

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں تکمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	اختنا، مروڑ اور TNB چھوکت
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقطہ زین
1629	13.8.1	نتیجہ

1641	ا ضمیمہ اول
1643	ب ضمیمہ دوم
1645	ج ضمیمہ تین
1647	د ضمیمہ چار
1649	ه ضمیمہ پانچ
1651	و ضمیمہ چھ
1653	ز ضمیمہ سات
1655	ح ضمیمہ آٹھ
1657	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

مقامی امتحان کی تلاش

سوال 1 تا سوال 30 میں متبادل کے تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے نقاط، مقامی کم سے کم قیمت کے نقاط اور نقاط زین تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

سوال 2: $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

سوال 3: $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

سوال 4: $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$

سوال 5: $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

سوال 6: $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$

سوال 7: $f(x, y) = 5x - 7x^2 + 3x - 6y + 2$

سوال 8: $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$

سوال 9: $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$

سوال 10: $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$

سوال 11: $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

سوال 12: $f(x, y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y$

سوال 13: $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$

سوال 14: $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$

سوال 15: $f(x, y) = x^2 + 2xy$

سوال 16: $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$

سوال 17: $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

سوال 18: $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

سوال 19: $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

سوال 20: $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$

سوال 21: $f(x, y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$

سوال 22: $f(x, y) = 8x^3 + y^3 + 6xy$

سوال 23: $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

سوال 24: $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$

سوال 25: $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

سوال 26: $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

سوال 27: $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

سوال 28: $f(x, y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$

سوال 29: $f(x, y) = y \sin x$

سوال 30: $f(x, y) = e^{2x} \cos y$

مطلقہ انتہا کا تلاش
سوال 31 تا سوال 38 میں تقابل کی مطلقہ انتہا تلاش کریں۔

سوال 31: ربع اول میں بند نکتوں، جس کے سرحد $x = 0$ ، $y = 2$ اور $y = 2x$ ہیں، میں تقابل $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ ہے۔

سوال 32: ربع اول میں بند نکتوں، جس کے اطراف $x = 0$ ، $y = 4$ اور $y = x$ ہیں، میں تقابل $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ ہے۔

سوال 33: ربع اول میں بند نکتوں، جس کے اطراف $x = 0$ ، $y = 0$ اور $y + 2x = 2$ ہیں، میں تقابل $f(x, y) = x^2 + y^2$ ہے۔

- سوال 34: مستطیل پٹی $0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$ پر تفاعل $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ ہے۔
- سوال 35: مستطیل $0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0$ پر تفاعل $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ ہے۔
- سوال 36: مستطیل $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ پر تفاعل $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ ہے۔
- سوال 37: مستطیل $1 \leq x \leq 3, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ پر تفاعل $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$ ہے۔
- سوال 38: تفاعل $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ ، اختلاص $x = 0$ ، $y = 0$ اور $x + y = 1$ میں بند خطہ میں ہے۔

سوال 39: دو ایسے اعداد a اور b ، جہاں $a \leq b$ ہے، تلاش کریں تاکہ درج ذیل کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

$$\int_a^b (6 - x - x^2) dx$$

سوال 40: دو ایسے اعداد a اور b ، جہاں $a \leq b$ ہے، تلاش کریں تاکہ درج ذیل کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

$$\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{1/3} dx$$

- سوال 41: درج حرارت ایک دائری پٹی $x^2 + y^2 \leq 1$ اور اس کی سرحد $x^2 + y^2 = 1$ کو یوں گرم کیا جاتا ہے کہ نقطہ (x, y) پر درج حرارت $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ ہو۔ اس پٹی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درج حرارت تلاش کریں۔
- سوال 42: کھلا رباع اول $x > 0, y > 0$ میں $f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$ کا نقطہ فاصل تلاش کریں اور دکھائیں کہ اس نقطہ پر تفاعل کی قیمت کم سے کم ہو گی۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 43: درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ قیمت کے نقاط، کم سے کم قیمت کے نقاط اور نقاط زین، اگر موجود ہوں، تلاش کریں۔

