر میں ہم حرف x اور حرف y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ یوں متغیر x کے تفاعل f^{-1} کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔



(ی) نقطہ x پر f کی قیمت جاننے کے لئے ہم x سے انتصابی رخ چلتے ہوئے ترسیم تک پہنچ کر افقی سمت محور y تک پہنچ کر درکار قیمت پڑھتے ہیں۔



(ج) تفاعل f^{-1} کو ترسیم کرنے کی خاطر ہم f کا کثیر $y = x$ میں عکس لیتے ہیں۔

شکل 7.3: تفاعل f کے الٹ f^{-1} کی ترسیم۔

الٹ کی تلاش

تفاعل کے الٹ کی ترسیم کا تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ فرض کریں ایک تفاعل کی ترسیم شکل کی طرح بڑھتا ہو، یعنی یہ بائیں سے دائیں اوپر اٹھتی ہو۔ کسی بھی x کے لئے ترسیم سے قیمت پڑھنے کے لئے ہم محور x پر نقطہ x سے شروع ہو کر محور y کے متوازی چل کر ترسیم تک پہنچتے ہیں اور یہاں سے محور x کے متوازی چل کر محور y تک پہنچ کر تفاعل کی قیمت y پڑھتے ہیں۔ ہم اس عمل کو الٹ کرتے ہوئے y سے شروع کرتے ہوئے x پڑھ سکتے ہیں۔

تفاعل f کی ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم f^{-1} کی ترسیم میں مداخلت خارج جوڑیوں کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ اس ترسیم کو عمومی طرز پر دکھانے کی خاطر ہمیں ان جوڑیوں کا 45° کی کثیر $y = x$ میں عکس لینا ہو گا اور ساتھ ہی حرف x اور حرف y کا ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کرنا ہو گا۔ یوں غیر تابع متغیر، جس کو اب x کہتے ہیں، افقی محور پر دکھایا جائے گا اور تابع متغیر، جس کو اب y کہتے ہیں، کو انتہائی محور پر دکھایا جائے گا۔ تفاعل $f(c)$ اور $f^{-1}(x)$ کی ترسیمات کثیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

شکل 7.3 میں f^{-1} کو متغیر x کا تفاعل لکھنا دکھانا گیا ہے جس کو درج ذیل بیان کیا جاسکتا ہے۔

ا. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لئے حل کریں۔ یوں x کو y کی صورت میں لکھا جائے گا۔

ب. جزو-ا میں حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کریں۔ یوں حاصل کلیہ $y = f^{-1}(x)$ ہو گا۔

مثال 7.3: تفاعل $y = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ حاصل کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

حل: قدم 1: x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

$$2y = x + 2$$

$$x = 2y - 2$$

قدم 2: حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = 2x - 2$$

یوں تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ تفاعل $f^{-1}(x) = 2x - 2$ ہو گا۔

اس کی تصدیق کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ آیا دونوں مرکب تفاعل شناختی تفاعل دیتے ہیں:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

□

مثال 7.4: تفاعل $y = x^2, x \geq 0$ کا الٹ تلاش کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

حل: قدم 1: دیے گئے مساوات کو حل کر کے x کو y کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 \quad x \geq 0 \text{ کی بنا پر } |x| = x \quad \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

قدم 2: جزو-1 میں حاصل نتیجہ میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = \sqrt{x}$$

یوں تفاعل $y = x^2, x \geq 0$ کا الٹ $y = \sqrt{x}$ ہوگا (شکل 7.4)۔

یہاں دھیان رہے کہ پابند تفاعل $y = \sqrt{x}, x \geq 0$ ایک ایک تفاعل ہے لہذا اس کا الٹ پایا جاتا ہے جبکہ تفاعل $y = x^2$ ایک غیر پابند تفاعل ہے جو ایک ایک تفاعل نہیں ہے لہذا اس کا الٹ نہیں پایا جاتا ہے۔

□

کمپیوٹر کا استعمال

تفاعل $y = f(x)$ کا الٹ تفاعل نہایت آسانی سے درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے ترسیم کیا جاسکتا ہے۔

$$x(t) = f(t), \quad y(t) = t$$

آپ تفاعل اور تفاعل کے الٹ کو ساتھ ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں:

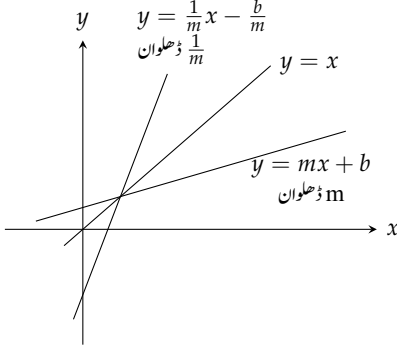
$$x_1(t) = t, \quad y_1(t) = f(t) \quad \text{تفاعل}$$

$$x_2(t) = f(t), \quad y_2(t) = t \quad \text{تفاعل کا الٹ}$$

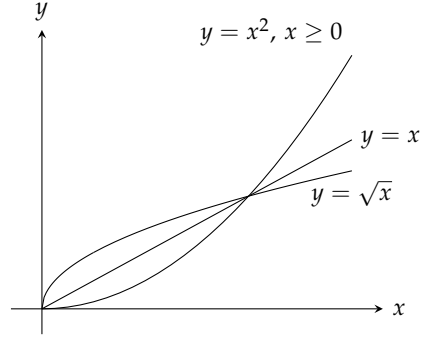
اس سے بھی زیادہ بہتر ہوگا کہ تفاعل، تفاعل کا الٹ اور شناختی تفاعل $y = x$ کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں جہاں شناختی تفاعل درج ذیل ہوگا۔

$$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = t \quad \text{شناختی تفاعل}$$

تفاعل $y = \frac{x^5}{x^2+1}$ اور $y = x + \cos x$ کے ساتھ ان کے الٹ تفاعل اور شناختی تفاعل ایک ساتھ ترسیم کر کے دیکھیں۔ ترسیم میں x اور y محور کے اکائی فاصلے برابر نظر آنے چاہیے تاکہ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تفاعل اور اس کا الٹ تشاکلی نظر آئیں۔



شکل 7.5: کلیئر $y = x$ میں منعکس غیر انتصابی کلیئروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعکس تناسب ہوتے ہیں۔



شکل 7.4: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = x^2, x \geq 0$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں (مثال 7.4)۔

قابل تفرق تفاعل کے الٹ کے تفرق

تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ اور اس کے الٹ $f^{-1}(x) = 2x - 2$ (مثال 7.3) کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2$$

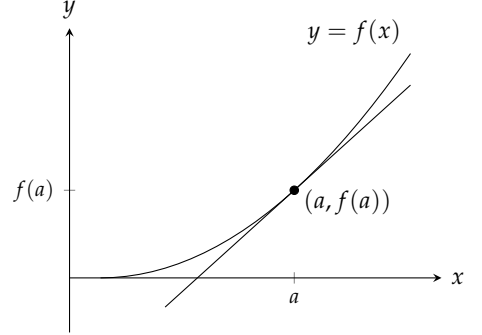
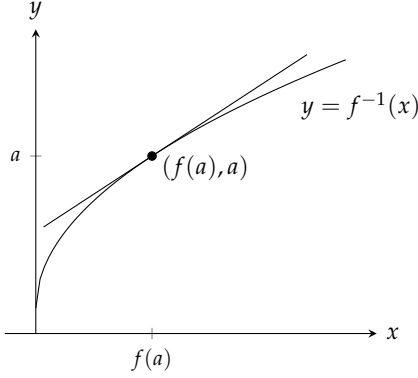
یہ تفرقات ایک دوسرے کے بالعکس تناسب ہیں۔ تفاعل f کی ترسیم کلیئر $y = \frac{x}{2} + 1$ اور f^{-1} کی ترسیم کلیئر $y = 2x - 2$ ہے۔ ان کلیئروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعکس تناسب ہیں (شکل 7.5)۔

یہ نتیجہ کسی مخصوص تفاعل کے لئے نہیں ہے۔ کلیئر $y = x$ میں کسی بھی غیر افقی یا غیر انتصابی کلیئر کے عکس کا ڈھلوان اس کلیئر کے ڈھلوان کے بالعکس تناسب ہو گا۔ یوں اگر دیے گئے کلیئر کا ڈھلوان $m \neq 0$ (شکل 7.5) ہو تب منعکس کلیئر کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہو گا (سوال 7.36)۔

تفاعل اور اس کے الٹ کے ڈھلوانوں کا بالعکس تناسب تعلق دیگر تفاعل کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ اگر نقطہ $(a, f(a))$ پر $y = f(x)$ کا ڈھلوان $f'(a) \neq 0$ ہو تب مطابقتی نقطہ $(f(a), a)$ پر $y = f^{-1}(x)$ کا ڈھلوان $\frac{1}{f'(a)}$ ہو گا (شکل 7.6)۔ یوں نقطہ $f(a)$ پر f^{-1} کا تفرق، نقطہ a پر f کے تفرق کا بالعکس تناسب ہو گا۔ یہ تعلق اس صورت درست ہو گا جب f درج ذیل مسئلہ میں پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط اعلیٰ احصاء سے حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 7.1: الٹ تفاعل کے تفرق کا قاعدہ

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہو اور I پر $\frac{df}{dx}$ کبھی بھی صفر نہ ہو، تب وقفہ $f(I)$ کے ہر نقطہ پر f^{-1} قابل تفرق



شکل 7.6: الٹ تفاعل کے مطابقتی نقطوں پر ڈھلوان ایک دوسرے کا بالکس تناسب $\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{f(a)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_a}$ ہو گا۔

ہو گا۔ کسی ایک مخصوص نقطہ $f(a)$ پر $\frac{df^{-1}}{dx}$ کا تفرق نقطہ a پر تفرق $\frac{df}{dx}$ کا بالکس تناسب ہو گا:

$$(7.1) \quad \left(\frac{df^{-1}}{dx} \right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a}}$$

اس کو مختصراً درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

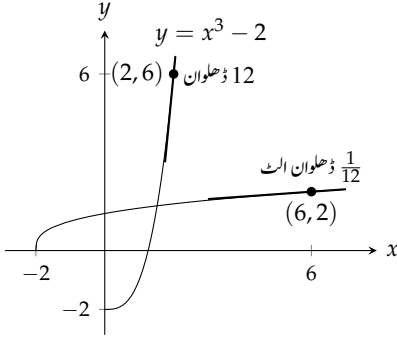
$$(7.2) \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

مثال 7.5: تفاعل $f(x) = x^2, x \geq 0$ اور اس کے الٹ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

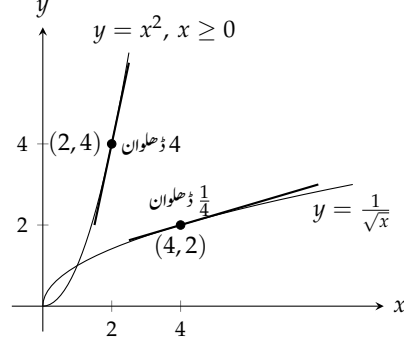
$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \quad \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

نقطہ $(4, 2)$ لکیر $y = x$ کی دوسری طرف نقطہ $(2, 4)$ کا عکس ہے (شکل 7.7)۔ ان نقطوں پر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= 2x = 2(2) = 4 && \text{نقطہ } (2, 4) \text{ پر} \\ \frac{df^{-1}}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{df/dx} && \text{نقطہ } (4, 2) \text{ پر} \end{aligned}$$



شکل 7.8: نقطہ $x = 2$ پر $f(x) = x^3 - 2$ کا
تفرق ہمیں نقطہ $x = 6$ پر f^{-1} کا تفرق دیتا ہے (مثال
7.6)۔



شکل 7.7: نقطہ $(4, 2)$ پر $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کا
تفرق نقطہ $(2, 4)$ پر $f(x) = x^2$ کے تفرق کا
بالعکس متناسب ہو گا (مثال 7.5)۔

□

بعض اوقات f^{-1} کا کلیہ نہ جانتے ہوئے بھی مساوات 7.1 کی مدد سے $\frac{df^{-1}}{dx}$ کی مخصوص قیمتیں تلاش کی جاسکتی ہیں۔

مثال 7.6: مان لیں $f(x) = x^3 - 2$ ہے۔ $f^{-1}(x)$ کا کلیہ دریافت کیے بغیر نقطہ $x = 6 = f(2)$ پر $\frac{df^{-1}}{dx}$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: (شکل 7.8)

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=2} = 3x^2 \Big|_{x=2} = 12$$

$$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12}$$

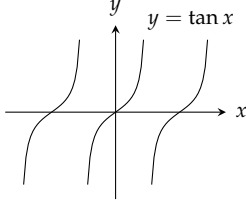
مساوات 7.1

□

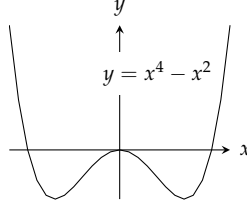
مسئلہ 7.1 کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ اگر $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور ہم x کی قیمت میں معمولی تبدیلی dx لائیں تب y میں مطابقتی تبدیلی تخمیناً

$$dy = f'(a) dx$$

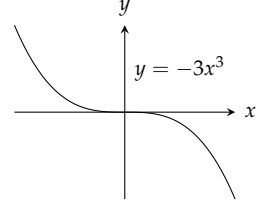
ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ y کی تبدیلی، x کی تبدیلی کے تقریباً $f'(a)$ گنا ہو گی اور x کی تبدیلی، y کی تبدیلی کے تقریباً $\frac{1}{f'(a)}$ گنا ہو گی۔



شکل 7.11: ترسیم سوال 7.3



شکل 7.10: ترسیم سوال 7.2



شکل 7.9: ترسیم سوال 7.1

سوالات

ایک ایک تفاعل کی نشاندہی سوال 7.1 تا سوال 7.6 میں تفاعل کے ترسیم دیے گئے ہیں۔ ان میں ایک ایک تفاعل کی نشاندہی کریں۔

سوال 7.1: ترسیم شکل 7.9 میں دی گئی ہے۔
جواب: ایک ایک

سوال 7.2: ترسیم شکل 7.10 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.3: ترسیم شکل 7.11 میں دی گئی ہے۔
جواب: غیر ایک ایک

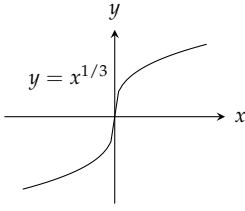
سوال 7.4: ترسیم شکل 7.12 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.5: ترسیم شکل 7.13 میں دی گئی ہے۔
جواب: ایک ایک

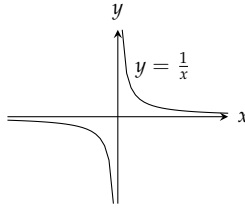
سوال 7.6: ترسیم شکل 7.14 میں دی گئی ہے۔

الٹ تفاعل کی ترسیم

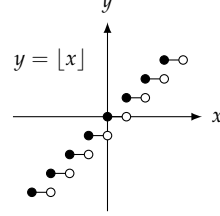
سوال 7.7 تا سوال 7.10 میں $y = f(x)$ کی ترسیم دی گئی ہے۔ اس کو نقل کر کے لکیر $y = x$ بھی بنائیں۔ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی استعمال کرتے ہوئے $y = f^{-1}(x)$ ترسیم کریں۔ (f^{-1} کا کلیہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔) f^{-1} کے دائرہ کار اور سرعت کی نشاندہی کریں۔



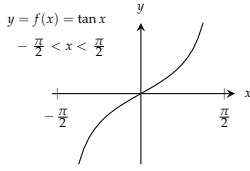
شکل 7.14: ترسیم سوال 7.6



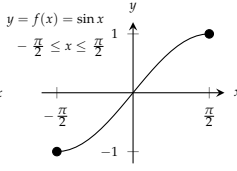
شکل 7.13: ترسیم سوال 7.5



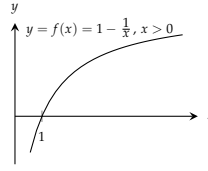
شکل 7.12: ترسیم سوال 7.4



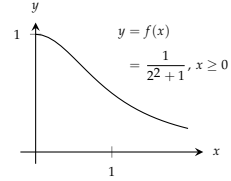
شکل 7.18: ترسیم سوال 7.10



شکل 7.17: ترسیم سوال 7.9



شکل 7.16: ترسیم سوال 7.8



شکل 7.15: ترسیم سوال 7.7

سوال 7.7: تفاعل کی ترسیم شکل 7.15 میں دی گئی ہے۔
جواب: دائرہ کار $(0, 1]$ ، سعت $[0, \infty)$ ، شکل 7.19

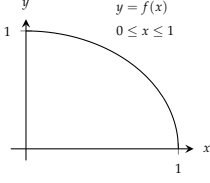
سوال 7.8: تفاعل کی ترسیم شکل 7.16 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.9: تفاعل کی ترسیم شکل 7.17 میں دی گئی ہے۔
جواب: دائرہ کار $[-1, 1]$ ، سعت $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ، شکل 7.20

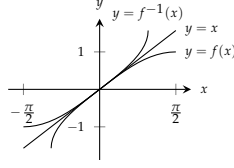
سوال 7.10: تفاعل کی ترسیم شکل 7.18 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.11: (i) تفاعل $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟
(ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی الٹ ہے۔ (یاد رہے کہ $x \geq 0$ کی صورت میں $\sqrt{x^2} = x$ ہوتا ہے)۔
جواب: کثیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ شکل 7.21

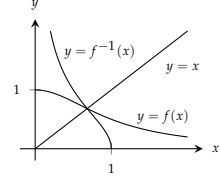
سوال 7.12: (i) تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟ (ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی الٹ ہے۔



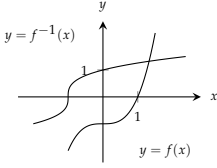
شکل 7.21: ترسیم جواب 7.11



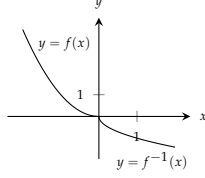
شکل 7.20: ترسیم جواب 7.9



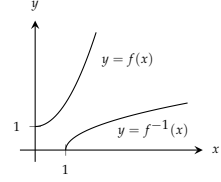
شکل 7.19: ترسیم جواب 7.7



شکل 7.24: ترسیم سوال 7.15



شکل 7.23: ترسیم سوال 7.14



شکل 7.22: ترسیم سوال 7.13

الٹ تفاعل کے کلیات
سوال 7.13 تا سوال 7.18 میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f اور f^{-1} کی ترسیمات بھی دکھائی گئی ہیں۔ f^{-1} کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 7.13: $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

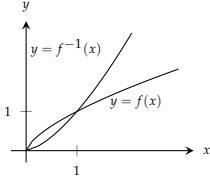
سوال 7.14: $f(x) = x^2, x \leq 0$ میں دی گئی ہے۔

سوال 7.15: $f(x) = x^3 - 1$ میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

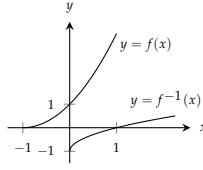
سوال 7.16: $f(x) = x^2 - 2x + 1, x \geq 1$ میں دی گئی ہے۔

سوال 7.17: $f(x) = (x+1)^2, x \geq -1$ میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

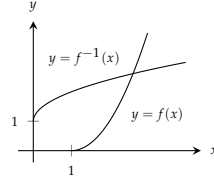
سوال 7.18: $f(x) = x^{2/3}, x \geq 0$ میں دی گئی ہے۔



شکل 7.27: ترسیم سوال 7.18



شکل 7.26: ترسیم سوال 7.17



شکل 7.25: ترسیم سوال 7.16

سوال 7.19 تا سوال 7.24 میں تقابل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f^{-1} دریافت کریں اور اس کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔ تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ ہے۔

سوال 7.19: $f(x) = x^5$
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$ ، سعت $-\infty < y < \infty$

سوال 7.20: $f(x) = x^4, x \geq 0$

سوال 7.21: $f(x) = x^3 + 1$
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$ ، سعت $-\infty < y < \infty$

سوال 7.22: $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$

سوال 7.23: $f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$
جواب: $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ دائرہ کار $x > 0$ ، سعت $y > 0$

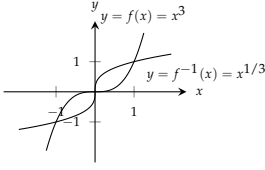
سوال 7.24: $f(x) = \frac{1}{x^3}, x \neq 0$

الٹ تفاعل کے تفرق
سوال 7.25 تا سوال 7.28 میں درج ذیل اقدام کریں۔

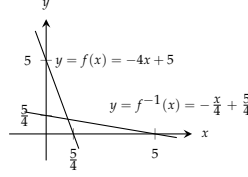
ا. $f^{-1}(x)$ تلاش کریں۔

ب. f اور f^{-1} کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

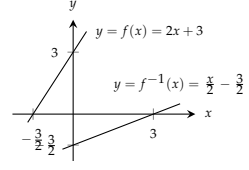
ج. نقطہ $x = a$ پر $\frac{df}{dx}$ اور نقطہ $x = f(a)$ پر $\frac{df^{-1}}{dx}$ کی قیمت حاصل کریں۔ تصدیق کریں کہ ان نقطوں پر $\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)}$ ہو گا۔



شکل 7.30: ترسیم جواب 7.29



شکل 7.29: ترسیم جواب 7.27



شکل 7.28: ترسیم جواب 7.25

سوال 7.25: $f(x) = 2x + 3$, $a = -1$ جواب: (ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ ، (ب) شکل 7.28، (ج) $2, \frac{1}{2}$

سوال 7.26: $f(x) = \frac{x}{5} + 7$, $a = -1$

سوال 7.27: $f(x) = 5 - 4x$, $a = \frac{1}{2}$ جواب: (ا) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$ ، (ب) شکل 7.29، (ج) $-4, -\frac{1}{4}$

سوال 7.28: $f(x) = 2x^2$, $x \geq 0$, $a = 5$

سوال 7.29:

1. دکھائیں کہ $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

2. f اور g ترسیم کریں جس میں ان کے نقطہ تقاطع $(1, 1)$ اور $(-1, -1)$ نظر آئیں۔ آپ کو کثیر $y = x$ میں تفصیلی نظر آنی چاہیے۔

3. نقطہ $(1, 1)$ اور $(-1, -1)$ پر f اور g کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

4. مبدأ پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

جواب: (ب) شکل 7.30، (ج) $(1, 1)$ پر f کی ڈھلوان 3 ہے؛ $(1, 1)$ پر g کی ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے؛ $-1, -1$ پر f کی ڈھلوان 3 اور $(-1, -1)$ پر g کی ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ (د) $x = 0$ پر $y = x^3$ کا مماس $y = 0$ ہے؛ $x = 0$ پر $y = \sqrt[3]{x}$ کا مماس $x = 0$ ہے۔

سوال 7.30:

1. دکھائیں کہ $h(x) = \frac{x^3}{4}$ اور $k(x) = (4x)^{1/3}$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

2. h اور k ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(2, 2)$ اور $(-2, -2)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ میں تشاکلی نظر آنی چاہیے۔

3. نقاط $(2, 2)$ اور $(-2, -2)$ پر h اور k کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

4. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال 7.31: مان لیں $x \geq 2$ ، $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ ہے۔ نقطہ $f(3) = -1 = x$ پر $\frac{df^{-1}}{dx}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $\frac{1}{9}$

سوال 7.32: مان لیں $x > 2$ ، $f(x) = x^2 - 4x - 5$ ہے۔ نقطہ $f(5) = 0 = x$ پر $\frac{df^{-1}}{dx}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.33: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کا الٹ پایا جاتا ہے اور f کی ترسیم نقطہ $(2, 4)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ نقطہ $x = 4$ پر $\frac{df^{-1}}{dx}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: 3

سوال 7.34: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = g(x)$ کا الٹ پایا جاتا ہے اور g کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان 2 ہے۔ مبدا پر g^{-1} کی ترسیم کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 7.35:

ا. تفاعل $f(x) = mx$ کا الٹ تلاش کریں جہاں m غیر صفر مستقل ہے۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم مبدا سے گزرتی لکیر ہے جس کی ڈھلوان m غیر صفر ہے۔ اس تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

جواب: (i) $f^{-1}(x) = \frac{x}{m}$ ، (ب) f^{-1} کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے اور اس کی ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے۔

سوال 7.36: دکھائیں کہ $f(x) = mx + b$ ، جہاں m اور b مستقل ہیں اور $m \neq 0$ ہے، کا الٹ ایک لکیر ہے جس کی ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے اور جو محور y کو $-\frac{b}{m}$ پر قطع کرتی ہے۔

سوال 7.37:

ا. تفاعل $f(x) = x + 1$ کا الٹ تلاش کریں۔ f اور اس کا الٹ ایک ساتھ ترسیم کریں۔ لکیر $y = x$ کو بھی شامل کریں۔

ب. تقابل $f(x) = x + b$ کا الٹ تلاش کریں جہاں b مستقل ہے۔ f^{-1} کی ترسیم کا f کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

ج. کلیئر $y = x$ کے متوازی تقابل کے الٹ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟

جواب: (i) $f^{-1}(x) = x - 1$ ، (ب) $f^{-1}(x) = x - b$ ، f^{-1} کی ترسیم f کی ترسیم کے متوازی ہے۔ f^{-1} اور f کی ترسیمات کلیئر $y = x$ کے مخالف اطراف پر اور اس کلیئر سے برابر فاصلہ پر ہیں۔ (ج) ترسیمات ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے اور کلیئر $y = x$ کے مخالف اطراف اور برابر فاصلہ پر ہوں گے۔

سوال 7.38:

ا. تقابل $f(x) = -x + 1$ کا الٹ معلوم کریں۔ کلیئر $y = -x + 1$ اور کلیئر $y = x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان کلیئروں کے بیچ زاویہ کتنا ہے۔

ب. تقابل $f(x) = -x + b$ کا الٹ معلوم کریں جہاں b مستقل ہے۔ کلیئر $y = -x + b$ اور کلیئر $y = x$ کے مابین زاویہ کتنا ہے؟

ج. کلیئر $y = x$ کے عمودی تقابل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

بڑھتا ہوا اور گھٹتا ہوا تفاعل

سوال 7.39: اگر وقفہ I میں کسی دو نقطوں x_1 اور x_2 پر

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

ہو تب I پر تقابل $f(x)$ بڑھتا ہو گا (حصہ 4.2)۔ اسی طرح درج ذیل صورت میں I پر $f(x)$ گھٹتا ہو گا۔

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$$

دکھائیں کہ بڑھتے تقابل اور گھٹتے تقابل ایک ایک تقابل ہیں یعنی دکھائیں کہ I میں کسی بھی دو نقطوں x_1 اور x_2 کے لئے $x_2 \neq x_1$ سے مراد $f(x_2) \neq f(x_1)$ ہو گا۔

سوال 7.40 تا سوال 7.44 میں سوال 7.39 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دیے تقابل کا اپنے وقفہ پر الٹ پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے $\frac{df^{-1}}{dx}$ کا کلیئر تلاش کریں۔

$$\text{سوال 7.40: } f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{6}$$

$$\text{سوال 7.41: } f(x) = 27x^3$$

$$\text{جواب: بڑھتا، لہذا ایک ایک؛ } \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{9}x^{-2/3}$$

سوال 7.42: $f(x) = 1 - 8x^3$

سوال 7.43: $f(x) = (1 - x)^3$
جواب: گھٹنا، لہذا ایک ایک؛ $\frac{df^{-1}}{dx} = -\frac{1}{3}x^{-2/3}$

سوال 7.44: $f(x) = x^{5/3}$

نظریہ اور استعمال
سوال 7.45: اگر $f(x)$ ایک ایک ہو تب $g(x) = -f(x)$ کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.46: اگر ایک ایک اور غیر صفر ہو تب $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.47: فرض کریں کہ g کی سعت، f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہے لہذا مرکب تفاعل $f \circ g$ معین ہے۔ اگر f اور g ایک ایک ہوں تب $f \circ g$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.48: اگر مرکب تفاعل $f \circ g$ ایک ایک ہو تب کیا g لازماً ایک ایک ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.49: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ مثبت، استمراری اور بڑھتا تفاعل ہے۔ ترسیم کی تاویل کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} dx = bf(b) - af(a)$$

سوال 7.50: مستقل a ، b ، c اور d پر مسلط وہ شرائط تلاش کریں جو ناطق تفاعل

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

کا الٹ ممکن بناتے ہیں۔

سوال 7.51: اگر ہم $f^{-1}(x)$ کی جگہ $g(x)$ لکھیں تب مساوات 7.1 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \implies g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

اس میں a کی جگہ x پر کرنے سے

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

ملتا ہے جو زنجیری قاعدہ یاد دلاتی ہے۔ یقیناً درج بالا اور زنجیری قاعدے کے بیچ تعلق پایا جاتا ہے۔

فرض کریں f اور g قابل تفرق اور ایک دوسرے کے الٹ ہیں لہذا $(f \circ g)(x) = x$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے کر $(f \circ g)'(x)$ کو f اور g کے تفرق کی صورت میں لکھ کر دیکھیں کیا حاصل ہوتا ہے؟ (مسئلہ 7.1 کو دیکھنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔)

سوال 7.52: ترکیب چھلا اور ترکیب خول کی مساوات فرض کریں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f قابل تفرق ہے جہاں $a > 0$ ہے اور f کا قابل تفرق الٹ f^{-1} پایا جاتا ہے۔ تفاعل f ، لکیر $x = a$ اور لکیر $y = f(b)$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ترکیب چھلا اور ترکیب خول اس جسم کے حجم کے گھات ایک جیسا نتیجہ دیتی ہیں:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} ((f^{-1}(y))^2 - a^2) dy = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x)) dx$$

اس مساوات کو ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل متعارف کریں۔

$$C(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2) dy$$

$$K(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x)) dx$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $[a, b]$ کے کسی نقطہ پر $C(t)$ اور $K(t)$ کی قیمتیں ایک جیسی ہیں اور $[a, b]$ پر ان کے تفرق بھی ایک جیسے ہیں۔ صفحہ 505 پر سوال 5.126 کے نتیجہ کے مطابق $[a, b]$ میں تمام t کے لئے $C(t) = K(t)$ ہو گا۔ بالخصوص $C(b) = K(b)$ ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.53 تا سوال 7.60 میں آپ چند تفاعل اور ان کے الٹ پر غور کریں گے۔ اس کے علاوہ دیے گئے نقطہ پر ان کے تفرق اور خطی تخمینی تفاعل غور کریں گے۔ ان سوالات میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ پر تفاعل $y = f(x)$ اور اس کا تفرق ترسیم کریں۔ بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ اس وقفہ پر f ایک ایک ہے۔

ب. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لئے حل کر کے حاصل الٹ تفاعل کو g سے ظاہر کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر f کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

د. کلیر $y = x$ کے دوسری جانب تشاکلی نقطہ $(f(x_0), x_0)$ پر g کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے اس مماسی کلیر کی ڈھلوان معلوم کریں۔

ہ. تفاعل f ، g ، کلیر $y = x$ ، دونوں مماسی خط اور نقطہ $(x_0, f(x_0))$ اور $(f(x_0), x_0)$ کو جوڑنے والا سیدھا خط ترتیم کریں۔ آپ کو جو تشاکلی نظر آتی ہے اس پر تبصرہ کریں؟

$$\text{سوال 7.53: } y = \sqrt{3x-2}, \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 4, \quad x_0 = 3$$

$$\text{سوال 7.54: } y = \frac{3x+2}{2x-11}, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{سوال 7.55: } y = \frac{4x}{x^2+1}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{سوال 7.56: } y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{سوال 7.57: } y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \leq x \leq 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$$

$$\text{سوال 7.58: } y = 2 - x - x^3, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{سوال 7.59: } y = e^x, \quad -3 \leq x \leq 5, \quad x_0 = 1$$

$$\text{سوال 7.60: } y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$$

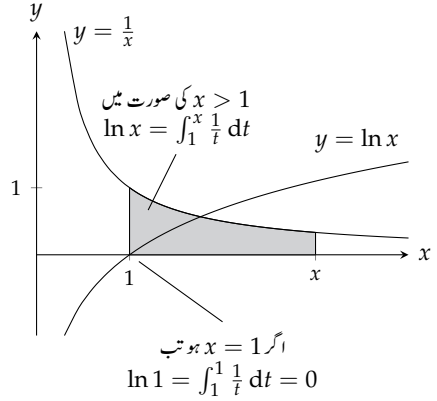
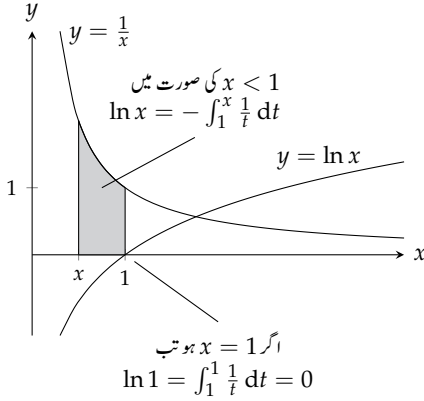
سوال 7.61 اور سوال 7.62 میں درج بالا تمام اقدام بروئے کار لاتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر خفی تفاعل تفاعل کو حل کر کے $y = f(x)$ اور $x = f^{-1}(y)$ حاصل کریں۔

$$\text{سوال 7.61: } y^{1/3} - 1 = (x+2)^3, \quad -5 \leq x \leq 5, \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{سوال 7.62: } \cos y = x^{1/5}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

7.2 قدرتی لوگار تھم

علم حساب اور سائنس میں اہم ترین تفاعل اور الٹ کی جوڑی قدرتی لوگار تھم $\ln x$ اور قوت نما تفاعل e^x کی جوڑی ہے۔ تفاعل e^x کی وضاحت $\ln x$ سے ہوتی ہے لہذا ہم پہلے $\ln x$ متعارف کرتے ہیں۔ لوگار تھم نے پہلے علم حساب میں بہتری پیدا کی۔ لوگار تھم کی خوبیوں نے سترھویں صدی میں آفاقی میکانیات کا حساب اور ساحل سے دور راہ تلاش کرنا ممکن بنایا۔ اگرچہ آج کل پیچیدہ حساب کمپیوٹر کی مدد سے کیا جاتا ہے، بہر حال لوگار تھم کی خوبیاں آج بھی اتنی ہی اہمیت رکھتی ہیں۔



شکل 7.31: $y = \ln x$ اور قدرتی لوگار تھمی تقاض $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ کا تعلق۔ قدرتی لوگار تھمی تقاض $x > 1$ کے لئے مثبت اور $x < 1$ کے لئے منفی ہے۔

قدرتی لوگار تھمی تقاض

ثابت عدد x کے قدرتی لوگار تھم کو $\ln x$ لکھا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل مکمل دیتا ہے۔

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

قدرتی لوگار تھمی تقاض کی تعریف

اگر $x > 1$ ہو تب $t = 1$ سے $t = x$ تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبہ $\ln x$ ہوگا (شکل 7.31)۔ اگر $0 < x < 1$ ہو تب x سے 1 تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبے کا منفی $\ln x$ ہوگا۔ قدرتی لوگار تھمی تقاض وقفہ $x \leq 0$ کے لئے غیر معین ہے۔ لوگار تھمی تقاض کی تعریف سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$$

بالائی اور زیریں حد ایک جیسے ہیں

دھیان رہے کہ ہم شکل 7.31 میں $y = \frac{1}{x}$ ترسیم کرتے ہیں لیکن مکمل میں $y = \frac{1}{t}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہر متغیر کو x لکھنے سے

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

لکھا جائے گا جہاں x کے دو مختلف معنی ہیں۔ اسی لئے ہم مکمل میں متغیر کو تبدیل کرتے ہوئے t لکھتے ہیں۔

x کی مختلف قیمتوں کے لئے تین اعشاریہ درست قدرتی لوگار تھمی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	0	0.05	0.5	1	2	3	4	10
$\ln x$	غیر معین	-3.00	-0.69	0	0.69	1.10	1.39	2.30

قدرتی لوگار تھمی تفاعل کا تفرق

احصاء کے بنیادی مسئلہ کے جزو اول (مسئلہ 5.3) سے

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا x کی ہر مثبت قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u کی قیمتیں مثبت ہوں، تاکہ $\ln u$ معین ہو، تب تفاعل $y = \ln u$ پر زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

کی اطلاق سے

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{du} \ln u \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

ماتا ہے لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(7.3) \quad \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \quad u > 0$$

مثال 7.7:

$$\frac{d}{dx} \ln 2x = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} (2x) = \frac{1}{2x} (2) = \frac{1}{x}$$

□

جدول 7.1: خواص قدرتی لوگار تھم

کسی بھی اعداد $a > 0$ اور $x > 0$ کے لئے۔		
$\ln ax = \ln a + \ln x$	قاعدہ ضرب	الف
$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$	قاعدہ حاصل تقسیم	ب
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$	قاعدہ بالعکس متناسب	ج
$\ln x^n = n \ln x$	قاعدہ طاقت	د

آپ نے مثال 7.7 میں دیکھا کہ تفاعل $y = \ln 2x$ کا تفرق وہی ہے جو تفاعل $y = \ln x$ کا ہے۔ درحقیقت کسی بھی تفاعل $y = \ln ax$ کے لئے درست ہے جہاں a کوئی عدد ہے:

$$(7.4) \quad \frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx} (ax) = \frac{1}{ax} (a) = \frac{1}{x}$$

مثال 7.8: اگر مساوات 7.3 میں $u = x^2 + 3$ پر کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

□

خواص لوگار تھم

کمپیوٹر کی ایجاد سے پہلے علم حساب میں سب سے زیادہ بہتری لوگار تھم کے سر ہے⁶۔ لوگار تھم کی وہ خوبیاں جن کی بدولت حساب میں بہتری پیدا ہوئی جدول 7.1 میں دی گئی ہیں۔ ان خواص کی بنا پر اعداد کے ضرب کی جگہ جمع اور مثبت اعداد کی تقسیم کی جگہ تفریق استعمال ہونے لگا۔ اس کے علاوہ طاقت کی جگہ ضرب استعمال کیا جانے لگا۔ وقتی طور پر ہم جزو د میں طاقت n کو ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔ اس کی وضاحت جزو د کے ثبوت کے دوران ہو گی۔

مثال 7.9:

$$\begin{aligned} \ln 6 &= \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 && \text{ضرب} \\ \ln 4 - \ln 5 &= \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8 && \text{حاصل تقسیم} \\ \ln \frac{1}{8} &= -\ln 8 && \text{بالعکس متناسب} \\ &= -\ln 2^3 = -3 \ln 2 && \text{طاقت} \end{aligned}$$

⁶ اسکاچی ریاضی دان جان نیپ نے سولہویں صدی میں لوگار تھم ایجاد کیا۔ انہوں نے اپنی زندگی کے آخری میں برس لوگار تھمی جدول مکمل کرنے میں صرف کیے

□

مثال 7.10:

$$\begin{aligned}
 \ln 4 + \ln \sin x &= \ln(4 \sin x) && \text{ضرب} \\
 \ln \frac{x+1}{2x-3} &= \ln(x+1) - \ln(2x-3) && \text{حاصل تقسیم} \\
 \ln \sec x &= \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x && \text{بالعکس متناسب} \\
 \ln \sqrt[3]{x+1} &= \ln(x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln(x+1) && \text{طاقت}
 \end{aligned}$$

□

ثبوت: برائے $\ln ax = \ln a + \ln x$ اس کا دلیل عجیب اور عمدہ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\ln ax$ کا تفرق اور $\ln x$ کا تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں (مساوات 7.4)۔ مسئلہ اوسط قیمت کے ضمنی نتیجہ دوم (صفحہ 4.2) کہتا ہے کہ ان تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا:

$$(7.5) \quad \ln ax = \ln x + C \quad \text{مستقل } C$$

اب صرف یہ دکھانا باقی ہے کہ C اور $\ln a$ ایک دوسرے کے برابر ہیں۔

مساوات 7.5 x کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے درست ہے لہذا یہ $x = 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 \ln(a \cdot 1) &= \ln 1 + C \\
 \ln a &= 0 + C && \ln 1 = 0 \\
 C &= \ln a && \text{ترتیب دی گئی ہے}
 \end{aligned}$$

مساوات 7.5 میں $C = \ln a$ پر کرنے سے ہمیں درکار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$(7.6) \quad \ln ax = \ln a + \ln x$$

□

ثبوت: برائے $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$ ہم مساوات 7.6 کو دو بار استعمال کر کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 7.6 میں a کی جگہ $\frac{1}{x}$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{1}{x} + \ln x &= \ln \left(\frac{1}{x} \cdot x \right) \\
 &= \ln 1 = 0
 \end{aligned}$$

ماتا ہے لہذا

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

ہو گا۔ مساوات 7.6 میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned}\ln \frac{a}{x} &= \ln \left(a \cdot \frac{1}{x} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{x} \\ &= \ln a - \ln x\end{aligned}$$

ماتا ہے۔

□

ثبوت: برائے $\ln x^n = n \ln x$ جہاں n ناطق ہے تمام مثبت x قیمتوں کے لئے درج ذیل ہو گا۔ (درج ذیل میں یاد رہے کہ ہم نے طاقی قاعدہ صرف ناطق اعداد کے لئے ثابت کیا ہے۔)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln x^n &= \frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} (x^n) & \text{مساوات 7.3 میں } u = x^n \\ &= \frac{1}{x^n} n x^{n-1} & \text{یہاں } n \text{ کا ناطق ہونا ضروری ہے} \\ &= n \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} (n \ln x)\end{aligned}$$

چونکہ $\ln x^n$ اور $n \ln x$ کے تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں لہذا

$$\ln x^n = n \ln x + C \quad \text{مستقل } C$$

ہو گا جس میں $x = 1$ پر کرنے سے $C = 0$ ملتا ہے۔

□

اگرچہ ہم نے غیر ناطق n کے لئے قاعدہ $\ln x^n = n \ln x$ ثابت نہیں کیا ہے، یہ قاعدہ غیر ناطق اعداد کے لئے بھی درست ہے لہذا اس کو بغیر فقر استعمال کریں۔

$\ln x$ کی ترسیم اور سعت

چونکہ $x > 0$ کے لئے $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ ہے لہذا $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا قفائل ہے۔ اس کا دور تبی تفرق، $-\frac{1}{x^2}$ ، منفی ہے لہذا $\ln x$ کی ترسیم نیچے مقعر ہے۔

اعدادی تراکب سے $\ln 2$ کی قیمت تقریباً 0.69 حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2}$$

اور

$$\ln 2^{-n} = -n \ln 2 < -n \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{n}{2}$$

ہوں گے۔ ان سے درج ذیل اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$\ln x$ کا دائرہ کار مثبت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے جبکہ $\ln x$ کی سعت پوری حقیقی لکیر ہے۔

لوگار تھمی تفرق

حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور طاقت پر مبنی مثبت قفائل کا تفرق لینے سے پہلے قفائل کا لوگار تھم لینا سودمند ثابت ہوتا ہے۔ لوگار تھم لیتے ہوئے ہم جدول 7.1 کے قواعد استعمال کرتے ہوئے قفائل کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں جس کا تفرق نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل کو لوگار تھمی تفرق⁷ کہتے ہیں۔

