احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز

جس تسلسل کے اجزاء یک بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں کو بدلتا تسلسل[32] کہتے ہیں جس کی تین مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots \tag{9.17}$$

$$-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n4}{2^n}+\cdots \tag{9.18}$$

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+(-1)^{n+1}n+\cdots \tag{9.19}$$

ہم جلد دیکھیں گے کہ مساوات 9.17 میں دیا گیا تسلسل، جس کو بدلتا ہارمونی تسلسل[33] کہتے ہیں، مرتکز ہے۔ مساوات 9.18 میں نسبت $r=-\frac{1}{2}$ کا ہندسی تسلسل دیا گیا ہے جو $\frac{-2}{1+(1/2)}=-\frac{4}{3}$ پر مرکوز ہے۔ مساوات 9.19 کا n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ہم بدلتا ہارمونی تسلسل کا ارتکاز ثابت کرنے کے لئے بدلتا تسلسل پرکھ استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.8: بدلتا تسلسل پرکھ (مسئلہ لیبنٹز)
اگر تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

درج ذیل تینوں شرائط کو مطمئن کرتا ہو تب یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

ا. تمام u_n مثبت ہوں،

ب. تمام $n\geq N$ کے لئے $u_n\geq u_{n+1}$ ہو، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے،

ج. $u_n\to 0$

---

[32] alternating series

[33] alternating harmonic series

ثبوت: جفت n ، مثلاً $n = 2m$ ، کی صورت میں ابتدائی n اجزاء کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \end{aligned}$$

پہلی مساوات میں قوسین میں بند قیمتیں مثبت یا صفر ہیں لہٰذا s_{2m} درحقیقت m غیر منفی اجزاء کا مجموعہ ہو گا۔ یوں $s_{2m+2} \geq s_{2m}$ ہو گا اور تسلسل $\{s_{2m}\}$ غیر گھٹتا ہو گا۔ دوسری مساوات کے تحت $s_{2m} \leq u_1$ ہو گا۔ چونکہ $\{s_{2m}\}$ غیر گھٹتا اور اوپر سے محدود تسلسل ہے لہٰذا اس کا حد

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m} = L \tag{9.20}$$

موجود ہو گا۔

اگر n طاق ہو، مثلاً $n = 2m + 1$ ، تب ابتدائی n اجزاء کا مجموعہ $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$ ہو گا۔ چونکہ $u_n \to 0$ ہے لہٰذا

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

ہو گا اور $m \to \infty$ کرتے ہوئے

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L \tag{9.21}$$

ہو گا۔ مساوات 9.20 اور مساوات 9.21 ملا کر $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ دیتے ہیں (سوال 53)۔

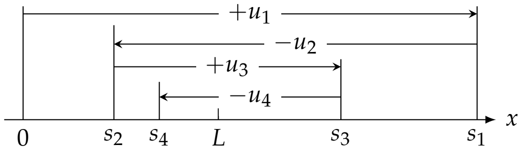
□

مثال 9.40: بدلتا ہارمونی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

مسئلہ 9.8 کے تینوں شرائط کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ □

مسئلہ 9.8 کے تینوں شرائط کو $N = 1$ کے لئے مطمئن کرتے ہوئے بدلتے ہارمونی تسلسل کے جزوی مجموعوں کی ترسیم (شکل 9.22) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ اپنی حد L تک کیسے پہنچتا ہے۔ محور x کے مبدا سے شروع کرتے ہوئے ہم $s_1 = u_1$ فاصلہ طے کرتے ہیں۔ $s_2 = u_1 - u_2$ تک پہنچنے کی خاطر ہم یہاں سے الٹ رخ u_2 چلتے ہیں۔ چونکہ $u_2 \leq u_1$ ہے لہٰذا ہم مبدا کی دوسری جانب نہیں جائیں گے۔ ہم اسی طرح آگے پیچھے چلتے رہتے ہیں۔ ہر $n \geq N$ قدم پر $u_{n+1} < u_n$ کی بنا ہمارا قدم گزشتہ قدم سے چھوٹا یا اس کے برابر ہو گا۔ چونکہ n بڑھانے سے n واں جزو صفر تک پہنچتا ہے لہٰذا ہر اگلا قدم چھوٹا ہوتا جائے گا اور ہم حد L کی ایک جانب



شکل 9.22: اس بدلتے تسلسل کے جزوی مجموعات جو $N = 1$ کے لئے مسئلہ 9.8 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

اور دوسری جانب قدم رکھتے ہوئے L کے نزدیک تر ہوتے جائیں گے۔ یک بعد دیگرے ہر دو مجموعوں s_n اور s_{n+1} کے بیچ حد L پایا جائے گا لہٰذا حد اور s_n میں فرق u_{n+1} سے کم ہو گا۔

درج ذیل کی بنا ہم مرتکز بدلتے تسلسل کے مجموعات کی قیمت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔

$$|L - s_n| < u_{n+1} \qquad\qquad n \geq N$$

مسئلہ 9.9: بدلتے تسلسل کا مسئلہ اندازہ
اگر بدلتا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ مسئلہ 9.8 کے تین شرائط مطمئن کرتا ہو تب $n \geq N$ کے لئے تسلسل کا مجموعہ L تخمیناً

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n$$

ہو گا جس میں مطلق خلل کی قیمت u_{n+1} سے کم ہو گی جو پہلے غیر مستعمل جزو کی عددی قیمت ہے۔ مزید باقی $L - s_n$ کی علامت وہی ہو گی جو پہلی غیر مستعمل جزو کی علامت ہو۔

مثال 9.41: ہم مسئلہ 9.9 درج ذیل تسلسل پر لاگو کرتے ہیں جس کا مجموعہ ہم جانتے ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}\bigg| + \frac{1}{256} - \cdots$$