ا. $f_x = 2x - 4y, f_y = 2y - 4x$

ب. $f_x = 2x - 2, f_y = 2y - 4$

ج. $f_x = 9x^2 - 9, f_y = 2y + 4$

ہر جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 44: درج ذیل تفاعل کے لئے مبدا پر ممیز $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ صفر ہے لہذا دورتی تفرقی پر کھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔ مبدا پر سطح $z = f(x, y)$ کی ذہنی تصویر کشی کرتے ہوئے دریافت کریں کہ مبدا پر زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ، کم سے کم قیمت کا نقطہ یا نقطہ زین پایا جاتا ہے۔ ہر جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x, y) = x^3 y^2 \quad .$$

$$f(x, y) = x^2 y^2 \quad .$$

$$f(x, y) = x^3 y^3 \quad .$$

$$f(x, y) = 1 - x^2 y^2 \quad .$$

$$f(x, y) = x^4 y^4 \quad .$$

$$f(x, y) = xy^2 \quad .$$

سوال 45: دکھائیں کہ k کی ہر قیمت کے لئے $(0, 0)$ تقابل $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ کا نقطہ فاصل ہو گا۔
(اشارہ: دو صورتوں پر غور کریں: $k = 0$ اور $k \neq 0$)

سوال 46: مستقل k کی کن قیمتوں کے لئے دور تہی تفرقی پر کھ ضمانت دیتا ہے کہ $(0, 0)$ پر $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ کا نقطہ زین (ب) مقامی کم سے کم قیمت کا نقطہ پایا جائے گا؟ مستقل k کی کن قیمتوں کے لئے دور تہی تفرقی پر کھ غیر فیصلہ کن ہو گا؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 47: (i) کیا $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ہوتے ہوئے ہر صورت (a, b) پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ یا کم سے کم قیمت کا نقطہ پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (a, b) ہو، ہر نقطہ پر f اور اس کے ایک رتبی اور دور تہی جزوی تفرقات استمراری ہوں، اور $f_{xx}(a, b)$ اور $f_{yy}(a, b)$ کی علامتیں ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب کیا f کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: نقطہ (a, b) پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ ہونے کی صورت میں مسئلہ 13.7 کا دیا گیا ثبوت استعمال کرتے ہوئے اس مسئلہ کو (a, b) پر مقامی کم سے کم قیمت کا نقطہ ہونے کی صورت کے لئے ثابت کریں۔

سوال 49: مستوی $x + 2y + 3z = 0$ سے زیادہ بلندی پر $z = 10 - x^2 - y^2$ کی ترسیم کے تمام نقاط میں وہ نقطہ تلاش کریں جو مستوی سے دور ترین ہو۔

سوال 50: مستوی $x + 2y - z = 0$ سے $z = x^2 + y^2 + 10$ کی ترسیم کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔

سوال 51: بند ربع اول $x \geq 0, y \geq 0$ میں تقابل $f(x, y) = x + y$ کی کوئی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ کیا اس حقیقت میں اور کتاب میں مطلق انتہا کی تلاش پر کی گئی گفتگو میں تضاد پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 52: مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ میں تقابل $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ پر غور کریں۔

ا. دکھائیں کہ اس مربع میں خطی قطع $2x + 2y = 1$ پر f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کم سے کم قیمت کو تلاش کریں۔

ب. مربع پر f کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

مقدار معلوم منحنیات پر انتہائی قیمتیں

منحنی $x = x(t)$, $y = y(t)$ پر تفاعل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کرنے کی خاطر ہم f کو واحد متغیر t کا تفاعل تصور کر کے زنجیری قاعدہ سے $\frac{df}{dt}$ معلوم کر کے صفر کے برابر رکھتے ہیں۔ کسی بھی واحد متغیر تفاعل کی طرح، انتہائی قیمتوں کو درج ذیل نقطوں پر تلاش کیا جاتا ہے۔

ا. نقطہ فاصل پر (جہاں $\frac{df}{dt}$ صفر ہو یا غیر موجود ہو)، اور

ب. مقدار معلوم دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

سوال 53 تا سوال 56 میں تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اور مطلق کم سے کم قیمتیں دی گئی منحنیات پر دریافت کریں۔