مثال 7.11: قفائل $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}$ ، $x > 1$ کے لئے تلاش کریں۔

حل: ہم دونوں اطراف کا قدرتی لوگار تھم لے کر جدول 7.1 کے قواعد سے سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \\ &= \ln \left((x^2+1)(x+3)^{1/2} \right) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\ &= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(x+3) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ طاقت} \end{aligned}$$

اب ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔ (بائیں ہاتھ مساوات 7.3 استعمال کرتے ہیں۔)

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

اس کو $\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کرتے ہیں:

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1} \right)$$

آخر میں ہم y کی قیمت پر کرتے ہیں:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1} \right)$$

□

تفاعل $y = f(x) > 0$ کا لوگار تھمی تفرق

کسی بھی تفاعل کا لوگار تھمی تفرق درج ذیل اقدام سے حاصل ہو گا۔

$\ln y = \ln f(x)$	دونوں اطراف لوگار تھم لیں
$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (\ln f(x))$	دونوں اطراف تفرق لیں
$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\ln f(x))$	بائیں ہاتھ مساوات 7.3
$\frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx} (\ln f(x))$	$\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کریں
$\frac{dy}{dx} = f(x) \frac{d}{dx} (\ln f(x))$	$y = f(x)$ پر کریں

$$\int \frac{du}{u} \text{ مکمل}$$

مساوات 7.3 سے مکمل کا کلیہ

$$(7.7) \quad \int \frac{1}{u} du = \ln u + C \quad C \text{ مستقل}$$

میتا ہے جہاں u مثبت قابل تفرق تفاعل ہے۔ منفی u کی صورت میں کیا ہوگا؟ اگر u منفی ہو تب $-u$ مثبت ہوگا لہذا

$$(7.8) \quad \int \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{(-u)} d(-u) \\ = \ln(-u) + C \quad \text{مساوات 7.7 میں } u \text{ کی جگہ } -u$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.7 اور مساوات 7.8 میں دائیں ہاتھ کو $\ln|x| + C$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں دونوں مساوات کو

$$(7.9) \quad \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

میں ضم کیا جاسکتا ہے جہاں u غیر صفر قابل تفرق تفاعل ہے۔

ہم درج ذیل جانتے ہیں

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

اور $n = -1$ کے لئے مساوات 7.9 کی طرف دیکھ سکتے ہیں۔

مساوات 7.9 کے تحت درج ذیل ہوگا

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

جہاں $f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے جس کی علامت پورے دائرہ کار پر تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

مثال 7.12:

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5} dx = \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{-5}^{-1} \quad u = x^2 - 5 \\ = \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5$$

□

مثال 7.13:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4 \cos \theta}{3 + 2 \sin \theta} d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u} du \quad u = 3 + 2 \sin \theta \\ = 2 \ln|u| \Big|_1^5 \\ = 2 \ln|5| - 2 \ln|1| = 2 \ln 5$$

□

$\tan x$ اور $\cot x$ کے تکمل

ہمیں مساوات 7.9 کی مدد سے $\tan x$ اور $\cot x$ کا تکمل لے سکتے ہیں۔ ٹینجٹ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-du}{u} & u = \cos x \\ &= - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C & \text{مساوات 7.9} \\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C & \text{قاعدہ بالعکس تناسب} \\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

کوٹینجٹ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{du}{u} & u = \sin x \\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C\end{aligned}$$

اس طرح درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \tan u \, du &= -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C \\ \int \cot u \, du &= \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C\end{aligned}$$

مثال 7.14:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, dx &= \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \tan u \, du & u = 2x \\ &= \frac{1}{2} \ln|\sec u| \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2\end{aligned}$$

□

سوالات

لوگار تھم کے خواص

سوال 7.63: مندرجہ ذیل کو $\ln 2$ اور $\ln 3$ کی صورت میں لکھیں۔

$$\ln 3\sqrt{2} \quad \text{د.}$$

$$\ln(1/2) \quad \text{ج.}$$

$$\ln 0.75 \quad \text{ا.}$$

$$\ln \sqrt{13.5} \quad \text{د.}$$

$$\ln \sqrt[3]{9} \quad \text{د.}$$

$$\ln(4/9) \quad \text{ب.}$$

جواب: (ا) $\ln 3 - 2 \ln 2$ ، (ب) $2(\ln 2 - \ln 3)$ ، (ج) $-\ln 2$ ، (د) $\frac{2}{3} \ln 3$ ، (ه) $\ln 3 + \frac{1}{2} \ln 2$ ، (و) $\frac{1}{2}(3 \ln 3 - \ln 2)$

سوال 7.64: مندرجہ ذیل کو $\ln 5$ اور $\ln 7$ کی صورت میں لکھیں۔

$$\ln 0.056 \quad \text{د.}$$

$$\ln 7\sqrt{7} \quad \text{ج.}$$

$$\ln(1/125) \quad \text{ا.}$$

$$\frac{\ln 35 + \ln(1/7)}{\ln 25} \quad \text{و.}$$

$$\ln 1225 \quad \text{د.}$$

$$\ln 9.8 \quad \text{ب.}$$

سوال 7.65 اور سوال 7.66 میں خواص لوگار تھم کی مدد سے دیے گئے ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

سوال 7.65:

$$\ln \sin \theta - \ln \left(\frac{\sin \theta}{5} \right) \quad \text{ا.} \quad \ln(3x^2 - 9x) + \ln \left(\frac{1}{3x} \right) \quad \text{ب.} \quad \frac{1}{2} \ln(4t^4) - \ln 2 \quad \text{ج.}$$

$$\ln(t^2) \quad \text{ج.} \quad \ln(x-3) \quad \text{ب.} \quad \ln 5 \quad \text{ا.}$$

سوال 7.66:

$$3 \ln \sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t+1) \quad \text{ج.}$$

$$\ln \sec \theta + \ln \cos \theta \quad \text{ا.}$$

$$\ln(8x+4) - 2 \ln 2 \quad \text{ب.}$$

لوگار تھم کے تفرق

سوال 7.67 تا سوال 7.98 میں x ، t یا θ کے لحاظ سے y کا تفرق لیں۔

$$y = \ln 3x \quad \text{سوال 7.67}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{جواب:}$$

$$y = \ln kx, \quad k \text{ مستقل} \quad \text{سوال 7.68}$$

سوال 7.69: $y = \ln(t^2)$
جواب: $\frac{2}{t}$

سوال 7.70: $y = \ln(t^{3/2})$

سوال 7.71: $y = \ln \frac{3}{x}$
جواب: $-\frac{1}{x}$

سوال 7.72: $y = \ln \frac{10}{x}$

سوال 7.73: $y = \ln(\theta + 1)$
جواب: $\frac{1}{\theta+1}$

سوال 7.74: $y = \ln(2\theta + 2)$

سوال 7.75: $y = \ln x^3$
جواب: $\frac{3}{x}$

سوال 7.76: $y = (\ln x)^3$

سوال 7.77: $y = t(\ln t)^2$
جواب: $2 \ln t + (\ln t)^2$

سوال 7.78: $y = t\sqrt{\ln t}$

سوال 7.79: $y = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16}$
جواب: $x^3 \ln x$

سوال 7.80: $y = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$

سوال 7.81: $y = \frac{\ln t}{t}$
جواب: $\frac{1-\ln t}{t^2}$

سوال 7.82: $y = \frac{1+\ln t}{t}$

سوال 7.83: $y = \frac{\ln x}{1+\ln x}$
جواب: $\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$

سوال 7.84: $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$

سوال 7.85: $y = \ln(\ln x)$
جواب: $\frac{1}{x \ln x}$

سوال 7.86: $y = \ln(\ln(\ln x))$

سوال 7.87: $y = \theta(\sin(\ln \theta)) + \cos(\ln \theta)$
جواب: $2 \cos(\ln \theta)$

سوال 7.88: $y = \ln(\sec \theta + \tan \theta)$

سوال 7.89: $y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$
جواب: $-\frac{3x+2}{2x(x+1)}$

سوال 7.90: $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

سوال 7.91: $y = \frac{1+\ln t}{1-\ln t}$
جواب: $\frac{2}{t(1-\ln t)^2}$

سوال 7.92: $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$

سوال 7.93: $y = \ln(\sec(\ln \theta))$
جواب: $\frac{\tan(\ln \theta)}{\theta}$

سوال 7.94: $y = \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{1+2 \ln \theta} \right)$

سوال 7.95: $y = \ln \left(\frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}} \right)$
جواب: $\frac{10x}{x^2+1} + \frac{1}{2(1-x)}$

سوال 7.96: $y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$

سوال 7.97: $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln \sqrt{t} dt$
جواب: $2x \ln|x| - x \ln \frac{|x|}{\sqrt{2}}$

$$y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t \, dt \quad \text{سوال 7.98}$$

لوگار تھمی تفرق

سوال 7.99 تا سوال 7.112 میں لوگار تھمی تفرق استعمال کرتے ہوئے y کا دیے گئے غیر قابو متغیر کے لحاظ سے تفرق لیں۔

$$y = \sqrt{x(x+1)} \quad \text{سوال 7.99}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{x(x+1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} \quad \text{جواب:}$$

$$y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2} \quad \text{سوال 7.100}$$

$$y = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \quad \text{سوال 7.101}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{t(t+1)^{3/2}}} \quad \text{جواب:}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{t(t+1)}} \quad \text{سوال 7.102}$$

$$y = \sqrt{\theta+3} \sin \theta \quad \text{سوال 7.103}$$

$$\sqrt{\theta+3} (\sin \theta) \left(\frac{1}{2(\theta+3)} + \cot \theta \right) \quad \text{جواب:}$$

$$y = (\tan \theta) \sqrt{2\theta+1} \quad \text{سوال 7.104}$$

$$y = t(t+1)(t+2) \quad \text{سوال 7.105}$$

$$t(t+1)(t+2) \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} \right] = 3t^2 + 6t + 2 \quad \text{جواب:}$$

$$y = \frac{1}{t(t+1)(t+2)} \quad \text{سوال 7.106}$$

$$y = \frac{\theta+5}{\theta \cos \theta} \quad \text{سوال 7.107}$$

$$\frac{\theta+5}{\theta \cos \theta} \left[\frac{1}{\theta+5} - \frac{1}{\theta} + \tan \theta \right] \quad \text{جواب:}$$

$$y = \frac{\theta \sin \theta}{\sqrt{\sec \theta}} \quad \text{سوال 7.108}$$

$$y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}} \quad \text{سوال 7.109}$$

$$\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}} \left[\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{3(x+1)} \right] \quad \text{جواب:}$$

سوال 7.110: $y = \sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$

سوال 7.111: $y = \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$
 جواب: $\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} \right)$

سوال 7.112: $y = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

تکمل

سوال 7.113 تا سوال 7.130 میں مکمل حل کریں۔

سوال 7.113: $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$
 جواب: $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

سوال 7.114: $\int_{-1}^0 \frac{3dx}{3x-2}$

سوال 7.115: $\int \frac{2y dy}{y^2-25}$
 جواب: $\ln|y^2-25| + C$

سوال 7.116: $\int \frac{8r dr}{4r^2-5}$

سوال 7.117: $\int_0^\pi \frac{\sin t}{2-\cos t} dt$
 جواب: $\ln 3$

سوال 7.118: $\int_0^{\pi/3} \frac{4 \sin \theta}{1-4 \cos \theta} d\theta$

سوال 7.119: $\int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx$
 جواب: $(\ln 2)^2$

سوال 7.120: $\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$

سوال 7.121: $\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
 جواب: $\frac{1}{\ln 4}$

سوال 7.122: $\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

سوال 7.123: $\int \frac{3\sec^2 t}{6+3\tan t} dt$
جواب: $\ln|6+3\tan t| + C$

سوال 7.124: $\int \frac{\sec y \tan y}{2+\sec y} dy$

سوال 7.125: $\int_0^{\pi/2} \tan \frac{x}{2} dx$
جواب: $\ln 2$

سوال 7.126: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t dt$

سوال 7.127: $\int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cot \frac{\theta}{3} d\theta$
جواب: $\ln 27$

سوال 7.128: $\int_0^{\pi/12} 6 \tan 3x dx$

سوال 7.129: $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+2x}}$
جواب: $\ln(1+\sqrt{x}) + C$

سوال 7.130: $\int \frac{\sec x dx}{\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)}}$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.131: درج ذیل کے مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\ln(\cos x)$, $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ ب. $\cos(\ln x)$, $[\frac{1}{2}, 2]$

جواب: (i) $x = 0$ پر بلند تر 0 اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر کم تر $-\ln 2$; (ب) $x = 1$ پر بلند تر 1 اور $x = \frac{1}{2}$ پر کم تر $\cos(\ln 2)$

سوال 7.132: (i) ثابت کریں کہ $x > 1$ کے لئے $f(x) = x - \ln x$ بڑھتا ہے۔ (ب) $x > 1$ کی صورت میں جزو-استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\ln x < x$ ہوگا۔

سوال 7.133: منحنی $y = \ln x$ اور $y = \ln 2x$ کے قع $x = 1$ تا $x = 5$ رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $\ln 16$

سوال 7.134: منحنی $y = \tan x$ اور محور x کے قع $x = -\frac{\pi}{4}$ تا $x = \frac{\pi}{3}$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 7.135: ربع اول میں محدودی لکیروں، منحنی $x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}$ اور لکیر $y = 3$ کے قع خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $4\pi \ln 4$

سوال 7.136: منحنی $y = \sqrt{\cot x}$ اور محور x پر $x = \frac{\pi}{6}$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ کے قع خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 7.137: منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور محور x پر $x = \frac{1}{2}$ تا $x = 2$ کے قع خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $\pi \ln 16$

سوال 7.138: منحنی $y = \frac{9x}{\sqrt{x^3+9}}$ اور محور x پر $x = 0$ تا $x = 3$ کے قع خطہ کو صفحہ 671 پر سوال 6.125 میں محور y کے گرد گھما کر 36π حجم کا جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر اس خطہ کو محور x کے گرد گھمایا کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب اس جسم کا حجم کتنا ہوگا؟

سوال 7.139: درج ذیل منحنیات کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \frac{x^2}{8} - \ln x, \quad 4 \leq x \leq 8 \quad \text{ا.} \quad x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2 \ln\left(\frac{y}{4}\right), \quad 4 \leq y \leq 12 \quad \text{ب.}$$

جواب: (ا) $6 + \ln 2$ ، (ب) $8 + \ln 9$

سوال 7.140: ایک منحنی کی $x = 1$ تا $x = 2$ لمبائی درج ذیل ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

سوال 7.141: (ا) منحنی $y = \frac{1}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے قع خطہ کا وسطانی مرکز دو اعشاریہ درستی تک تلاش کریں۔ (ب) خطہ کا خاکہ بنا کر وسطانی مرکز دکھائیں۔
جواب: (ا) $\bar{x} \approx 1.44, \bar{y} \approx 0.36$

سوال 7.142: (i) ایک پتلی چادر جس کی کثافت مستقل ہے مخفی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 16$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (ب) اگر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ہو تب اس کی کمیت کا مرکز کیا ہوگا؟

سوال 7.143 اور سوال 7.144 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل کو حل کریں۔

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3 \quad \text{سوال 7.143}$$

$$y = x + \ln|x| + 2 \quad \text{جواب:}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \text{سوال 7.144}$$

سوال 7.145: نقطہ $x = 0$ پر $\ln(1+x)$ کی خط بندی کی خاطر $x = 1$ کے قریب x کی تخمین کی بجائے ہم $x = 0$ کے قریب $\ln(1+x)$ کی تخمین لیتے ہیں۔ اس طرح نسبتاً سادہ کلیہ حاصل ہوتا ہے۔ (i) نقطہ $x = 0$ کے قریب $\ln(1+x) \approx x$ کی خط بندی کریں۔ (ب) وقفہ $[0, 0.1]$ پر $\ln(1+x)$ کی بجائے x استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ تک تلاش کریں۔ (ج) مخفی $y = \ln(1+x)$ اور $y = x$ کو ایک ساتھ وقفہ $[0, 0.5]$ پر ترسیم کریں۔ کس نقطہ پر خط بندی بہتر سے بہتر ہے؟ خراب سے خراب ہے؟ ترسیم سے زیادہ خلل پڑھ کر تلاش کریں۔
جواب: (ب) 0.00469

سوال 7.146: اگرچہ لوگار تھمی تقابل کی خط بندی سے چھوٹے وقفہ پر بہترین نتائج حاصل ہوتے ہیں، قاعدہ سمسن کسی مخصوص $\ln x$ کی زیادہ بہتر قیمت دیتا ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر $\ln(1.2)$ اور $\ln(0.8)$ کی 5 اعشاریہ قیمتیں بالترتیب 0.18232 اور -0.22314 ہیں۔ ان قیمتوں کو پہلے کلیہ $\ln(1+x) \approx x$ اور بعد میں $n = 2$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ (نتائج حیرت کن حد تک درست ہیں!)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln x} \quad \text{سوال 7.147}$$

اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔
جواب: 2

سوال 7.148: کیا ہر نقطہ پر $y = \ln 3x$ اور $y = \ln 3x$ کے تفرق برابر ہو سکتے ہیں۔ (تفرق لے کر دیکھیں۔) تقابل $y = \ln kx$ جہاں k مثبت مستقل ہے کے لئے کیا کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.149: تقابل $\ln x$ ، $\ln 2x$ ، $\ln 4x$ ، $\ln 8x$ اور $\ln 16x$ کو $0 < x \leq 10$ کے لئے ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟ وجہ بیان کریں۔

سوال 7.150: تقابل $y = \ln|\sin x|$ کو ترسیم کر کے کمپیوٹر کے شیٹ پر $0 \leq x \leq 22$ اور $-2 \leq y \leq 0$ کے بیچ نتائج دیکھیں۔ آپ کو کیا نظر آتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔ ترسیم کو الٹا کرنے کے لئے تقابل میں کیا تبدیلی کرنی ہوگی؟

سوال 7.151: (i) تقابل $y = \sin x$ اور $y = \ln(a + \sin x)$ کو $a = 2, 4, 8, 20, 50$ کے لئے ایک ساتھ $0 \leq x \leq 23$ پر ترسیم کریں۔ (ب) a کی قیمت بڑھنے سے ترسیمات افقی صورت کیوں اختیار کرتے ہیں؟ (اشارہ۔ a کے لحاظ سے $|y'|$ کی بالائی حد تلاش کریں۔)

سوال 7.152: کیا $y = \sqrt{x} - \ln x$ کا نقطہ قصر یف پایا جاتا ہے؟ اس کا جواب (i) ترسیم اور (ب) احصاء سے دیں۔

7.3 قوت نمائی تفاعل

اگر وقت کے لحاظ سے کسی مقدار y میں تبدیلی اس کی موجودہ قیمت y کے راست متناسب ہو تب یہ مقدار ایسا تفاعل ہو گا جو درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{مستقل } k$$

اگر لحد $t = 0$ پر $y = y_0$ ہو تب یہ قوت نمائی تفاعل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ اس حصہ میں قوت نمائی تفاعل کی تعریف (یہ $\ln x$ کا الٹ ہے) پیش کی جائے گی اور ان خواص پر غور کیا جائے گا جن کی بدولت قوت نمائی تفاعل ریاضیات اور استعمال میں کثرت سے پایا جاتا ہے (حصہ 7.5)۔

$\ln x$ کا الٹ اور عدد e

تفاعل $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ $\ln x$ کا دائرہ کار $(0, \infty)$ اور سعت $(-\infty, \infty)$ ہے جبکہ اس کا الٹ $\ln^{-1} x$ ہے جس کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ اور سعت $(0, \infty)$ ہے۔ کیمر $y = x$ میں $\ln x$ کا عکس تفاعل $\ln^{-1} x$ کی ترسیم دیتی ہے۔ آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل $\ln^{-1} x$ کے لئے

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln^{-1} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln^{-1} x = 0$$

ہو گا۔ عدد $\ln^{-1} 1$ کو حرف e سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 7.32)۔

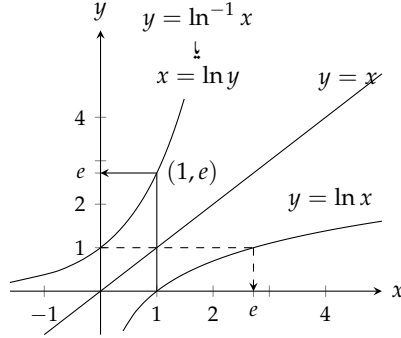
$$e = \ln^{-1} 1 \quad \text{تعریف}$$

اگرچہ e مناطق عدد نہیں ہے، ہم باب میں دیکھیں گے کہ درج ذیل کلیہ سے، کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے، ہم جتنے اعشاریہ تک اس کی قیمت چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

15 اعشاریہ تک e کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045$$



شکل 7.32: تفاعل $y \ln x$ اور تفاعل $y = \ln^{-1} x$ ۔ عدد e سے مراد $\ln^{-1} 1$ ہے۔

تفاعل $y = e^x$

کسی بھی مثبت عدد کی طرح ہم عدد e کو x کی ناطق طاقت تک بڑھا سکتا ہیں:

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

چونکہ e مثبت ہے لہذا e^x بھی مثبت ہو گا اور یوں e^x کا لوگار تھم بھی پایا جائے گا:

$$(7.10) \quad \ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x$$

چونکہ $\ln x$ ایک ایک ہے اور $\ln(\ln^{-1} x) = x$ ہے لہذا مساوات 7.10 کے تحت

$$(7.11) \quad e^x = \ln^{-1} x \quad \text{ناطق } x$$

ہو گا۔ مساوات 7.11 کی مدد سے e^x کی تعریف کو وسعت دے کر غیر ناطق x کو بھی شامل کیا جاسکتا ہے۔ x کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $\ln^{-1} x$ معین ہے لہذا ہم اس کو استعمال کرتے ہوئے e^x کو ان نقطوں پر بھی قیمت مختص کر سکتے ہیں جہاں پہلے e^x کی کوئی قیمت نہیں پائی جاتی تھی۔ اس طرح قوت نمائی تفاعل کی عالمگیر تعریف درج ذیل ہو گی۔

تعریف: e^x

$$e^x = \ln^{-1} x, \quad \text{ہر حقیقی عدد } x \text{ کے لئے}$$

□

ایسی مساواتیں جن میں $\ln x$ اور e^x موجود ہوں

چونکہ $\ln x$ اور e^x ایک دوسرے کے الٹ ہیں لہذا ان کی الٹ مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$(7.12) \quad e^{\ln x} = x \quad \text{تمام } x > 0$$

$$(7.13) \quad \ln(e^x) = x, \quad \text{تمام } x$$

ہو گا۔ اگلی مثال کے کچھ حصوں کو کیلکولیٹر سے حل کریں۔

مثال 7.15:

$$ا. \ln e^2 = 2 \quad .د. e^{\ln 2} = 2$$

$$ب. \ln e^{-1} = -1 \quad .و. e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$$

$$ج. \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \quad ز. e^{3 \ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8 \quad \text{ایک طریقہ}$$

$$د. \ln e^{\sin x} = \sin x \quad ح. e^{3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8 \quad \text{دوسرا طریقہ}$$

□

مثال 7.16: مساوات $\ln y = 3t + 5$ میں y تلاش کریں۔

حل: دونوں اطراف کا قوت نما لیتے ہیں:

$$e^{\ln y} = e^{3t+5}$$

$$y = e^{3t+5}$$

مساوات 7.12

□

مثال 7.17: اگر $e^{2k} = 10$ تب k کتنا ہو گا؟

حل: دونوں اطراف کا قدرتی لوگار تھم لیتے ہیں:

$$e^{2k} = 10$$

$$\ln e^{2k} = \ln 10$$

$$2k = \ln 10$$

$$k = \frac{1}{2} \ln 10$$

مساوات 7.13

□

جدول 7.2: قواعد برائے e^x کے قوت نما

تمام اعداد x_1 اور x_2 کے لئے	
$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$	ا
$e^{-1} = \frac{1}{e^x}$	ب
$\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$	ج
$(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$	د

قواعد قوت نما

اگرچہ e^x کی تعریف $\ln^{-1} x$ پر منحصر ہے، یہ الجبرا کے قواعد (جدول 7.2) برائے قوت نما کو مطمئن کرتا ہے۔

ثبوت: برائے قاعدہ-ا اگر ذیل ذیل

$$y_1 = e^{x_1}, \quad y_2 = e^{x_2}$$

ہوں تب مساوات کے دونوں اطراف کے لوگار تھم لیتے ہوئے

$$x_1 = \ln y_1$$

$$x_2 = \ln y_2$$

ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$x_1 + x_2 = \ln y_1 + \ln y_2$$

$$= \ln y_1 y_2$$

$$e^{x_1+x_2} = e^{\ln y_1 y_2}$$

$$= y_1 y_2$$

$$= e^{x_1} e^{x_2}$$

قاعدہ ضرب

قوت نما

$$e^{\ln u} = u$$

□

قاعدہ-د کا ثبوت بھی اس سے ملتا جلتا ہے۔ قواعد-ب اور ج کو قاعدہ-ا سے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال 7.230)۔

مثال 7.18:

$$\begin{aligned}
 e^{x+\ln 2} &= e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x && \text{قاعدہ-ا} \\
 e^{-\ln x} &= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} && \text{قاعدہ-ب} \\
 \frac{e^{2x}}{e} &= e^{2x-1} && \text{قاعدہ-ج} \\
 (e^3)^x &= e^{3x} = (e^x)^3 && \text{قاعدہ-د}
 \end{aligned}$$

□

 e^x کا تفرق اور مکمل

قوت نمائی تفاعل ایک ایسے قابل تفرق تفاعل کا الٹ ہے جس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہوتا ہے لہذا قوت نمائی تفاعل بھی قابل تفرق ہو گا۔
 $y = e^x$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 y &= e^x \\
 \ln y &= x && \text{دونوں اطراف لوگار تھم} \\
 \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 1 && \text{دونوں اطراف } x \text{ کے لحاظ سے تفرق} \\
 \frac{dy}{dx} &= y \\
 \frac{dy}{dx} &= e^x && y \text{ کی جگہ } e^x
 \end{aligned}$$

یوں ثابت ہوتا ہے کہ e^x کا تفرق از خود e^x ہے۔

ہم حصہ 7.5 میں دیکھیں گے کہ یہ خاصیت صرف e^x کے مستقل مضرب تفاعل رکھتا ہے۔

$$(7.14) \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

مثال 7.19:

$$\frac{d}{dx} (5e^x) = 5 \frac{d}{dx} e^x = 5e^x$$

□

زنجیری قاعدہ مساوات 7.14 کو وسعت دے کر عمومی روپ دیتا ہے۔ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$(7.15) \quad \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

مثال 7.20:

$$(i) \quad \frac{d}{dx} e^{-x} = e^{-x} \frac{d}{dx} (-x) = e^{-x} (-1) = -e^{-x} \quad u = -x \text{ میں مساوات 7.15}$$

$$(ب) \quad \frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \frac{d}{dx} (\sin x) = e^{\sin x} \cdot \cos x \quad u = \sin x \text{ میں مساوات 7.15}$$

□

مساوات 7.15 کا تکملی مساوی درج ذیل ہے جہاں C مستقل ہے۔

$$\int e^u du = e^u + C$$

مثال 7.21:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} e^{3x} dx &= \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3} du & u = 3x \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\ln 8} e^u du \\ &= \frac{1}{3} e^u \Big|_0^{\ln 8} \\ &= \frac{1}{3} [8 - 1] = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

□

مثال 7.22:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx &= e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/2} & \text{مثال 7.20} \\ &= e^1 - e^0 = e - 1 \end{aligned}$$

□

مثال 7.23: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2x, \quad x > \sqrt{3}, \quad y(2) = 0$$

حل: ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔

$$e^y = x^2 + C$$

ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} C &= e^0 - (2)^2 \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(7.16) \quad e^y = x^2 - 3$$

y تلاش کرنے کی خاطر ہم دونوں اطراف کا لوگار تھم لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (7.17) \quad \ln e^y &= \ln(x^2 - 3) \\ y &= \ln(x^2 - 3) \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $x > \sqrt{3}$ کے لئے حل درست ہے۔

تفرقی مساوات میں حل کو پر کر کے تصدیق کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مساوات 7.16 اور مساوات 7.17 کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^y \frac{dy}{dx} &= e^y \frac{d}{dx}(x^2 - 3) \\ &= e^y \frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= (x^2 - 3) \frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= 2x \end{aligned}$$

□

یوں تفرقی مساوات کو حل مطمئن کرتا ہے۔

سوالات

قوت نما اور لوگارٹھم کے ساتھ الجبرائی حساب
سوال 7.153 تا سوال 7.156 میں سادہ صورت دریافت کریں۔

سوال 7.153: (i) $e^{\ln 7.2}$ ، (ب) $e^{-\ln x^2}$ ، (ج) $e^{\ln x - \ln y}$
جواب: (i) 7.2، (ب) $\frac{1}{x^2}$ ، (ج) $\frac{x}{y}$

سوال 7.154: (i) $e^{\ln(x^2+y^2)}$ ، (ب) $e^{-\ln 0.3}$ ، (ج) $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

سوال 7.155: (i) $2 \ln \sqrt{e}$ ، (ب) $\ln(\ln e^e)$ ، (ج) $\ln(e^{-x^2-y^2})$
جواب: (i) 1، (ب) 1، (ج) $-x^2 - y^2$

سوال 7.156: (i) $\ln(e^{\sec \theta})$ ، (ب) $\ln(e^{e^x})$ ، (ج) $\ln(e^{2 \ln x})$

لوگارٹھمی یا قوت نمائی اجزاء والے مساوات کا حل
سوال 7.157 تا سوال 7.162 میں t یا x (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کے لئے حل کریں۔

سوال 7.157: $\ln y = 2t + 4$
جواب: e^{2t+4}

سوال 7.158: $\ln y = -t + 5$

سوال 7.159: $\ln(y - 40) = 5t$
جواب: $e^{5t} + 40$

سوال 7.160: $\ln(1 - 2y) = t$

سوال 7.161: $\ln(y - 1) - \ln 2 = x + \ln x$
جواب: $y = 2xe^x + 1$

سوال 7.162: $\ln(y^2 - 1) - \ln(y + 1) = \ln(\sin x)$

سوال 7.163 اور سوال 7.164 کو k کے لئے حل کریں۔

سوال 7.163: (i) $e^{2k} = 4$ ، (ب) $100e^{10k} = 200$ ، (ج) $e^{k/1000} = a$
جواب: (i) $k = \ln 2$ ، (ب) $k = \frac{1}{10} \ln 2$ ، (ج) $k = 1000 \ln a$

سوال 7.164: $e^{(\ln 0.8)k} = 0.8$ (ج)، $80e^k = 1$ (ب)، $e^{5k} = \frac{1}{4}$ (ا)

سوال 7.165 تا سوال 7.168 کو t کے لئے حل کریں۔

سوال 7.165: $e^{(\ln 0.2)t} = 0.4$ (ج)، $e^{kt} = \frac{1}{2}$ (ب)، $e^{-0.3t} = 27$ (ا)
جواب: $t = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.2}$ (ج)، $t = -\frac{\ln 2}{k}$ (ب)، $t = -10 \ln 3$ (ا)

سوال 7.166: $e^{(\ln 2)t} = \frac{1}{2}$ (ج)، $e^{kt} = \frac{1}{10}$ (ب)، $e^{-0.01t} = 1000$ (ا)

سوال 7.167: $e^{\sqrt{t}} = x^2$
جواب: $4(\ln x)^2$

سوال 7.168: $e^{(x^2)}e(2x+1) = e^t$

تفرقات

سوال 7.169 تا سوال 7.188 میں x ، t یا θ (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 7.169: $y = e^{-5x}$
جواب: $-5e^{-5x}$

سوال 7.170: $y = e^{2x/3}$

سوال 7.171: $y = e^{5-7x}$
جواب: $-7e^{5-7x}$

سوال 7.172: $y = e^{4\sqrt{x}+x^2}$

سوال 7.173: $y = xe^x - e^x$
جواب: xe^x

سوال 7.174: $y = (1+2x)e^{-2x}$

سوال 7.175: $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$
جواب: x^2e^x

سوال 7.176: $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$

سوال 7.177: $y = e^{\theta}(\sin \theta + \cos \theta)$
جواب: $2e^{\theta} \cos \theta$

7.3. قوت نمائی تفاعل

سوال 7.178 : $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

سوال 7.179 : $y = \cos(e^{-\theta^2})$
جواب: $2\theta e^{-\theta^2} \sin(e^{-\theta^2})$

سوال 7.180 : $y = \theta^3 e^{-2\theta} \cos 5\theta$

سوال 7.181 : $y = \ln(3te^{-t})$
جواب: $\frac{1-t}{t}$

سوال 7.182 : $y = \ln(2e^{-t} \sin t)$

سوال 7.183 : $y = \ln\left(\frac{e^\theta}{1+e^\theta}\right)$
جواب: $\frac{1}{1+e^\theta}$

سوال 7.184 : $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$

سوال 7.185 : $y = e^{(\cos t + \ln t)}$
جواب: $e^{\cos t} (1 - t \sin t)$

سوال 7.186 : $y = e^{\sin t} (\ln t^2 + 1)$

سوال 7.187 : $y = \int_0^{\ln x} \sin e^t dt$
جواب: $\frac{\sin x}{x}$

سوال 7.188 : $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t dt$

سوال 7.189 تا سوال 7.192 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 7.189 : $\ln y = e^y \sin x$
جواب: $\frac{ye^y \cos x}{1 - ye^y \sin x}$

سوال 7.190 : $\ln xy = e^{x+y}$

سوال 7.191 : $e^{2x} = \sin(x + 3y)$
جواب: $\frac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{3 \cos(x + 3y)}$

سوال 7.192: $\tan y = e^x + \ln x$

تکملات

سوال 7.193 تا سوال 7.214 میں مکمل حل کریں۔

سوال 7.193: $\int (e^{ex} + 5e^{-x}) dx$
جواب: $\frac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$

سوال 7.194: $\int (2e^x - 3e^{-2x}) dx$

سوال 7.195: $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$
جواب: 1

سوال 7.196: $\int_{-\ln 2}^0 e^{-x} dx$

سوال 7.197: $\int 8e^{(x+1)} dx$
جواب: $8e^{x+1} + C$

سوال 7.198: $\int 2e^{2x-1} dx$

سوال 7.199: $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2} dx$
جواب: 2

سوال 7.200: $\int_0^{\ln 16} e^{x/4} dx$

سوال 7.201: $\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} dr$
جواب: $2e^{\sqrt{r}} + C$

سوال 7.202: $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} dr$

سوال 7.203: $\int 2te^{-t^2} dt$
جواب: $-e^{-t^2} + C$

سوال 7.204: $\int t^3 e^{t^4} dt$

سوال 7.205: $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
جواب: $-e^{1/x} + C$

سوال 7.206: $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx$

سوال 7.207: $\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan \theta}) \sec^2 \theta d\theta$
جواب: e

سوال 7.208: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot \theta}) \csc^2 \theta d\theta$

سوال 7.209: $\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \tan \pi t dt$
جواب: $\frac{1}{\pi} e^{\sec \pi t} + C$

سوال 7.210: $\int e^{\csc(\pi+t)} \csc(\pi+t) \cot(\pi+t) dt$

سوال 7.211: $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^y \cos e^y dy$
جواب: 1

سوال 7.212: $\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2} \cos(e^{x^2}) dx$

سوال 7.213: $\int \frac{e^r}{1+e^r} dr$
جواب: $\ln(1+e^r) + C$

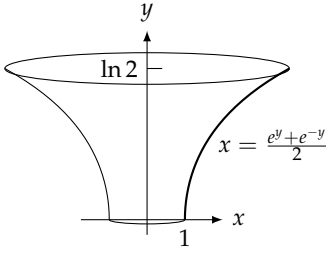
سوال 7.214: $\int \frac{dx}{1+e^x}$

ابتدائی قیمت مسائل
سوال 7.215 تا سوال 7.218 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

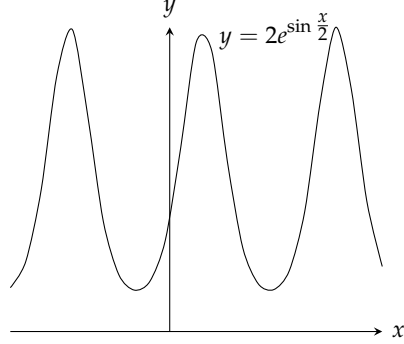
سوال 7.215: $\frac{dy}{dx} = e^t \sin(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0$
جواب: $y = 1 - \cos(e^t - 2)$

سوال 7.216: $\frac{dy}{dt} = e^{-t} \sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = \frac{2}{\pi}$

سوال 7.217: $\frac{d^2}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
جواب: $y = 2(e^{-x} + x) - 1$



شکل 7.34: برائے سوال 7.226



شکل 7.33: ترسیم برائے سوال 7.220

سوال 7.218: $\frac{d^2}{dt^2} = 1 - e^{2t}$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.219: وقفہ $[0, 1]$ پر $f(x) = e^x - 2x$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔
جواب: نقطہ $x = 0$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1؛ نقطہ $x = \ln 2$ پر مطلق کم سے کم $2 - 2\ln 2$

سوال 7.220: تفاعل $f(x) = 2e^{\sin \frac{x}{2}}$ کے مطلق انتہا قیمتیں کیا اور کہاں ہیں (شکل 7.33)۔

سوال 7.221: تفاعل $f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمت کہاں پائی جاتی ہے۔
جواب: $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ $\frac{1}{2e}$

سوال 7.222: تفاعل $f(x) = (x-3)^2 e^x$ اور اس کا ایک رتبی تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے f کے رویہ پر تبصرہ کریں۔ احصاء کی مدد سے ترسیم پر نمایاں نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 7.223: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{2x}$ ، چلی جانب قوس $y = e^x$ اور دائیں جانب لکیر $x = \ln 3$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔
جواب: 2

سوال 7.224: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{x/2}$ ، چلی جانب قوس $y = e^{-x/2}$ اور دائیں جانب لکیر $x = 2\ln 2$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔

سوال 7.225: مستوی xy میں مبدا سے گزرتی وہ قوس تلاش کریں جس کی لمبائی $x = 0$ سے $x = 1$ تک $L =$

$$-\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^x}{4}} dx$$

 جواب: $y = e^{x/2} - 1$

سوال 7.226: منحنی $x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, 0 \leq y \leq \ln 2$ کو محور y کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.34)۔
 اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 7.227: (i) دکھائیں $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ ، (ب) وقفہ $[1, e]$ پر $\ln x$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔
 جواب: (i) $\frac{d}{dx}(x \ln x - x + C) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x - 1 + 0 = \ln x$ (ب) $\frac{1}{e-1}$

سوال 7.228: وقفہ $[1, 2]$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.229: نقطہ $x = 0$ پر e^x کی خط بندی

ا. نقطہ $x = 0$ پر خط بندی $e^x \approx 1 + x$ حاصل کریں۔

ب. وقفہ $[0, 0.2]$ پر e^x کی جگہ $1 + x$ استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ تک تلاش کریں۔

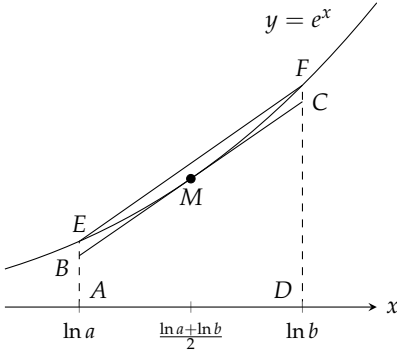
ج. وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر e^x اور $1 + x$ کو ایک ساتھ کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ کس وقفہ پر تخمین زیادہ قیمت دیتا ہے؟ کم قیمت دیتی ہے؟

جواب: (ب) حتی خلل تقریباً 0.02140

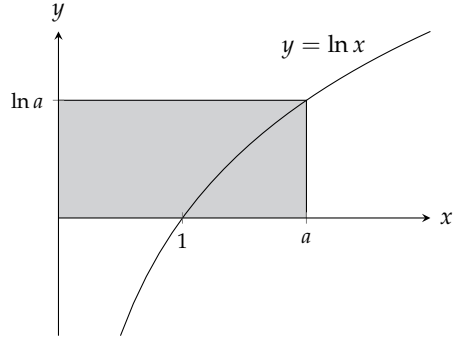
سوال 7.230: قواعد قوت نما

ا. مساوات $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ جس کو اس حصہ میں حاصل کیا گیا، سے شروع کر کے دکھائیں کہ کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ہو گا۔ اس کے بعد کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لئے دکھائیں کہ $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$ ہو گا۔

ب. کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لئے دکھائیں کہ $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$ ہو گا۔



شکل 7.36: ترتیم برائے سوال 7.234



شکل 7.35: ترتیم برائے سوال 7.233

سوال 7.231: e کا اعشاری اظہار
 مساوات $\ln x = 1$ کو حل کرتے ہوئے e کی قیمت اتنے اعشاریہ تک تلاش کریں جتنے تک آپ کا کیلو لیٹر استعمال کرتے ہوئے ممکن ہو۔

جواب: 2.71828183

سوال 7.232: $\ln x$ اور e^x کے مابین الٹ تعلق
 کیلو لیٹر استعمال کرتے ہوئے مرکبات $e^{\ln x}$ اور $\ln(e^x)$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.233: دکھائیں کہ کسی بھی عدد $a > 1$ کے لئے درج ذیل ہوگا (شکل 7.35)۔

$$\int_1^{\ln a} 6a \ln x \, dx + \int_0^{\ln a} e^y \, dy = a \ln a$$

سوال 7.234: تکنیکی، لوگار تھمی اور حسابی اوسط عدم مساوات

ا. دکھائیں کہ x کے ہر وقفہ پر e^x کی ترتیم مقعر اوپر ہے۔

ب. اگر $0 < a < b$ ہو تب دکھائیں کہ درج ذیل ہوگا (شکل 7.36)۔

$$e^{(\ln a + \ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x \, dx < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a)$$

ج. جزو-ب کی عدم مساوات کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\sqrt{ab} < \frac{b-1}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

یہ عدم مساوات کہتی ہے کہ دو مثبت اعداد کا ہندسی اوسط ان کے لوگار تھمی اوسط سے کم ہوگا جو از خود ان کی حسابی اوسط سے کم ہوگا۔

7.4 $\log_a x$ اور a^x

اب تک ماسوائے e کے ہم نے مثبت اعداد کو غیر ناطق طاقت دینا نہیں سیکھا ہے۔ قوت نمائی تفاعل کی تعریف $x = \ln^{-1} x$ ، متغیر x کی تمام حقیقی قیمتوں، ناطق اور غیر ناطق، کے لئے درست ہے۔ اس حصہ میں ہم اس تعریف کو استعمال کر کے کسی بھی مثبت عدد کو کسی بھی ناطق یا غیر ناطق کی طاقت دینا سیکھ کر مثبت عدد a کے لئے قوت نمائی تفاعل $y = a^x$ کی تعریف پیش کریں گے۔ اس کے ساتھ ساتھ ہم تفرق کے طاقی قاعدہ کو حتیٰ شکل دیں گے (جو تمام قوت نما کے لئے درست ہوگا) اور ایک تفاعل کو دوسرے تفاعل کی طاقت دیں گے مثلاً x^x اور $(\sin x)^{\tan x}$ ، وغیرہ۔

جیسا e^x بہت سارے قوت نما تفاعل میں سے ایک ہے، اسی طرح $\ln x$ بھی بہت سارے لوگار تھمی تفاعل، جو تفاعل a^x کے الٹ ہیں، میں سے ایک ہے۔

تفاعل a^x

چونکہ کسی بھی مثبت عدد a کے لئے $a = e^{\ln a}$ ہوتا ہے لہذا ہم a^x کو $a^x = e^{x \ln a}$ تصور کر سکتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$(7.18) \quad a^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0 \quad \text{تعریف}$$

مثال 7.24:

$$(i) \quad 2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2}$$

$$(ب) \quad 2^\pi = e^{\pi \ln 2}$$

□

تفاعل a^x قوت نما کے عمومی قواعد جنہیں جدول 7.3 میں پیش کیا گیا ہے کو مطمئن کرتا ہے۔ ہم ان قواعد کے ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

جدول 7.3: قواعد برائے قوت نما

$a > 0$ ہے جبکہ x اور y کوئی بھی اعداد ہو سکتے ہیں	
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	ا
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	ب
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	ج
$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$	د

قاعدہ طاقت (حتمی صورت)

اساس a کے لوگارٹھم کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں اس کو پہلے قدرتی لوگارٹھم کی صورت میں لکھتے ہیں۔ اگر u متغیر x کا مثبت قابل تفرق تفاعل ہو تب

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln u}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

یعنی

$$(7.19) \quad \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

ہو گا۔

مثال 7.25:

$$\frac{d}{dx} \log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3x+1} \frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

□

تکمل جہاں $\log_a x$ پایا جاتا ہو

جب اساس a کا لوگارٹھم پایا جاتا ہو تب تکمل لیتے ہوئے ہم اس کو پہلے قدرتی لوگارٹھم کی صورت میں بدلتے ہیں۔

مثال 7.26:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\log_2 x}{x} dx &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{\ln x}{x} dx & \log_2 x &= \frac{\ln x}{\ln 2} \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \int u du & u &= \ln x \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \frac{u^2}{2} + C \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2 \ln 2} + C
 \end{aligned}$$

□

اساس 10 لوگار تھم

اساس 10 لوگار تھم جس کو عام لوگار تھم⁸ کہتے ہیں کئی سائنسی کلیات میں پایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر زلزلہ کی شدت کو عموماً اساس 10 کے لوگار تھمی⁹ ریکٹر پیمائش¹⁰ میں پیش جاتا ہے۔ ریکٹر پیمائش کا کلیہ

$$R = \log_{10} \left(\frac{a}{T} \right) + B$$

ہے جہاں زلزلہ پیمائش کے مقام پر زمینی لرزش کا حیظ a ہے جس کو مائیکرو میٹر میں ناپا جاتا ہے، زلزلہ کی موج کا دوری عرصہ T ہے جس کو سینڈ میں ناپا جاتا ہے جبکہ B ایک تجربی جزو ہے جو مرکز زلزلہ اور زلزلہ پیمائش کے بیچ شدت کی کمی کو ظاہر کرتا ہے۔

جاپان کے شہر ناگاساکی پر گرائے گئے ایٹمی بم میں 1.34×10^{14} J توانائی تھی جو ریکٹر پیمائش پر 5 کے برابر ہے۔ آج تک سب سے بڑا ایٹمی دھماکہ 7.1 شدت کا تھا جس میں 2.09×10^{17} J توانائی تھی۔ اکتوبر 8 2005 کو آزاد کشمیر میں 7.6 شدت کا زلزلہ آیا جس میں 1.585×10^{16} J توانائی تھی۔

مثال 7.27: مرکز زلزلہ سے زلزلہ پیمائش تک فاصلہ 10 000 km ہے جس کے لئے $B = 6.8$ ہو گا۔ مقام زلزلہ پیمائش پر زمین کی انتہائی حرکت $10 \mu\text{m}$ اور دوری عرصہ 1 s ہیں۔ زلزلہ کی شدت تلاش کریں۔

حل:

$$R = \log_{10} \left(\frac{10}{1} \right) + 6.8 = 1 + 6.8 = 7.8$$

□

محلول کی تیزابیت کو pH (طاقت ہائیڈروجن) میں ناپا جاتا ہے جو اساس 10 کا لوگار تھمی پیمانہ¹¹ ہے۔ محلول میں ہائیڈرو نیوم برق پارہ

common logarithm⁸⁹ ریکٹر پیمائش میں اکائی کا اضافہ حیظ میں تقریباً 10 گنا اور توانائی میں تقریباً 31.623 گنا کا اضافہ ظاہر کرتا ہے۔Richter scale¹⁰¹¹ pH کی جدید تعریف کے تحت اس کو "محلی قوت ہائیڈروجن" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔

جدول 7.4: عمومی خوراک کی $pH < 7$ ہے۔

خوراک	pH
کیلا	4.5 – 4.7
چکوترہ	3.0 – 3.3
سنفرا	3.0 – 4.0
لیموں	1.8 – 2.0
دودھ	6.3 – 6.6
مرچ	5.1 – 5.7

$[H_3O^+]$ کے گھٹنا پن کے بالعکس کا عام لوگار تھم اس محلول کی pH قیمت ہوگی:

$$pH = \log_{10} \frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}[H_3O^+]$$

ہائیڈروجنم برق پارہ کے گھٹنا پن کو مول فی لٹر (mol L^{-1}) میں ناپا جاتا ہے۔ تیزاب کی pH قیمت 7 سے کم جبکہ اقلی کی 7 سے زیادہ ہوتی ہے۔ سرکہ کی pH قیمت 3 جبکہ مقطر پانی کی pH قیمت 7 ہوتی ہے۔ pH کا پیمانہ 0 سے 14 تک ہوتا ہے۔ جدول 7.4 میں کئی اجزاء کی pH دی گئی ہے۔

لوگار تھم کی ایک اور مثال ڈیسی بیل dB پیمانہ ہے جو صدا کی بلندی کو ناپنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر صدا کی شدت I واٹ فی مربع میٹر ہو تب

$$(7.20) \quad \text{سطح صدا} = 10 \log_{10}(I \times 10^{12}) \text{ dB}$$

ہوگا۔ جیسا اگلا مثال دکھاتا ہے، شدت صدا کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں تقریباً 3 dB کا اضافہ ہوتا ہے۔

مثال 7.28: صدا کی شدت کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں کتنا اضافہ ہوگا؟

حل: مساوات 7.20 کے تحت $2I$ شدت صدا کے لئے

$$\begin{aligned} \text{مساوات 7.20 میں } 2I &= 10 \log_{10}(2I \times 10^{12}) \\ &= 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10}(I \times 10^{12}) \\ &= 10 \log_{10} 2 + \text{اصل شدت کی سطح صدا} \\ &\approx 3 + \text{اصل شدت کی سطح صدا} \end{aligned}$$

$$\log_{10} \approx 0.3$$

□

ہوگا۔

سطح صدا کی چند قیمتیں جدول 7.5 میں دی گئی ہیں۔

جدول 7.5: سطح صدا کی چند قیمتیں۔

0 dB	ساعت کی کمتر سطح
10 dB	پتوں کا سرسرانا
20 dB	سرگوشی
50 dB	خاموش گاڑی
65 dB	عام بات چیت
90 dB	تین میٹر دور ہوائی برما
120 dB	کانوں میں درد

سوالات

الجبرائی حساب

سوال 7.235 تا سوال 7.238 میں ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

سوال 7.235:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 5^{\log_5 7} & \text{ج. } 1.3^{\log_{1.3} 75} & \text{د. } \log_3 \sqrt{3} \\ \text{ب. } 8^{\log_8 \sqrt{2}} & \text{د. } \log_4 16 & \text{د. } \log_4 \left(\frac{1}{4} \right) \end{array}$$

سوال 7.236:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 2^{\log_2 3} & \text{ج. } \pi^{\log_\pi 7} & \text{د. } \log_{121} 11 \\ \text{ب. } 10^{\log_{10} (1/2)} & \text{د. } \log_{11} 121 & \text{د. } \log_3 \left(\frac{1}{9} \right) \end{array}$$

سوال 7.237:

$$\begin{array}{lll} \text{ا. } 2^{\log_4 x} & \text{ب. } 9^{\log 3x} & \text{ج. } \log_2 (e^{(\ln 2)(\sin x)}) \end{array}$$

سوال 7.238:

$$\text{ا. } 25^{\log_5(3x^2)} \quad \text{ب. } \log_e(e^x) \quad \text{ج. } \log_4(2^{e^x \sin x})$$

سوال 7.239 اور سوال 7.240 میں نسبت کو قدرتی لوگار تھی صورت میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 7.239:

$$\text{ا. } \frac{\log_2 x}{\log_3 x} \quad \text{ب. } \frac{\log_2 x}{\log_8 x} \quad \text{ج. } \frac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$$

سوال 7.240:

$$\text{ا. } \frac{\log_9 x}{\log_3 x} \quad \text{ب. } \frac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x} \quad \text{ج. } \frac{\log_a b}{\log_b a}$$

سوال 7.241 تا سوال 7.244 میں دی گئی مساوات حل کریں۔

$$\text{سوال 7.241: } 3^{\log_3(7) + 2^{\log_2(5)}} = 5^{\log_5(x)}$$

$$\text{سوال 7.242: } 8^{\log_8(3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$$

$$\text{سوال 7.243: } 3^{\log_3(x^2) = 5e^{\ln x}} - 3 \cdot 10^{\log_{10}(2)}$$

$$\text{سوال 7.244: } \ln e + 4^{-2 \log_4(x)} = \frac{1}{x} \log_{10}(100)$$

سوال 7.245 تا سوال 7.272 میں دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

$$\text{سوال 7.245: } y = 2^x$$

$$\text{سوال 7.246: } y = 3^{-x}$$

$$\text{سوال 7.247: } y = 5^{\sqrt{s}}$$

$$\text{سوال 7.248: } y = 2^{s^2}$$

$$\text{سوال 7.249: } y = x^\pi$$

$$\text{سوال 7.250: } y = t^{1-e}$$

$$y = (\cos \theta)^{\sqrt{2}} \quad \text{سوال 7.251}$$

$$y = (\ln \theta)^\pi \quad \text{سوال 7.252}$$

$$y = 7 \sec \theta \ln 7 \quad \text{سوال 7.253}$$

$$y = 3^{\tan \theta} \ln 3 \quad \text{سوال 7.254}$$

$$y = 2^{\sin 3t} \quad \text{سوال 7.255}$$

$$y = 5^{-\cos 2t} \quad \text{سوال 7.256}$$

$$y = \log_2 5\theta \quad \text{سوال 7.257}$$

$$y = \log_3(1 + \theta \ln 3) \quad \text{سوال 7.258}$$

$$y = \log_4 x + \log_4 x^2 \quad \text{سوال 7.259}$$

$$y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x} \quad \text{سوال 7.260}$$

$$y = \log_2 r \cdot \log_4 r \quad \text{سوال 7.261}$$

$$y = \log_3 r \cdot \log_9 r \quad \text{سوال 7.262}$$

$$y = \log_3 \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\ln 3} \right) \quad \text{سوال 7.263}$$

$$y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2} \right)^{\ln 5}} \quad \text{سوال 7.264}$$

$$y = \theta \sin(\log_7 \theta) \quad \text{سوال 7.265}$$

$$y = \log_7 \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{e^{\theta} 2^{\theta}} \right) \quad \text{سوال 7.266}$$

$$y = \log_5 e^x \quad \text{سوال 7.267}$$

$$y = \log_2 \left(\frac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}} \right) \quad \text{سوال 7.268}$$

$$y = 3^{\log_2 t} \quad \text{سوال 7.269}$$

$$y = 3 \log_8(\log_2 t) \quad \text{سوال 7.270:}$$

$$y = \log_2(8t^{\ln 2}) \quad \text{سوال 7.271:}$$

$$y = t \log_3(e^{(\sin t)(\ln 3)}) \quad \text{سوال 7.272:}$$

لوگاریتھمی تفرق

سوال 7.273 تا سوال 7.280 میں y کا لوگاریتھمی تفرق دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے معلوم کریں۔

$$y = (x + 1)^x \quad \text{سوال 7.273:}$$

$$y = x^{(x+1)} \quad \text{سوال 7.274:}$$

$$y = (\sqrt{t})^t \quad \text{سوال 7.275:}$$

$$y = t^{\sqrt{t}} \quad \text{سوال 7.276:}$$

$$y = (\sin x)^x \quad \text{سوال 7.277:}$$

$$y = x^{\sin x} \quad \text{سوال 7.278:}$$

$$y = x^{\ln x} \quad \text{سوال 7.279:}$$

$$y = (\ln x)^{\ln x} \quad \text{سوال 7.280:}$$

تکمل

سوال 7.281 تا سوال 7.290 میں مکمل تلاش کریں۔

$$\int 5^x dx \quad \text{سوال 7.281:}$$

$$\int (1.3)^x dx \quad \text{سوال 7.282:}$$

$$\int_0^1 2^{-\theta} d\theta \quad \text{سوال 7.283:}$$

$$\int_{-2}^0 5^{-\theta} d\theta \quad \text{سوال 7.284:}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} x 2^{(x^2)} dx \quad \text{سوال 7.285:}$$

$$\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{سوال 7.286} :$$

$$\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \sin t dt \quad \text{سوال 7.287} :$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t dt \quad \text{سوال 7.288} :$$

$$\int_2^4 x^{2x} (1 + \ln x) dx \quad \text{سوال 7.289} :$$

$$\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} dx \quad \text{سوال 7.290} :$$

سوال 7.291 تا سوال 7.294 میں دیے گئے مکمل حل کریں۔

$$\int 3x^{\sqrt{3}} dx \quad \text{سوال 7.291} :$$

$$\int x^{\sqrt{2}-1} dx \quad \text{سوال 7.292} :$$

$$\int_0^3 (\sqrt{2} + 1)x^{\sqrt{2}} dx \quad \text{سوال 7.293} :$$

$$\int_1^e x^{(\ln 2)-1} dx \quad \text{سوال 7.294} :$$

سوال 7.295 تا سوال 7.304 میں دیے گئے مکمل حل کریں۔

$$\int \frac{\log_{10} x}{x} dx \quad \text{سوال 7.295} :$$

$$\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x} dx \quad \text{سوال 7.296} :$$

$$\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x} dx \quad \text{سوال 7.297} :$$

$$\int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x} dx \quad \text{سوال 7.298} :$$

$$\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2} dx \quad \text{سوال 7.299} :$$

$$\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x} dx \quad \text{سوال 7.300} :$$

سوال 7.301: $\int_0^9 \frac{2 \log_{10}(x+1)}{x+1} dx$

سوال 7.302: $\int_2^3 \frac{2 \log_2(x-1)}{x-1} dx$

سوال 7.303: $\int \frac{dx}{x \log_{10} x}$

سوال 7.304: $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

سوال 7.305 تا سوال 7.308 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.305: $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t} dt, \quad x > 1$

سوال 7.306: $\int_1^{e^x} \frac{1}{t} dt$

سوال 7.307: $\int_1^{1/x} \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$

سوال 7.308: $\frac{1}{\ln a} \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.309: منحنی $y = \frac{2x}{1+x^2}$ اور محور x پر $-2 \leq x \leq 2$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 7.310: منحنی $y = 2^{1-x}$ اور محور x پر $-1 \leq x \leq 1$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 7.311: انسانی خون کا pH انسانی خون کے pH کی قیمت 7.37 سے 7.44 تک ہوتی ہے۔ انسانی خون میں برق پارہ $[H_3O^+]$ کے مطابقتی حدود تلاش کریں۔

سوال 7.312: دماغی سیال کا pH دماغی سیال میں $[H_3O^+]$ کا گاڑھا پن تقریباً $4.8 \times 10^{-8} \text{ mol L}^{-1}$ ہے۔ اس سیال کا pH تلاش کریں۔

سوال 7.313: افزائش کار (ایکیلی فائر) سے حاصل صدا کو جزو k سے ضرب دے کر اس سطح صدا کو 10 dB مزید بلند کیا جاتا ہے۔ جزو k کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.314: ایک افزائش کار صدا کی شدت کو 10 سے ضرب دیتا ہے۔ صدا میں کتنے dB کا اضافہ پیدا ہو گا؟

سوال 7.315: کسی بھی محلول میں $[H_3O^+]$ اور $[OH^-]$ کی گاڑھا پن کا حاصل ضرب 10^{-14} ہوتا ہے۔

ا. $[H_3O^+]$ کی کیا قیمت گاڑھا پن کی مجموعی $S = [H_3O^+] + [OH^-]$ کو کم سے کم کرتی ہے؟

ب. اس محلول کی pH تلاش کریں جس میں S کی قیمت کم سے کم ہو۔

ج. $[H_3O^+]$ اور $[OH^-]$ کی کون سی نسبت S کو کم سے کم بناتی ہے؟

سوال 7.316: کیا $\log_a b$ کی قیمت $\frac{1}{\log_b a}$ کے برابر ہو سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.317: مساوات $x^2 = 2^x$ کے دو حل $x = 2$ اور $x = 4$ ہیں جبکہ اس کا تیسرا حل بھی پایا جاتا ہے۔ ترسیم کی مدد سے تیسرا حل تلاش کریں۔

سوال 7.318: کیا $x > 0$ کے لئے $x^{\ln 2}$ اور $2^{\ln x}$ ایک دوسرے کے برابر ہو سکتے ہیں؟ دونوں تفاعل ترسیم کرتے ہوئے بتائیں کیا ہوتا ہے۔

سوال 7.319: 2^x کی خط بندی (i) نقطہ $x = 0$ پر $f(x) = 2^x$ کی خط بندی دریافت کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ پور و پور کریں۔ (ب) وقفہ $-3 \leq x \leq 3$ اور وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 7.320: $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی (i) نقطہ $x = 3$ پر $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ تک پور و پور کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq x \leq 8$ اور $2 \leq x \leq$ کے لئے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

دیگر اساس کے ساتھ حساب کتاب

سوال 7.321: عموماً کیلو لیٹروں میں $\log_{10} x$ اور $\ln x$ پائے جاتے ہیں۔ دیگر اساس کے لوگار تھم تلاش کرنے کی خاطر ہم درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$$

کیلو لیٹر استعمال کرتے ہوئے 5 اعشاریہ درجہ تک (i) $\log_3 8$ ، (ب) $\log_7 0.5$ ، (ج) $\log_{2-} 17$ ، (د) $\log_{0.5} 7$ تلاش کریں۔ درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے $\ln x$ تلاش کریں۔ (e) $\log_{10} x = 2.3$ ، (f) $\log_2 x = 1.4$ ، (g) $\log_{10} x = -0.7$ ، (ح) $\log_2 x = -1.5$

سوال 7.322: تبدیلی بیانہ
(i) دکھائیں کہ اساس 10 لوگار تھم کو اساس 2 لوگار تھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

(ب) دکھائیں کہ اساس a لوگار تھم کو اساس b لوگار تھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

7.5 انفرانش اور تنزل

اس حصہ میں ہم قوت نما تبدیلی کے قاعدہ کو حاصل کریں گے۔ اس کے علاوہ ان عملی استعمال پر غور کیا جائے گا جن کی بنا لوگار تھمی اور قوت نمائی تفاعل اہمیت کے حامل ہیں۔

قوت نما تبدیلی کا قاعدہ

فرض کریں ہم کسی مقدار y (جو سمتی رفتار، درجہ حرارت، برقی رو، یا کچھ اور ہو سکتا ہے) میں دلچسپی رکھتے ہیں جس میں کسی بھی لمحہ t پر اضافہ یا کمی اس لمحہ موجود مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر ہمیں لمحہ $t = 0$ پر مقدار کی قیمت y_0 بھی معلوم ہو تب ہم متغیر t کے تفاعل y کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ky && \text{تفرقی مساوات} \\ (7.21) \quad y &= y_0, \quad t = 0 && \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

اگر y مثبت ہو اور بڑھ رہا ہو تب k مثبت ہو گا اور مساوات 7.21 کہتی ہے کہ اضافہ کی شرح جمع کیے گئے مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر y منفی ہو اور گھٹ رہا ہو تب k منفی ہو گا اور مساوات 7.21 کہتی ہے کہ تنزل کی شرح، رہ گئی مقدار کے راست متناسب ہے۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 7.21 کا ایک حل $y = 0$ ہے۔ غیر صفر حل حاصل کرنے کے لئے ہم مساوات 7.21 کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کر کے حل کرتے ہیں:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = k$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C}$$

$$|y| = e^C \cdot e^{kt}$$

$$y = \mp e^C e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

t کے لحاظ سے مکمل

قوت نما صورت

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

اگر $|y| = r$ ہو تب $y = \mp r$ ہو گا

مستقل $\mp e^C$ کو سادہ علامت A سے ظاہر کرتے ہیں

ہم $\mp e^C$ کی تمام ممکنہ قیمتوں کے علاوہ 0 کو بھی A کی قیمت لے کر حل $y = 0$ کو بھی اس کلیہ میں شامل کرتے ہیں۔

ہم ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے A کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر $t = 0$ پر $y = y_0$ کو پر کرتے ہیں۔

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A$$

یوں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔

درج ذیل قوت نما تبدیلی کا قاعدہ ہے جس میں k کو شرحی مستقل¹² کہتے ہیں۔

$$(7.22) \quad y = y_0 e^{kt}, \quad k > 0 \text{ اضافہ}, \quad k < 0 \text{ تنزل} \quad \text{قوت نما تبدیلی کا قاعدہ}$$

مساوات 7.22 کا حصول ہمیں دکھاتا ہے کہ صرف قوت نما تفاعل کا مستقل مضرب اپنے آپ کا تفرق ہو سکتا ہے۔

نمو آبادی

کوئی بھی آبادی (انسانی، نباتاتی، جراثیمی، وغیرہ) غیر استمراری تفاعل ہو گا چونکہ یہ صرف مسلسل قیمتیں اختیار کرتی ہے۔ اس کے باوجود جب آبادی میں فردی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس آبادی کو نا صرف استمراری بلکہ قابل تفرق تفاعل سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ آبادی میں بچے پیدا کرنے والوں کی تناسب برقرار رہتی ہے تب کسی بھی لمحہ t پر بچوں کی پیدائشی شرح اس لمحے پر افراد کی تعداد $y(t)$ کے راست تناسب ہو گی۔ اگر ہم باہر سے آنے اور جانے والوں کو رد کریں اور ساتھ ہی مرنے والوں کی تعداد کو بھی رد کریں تب نمو آبادی کی شرح $\frac{dy}{dt}$ پیدائشی شرح ky کے برابر ہو گی۔ یوں $\frac{dy}{dt} = ky$ لہذا $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ حقیقت میں کسی بھی آبادی پر دیگر عوامل بھی اثر انداز ہوں گے جن پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔

مثال 7.29: بیماری کی پھیلاؤ کا ایک نمونہ فرض کرتا ہے کہ بیمار ہونے والوں کی شرح $\frac{dy}{dt}$ اس وقت کی تعداد y کے راست تناسب ہے۔ یوں جتنے زیادہ افراد کو بیماری لاحق ہو، بیماری اتنی زیادہ تیزی سے پھیلے گی۔

فرض کریں کہ ایک سال کے عرصہ میں کسی بیماری میں مبتلا افراد کی تعداد میں 20% کمی رونما ہوتی ہے۔ اگر آج 10 000 افراد بیمار ہوں تب کتنے سالوں میں بیمار افراد کی تعداد 1000 ہوگی؟

حل: ہم مساوات $y = y_0 e^{kt}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہمیں تین چیزیں معلوم کرنی ہیں۔

ا. y_0 کی قیمت،

ب. k کی قیمت،

ج. $y = 1000$ کرنے کے لئے درکار t کی قیمت۔

پہلا قدم: y_0 کی قیمت: ہم آج کو لمحہ $t = 0$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $y = 10 000$ ہے۔ یوں ہماری مساوات درج ذیل ہے۔

$$y = 10 000 e^{kt}$$

دوسرا قدم: k کی قیمت: ایک سال کے بعد بیماروں کی تعداد، آج کی تعداد کے 80% یعنی 8000 ہوگی۔ آئیں k حاصل کریں۔

$$8000 = 10 000 e^{k(1)}$$

$$e^k = 0.8$$

$$\ln(e^k) = \ln 0.8$$

$$k = \ln 0.8$$

یوں لمحہ t پر درج ذیل ہوگا۔

$$(7.23) \quad y = 10 000 e^{(\ln 0.8)T}$$

تیسرا قدم: t کی وہ قیمت جو $y = 1000$ دیتی ہے: ہم مساوات 7.23 میں $y = 1000$ پر کر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$1000 = 10 000 e^{(\ln 0.8)t}$$

$$e^{(\ln 0.8)t} = 0.1$$

$$(\ln 0.8)t = \ln 0.1$$

$$t = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32$$

□

یوں بیماروں کی تعداد 1000 کرنے کے لئے ہمیں دس سال سے کچھ زیادہ انتظار کرنا ہوگا۔

مسلسل سود در سود

اگر آپ A_0 روپیہ کاروبار میں ڈالیں اور ایک سال میں اس سے r' روپیہ کمائے کی امید رکھتے ہوں، جہاں $r' = r \times A_0$ ہے، تب ایک سال کے آخر میں آپ کے پاس $A_0 + r' = A_0(1 + r)$ روپیہ ہوں گے۔

رہا پر کاروبار کرنے والا بینک ایک شخص کو A_0 روپیہ سود پر دیتا ہے۔ ایک سال بعد اس شخص پر $r \times A_0$ کا سود واجب الادا ہو گا لہذا ایک سال بعد اس شخص پر کل $A_0 + rA_0 = A_0(1 + r)$ قرضہ ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ سالانہ سود کی شرح r ہے۔ فرض کریں کہ یہ شخص سالانہ سود ادا نہیں کرتا ہے۔ یوں دوسرے سال کی ابتدا میں اس شخص پر $A_0(1 + r)$ قرضہ ہو گا اور بینک اگلے سال اس مقدار پر سود حاصل کرے گا۔ چونکہ سود کی شرح r ہے لہذا دوسرے سال اس شخص پر سود $r \times A_0(1 + r)$ ہو گا اور دوسرے سال کے آخر میں اس پر کل قرضہ

$$A_0(1 + r) + rA_0(1 + r) = A_0(1 + r)(1 + r) = A_0(1 + r)^2$$

ہو گا۔ اسی طرح تین سال بعد قرضہ $A_0(1 + r)^3$ اور t سال بعد قرضہ

$$A_0(1 + r)^t$$

ہو گا۔

اب بینک کہہ سکتا ہے کہ سال میں ایک بار کی بجائے وہ ماہوار $\frac{r}{12}$ شرح سے سود وصول کرے گا (جو ظاہری طور پر رہا کی وہی شرح معلوم ہوتی ہے)۔ یوں پہلے مہینے کی آخر میں واجب الادا رہا کی مقدار $\frac{r}{12} A_0$ اور قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})$ ہو گا۔ اسی طرح دوسرے مہینے کی آخر میں قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})^2$ ہو گا۔ ایک سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})^{12}$ اور t سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})^{12t}$ ہو گا جس کو $A_t = A_0(1 + \frac{r}{k})^{kt}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں $k = 12$ ہو گا۔

یہ بینک ماہوار کی بجائے ہفتہ وار سود بھی وصول کر سکتا ہے۔ چونکہ سال میں 52 ہفتے ہوتے ہیں لہذا ایسی صورت میں $k = 52$ ہو گا اور t سال بعد قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

سود پر چلنے والا بینک زیادہ سے زیادہ رہا حاصل کرنے کی خاطر، سال میں زیادہ سے زیادہ مرتبہ رہا حاصل کرنا چاہے گا۔ انہیں دیکھیں کہ $k \rightarrow \infty$ کرنے سے t سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} A_t &= \lim_{k \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \\ &= A_0 e^{rt} \end{aligned}$$

درج بالا حد کے حصول میں ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتی ہے۔ ایسے حد کی تلاش حصہ 7.6 میں سکھائی جائے گی۔ یوں t سال بعد اس شخص پر قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$(7.24) \quad A(t) = A_0 e^{rt}$$

اس کلیہ کے تحت ربا کو مسلسل سود در سود¹³ کہتے ہیں۔

مثال 7.30: آپ آج بینک سے مسلسل سود در سود کی سالانہ 15% شرح پر 100 000 روپیہ حاصل کرتے ہیں۔ پانچ سال بعد آپ کو کتنی مقدار واپس کرنی ہوگی؟ اگر بینک سالانہ سود وصول کرتا ہو تب پانچ سال بعد قرضہ کتنا ہوگا؟

حل: ہم $A_0 = 100\,000$ ، $r = 0.15$ اور $t = 5$ لیتے ہوئے مساوات 7.24 استعمال کرتے ہیں۔

$$A(5) = 100\,000e^{(0.15)(5)} = 211\,700$$

اگر بینک سال میں ایک بار ربا وصول کرے تب پانچ سال بعد آپ کو درج ذیل قرضہ دینا ہوگا۔

$$A(5) = 100\,000(1 + 0.15)^5 = 201\,136$$

□

مثال 7.31: سالانہ افراط زر¹⁴ سے مراد ایک سال میں روپیہ کی قدر میں کمی ہے۔ یوں 10% افراط زر کا مطلب ہے کہ ایک سال بعد روپیہ کی قیمت 90% ہوگی۔

ایک شخص 5 000 000 روپیہ بینک میں پانچ سال کے لئے جمع کرتا ہے۔ بینک ہر مہینہ اس شخص کو 40 000 روپیہ دیگا اور پانچ سال کے آخر میں اس کو پورے 5 000 000 روپیہ واپس کرے گا۔ اگر سالانہ افراط زر 12% ہو تب اس شخص نے کیا پایا اور کیا کھویا؟

حل: پانچ سالوں میں بینک اس شخص کو

$$40\,000 \times 12 \times 5 = 2\,400\,000$$

روپیہ دیتا ہے۔ پانچ سال بعد شخص کو 5 000 000 روپیہ دیے جاتے ہیں جن کی اصل قدر

$$5\,000\,000 \times 0.88^5 = 2\,638\,660$$

ہوگی۔ یاد رہے کہ ہر مہینہ روپیہ کا قدر کم ہوگا لہذا پہلے مہینہ کے 40 000 اور آخری مہینہ کے 40 000 روپیہ کے قدر ایک جیسے نہیں ہوں گے۔ ہم حساب کو آسان بنانے کی خاطر تصور کرتے ہیں کہ اس شخص کو ماہوار کی بجائے ہر سال $40\,000 \times 12 = 480\,000$ روپیہ ملتے ہیں جن کی اصل قدر

$$480\,000 \times 0.88^1 = 422\,400$$

$$480\,000 \times 0.88^2 = 371\,712$$

$$480\,000 \times 0.88^3 = 327\,107$$

$$480\,000 \times 0.88^4 = 287\,854$$

$$480\,000 \times 0.88^5 = 253\,311$$

compound continuous interest¹³
inflation¹⁴

ہو گی لہذا پانچ سال میں اس کو ماہوار دیے گئے رقم کی اصل قدر درج بالا کا مجموعہ 1 434 404 ہو گا۔

□ اس شخص کو کل $2\,638\,660 + 1\,434\,404 = 4\,073\,064$ قدر کے روپیہ واپس ہوتے ہیں۔

تابکاری

ایک ایٹم اپنی کیمیت کا کچھ حصہ خارج کر کے دوسرے ایٹم میں تبدیل ہوتا ہے۔ اس عمل کو تابکاری تحلیل¹⁵ کہتے ہیں اور جس ایٹم نے مادہ خارج کیا ہو اس کو تابکار¹⁶ کہتے ہیں۔ تابکار کاربن 14 مادہ خارج کر کے نائٹروجن میں تبدیل ہوتا ہے، ریڈیم کئی درمیانی عمل تابکاری سے گزر کر آخر کار سیسہ میں تبدیل ہوتا ہے۔

تجربہ سے دیکھا گیا ہے کہ اکائی وقت میں خارج ذرات کی تعداد، اس وقت تابکار ایٹموں کی تعداد کے تقریباً راست تناسب ہوتا ہے۔ یوں تابکار تحلیل کو مساوات $\frac{dy}{dt} = -ky$, $k > 0$ ظاہر کرتی ہے (یہاں $k < 0$ کی جگہ $-k$ ($k > 0$) استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ اس طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y گھٹ رہا ہے)۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر تابکار ایٹموں کی تعداد y_0 ہو تب لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$(7.25) \quad y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0 \quad \text{مساوات تابکاری}$$

مثال 7.32: نصف زندگی کسی عنصر کے آدھے ایٹموں کو تابکاری کے ذریعہ تبدیل ہونے کے لئے درکار وقت کو اس عنصر کی نصف زندگی¹⁷ کہتے ہیں۔ کسی بھی عنصر کی نصف زندگی، ابتدائی ایٹموں کی تعداد پر نہیں بلکہ عنصر پر منحصر ہوتی ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں ہوتا ہے ہم ایک عنصر کو لیتے ہیں جس میں لمحہ $t = 0$ پر y_0 ایٹم پائے جاتے ہوں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کتنے وقت کے بعد اس میں نصف یعنی $\frac{y_0}{2}$ ایٹم پائے جائیں گے۔ ہم مساوات 7.25 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y \frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

radioactive decay¹⁵
radioactive¹⁶
half life¹⁷

□ اس قیمت ($t = \frac{\ln 2}{k}$) کو نصف زندگی کہتے ہیں جو صرف k پر منحصر ہے ناکہ ابتدائی ایٹموں کی تعداد پر۔

$$(7.26) \quad \text{نصف زندگی} = \frac{\ln 2}{k}$$

ریڈان 222 گیس کے لئے $k = 0.18$ دن ہے لہذا اس کی نصف زندگی 3.8 دن ہوگی جبکہ رات کی تاریکی میں نظر آنے کی خاطر گھڑیوں میں استعمال ہونے والے ریڈیم 226 کا $k = 4.3 \times 10^{-4}$ سال ہے لہذا اس کی نصف زندگی 1600 سال ہوگی۔

مثال 7.33: پولونیم 210

پولونیم 210 کی نصف زندگی کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ اگر $t = 0$ پر پولونیم 210 کے ایٹم پائے جاتے ہوں تب t دنوں بعد اس کے $y = y_0 e^{-5 \times 10^{-3} t}$ ایٹم ہوں گے۔ اس عنصر کی نصف زندگی تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{نصف زندگی} &= \frac{\ln 2}{k} \\ &= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \\ &\approx 139 \text{ دن} \end{aligned}$$

□

مثال 7.34: کاربن 14 تعین زمان

کاربن 14 جس کی نصف زندگی 5700 سال ہے، کو عموماً قدیم چیزوں کی عمر معلوم کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک نمونہ میں 10% تابکار کاربن کے ایٹم تبدیل ہو چکے ہیں۔ اس نمونے کی عمر تلاش کریں۔

حل: ہمیں پہلے k تلاش کرنا ہے۔ اس کے بعد ہم درکار وقت معلوم کریں گے۔ ہم مساوات 7.25 استعمال کرتے ہیں۔ پہلا قدم: k کی تلاش۔

$$k = \frac{\ln 2}{5700} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 1.2 \times 10^{-4}$$

دوسرا قدم: درکار وقت جس میں 90% ایٹم باقی رہ جائے۔

$$\begin{aligned} 0.9y_0 &= y_0 e^{-\frac{\ln 2}{5700} t} \\ -\frac{\ln 2}{5700} t &= \ln 0.9 \\ t &= -\frac{5700(\ln 0.9)}{\ln 2} \approx 866 \text{ سال} \end{aligned}$$

□

نمونہ 866 سال پرانا ہے۔

کاربن 14 کے علاوہ دیگر تابکار عناصر کو بھی تعین زمان کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یورینیم (جس کی نصف زندگی 4.5 ارب سال ہے) کو 2 ارب سال پرانے چٹانوں کے عمر تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

منتقلی حرارت: نیوٹن کا قانون ٹھنڈک

کوئی بھی گرم جسم کچھ دیر میں ٹھنڈا ہو کر ارد گرد ماحول کے درجہ حرارت پر آن پہنچتا ہے۔ جسم کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح، جسم اور ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست تناسب ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کہتے ہیں۔

گر لحد t پر جسم کا درجہ حرارت متغیر T ہو اور ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت مستقل T_S ہو تب

$$(7.27) \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - T_S)$$

ہو گا۔ اگر ہم $(T - T_S)$ کی جگہ y پر کریں تب

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(T - T_S) = \frac{dT}{dt} - \frac{dT_S}{dt} \\ &= \frac{dT}{dt} - 0 \\ &= \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad T_S \text{ مستقل}$$

ہو گا۔ یوں y کے لحاظ سے مساوات 7.27 درج ذیل ہو گا

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

جس کا حل $y = y_0 e^{-kt}$ ہے۔ یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک¹⁸

$$(7.28) \quad T - T_S = (T_0 - T_S)e^{-kt} \quad \text{نیوٹن کا قانون ٹھنڈک}$$

ہو گا جہاں لحد $t = 0$ پر جسم کا درجہ حرارت T_S ہے۔

مثال 7.35: ایک انڈے کو 98°C پر ابالنے کے بعد 18°C گرم پانی سے بھرے ہوئے بالٹی میں ڈالا جاتا ہے۔ پانچ منٹ گزرنے کے بعد انڈے کا درجہ حرارت 38°C ہوتا ہے۔ بالٹی میں پانی کے درجہ حرارت میں تبدیلی کو رد کریں۔ انڈا کتنی دیر میں 20°C تک پہنچے گا؟

¹⁸newton's law of cooling

حل: ہم پانچ منٹ بعد کی معلومات استعمال کرتے ہوئے پہلے k تلاش کرتے ہیں۔ مساوات 7.28 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$T = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}$$

پانچ منٹ بعد $T = 38$ ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} 38 &= 18 + 80e^{-5k} \\ e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\ -5k &= \ln \frac{1}{4} = -\ln 4 \\ k &= \frac{\ln 4}{5} = 0.2 \ln 4 \approx 0.28 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر $T = 18 + 80e^{-(0.2 \ln 4)t}$ ہو گا۔ ہمیں وہ t درکار ہے جس پر $T = 20$ ہو گا۔

$$\begin{aligned} 20 &= 18 + 80e^{-(0.2 \ln 4)t} \\ 80e^{-(0.2 \ln 4)t} &= 2 \\ e^{-(0.2 \ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\ -(0.2 \ln 4)t &= \ln \frac{1}{40} = -\ln 40 \\ t &= \frac{\ln 40}{0.2 \ln 4} \approx 13 \text{ منٹ} \end{aligned}$$

□

بالٹی میں ڈالنے کے تقریباً 13 منٹ بعد انڈے کا درجہ حرارت 20°C ہو گا۔

سوالات

سوال 7.323: دانت کی جسامت انسانی دانت کی جسامت گھٹ رہی ہے۔ شمالی یورپ کے لوگوں کے دانتوں کی جسامت 1000 سال میں 1% گھٹتی ہے۔

ا. دانت کی جسامت کو y اور وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے $t = 0$ پر y_0 اور $t = 1000$ پر $y = 0.99y_0$ لیتے ہوئے مساوات $y = y_0e^{kt}$ میں k تلاش کریں۔ k کی اس قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ب. کتنے سالوں میں دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے 90% ہو گی؟

ج۔ آج سے 20 000 سال بعد انسان کے دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے لحاظ سے کتنی ہو گی؟

جواب: (i) $-0.000\,01$ ، (ب) 10.536 سال، (ج) 82%

سوال 7.324: فضائی دباؤ
سطح سمندر سے h بلندی پر فضائی دباؤ p کی تبدیلی کی شرح $\frac{dp}{dh}$ کو عموماً p کا راست تناسب تصور کیا جاتا ہے۔ سطح سمندر پر فضائی دباؤ $101\,293\text{ N m}^{-2}$ اور 20 km بلندی پر 9000 N m^{-2} لیں۔

ا۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں اور دی گئی معلومات سے k دریافت کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dh} &= kp, \quad k \text{ مستقل} & \text{تفرقی مساوات} \\ p &= p_0, \quad h = 0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

ب۔ $h = 50\text{ km}$ پر فضائی دباؤ کتنا ہو گا؟

ج۔ کتنی بلندی پر $p = 90\,000\text{ N m}^{-2}$ ہو گا؟

سوال 7.325: کیمیائی عمل
بعض کیمیائی اعمال میں اجزاء کی تبدیلی کی شرح اس لمحے پر موجود مواد کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی ایک کیمیائی عمل کو

$$\frac{dy}{dt} = -0.6y$$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں مقدار y کو گرام اور وقت t کو گھنٹوں میں ناپا گیا ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر کیمیائی مواد کی مقدار 100 g ہو تب ایک گھنٹہ بعد اس کی کتنی مقدار پائی جائے گی؟
جواب: 54.88 g

سوال 7.326: خام شکر کو ایک مرحلہ سے گزارا جاتا ہے جس میں شکر کے مالیکیول کی ساخت تبدیل ہوتی ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے بعد کسی بھی لمحے پر تبدیلی کی شرح، خام مال کی باقی مقدار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ اگر 1000 kg خام مال سے شروع کرتے ہوئے ابتدائی 10 گھنٹوں بعد باقی خام مال کی مقدار 800 kg ہو تب مزید 14 گھنٹوں بعد خام مال کی مقدار کتنی ہو گی؟

سوال 7.327: زیر آب کام
سمندری پانی کی سطح سے x میٹر نیچے روشنی $L(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{dL}{dx} = -kL$$

آپ تجربہ سے جانتے ہیں کہ سطح سے 6 m نیچے روشنی کی شدت آدھی ہے۔ آپ سطحی روشنی کے $\frac{1}{10}$ حصہ میں کام کر سکتے ہیں۔ یوں کتنی گہرائی تک آپ کام کر سکیں گے؟
جواب: 19.93 m

سوال 7.328: برقی گیر میں برقی دباؤ
برقی گیر سے برقی نکاسی کی شرح اس پر موجود برقی دباؤ کے راست تناسب ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس پر دباؤ V درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V$$

کتنی دیر میں برقی دباؤ کی قیمت ابتدائی قیمت کے 10 % ہوگی؟

سوال 7.329: ہیضہ کے جراثیم
فرض کریں ہیضہ کے جراثیم بغیر رکاوٹ قوت نمائی طور پر بڑھ سکتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک جرثومہ ہوتا ہے۔ جرثومہ آدھا گھنٹہ میں ٹوٹ کر دو جرثوموں میں تبدیل ہوتا ہے۔ 24 گھنٹوں بعد کتنے جرثومے پائے جائیں گے؟ (اگرچہ بیمار شخص کی جسم میں ہر گھنٹہ متعدد جرثومے مارے جاتے ہیں۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صبح ظاہری طور پر بالکل تندرست شخص، شام کو یک دم کیوں بہت سخت بیمار ہو سکتا ہے۔)
جواب: 2.8147497×10^{14}

سوال 7.330: جراثیم کی نمو آبادی
تجربہ گاہ میں ایک قسم کی جرثوموں کو افزائش کے لئے بہترین ماحول مہیا کیا جاتا ہے تاکہ ان کی تعداد قوت نمائی بڑھ سکے۔ 3 گھنٹوں بعد جرثوموں کی تعداد 10 000 اور 5 گھنٹوں بعد ان کی تعداد 40 000 ہوتی ہے۔ ابتدائی جرثوموں کی تعداد دریافت کریں۔

سوال 7.331: بیماری کی پھیلاؤ (مثال 7.29)
فرض کریں کہ مثال 7.29 میں کسی بھی ایک سال میں بیمار افراد کی تعداد میں 25 % کمی رونما ہوتی ہے۔

ا. کتنے سالوں میں بیماروں کی تعداد 1000 ہوگی؟

ب. کتنے عرصہ میں بیماری کا خاتمہ ہوگا۔ (بیماروں کی تعداد ایک سے کم ہونے کو خاتمہ تصور کیا جاتا ہے۔)

جواب: (ا) 8 سال، (ب) 32.02 سال

سوال 7.332: پاکستان کی آبادی
پاکستان کی آبادی میں 2017 میں ہر 8 سیکنڈوں میں ایک بچے کا اضافہ ہوا۔

ا. قوت نمائی اضافہ $y = y_0 e^{kt}$ تصور کریں جہاں t وقت کو اور y تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ وقت کو سالوں میں لیتے ہوئے k کی قیمت تلاش کریں۔

ب. 5 سال بعد پاکستان کی آبادی کتنی ہوگی؟

سوال 7.333: تیل میں کمی فرض کریں تیل کی کنواں سے حاصل تیل میں ہر سال 10% کمی رونما ہوتی ہے۔ کتنے سالوں میں حاصل تیل کی مقدار 20% رہ جائے گی؟
جواب: 15.28 سال

سوال 7.334: قیمت میں چھوٹ فروخت میں اضافہ پیدا کرنے کی خاطر آپ کا ادارہ قیمت میں چھوٹ کو خریداری کے ساتھ یوں منسلک کرتا ہے کہ ایک شے کی قیمت $p(x)$ خریدی گئی اشیاء کی تعداد کا تقابل ہو۔ ہر اضافی ایک عدد خریداری پر مزید 1% چھوٹ دی جاتی ہے۔ 100 عدد کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100) = 20.09$ روپیہ ہے۔

ا. درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے $p(x)$ تلاش کریں۔

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{100}p \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$p(100) = 20.09 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

ب. دس عدد اشیاء کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(10)$ تلاش کریں۔ اسی طرح 100 کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100)$ تلاش کریں۔

ج. کیا 100 کی خریداری پر آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ درحقیقت 90 کی خریداری پر آمدنی سے کم ہوگی؟ دکھائیں کہ حقیقت میں 100 کی خریداری پر آمدنی زیادہ سے زیادہ ہوگی۔

د. آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ کو $0 \leq x \leq 200$ کے لئے ترسیم کریں۔

سوال 7.335: مسلسل سود در سود آپ بینک سے A_0 روپیہ کا قرضہ لیتے ہیں جس پر آپ کو 4% مسلسل سود در سود ادا کرنا ہوگا۔

ا. آپ کو 5 سال بعد کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟

ب. آپ کو کتنے سالوں میں دینی رقم ادا کرنی ہوگی؟ کتنے سالوں میں تنگنی رقم ادا کرنی ہوگا؟

جواب: (i) $A_0 e^{0.2}$ ، (ب) 17.33 سال، (ج) 27.74 سال

سوال 7.336: اگر کسی رقم پر 100% مسلسل سود در سود دیا جائے تب کتنے عرصہ میں رقم دگنی ہوگی؟ ایک سال میں سود کتنا ہوگا؟

سوال 7.337: ایک شخص نے بینک میں رقم کو 100 سال کے لئے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 90 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔
جواب: 4.50%

سوال 7.338: ایک شخص نے بینک میں رقم کو 100 سال کے لئے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 131 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔

سوال 7.339: ریڈان 222 کی نصف زندگی 143 دن ہے۔ اگر آپ کے پاس پولونیم 210 کے نمونہ میں 95% مواد تابکاری کی بنا تبدیل ہو جائے تب یہ نمونہ آپ کے کسی بھی نمونہ میں 90% مواد باقی ہوگا؟
جواب: 0.585 دن

سوال 7.340: پولونیم 210 کی نصف زندگی 139 دن ہے۔ اگر آپ کے پاس پولونیم 210 کے نمونہ میں 95% مواد تابکاری کی بنا تبدیل ہو جائے تب یہ نمونہ آپ کے کسی کام کا نہیں ہوگا۔ یہ نمونہ کتنے دنوں تک آپ کے کام کا ہوگا؟

سوال 7.341: تابکار مادہ کی اوسط زندگی $\frac{1}{k}$ کو تابکار مرکزہ کی اوسط زندگی $y = y_0 e^{-kt}$ میں $\frac{1}{k} = 5.6$ دن ہے۔ کاربن 12 کی اوسط زندگی تقریباً 8000 سال ہے۔ دکھائیں کہ کسی بھی تابکار مادہ کی تین اوسط زندگی کے برابر وقت میں 95% مادہ تبدیل ہو جائے گا۔ یوں نصف زندگی سے آپ با آسانی معلوم کر سکتے ہیں کہ مادہ کتنے عرصہ میں ختم ہوگا۔

سوال 7.342: کیلی فورنیم 252 کی نصف زندگی 2.645 سال ہے اور $1 \mu\text{g}$ کیلی فورنیم فی سیکنڈ 170×10^6 تعدیلی برقیہ خارج کرتا ہے۔
کیلی فورنیم 252 کو 1950 میں ایجاد کیا گیا۔ اب تک مغربی دنیا میں اس عنصر کے صرف 8 g جمع کیے گئے ہیں۔ اس کی قیمت سونے سے 654 گنا زیادہ ہے۔ اس کی نصف زندگی 2.645 سال ہے اور $1 \mu\text{g}$ کیلی فورنیم فی سیکنڈ 170×10^6 تعدیلی برقیہ خارج کرتا ہے۔

ا. تابکاری تحلیل کی مساوات میں اس عنصر کا k کتنا ہوگا؟

ب. اس عنصر کی اوسط زندگی کتنی ہوگی؟ (سوال 7.341 سے رجوع کریں۔)

ج. کتنے عرصہ میں 95% عنصر تابکاری تحلیل کی بنا تبدیل ہو جائے گا؟

سوال 7.343: یخنی

ایک کمرہ جس کا درجہ حرارت 20°C ہے میں ایک پیالی یخنی کا درجہ حرارت دس منٹ میں 90°C سے گر کر 60°C ہوتا ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ا. مزید کتنے وقت میں یخنی کا درجہ حرارت 35°C ہو گا؟

ب. اگر 90°C گرم یخنی کے پیالہ کو 15°C کے ٹھنڈی فرج میں رکھا جائے تب اس کو 35°C تک ٹھنڈا ہونے میں کتنا وقت درکار ہو گا؟

جواب: (i) 17.5 منٹ، (ب) 13.26 منٹ

سوال 7.344: نامعلوم درجہ حرارت والا شہتیر

المونیم کے شہتیر کو باہر سے اندر لایا جاتا ہے۔ اندر درجہ حرارت 20°C ہے جبکہ باہر موسم ٹھنڈا ہے۔ دس منٹ بعد شہتیر کا درجہ حرارت 2°C ہے جبکہ مزید دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 10°C ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے شہتیر کا ابتدائی درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال 7.345: ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت نامعلوم

ایک جگ جو 46°C درجہ حرارت پانی سے بھرا ہوا ہے کو فرج میں رکھا جاتا ہے۔ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 39°C ہوتا ہے۔ مزید دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 33°C ہوتا ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے فرج کا درجہ حرارت تلاش کریں۔

جواب: 3°C

سوال 7.346: فضا میں کسی چیز کو ٹھنڈا کرنا

چاندی کے سلاخ کا موجودہ درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے 60°C زیادہ ہے۔ بیس منٹ پہلے اس کا درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے 70°C زیادہ تھا۔ (i) پندرہ منٹ کے بعد اس کا درجہ حرارت، کمرے سے کتنا زیادہ ہو گا؟ (ب) دو گھنٹوں بعد کتنا ہو گا؟ (ج) کتنی دیر بعد کمرے سے سلاخ کا درجہ حرارت 10°C زیادہ ہو گا؟

سوال 7.347: آتش فشاں

زمانہ قدیم میں ایک آتش فشاں کے پھٹنے سے قریبی درخت جل جاتے ہیں اور آتش فشاں میں ایک جھیل بن جاتا ہے۔ اس جھیل میں موجود کوئلہ میں زندہ درختوں کے لحاظ سے % 44.5 کاربن 14 پایا جاتا ہے۔ یہ جھیل کتنا قدیم ہے؟

جواب: تقریباً 6658 سال

سوال 7.348: کاربنی تعین زمان کی حساسیت

آئیں دیکھیں کہ نمونہ میں پائے جانے والے کاربن کی مقدار میں معمولی خلل، نتائج میں کس قدر فرق پیدا کرتا ہے۔

ا. ایک حجریہ ہڈی 20^{2000} میں دریافت کی گئی۔ اس میں ابتدائی کاربن 14 کا % 17 حصہ باقی تھا۔ یہ جانور کب زندہ تھا؟

ب. اگر جزو-ا میں 17% کی بجائے 18% حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

ج. اگر جزو-ا میں 17% کی بجائے 16% حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

سوال 7.349: جعلی تصویر

ایک تصویر جو 1632 اور 1675 کے درمیان بنائی گئی کی نقل میں کاربن 14 کی ابتدائی قیمت کا 99.5% حصہ باقی ہے۔ یہ نقلی تصویر کتنی پرانی ہے؟
جواب: 41 سال پرانا

7.6 قاعدہ لھوپیتال

ایسا کر جس کا نسب نما اور شمار کنندہ دونوں تحدیدی نقطہ پر صفر کو پہنچتے ہوں، کا حد تلاش کرنے کا قاعدہ لیتقوب برنولی نے دریافت کیا جس کو قاعدہ لھوپیتال کہتے ہیں۔

غیر معین حاصل تقسیم

اگر نقطہ $x = a$ پر تقابل $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر ہوں تب $x = a$ پر کرتے ہوئے $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ کا حصول ممکن نہیں ہو گا چونکہ ایسا کرنے سے $\frac{0}{0}$ ملتا ہے جو بے معنی ہے اور جس کو غیر معین روپ²¹ کہتے ہیں۔ اب تک ہم دیکھ چکے ہیں کہ جو حد غیر معین روپ دیں ان کا حد تلاش کرنا کبھی آسان اور کبھی مشکل ہوتا ہے۔ ہم نے حصہ 3.4 میں کافی محنت کے بعد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ کی قیمت حاصل کی۔ اس کے برعکس تفرق کے حصول میں استعمال ہونے والا درج ذیل حد تلاش کرنے میں ہمیں کوئی دشواری پیش نہیں ہوئی،

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اگرچہ اس حد میں $x = a$ پر کرنے سے ہر صورت $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیتال کی مدد سے ہم تفرق کے حصول میں حد کے استعمال سے استفادہ کرتے ہوئے ان حد کو تلاش کرتے ہیں جو غیر معین روپ کو جنم دیتے ہیں۔

مسئلہ 7.2: قاعدہ لھوپیتال (پہلی صورت)

فرض کریں کہ $f(a) = g(a) = 0$ ہے جبکہ $f'(a)$ اور $g'(a)$ موجود ہیں جہاں $g'(a) \neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$(7.29) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ثبوت: ہم $f'(a)$ اور $g'(a)$ ، جو از خود حد کو ظاہر کرتے ہیں، سے شروع کرتے ہوئے واپس چلتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے f کے تفرق f' کو g کے تفرق g' سے تقسیم کریں۔ یاد رہے کہ $\frac{f}{g}$ کا تفرق $(\frac{f}{g})'$ درست نتیجہ نہیں دینگا۔

مثال 7.36:

$$\begin{aligned}\text{(ا)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} &= \frac{3 - \cos x}{a} \Big|_{x=0} = 2 \\ \text{(ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \\ \text{(ج)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \frac{1 - \cos x}{3x^2} \Big|_{x \rightarrow 0} = ? \quad \text{اب بھی } \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\end{aligned}$$

□

ہم دیکھتے ہیں کہ مثال 7.36 کے جزو-ج میں قاعدہ لھوپیٹال کے استعمال کے باوجود $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی بہتر روپ کہتی ہے کہ جب تک ہمیں $\frac{0}{0}$ حاصل ہو ہم اس قاعدہ کو بار بار استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں اس مثال کو حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} && \text{اب بھی } \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} && \text{اب بھی } \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} && \text{اس بار } \frac{0}{0} \text{ نہیں ملا}\end{aligned}$$

مسئلہ 7.3: قاعدہ لھوپیتال (بہتر روپ)
فرض کریں کہ $f(a) = g(a) = 0$ ہے جبکہ f اور g کھلے وقفہ I پر قابل تفرق ہیں۔ اس وقفہ پر نقطہ a پایا جاتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ $x \neq a$ کی صورت میں I پر $g'(x) \neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہوگا

$$(7.30) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اگر دائیں ہاتھ حد موجود ہو یا یہ ∞ اور یا $-\infty$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال 7.37:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2}}{x^2} & \quad \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2}}{2x} \quad \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} \quad \frac{0}{0} \text{ نہیں ہے} \end{aligned}$$

□

قاعدہ لھوپیتال استعمال کرتے ہوئے جیسے $\frac{0}{0}$ سے کچھ ہٹ کر ملتا ہے آپ حد تلاش کر پائیں گے۔

مثال 7.38:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} & \quad \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{0}{0} \text{ نہیں ہے} \end{aligned}$$

اگر $\frac{0}{0}$ ملنے کے بعد رکنے کی بجائے ہم مزید ایک بار قاعدہ لھوپیتال استعمال کریں تب ہمیں درج ذیل غلط نتیجہ حاصل ہوگا۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

□

مثال 7.39:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \quad \frac{0}{0} \text{ نہیں ملا}$$

□

قاعدہ لھوپٹال وہاں بھی قابل استعمال ہو گا جہاں غیر معین روپ $\frac{\infty}{\infty}$ ہو۔ اگر $x \rightarrow a$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ دونوں لامتناہی تک پہنچتے ہوں تب اگر درج ذیل میں دایاں حد موجود ہو تب

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ہو گا۔ یہاں a از خود متناہی یا لامتناہی ہو سکتا ہے۔

مثال 7.40:

$$(i) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \sin x = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

□

غیر معین حاصل ضرب اور فرق

بعض اوقات ہم غیر معین روپ $0 \cdot \infty$ اور $\infty - \infty$ کو الجبرا کی مدد سے $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ لکھ سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم یہ نہیں کہتے ہیں کہ عدد $0 \cdot \infty$ یا $\infty - \infty$ موجود ہے اور نائی ہم کہتے ہیں کہ عدد $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ موجود ہے۔ یہ روپ کسی بھی عدد کو ظاہر نہیں کرتے ہیں بلکہ محض تفاعل کے رویہ کو بیان کرتے ہیں۔

مثال 7.41:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cot x$$

$0 \cdot \infty$ کی بنا پر $x \cot x$ کو مختلف روپ میں لکھیں

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{1}{\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\tan x}$$

اب $\frac{0}{0}$ ملتا ہے

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

□

مثال 7.42: تلاش کریں: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

حل: اگر $x \rightarrow 0^+$ ہو تب $\sin x \rightarrow 0^+$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow \infty - \infty$$

اسی طرح اگر $x \rightarrow 0^-$ ہو تب $\sin x \rightarrow 0^-$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = -\infty - (\infty) = -\infty + \infty$$

دونوں صورتوں میں ہم حد جاننا ممکن نہیں ہے۔ ہمیں تفاعل کو نئی صورت

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

میں لکھ کر قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

$\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}$$

اب بھی $\frac{0}{0}$ ملتا ہے

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

□

نا قابل معلوم طاقت

بعض اوقات ایسے حد جو نا قابل معلوم روپ 1^∞ ، 0^0 یا ∞^0 دیتے ہوں کا لوگار تھم پہلے لینے سے حد تلاش کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔ ہم قاعدہ لھویٹیال سے لوگار تھم کا حد حاصل کر کے قوت نما سے اصل تفاعل کا رویہ جانتے ہیں۔

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = L$ ہو تب

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

ہو گا جہاں a تنہائی یا لامتناہی ہو سکتا ہے۔

مثال 7.43: دکھائیں $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e$

حل: حد تلاش کرنے سے نا قابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتا ہے لہذا ہم $f(x) = (1+x)^{1/x}$ لیتے ہوئے $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

ہے لہذا قاعدہ لھویٹیال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

دیگے یوں اصل تفاعل کا حد درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e$$

□

مثال 7.44: حد $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ تلاش کریں۔

حل: حد کی تلاش نا قابل معلوم روپ ∞^0 دیتا ہے۔ ہم $f(x) = x^{1/x}$ لے کر $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x}$$

ہے لہذا قاعدہ لھوپیتال

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(z) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} && \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} \\ &= \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

دیگے۔ یوں اصل حد درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \rightarrow \infty f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1$$

□

سوالات

قاعدہ لھوپیتال کا استعمال
سوال 7.350 تا سوال 7.391 میں قاعدہ لھوپیتال استعمال کرتے ہوئے حد تلاش کریں۔

سوال 7.350: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 7.351: $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-25}{x+5}$

سوال 7.352: $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$
جواب: $-\frac{23}{7}$

سوال 7.353: $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3-1}{4t^3-t-3}$

سوال 7.354: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$
جواب: $\frac{5}{7}$

سوال 7.355: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$

سوال 7.356: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t^2}{t}$
جواب: 0

سوال 7.357: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5t}{t}$

سوال 7.358: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\cos x - 1}$
جواب: -16

سوال 7.359: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

سوال 7.360: $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\theta - \pi}{\cos(2\pi - \theta)}$
جواب: -2

سوال 7.361: $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3\theta + \pi}{\sin(\theta + \frac{\pi}{3})}$

سوال 7.362: $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos 2\theta}$
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 7.363: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x - \sin \pi x}$

سوال 7.364: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)}$
جواب: 2

سوال 7.365: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\csc x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$

سوال 7.366: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(1 - \cos t)}{t - \sin t}$
جواب: 3

سوال 7.367: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin t}{1 - \cos t}$

سوال 7.368: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sec x$
جواب: -1

سوال 7.369: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$

سوال 7.370: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3^{\sin \theta} - 1}{\theta}$
جواب: $\ln 3$

سوال 7.371: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2})^\theta - 1}{\theta}$

سوال 7.372: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2^x}}{2^x - 1}$
جواب: $\frac{1}{\ln 2}$

سوال 7.373: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$

سوال 7.374: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$
جواب: $\ln 2$

سوال 7.375: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$

سوال 7.376: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln x}$
جواب: 1

سوال 7.377: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$

سوال 7.378: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5y+25} - 5}{y}$
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 7.379: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ay+a^2} - a}{y}, \quad a > 0$

سوال 7.380: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x - \ln(x+1))$
جواب: $\ln 2$

سوال 7.381: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \ln \sin x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) : \text{سوال 7.382}$$

جواب: 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x+1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) : \text{سوال 7.383}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) : \text{سوال 7.384}$$

جواب: $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x - \cot x + \cos x) : \text{سوال 7.385}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt : \text{سوال 7.386}$$

جواب: $\ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln x} \int_1^x \ln t dt : \text{سوال 7.387}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{e^\theta - \theta - 1} : \text{سوال 7.388}$$

جواب: -1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - (1+h)}{h^2} : \text{سوال 7.389}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t + t^2}{e^t - t} : \text{سوال 7.390}$$

جواب: 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} : \text{سوال 7.391}$$

حد جن میں اساس اور قوت نما پائے جاتے ہوں
سوال 7.392 تا سوال 7.401 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(1-x)} : \text{سوال 7.392}$$

جواب: $\frac{1}{e}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(x-1)} : \text{سوال 7.393}$$

سوال 7.394: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$
جواب: 1

سوال 7.395: $\lim_{x \rightarrow e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$

سوال 7.396: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/\ln x}$
جواب: $\frac{1}{e}$

سوال 7.397: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\ln x}$

سوال 7.398: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{1/(2 \ln x)}$
جواب: $e^{1/2}$

سوال 7.399: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$

سوال 7.400: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
جواب: 1

سوال 7.401: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

نظریہ اور استعمال
سوال 7.402 تا سوال 7.405 میں قاعدہ لھوپیتال سے حد تلاش کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ آپ گول دائرے میں گھومتے رہیں گے۔ کسی دوسرے طریقہ سے حد تلاش کریں۔

سوال 7.402: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$
جواب: 3

سوال 7.403: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

سوال 7.404: $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tan x}$
جواب: 1

سوال 7.405: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\csc x}$

سوال 7.406: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6} \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0 \quad \text{ب.}$$

جواب: (ب) درست

سوال 7.407: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2+\sin x} = \frac{2}{2+0} = 1 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \frac{-2}{0-1} = 2 \quad \text{ب.}$$

سوال 7.408: درج ذیل میں صرف ایک درست ہے۔ اس کو تلاش کریں۔ باقی دو کیوں غلط ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = 0 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \frac{-\infty}{\infty} = -1 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad \text{د.}$$

جواب: (د) درست

سوال 7.409: درج ذیل فرض کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

دکھائیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ مگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا یہ قاعدہ لھویٹال کی تردید کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.410: درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کے لئے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟
جواب: $c = \frac{25}{10}$

سوال 7.411: درج ذیل تفاعل کو $\theta = 0$ پر دائیں سے استمراری بنانے کے لئے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{(\tan \theta)^2}{\sin(4\theta^2/\pi)}, & \theta \neq 0 \\ c, & \theta = 0 \end{cases}$$

آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟

سوال 7.412: مسلسل سود در سود کا کلیہ $A(t) = A_0 e^{rt}$ اخذ کرتے ہوئے درج ذیل دعویٰ کیا تھا۔ ہم نے حصہ 7.5 میں مسلسل سود در سود کا کلیہ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0 e^{rt}$$

یہ دعویٰ تب درست ہو گا جب درج ذیل درست ہو

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = e^{rt}$$

اور یہ اس صورت درست ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = e^r$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، حد سے ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتی ہے۔ قاعدہ لھوپیتال سے حد کی تصدیق کریں۔

سوال 7.413: اگر $x > 0$ ہو تب درج ذیل کی زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر پائی جاتی ہو تب) تلاش کریں۔

$$x^{1/x}$$

$$x^{1/x^2}$$

جہ n مثبت عدد صحیح ہے، x^{1/x^n}

د. دکھائیں کہ ہر مثبت عدد صحیح n کے لئے $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x^n} = 1$ ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.414: مستقل e کی قیمت کا تلاش

ا. قاعدہ لھویٹال استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ب. تفاعل $f(x) = (1 + 1/x)^x$ کی قیمت $x = 10, 10^2, 10^3, \dots$ کے لئے کیلوایٹر کی مدد سے تلاش کرتے ہوئے دیکھیں کہ آپ اصل قیمت $e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 000$ کے کتنے قریب پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ x کی قیمت بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہو گا، بعض کیلوایٹروں میں پور و پور خلل کی بنا کسی مخصوص حد سے x کی قیمت بڑھنے کے بعد نتائج کم درست ہوں گے۔

ج. تفاعل $f(x) = (1 + 1/x)^x$ کو ترسیم کریں۔ یہاں بھی x کی زیادہ بڑی قیمت پر پور و پور خلل کی بنا نتیجہ کم درست ہو گا۔

سوال 7.415: آئیں درج ذیل دو حد میں فرق پر غور کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ا. وقفہ $x \geq 0$ کے لئے درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x, \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

تفاعل f کا رویہ اور g کا رویہ کیسا ہے؟ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔

ب. قاعدہ لھویٹال کی مدد سے $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ کی حاصل کردہ قیمت کی تصدیق کریں۔

سوال 7.416: (i) متغیر x کے کسی موزوں وسیع وقفہ پر $f(x) = x - \sqrt{x^2 + x}$ ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

(ب) قاعدہ لھوپیتال سے اس حد کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے کے لئے پہلے $f(x)$ کو $\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+x}}$ سے ضرب دے کر شمار کنندہ کی سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 7.417: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیتال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$$

سوال 7.418: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیتال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - (3x + 1)\sqrt{x} + 2}{x - 1}$$

سوال 7.419: (i) تفاعل $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$ کو $x = 1$ کے نزدیک ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیتال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$$

(ب) تفاعل $f(x)$ کو $0 < x \leq 11$ کے لئے ترسیم کریں۔

سوال 7.420: $(\sin x)^x$ کی $[0, \pi]$ تک استمراری توسیع

ا. وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر $f(x) = (\sin x)^x$ ترسیم کریں۔ تفاعل f کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کی خاطر آپ f کی کیا قیمت مقرر کریں گے؟

ب. جزو-ا میں اپنے جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر قاعدہ لھوپیتال سے $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. وقفہ $[0, \pi]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت ترسیم سے معلوم کریں۔ یہ قیمت کس نقطہ پر پائی جاتی ہے؟

د. جزو-ج میں اپنے جواب کو مزید بہتر بنانے کی خاطر f' کو ترسیم کر کے دیکھیں کہ یہ محور x کو کہاں قطع کرتا ہے۔ اپنے کام کو آسان بنانے کی خاطر آپ f' میں قوم نما حصہ کو رد کرتے ہوئے صرف اس حصہ کو ترسیم کر سکتے ہیں جس کا صفر پایا جاتا ہو۔

ه. کی مزید بہتر زیادہ سے زیادہ قیمت جاننے کی خاطر مساوات $f' = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

و. جزو-ج، د اور ه میں حاصل نقطوں پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں۔ کون سی قیمت بہترین جواب ہے؟

سوال 7.421: $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$ تفاعل

ا. وقفہ $-7 \leq x \leq 7$ پر $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$ ترسیم کریں۔ ترسیم میں درز کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ یہ درز کتنے چوڑے ہیں؟

ب. اب وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر f ترسیم کریں۔ اگرچہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر f ناقابل معلوم ہے اس کے باوجود ترسیم میں اس نقطہ پر درز نہیں پایا جاتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر ترسیم f کی کیا قیمت دیتا ہے؟ (اشارہ۔ قاعدہ لھوپیتال استعمال کرتے ہوئے $x \rightarrow (\pi/2)^+$ اور $x \rightarrow (\pi/2)^-$ کے لئے f کے حد تلاش کریں۔)

ج. جزو-ب کے ترسیم سے f کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمت تلاش کریں اور وہ نقطے بھی تلاش کریں جہاں یہ قیمتیں پائی جاتی ہیں۔

سوال 7.422: x کی طاقتوں میں $\ln x$ کا مقام درج ذیل کلیات کے سلسلہ میں درزوں

$$(7.31) \quad \int t^{k-1} dt = \frac{t^k}{k} + C, \quad k \neq 0$$

کو قدرتی لوگار تھم

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

بھرتا ہے لیکن ان کلیات کو دیکھ کر یہ کہنا ممکن نہیں ہو گا کہ قدرتی لوگار تھم ان میں صحیح بیٹھتا ہے۔ ہم مساوات 7.31 میں سے الٹ تفرق

$$\int_1^x t^{k-1} dt = \frac{x^k - 1}{k}, \quad x > 0$$

کی ترسیم کا $\ln x$ کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے اس عمل کو دیکھ سکتے ہیں۔

ا. وقفہ $0 \leq x \leq 50$ پر $0.05, \pm 0.1, \pm 0.5, \pm 1$ کے لئے $f(x) = \frac{x^k - 1}{k}$ ترسیم کریں۔ ان کے ساتھ $\ln x$ بھی ترسیم کریں۔

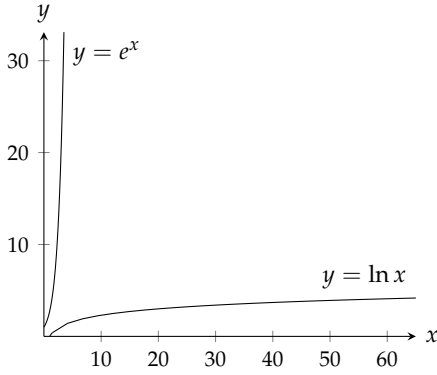
ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{x^k - 1}{k} = \ln x$$

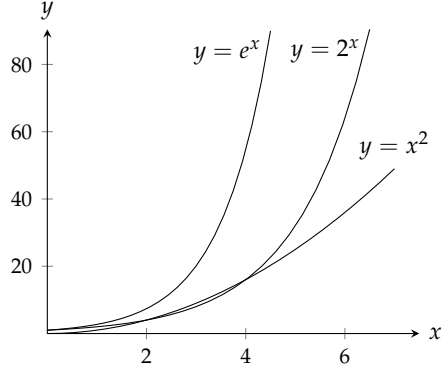
سوال 7.423: تصدیق برائے سوال 6.269، حصہ 6.7 درج ذیل کی بہتر سے بہتر قیمت ترسیم کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

قاعدہ لھوپیتال کی مدد سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔



شکل 7.38: تفاعل $y = e^x$ اور $y = \ln x$ کا موازنہ



شکل 7.37: تفاعل $y = e^x$ ، $y = 2^x$ اور تفاعل $y = x^2$

7.7 اضافی شرح نمو

اس حصہ میں x کی بڑھتی قیمت پر x کے تفاعل کی شرح تبدیلی پر غور کیا جائے گا۔ ہم ان تفاعل پر غور کریں گے جو $x \rightarrow \infty$ کرنے سے آخر کار مثبت ہو کر مثبت ہی رہتے ہیں۔

اضافی شرح نمو

آپ نے دیکھا ہو گا کہ متغیر x بڑھانے سے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل (جنہیں ہم نے باب 4 میں ترسیم کیا تھا) کے لحاظ سے قوت نما تفاعل، مثلاً 2^x اور e^x ، زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ قوت نما تفاعل یقیناً x کے لحاظ سے زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ آپ شکل 7.37 میں دیکھ سکتے ہیں کہ x بڑھانے سے x^2 کے لحاظ سے 2^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔ درحقیقت $x \rightarrow \infty$ کرنے سے تفاعل 2^x اور e^x کے بڑھنے کی شرح، x کے کسی بھی طاقت (مثلاً $x^{1000000}$) کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی (سوال 7.442)۔

متغیر x بڑھاتے ہوئے تفاعل $y = e^x$ کے بڑھنے کی شرح کو سمجھنے کی خاطر تصور کریں کہ آپ اس تفاعل کو ترسیم کرتے ہیں جہاں محور کا پیمانہ 1 cm ہے۔ یوں $x = 1$ cm پر $y = e^1 \approx 3$ cm ہو گا۔ یوں $x = 6$ cm پر $y = e^6 \approx 403$ cm یعنی تقریباً 4 میٹر ہو گا جو کمرے کی چھت کے برابر ہو گا۔ اسی طرح $x = 10$ cm پر $y = e^{10} \approx 22026$ cm یعنی 220 m ہو گا جو شہر کے عموماً عمارتوں سے زیادہ بلند ہو گا۔ اگر $x = 24$ cm ہو تب y چاند تک آدھے فاصلہ سے زیادہ طے کر چکا ہو گا اور $x = 24$ cm پر y سورج کے قریب ترین ستارہ سے زیادہ دور ہو گا:

$$e^{43} \approx 4.73 \times 10^{18} \text{ cm}$$

$$= 4.73 \times 10^{13} \text{ km}$$

$$\approx 5 \text{ نوری سال}$$

اس کے باوجود x محور پر آپ مبدا سے صرف 43 cm فاصلہ پر ہوں گے۔

اس کے برعکس $x \rightarrow \infty$ کرنے سے لوگار تھمی تقابل $y = \log_2 x$ اور $y = \ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے کسی بھی مثبت طاقت کے بڑھنے کی شرح سے کم ہوگی (سوال 7.444)۔ یوں محور کا پیمانہ 1 cm لیتے ہوئے مبدا سے صرف 43 cm بلندی تک پہنچنے کی خاطر آپ کو محور x پر 5 نوری سال دور جانا ہوگا (شکل 7.38)۔

قوت نما، کثیر رکنی اور لوگار تھمی تقابل کا ایک دوسرے کے ساتھ مذکورہ بالا موازنہ کو زیادہ درستگی سے بیان کرنے کی خاطر ہم ایک تعریف پیش کرتے ہیں۔ جب ہم کہتے ہیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرنے سے کسی بھی تقابل $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح سے تقابل $f(x)$ کے بڑھنے کی شرح زیادہ ہے تب اس سے مراد درج ذیل ہوگا۔

تعریف: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے بڑھنے کی شرح
فرض کریں کافی بڑے x کے لئے $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔

ا. اگر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

یا، اس کا مماثل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ہو تب $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہوگی۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے g کے بڑھنے کی شرح، f کے بڑھنے کی شرح سے کم ہوگی۔

ب. اگر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \quad L \text{ غیر صفر اور متناہی ہے}$$

ہو تب $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح کے برابر ہوگی۔

□

ان تعریف کے تحت تقابل $y = 2x$ تقابل $y = x$ سے زیادہ تیزی سے نہیں بڑھتا ہے۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

ہے جو غیر صفر اور تنہا ہی حد ہے۔ زیادہ تیزی سے بڑھنے کے عمومی مطلب کو ہم اس لئے نظر انداز کرتے ہیں کہ جب ہم کہیں کہ x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے بڑھنے کی شرح g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہے تب اس سے مراد " x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے لحاظ سے g کی قیمت قابل نظر انداز ہے"، لینا چاہیے۔

مثال 7.45: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے لحاظ سے e^x درج ذیل کی بنا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

قاعدہ لھوپیتال دو مرتبہ استعمال کیا گیا

□

مثال 7.46: (i) $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے 2^x کے لحاظ سے 3^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے چونکہ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

(ب) $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے قوت نما قائل کبھی بھی ایک شرح شے نہیں بڑھتے ہیں۔ اگر $a > b > 0$ ہو تب a^x کے بڑھنے کی شرح b^x کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty$$

□

مثال 7.47: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے بڑھنے کی شرح $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہوگی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$$

□

مثال 7.48: $x \rightarrow \infty$ کرنے سے $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے بڑھنے کی شرح سے کم ہوگی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

□

مثال 7.49: قوت نما تقابل کے برعکس $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے لوگار تھمی تقابل ایک جیسے شرح سے بڑھتے ہیں:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x / \ln a}{\ln x / \ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

□

یہ حد غیر صفر اور متناہی ہے۔

اگر $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، اور $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے gf کے بڑھنے کی شرح اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، تب $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہوگی۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g}{h} = L_2$$

یعنی

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{h} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

ہے۔ اگر L_1 اور L_2 غیر صفر اور متناہی ہوں تب $L_1 L_2$ بھی غیر صفر اور متناہی ہوگا۔

مثال 7.50: دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^2 + 5}$ اور $(2\sqrt{x} - 1)^2$ کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہے۔

حل: ہم دکھاتے ہیں کہ دونوں تقابل کے بڑھنے کی شرح یہی ہے جو تقابل x کی ہے:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = 4 \end{aligned}$$

□

یوں دونوں تقابل کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنے ہوگی۔

رتبہ اور "o" علامتیت

بڑے O اور چھوٹے o کی علامت کمپیوٹر سائنس میں عام استعمال ہوتی ہے۔ انہیں یہاں متعارف کیا جاتا ہے۔

تعریف: اگر $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ f کا رتبہ g سے کم ہے جس کو $f = o(g)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو " f ، g کا چھوٹا عددی 0 ہے" پڑھا جاتا ہے۔

□

یوں $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $f = o(g)$ سے مراد $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح g سے کم ہے۔

مثال 7.51:

$$\text{چونکہ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ لہذا } x \rightarrow \infty \text{ پر } \ln x = o(x)$$

$$\text{چونکہ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} = 0 \text{ لہذا } x \rightarrow \infty \text{ پر } x^2 = o(x^3 + 1)$$

□

تعریف: فرض کریں کافی بڑے x پر $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔ تب کافی بڑے x پر اگر کسی مثبت عدد صحیح M کے لئے

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

ہو تب $x \rightarrow \infty$ پر f کا رتبہ زیادہ سے زیادہ g کے رتبے جتنا ہو گا۔ اس کو ہم $f = O(g)$ سے ظاہر کرتے ہیں جس کو " f ، g کا بڑا O ہے" پڑھا جاتا ہے۔

□

مثال 7.52: چونکہ کافی بڑے x کے لئے $\frac{x + \sin x}{x} \leq 2$ ہے لہذا $x \rightarrow \infty$ پر $x + \sin x = O(x)$ ہو گا۔ □

مثال 7.53: $x \rightarrow \infty$ پر $\frac{e^x + x^2}{e^x} \rightarrow 1$ کی بنا پر $x \rightarrow \infty$ پر $e^x + x^2 = O(e^x)$ ہو گا۔ اسی طرح $x \rightarrow \infty$ پر $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ کی بنا پر $x \rightarrow \infty$ پر $x = O(e^x)$ ہو گا۔ □

تعریف پر دوبارہ نظر دوڑاتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ کافی بڑے x پر مثبت تفاعل کے لئے $f = o(g)$ سے مراد $f = O(g)$ ہے۔ اس کے علاوہ اگر f اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے (سوال 7.434)۔

7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش

کمپیوٹر کسی لائحہ کار کے تحت قدم با قدم چل کر کوئی کام سرانجام دیتا ہے۔ اس لائحہ کار کو کمپیوٹر الخوارزم²² کہتے ہیں۔ اس لائحہ کار کی کارگزاری جاننے کی خاطر ماہرین عموماً اس کام کو سرانجام کرنے کے لئے درکار قدموں کی گنتی کرتے ہیں۔ ایک ہی کام سرانجام دینے کے دو مختلف لائحہ کار کی کارگزاری میں بہت زیادہ فرق ہو سکتا ہے جنہیں بڑے O علامتی روپ میں پیش کیا جاتا ہے۔ آئیں ایک مثال دیکھتے ہیں۔

ایک لغت میں کسی ایک حرف سے شروع ہونے والے الفاظ کی تعداد 26 000 ہے۔ آپ اس حرف سے شروع ہونے والے ایک لفظ کو دو طریقوں سے تلاش کر سکتے ہیں۔ پہلی ترکیب میں آپ پہلے لفظ سے شروع کرتے ہوئے ایک ایک لفظ پڑھ کر درکار لفظ تک پہنچتے ہیں۔ اس ترکیب کو ترتیبی تلاش²³ کہتے ہیں جو لغت میں ترتیب سے الفاظ لکھے گئے ہونے سے استفادہ نہیں کرتا ہے۔ اس ترتیب میں آپ ہر صورت لفظ تلاش کر پائیں گے (یا جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے) لیکن عین ممکن ہے کہ آپ کو 26 000 قدم چلنا پڑے۔

اس سے بہتر ترکیب میں آپ لغت کے عین وسط (ایک دو الفاظ آگے پیچھے ہو سکتے ہیں) میں ایک لفظ کو دیکھتے ہیں۔ چونکہ لغت میں الفاظ ترتیب سے ہیں لہذا آپ معلوم کر پائیں گے کہ آیا درکار لفظ پہلی نصف یا دوسری نصف حصہ میں ہے۔ لغت کی اس نصف حصہ کو رد کریں جس میں لفظ موجود نہیں ہے۔ یوں پہلی قدم میں 13 000 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اب منتخب حصہ کے نصف میں جا کر دیکھیں کہ درکار لفظ کس جانب پایا جاتا ہے۔ یوں دوسرے قدم میں 6500 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہر قدم پر آدھے حصے کو رد کرتے ہوئے چلتے جائیں جب تک آپ درکار لفظ تلاش نہیں کر پاتے یا الفاظ ختم نہیں ہو جاتے۔ چونکہ

$$\frac{26000}{2^{15}} < 1$$

ہوتا ہے لہذا آپ کو زیادہ سے زیادہ 15 قدم چل کر درکار لفظ مل جائے گا یا آپ جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے۔ اس ترتیب کو ثنائی تلاش²⁴ کہتے ہیں۔

ایک سلسلہ جس کی لمبائی n ہو میں کسی جزو کی تلاش کے لئے ترتیبی تلاش کو n قدم درکار ہو سکتے ہیں۔ اس کے برعکس ثنائی تلاش استعمال کرتے ہوئے اگر $2^{m-1} < n < 2^m$ ہو تب $m - 1 < \log_2 n \leq m$ ہو گا اور ایک لفظ تک پہنچنے کی خاطر زیادہ سے زیادہ $m = \lceil \log_2 n \rceil$ ($\log_2 n$ کا عدد صحیح چھت تقابل) بار دو حصوں میں تقسیم کی ضرورت پیش آئے گی۔ یوں ثنائی تلاش میں $\log_2 n$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔

بڑے O روپ میں اس تمام کو نہایت خوش اسلوبی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ترتیبی سلسلہ میں ترتیبی تلاش کو $O(n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے جبکہ ثنائی تلاش کو $O(\log_2 n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔ ہماری مثال میں ان دو میں بہت زیادہ فرق پایا جاتا ہے (26 000 بالمقابل 15) اور چونکہ $n \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\log_2 n$ کے لحاظ سے n زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے لہذا n بڑھانے سے یہ فرق زیادہ بڑھے گا۔

computer algorithm²²
sequential search²³
binary search²⁴

سوالات

قوت نما e^x کے ساتھ موازنہ

سوال 7.424: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تقاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

- ا. $x + 3$ ب. \sqrt{x} ج. $(\frac{3}{2})^x$ د. $\frac{e^x}{2}$ ه. $x^3 + \sin^2 x$ و. 4^x ز. $\log_{10} x$ ح. $e^{x/2}$

جواب: (ا) آہستہ (ب) آہستہ (ج) آہستہ (د) تیز (ه) آہستہ (و) آہستہ (ز) ایک جیسا (ح) آہستہ

سوال 7.425: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تقاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

- ا. $10x^4 + 30x + 1$ ب. $\sqrt{1+x^4}$ ج. e^{-x} د. $e^{\cos x}$ ه. $x \ln x - x$ و. $(\frac{5}{2})^x$ ز. x^2 ح. e^{x-1} ح. xe^x

طاقت x^2 کے ساتھ موازنہ

سوال 7.426: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تقاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

- ا. $x^2 + 4x$ ب. $\sqrt{x^4 + x^3}$ ج. $x \ln x$ د. $x^3 e^{-x}$ ه. $x^5 - x^2$ و. $(x+3)^2$ ز. $8x^2$ ح. 2^x

جواب: (ا) ایک جیسا (ب) تیز (ج) ایک جیسا (د) ایک جیسا (و) آہستہ (ز) آہستہ (ح) ایک جیسا

سوال 7.427: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تقاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

$$\begin{array}{llll} \text{ا. } x^2 + \sqrt{x} & \text{ج. } x^2 e^{-x} & \text{د. } x^3 - x^2 & \text{ز. } (1.1)^x \\ \text{ب. } 10x^2 & \text{د. } \log_{10}(x^2) & \text{و. } \left(\frac{1}{10}\right)^x & \text{ح. } x^2 + 100x \end{array}$$

لوگاریتم $\ln x$ کے ساتھ موازنہ

سوال 7.428: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

$$\begin{array}{llll} \text{ا. } \log_3 x & \text{ج. } \ln \sqrt{x} & \text{د. } x & \text{ز. } \frac{1}{x} \\ \text{ب. } \ln 2x & \text{د. } \sqrt{x} & \text{و. } 5 \ln x & \text{ح. } e^x \end{array}$$

جواب: (ا) ایک جیسا (ب) ایک جیسا (ج) ایک جیسا (د) تیز (و) ایک جیسا (ز) آہستہ (ح) تیز

سوال 7.429: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

$$\begin{array}{llll} \text{ا. } \log_2(x^2) & \text{ج. } \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{د. } x - 2 \ln x & \text{ز. } \ln(\ln x) \\ \text{ب. } \log_{10} 10x & \text{د. } \frac{1}{x^2} & \text{و. } e^{-x} & \text{ح. } \ln(2x + 5) \end{array}$$

شرح نمو کے لحاظ سے منظم کرنا

سوال 7.430: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے منظم کریں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

$$\text{ا. } e^x \quad \text{ب. } x^x \quad \text{ج. } (\ln x)^x \quad \text{د. } e^{x/2}$$

جواب: ب، د، ج، ب

سوال 7.431: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے ترتیب دیں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

$$2^x \text{ ا. } x^2 \text{ ب. } (\ln 2)^x \text{ ج. } e^x \text{ د.}$$

بڑا O اور چھوٹا o ؛ رتبہ

سوال 7.432: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

$$\begin{aligned} \text{ا. } x &= o(x) & \text{د. } x &= O(2x) & \text{ن. } \ln x &= o(\ln 2x) \\ \text{ب. } x &= o(x+5) & \text{ه. } e^x &= o(e^{2x}) \\ \text{ج. } x &= O(x+5) & \text{و. } x + \ln x &= O(x) & \text{ز. } \sqrt{x^2+5} &= O(x) \end{aligned}$$

جواب: (ا) غلط (ب) غلط (ج) درست (د) درست (ه) درست (و) درست (ز) غلط (ح) درست

سوال 7.433: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

$$\begin{aligned} \text{ا. } \frac{1}{x+3} &= O\left(\frac{1}{x}\right) & \text{د. } 2 + \cos x &= O(2) & \text{ن. } \ln(\ln x) &= O(\ln x) \\ \text{ب. } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= O\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ه. } e^x + x &= O(e^x) \\ \text{ج. } \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} &= o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{و. } x \ln x &= o(x^2) & \text{ز. } \ln x &= o(\ln(x^2+1)) \end{aligned}$$

سوال 7.434: دکھائیں کہ اگر $x \rightarrow \infty$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح برابر ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے۔

سوال 7.435: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ سے کم ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.436: $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ زیادہ سے زیادہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: جب f کا درجہ g کے درجہ سے کم یا اس کے برابر ہو۔

سوال 7.437: قاعدہ سسین اور قاعدہ ڈوزنتہ

موجودہ حصہ میں پیش کی گئی تعریف کو زیادہ عمومی بنانے کی خاطر ہم اس میں $x \rightarrow \infty$ کی پابندی ختم کر کے اس کی بجائے $x \rightarrow a$ پر حد لیتے ہیں جہاں a حقیقی عدد ہے۔ دکھائیں کہ قاعدہ سسین سے حاصل قطعی مکمل کی تخمین میں $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے خلل $O(h^4)$ ہو گا جبکہ قاعدہ ڈوزنتہ سے حاصل تخمین میں خلل $O(h^2)$ ہو گا۔ یوں ان دو ترکیب کے نتائج کی درستگی کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

دیگر موازنے

سوال 7.438: ناطق تقابل کے حد کے بارے میں حصہ 4.5 میں حاصل نتیجہ ہمیں $x \rightarrow \infty$ کی صورت میں کثیر رکنی کی اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا بتاتا ہے؟
جواب: زیادہ درجے کا کثیر رکنی، کم درجے کے کثیر رکنی سے زیادہ تیز بڑھتا ہے۔ ایک جیسے درجے کے کثیر رکنی کی شرح نمو برابر ہوتی ہے۔

سوال 7.439: کمپیوٹر ترسیم

(i) درج ذیل پر تحقیق کریں۔ اس کے بعد قاعدہ لھوپیتال سے اس تحقیق سے حاصل معلومات کی وجہ بیان کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+999)}{\ln x}$$

(ب) دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت، مستقل a کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ اس سے تقابل $f(x) = \ln(x+a)$ اور $g(x) = \ln x$ کے اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

سوال 7.440: دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{10x+1}$ اور $\sqrt{x+1}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تقابل کی شرح نمو تقابل \sqrt{x} کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال 7.441: دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^4+x}$ اور $\sqrt{x^4-x^3}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تقابل کی شرح نمو تقابل x^2 کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال 7.442: دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے e^x کی شرح نمو کسی بھی x^n کے شرح نمو سے زیادہ ہوگی، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے، مثلاً $x^{1000000}$ ۔ (اشارہ۔ x^n کا n والی تفریق کیا ہے؟)

سوال 7.443: تقابل e^x ہر کثیر رکنی سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے

دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے e^x کسی بھی کثیر رکنی $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

سوال 7.444:

ا. دکھائیں کہ کسی بھی مثبت عدد صحیح n کی صورت میں $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو تقابل $x^{1/n}$ (مثلاً $x^{1/1000000}$) کی شرح نمو سے کم ہوگی۔

ب. اگرچہ $x^{1/1000000}$ کی قیمت آخر کار $\ln x$ کی قیمت سے زیادہ ہوگی، وہاں تک پہنچنے کے لئے آپ کو محور x پر بہت دور جانا ہو گا۔ ایسا $x > 1$ تلاش کریں جس پر $x^{1/1000000} > \ln x$ ہو۔ دھیان رہے کہ $x > 1$ کی صورت میں مساوات $\ln(\ln x) = \frac{\ln x}{1000000}$ کو $\ln x = x^{1/1000000}$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ج. تفاعل $x^{1/10}$ کو بھی $\ln x$ سے بڑھنے کے لئے بہت وقت درکار ہو گا۔ کیلو لیٹر استعمال کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $x^{1/10}$ کی ترسیم $\ln x$ کی ترسیم کو کٹ کرتی ہو یا جہاں $\ln x = 10 \ln(\ln x)$ ہو۔

د. وہ نقطہ جس پر $\ln x = 10 \ln(\ln x)$ ہو کے قریب اس مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے x تلاش کریں۔

جواب: (ب) $\ln(e^{17000000}) = 17000000 < (e^{17 \times 10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx 24154952.75$ (ب) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ (ج) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ (د) نقطہ تقاطع ہے۔

سوال 7.445: تفاعل $\ln x$ کی شرح نمونہ ہر کثیر رکنی سے کم ہے دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمونہ کسی بھی غیر مستقل کثیر رکنی سے کم ہوگی۔

الخوارزم اور تلاش

سوال 7.446: (i) آپ کمپیوٹر کی مدد سے ایک کام سرانجام دینا چاہتے ہیں۔ آپ کے پاس تین الخوارزم موجود ہیں جن کے لئے کمپیوٹر کو درکار قدموں کی تعداد درج ذیل تفاعل دیتے ہیں۔ n کی بڑی قیمت کی صورت میں ان میں سے کونسا الخوارزم بہترین ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$n \log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2$$

(ب) جزو-الف میں دیے گئے تفاعل کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کونسا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔
جواب: (i) جو $O(n \log_2 n)$ قدم چلتا ہے۔

سوال 7.447: درج ذیل تفاعل کے لئے سوال 7.446 کو دہرائیں۔

$$n, \quad \sqrt{n} \log_2 n, \quad (\log_2 n)^n$$

سوال 7.448: ایک مرتب سلسلہ جس میں دس لاکھ اجزاء پائے جاتے ہیں میں سے آپ کو ایک جزو تلاش کرنا ہے۔ ترتیبی تلاش کے لئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟ ثنائی تلاش کے لئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟
جواب: ترتیبی تلاش کو دس لاکھ قدم چلنا پڑھ سکتا ہے جبکہ ثنائی تلاش میں زیادہ سے زیادہ 20 قدم چلنا ہو گا۔

سوال 7.449: ایک مرتب سلسلہ میں 450 000 اجزاء پائے جاتے ہیں جن میں سے آپ کو ایک جزو کی تلاش ہے۔ ترتیبی تلاش اور ثنائی تلاش کرتے ہوئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟

جدول 7.6: ٹکونیاتی تفاعل کو ایک ایک بنانے کی خاطر دائرہ کار کو پابند کیا گیا ہے۔

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$\cot x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

7.8 الٹ ٹکونیاتی تفاعل

الٹ ٹکونیاتی تفاعل کی ضرورت اس وقت پیش آتی ہے جب ہم مثلث کے ضلع کو ناپ کر زاویہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم الٹ تفرق بھی مہیا کرتے ہیں اور تفرقی مساوات کے حل میں عموماً پائے جاتے ہیں۔ اس حصہ میں ان تفاعل کی تعریف پیش کی جائے گی، ان کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا اور ان کی قیمت حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

الٹ ٹکونیاتی کی تعریف

چھ بنیادی ٹکونیاتی تفاعل کی قیمتیں دہرائی ہیں لہذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہیں البتہ ان کے دائرہ کار کو ایسے وقفوں پر پابند کیا جاسکتا ہے جہاں یہ ایک ایک ہوں (جدول 7.6)۔

چونکہ پابند دائرہ کار والے ٹکونیاتی تفاعل ایک ایک ہیں لہذا ان کے الٹ پائے جاتے ہیں جنہیں ظاہر کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

$$y = \sin^{-1} x$$

$$y = \cos^{-1} x$$

$$y = \tan^{-1} x$$

$$y = \cot^{-1} x$$

$$y = \sec^{-1} x$$

$$y = \csc^{-1} x$$

ہم کہیں گے " x کا الٹ سائن y کے برابر ہے"، وغیرہ۔ یاد رہے کہ ان الٹ تفاعل میں -1 سے مراد الٹ تفاعل ہے اور لہذا اس کو ہرگز بالعکس تناسب تصور نہیں کیا جائے۔ مثال کے طور پر $\sin x$ کا بالعکس تناسب $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$ ہو گا۔

الٹ ٹکونیاتی تفاعل کے دائرہ کاریوں منتخب کئے جاتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$(7.32) \quad \sec^{-1} x = \cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$(7.33) \quad \csc^{-1} x = \sin^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$(7.34) \quad \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$$

ان تعلقات کو استعمال کر کے $\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$ اور $\tan^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ہم بالترتیب $\sec^{-1} x$ ، $\csc^{-1} x$ اور $\cot^{-1} x$ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

الٹ سائن اور الٹ کوسائن

متغیر x کے الٹ سائن یعنی $\sin^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کا سائن x کے برابر ہو۔ اسی طرح $\cos^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کے کوسائن کی قیمت x ہو۔

تعریف: $y = \sin^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لئے $\sin y = x$ ہو۔ اسی طرح $y = \cos^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[0, \pi]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لئے $\cos y = x$ ہو۔

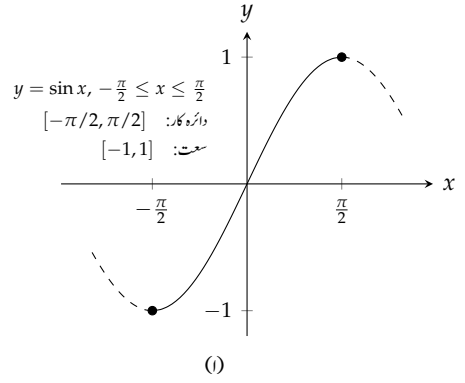
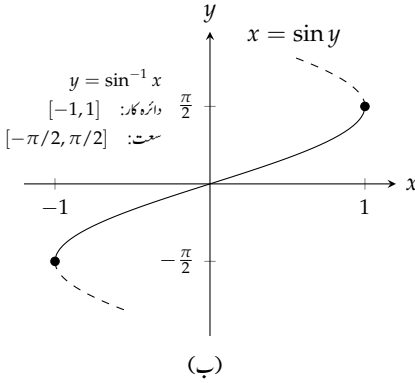
□

تفاعل $y = \sin^{-1} x$ (شکل 7.39) کی ترسیم مہدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے (اور عین $x = \sin y$ کی ترسیم پر پائی جاتی ہے)۔ یوں الٹ سائن طاق تفاعل ہے:

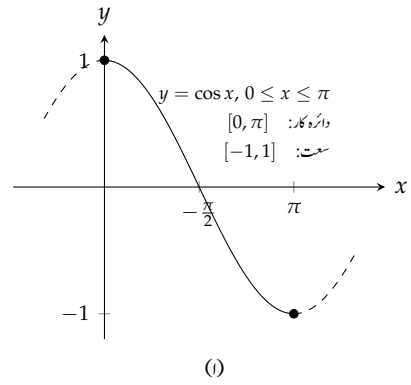
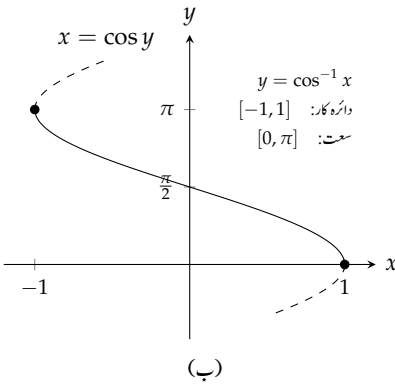
$$(7.35) \quad \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$$

تفاعل $y = \cos^{-1} x$ (شکل 7.40) کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے۔

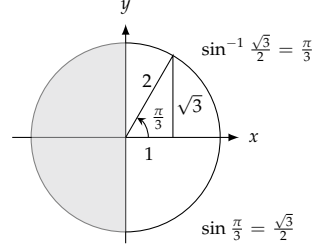
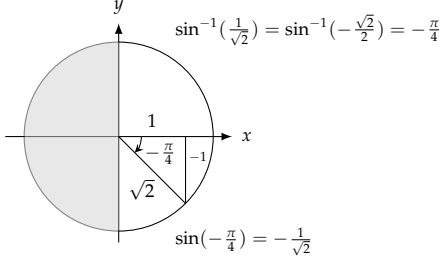
مثال 7.54: تفاعل $\sin^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں



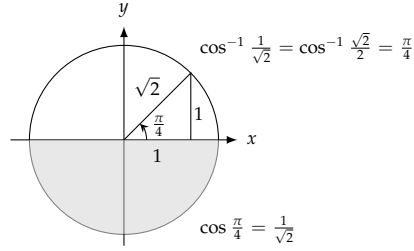
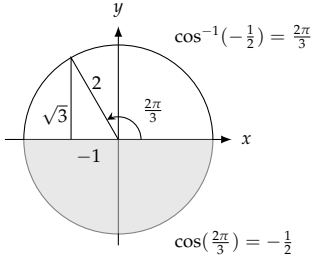
شکل 7.39: ترسیمات برائے (ا) $y = \sin x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ اور (ب) الٹ سائن فنکشن $y = \sin^{-1} x$ ؛
 لکیر $y = x$ میں عکس $\sin^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \sin y$ کا کچھ حصہ ہے۔



شکل 7.40: ترسیمات برائے (ا) $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$ اور (ب) الٹ کوسائن فنکشن $y = \cos^{-1} x$ ؛
 لکیر $y = x$ میں عکس $\cos^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \cos y$ کا کچھ حصہ ہے۔



شکل 7.41: سائن اور الٹ سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.54)۔



شکل 7.42: کوسائن اور الٹ سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.55)۔

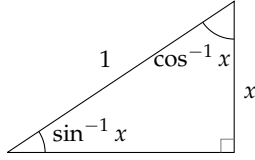
الٹ سائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل 7.54 میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\sin^{-1} x$ کا سمت $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ہے لہذا زاویے ربع اول اور ربع چہارم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

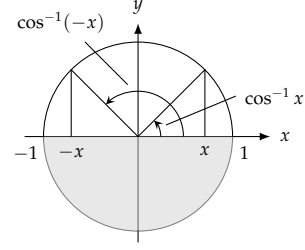
□

مثال 7.55: تقابل $\cos^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

الٹ کوسائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل 7.55 میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا



$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} : 7.44 \text{ شکل}$$



$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi : 7.43 \text{ شکل}$$

سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\cos^{-1} x$ کا سعت $[0, \pi]$ ہے لہذا زاویے ربع اول اور ربع دوم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

□

تمثال جن میں الٹ سائن اور الٹ کوسائن پائے جاتے ہوں

ہم شکل 7.43 میں دیکھتے ہیں کہ x کا الٹ کوسائن تمثال

$$(7.36) \quad \cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$$

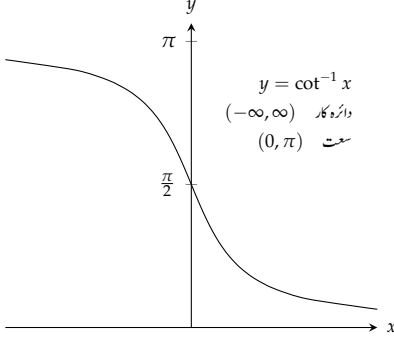
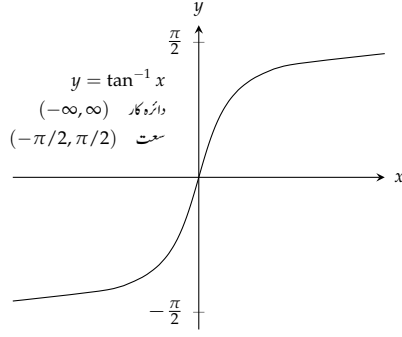
کو مطمئن کرتا ہے جس کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.37) \quad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

اسی طرح شکل 7.44 میں مثلث کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.38) \quad \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

اگرچہ شکل 7.44 میں دی گئی مثلث سے یہ ثابت نہیں کیا جاسکتا ہے لیکن مساوات 7.38 وقفہ $[-1, 1]$ میں دیگر x کے لئے بھی درست ہے۔ یہ حقیقت مساوات 7.35 اور مساوات 7.37 کا نتیجہ ہے (سوال 7.504)۔

شکل 7.46: $y = \cot^{-1} x$ ترسیمشکل 7.45: $y = \tan^{-1} x$ ترسیم

$\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ اور $\csc x$ کے الٹ

متغیر x کا الٹ ٹینیجٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا ٹینیجٹ x ہو۔ اسی طرح x کا الٹ کوٹینیجٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا کوٹینیجٹ x ہو۔

تعریف: وقفہ $(-\pi/2, \pi/2)$ میں وہ عدد جس کا $\tan y = x$ ہو عدد $y = \tan^{-1} x$ ہو گا۔ اسی طرح وقفہ $(0, \pi)$ میں وہ عدد جس کا $\cot y = x$ ہو عدد $y = \cot^{-1} x$ ہو گا۔

□

ہم کھلا وقفہ لیتے ہیں تاکہ ان نقطوں سے نجات حاصل کر سکیں جن پر ٹینیجٹ اور کوٹینیجٹ غیر معین ہیں۔

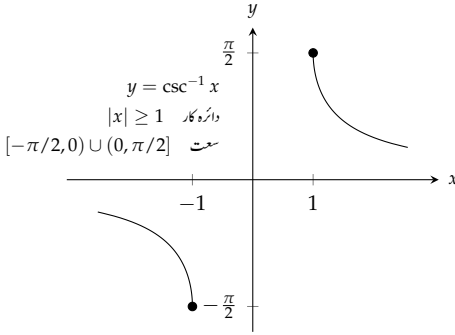
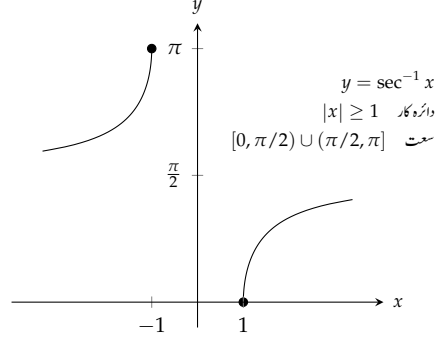
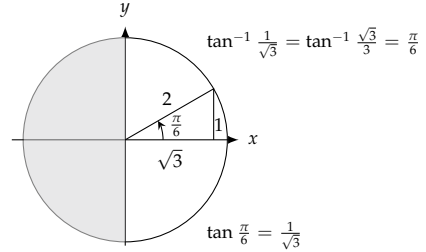
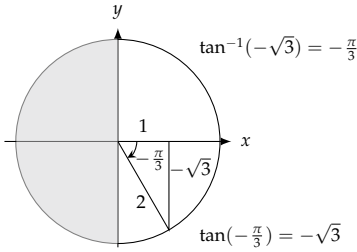
تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کی ترسیم تفاعل $x = \tan y$ کی ترسیم، جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے، کا کچھ حصہ ہے لہذا یہ بھی مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا (شکل 7.45)۔ الجبرائی طور پر اس سے مراد

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \quad (7.39)$$

ہے، یعنی، الٹ ٹینیجٹ طاق تفاعل ہے۔ تفاعل $y = \cot^{-1} x$ کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے (شکل 7.46)۔

تفاعل $\sec x$ اور $\csc x$ کے پابند شدہ روپ کے الٹ کی ترسیمات کو بالترتیب شکل 7.47 اور شکل 7.48 میں دکھایا گیا ہے۔

انتباہ: متغیر x کی منفی قیمتوں کے لئے $\sec^{-1} x$ کی تعریف پر اتفاق نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم ربع دوم میں $\pi/2$ اور π کے بیچ زاویہ لیں گے۔ اس انتخاب کی بنا $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ ہو گا اور $\sec^{-1} x$ کے دائرہ کار کے ہر حصہ پر $\sec^{-1} x$ بڑھتا ہوا تفاعل ہو گا۔

شکل 7.48: $y = \csc^{-1} x$ ترسیمشکل 7.47: $y = \sec^{-1} x$ ترسیم

شکل 7.49: الٹ کوٹینجٹ کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.56)۔

مثال 7.56: الٹ کوٹینجٹ $\tan^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں
 الٹ کوٹینجٹ کی مخصوص قیمتوں کا حصول شکل 7.49 میں دکھایا گیا ہے۔ درج ذیل دیگر قیمتیں بھی اسی طرح حاصل کی جاسکتی ہیں۔

x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

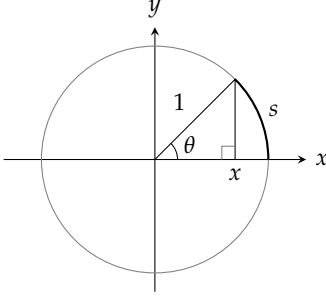
□

مثال 7.57: اگر $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہو تب $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ ، $\sec \alpha$ ، $\csc \alpha$ اور $\cot \alpha$ کیا ہوں گے؟

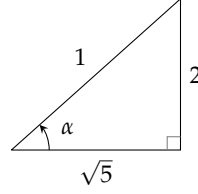
حل: چونکہ $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہے لہذا ہم α کو قائمہ مثلث کا ایک زاویہ تصور کرتے ہیں جس کا مخالف ضلع 2 اور وتر 3 ہیں۔
 مثلث کا تیسرا ضلع (قاعدہ) درج ذیل ہو گا (شکل 7.50)۔

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

مسئلہ فیثاغورث



شکل 7.51: اکائی دائرہ میں زاویہ $\theta = \cos^{-1} x$ مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گا۔



شکل 7.50: مثلث کی مدد سے زاویوں کا حصول (مثال 7.57)

ہم مثلث پر قاعدہ کی لمبائی لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sec \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}, \csc \alpha = \frac{3}{2}, \cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

□

رہا r کے دائرہ میں مرکز پر زاویہ θ اور قوس کی لمبائی s کا تعلق $s = r\theta$ ہے لہذا اکائی دائرہ میں $s = \theta$ ہو گا (شکل 7.51)۔ یوں متغیر x کا الٹ کو سائن $\cos^{-1} x$ زاویہ θ دیگا جس کی قیمت مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گی۔ الٹ سائن کے لئے بھی اس قسم کا تعلق پایا جاتا ہے۔

مثال 7.58: $\cot \left(\sec^{-1} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \csc^{-1}(-2) \right)$ کی قیمت تلاش کریں۔

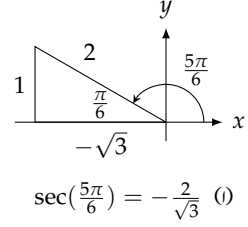
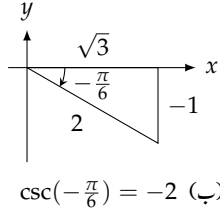
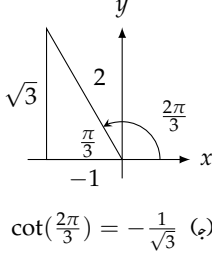
حل: ہم اندر سے باہر کی جانب چلتے ہوئے زاویوں اور نسبتوں کو مثلثوں کی مدد سے ظاہر کریں گے۔

پہلا قدم: سیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع دوم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل 7.52-ا)۔

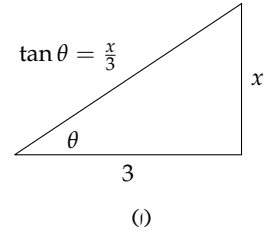
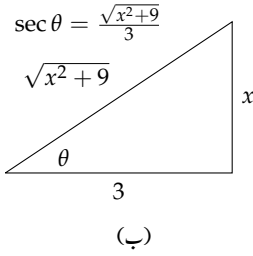
$$\sec^{-1} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \sec^{-1} \left(\frac{2}{-\sqrt{3}} \right) = \frac{5\pi}{6}$$

دوسرا قدم: کوسیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع چہارم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل 7.52-ب)۔

$$\csc^{-1}(-2) = \csc^{-1} \left(\frac{2}{-1} \right) = -\frac{\pi}{6}$$



شکل 7.52: مثلث برائے مثال 7.58



شکل 7.53: مثلث برائے مثال 7.59

تیسرا قدم: کوئینجٹ کی قیمتیں ربع چہارم سے حاصل ہوگی (شکل 7.58-ج):

$$\begin{aligned} \cot \left(\sec^{-1} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \csc^{-1}(-2) \right) &= \cot \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \cot \left(\frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

□

مثال 7.59: $\sec \left(\tan^{-1} \frac{x}{3} \right)$ تلاش کریں۔

حل: ہم $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ لے کر زاویہ θ کو قائمہ مثلث میں تصور کرتے ہیں (شکل 7.53-ا)۔ یوں

$$\tan \theta = \frac{\text{منالف}}{\text{قربہ}} = \frac{x}{3}$$

ہو گا۔ مثلث کا وتر

$$\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$

ہو گا لہذا سینکث کی قیمت درج ذیل ہو گی (شکل 7.53-ب)۔

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$$

□

سوالات

الٹ تکنیکیاتی تفاعل کی مخصوص قیمتیں

سوال 7.450 تا سوال 7.461 میں مثال 7.54 تا مثال 7.56 کی طرح حوالہ مثلث استعمال کرتے ہوئے زاویے تلاش کریں۔

سوال 7.450: $\tan^{-1}(1)$ (ا)، $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (ب)، $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$ (ج) جواب: (ا) $\frac{\pi}{4}$ ، (ب) $-\frac{\pi}{3}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.451: $\tan^{-1}(-1)$ (ا)، $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ (ب)، $\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$ (ج)

سوال 7.452: $\sin^{-1}(\frac{-1}{2})$ (ا)، $\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ (ب)، $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$ (ج) جواب: (ا) $-\frac{\pi}{6}$ ، (ب) $\frac{\pi}{4}$ ، (ج) $-\frac{\pi}{3}$

سوال 7.453: $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ (ا)، $\sin^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$ (ب)، $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ (ج)

سوال 7.454: $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$ (ا)، $\cos^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$ (ب)، $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ (ج) جواب: (ا) $\frac{\pi}{3}$ ، (ب) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.455: $\cos^{-1}(\frac{-1}{2})$ (ا)، $\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ (ب)، $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$ (ج)

سوال 7.456: $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ (ا)، $\sec^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$ (ب)، $\sec^{-1}(-2)$ (ج) جواب: (ا) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\frac{2\pi}{3}$

سوال 7.457: (i) $\sec^{-1}(\sqrt{2})$ (ب) $\sec^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$ (ج) $\sec^{-1}(2)$

سوال 7.458: (i) $\csc^{-1}(\sqrt{2})$ (ب) $\csc^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$ (ج) $\csc^{-1}(2)$
جواب: (i) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $-\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.459: (i) $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$ (ب) $\csc^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$ (ج) $\csc^{-1}(-2)$

سوال 7.460: (i) $\cot^{-1}(-1)$ (ب) $\cot^{-1}\sqrt{3}$ (ج) $\cot^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$
جواب: (i) $\frac{3\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{2\pi}{3}$

سوال 7.461: (i) $\cot^{-1}(1)$ (ب) $\cot^{-1}\sqrt{-3}$ (ج) $\cot^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں

سوال 7.462: اگر $\alpha = \sin^{-1}(\frac{5}{13})$ ہو تب $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ ، $\sec \alpha$ ، $\csc \alpha$ اور $\cot \alpha$ کیا ہوں گے؟
جواب: $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ، $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ ، $\sec \alpha = \frac{13}{12}$ ، $\csc \alpha = \frac{13}{5}$ ، $\cot \alpha = \frac{12}{5}$

سوال 7.463: اگر $\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$ ہو تب $\cos \alpha$ ، $\sin \alpha$ ، $\sec \alpha$ ، $\csc \alpha$ اور $\cot \alpha$ کیا ہوں گے؟

سوال 7.464: اگر $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{5})$ ہو تب $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ ، $\csc \alpha$ اور $\cot \alpha$ کیا ہوں گے؟
جواب: $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ، $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\tan \alpha = -2$ ، $\csc \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ، $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$

سوال 7.465: اگر $\alpha = \sec^{-1}(\frac{-\sqrt{13}}{2})$ ہو تب $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ ، $\csc \alpha$ اور $\cot \alpha$ کیا ہوں گے؟

تکونیاتی اور الٹ ٹکونیاتی اجزاء کی قیمتوں کا حصول
سوال 7.466 تا سوال 7.477 میں درکار قیمت معلوم کریں۔

سوال 7.466: $\sin(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2})$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 7.467: $\sec(\cos^{-1}\frac{1}{2})$

سوال 7.468: $\tan(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}))$
جواب: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

سوال 7.469: $\cot \left(\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$

سوال 7.470: $\csc(\sec^{-1} 2) + \cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$
جواب: $\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

سوال 7.471: $\tan(\sec^{-1} 1) + \sin(\csc^{-1}(-2))$

سوال 7.472: $\sin \left(\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) + \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$
جواب: 1

سوال 7.473: $\cot \left(\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) - \sec^{-1} 2 \right)$

سوال 7.474: $\sec(\tan^{-1} 1 + \csc^{-1} 1)$
جواب: $-\sqrt{2}$

سوال 7.475: $\sec(\cot^{-1} \sqrt{3} + \csc^{-1}(-1))$

سوال 7.476: $\sec^{-1}(\sec(-\frac{\pi}{6}))$ (جواب $-\frac{\pi}{6}$ نہیں ہے۔)
جواب: $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.477: $\cot^{-1}(\cot(-\frac{\pi}{4}))$ (جواب $-\frac{\pi}{4}$ نہیں ہے۔)

تکوینیاتی فقرے

سوال 7.478 تا سوال 7.489 میں تکوینیاتی فقروں کو حل کریں۔

سوال 7.478: $\sec(\tan^{-1} \frac{x}{2})$
جواب: $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

سوال 7.479: $\sec(\tan^{-1} 2x)$

سوال 7.480: $\tan(\sec^{-1} 3y)$
جواب: $\sqrt{9y^2 - 1}$

سوال 7.481: $\tan(\sec^{-1} \frac{y}{5})$

سوال 7.482: $\cos(\sin^{-1} x)$
جواب: $\sqrt{1-x^2}$

سوال 7.483: $\tan(\cos^{-1} x)$

سوال 7.484: $\sin(\tan^{-1} \sqrt{x^2-2x}), x \geq 2$
جواب: $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

سوال 7.485: $\sin(\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

سوال 7.486: $\cos(\sin^{-1} \frac{2y}{3})$
جواب: $\frac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$

سوال 7.487: $\cos(\sin^{-1} \frac{y}{5})$

سوال 7.488: $\sin(\sec^{-1} \frac{x}{4})$
جواب: $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

سوال 7.489: $\sin(\sec^{-1} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x})$

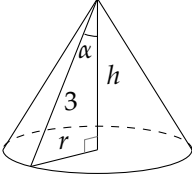
حد
سوال 7.490 تا سوال 7.497 میں حد تلاش کریں۔ جہاں شبہ ہو وہاں تفاعل کی ترتیم پر نظر ڈالیں۔

سوال 7.490: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^{-1} x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

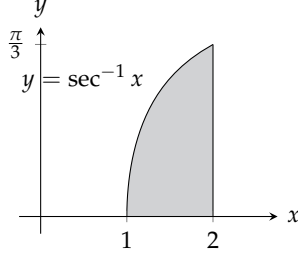
سوال 7.491: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \cos^{-1} x$

سوال 7.492: $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

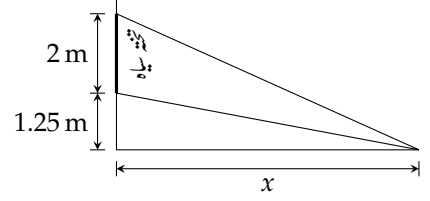
سوال 7.493: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x$



شکل 7.56: مخروط برائے سوال 7.500



شکل 7.55: جسم طواف (سوال 7.499)



شکل 7.54: تدریسی کمرہ میں تختہ سیاہ (سوال 7.498)

سوال 7.494: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 7.495: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sec^{-1} x$

سوال 7.496: $\lim_{x \rightarrow \infty} \csc^{-1} x$
جواب: 0

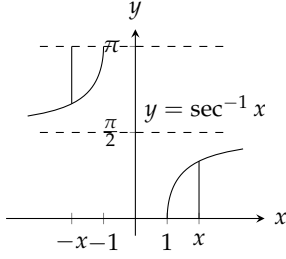
سوال 7.497: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \csc^{-1} x$

نظریہ اور استعمال

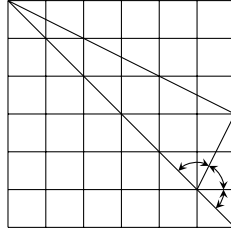
سوال 7.498: آپ کے اسکول کے تدریسی کمرہ میں لکھائی کا تختہ سیاہ 25 زمین سے 1.25 m کی اونچائی سے شروع ہوتا ہے جبکہ اس کا قد 2 m میٹر ہے۔ آپ تختہ سیاہ سے x میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔ دکھائیں کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ $\alpha = \cot^{-1} \frac{x}{3.25}$ ہے (شکل 7.54)۔

سوال 7.499: منحنی $y = \sec^{-1} x$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.55)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

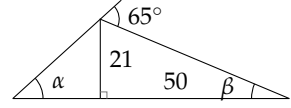
سوال 7.500: ایک مخروط کا ترچھا قد 3 m ہے (شکل 7.56)۔ مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کس زاویہ alpha پر حاصل ہو گا۔
جواب: $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.7^\circ$



شکل 7.59: ترسیم برائے سوال 7.503



شکل 7.58: برائے سوال 7.502



شکل 7.57: برائے سوال 7.501

سوال 7.501: زاویہ α کو شکل 7.57 میں دریافت کریں۔

سوال 7.502: آپ $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$ کی تصدیق شکل 7.58 کی مدد سے کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے دیکھیں۔

سوال 7.503: (i) متماثل $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ کو شکل 7.59 کی مدد سے جیومیٹریائی طور پر اخذ کریں۔ (ب) اسی متماثل کو درج ذیل دو مساوات کی مدد سے تحلیلی طور پر اخذ کریں۔

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \quad \text{مساوات 7.37}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{مساوات 7.32}$$

سوال 7.504: متماثل $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ کو $0 < x < 1$ کے لئے شکل 7.44 سے اخذ کیا گیا۔ اس کی تصدیق وقفہ $[-1, 1]$ کے باقی حصہ کے لئے کرنے کی خاطر $x = 1$ ، $x = 0$ اور $x = -1$ اس متماثل میں پر کر کے دیکھیں۔ اس کے بعد وقفہ $(-1, 0)$ میں x کے لئے اس کی تصدیق کی خاطر $x = -a$ ، $a > 0$ لیتے ہوئے مساوات 7.35 اور مساوات 7.37 کا اطلاق مجموعہ $\sin^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$ پر کریں۔

سوال 7.505: دکھائیں کہ مجموعہ $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ مستقل ہے۔

سوال 7.506 تا سوال 7.509 میں کون سے فقرے معین اور کون سے غیر معین ہیں؟

سوال 7.506: (i) $\tan^{-1} 2$ ، (ب) $\cos^{-1} 2$ جواب: (i) معین؛ ایسا زاویہ پایا جاتا ہے جس کا ٹینجینٹ 2 کے برابر ہے۔ (ب) غیر معین؛ ایسا کوئی زاویہ نہیں پایا جاتا ہے جس کا کوسائن 2 کے برابر ہو۔

سوال 7.507: (i) $\csc^{-1} \frac{1}{2}$ ، (ب) $\csc^{-1} 2$

سوال 7.508: (i) $\sec^{-1} 0$ ، (ب) $\sin^{-1} \sqrt{2}$

جواب: (i) غیر معین؛ کسی زاویے کا سینکٹ 0 نہیں ہے۔ (ب) غیر معین؛ کسی زاویے کا سائن $\sqrt{2}$ نہیں ہے۔

سوال 7.509: (i) $\cot^{-1}(-\frac{1}{2})$ ، (ب) $\cos^{-1}(-5)$

کیلکولیٹر استعمال کریں

سوال 7.510: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1} 1.5$ ب. $\csc^{-1}(-1.5)$ ج. $\cot^{-1} 2$

جواب: (i) 0.84107، (ب) -0.72973، (ج) 0.46365

سوال 7.511: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1}(-3)$ ب. $\csc^{-1} 1.7$ ج. $\cot^{-1}(-2)$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.512 تا سوال 7.514 میں ہر ایک مرکب تفاعل کا دائرہ کار اور سمت تلاش کریں۔ ان مرکب تفاعل کو علیحدہ علیحدہ ترسیم کریں۔ کیا انفرادی ترسیمات معنی رکھتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ اگر کوئی فرق نظر آئے، اس پر تبصرہ کریں۔

سوال 7.512: (i) $y = \tan^{-1}(\tan x)$ ، (ب) $y = \tan(\tan^{-1} x)$

جواب: (i) دائرہ کار: تمام حقیقی اعداد ماسوائے وہ جن کی روپ $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ہو جہاں k عدد صحیح ہے؛ سمت: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (ب) دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛ سمت: $-\infty \leq y \leq \infty$

سوال 7.513: (i) $y = \sin^{-1}(\sin x)$ ، (ب) $y = \sin(\sin^{-1} x)$

سوال 7.514: (i) $y = \cos^{-1}(\cos x)$ ، (ب) $y = \cos(\cos^{-1} x)$

جواب: (i) دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛ سمت: $0 \leq y \leq \pi$ (ب) دائرہ کار: $-1 \leq x \leq 1$ ؛ سمت: $-1 \leq y \leq 1$

سوال 7.515: تفاعل $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(\frac{1}{x}))$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال 7.516: تفاعل $y = \frac{4x}{x^2+1}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = 2 \sin(2 \tan^{-1} x)$ بھی ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

جواب: ترسیمات بالکل ایک جیسے ہیں۔

سوال 7.517: ناطق تفاعل $y = \frac{2-x^2}{x^2}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = \cos(2 \sec^{-1} x)$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

7.9 الٹ ٹکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل

الٹ ٹکونیاتی تفاعل مختلف اقسام کے تفاعل، جو انجینیری، طبیعیات اور ریاضیات میں رونما ہوتے ہیں، کے الٹ تفرق مہیا کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم الٹ ٹکونیاتی تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں اور متعلقہ نکلات پر غور کرتے ہیں۔

مثال 7.60:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1}(x^2) &= \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} & (i) \\ \frac{d}{dx} \tan^{-1} \sqrt{x+1} &= \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x+1}) & (ب) \\ &= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)} \\ \frac{d}{dx} \sec^{-1}(-3x) &= \frac{1}{|-3x|\sqrt{(-3x)^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(-3x) & (ج) \\ &= \frac{-3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}} = \frac{-1}{|x|\sqrt{9x^2-1}} \end{aligned}$$

□

مثال 7.61:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{\tan x}}{1+x^2} dx &= \int_0^{\pi/4} e^u du & u = \tan^{-1} u \\ &= e^u \Big|_0^{\pi/4} = e^{\pi/4} - 1 \end{aligned}$$

□

الٹ ٹکونیاتی تفاعل کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$(7.40) \quad \frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$(7.41) \quad \frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1$$

$$(7.42) \quad \frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$(7.43) \quad \frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$(7.44) \quad \frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

$$(7.45) \quad \frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-\frac{du}{dx}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1$$

آئیں مساوات 7.40 اور مساوات 7.44 کو حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.42 کو بھی اسی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.41، مساوات 7.43 اور مساوات 7.45 کو موزوں تماشل تفرق کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے (سوال 7.598 تا سوال 7.600)۔

تفاعل $y = \sin^{-1} u$ کا تفرق

ہم جانتے ہیں کہ وقفہ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ میں تفاعل $x = \sin y$ قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق، یعنی کوسائن، اس وقفہ پر مثبت ہے۔ یوں مسئلہ 7.1 ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ پورے وقفہ $-1 < x < 1$ پر الٹ تفاعل $y = \sin^{-1} x$ قابل تفرق ہو گا۔ چونکہ نقطہ $x = 1$ اور $x = -1$ پر اس کے ترسیم کے مماس انتصابی ہیں (شکل 7.60) لہذا ان نقطوں پر ہم الٹ تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کو قابل تفرق تصور نہیں کر سکتے ہیں۔

ہم $y = \sin^{-1} x$ کا تفرق درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں:

$$\sin y = x$$

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = 1$$

دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

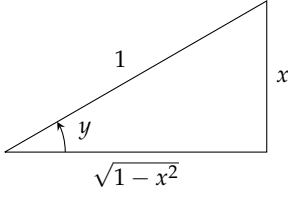
زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

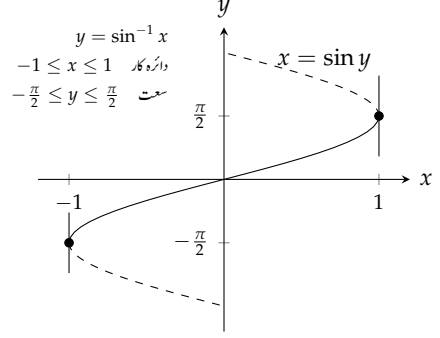
وقفہ پر $\cos y > 0$ ہے لہذا تقسیم کیا جاسکتا ہے