یہ مسئلہ کہتا ہے کہ تسلسل کے آٹھ اجزاء لینے سے ہم مثبت مقدار رد کرتے ہیں جس کی قیمت $\frac{1}{256}$ سے کم ہو گی۔ ابتدائی آٹھ اجزاء کا مجموعہ $0.664\,062\,5$ ہے۔ اس تسلسل کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

مجموعہ اور تخمینی قیمت میں فرق $\frac{2}{3} - 0.664\,062\,5 = 0.002\,604\,166\,6$ ہے جو مثبت اور $\frac{1}{256} = 0.003\,906\,25$ سے کم ہے۔ $\square$

مطلق ارتکاز

تعریف: تسلسل $\sum a_n$ اس صورت مطلق مرتکز[34] ہو گا جب مطلق قیمتوں کا مطابقتی تسلسل $\sum |a_n|$ مرتکز ہو۔

□

ہندسی تسلسل

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

مطلق مرتکز ہے چونکہ مطابقتی مطلق قیمتوں کا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

بدلتا ہارمونی تسلسل مطلق مرتکز نہیں ہے چونکہ مطابقتی مطلق قیمتوں کا تسلسل (منفرج) ہارمونی تسلسل ہے۔

تعریف: جو تسلسل مرتکز ہو مگر مطلق مرتکز نہ ہو مشروط مرتکز[35] کہلاتا ہے۔

□

بدلتا ہارمونی تسلسل مشروط مرتکز ہے۔

مطلق ارتکاز دو وجوہات کی بنا اہم ہے۔ پہلی وجہ یہ ہے کہ ہمارے پاس مثبت اجزاء کے تسلسل کی ارتکاز کا اچھے پرکھ ہیں۔ دوسری وجہ یہ کہ کہ مطلق مرتکز تسلسل ہر صورت مرتکز ہو گا۔ یہی اگلے مسئلہ کا موضوع ہے۔

مسئلہ 9.10: مطلق ارتکاز پرکھ
اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو گا۔

ثبوت: ہر n کے لئے

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n| \quad \implies \quad 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

---

[34] absolutely convergent
[35] conditional convergent

ہو گا۔ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$ مرتکز ہو گا اور بلا واسطہ تقابلی پرکھ کے تحت غیر منفی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$$

بھی مرتکز ہو گا۔ ہم مساوات $a_n=(a_n+|a_n|)-|a_n|$ کی مدد سے $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ کو دو مرتکز تسلسل کا فرق

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|-|a_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مرتکز ہو گا۔

□

ہم مسئلہ 9.10 کو یوں بھی پڑھ سکتے ہیں کہ ہر مطلق مرتکز تسلسل مرتکز ہو گا البتہ ضروری نہیں ہے کہ مرتکز تسلسل مطلق مرتکز ہو۔

مثال 9.42: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$ کا مطابقتی مثبت اجزاء کا تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

ہے جو مرتکز ہے۔یوں اصل تسلسل اس لئے مرتکز ہے کہ یہ مطلق مرتکز ہے۔ □

مثال 9.43: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{4}+\frac{\sin 3}{9}+\cdots$ کا مطابقتی مثبت اجزاء کا تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|=\frac{|\sin 1|}{1}+\frac{|\sin 2|}{4}+\frac{|\sin 3|}{9}+\cdots$$

جس کا ارتکاز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کے ساتھ موازنہ کرنے سے دیکھا جا سکتا ہے جہاں ہر n کے لئے $|\sin n|\leq 1$ ہو گا۔ چونکہ اصل تسلسل مطلق مرتکز ہے، لہٰذا یہ مرتکز ہو گا۔ □

مثال 9.44: بدلتا p تسلسل
مثبت مستقل p کی صورت میں ترتیب $\{\frac{1}{n^p}\}$ گھٹتا ترتیب ہے جس کا حد صفر ہے۔ یوں بدلتا p تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots,\quad p>0$$

مرتکز ہو گا۔

اگر $p > 1$ ہو تب یہ مطلق مرتکز تسلسل ہو گا۔ اگر $p \leq 1$ ہو تب یہ مشروط مرتکز تسلسل ہو گا۔

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \qquad \text{مشروط مرتکز}$$

$$1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots \qquad \text{مطلق مرتکز}$$

□

تسلسل کی ترتیب نو

مسئلہ 9.11: مطلق مرتکز تسلسل کا مسئلہ ترتیب نو

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلق مرتکز ہو اور ترتیب $\{a_n\}$ کے اجزاء کی ترتیب نو کر کے انہیں $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ لکھا جائے تب $\sum b_n$ مطلق مرتکز ہو گا اور درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

مثال 9.45: ہم نے مثال 9.42 میں دیکھا کہ تسلسل

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

مطلق مرتکز ہے۔ اس کی ترتیب نو کرتے ہوئے ابتدائی جزو مثبت اور اس کے بعد دو منفی اجزاء منتخب کیے جا سکتے ہیں۔ اس کے بعد تین مثبت اور چار منفی اجزاء منتخب کیے جا سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ایک ہی علامت کے k اجزاء کے بعد الٹ علامت کے $k+1$ اجزاء ہوں گے۔ ایسے تسلسل کے ابتدائی دس اجزاء درج ذیل ہوں گے۔

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \cdots$$

مسئلہ ترتیب نو کے تحت دونوں تسلسل ایک ہی عدد پر مرتکز ہوں گے۔ اس مثال میں (اگر ہم جانتے کہ ایسا ممکن ہے) ہم خوشی سے دوسرے تسلسل کی جگہ پہلا تسلسل استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس سے بھی بہتر ہوتا اگر ہم جانتے کہ ان دونوں تسلسل کا مجموعہ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

□

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم