

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ذوزنقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
685	6.6	سطح طواف کا رقبہ
697	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
709	6.7.1	وسطانی مرکز
714	6.8	کام
729	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
738	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
753	7	ماورائی تفاعل
753	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

759

ا ضمیمہ اول

761

ب ضمیمہ دوم

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 7

ماورائی تفاعل

ریاضیات میں بہت سے تفاعل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔ غالباً سب سے زیادہ جانی پہچانی الٹ تفاعل کی جوڑی $\ln x$ اور e^x ہے۔ موزوں وقفہ پر پابند تکنیکی تفاعل کے اہم الٹ پائے جاتے ہیں۔ اسی طرح لوگار تھمی اور قوت نمائی تفاعل کے دیگر الٹ جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ بذلولی تفاعل اور ان کے الٹ تفاعل کا استعمال آویزاں رسی، منتقلی حرکی توانائی، اور ہوا میں گرتے ہوئے جسم پر قوت رگڑ کے مسائل میں کام آتے ہیں۔ اس باب میں ان تمام تفاعل پر غور کیا جائے گا۔ ان مسئلوں کا بھی ذکر کیا جائے گا جنہیں یہ تفاعل حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

اس حصہ میں ہم الٹ تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں اور ان کی کلیات، ترسیمات، اور الٹ جوڑیوں کے تفرق پر غور کرتے ہیں۔

ایک ایک تفاعل

تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو اپنی دائرہ کار کے ہر نقطہ کو اپنی سعت میں ایک قیمت مختص کرتا ہو۔ بعض تفاعل ایک ہی قیمت کو ایک سے زیادہ نقطوں کے لئے مختص کرتے ہیں۔ یوں -1 کا مربع اور 1 کا مربع 1 ہے؛ اسی طرح $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ اس کے برعکس دیگر تفاعل کسی ایک قیمت کو کبھی بھی دو بار مختص نہیں کرتے ہیں۔ مختلف اعداد کے جذر المربع اور جذر الکعب ہر صورت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔ ایسا تفاعل جس کے انفرادی نقطوں پر منفرد قیمت ہو کو ایک ایک تفاعل¹ کہتے ہیں۔

¹ one to one function

تعریف: دائرہ کار D پر تفاعل $f(x)$ تب ایک ایک ہوگا جب $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $f(x_1) \neq f(x_2)$ ہو۔

□

مثال 7.1: چونکہ کسی بھی غیر منفی اعداد کے لئے $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ ہے لہذا $f(x) = \sqrt{x}$ غیر منفی اعداد کے کسی بھی دائرہ کار پر یہ ایک ایک تفاعل ہے۔

□

مثال 7.2: چونکہ $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ ہے لہذا وقفہ $[0, \pi]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل نہیں ہے۔ اس کے برعکس چونکہ ربع اول میں تمام زاویوں کے سائن مختلف ہیں لہذا وقفہ $[0, \frac{\pi}{2}]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل ہے۔

□

ایک ایک تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے۔ اگر کسی تفاعل کی ترسیم کسی افقی لکیر کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہو تب یہ تفاعل y کی اس قیمت کو ایک سے زیادہ مرتبہ اختیار کرتا ہے لہذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہوگا۔

افقی لکیر کا پرکھ

کوئی بھی تفاعل $y = f(x)$ صرف اور صرف اس صورت میں ایک ایک تفاعل ہوگا جب اس کی ترسیم ہر افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہو۔

الٹ

چونکہ ایک ایک تفاعل کا ہر خارج انفرادی مداخل سے آتا ہے لہذا ایک ایک تفاعل کو الٹ کرتے ہوئے ہر خارج کو واپس اس مداخل پر بھیجا جا سکتا ہے جس سے یہ خارج حاصل ہوتا ہے۔ ایک ایک تفاعل f کو الٹ کر کے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اس کو f کا الٹ² کہتے ہیں جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں f^{-1} میں -1 کو طاقت نہ سمجھا جائے: یعنی $f^{-1}(x)$ سے مراد $\frac{1}{f(x)}$ نہیں ہے۔ ہم f^{-1} کو "ف کا الٹ" پڑھتے ہیں۔

جیسا شکل سے ظاہر ہے، f سے f^{-1} یا f^{-1} سے f حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی x کے لئے $f(x)$ حاصل کر کے اس $f(x)$ کا الٹ $f^{-1}(f(x))$ حاصل کیا جاسکتا ہے جو x ہوگا۔ تفاعل $f^{-1}(f(x))$ یا تفاعل $f(f^{-1}(x))$ میں x پر کرنے سے واپس x ملتا ہے۔ ایسا تفاعل جو ہر عدد کو اسی عدد کے لئے منحصر کرتا ہو شناختی تفاعل³ کہلاتا ہے۔ یوں تفاعل f اور g کو ایک دوسرے کا الٹ تفاعل ہونے کے لئے پرکھا جاسکتا ہے۔ اگر $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ ہو تب f اور g ایک دوسرے کے الٹ تفاعل ہوں گے ورنہ یہ ایک دوسرے کے الٹ تفاعل نہیں ہوں گے۔ اگر f اپنے دائرہ کار کا مکعب لیتا ہو تب g اس صورت میں f کا الٹ ہوگا اگر g جذر الکعب لیتا ہو ورنہ یہ f کا الٹ نہیں ہوگا۔

inverse²
identity function³

تفاعل f اور g ایک دوسرے کے الٹ صرف اور صرف اس صورت ہوں گے جب

$$f(g(x)) = x \quad \text{اور} \quad g(f(x)) = x$$

ہوں۔ ایسی صورت میں $g = f^{-1}$ اور $f = g^{-1}$ ہوں گے۔

ایک تفاعل کا الٹ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب یہ ایک ایک تفاعل ہو۔ یوں بڑھتے تفاعل کا الٹ تفاعل ہو گا اور گھٹتے تفاعل کا بھی الٹ تفاعل ہو گا۔ جن تفاعل کا تفرق مثبت ہو وہ اپنے دائرہ کار میں بڑھتے ہیں لہذا ان کا الٹ ہو گا (صفحہ 348 پر مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3)۔ اسی طرح جن تفاعل کا تفرق منفی ہو وہ اپنے دائرہ کار میں گھٹتے ہیں لہذا ان کا الٹ ہو گا۔

الٹ کی تلاش

تفاعل کے الٹ کی ترسیم کا تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ فرض کریں ایک تفاعل کی ترسیم شکل کی طرح بڑھتا ہو، یعنی یہ بائیں سے دائیں اوپر اٹھتی ہو۔ کسی بھی x کے لئے ترسیم سے قیمت پڑھنے کے لئے ہم محور x پر نقطہ x سے شروع ہو کر محور y کے متوازی چل کر ترسیم تک پہنچتے ہیں اور یہاں سے محور x کے متوازی چل کر محور y تک پہنچ کر تفاعل کی قیمت y پڑھتے ہیں۔ ہم اس عمل کو الٹ کرتے ہوئے y سے شروع کرتے ہوئے x پڑھ سکتے ہیں۔

تفاعل f کی ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم f^{-1} کی ترسیم میں مداخلت خارج جوڑیوں کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ اس ترسیم کو عمومی طرز پر دکھانے کی خاطر ہمیں ان جوڑیوں کا 45° کی کثیر $y = x$ میں عکس لینا ہو گا اور ساتھ ہی حرف x اور حرف y کا ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کرنا ہو گا۔ یوں غیر تابع متغیر، جس کو اب x کہتے ہیں، افقی محور پر دکھایا جائے گا اور تابع متغیر، جس کو اب y کہتے ہیں، کو انتہائی محور پر دکھایا جائے گا۔ تفاعل $f(c)$ اور $f^{-1}(x)$ کی ترسیمات کثیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

شکل میں f^{-1} کو متغیر x کا تفاعل لکھنا دکھانا گیا ہے جس کو درج ذیل بیان کیا جاسکتا ہے۔

ا. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لئے حل کریں۔ یوں x کو y کی صورت میں لکھا جائے گا۔

ب. جزو-1 میں حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کریں۔ یوں حاصل کلیہ $y = f^{-1}(x)$ ہو گا۔

مثال 7.3: تفاعل $y = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ حاصل کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

حل: قدم 1: x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

$$2y = x + 2$$

$$x = 2y - 2$$

قدم ب: حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = 2x - 2$$

یوں تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ تفاعل $f^{-1}(x) = 2x - 2$ ہو گا۔

اس کی تصدیق کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ آیا دونوں مرکب تفاعل شناختی تفاعل دیتے ہیں:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

□

مثال 7.4: تفاعل $y = x^2, x \geq 0$ کا الٹ تلاش کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

حل: قدم ا: دیے گئے مساوات کو حل کر کے x کو y کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$x \geq 0 \text{ کی بنا پر } |x| = x \text{ ہو گا}$$

قدم ب: جزو-۱ میں حاصل نتیجہ میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = \sqrt{x}$$

یوں تفاعل $y = x^2, x \geq 0$ کا الٹ $y = \sqrt{x}$ ہو گا۔

یہاں دھیان رہے کہ پابند تفاعل $y = \sqrt{x}, x \geq 0$ ایک ایک تفاعل ہے لہذا اس کا الٹ پایا جاتا ہے جبکہ تفاعل $y = x^2$ ایک غیر پابند تفاعل ہے جو ایک ایک تفاعل نہیں ہے لہذا اس کا الٹ نہیں پایا جاتا ہے۔

□

کمپیوٹر کا استعمال

تفاعل $y = f(x)$ کا الٹ تفاعل نہایت آسانی سے درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے ترسیم کیا جاسکتا ہے۔

$$x(t) = f(t), \quad y(t) = t$$

آپ تفاعل اور تفاعل کے الٹ کو ساتھ ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں:

$$x_1(t) = t, \quad y_1(t) = f(t)$$

تفاعل

$$x_2(t) = f(t), \quad y_2(t) = t$$

تفاعل کا الٹ

اس سے بھی زیادہ بہتر ہو گا کہ تفاعل، تفاعل کا الٹ اور شناختی تفاعل $y = x$ کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں جہاں شناختی تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = t \quad \text{شناختی تفاعل}$$

تفاعل $y = \frac{x^5}{x^2+1}$ اور $y = x + \cos x$ کے ساتھ ان کے الٹ تفاعل اور شناختی تفاعل ایک ساتھ ترسیم کر کے دیکھیں۔ ترسیم میں x اور y محور کے اکائی فاصلے برابر نظر آنے چاہیے تاکہ کلیئر $y = x$ کے لحاظ سے تفاعل اور اس کا الٹ تشاکلی نظر آئیں۔

قابل تفرق تفاعل کے الٹ کے تفرق

تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ اور اس کے الٹ $f^{-1}(x) = 2x - 2$ (مثال 7.3) کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \\ \frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2 \end{aligned}$$

یہ تفرقات ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہیں۔ تفاعل f کی ترسیم کلیئر $y = \frac{x}{2} + 1$ اور f^{-1} کی ترسیم کلیئر $y = 2x - 2$ ہے۔ ان کلیئروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہیں۔

یہ نتیجہ کسی مخصوص تفاعل کے لئے نہیں ہے۔ کلیئر $y = x$ میں کسی بھی غیر افقی یا غیر انتظامی کلیئر کے عکس کا ڈھلوان اس کلیئر کے ڈھلوان کے بالعکس متناسب ہو گا۔ یوں اگر دیے گئے کلیئر کا ڈھلوان $m \neq 0$ ہو تب منعکس کلیئر کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہو گا۔

تفاعل اور اس کے الٹ کے ڈھلوانوں کا بالعکس متناسب تعلق دیگر تفاعل کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ اگر نقطہ $(a, f(a))$ پر $y = f(x)$ کا ڈھلوان $f'(a) \neq 0$ ہو تب مطابقتی نقطہ $(f(a), a)$ پر $y = f^{-1}(x)$ کا ڈھلوان $\frac{1}{f'(a)}$ ہو گا۔ یوں $f(a)$ پر f^{-1} کا تفرق a پر f کے تفرق کا بالعکس متناسب ہو گا۔ یہ تعلق اس صورت درست ہو گا جب f درج ذیل مسئلہ میں پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط اعلیٰ احصاء سے حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 7.1: الٹ تفاعل کے تفرق کا قاعدہ

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