سوال 53: تفاعل:

$$f(x, y) = x + y \quad \text{ا.} \quad g(x, y) = xy \quad \text{ب.} \quad h(x, y) = 2x^2 + y^2 \quad \text{ج.}$$

منحنیات:

$$x^2 + y^2 = 4, y \geq 0 \quad \text{ا.} \quad x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{ب.}$$

مقدار معلوم مساوات $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ استعمال کریں۔

سوال 54: تفاعل:

$$f(x, y) = 2x + 3y \quad \text{ا.} \quad g(x, y) = xy \quad \text{ب.} \quad h(x, y) = x^2 + 3y^2 \quad \text{ج.}$$

منحنیات:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0 \quad \text{ا.} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{ب.}$$

مقدار معلوم مساوات $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ استعمال کریں۔

سوال 55: تفاعل: $f(x, y) = xy$ منحنیات:

$$x = 2t, y = t + 1, 0 \leq t \leq 1 \quad \text{ج.}$$

$$x = 2t, y = t + 1 \quad \text{ا.}$$

$$x = 2t, y = t + 1, -1 \leq t \leq 0 \quad \text{ب.}$$

سوال 56: تفاعل:

$$g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{ب.}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{ا.}$$

منحنیات:

$$x = t, y = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 0 \quad \text{ب.}$$

$$x = t, y = 2 - 2t \quad \text{ا.}$$

کمتر مربع اور خطوط رجعت

اعدادی نقاط مواد $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ پر سیدھا خط $y = mx + b$ بٹھاتے ہوئے ہم نقطوں سے خط تک افقی فاصلوں کے مربع کے مجموعہ کو کم سے کم رکھتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں m اور b کی وہ قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی جو درج ذیل کی قیمت کم سے کم کرتے ہوں۔

$$(13.52) \quad w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \dots + (mx_n + b - y_n)^2$$

ایک رتی اور دو رتی تقریبی پرکھ سے m اور b کی مطلوبہ قیمتیں

$$(13.53) \quad m = \frac{(\sum x_k)(\sum y_k) - n \sum x_k y_k}{(\sum x_k)^2 - n \sum x_k^2}$$

$$(13.54) \quad b = \frac{1}{n} (\sum y_k - m \sum x_k)$$

حاصل ہوتی ہیں جہاں تمام مجموعے $k = 1$ تا $k = n$ لئے گئے ہیں۔ عموماً کیکولیئر میں یہ کلیات دیے گئے ہوں گے۔

وہ خط $y = mx + b$ جس میں m اور b کی مذکورہ بالا قیمتیں استعمال کی گئی ہوں زیر غور مواد کا خط رجعت⁴⁸ کہلاتا ہے۔ کمتر مربعی خط کی مدد سے (i) آپ مواد کو ایک سادہ مساوات سے ظاہر کر پاتے ہیں، (ب) متغیر x کی دیگر قیمتوں کے لئے y کی قیمت کی پیش گوئی کر پاتے ہیں، (ج) اور مواد پر تحلیلی غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر نقاط $(0, 1)$ ، $(1, 3)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 4)$ ، $(4, 5)$ کو جدول

$x_k y_k$	x_k^2	y_k	x_k	k
0	0	1	0	1
3	1	3	1	2
4	4	2	2	3
12	9	4	3	4
20	16	5	4	5
39	30	15	10	Σ

کی صورت میں لکھ کر

$$m = \frac{(10)(15) - 5(39)}{(10)^2 - 5(30)} = 0.9 \quad \text{مساوات 13.53}$$

$$b = \frac{1}{5}(15 - (0.9)(10)) = 1.2 \quad \text{مساوات 13.54}$$

حاصل ہوں گے۔ یوں ان نقاط مواد کا خط رجعت $y = 0.9x + 1.2$ ہو گا۔

سوال 57 تا سوال 60 میں مساوات 13.53 اور مساوات 13.54 استعمال کرتے ہوئے ہر نقطہ مواد کے لئے خط رجعت تلاش کریں۔ یوں حاصل خطی مساوات استعمال کرتے ہوئے $x = 4$ کے لئے y کی قیمت کی پیش گوئی کریں۔