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

شکل 7.61



شکل 7.61: اس حوالہ مثلث میں $\sin y = \frac{x}{1} = x$ اور $\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ ہو گا۔



شکل 7.60: متقابل $y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم کے مماس نقطہ $x = 1$ اور $x = -1$ پر انتصابی ہیں۔

یوں x کے لحاظ سے $y = \sin^{-1} x$ کو تفرق درج ذیل ہو گا۔

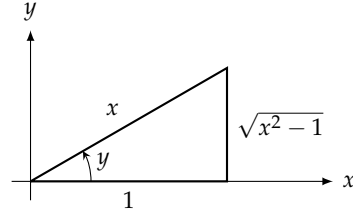
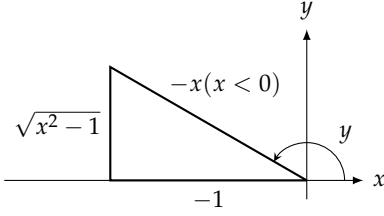
$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

اگر x کے لحاظ سے u قابل تفرق متقابل ہو تب $y = \sin^{-1} u$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad |u| < 1$$



شکل 7.62: دونوں رُبع میں $\sin y = x$ ہے۔ رُبع اول میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1} = \sqrt{x^2-1}$ ہے جبکہ رُبع دوم میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(-1)} = -\sqrt{x^2-1}$ ہے۔

تقابل $y = \sec^{-1} u$ کا تفرق

ہم $y = \sec^{-1} x, |x| > 1$ کا تفرق بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$\sec y = x$$

$$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow \sec y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec y) = 1$$

x کے لحاظ سے دونوں اطراف کا تفرق

$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1$$

زنجیری قاعدہ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y} \\ &= \mp \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

شکل 7.62

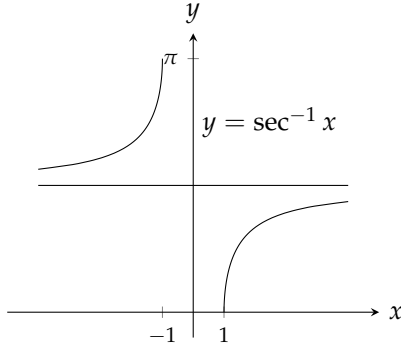
درج بالا میں تیسرے قدم پر چونکہ $|x| > 1$ ہے لہذا y وقفہ $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ میں پایا جائے گا جس کی بنا پر $\sec y \tan y \neq 0$ ہو گا لہذا دونوں اطراف کو غیر صفر سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

علامت کے بارے میں ہم کیا کر سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں (شکل 7.63) کہ $|x| > 1$ کے لئے $y = \sec^{-1} x$ کی ترسیم کی ڈھلوان مثبت رہتی ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.46) \quad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \\ -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x < -1 \end{cases}$$

مطلق قیمت استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 7.46 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| > 1$$



شکل 7.63: قوس $y = \sec^{-1} x$ کی ڈھلوان $x < -1$ اور $x > 1$ دونوں کے لئے مثبت ہے۔

اگر $|u| > 1$ ہو اور x کا u قابل تفرق تفاعل ہو تب زنجیری قاعدہ کے استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx} \quad |u| > 1$$

کلیات مکمل

ہم مساوات 7.40، مساوات 7.42 اور مساوات 7.44 جہاں $a = 1$ ہے، سے مکمل کے درج ذیل تین اہم کلیات حاصل ہوتے ہیں جہاں $a \neq 0$ مستقل ہے۔

$$(7.47) \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad u^2 < a^2 \text{ کے لئے درست ہے}$$

$$(7.48) \quad \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad \text{تمام } u \text{ کے لئے درست ہے}$$

$$(7.49) \quad \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \quad u^2 > a^2 \text{ کے لئے درست ہے}$$

مکمل کے درج بالا کلیات کے دائیں ہاتھ کا تفرق لے کر ان کی تصدیق کی جاسکتی ہے۔

مثال 7.62:

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \quad (i)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) \Big|_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \quad (ب)$$

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x) \Big|_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \quad (ج)$$

□

مثال 7.63:

(i) مساوات 7.47 میں $u = x$ اور $a = 3$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

(ب) مساوات 7.47 میں $a = \sqrt{3}$, $u = 2x$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad \text{مساوات 7.47}$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

□

مثال 7.64: مکمل $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ کو حل کریں۔

حل: یہاں ریاضی فقرہ $\sqrt{4x-x^2}$ مساوات 7.47 تا مساوات 7.49 میں سے کسی بھی مکمل میں پائے جانے والے ریاضی فقرے کی طرح نہیں ہے لہذا ہم اس کا مربع مکمل کرتے ہیں:

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4) + 4 = 4 - (x-2)^2 \quad \text{مکمل مربع}$$

اس کے بعد $a = 2$ ، $u = x - 2$ اور $du = dx$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \quad a = 2, u = x - 2$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad \text{مساوات 7.47}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

□

مثال 7.65:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{10+x^2} &= \frac{1}{\sqrt{10}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right) + C & \text{مساوات 7.48, } a = \sqrt{10}, u = x \\
 \int \frac{dx}{7+3x^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{a^2+u^2} & a = \sqrt{7}, u = \sqrt{3}x \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{مساوات 7.48} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}}\right) + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{21}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}}\right) + C
 \end{aligned}$$

□

مثال 7.66: مکمل $\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$ حل کریں۔حل: ہم ثنائی $4x^2+4x$ کا مربع مکمل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
 4x^2+4x+2 &= 4(x^2+x)+2 = 4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+2-\frac{4}{4} \\
 &= 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1 = (2x+1)^2+1
 \end{aligned}$$

اب $a=1$ ، $u=2x+1$ ، اور $\frac{du}{2}=dx$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{4x^2+4x+2} &= \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+a^2} & a=1, u=2x+1 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \text{مساوات 7.48} \\
 &= \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) & a=1, u=2x+1
 \end{aligned}$$

□

مثال 7.67: مکمل $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-5}}$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-5}} &= \int \frac{\frac{du}{2}}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}} & u = 2x, a = \sqrt{5} \\
 &= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} \\
 &= \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C & \text{مساوات 7.49} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sec^{-1} \left(\frac{2|x|}{\sqrt{5}} \right) + C & a = \sqrt{5}, u = 2x
 \end{aligned}$$

□

مثال 7.68: مکمل $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}}$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}} &= \int \frac{\frac{du}{u}}{\sqrt{u^2-a^2}} & u = e^x, a = \sqrt{6} \\
 &= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} \\
 &= \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C & \text{مساوات 7.49} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sec^{-1} \left(\frac{e^x}{\sqrt{6}} \right) + C
 \end{aligned}$$

□

سوالات

تفرق کی تلاش
سوال 7.518 تا سوال 7.539 میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے دریافت کریں۔

سوال 7.518: $y = \cos^{-1}(x^2)$
جواب: $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

7.9. الٹ ٹیگونیٹری فنکشنز کے متعلق؛ مکمل

سوال 7.519: $y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

سوال 7.520: $y = \sin^{-1} \sqrt{2t}$
جواب: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

سوال 7.521: $y = \sin^{-1}(1-t)$

سوال 7.522: $y = \sec^{-1}(2s+1)$
جواب: $\frac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$

سوال 7.523: $y = \sec^{-1} 5s$

سوال 7.524: $y = \csc^{-1}(x^2+1), \quad x > 0$
جواب: $\frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

سوال 7.525: $y = \csc^{-1} \frac{x}{2}$

سوال 7.526: $y = \sec^{-1} \frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$
جواب: $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$

سوال 7.527: $y = \sin^{-1} \frac{3}{t^2}$

سوال 7.528: $y = \cot^{-1} \sqrt{t}$
جواب: $\frac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$

سوال 7.529: $y = \cot^{-1} \sqrt{t-1}$

سوال 7.530: $y = \ln(\tan^{-1} x)$
جواب: $\frac{1}{\tan^{-1}(x(1+x^2))}$

سوال 7.531: $y = \tan^{-1}(\ln x)$

سوال 7.532: $y = \csc^{-1}(e^t)$
جواب: $\frac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$

سوال 7.533: $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

سوال 7.534: $y = s\sqrt{1-s^2} + \cos^{-1} s$
 جواب: $\frac{-2s^2}{\sqrt{1-s^2}}$

سوال 7.535: $y = \sqrt{s^2-1} - \sec^{-1} s$

سوال 7.536: $y = \tan^{-1} \sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x, \quad x > 1$
 جواب: 0

سوال 7.537: $y = \cot^{-1} \frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

سوال 7.538: $y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$
 جواب: $\sin^{-1} x$

سوال 7.539: $y = \ln(x^2+4) - x \tan^{-1}(\frac{x}{2})$

تکمل کا حل

سوال 7.540 تا سوال 7.563 میں مکمل حل کریں۔

سوال 7.540: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
 جواب: $\sin^{-1} \frac{x}{3} + C$

سوال 7.541: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

سوال 7.542: $\int \frac{dx}{17+x^2}$
 جواب: $\frac{1}{\sqrt{17}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{17}} + C$

سوال 7.543: $\int \frac{dx}{9+3x^2}$

سوال 7.544: $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$
 جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}} \sec^{-1} \left| \frac{5x}{\sqrt{2}} \right| + C$

سوال 7.545: $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4}}$

$$\int_0^1 \frac{4 \, ds}{\sqrt{4-s^2}} : \text{سوال 7.546}$$

جواب: $\frac{2\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}} : \text{سوال 7.547}$$

$$\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2} : \text{سوال 7.548}$$

جواب: $\frac{\pi}{16}$

$$\int_{-2}^2 \frac{dt}{4+3t^2} : \text{سوال 7.549}$$

$$\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}} : \text{سوال 7.550}$$

جواب: $-\frac{\pi}{12}$

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}} : \text{سوال 7.551}$$

$$\int \frac{3 \, dr}{\sqrt{1-4(r-1)^2}} : \text{سوال 7.552}$$

جواب: $\frac{3}{2} \sin^{-1} 2(r-1) + C$

$$\int \frac{6 \, dr}{\sqrt{4-(r+1)^2}} : \text{سوال 7.553}$$

$$\int \frac{dx}{2+(x-1)^2} : \text{سوال 7.554}$$

جواب: $\frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) + C$

$$\int \frac{dx}{1+(3x+1)^2} : \text{سوال 7.555}$$

$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}} : \text{سوال 7.556}$$

جواب: $\frac{1}{4} \sec^{-1} \left| \frac{2x-1}{2} \right| + C$

$$\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}} : \text{سوال 7.557}$$

سوال 7.558: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos \theta \, d\theta}{1 + (\sin \theta)^2}$: جواب: π

سوال 7.559: $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x \, dx}{1 + (\cot x)^2}$

سوال 7.560: $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x \, dx}{1 + e^{2x}}$: جواب: $\frac{\pi}{12}$

سوال 7.561: $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4 \, dt}{t(1 + \ln^2 t)}$

سوال 7.562: $\int \frac{y \, dy}{\sqrt{1 - y^4}}$: جواب: $\frac{1}{2} \sin^{-1} y^2 + C$

سوال 7.563: $\int \frac{\sec^2 y \, dy}{\sqrt{1 - \tan^2 y}}$

تکمیل کا حل
سوال 7.564 تا سوال 7.573 حل کریں۔

سوال 7.564: $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$: جواب: $\sin^{-1}(x - 2) + C$

سوال 7.565: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

سوال 7.566: $\int_{-1}^0 \frac{6 \, dt}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$: جواب: π

سوال 7.567: $\int_{1/2}^1 \frac{6 \, dt}{\sqrt{3 + 4t - 4t^2}}$

سوال 7.568: $\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 5}$: جواب: $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{y-1}{2}\right) + C$

سوال 7.569: $\int \frac{dy}{y^2 + 6y + 10}$

$$\int_1^2 \frac{8dx}{x^2-2x+2} : 7.570 \text{ سوال}$$

$$2\pi : \text{جواب}$$

$$\int_2^4 \frac{2dx}{x^2-6x+10} : 7.571 \text{ سوال}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} : 7.572 \text{ سوال}$$

$$\sec^{-1}|x+1| + C : \text{جواب}$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} : 7.573 \text{ سوال}$$

سوال 7.574 تا سوال 7.581 میں دیے گئے مکمل حل کریں۔

$$\int \frac{e^{\sin^{-1}x} dx}{\sqrt{1-x^2}} : 7.574 \text{ سوال}$$

$$e^{\sin^{-1}x} + C : \text{جواب}$$

$$\int \frac{e^{\cos^{-1}x} dx}{\sqrt{1-x^2}} : 7.575 \text{ سوال}$$

$$\int \frac{(\sin^{-1}x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} : 7.576 \text{ سوال}$$

$$\frac{1}{3}(\sin^{-1}x)^3 + C : \text{جواب}$$

$$\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}x} dx}{1+x^2} : 7.577 \text{ سوال}$$

$$\int \frac{dy}{(\tan^{-1}y)(1+y^2)} : 7.578 \text{ سوال}$$

$$\ln|\tan^{-1}y| + C : \text{جواب}$$

$$\int \frac{dy}{(\sin^{-1}y)\sqrt{1-y^2}} : 7.579 \text{ سوال}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1}x) dx}{x\sqrt{x^2-1}} : 7.580 \text{ سوال}$$

$$\sqrt{3}-1 : \text{جواب}$$

$$\int \frac{\cos(\sec^{-1}x) dx}{x\sqrt{x^2-1}} : 7.581 \text{ سوال}$$

حد
سوال 7.582 تا سوال 7.585 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7.582: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 5x}{x}$
جواب: 5

سوال 7.583: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1} x}$

سوال 7.584: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan^{-1} \frac{2}{x}$
جواب: 2

سوال 7.585: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$

کلیات تکمل
سوال 7.586 تا سوال 7.589 میں دیے گئے نکمل کے کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال 7.586: $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

سوال 7.587: $\int x^3 \cos^{-1} 5x dx = \frac{x^4}{4} \cos^{-1} 5x + \frac{5}{4} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

سوال 7.588: $\int (\sin^{-1} x)^2 dx = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + C$

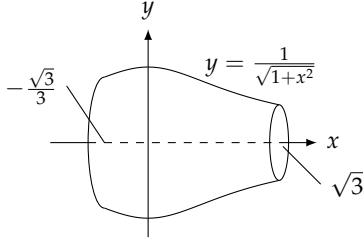
سوال 7.589: $\int \ln(a^2 + x^2) dx = x \ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

ابتدائی قیمت مسائل
سوال 7.590 تا سوال 7.593 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں

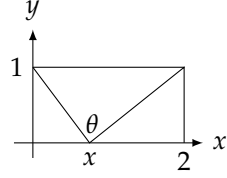
سوال 7.590: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$
جواب: $y = \sin^{-1}(x)$

سوال 7.591: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

سوال 7.592: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, y(2) = \pi$
جواب: $y = \sec^{-1}(x) + \frac{2\pi}{3}, \quad x > 1$



شکل 7.65: برائے سوال 7.606



شکل 7.64: برائے سوال 7.595

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 2 \quad \text{سوال 7.593}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 7.594: تدریسی کمرہ (سوال 7.498)

آپ اپنی کرسی کو تختہ سیاہ سے اتنی دور رکھنا چاہتے ہو کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ α زیادہ سے زیادہ ہو۔ آپ کی کرسی تختہ سیاہ سے کتنی دور ہونی چاہیے؟

جواب: $3\sqrt{5} \text{ m}$

سوال 7.595: متغیر x کو کونسی قیمت شکل 7.64 میں θ کو بڑے سے بڑا بناتی ہے؟ θ کی بڑی سے بڑی قیمت تلاش کریں۔ شروع اس سے کریں کہ $\theta = \pi - \cot^{-1} x - \cot^{-1}(2-x)$ ہو گا۔

سوال 7.596: کیا درج ذیل مکمل-ا اور مکمل-ب دونوں درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C \quad (\text{ا})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \cos^{-1} x + C \quad (\text{ب})$$

جواب: جی ہاں، $\sin^{-1}(x)$ اور $\cos^{-1}(x)$ میں فرق مستقل $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

سوال 7.597: کیا درج ذیل دونوں مکمل درست ہو سکتے ہیں؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \cos^{-1} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-(-u)^2}} \quad x = -u$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \cos^{-1} u + C$$

$$= \cos^{-1}(-x) + C$$

سوال 7.598: درج ذیل تماشل استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.40 سے مساوات 7.41 اخذ کریں۔

$$\cos^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} u$$

سوال 7.599: درج ذیل تماشل استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.43 سے مساوات 7.42 اخذ کریں۔

$$\cot^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u$$

سوال 7.600: درج ذیل تماشل استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.44 سے مساوات 7.45 اخذ کریں۔

$$\csc^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

سوال 7.601: تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کا تفرق

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

حاصل کرنے کی خاطر x کے لحاظ سے اس کے مساوی $\tan y = x$ کے دونوں اطراف کا تفرق لیں۔

سوال 7.602: درج ذیل تفرق کو مسئلہ 7.1 کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

سوال 7.603: درج ذیل تفرق کو مسئلہ 7.1 کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

سوال 7.604: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1}, \quad x \geq 0 \quad \text{اور} \quad g(x) = 2 \tan^{-1} \sqrt{x}$$

سوال 7.605: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{اور} \quad g(x) = \tan^{-1} \frac{1}{x}$$

سوال 7.606: محور x پر $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ تا $x = \sqrt{3}$ کے بیچ تفاعل $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.65)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $\frac{\pi^2}{2}$

سوال 7.607: قوس $y = \sqrt{1-x^2}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ کی لمبائی دریافت کریں۔

کنتلا سے حجم کی تلاش
سوال 7.608 اور سوال 7.609 میں اجسام کی حجم تلاش کریں۔

سوال 7.608: نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہے۔

ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ سے منحنی $y = -\frac{1}{1+x^2}$ تک ہیں۔

ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے کونے $y = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ اور $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو مس کرتے ہیں۔

جواب: (i) $\frac{\pi^2}{2}$ (ب) 2π

سوال 7.609: نقطہ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ اور $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہے۔

ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ تک ہیں۔

ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے وتر محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ تک ہیں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.610: کیلکولیٹر
اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔ حوالہ کے لئے 5 مقامات تک درست قیمت $\sin^{-1} 0.6 = 0.64350$ ہے۔

$$\sin^{-1} 0.6 = \int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

سوال 7.611: اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

سوال 7.612: تفاعل $f(x) = \sin^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

سوال 7.613: تفاعل $f(x) = \tan^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

7.10 ہڈولی تفاعل

ہر ایسا تفاعل f جس کے دائرہ کار کا وسط مبداء پر واقع ہو کو ایک جفت اور ایک طاق تفاعل کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

یوں قوت نمائی تفاعل e^x کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

قوت نمائی تفاعل e^x کا جفت اور طاق حصہ، جنہیں بالترتیب x کا ہڈولی کوسائن اور ہڈولی سائن کہتے ہیں، از خود اہمیت کے حامل ہیں۔ یہ لکھدار ٹھوس مادہ میں لہروں کی حرکت، کھجوں کے بیچ برقی تاروں کا روپ، اور دھاتی سرد کار²⁶ میں حرارتی کی تقسیم کو بیان کرتے ہیں۔

ءءول 7.7: ؤء بنفاءى ہڈولڈ قفائل

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	x كا ہڈولڈ كوسائن
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	x كا ہڈولڈ سائن
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	x كا ہڈولڈ ٹئنجنٹ
$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	x كا ہڈولڈ كوتئنجنٹ
$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	x كا ہڈولڈ سلكنٹ
$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	x كا ہڈولڈ كوسلكنٹ

تعرف اور تماثل

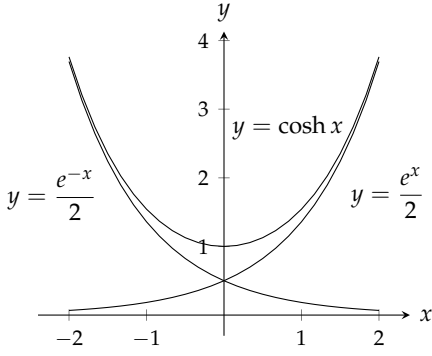
ہڈولڈ كوسائن اور ہڈولڈ سائن كى تعريف ءول 7.7 كى پہلى ءو مساءاتئں پیش كرتى ہئں۔ اس ءول میں ہڈولڈ ٹئنجنٹ، ہڈولڈ كوتئنجنٹ، ہڈولڈ سلكنٹ، اور ہڈولڈ كوسلكنٹ كى تعريف بھى پیش كى گئى ہئں۔ ؤئسا كه ہم ءكئصئں گے، ہڈولڈ قفائل ان كئونفاقئ قفائل كے ساتھ كافئ طئطے ؤلئطے ہئں ؤن كے ءوسط سے ان كے نام ركھے گئے ہئں (سوال 7.699)۔ ہڈولڈ قفائل كو شكل 7.66 میں ترسئم كفا گفا ہے۔

تماثل

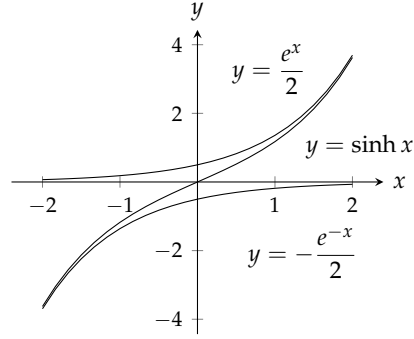
ہڈولڈ قفائل ءول 7.8 میں ءى گئى تماثل كو مطمئن كرتے ہئں۔ ماسوائے علامت، ہم ان تماثل كو كئونفاقئ قفائل سے ؤانتے ہئں۔

تفرق اور كمل

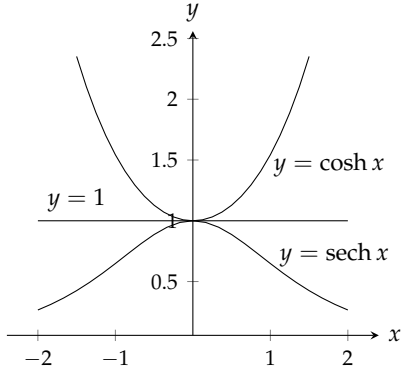
ؤء بنفاءى ہڈولڈ قفائل، قابل تفرق قفائل e^x اور e^{-x} كے ناطق مءوءے ہئں، لءذا فہ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہوں گے ؤس پر فہ معفن ہوں۔ فہاں بھى كئونفاقئ قفائل كے ساتھ مشابہت نظر آقئ ہے۔ ءول 7.9-ا كے كلفات تفرق سے ءول 7.9-ب كے كلفات كمل ؤاصل ہوتے ہئں۔ كئونفاقئ قفائل كى طرء ہڈولڈ قفائل كى قفئءوں كو بھى كفلولفر سے ؤاصل كفا ؤاسكئا ہے۔



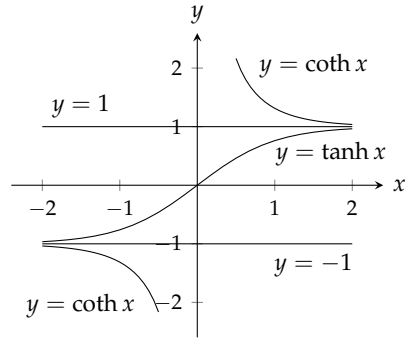
(ب) ہڈلولی کوسائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



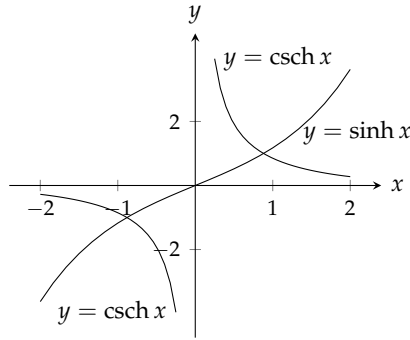
(ا) ہڈلولی سائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



(د) ہڈلولی کوسائن اور ہڈلولی سیکنٹ۔



(ج) ہڈلولی ٹینجٹ اور ہڈلولی کوٹینجٹ۔



(ه) ہڈلولی سائن اور ہڈلولی کوسیکنٹ۔

شکل 7.66: چھ بنیادی ہڈلولی تقاعسل۔

جدول 7.8: ہڈولی تقابل کے متماثل۔

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

جدول 7.9: ہڈولی تقابل کے کلیات تفرق اور کلیات مکمل۔

(ب) ہڈولی تقابل کے مکمل۔

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

(ل) ہڈولی تقابل کے تفرق۔

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

مثال 7.69:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\tanh \sqrt{1+t^2}) &= \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt{1+t^2}) \\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

□

مثال 7.70:

$$\begin{aligned}\int \coth 5x \, dx &= \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} \quad u = \sinh 5x \\ &= \frac{1}{5} \ln|u| + C = \frac{1}{5} \ln|\sinh 5x| + C\end{aligned}$$

□

مثال 7.71:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sinh^2 x \, dx &= \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2} \, dx \quad \text{جدول 7.8} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\cosh 2x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh 2x}{2} - x \right]_0^1 \\ &= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672\end{aligned}$$

□

مثال 7.72:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \, dx &= \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2) \, dx \\ &= \left[e^{2x} - 2x \right]_0^{\ln 2} = (e^{2 \ln 2} - 2 \ln 2) - (1 - 0) \\ &= 4 - 2 \ln 2 - 1 \\ &\approx 1.6137\end{aligned}$$

□

الٹ ہڈولی تقابل

ہم چھ بنیادی ہڈولی تقابل کو مکمل میں استعمال کرتے ہیں۔ چونکہ $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x > 0$ لہذا x کے لحاظ سے ہڈولی سائن بڑھتا تقابل ہے۔ ہم اس کے الٹ کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$y = \sinh^{-1} x$$

وقفہ $-\infty < x < \infty$ میں ہر x کے لئے $y = \sinh^{-1} x$ کی قیمت وہ ہوگی جس کے ہڈولی سائن کی قیمت x ہو۔ تقابل $y = \sinh x$ اور $y = \sinh^{-1} x$ کے ترسیمات کو شکل 7.67-ا میں پیش کیا گیا ہے۔

جیسا آپ شکل 7.66-ب میں دیکھ سکتے ہیں، تقابل $y = \cosh x$ ایک ایک نہیں ہے۔ البتہ اس کی پابند شدہ روپ $y = \cosh x, x \geq 0$ ایک ایک ہے لہذا اس کا الٹ پایا جائے گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

متغیر $x \geq 1$ کے ہر قیمت کے لئے وقفہ $0 \leq y \leq \infty$ میں $y = \cosh^{-1} x$ ایک ایسا عدد ہوگا جس کے ہڈولی کو سائن کی قیمت x ہوگی۔ تقابل $y = \cosh x, x \geq 0$ اور $y = \cosh^{-1} x$ کی ترسیمات کو شکل 7.67-ب میں دکھایا گیا ہے۔

تقابل $y = \cosh x$ کی طرح $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ بھی ایک ایک نہیں ہے، البتہ x کو غیر منفی قیمتوں پر پابند کرنے سے $y = \operatorname{sech} x$ ایک ایک ہوتا ہے جس کا الٹ پایا جائے گا۔ اس الٹ کو

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقفہ $(0, 1]$ میں x کی ہر قیمت کے لئے $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ وہ عدد ہوگا جس کا الٹ ہڈولی سیکنٹ x ہو گا۔

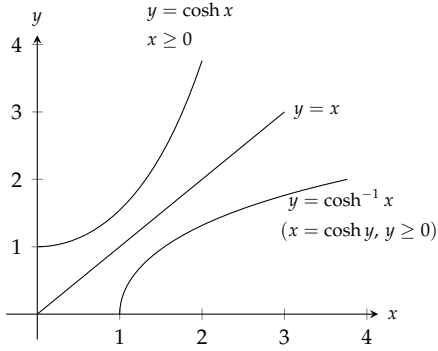
ہڈولی کو سیکنٹ، ہڈولی ٹینجینٹ اور ہڈولی کو ٹینجینٹ اپنے اپنے دائرہ کار پر ایک ایک ہیں لہذا ان کے الٹ پائے جائیں گے جنہیں

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x, \quad y = \operatorname{coth}^{-1} x$$

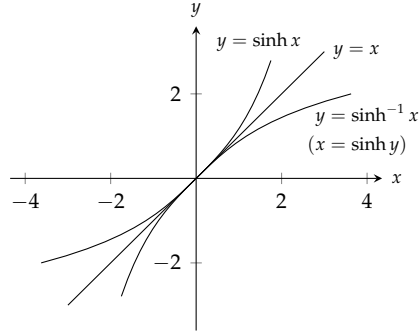
سے ظاہر کیا گیا ہے کو شکل 7.67-د، ہ، و میں ترسیم کیا گیا ہے۔

کارآمد تماشل

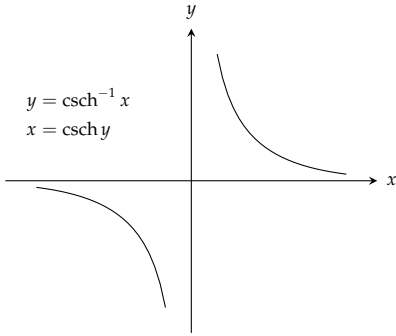
چند کارآمد تماشل کو جدول 7.10 میں پیش کیا گیا ہے۔ تقابل $\sinh^{-1} x$ اور $\tanh^{-1} x$ کی قیمتیں جاننے ہوئے ان تماشل کی استعمال سے $\operatorname{sech}^{-1} x$ ، $\operatorname{csch}^{-1} x$ اور $\operatorname{coth}^{-1} x$ کی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔



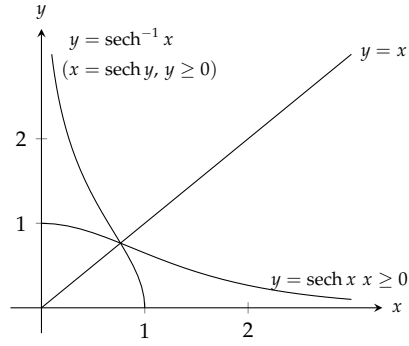
(ب) ہڈولی کوسائن اور الٹ ہڈولی کوسائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔



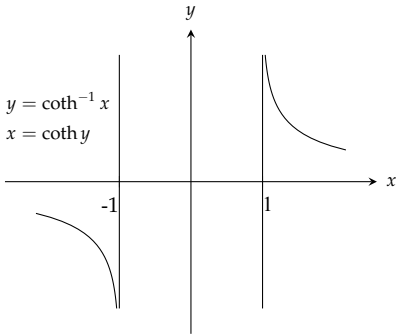
(ل) ہڈولی سائن اور الٹ ہڈولی سائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔



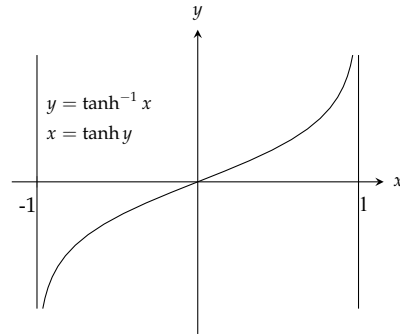
(ز) الٹ ہڈولی کوسیکنٹ کا ترسیم۔



(ج) ہڈولی سیکنٹ اور الٹ ہڈولی سیکنٹ کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔



(و) الٹ ہڈولی کوٹینجٹ کا ترسیم۔



(ه) الٹ ہڈولی ٹینجٹ کا ترسیم۔

شکل 7.67: چھ بنیادی ہڈولی تفاعل کے الٹ۔

جدول 7.10: الٹ ہڈولی تقابل کے چند کارآمد متماثل

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

جدول 7.11: الٹ ہڈولی تقابل کے تفرق۔

$$\frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad u \neq 0$$

الٹ ہڈولی تقابل کے تفرق اور مکمل

الٹ ہڈولی تقابل کا اہم ترین استعمال، مکمل کے ذریعہ جدول 7.11 میں کلیات تفرق سے کلیات مکمل کا حصول ہے۔

تقابل $\tanh^{-1} u$ اور $\coth^{-1} u$ کے تفرق پر $|u| < a$ اور $|u| > 1$ کی پابندی، ان تقابل پر پابندی کی بنا ہے (شکل 7.67-، دیکھیں)۔ کلیات تفرق کو کلیات مکمل میں تبدیل کرتے وقت $|u| < 1$ اور $|u| > 1$ میں امتیاز اہمیت حاصل کرتا ہے۔ اگر $|u| < 1$ ہو تب $\frac{1}{1-u^2}$ کا مکمل $\tanh^{-1} u + C$ ہو گا۔ اس کے برعکس $|u| > 1$ کی صورت میں مکمل $\coth^{-1} u + C$ ہو گا۔

مثال 7.73: دکھائیں کہ اگر متغیر x کا u قابل تفرق تقابل ہو اور جس کی قیمتیں 1 سے زیادہ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

جدول 7.12: وہ مکمل جو الٹ ہڈولی تقابل دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} &= \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right), \quad a > 0 \\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \cosh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right), \quad u > a > 0 \\ \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C & u^2 > a^2 \end{cases} \\ \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} &= -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad 0 < u < a \\ \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} &= -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C, \quad u \neq 0 \end{aligned}$$

حل: ہم پہلے عددی $x > 1$ کی صورت میں $y = \cosh^{-1} x$ کا تفرق معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= \cosh^{-1} x \\ x &= \cosh y && \text{اس کا مساوی} \\ 1 &= \sinh y \frac{dy}{dx} && x \text{ کے لحاظ سے تفرق} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} && x > 0, y > 0, \sinh y > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} && \cosh y = x \end{aligned}$$

یوں $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ سے درکار نتیجہ ملتا ہے:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$$

□

موزوں بدل استعمال کرتے ہوئے جدول 7.11 میں دیے گئے کلیات تفرق سے جدول 7.12 کے کلیات مکمل اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 7.74: مکمل $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}$ کی قیمت دریافت کریں۔

حل: قطعی مکمل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} \int \frac{2 dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} & u &= 2x \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2 dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= \sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) \Big|_0^1 = \sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \sinh^{-1}(0) \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0.98665 \end{aligned}$$

□

سوالات

ہڈولی تفاعیل کی قیمتیں اور تماثل
سوال 7.614 تا سوال 7.617 میں $\sinh x$ یا $\cosh x$ کی ایک قیمت دی گئی ہے۔ تماثل $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ اور
ہڈولی تفاعل کی تعریف استعمال کرتے ہوئے باقی پانچ ہڈولی تفاعل کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 7.614: $\sinh x = -\frac{3}{4}$
جواب: $\cosh x = \frac{5}{4}, \tanh x = -\frac{3}{5}, \coth x = -\frac{5}{3}, \operatorname{sech} x = \frac{4}{5}, \operatorname{csch} x = -\frac{4}{3}$

سوال 7.615: $\sinh x = \frac{4}{3}$

سوال 7.616: $\cosh x = \frac{17}{15}, x > 0$
جواب: $\sinh x = \frac{8}{15}, \tanh x = \frac{8}{17}, \coth x = \frac{17}{8}, \operatorname{sech} x = \frac{15}{17}, \operatorname{csch} x = \frac{15}{8}$

سوال 7.617: $\cosh x = \frac{13}{5}, x > 0$

سوال 7.618 تا سوال 7.623 میں نفروں کو قوت نما کی روپ میں لکھ کر ان کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

سوال 7.618: $2 \cosh(\ln x)$
جواب: $x + \frac{1}{x}$

سوال 7.619: $\sinh(2 \ln x)$

سوال 7.620: $\cosh 5x + \sinh 5x$
جواب: e^{5x}

سوال 7.621: $\cosh 3x - \sinh 3x$

سوال 7.622: $(\sinh x + \cosh x)^4$
جواب: e^{4x}

سوال 7.623: $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

سوال 7.624: درج ذیل متاثر

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

ب. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

سوال 7.625: $\sinh x$ اور $\cosh x$ کی تعریف سے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

تفرق

سوال 7.626 تا سوال 7.637 میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے تلاش کریں۔

سوال 7.626: $y = 6 \sinh \frac{x}{3}$
جواب: $2 \cosh \frac{x}{3}$

سوال 7.627: $y = \frac{1}{2} \sinh(2x + 1)$

سوال 7.628: $y = 2\sqrt{t} \tanh \sqrt{t}$
جواب: $\operatorname{sech}^2 \sqrt{t} + \frac{\tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

سوال 7.629: $y = t^2 \tanh \frac{1}{t}$

سوال 7.630: $y = \ln(\operatorname{sech} z)$
جواب: $\coth z$

سوال 7.631: $y = \ln(\cosh z)$

سوال 7.632: $y = \operatorname{sech} \theta (1 - \ln \operatorname{sech} \theta)$
جواب: $(\ln \operatorname{sech} \theta)(\operatorname{sech} \theta \tanh \theta)$

سوال 7.633: $y = \operatorname{csch} \theta (1 - \ln \operatorname{csch} \theta)$

سوال 7.634: $y = \ln \cosh v - \frac{1}{2} \tanh^2 v$
جواب: $\tanh^3 v$

سوال 7.635: $y = \ln \sinh v - \frac{1}{2} \coth v$

سوال 7.636: $y = (x^2 + 1) \operatorname{sech}(\ln x)$ اشارہ: تفرق سے پہلے قوت نما روپ میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔
جواب: 2

سوال 7.637: $y = (4x^2 - 1) \operatorname{csch}(\ln 2x)$

سوال 7.638 تا سوال 7.649 میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے حاصل کریں۔

سوال 7.638: $y = \sinh^{-1} \sqrt{x}$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

سوال 7.639: $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

سوال 7.640: $y = (1 - \theta) \tanh^{-1} \theta$
جواب: $\frac{1}{1+\theta} - \tanh^{-1} \theta$

سوال 7.641: $y = (\theta^2 + 2\theta) \tanh^{-1}(\theta + 1)$

سوال 7.642: $y = (1 - t) \coth^{-1} \sqrt{t}$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1} \sqrt{t}$

سوال 7.643: $y = (1 - t^2) \coth^{-1} t$

سوال 7.644: $y = \cos^{-1} x - x \operatorname{sech}^{-1} x$
 جواب: $-\operatorname{sech}^{-1} x$

سوال 7.645: $y = \ln x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{sech}^{-1} x$

سوال 7.646: $y = \operatorname{csch}^{-1}(\frac{1}{2})^\theta$
 جواب: $\frac{\ln 2}{\sqrt{1+(1/2)^{2\theta}}}$

سوال 7.647: $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^\theta$

سوال 7.648: $y = \sinh^{-1}(\tan x)$
 جواب: $|\sec x|$

سوال 7.649: $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

کلیات تکمیل

سوال 7.650 تا سوال 7.653 میں دیے کلیات مکمل کی تصدیق کریں۔

سوال 7.650:

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1}(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \sin^{-1}(\tanh x) + C$$

سوال 7.651: $\int x \operatorname{sech}^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C$

سوال 7.652: $\int x \coth^{-1} x \, dx = \frac{x^2-1}{2} \coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

سوال 7.653: $\int \tanh^{-1} x \, dx = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$

غیر قطعی تکمیل

سوال 7.654 تا سوال 7.663 میں مکمل حل کریں۔

سوال 7.654: $\int \sinh 2x \, dx$
 جواب: $\frac{\cosh 2x}{2} + C$

سوال 7.655: $\int \sinh \frac{x}{5} \, dx$

سوال 7.656: $\int 6 \cosh(\frac{x}{2} - \ln 3) \, dx$
 جواب: $12 \sinh(\frac{x}{2} - \ln 3) + C$

سوال 7.657: $\int 4 \cosh(3x - \ln 2) \, dx$

سوال 7.658: $\int \tanh \frac{x}{7} \, dx$
 جواب: $7 \ln |e^{x/7} + e^{-x/7}| + C$

سوال 7.659: $\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}} \, d\theta$

سوال 7.660: $\int \operatorname{sech}^2(x - \frac{1}{2}) \, dx$
 جواب: $\tanh(x - \frac{1}{2}) + C$

سوال 7.661: $\int \operatorname{csch}^2(5 - x) \, dx$

سوال 7.662: $\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt$
 جواب: $-2 \operatorname{sech} \sqrt{t} + C$

سوال 7.663: $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t)}{t} \, dt$

قطعی تکمیل

سوال 7.664 تا سوال 7.673 میں مکمل حل کریں۔

سوال 7.664: $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x \, dx$
 جواب: $\ln \frac{5}{2}$

سوال 7.665: $\int_0^{\ln 2} \tanh 2x \, dx$

سوال 7.666: $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta} \cosh \theta \, d\theta$
 جواب: $\frac{3}{32} + \ln 2$

$$\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \sinh \theta \, d\theta \quad \text{سوال 7.667}$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta \, d\theta \quad \text{سوال 7.668}$$

جواب: $e - e^{-1}$

$$\int_0^{\pi/2} 2 \sinh(\sin \theta) \cos \theta \, d\theta \quad \text{سوال 7.669}$$

$$\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t} \, dt \quad \text{سوال 7.670}$$

جواب: $\frac{3}{4}$

$$\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx \quad \text{سوال 7.671}$$

$$\int_{-\ln 2}^0 \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx \quad \text{سوال 7.672}$$

جواب: $\frac{3}{8} + \ln \sqrt{2}$

$$\int_0^{\ln 10} 4 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx \quad \text{سوال 7.673}$$

الٹ ہڈلولی تفاعل اور متعلقہ تكميل كى قيمت كا حصول
ہڈلولی تفاعل كو درج ذيل لوگار تھمى روپ ميں لكھا جا سكتا ہے۔

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

درج بالا كلديات استعمال كرتے ہوئے سوال 7.674 تا سوال 7.679 ميں ديے اعداد كو لوگار تھمى روپ ميں لكھيں۔

$$\sinh^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right) \quad \text{سوال 7.674}$$

جواب: $\ln \frac{2}{3}$

$$\cosh^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) : \text{سوال 7.675}$$

$$\tanh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) : \text{سوال 7.676}$$

$$-\frac{\ln 3}{2} : \text{جواب}$$

$$\coth^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) : \text{سوال 7.677}$$

$$\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) : \text{سوال 7.678}$$

$$\ln 3 : \text{جواب}$$

$$\operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) : \text{سوال 7.679}$$

سوال 7.680 تا سوال 7.687 کو (ا) الٹ ہڈولتی قف اعل (ب) قدرتی لوگار قفم کے روپ میں حل کریں۔

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} : \text{سوال 7.680}$$

$$\ln(\sqrt{3}+2) \text{ (ب) } \sinh^{-1}(\sqrt{3}) \text{ (ا) : جواب}$$

$$\int_0^{1/3} \frac{6dx}{\sqrt{1+9x^2}} : \text{سوال 7.681}$$

$$\int_{5/4}^2 \frac{dx}{1-x^2} : \text{سوال 7.682}$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right) \text{ (ب) } \coth^{-1}(2) - \coth^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \text{ (ا) : جواب}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} : \text{سوال 7.683}$$

$$\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}} : \text{سوال 7.684}$$

$$-\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \text{ (ا) : جواب}$$

$$-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{12/13}\right) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{4/5}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \text{ (ب)}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} : \text{سوال 7.685}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} : \text{سوال 7.686}$$

$$0 \text{ (ب) } 0 \text{ (ا) : جواب}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}} : \text{سوال 7.687}$$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.688: (i) مہدا کے لحاظ سے تشاکی وقفہ پر معین تفاعل f (یعنی ایسا تفاعل جو x پر معین ہونے کی صورت میں $-x$ پر بھی معین ہو) کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$(7.50) \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ جفت اور $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ طاق ہو گا۔ (ب) اگر f از خود جفت یا طاق ہو تو مساوات 7.50 کافی سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ ان نئی مساواتوں کو تلاش کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ب) $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$ ، $f(x) = 0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

سوال 7.689: کلیہ $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ، $-\infty < x < \infty$ اخذ کریں۔ اس کلیہ میں جذر کے ساتھ منفی کی بجائے مثبت علامت کیوں استعمال ہوتا ہے؟

سوال 7.690: ایک جسم پر، جس کی کمیت m ہے، ساکن حال سے ثقل کشش کی بنا زمین کی طرف گرتے ہوئے سمتی رفتار v کے مربع کے متناسب ہوائی مزاحمت عمل کرتی ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس جسم کی سمتی رفتار درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گی،

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

جہاں k ایک ایسا مستقل ہے جس کی قیمت کا دار و مدار جسم کے ہوائی حرکیات²⁷ کے خواص اور ہوا کی کثافت پر منحصر ہو گی۔ (ہم فرض کرتے ہیں کہ جسم زیادہ بلندی سے نہیں گرتا ہے۔ یوں ہوائی کثافت میں تبدیلی کو رد کیا جاسکتا ہے۔)

ا. دکھائیں کہ درج ذیل مساوات تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات ($t = 0$ پر $v = 0$) کو مطمئن کرتی ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t\right)$$

ب. جسم کی تحدیدی سمتی رفتار $\lim_{t \rightarrow \infty} v$ تلاش کریں۔

ج. ایک فضائی غوطہ باز²⁸ جس کی کمیت 70 kg ہو کے لئے $k = 0.23$ ہو گا۔ اس فضائی غوطہ باز کی تحدیدی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

جواب: (ب) $v = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ ، (ج) $v = 54.6 \text{ m s}^{-1}$

سوال 7.691: فرض کریں ایک جسم محدودی لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر اس کا مقام

$$s = a \cos kt + b \sin kt \quad (i)$$

$$s = a \cosh kt + b \sinh kt \quad (ب)$$

ہے۔ دکھائیں کہ دونوں صورتوں میں اس جسم کی اسراع $\frac{d^2s}{dt^2}$ فاصلہ s کے راست متناسب ہوگی، البتہ پہلی صورت میں یہ مبداء کی جانب اور دوسری صورت میں مبداء سے دوری کے جانب ہوگی۔

سوال 7.692: ایک ٹریکٹر ٹرائی محور x پر چلتے ہوئے مبداء تک پہنچ کر محور y کے رخ مڑتی ہے۔ ٹرائی کے پہیوں سے ٹریکٹر تک فاصلہ کو اکائی تصور کریں۔ یوں جب ٹریکٹر کے پیچھے $(1, 0)$ پر ہوں تب ٹریکٹر مبداء پر ہوگا۔ جب ٹریکٹر مبداء سے محور y پر چلتا ہے، ٹرائی قوسی راہ $y = f(x)$ اختیار کرتی ہے۔ یہ قوس درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل ہوگی۔

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$y = 0, \quad x = 1 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

اس ابتدائی قیمت مسئلہ کو حل کریں۔ (آپ کو الٹ ہڈولوی تفاعل درکار ہوں گے۔)

جواب: $y = \text{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$

سوال 7.693: دکھائیں کہ ربع اول میں قوس $y = \frac{1}{a} \cosh ax$ اور محدودی لکیروں اور لکیر $x = b$ کے بیچ رقبہ اس مستطیل کے رقبہ جتنا ہوگا جس کی چوڑائی $\frac{1}{a}$ اور لمبائی s ہو جہاں $x = 0$ سے $x = b$ تک قوس کی لمبائی s ہے۔

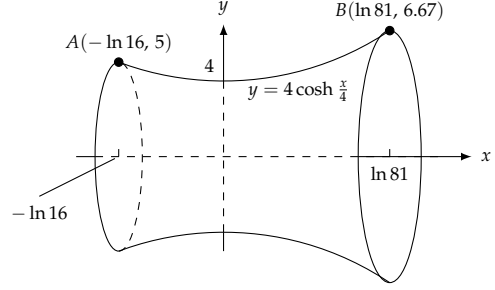
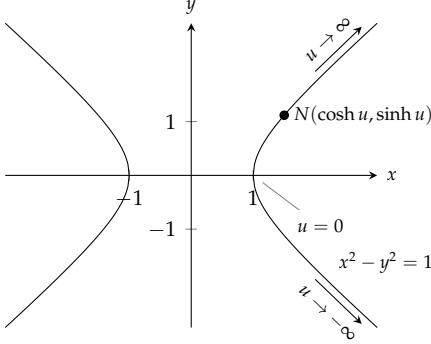
سوال 7.694: ربع اول میں بالائی طرف سے قوس $y = \cosh x$ ، زیریں طرف سے قوس $y = \sinh x$ ، بائیں سے محور y اور دائیں سے لکیر $x = 2$ کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: 2π

سوال 7.695: قوس $y = \text{sech } x$ ، محور x اور لکیر $x = \pm \ln \sqrt{3}$ کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 7.696: (i) قوس $y = \frac{1}{2} \cosh 2x$ کی لمبائی $x = 0$ سے $x = \ln \sqrt{5}$ تک تلاش کریں۔ (ب) قوس $y = \frac{1}{a} \cosh ax$ کی لمبائی $x = 0$ سے $x = b > 0$ تک تلاش کریں۔
جواب: (i) $\frac{6}{5}$ (ب) $\frac{\sinh ab}{a}$

سوال 7.697: کمر سطح

قوس $y = 4 \cosh(\frac{x}{4})$ ، $-\ln 16 \leq x \leq \ln 81$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.68)۔ اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔



شکل 7.68: کٹر سطح (سوال 7.697)

شکل 7.69: قطع زائد تفاعل کے نام کی وجہ (سوال 7.699)

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے نقطہ A اور B کے بیچ تمام قابل تفرق قوسین میں سب سے کم سطح طواف پیدا کرنے والی قوس $y = 4 \cosh \frac{x}{4}$ ہے۔ یوں A اور b پر واقع سخت دائری تاروں کے بیچ صابن کے جھاگ کا سطح یہی قوسی صورت اپنائے گا۔

سوال 7.698: (i) قوس $y = \cosh x, -\ln 2 \leq x \leq \ln 2$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ درستی تک تلاش کریں۔ اس معنی کو ترسیم کرتے ہوئے وسطانی مرکز کی نشاندہی کریں۔
جواب: (i) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{5}{8} + \frac{\ln 4}{3} \approx 1.09$

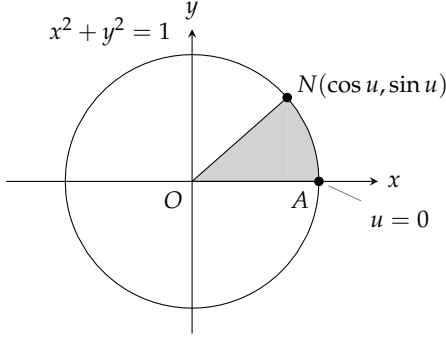
سوال 7.699: ہڈولی تفاعل کا نام اکائی دائرہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cos u$ اور $y = \sin u$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح اکائی قطع زائد (جس کو ہڈولی تفاعل بھی کہتے ہیں) کے دائیں حصہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cosh u$ اور $y = \sinh u$ سے حاصل کرنا ممکن ہے (شکل 7.69)۔ اسی لئے ان تفاعل کو قطع زائد تفاعل یا ہڈلولی تفاعل کہتے ہیں۔

دائری تفاعل اور قطع تفاعل کے بیچ دوسری مشابہت یہ ہے کہ قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کے دائیں حصہ میں نقطہ $(\cosh u, \sinh u)$ کے متغیر u کی قیمت خطہ AON کے رقبہ کا دگنا ہو گا (شکل 7.70)۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

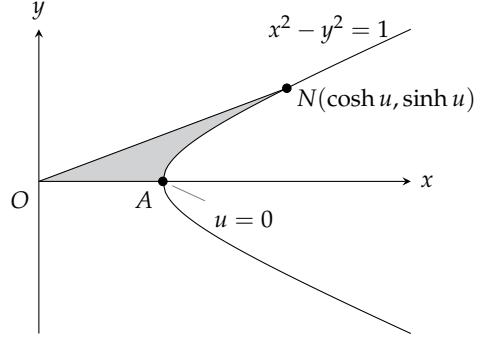
ا. دکھائیں کہ خطہ AON کا رقبہ $S(u) = \frac{1}{2} \cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1} dx$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ جزو-1 میں دی گئی مساوات کا u کے لحاظ سے تفرق $S'(u) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔

ج. اس آخری مساوات کو $S(u)$ کے لئے حل کریں۔ $S(0)$ کی قیمت کتنی ہے؟ کھل کے مستقل C کی قیمت کتنی ہو گی؟ مستقل C جانتے ہوئے حل $S(u)$ اور u کا تعلق بیان کریں۔



(ب) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔



(ا) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔

شکل 7.70: دائری تقابل اور قطع زائد تقابل کا ایک تعلق (سوال 7.699)۔

لشکی ہوئی تار
سوال 7.700: فرض کریں دو کھیموں کے بیچ بجلی کی تار لٹکی ہوئی ہے (شکل 7.71)۔ اس تار کی فی اکائی لمبائی کمیت m ہے اور تار کی سب سے کم اونچائی والے نقطہ پر افقی تناؤ H ہے۔ ہم محدود یوں منتخب کرتے ہیں کہ قوسی تار کا نیچا حصہ مبدا سے $\frac{H}{mg}$ بلند ہو جہاں $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ہے۔ ایسی صورت میں ہم دکھا سکتے ہیں کہ تار کی صورت ہڈولوی کوسائن $y = \frac{H}{mg} \cosh \frac{mgx}{H}$ ہو گی۔ ایسی قوس کو لیزم²⁹ کہتے ہیں۔

ا. تار کے کسی عمومی نقطہ $N(x, y)$ پر تناؤ T ہو گا جو قوس کو مماسی ہو گا۔ دکھائیں کہ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

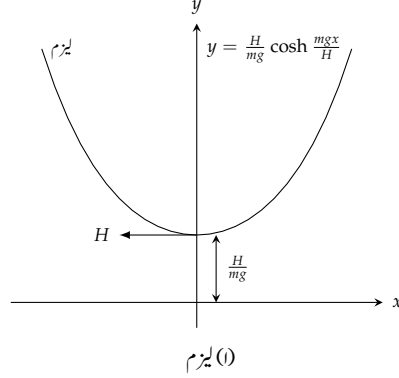
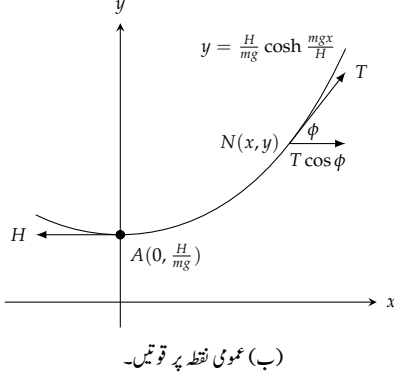
$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{mgx}{H}$$

ب. چونکہ تار ساکن ہے لہذا کسی بھی نقطہ پر افقی قوتوں کا مجموعہ صفر ہو گا اور اسی طرح انتصابی قوتوں کا مجموعہ بھی صفر ہو گا۔ یوں دکھائیں کہ $T = H$ اور $T = mgy$ ہو گا۔ یوں N پر تناؤ y لمبائی کی تار کا وزن ہو گا۔

سوال 7.701: لیزم (سوال 7.700 جاری)

تار کی لمبائی $s = \frac{1}{a} \sinh x$ ہو گی (شکل 7.71) جہاں $a = \frac{mg}{H}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ N کے محدود کو s کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے:

$$x = \frac{1}{a} \sinh^{-1} as, \quad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$



شکل 7.71: لیزم برائے سوال 7.700 اور سوال 7.701

سوال 7.702: جھول اور افقی تناؤ ایک تار جس کی لمبائی 10 m اور کثیت 0.6 kg m^{-1} ہے کو ایک چتے بلند کھبوں کے سروں سے باندھا گیا ہے۔ کھبوں کے بیچ فاصلہ 9 m ہے۔
ا. تار کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کریں۔

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax, \quad -5 \leq x \leq 5$$

دکھائیں کہ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے (سوال 7.701 کے نتائج استعمال کریں۔)

(7.51)

$$5a = \sinh 4.5a$$

ب. ترتیبات $y = 5a$ اور $y = \sinh 4.5a$ کا نقطہ تقاطع تلاش کرتے ہوئے جزو-ا کا ترتیبی حل تلاش کریں۔

ج. مساوات 7.51 کا اعدادی حل تلاش کریں۔ اعدادی حل کا ترتیبی حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. تار کے کم تر بلند نقطہ پر افقی تناؤ معلوم کریں۔

ه. لیزم $y = \frac{1}{a} \cosh ax$ کو وقفہ $-5 \leq x \leq 5$ پر ترسیم کریں۔ تار میں جھول کا اندازہ لگائیں۔

جواب: (ج) $a \approx 0.1785413$ (د) 32.93 N

7.11 یک رتبی تفرقی مساوات

ہم نے ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dt} = ky, y(0) = y_0$ کو حل کرتے ہوئے قوت نمائی تبدیلی $y = y_0 e^{kt}$ کا قاعدہ حصہ 7.5 میں دریافت کیا۔ جیسا کہ ہم نے دیکھا یہ مسئلہ نمو آبادی، تابکار تحلیل، انتقال حرارت اور دیگر اعمال کی نمونہ کشی کرتا ہے۔ اس حصہ میں ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ پر غور کریں گے جہاں تفاعل f غیر تابع متغیر x اور تابع متغیر y کا تفاعل ہو گا۔ اس مساوات کے استعمال مزید زیادہ ہیں۔

یک رتبی تفرقی مساوات

درج ذیل مساوات جس میں $f(x, y)$ مستوی xy کے متغیرات x اور y پر مبنی تفاعل $f(x, y)$ ہے کو یک رتبی³⁰ تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

$$(7.52) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

اس مساوات کو ہم $y' = f(x, y)$ بھی لکھتے ہیں۔ متغیر x کے کسی وقفہ (جو لامتناہی ہو سکتا ہے) پر معین قابل تفرق تفاعل $y = y(x)$ جس کے لئے

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

ہو، مساوات 7.52 کا حل³¹ کہلاتا ہے۔ ابتدائی شرط $y(x_0) = y_0$ کا مطلب ہو گا کہ منحنی حل $y = y(x)$ نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتی ہے۔ دھیان رہے کہ اس تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

مثال 7.75: درج ذیل تفرقی مساوات میں $f(x, y) = 1 - \frac{y}{x}$ ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$$

□

مثال 7.76: دکھائیں کہ ابتدائی قیمت مسئلہ

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = \frac{3}{2}$$

کا حل درج ذیل تفاعل ہے۔

$$y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

حل: دیا گیا تفاعل ابتدائی شرط کو مطمئن کرتا ہے، یعنی:

$$y(2) = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

یہ دکھانے کی خاطر کہ دیا گیا تفاعل تفرقی مساوات کو بھی مطمئن کرتا ہے، ہم y کی جگہ $\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ پر کر کے تصدیق کرتے ہیں کہ تفرقی مساوات کے دونوں اطراف یکساں ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \quad \text{بایاں ہاتھ}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{y}{x} &= 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \right) \quad \text{دایاں ہاتھ} \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□ تفاعل $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ ابتدائی شرط اور تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے لہذا یہ تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔

قابل علیحدگی مساوات

اگر $f(x, y)$ کو x کے تفاعل اور y کے تفاعل کا حاصل ضرب لکھنا ممکن ہو تب تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ قابل علیحدگی³² کہلاتی ہے۔ ایسی صورت میں ہم تفرقی مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

اگر $h(y) \neq 0$ ہو تب ہم دونوں اطراف کو h سے تقسیم اور dx سے ضرب کرتے ہوئے متغیرات کو علیحدہ کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

یوں y اجزاء اور dy بائیں ہاتھ جبکہ x اجزاء اور dx دائیں ہاتھ منتقل ہوتے ہیں۔ ہم دونوں اطراف کا تامل لے کر

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

حاصل کرتے ہیں۔ مکمل سے درکار حل حاصل ہوتا ہے جس میں y ، متغیر x کا صریح تفاعل یا خفی تفاعل جمع مستقل ہو گا۔
مثال 7.77: درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x$$

حل: چونکہ $1 + y^2$ کبھی بھی صفر نہیں ہو سکتا ہے لہذا ہم متغیرات کی علیحدگی سے اس تفرقی مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)e^x$$

$$dy = (1 + y^2)e^x dx$$

دونوں اطراف کو dx سے ضرب دیں

$$\frac{dy}{1 + y^2} = e^x dx$$

دونوں اطراف کو $1 + y^2$ سے تقسیم کریں

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int e^x dx$$

مکمل

$$\tan^{-1} y = e^x + C$$

دونوں اطراف کے مستقل کو C ظاہر کرتا ہے

مساوات $\tan^{-1} y = e^x + C$ میں y متغیر x کا خفی تفاعل ہے۔ ہم اس مساوات کو حل کر کے y کو x کے صریح تفاعل کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ دونوں اطراف کا ٹینجٹ لیتے ہیں:

$$\tan(\tan^{-1} y) = \tan(e^x + C)$$

$$y = \tan(e^x + C)$$

□

خطی یک رتبہ مساوات

درج ذیل یک رتبہ تفرقی مساوات

$$(7.53) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

جس میں P اور Q متغیر x کے تفاعل ہوں خطی³³ یک رتبہ مساوات کہلاتی ہے۔ مساوات 7.53 اس کی معیاری روپ³⁴ ہے۔
دھیان رہے کہ اس تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

linear³³
standard form³⁴

مثال 7.78: درج ذیل کو معیاری روپ میں لکھیں۔

$$x \frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

حل:

$$x \frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y \quad \text{ } x \text{ سے تقسیم}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \quad \text{معیاری روپ؛ } P(x) = -\frac{3}{x} \text{ اور } Q(x) = x \text{ ہیں۔}$$

□

مثال 7.79: ہم نے حصہ 7.5 میں درج ذیل مساوات سے جراثیموں کی نمو، تابکار تحلیل اور تبدیلی حرارت کو ظاہر کیا۔

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

اس خطی یک رتبی تفرقی مساوات کی معیاری روپ درج ذیل ہے۔

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0 \quad P(h) = -k, \quad Q(x) = 0$$

□

ہم معیاری مساوات

$$(7.54) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

کے دونوں اطراف کو اس مثبت تفاعل $v(x)$ سے ضرب دیتے ہیں جو بائیں ہاتھ کو حاصل ضرب $v(x) \cdot y$ کے تفرق میں تبدیل کرتا ہو۔ تفاعل $v(x)$ کو مساوات 7.54 کا جزو تکمل³⁵ کہتے ہیں۔ ہم بہت جلد $v(x)$ معلوم کرنا سکھائیں گے۔ پہلے $v(x)$ جانتے ہوئے تفرقی مساوات کے حل پر بات کرتے ہیں۔

آئیں دیکھتے ہیں کہ v سے ضرب دینا کیوں کار آمد ثابت ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x) && \text{دی گئی معیاری مساوات} \\ v(x) \frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y &= v(x)Q(x) && v(x) \text{ سے ضرب دیں} \\ (7.55) \quad \frac{d}{dx}(v(x) \cdot y) &= v(x)Q(x) \\ v(x) \cdot y &= \int v(x)Q(x) dx && x \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ y &= \frac{1}{v(x)} \int v(x)Q(x) dx && y \text{ کے لئے حل کریں} \end{aligned}$$

یاد رہے کہ $v(x)$ کا انتخاب یوں کیا جاتا ہے کہ $v \frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v \cdot y)$ ہو۔ درج بالا میں تیسرے قدم پر اسی حقیقت کو استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.54 کا حل تعادل $v(x)$ اور $Q(x)$ کی صورت میں مساوات 7.55 دیتی ہے۔

کیا $P(x)$ مساوات کے حل میں نہیں پایا جاتا ہے؟ درحقیقت $P(x)$ بالواسطہ طور پر حل میں پایا جاتا ہے۔ یہ $v(x)$ کے انتخاب میں شامل ہوتا ہے۔ ہم $v(x)$ پر مسلط شرط سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(vy) &= v \frac{dy}{dx} + Pvy && v \text{ پر مسلط شرط} \\ v \frac{dy}{dx} + y \frac{dv}{dx} &= v \frac{dy}{dx} + Pvy && زنجیری قاعدہ \\ y \frac{dv}{dx} &= Pvy && جزو \frac{dy}{dx} v \text{ کٹ جاتے ہیں} \end{aligned}$$

اس آخری مساوات کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کرتے ہوئے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تیسرے قدم پر $v > 0$ کی بنا $\ln v$ میں مطلق قیمت کی علامت کی ضرورت پیش نہیں آتی۔

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= Pv \\ \frac{dv}{v} &= P dx && \text{علیحدگی متغیرات} \\ (7.56) \quad \int \frac{dv}{v} &= \int P dx && \text{مکمل} \\ \ln v &= \int P dx \\ e^{\ln v} &= e^{\int P dx} && \text{قوت نما} \\ v &= e^{\int P dx} \end{aligned}$$

یوں ایسا $v(x)$ جو مساوات 7.56 کو مطمئن کرتا ہو ہمیں مساوات 7.55 کے ذریعہ مساوات 7.54 کا حل دیگا۔ ہمیں v کی عمومی ترین صورت کی ضرورت نہیں ہے بلکہ اس کی کوئی بھی صورت کافی ہے۔ یوں P کے کھل $\int P dx$ کی سادہ ترین صورت لینا زیادہ بہتر ہو گا۔

مسئلہ 7.4: خطی یک رتبی تفرقی مساوات

$$(7.57) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

کا حل

$$(7.58) \quad y = \frac{1}{v(x)} \int v(x)Q(x) dx$$

ہو گا جہاں

$$(7.59) \quad v(x) = e^{\int P(x) dx}$$

ہے۔ تفاعل $v(x)$ کے کلیہ میں $P(x)$ کے الٹ تفرقی کی عمومی صورت کی ضرورت نہیں ہوگی بلکہ اس کا کوئی بھی الٹ تفرق کار آمد ہو گا۔

خطی یک رتبی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے اقدام:

ا. مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر $P(x)$ اور $Q(x)$ معلوم کریں۔

ب. $P(x)$ کا الٹ تفرق معلوم کریں۔

ج. جزو کھل $v(x) = e^{\int P(x) dx}$ تلاش کریں۔

د. مساوات 7.58 کی مدد سے حل تلاش کریں۔

مثال 7.80: درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

$$x \frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

حل: ہم اس مساوات کو چار قدموں میں حل کرتے ہیں۔

قدم اول: مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر P اور Q کی نشاندہی کرتے ہیں۔

$$\text{مثال 7.78} \quad \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x, \quad P(x) = -\frac{3}{x}, \quad Q(x) = x$$

قدم دوم: $P(x)$ کا (کوئی بھی) الٹ تفریق تلاش کرتے ہیں۔

$$\int P(x) dx = \int -\frac{3}{x} dx = -3 \int \frac{1}{x} dx = -3 \ln|x| = -3 \ln x \quad x > 0$$

قدم سوم: جزو مکمل $v(x)$ کی تلاش۔

$$v(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{-3 \ln x} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3} \quad \text{مساوات 7.59}$$

قدم چہارم: حل کی تلاش۔

$$y = \frac{1}{v(x)} \int v(x) Q(x) dx \quad \text{مساوات 7.58}$$

$$= \frac{1}{(1/x^3)} \int \left(\frac{1}{x^3}\right)(x) dx \quad \text{جزو-اتاج کی معلومات}$$

$$= x^3 \int \frac{dx}{x^2}$$

$$= x^3 \left(-\frac{1}{x} + C \right) \quad \text{مستقل C مت بھولیں}$$

$$= -x^2 + Cx^3$$

□

یوں حل $y = -x^2 + Cx^3, x > 0$ ہو گا۔

مثال 7.81: درج ذیل مساوات کو حل کریں

$$xy' = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

جہاں ابتدائی معلومات $y(1) = 2$ دی گئی ہے۔

حل: ہم مثال 7.80 میں اس کا درج ذیل حل تلاش کر چکے ہیں۔

$$y = -x^2 + Cx^3, \quad x > 0$$

ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کرتے ہیں۔

$$y = -x^2 + Cx^3$$

$$2 = -(1)^2 + C(1)^3$$

$$C = 2 + (1)^2 = 3$$

□

یوں ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تفاعل $y = -x^2 + 3x^3$ ہو گا۔

سمتی رفتار کے متناسب مزاحمت

بعض اوقات جب باقی قوتوں کو رد کرنا ممکن ہو، یہ کہنا درست ہو گا کہ حرکت کرتے ہوئے جسم پر لاگو مزاحمت اس کی سمتی رفتار کے راست متناسب ہو گی۔ ایک گاڑی جس کا انجن بند ہو اور یہ رک رہی ہو، ایسی ایک مثال ہے۔ ایسا جسم جتنا آہستہ چل رہا ہو، اس پر ہوائی مزاحمت اتنی کم ہو گی۔ اس عمل کو ریاضی کا جامہ پہنانے کی خاطر ہم جسم کو کیت m سے ظاہر کرتے ہیں جو محدودی کثیر پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ t پر اس جسم کی رفتار v اور مقام s ہوں گے۔ مزاحمتی قوت جسم کی سمتی رفتار کے الٹ رخ ہو گا لہذا ہم

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad k > 0$$

لکھ سکتے ہیں جس کی معیاری روپ

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0$$

ہو گی۔ فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی سمتی رفتار v_0 ہو تب ہم مسئلہ 7.4 کی مدد سے درج ذیل حل حاصل ہو گا (سوال 7.744)۔

$$(7.60) \quad v = v_0 e^{-(k/m)t}$$

ہم مساوات 7.60 سے کیا سیکھ سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر m بہت زیادہ ہو، مثلاً ریت سے بھرا ہوا ٹرک، تب اس جسم کو رکنے کے لئے بہت زیادہ وقت درکار ہو گا۔ اس کے علاوہ ہم اس مساوات کا تکمیل لے کر طے شدہ فاصلہ s معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ایک جسم صرف ہوائی مزاحمت کی موجودگی میں رک رہا ہے اور یہ قوت جسم کی رفتار کے راست متناسب ہے۔ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرے گا؟ یہ جاننے کی خاطر ہم مساوات 7.60 سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-(k/m)t} \quad s(0) = 0$$

t کے لحاظ سے تکمیل لے کر

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C$$

ملا ہے جس میں $t = 0$ پر $s = 0$ پر کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت جانتے ہیں۔

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \implies C = \frac{v_0 m}{k}$$

اس جسم کا مقام لمحہ t پر

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k} (1 - e^{-(k/m)t})$$

ہو گا۔ یہ جانے کے لئے کہ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا ہم $t \rightarrow \infty$ پر $s(t)$ کا حد تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ $-\frac{k}{m} < 0$ ہے لہذا $t \rightarrow \infty$ کرنے سے $e^{-(k/m)t} \rightarrow 0$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_0 m}{k} (1 - e^{-(k/m)t}) \\ &= \frac{v_0 m}{k} (1 - 0) = \frac{v_0 m}{k}\end{aligned}$$

یوں یہ جسم کو رکنے کے لئے درج ذیل فاصلہ درکار ہو گا۔

$$(7.61) \quad \text{طے فاصلہ} = \frac{v_0 m}{k}$$

چونکہ صرف ریاضیات میں ہم وقت کو لامتناہی تک بڑھا سکتے ہیں لہذا یہ ایک فرضی فاصلہ ہے۔ حقیقی فاصل اس سے کم ہو گا۔ ہاں یہ درست ہو گا کہ بھاری جسم کو رکنے کے لئے زیادہ وقت درکار ہو گا اور یہ زیادہ دور تک چل کر رکے گا۔

مثال 7.82: برف پھسلن پر پھسلنے والے 80 kg شخص کے لئے مساوات 7.60 میں $k = 4.4 \text{ kg s}^{-1}$ ہو گا۔ یہ شخص 3 m s^{-1} کی رفتار سے آہستہ ہو کر 0.25 m s^{-1} کی رفتار تک کتنی دیر میں پہنچے گا؟ اس دورانیے میں یہ شخص کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

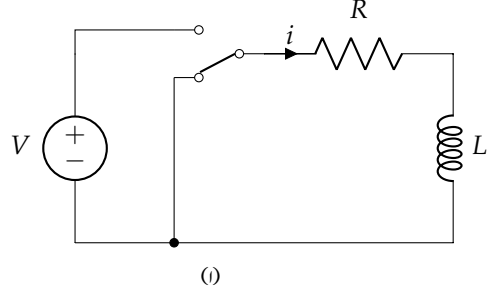
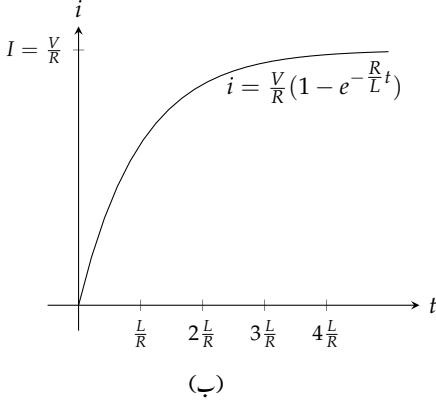
حل: ہم مساوات 7.60 کو t کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}3e^{-4.4t/80} &= 0.25 \\ e^{-4.4t/80} &= \frac{1}{12} \\ -\frac{4.4t}{80} &= \ln\left(\frac{1}{12}\right) \\ t &= \frac{80}{4.4} \ln 12 \approx 45 \text{ s}\end{aligned}$$

اس عرصہ میں طے فاصلہ کو مساوات 7.61 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$= \frac{v_0 m}{k} = \frac{(3)(80)}{4.4} \approx 55 \text{ m}$$

□



شکل 7.72: سلسلہ وار مزاحمت، امالہ برقی دور (مثال 7.83)

ادوار RL

منبع دباؤ کے ساتھ لمحہ $t = 0$ پر مزاحمت R اور امالہ L کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے (شکل 7.72)۔ امالہ کی اکائی ہینری H اور مزاحمت کی اکائی اہم Ω ہے۔ اس دور کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے

$$(7.62) \quad L \frac{di}{dt} + Ri = V$$

جہاں t وقت کو، i برقی رو کو اور V لاگو برقی دباؤ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے لمحہ t پر برقی رو $i(t)$ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال 7.83: سلسلہ وار جڑے RL دور کو مساوات 7.62 ظاہر کرتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

حل: ہم اس مساوات کو معیاری روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(7.63) \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

یوں مسئلہ 7.4 کے تحت حل درج ذیل ہو گا (سوال 7.756)۔

$$(7.64) \quad i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

چونکہ $-\frac{R}{L}$ نفی ہے لہذا $t \rightarrow \infty$ کرنے سے $e^{-(R/L)t} \rightarrow 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} \cdot 0 = \frac{V}{R}$$

ہو گا۔ یوں کسی بھی لمحہ پر برقی رو $\frac{V}{T}$ سے کم ہوگی لیکن جیسے جیسے وقت گزرتا ہے برقی رو برقرار حال قیمت $\frac{V}{R}$ تک پہنچتی ہے۔ درج ذیل مساوات کے تحت

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V$$

اگر $L = 0$ (مالہ کی غیر موجودگی) یا $\frac{di}{dt} = 0$ (برقرار حال) ہو تب اس دور میں $i = \frac{V}{R}$ ہوگا (شکل 7.72)۔

مساوات 7.64 درحقیقت دو مختلف حل کا مجموعہ ہے۔ اس کا پہلا جزو $\frac{V}{R}$ برقرار حال حل ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو $-\frac{V}{R}e^{-(R/L)t}$ عارضی حال حل ہے جو $t \rightarrow \infty$ کرنے سے صفر ہوگا۔ □

سوالات

حل کی تصدیق
سوال 7.703 اور سوال 7.704 میں تصدیق کریں کہ ہر $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

سوال 7.703: $2y' + 3y = e^{-x}$ (ا) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$ (ب) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$ (ج)

سوال 7.704: $y' = y^2$ ؛ (ا) $y = -\frac{1}{x}$ (ب) $y = -\frac{1}{x+3}$ (ج)

سوال 7.705 اور سوال 7.706 میں تصدیق کریں کہ $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

سوال 7.705: $x^2y' + xy = e^x$ ، $y = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

سوال 7.706: $y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$ ، $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$

سوال 7.707 تا سوال 7.710 میں ابتدائی قیمت مسئلے کے دیے گئے حل کی تصدیق کریں۔

سوال 7.707: $y' + y = \frac{2}{1+4e^{2x}}$ ، $y(-\ln 2) = \frac{\pi}{2}$ ؛ $y = e^{-x} \tan^{-1}(2e^x)$

سوال 7.708: $y' = e^{-x^2} - 2xy$ ، $y(2) = 0$ ؛ $y = (x-2)e^{-x^2}$

سوال 7.709: $xy' + y = -\sin x$ ، $x > 0$ ، $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ؛ $y = \frac{\cos x}{x}$

سوال 7.710: $x^2 y' = xy - y^2, \quad x > 1, \quad y(e) = e; \quad y = \frac{x}{\ln x}$

قابل علیحدگی مساوات
سوال 7.711 تا سوال 7.716 میں دیے گئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔

سوال 7.711: $\frac{dy}{dx} = 2(x + y^2 x)$
جواب: $y = \tan(x^2 + C)$

سوال 7.712: $(y + 1) \frac{dy}{dx} = y(x - 1)$

سوال 7.713: $2\sqrt{xy} \frac{dy}{dx} = 1, \quad x, y > 0$
جواب: $\frac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$

سوال 7.714: $\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y}, \quad y > 0$

سوال 7.715: $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$
جواب: $e^y - e^x = C$

سوال 7.716: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + 1}{xe^y}, \quad x > 0$

خطی یک رتبی مساوات
سوال 7.717 تا سوال 7.722 میں تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 7.717: $x \frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$
جواب: $y = \frac{e^x + C}{x}$

سوال 7.718: $e^x \frac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

سوال 7.719: $xy' + 3y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad x > 0$
جواب: $y = \frac{C - \cos x}{x^3}, \quad x > 0$

سوال 7.720: $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 7.721: $x \frac{dy}{dx} + 2y = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0$
جواب: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}, \quad x > 0$

سوال 7.722: $(1+x)y' + y = \sqrt{x}$

یک رتبی مساوات

سوال 7.723 تا سوال 7.736 میں تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 7.723: $2y' = e^{x/2} + y$

جواب: $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

سوال 7.724: $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$

سوال 7.725: $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

جواب: $y = x^2e^{-2x} + Ce^{-2x}$

سوال 7.726: $xy' - y = 2x \ln x$

سوال 7.727: $\sec x \frac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$

جواب: $-e^{-y} - e^{\sin x} = C$

سوال 7.728: $x\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

سوال 7.729: $(t-1)^3\frac{ds}{dt} + 4(t-1)^2s = t+1, \quad t > 1$

جواب: $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

سوال 7.730: $(t+1)\frac{ds}{dt} + 2s = 3(t+1) + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t > -1$

سوال 7.731: $(\sec^2 \sqrt{x})\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$

جواب: $2 \tan \sqrt{x} = t + C$

سوال 7.732: $\sin t - (x \cos^2 t)\frac{dx}{dt} = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 7.733: $\sin \theta \frac{dr}{d\theta} + (\cos \theta)r = \tan \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

جواب: $r = \csc \theta (\ln |\sec \theta| + C)$

سوال 7.734: $\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r = \sin^2 \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

سوال 7.735: $\cosh x \frac{dy}{dx} + (\sinh x)y = e^{-x}$

جواب: $y = -e^{-x} \operatorname{sech} x + C \operatorname{sech} x$

سوال 7.736: $\sinh x \frac{dy}{dx} + 3(\cosh x)y = \cosh x \sinh x$

ابتدائی قیمت مسائل کا حل
سوال 7.737 تا سوال 7.742 میں ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 7.737: $\frac{dy}{dt} + 2y = 3; \quad y(0) = 1$
جواب: $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

سوال 7.738: $t \frac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0; \quad y(2) = 1$

سوال 7.739: $\theta \frac{dy}{d\theta} + y = \sin \theta, \quad \theta > 0; \quad y(\pi/2) = 1$
جواب: $y = -\frac{1}{\theta} \cos \theta + \frac{\pi}{2\theta}$

سوال 7.740: $\theta \frac{dy}{d\theta} - 2y = \theta^3 \sec \theta \tan \theta, \quad \theta > 0; \quad y(\pi/3) = 2$

سوال 7.741: $(x+1) \frac{dy}{dx} - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x > -1; \quad y(0) = 5$
جواب: $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}$

سوال 7.742: $\frac{dy}{dx} + xy = x, \quad y(0) = -6$

سوال 7.743: درج ذیل ابتدائی قیمت مساوات کو مسئلہ 7.4 سے حل کرتے ہوئے کیا حاصل ہوتا ہے۔ یہاں y متغیر t کا تفاعل ہے۔

$\frac{dy}{dt} = ky, \quad k$ مستقل; $y(0) = y_0$
جواب: $y = y_0 e^{kt}$

سوال 7.744: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو مسئلہ 7.4 کی مدد سے حل کریں جہاں v متغیر t کا تفاعل ہے۔
 $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v, \quad k$ اور m مستقل ہیں; $v(0) = v_0$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.745: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(الف) $x \int \frac{1}{x} dx = x \ln|x| + C$

(ب) $x \int \frac{1}{x} dx = x \ln|x| + Cx$

جواب: (الف) غلط (ب) درست

سوال 7.746: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{1}{\cos x} \int \cos x \, dx = \tan x + C \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{\cos x} \int \cos x \, dx = \tan x + \frac{C}{\cos x} \quad (\text{ب})$$

سوال 7.747: شکر خون ایک مریض کو مستقل شرح سے گلوکوز کی خوراک درون وریدی کھلائی جاتی ہے۔ وقت کے لحاظ سے خون میں گلوکوز کی ارتکاز $c(t)$ کو درج ذیل تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں G ، V اور k مثبت مستقل ہیں۔

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc$$

فی منٹ ملی گرام میں گلوکوز کی شرح G ہے جبکہ بدن میں خون کا حجم V لٹر ہے جو بالغ شخص کے لئے تقریباً 5 L ہو گا۔ ارتکاز $c(t)$ کو ملی گرام فی دس مربع سنٹی میٹر ناپا جاتا ہے۔ جزو $-kc$ کو اس لئے شامل کیا گیا ہے کہ گلوکوز مسلسل دیگر اجزاء میں تبدیل ہو گا اور اس تبدیلی کی شرح اس وقت پائے جانے والی گلوکوز کے راست متناسب ہو گی۔ (i) $c(0)$ کو c_0 سے ظاہر کرتے ہوئے اس مساوات کو حل کریں۔ (ب) برقرار حال ارتکاز $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ تلاش کریں۔
جواب: (i) $c = \frac{G}{100Vk} + (c_0 - \frac{G}{100Vk})e^{-kt}$ ، (ب) $c = \frac{G}{100Vk}$

سوال 7.748: مسلسل سود در سود آپ بینک سے 1000 روپیہ قرضہ لیتے ہیں اور ہر سال مزید 1000 روپیہ بینک سے قرض کرتے ہیں۔ آپ کو 10% سالانہ مسلسل سود در سود دینا ہو گا۔ t سال بعد آپ کی واجب الادا رقم x درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے۔

$$\frac{dx}{dt} = 1000 + 0.1x, \quad x(0) = 1000$$

(i) اس مساوات کو حل کریں۔ (ب) آپ کی واجب الادا رقم کتنے سالوں میں 100 000 ہو گی؟

سوال 7.749: حوض خالی کرنے کے لئے درکار وقت ایک پانی سے بھرے ہوئے اختصائی بیلنی حوض کی تہہ میں نصب نیکی کو کھول کر حوض خالی کا جاتا ہے۔ شروع میں پانی کی نکاسی تیز ہوتی ہے لیکن جیسے جیسے پانی کی سطح گرتی ہے، پانی کی نکاسی بھی آہستہ ہوتی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں پانی کی گہرائی کی شرح تبدیلی، گہرائی y کے جذر کے راست متناسب ہوتی ہے:

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

مستقل k کی قیمت نقلی اسراع، نیکی کے سوراخ کی شکل اور حوض کے رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتی ہے۔

فرض کریں t کو منٹوں میں ناپا جاتا ہے اور $k = \frac{1}{10}$ ہو۔ اگر پانی کی گہرائی 4 m ہو تب حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟
جواب: 40 منٹ

سوال 7.750: گریزی رفتار

ہو اسے خالی چاند پر کمیت m کے جسم پر ثقلی قوت $F = -\frac{GMm}{s^2} = -\frac{GMm}{R^2} \frac{R^2}{s^2} = -\frac{mgR^2}{s^2}$ عمل کرتی ہے جہاں چاند کے مرکز سے جسم تک فاصلہ s اور چاند کا رداس R ہے (شکل 7.73)۔ چونکہ قوت F نیچے رخ عمل کرتا ہے لہذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ (i) ایک جسم کو $t = 0$ پر سطح چاند سے v_0 رفتار کے ساتھ اوپر پھینکا جاتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = ma$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مقام s پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

یوں جب تک $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ ہو، رفتار مثبت رہے گی۔ رفتار $v_0 = \sqrt{2gR}$ چاند کی گریزی رفتار³⁶ کہلاتی ہے۔ جس جسم کو اس رفتار یا اس سے زیادہ رفتار سے سطح چاند سے اوپر پھینکا جائے، وہ جسم چاند پر واپس نہیں گرے گا۔ (ب) دکھائیں کہ اگر $v_0 = \sqrt{2gR}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$s = R \left(1 + \frac{3v_0}{2R} t \right)^{2/3}$$

سمتی رفتار کے راست مزاحمت

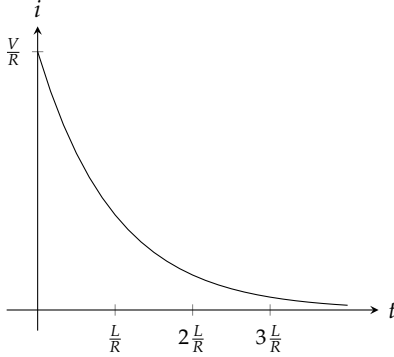
سوال 7.751: ایک سائیکل سوار 21.6 km h^{-1} رفتار سے چلتے ہوئے پیڈل گھمانا بند کرتا ہے۔ مساوات 7.60 میں $k = \frac{20}{7}\text{ kg s}^{-1}$ لیں اور سائیکل سوار کی کمیت 80 kg ہے۔ (i) سائیکل سوار کتنا فاصلہ طے کر کے رکے گا۔ (ب) کتنی دیر بعد سائیکل سوار کی رفتار 0.5 m s^{-1} ہو گی؟
جواب: (i) 168 m ، (ب) تقریباً 70 سیکنڈ