سوال 57: $(-1, 2), (0, 1), (3, -4)$

سوال 58: $(-2, 0), (0, 2), (2, 3)$

سوال 59: $(0, 0), (1, 2), (2, 3)$

سوال 60: $(0, 1), (2, 2), (3, 2)$

سوال 61: جدول 13.1 میں پانی کی مقدار (گہرائی) بالمقابل لوسن کی اوسط پیداوار (کلوگرام فی ایکڑ) دی گئی ہے۔ اس کی خطی مساوات تلاش کریں۔ اس مواد کو اور خطی مساوات کو ترسیم کریں۔

سوال 62: مربع پڑ گڑھے

ایک نظریہ کہتا ہے کہ گڑھوں کی تعدد قطر کے مربع کی بالعکس متناسب ہوگی۔ مربع کی سطح کی تصویر سے جدول 13.1 ب میں دی گئی معلومات حاصل کی جاتی ہے۔ اس مواد پر $F = m(1/D^2) + b$ طرز کی لکیر بٹھائیں۔ مواد اور اس لکیر کو ترسیم کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 63 تا سوال 68 میں تفاعل پر غور کرتے ہوئے ان کے مقامی انتہائی نقاط تلاش کرنا مقصود ہے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

(ب) مریخ پر گڑھے		
تعداد	جماعتی وقفہ کی بایاں قیمت کے لئے	قطر D [km]
F	$\frac{1}{D^2}$	
51	0.001	32 – 45
22	0.0005	45 – 64
14	0.00024	64 – 90
4	0.000123	90 – 128

(i) لوسن کی پیداوار	
پانی کی گہرائی x , [cm]	فی ایکڑ پیداوار y , [kg]
30	5270
45	5680
60	6250
75	7210
90	8200
100	8710

ا. دیے گئے مستطیل پر تفاعل ترسیم کریں۔

ب. مستطیل میں چند ہم قد منحنيات ترسیم کریں۔

ج. تفاعل کا ایک رتبی تفرق لے کر کمپیوٹر کی مدد سے اس مساوات کو حل کر کے نقاط فاصل تلاش کریں۔ نقاط فاصل اور ہم قد منحنيات کے بیچ کیا تعلق نظر آتا ہے؟ کون سے نقاط فاصل پر نقاط زین پائے جاتے ہیں؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

د. تفاعل کے دو رتبی تفرقات تلاش کر کے میسر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ معلوم کریں۔

ه. زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم پر کھ استعمال کرتے ہوئے جزو-ج کے نقاط فاصل کی جماعت بندی کریں۔ کیا یہ معلومات آپ کی جزو-ج میں دی گئی وجوہات سے مطابقت رکھتی ہے۔

سوال 63: $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$, $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$

سوال 64: $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$

سوال 65: $f(x, y) = x^4 + y^2 - 8x^2 - 6y + 16$, $-3 \leq x \leq 3$, $-6 \leq y \leq 6$

سوال 66: $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3$, $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

سوال 67: $f(x, y) = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 30xy^2 - 120x^3$, $-4 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 2$

سوال 68:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^5 \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq 2$$

جوابات

حصہ 13.8 صفحہ 1631

(37) $(2, 0)$ پہ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 جبکہ $(3, -\frac{\pi}{4})$

، $(3, \frac{\pi}{4})$ ، $(1, -\frac{\pi}{4})$ اور $(1, \frac{\pi}{4})$ پہ مطلق کم

سے کم قیمت $(\frac{3\sqrt{2}}{2})$

$a = -3, b = 2$ (39)

(41) $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ اور $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ پہ گرم ترین

2.25°C جبکہ $(\frac{1}{2}, 0)$ پہ سرد ترین -0.25°C

(43) (i) $f(0, 0)$ نقطہ زین، (ب) $f(1, 2)$ مقامی کم سے کم

قیمت نقطہ، (ج) $f(1, -2)$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ، (د)

$f(-1, -2)$ نقطہ زین

(49) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36})$

(53) (i) نصف دائرہ: $t = \frac{\pi}{4}$ پہ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت

$f = 2\sqrt{2}$ جبکہ $t = \pi$ پہ مقامی کم سے کم قیمت

$f = -2$ ؛ چوتھائی دائرہ: $t = \frac{\pi}{4}$ پہ مقامی زیادہ سے

زیادہ قیمت $f = 2\sqrt{2}$ جبکہ $t = 0$ اور $t = \frac{\pi}{2}$ پہ

مقامی کم سے کم قیمت $f = 2$ (ب) نصف دائرہ: $t = \frac{\pi}{4}$

پہ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $g = 2$ جبکہ $t = \frac{3\pi}{4}$

مقامی کم سے کم قیمت $g = -2$ ؛ چوتھائی دائرہ: $t = \frac{\pi}{4}$

پہ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $g = 2$ جبکہ $t = 0$ اور

$t = \frac{\pi}{2}$ پہ مقامی کم سے کم قیمت $g = 0$ ؛ (ج) نصف

دائرہ: $t = 0$ اور $t = \pi$ پہ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت

$h = 8$ جبکہ $t = \frac{\pi}{2}$ پہ کم سے کم قیمت $h = 4$ ؛

چوتھائی دائرہ: $t = 0$ پہ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $h = 8$

جبکہ $t = \frac{\pi}{2}$ پہ مقامی کم سے کم قیمت $h = 4$

(55) (i) $t = -\frac{1}{2}$ پہ کم سے کم قیمت $f = -\frac{1}{2}$ جبکہ کوئی

زیادہ سے زیادہ قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ (ب) $t = -1$ اور

$t = -\frac{1}{2}$ جبکہ $f = 0$ زیادہ سے زیادہ $t = 0$

پہ کم سے کم $f = -\frac{1}{2}$ پائی جاتی ہے۔ (ج) $t = 1$ پہ

(1) $f(-3, -3) = -5$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ

(3) $f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 0$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ

(5) $f(-2, 1)$ نقطہ زین

(7) $f(\frac{6}{5}, \frac{69}{25})$ نقطہ زین

(9) $f(2, 1)$ نقطہ زین

(11) $f(2, -1) = -6$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ

(13) $f(1, 2)$ نقطہ زین

(15) $f(0, 0)$ نقطہ زین؛

(17) $f(0, 0) = \frac{170}{27}$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ

(19) $f(0, 0) = 0$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ؛ $f(1, -1)$

(21) $f(0, 0)$ نقطہ زین؛ $f(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}) = -\frac{64}{81}$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ

(23) $f(0, 0) = -12$ نقطہ زین؛ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ؛ $f(-2, 0) = -4$ مقامی زیادہ سے زیادہ

قیمت نقطہ؛ $f(-2, -2)$ نقطہ زین

(25) $f(0, 0) = 2$ نقطہ زین؛ $f(1, 1)$ ،

$f(-1, -1) = 2$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ

(27) $f(0, 0) = -1$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ

(29) $f(n\pi, 0) = 0$ نقطہ زین؛ n پہ $f(n\pi, 0) = 0$

(31) $(0, 0)$ پہ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 1 جبکہ $(1, 2)$ پہ

مطلق کم سے کم قیمت -5

(33) $(0, 2)$ پہ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 جبکہ $(0, 0)$ پہ

مطلق کم سے کم قیمت 0

(35) $(0, -3)$ پہ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 11 جبکہ

$(4, -2)$ پہ مطلق کم سے کم قیمت -10

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{20}{13}x + \frac{9}{13}, \quad y|_{x=4} = -\frac{71}{13} \quad (57) \\
 y &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}, \quad y|_{x=4} = \frac{37}{6} \quad (59) \\
 y &= 51.3x + 3467 \quad (61)
 \end{aligned}$$

زیادہ سے زیادہ $f = 4$ جبکہ $t = 0$ کم سے کم قیمت
 $f = 0$ پائی جاتی ہے۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