سوال 7.752: ایک بحری جہاز جس کی کمیت $2.5 \times 10^7\text{ kg}$ ہے کے لئے مساوات 7.60 میں $k = 44\,000\text{ kg s}^{-1}$ ہے۔ اس بحری جہاز کی رفتار 24 km h^{-1} ہوتی ہے جب اس کا انجن کام کرنا چھوڑ دیتا ہے۔ (i) یہ بحری جہاز کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا؟ (ب) اس کی رفتار کتنی دیر میں 0.25 m s^{-1} تک ہو گی؟

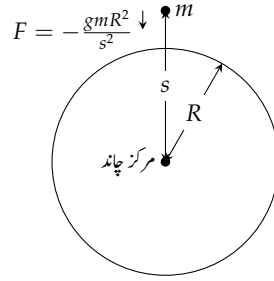
RL ادوار

سوال 7.753: سلسلہ وار RL دور میں برقی رو

ایک سلسلہ وار RL دور پر لمحہ $t = 0$ پر برقی دباؤ لاگو کیا جاتا ہے۔ کتنی دیر میں برقرار حال برقی رو کی نصف قیمت تک دور میں برقی رو پہنچے گا؟ آپ دیکھیں گے کہ جواب کا دار و مدار R اور L کی قیمتوں پر ہو گا ناکہ لاگو برقی دباؤ کی قیمت پر۔
جواب: $t = \frac{L}{R} \ln 2$ سیکنڈ بعد



شکل 7.74: تنزل برقی رو (سوال 7.754)



شکل 7.73: چاند پر قوت کشش

سوال 7.754: تنزل برقی رو
سلسلہ وار RL دور میں ابتدائی طور پر I_0 برقی رو پائی جاتی ہے جو درج ذیل مساوات کے تحت وقت کے ساتھ گھٹتی ہے (شکل 7.74)۔

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

(ا) اس مساوات کو برقی رو i کے لئے حل کریں۔ (ب) برقی رو کتنی دیر میں $\frac{I_0}{2}$ ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = \frac{L}{R}$ پر i کتنا ہو گا۔

سوال 7.755: وقتی مستقل
مستقل $\frac{L}{R}$ کو مہندس RL دور کا وقتی مستقل³⁷ کہتے ہیں۔ تقریباً 3 وقتی مستقل دورانیہ میں برقی رو برقرار حال قیمت کے 95% قیمت تک پہنچ پاتا ہے۔ یوں وقتی مستقل سے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ دور کتنا جلدی برقرار حاصل اختیار کرے گا۔ (ا) مساوات 7.64 میں لمحہ $t = 3\frac{L}{R}$ پر i تلاش کریں۔ یہ برقرار حال برقی رو کی 95% قیمت ہو گی۔ (ب) لمحہ $t = 2\frac{L}{R}$ پر مساوات 7.64 کتنی برقی رو دیتی ہے؟

جواب: (ا) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} \approx 0.95\frac{V}{R}$ ، (ب) 86%

سوال 7.756: انہیں مساوات 7.64 حاصل کرتے ہیں۔

ا. مسئلہ 7.4 کی مدد سے دکھائیں کہ

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

escape velocity³⁶
time constant³⁷

کا حل درج ذیل ہے۔

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}$$

ب. ابتدائی معلومات $i(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کریں۔ یوں مساوات 7.64 حاصل ہوتی ہے۔

ج. دکھائیں کہ $i = \frac{V}{R}$ مساوات 7.63 کا حل ہے اور درج ذیل $i = Ce^{-(R/L)t}$ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

مرکب کی مسائل
ایک کیمیا جو مائع (یا گیس) کی صورت میں ہے کو ایک برتن میں ڈالا جاتا ہے جس میں پہلے سے کوئی مائع (یا گیس) موجود ہے اور عین ممکن ہے کہ اسی کیمیا کی مخصوص مقدار بھی اس برتن میں پہلے سے موجود ہو۔ مرکب کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھتے ہوئے برتن سے اس کی نکاسی مستقل شرح سے کی جاتی ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ ہمیں برتن میں کیمیا کی لحاظی مقدار معلوم ہو۔ درج ذیل مساوات پر مبنی تفرقی مساوات اس عمل کو بیان کرتی ہے۔

$$(7.65) \quad \text{کیمیا کی شرح اخراج} - (\text{کیمیا کی شرح آمد}) = \text{برتن میں کیمیا کی مقدار کی شرح تبدیلی}$$

گر لمحہ t پر برتن میں کیمیا کی مقدار $y(t)$ اور برتن میں مواد کا کل حجم $V(t)$ ہو تب کیمیا کے اخراج کی شرح درج ذیل ہوگی۔

$$(7.66) \quad \begin{aligned} \text{شرح انعکاس مائع} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{شرح انعکاس کیمیا}) \\ &= (\text{شرح انعکاس مائع}) \cdot (\text{لمحہ } t \text{ پر برتن میں ارتکاز}) \end{aligned}$$

یوں مساوات 7.65 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.67) \quad \frac{dy}{dt} = (\text{شرح آمد کیمیا}) - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{شرح انعکاس مائع})$$

سوال 7.757: ایک حوض میں ابتدائی طور پر 500 لٹر نمکین پانی پایا جاتا ہے جس میں 25 kg نمک حل ہے۔ اس حوض میں 5 L min^{-1} شرح سے نمکین پانی داخل ہوتا ہے جس میں 0.4 kg L^{-1} نمک ملا ہوا ہے جبکہ حوض سے نمکین پانی کا انخلا 4 L min^{-1} ہے۔ حوض میں نمکین پانی کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھا جاتا ہے۔

ا. حوض میں نمک داخل ہونے کی شرح (kg min^{-1}) کیا ہے؟

ب. لمحہ t پر حوض میں نمکین پانی کا حجم کتنا ہے؟

ج. لمحہ t پر نمک کس شرح (kg min^{-1}) سے حوض سے خارج ہوتا ہے؟

د. مرکب بنانے کے اس عمل کا ابتدائی قیمت مسئلہ لکھیں اور اس کو حل کریں۔

ه. عمل شروع ہونے کے 25 منٹ بعد حوض میں نمک کا ارتکاز کتنا ہوگا؟

جواب: (ا) 2 kg min^{-1} ، (ب) $100 + t$ لٹر، (ج) $\frac{4y}{100+t} \text{ kg min}^{-1}$ ،

(د) $y(0) = 25$ ، $\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{4y}{100+t}$ ، $y(t) = \frac{2}{5}(100 + t) - \frac{15}{(1+t/100)^4}$ ،

(ه) 0.35 kg L^{-1}

سوال 7.758: تیل صاف سازی کے کارخانہ میں ایک حوض میں 10 000 L تیل پایا جاتا ہے جس میں ابتدائی طور پر 50 kg اضافی مادہ شامل ہے۔ سردی کے موسم کے بنا اس میں 0.4 kg فی لٹر اضافی مواد کو 200 L min^{-1} شامل کیا جاتا ہے۔ حوض میں تیل کو اچھی طرح ہلا کر یکساں رکھا جاتا ہے۔ حوض سے مرکب کے انعکاس کی شرح 225 L min^{-1} ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے 20 منٹ بعد حوض میں اضافی مواد کی مقدار معلوم کریں۔

سوال 7.759: ایک حوض میں 500 L خالص پانی پایا جاتا ہے۔ ایک محلول جس میں 0.1 kg L^{-1} پایا کھاد پایا جاتا ہے کو 5 L min^{-1} شرح سے حوض میں شامل کیا جاتا ہے۔ حوض سے محلول کا انعکاس 15 L min^{-1} ہے۔ حوض میں کھاد کی زیادہ سے زیادہ مقدار معلوم کریں اور اس مقدار تک پہنچنے کے لئے درکار وقت معلوم کریں۔
جواب: ??

سوال 7.760: ایک دفتر کے ایک کمرے میں ابتدائی طور پر 150 m^3 صاف ہوا پائی جاتی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر قریبی کمرے میں موجود افسران سگریٹ پینا شروع کرتے ہیں جس کی بنا 4% زہریلی کاربن مونو آکسائیڈ $0.01 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ شرح سے اس کمرے میں داخل ہوتی ہے جہاں ایک پٹکھا پوری ہوا کو یکساں رکھتا ہے۔ اس کمرے سے ہوا کا انخلاء $0.01 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ ہے۔ اس کمرے میں کب زہریلی گیس 0.01% ہوگی؟

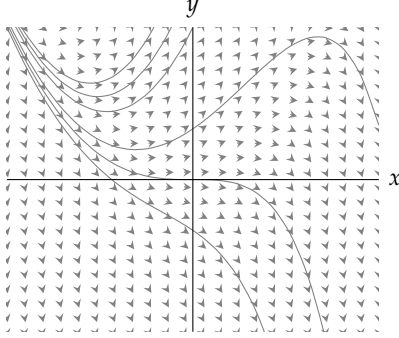
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان

بعض اوقات ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $y = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ کا بالکل درست حل معلوم نہیں کر سکتے ہیں یا نہیں کرنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں ہم عموماً کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے موزوں وقفہ پر ہر x کے لئے y کی تخمینہ قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ایسے حل کو ہم اعدادی حل³⁸ کہتے ہیں اور اس حل کو حاصل کرنے کے طریقہ کو اعدادی ترکیب³⁹ کہتے ہیں۔ اعدادی ترکیب عموماً بہت کم وقت میں درست نتائج دیتے ہیں اور جہاں بھی تحلیلی حل ناممکن، غیر ضروری یا پیچیدہ ہو، وہاں اعدادی ترکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ اس حصہ میں ہم ایسے ایک ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو ترکیب یولر⁴⁰ کہتے ہیں۔

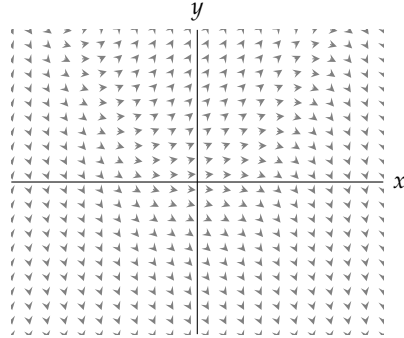
numerical solution³⁸

numerical method³⁹

Euler' method⁴⁰



(ب) میدان ڈھلوان پر مخصوص منحني حل۔



(i) میدان ڈھلوان

شکل 7.75: تفرقی مساوات $y' = y - x^2$ کے میدان ڈھلوان پر منحني حل ترسیم کی گئی ہیں۔ کمپیوٹر پر میدان ڈھلوان کو عموماً سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے اگرچہ ڈھلوان سمتیہ نہیں ہے۔

میدان ڈھلوان

ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ پر یہ شرط مسلط کرتی ہے کہ تفرقی مساوات کا حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے گا اور اس نقطہ پر حل کا ڈھلوان $f(x_0, y_0)$ ہو گا۔ ہم f کے دائرہ کار میں منتخب نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ ڈھلوان والی قلیل سیدھے خطوط بنا کر اس ڈھلوان کو تصویری جامہ پہنا سکتے ہیں۔ نقطہ (x, y) سے گزرتے ہوئے حل کی ڈھلوان اس نقطہ پر بنائے گئے قلیل خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا لہذا یہ خط اس نقطہ پر حل کا مماس ہو گا۔ ہم ان مماس پر نظر دوڑا کر حل کے رویہ کو جان سکتے ہیں (شکل 7.75)۔

قلم و کاغذ کے ساتھ میدان ڈھلوان بنانا تھکا دینے والا کام ہے۔ اس کتاب میں تمام مثالوں میں میدان ڈھلوان کمپیوٹر کی مدد سے بنائے گئے۔ آئیں کمپیوٹر کی مدد سے منحني حل کے حصول پر غور کریں۔

خط بندی کا استعمال

دیے گئے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ سے ہم منحني حل $y = y(x)$ کی تخمینہ درج ذیل خط بندی

$$L(x) = y(x_0) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

یا

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

سے کر سکتے ہیں۔ x_0 کی بالکل پڑوس میں تفاعل $L(x)$ اصل حل $y(x)$ کا اچھا تخمینہ ہوگا (شکل 7.76)۔ ترکیب یولر میں اس طرح کے خط بند یوں کو آپس میں جوڑ کر زیادہ لمبے فاصلہ کے لئے حل تلاش کیا جاتا ہے۔ اب اس ترکیب پر غور کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (x_0, y_0) منحنی حل پر پایا جاتا ہے۔ فرض کریں ہم غیر تابع متغیر کی ایک نئی قیمت $x_0 = x_0 + dx$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر بڑھوتری dx بہت کم ہو تب

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0) dx$$

اصل حل $y = y(x_1)$ کا اچھا تخمینہ ہوگا۔ یوں نقطہ (x_0, y_0) سے، جو ٹھیک منحنی حل پر پایا جاتا ہے، ہم نقطہ (x_1, y_1) حاصل کر پائیں ہیں جو منحنی حل پر نقطہ $(x_1, y(x_1))$ کے بہت قریب ہوگا۔

نقطہ (x_1, y_1) اور ڈھلوان $f(x_1, y_1)$ لیتے ہوئے ہم دوسرا قدم لیتے ہیں۔ ہم $x_2 = x_1 + dx$ لے کر

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) dx$$

سے، منحنی حل $y = y(x)$ کے ساتھ، دوسرا تخمینہ نقطہ (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں (شکل 7.77)۔ اسی طرح چلتے ہوئے تیسرے قدم پر ہم نقطہ (x_2, y_2) اور ڈھلوان $f(x_2, y_2)$ سے

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) dx$$

حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

مثال 7.84: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے لئے ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی تین تخمینے y_1 ، y_2 اور y_3 حاصل کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

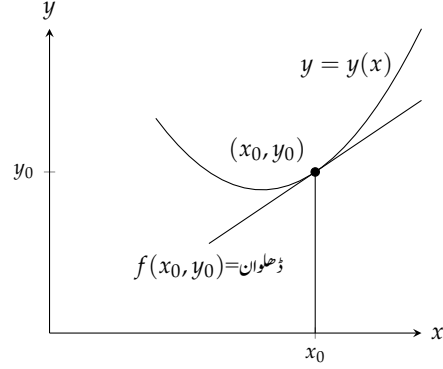
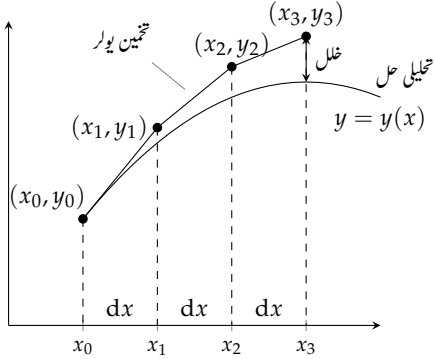
ابتدا $x_0 = 0$ سے کریں اور $dx = 0.1$ لیں۔

حل: قدم اول:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) dx \\ &= y_0 + (1 + y_0) dx \\ &= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \end{aligned}$$

قدم دوم:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1) dx \\ &= y_1 + (1 + y_1) dx \\ &= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \end{aligned}$$



شکل 7.77: ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی قیمت مسئلہ $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ کے ابتدائی تین نقطوں کا حصول۔ ہر قدم پر مجموعی غلل بڑھتا ہے۔

شکل 7.76: خط مماس کی مساوات $y = L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ ہے۔

قدم سوم:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2) dx \\ &= y_2 + (1 + y_2) dx \\ &= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662 \end{aligned}$$

□

ترکیب یولر

ترکیب یولر سے ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

کے حل کی تخمینی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم غیر تابع متغیر کے منتخب کردہ قیمتوں کے بیچ یکساں فاصلہ رکھیں اور n عدد ایسے نقطے منتخب کریں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + dx \\ x_2 &= x_1 + dx \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + dx \end{aligned} \quad (7.68)$$

جدول 7.13: تحلیل حل اور ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل کا موازنہ (مثال 7.85)

x	تخمینی y	تحلیلی y	غلل = تخمینی y - تحلیلی y
0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.1	1.2000	1.2103	0.0103
0.2	1.4200	1.4428	0.0228
0.3	1.6620	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491

اس کے بعد ہم متواتر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) \, dx \\
 y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1) \, dx \\
 &\vdots \\
 y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \, dx
 \end{aligned}
 \tag{7.69}$$

ہم قدموں کی تعداد n جتنی چاہیں رکھ سکتے ہیں، البتہ، n کو بہت بڑا رکھنے سے نتائج میں غلل جمع ہو گا۔

مثال 7.85: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

$x_0 = 0$ سے شروع کریں اور $dx = 0.1$ لیں۔

حل: اس مسئلے کا بالکل درست تحلیلی حل $y = 2e^x - 1$ ہے۔ جدول 7.13 میں، مساوات 7.68 اور مساوات 7.69 استعمال کرتے ہوئے، ترکیب یولر سے حاصل 4 اعشاریہ درست تخمینی نتائج کا تحلیل حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ دس قدم بعد $x = 1$ تک پہنچ کر ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل میں 5.6% غلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال 7.86: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

جدول 7.14: ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد بڑھانے سے خلل میں کمی پیدا ہوتی ہے (مثال 7.86)۔

x	تخمینی y	تحلیلی y	خلل = تخمینی y - تحلیلی y
0.00	1.0000	1.0000	0.0000
0.05	1.1000	1.1025	0.0025
0.10	1.2050	1.2103	0.0053
0.15	1.3153	1.3237	0.0084
0.20	1.4310	1.4428	0.0118
0.25	1.5526	1.5681	0.0155
0.30	1.6802	1.6997	0.0195
0.35	1.8142	1.8381	0.0239
0.40	1.9549	1.9836	0.0287
0.45	2.1027	2.1366	0.0339
0.50	2.2578	2.2974	0.0396
0.55	2.4207	2.4665	0.0458
0.60	2.5917	2.6442	0.0525
0.65	2.7713	2.8311	0.0598
0.70	2.9599	3.0275	0.0676
0.75	3.1579	3.2340	0.0761
0.80	3.3657	3.4511	0.0854
0.85	3.5840	3.6793	0.0953
0.90	3.8132	3.9192	0.1060
0.95	4.0539	4.1714	0.1175
1.00	4.3066	4.4366	0.1300

شروع $x_0 = 0$ سے کریں اور $dx = 0.05$ لیں۔

حل: جدول 7.14 میں نتائج اور تحلیلی بالکل ٹھیک حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قدموں کی تعداد 10 سے 20 کرنے سے خلل کم ہوتا ہے۔ اس مرتبہ $x = 1$ پر صرف 2.9% خلل پایا جاتا ہے۔ □

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد مزید بڑھا کر اس سے بھی بہتر نتیجہ حاصل ہو گا۔ حقیقت میں ایسا کرنے سے نا صرف کمپیوٹر کو حل حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہو گا بلکہ کمپیوٹر میں ہندسوں کی تعداد پر پابندی کی بنا پیدا پور و پور خلل بڑھتا ہے۔

خلل اور اس کو کم کرنے کے طریقوں پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔ انہیں سمجھنے کے لئے مزید اعلیٰ درجے کی نصاب درکار ہو گی۔ ترکیب یولر سے زیادہ بہتر اعدادی تراکیب پائے جاتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات پڑھنے کے دوران سیکھیں گے۔ اعدادی ترکیب میں قدموں کی تعداد اور خلل کے تعلق پر غور کرنے کے لئے آپ کو سوالات میں موقع ملے گا۔

سوالات

تخمین یولر

سوال 7.761 تا سوال 7.766 میں ترکیب یولر سے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلہ کے اولین تین تخمینہ قیمتیں تلاش کریں۔ دیا گیا قدم استعمال کریں۔ مسئلے کا تحلیلی حل تلاش کریں اور اپنے تخمینہ کی درستگی پر غور کریں۔ اپنے نتائج کو 4 اعشاریہ درست رکھیں۔

سوال 7.761: $y' = 1 - \frac{y}{x}$, $y(2) = -1$, $dx = 0.5$
جواب: $y_{\text{تحلیلی}} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$, $y_1 = -0.25$, $y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.75$

سوال 7.762: $y' = x(1 - y)$, $y(1) = 0$, $dx = 0.2$

سوال 7.763: $y' = 2xy + 2y$, $y(0) = 3$, $dx = 0.2$
جواب: $y_{\text{تحلیلی}} = 3e^{x(x+2)}$, $y_1 = 4.2$, $y_2 = 6.216$, $y_3 = 9.697$

سوال 7.764: $y' = y^2(1 + 2x)$, $y(-1) = 1$, $dx = 0.5$

سوال 7.765: $y' = 2xe^{x^2}$, $y(0) = 2$, $dx = 0.1$
جواب: $y_{\text{تحلیلی}} = e^{x^2} + 1$, $y_1 = 2.0$, $y_2 = 2.0202$, $y_3 = 2.0618$

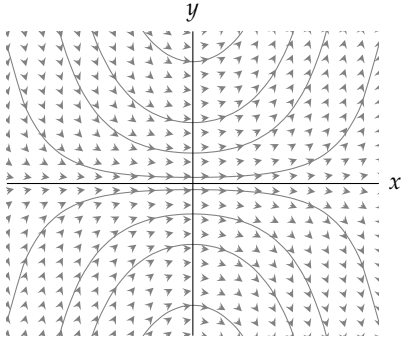
سوال 7.766: $y' = y + e^x - 2$, $y(0) = 2$, $dx = 0.5$

سوال 7.767: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $dx = 0.2$ لے کر $y' = y$, $y(0) = 1$ کے لئے $y(1)$ تلاش کریں۔ $y(1)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟
جواب: $y \approx 2.48832$ ، ٹھیک جواب e ہے۔

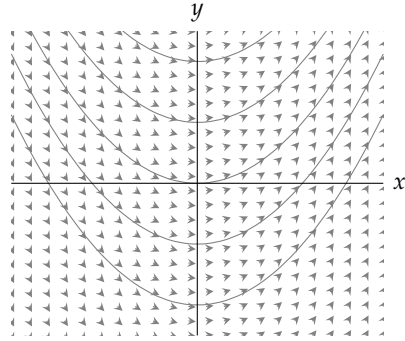
سوال 7.768: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $dx = 0.2$ لے کر $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$ کے لئے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

سوال 7.769: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $dx = 0.5$ لے کر $y' = \frac{y^2}{\sqrt{x}}$, $y(1) = -1$ کے لئے $y(5)$ تلاش کریں۔ $y(5)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟
جواب: $y \approx -0.2272$ ، ٹھیک جواب $\frac{1}{1-2\sqrt{5}} \approx -0.2880$ ہے۔

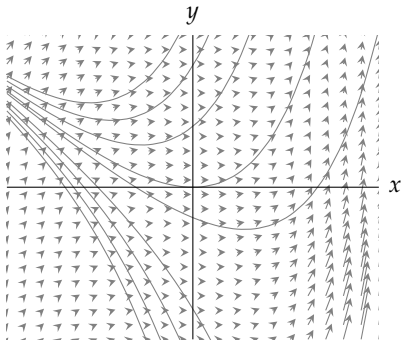
سوال 7.770: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $dx = \frac{1}{3}$ لے کر $y' = y - e^{2x}$, $y(0) = 1$ کے لئے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟



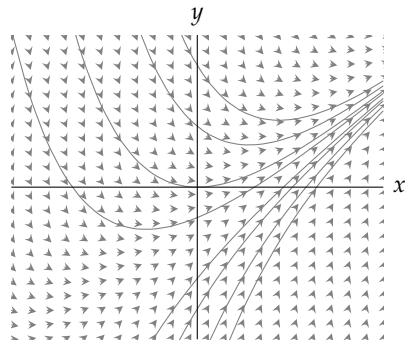
(ب)



(د)

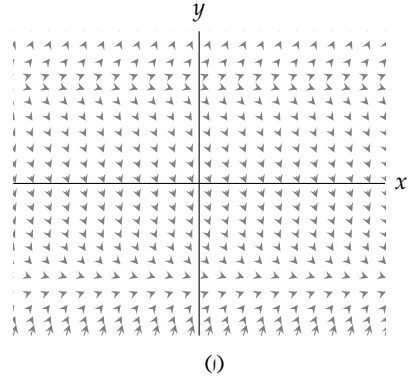
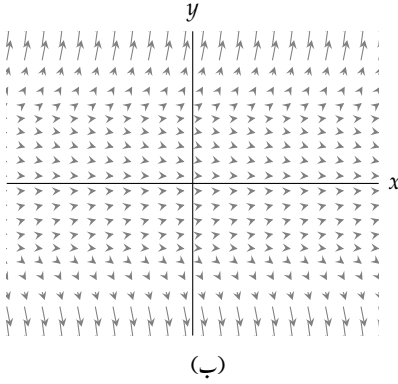


(ه)



(ج)

شکل 7.78: میدان ڈھلوان برائے سوال 7.771 تا سوال 7.774



شکل 7.79: میدان ڈھلوان برائے سوال 7.775 اور سوال 7.776

میدان ڈھلوان
سوال 7.771 تا سوال 7.774 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے منحنی حل اور میدان ڈھلوان کی نشاندہی شکل 7.78 میں کریں۔

سوال 7.771: $y' = xy$
جواب: ب

سوال 7.772: $y' = x + y$

سوال 7.773: $y' = x$
جواب: الف

سوال 7.774: $y' = x - y$

سوال 7.775 میں شکل 7.79-1 اور سوال 7.776 میں شکل 7.79-ب کے میدان ڈھلوان کی نقل اتار کر اس پر منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

سوال 7.775: $y' = (y + 2)(y - 2)$

سوال 7.776: $y' = y(y + 1)(y - 1)$

سوال 7.777 تا سوال 7.780 میں میدان ڈھلوان کا کچھ حصہ کھینچ کر دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

سوال 7.777: $y' = y$ اور نقاط (i) (0, 1)، (ب) (0, 2)، (ج) (0, -1)

سوال 7.778: $y' = 2(y - 4)$ اور نقاط (i) $(0, 1)$ ، (ب) $(0, 4)$ ، (ج) $(0, 5)$

سوال 7.779: $y' = y(2 - y)$ اور نقاط (i) $(0, 1/2)$ ، (ب) $(0, 3/2)$ ، (ج) $(0, 2)$ ، (د) $(0, 3)$

سوال 7.780: $y' = y^2$ اور نقاط (i) $(0, 1)$ ، (ب) $(0, 2)$ ، (ج) $(0, -1)$ ، (د) $(0, 0)$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.781 تا سوال 7.784 میں دیے گئے تفرقی مساوات پر درج ذیل اقدام کرتے ہوئے تریبی غور کریں۔

ا. دیے گئے تفرقی مساوات کا میدان ڈھلوان xy مستوی میں کھینچیں۔

ب. تفرقی مساوات کا عمومی حل کمپیوٹر کے کسی ریاضی کے پروگرام کی مدد سے حاصل کریں۔

ج. اختیاری مستقل $C = -2, -1, 0, 1, 2$ لیتے ہوئے منحنی حل کو میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

د. دیے گئے مسئلے کا تحلیلی حل وقفہ $[0, b]$ پر تلاش کر کے ترسیم کریں۔

ه. دیے گئے وقفہ کو 4 ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے یولر تخمین کو بھی میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

و. جزو-ہ کو 8، 16 اور 32 ذیلی وقفوں کے لئے دوبارہ حل کر کے جزو-ہ کے نتائج کے اوپر ترسیم کریں۔

ز. نقطہ $x = b$ پر چاروں یولر تخمین میں خلل تلاش کریں۔ نتائج کی بہتری پر تبصرہ کریں۔

سوال 7.781: $y' = x + y$, $y(0) = -\frac{7}{10}$; $-4 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 4$; $b = 1$

سوال 7.782: $y' = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 2$; $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$; $b = 2$

سوال 7.783: $y' = y(2 - y)$, $y(0) = \frac{1}{2}$; $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$; $b = 3$

سوال 7.784: $y' = (\sin x)(\sin y)$, $y(0) = 2$; $-6 \leq x \leq 6$, $-6 \leq y \leq 6$; $b = \frac{3\pi}{2}$

سوال 7.785 اور سوال 7.786 کا بنیادی تفاعل کی صورت میں صریح حل نہیں پایا جاتا ہے۔ ان تفرقی مساوات پر تریبی غور کریں۔ مذکورہ بالا جزو-الف تا جزو-ز میں زیادہ سے زیادہ کرنے کی کوشش کریں۔

سوال 7.785: $y' = \cos(2x - y)$, $y(0) = 2$; $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$; $y(2)$

سوال 7.786: $y' = y(\frac{1}{2} - \ln y)$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$; $y(3)$

سوال 7.787: ابتدائی قیمت مسئلہ $y' + y = f(x)$, $y(0) = 0$ کا حل کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں جہاں $f(x)$ درج ذیل ہے۔

(ا) $2x$ ، (ب) $\sin 2x$ ، (ج) $3e^{x/2}$ ، (د) $2e^{-x/2} \cos 2x$ تمام حل کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے کی خاطر انہیں وقفہ $-2 \leq x \leq 6$ پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 7.788: (ا) درج ذیل تفرقی مساوات کی میدان ڈھلوان کا خاکہ وقفہ $-3 \leq y \leq 3$, $-3 \leq x \leq 3$ کے لئے کھینچیں۔

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

(ب) متغیرات کی علیحدگی کے بعد کمپیوٹر کے ریاضی پروگرام کی مدد سے مکمل کرتے ہوئے خفی حل تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب کے نتیجے کو مستقل $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ کے لئے ترسیم کریں۔ (د) اس حل کو ترسیم کریں جو ابتدائی شرط $y(0) = -1$ کو مطمئن کرتا ہو۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

- up, 368
- conjugate expression, 117
- constant
 - arbitrary, 476
 - rate, 817
- continuity
 - uniform, 539
- continuous
 - left, 168
 - on interval, 174
 - right, 168
- continuous extension, 173
- converges, 538
- coordinate
 - axis, 15
 - pair, 16
 - x, 15
 - y, 15
- cosines
 - law, 86
- critical point, 332
- curve
 - integral, 492
- decreasing, 348
- dependent variable, 32
- derivative, 189, 199
 - first, 233
 - first order, 233
 - second, 233
 - second order, 233
- difference
 - up, 368
- absolute value, 6
- acceleration, 243
- adiabatic process, 723
- aerofoil, 617
- alaska, 291
- algebraic, 753
- algorithm, 851
- angioplasty, 451
- angle of inclination, 21
- aspect ratio, 16
- asymptote, 397
- autocatalyst, 438
- average, 522, 567
- axis, 59
 - negative-x, 16
 - of revolution, 647
 - positive-x, 16
- boundary, 4
 - points, 4
- catalyst, 438
- catenary, 909
- center, 56, 442
- centroid, 709
- chain rule, 277
- chaos theory, 211
- charge
 - electron, 727
- closed, 4
- concave
 - down, 368

- fractals, 680
- free fall, 243
- frustum, 685
- function
 - composite, 39
 - greatest integer, 42
 - hyperbolic, 908
 - identity, 756
 - integer ceiling, 42
 - integer floor, 42
 - least integer, 42
- gene, 247
- generating
 - region, 646
- genetics, 247
- global, 329
- graph
 - dot, 246
- half angle formulae, 85
- half life, 821
- half-open, 4
- helium, 320
- Ibn Sahl's law, 425
- identity function, 756
- implicit
 - differentiation, 295
- increasing, 348
- increments, 16
- independent variable, 32
- index
 - summation, 532
- inflation, 820
- initial value
 - problem, 488
- instantaneous
 - rate of change, 99
- integrable, 538
- integral
 - definite, 538
 - centered quotient, 275
- difference quotient, 189
 - Fermat's, 275
- differentiable, 200
- differential
 - equation, 488
- differential equation
 - first order, 911
 - linear, 913
 - separable, 912
 - solution, 911
 - standard form, 913
- differentiation
 - logarithmic, 778
- discontinuity
 - infinite, 166
 - jump, 166
 - oscillating, 166
- displacement, 241, 739
- domain, 32
 - natural, 35
- dominant, 247, 403
- dominates, 403
- electron, 727
- energy
 - kinetic, 728
- equation
 - general linear, 25
 - point-slope, 23
 - slope-intercept, 25
- escape velocity, 926
- Euler's method, 929
- even, 40
- extended function, 173
- exterior, 58
- extrema, 329
- Fermat's principle, 424
- finite sum, 514
- fixed point, 183
- fossil bone, 829

- center of, 698
- mean, 567
 - arithmetic, 353
 - geometric, 353
- mean life
 - nucleus, 828
- newton
 - law of cooling, 823
- norm, 537
- normal, 298
- numbers
 - irrational, 3
 - natural, 3
 - rational, 3
 - real, 1
- numerical
 - method, 929
 - solution, 929
- odd, 41
- one to one, 754
- open, 4
- origin, 15
- Pappus's theorem, 744
- parabola, 20, 59
- parametric
 - curve, 241
 - representation, 242
- partition, 536
- period, 83
- periodic, 83
- pH, 807
- piston, 291
- point
 - inflection, 370
 - interior, 166
 - left end, 166
 - right end, 166
- pressure, 729
- property
 - indefinite, 476
- integrand, 476
- integration
 - constant of, 476
 - factor, 914
 - variable, 476
- intercept
 - x, 24
 - y, 24
- interest
 - continuous compound, 820
- interior, 4, 58
 - points, 4
- intermediate form, 830
- intersection, 10
- interval, 4
 - finite, 4
 - infinite, 4
- inverse, 756
- jerk, 265
- joule, 715
- law
 - Hooke's, 718
- limit
 - left-handed, 146
 - right-handed, 146
 - two-sided, 146
- limits, 99
- linear
 - equations, 25
 - standard approximation, 442
- linearization, 442
- logarithm
 - common, 807
- marginal
 - cost of production, 248
- marginals, 247
- mass
 - center, 702

- Simpson
 - rule, 610
- simulation, 495
- slope, 20
- smooth
 - curve, 675
- snow flake, 299
- solid of revolution, 646
- solution
 - general, 489
 - particular, 489
- speed, 243
- spring constant, 718
- stainless steel, 726
- standard
 - position, 75
- step
 - size, 604
- steps, 604
- subintervals, 536
- sum
 - lower, 539
- summation
 - lower limit, 532
 - upper limit, 532
- tangent, 98
- terms, 532
- theorem
 - mean value, 343
 - Rolle's, 340
 - sandwich, 117
- time constant, 927
- TNT, trinitrotoluene, 455
- torque, 697
 - system, 697
- torus, 661, 745
- transcendental, 753
- intermediate value, 174
- quadrants, 16
- radioactive, 821
- radioactive decay, 821
- radius, 56
- range, 32
- range finder, 312
- real
 - line, 1
 - valued function, 34
 - variables, 34
- recessive, 247
- removabel, 166
- revolution
 - surface, 685
- Richter scale, 807
- Riemann
 - sum, 536
- root, 176
- rule
 - constant multiple, 223
 - Delesse's, 743
 - differential of constant, 221
 - power, 222
 - product, 227
 - quotient, 230
 - reciprocal, 239
 - sum, 224
- search
 - binary, 851
 - sequential, 851
- secant, 97
- sensitive, 246
- sensitivity, 238, 246
- sets, 3

velocity
 average, 241
vertex, 59
voltage
 peak, 583
zero, 176

union, 10
unit
 circle, 74
unit circle, 18
variable
 dummy, 542

- آزادانہ گرنا، 243
- ابتدائی قیمت
مسئلہ، 488
- استمرار
یکساں، 539
- استمراری
بائیں، 168
دائیں، 168
- وقفہ پر، 174
- استمراری توسیع، 173
- اسراع، 243
- اشتراک، 10
- اصول
فہما، 424
- اعداد
حقیقی، 3
غیر ناطق، 3
ناطق، 3
- اعدادی
ترکیب، 929
حل، 929
- افراط زر، 820
- اکائی
دائرہ، 74
اکائی دائرہ، 18
- الٹ، 756
- الجبرائی، 753
- الحوارزم
کمپیوٹر، 851
- انتہا، 329
- انجیو پلاسٹی، 451
- اند رسہ، 661، 745
- اندرون، 4، 58
- اندرونی نقطہ، 4
- اوسط، 522
- حسابی، 353
- ہندسی، 353
- اوسط زندگی
- مرکزہ، 828
- اوسط قیمت، 567
- ایک ایک تفاعل، 754
- ایلا سکا، 291
- بار، 727
- بارودی مواد، 455
- برف
روئی، 299
- برقیہ
خفی، 727
- برداشتا، 348
- برہوتری، 16
- بند، 4
- بیرون، 58
- پیشن، 291
- پیدا کار خطہ، 646
- پتا
رکتر، 807
- فاصلہ، 312
- تابع متغیر، 32
- تایکار، 821
- تایکاری تحلیل، 821
- ترسیم
نقطہ، 246
- ترکیب پولر، 929
- تفاعل
- بڑا ترین عدد صحیح، 42
- شناختی، 756
- عددی صحیح چھت، 42
- عددی صحیح زمین، 42
- کم ترین عدد، 42
- مرکب، 39
- ہڈلولی، 908
- تفرق، 189، 199
- این رتبی، 233
- پہلا، 233
- تین رتبی، 233
- دو رتبی، 233
- دوسرا، 233
- رتبہ اول، 233

- 233 رتبہ دوم،
 قابل، 200
 یک رتبی، 233
 تفرقی
 مساوات، 488
 تفرقی مساوات
 حل، 911
 خطی، 913
 قابل علیحدگی، 912
 معیاری روپ، 913
 یک رتبی، 911
 تفریقی
 وسطی حاصل تقسیم، 275
 تقاطع، 10
 مکمل
 جزو، 914
 غیر قطعی، 476
 قابل، 538
 قطعی، 538
 کا مستقبل، 476
 متغیر، 476
 تکنونی عدم مساوات، 7
 تلاش
 ترتیبی، 851
 تناسب پہلو، 16
 توانائی
 حرکی، 728
 تیزابیت، 807
 ثنائی تلاش، 851
 جاول، 715
 جذر، 176
 جسم طواف، 646
 جفت، 40
 جنیات، 247
 جوڑی دار تعلق، 117
 جھکا، 265
 چین، 247
 حل
 عمومی، 489
 مخصوص، 489
 حد، 99
 بائیں ہاتھ، 146
 دائیں ہاتھ، 146
 دو طرفہ، 146
 حاشیہ، 247
 حاشیہ لاگت، 248
 حاشیہ لاگت پیداوار، 248
 حاصل تقسیم
 تفریقی، 189
 جبریہ ہڈی، 829
 حرارت ناگزیر عمل، 723
 حساس، 246
 حساسیت، 238، 246
 حقیقی
 اعداد، 1
 خط، 1
 قیمت تفاعل، 34
 متغیرات، 34
 خاصیت
 متوسط قیمت، 174
 خانہ بندی، 536
 خطی
 مساوات، 25
 معیاری تخمین، 442
 خط بندی، 442
 خفی
 تفرق، 295
 دائرہ کار، 32
 قدرتی، 35
 دباؤ، 729
 چوٹی، 583
 دوری، 83
 دوری عرصہ، 83
 ڈھلوان، 20، 187
 راس، 59
 ربعات، 16

- عمودی، 298
- غالب، 247، 403
- غلبہ، 403
- غیر متابع متغیر، 32
- غیر معین روپ، 830
- فرمٹ تفریق حاصل تقسیم، 275
- فشار، 729
- فولاد
- بے رنگ، 726
- قابل ہٹاؤ، 166
- قاعدہ
- بالکس متناسب، 239
- تفرق مستقل، 221
- حاصل تقسیم، 230
- حاصل ضرب، 227
- دولس، 743
- طاقت، 222
- مجموعہ، 224
- مستقل مضرب، 223
- قانون
- بک، 718
- قانون العطف
- ابن سہل، 425
- قانون ٹھنڈک
- نیوٹن، 823
- قدم، 604
- لبائی، 604
- قطع
- ایکس، 24
- وائے، 24
- قطعی
- کمل، 538
- قطع مکانی، 20، 59
- قوت مروڑ، 697
- نظام، 697
- کیٹ
- مرکز، 698
- رداس، 56
- رفقار، 243
- رکڑ پیائش، 807
- ریمان
- مجموعہ، 536
- زاویہ میلان، 21
- زنجیری قاعدہ، 277
- سرحد، 4
- سرحدی
- نقطہ، 4
- سطح
- طواف، 685
- سعت، 32
- سگما علامتی اظہار، 532
- سلسلہ، 3
- سمتی رفقار
- اوسط، 241
- سمسن
- قاعدہ، 610
- سود و سود
- مسلسل، 820
- سیکنٹ، 97
- شناختی تقابل، 756
- صفر، 176
- طاق، 41
- طاقت
- ہائیڈروجن، 807
- طواف
- سطح، 685
- عالمگیر، 329
- عدم استمرار
- ارتعاشی، 166
- چھلانگ، 166
- لا متناہی، 166
- عمل انگیز، 438
- خود، 438

- کوسائن 702، کمیت
قاعدہ، 86
کھلا، 4
- گریزی رفتار، 926
گنج غیر ہموار مخنیات، 680
گھٹنا، 348
- لحاتی
شرح تبدیلی، 99
لوگار تھم
عام، 807
لوگار تھمی تفرق، 778
لیم، 909
- ماورائی، 753
مبدأ، 15
متغیر
تقلی، 542
مقابلہ، 397
متکمل، 476
متناہی مجموعہ، 514
مجموعہ
- ارکان، 532
زیریں، 539
مجموعی سلسلہ
اشاری، 532
بالائی حد، 532
زیریں حد، 532
- محد
ایکس، 15
وائے، 15
محدی جوڑی، 16
محدی محور، 15
محور، 59
- طواف، 647
ثبت ایکس، 16
منفی ایکس، 16
محروط مقطوع، 685
مرکز، 56
- مرکز، 538
مساوات
ذہلوان - قطع، 25
عمومی خطی، 25
نقطہ - ذہلوان، 23
مستقل
- اختیاری، 476
شرعی، 817
مستقلہ اسپرنگ، 718
مسئلہ
اوسط قیمت، 343
تچ، 117
پاپس، 744
رول، 340
مطلق قیمت، 6
معیار، 537
معیاری
مقام، 75
مغلوب، 247
مقدار معلوم
ترسیم، 241
روپ، 242
مقررہ نقطہ، 183
مقعر
- اوپر، 368
نیچے، 368
مقیاس پک، 718
ماس، 98، 187
منحنی
کمل، 492
حل، 492
- نصف زاویہ
کلیات، 85
نصف زندگی، 821
نصف کھلا، 4
نظریہ
ابتدی، 211
نقطہ
اندرونی، 166

وقفہ، 4
 ذیلی، 536
 لا قناتی، 4
 قناتی، 4
 ہٹاؤ، 739، 241
 ہموار
 منحنی، 675
 ہوا کی پترا، 617
 ہیلیئم، 320

بائیں سر، 166
 تصریف، 370
 دائیں سر، 166
 نقطہ فاصل، 332
 نقل اتارنا، 495
 وسط، 442
 وسطانی مرکز، 709
 وسیع تفاعل، 173
 وقتی مستقل، 927