

احصاء اور تحليلي علم الهندسه

(جلد اول)

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامسٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
862	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	بدلولی تفاعل	7.10
900	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نکتہ بنائی بدل	
986	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1003	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا کتابی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1220	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1230	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274	10.6	قطبی محدود
1286	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301	10.8.1	دائرے
1315	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329	11.1	مستوی میں سمتیات
1345	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353	11.2.1	کرہ
1363	11.3	ضرب نقطہ
1364	11.3.1	حساب
1378	11.4	صلیبی ضرب
1393	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1478	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1499	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530	13.2	حد اور استمرار
1545	13.3	جزوی تفرقات
1562	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579	13.5	زنجیری قاعدہ
1594	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631	13.8.1	نتیجہ
1640	13.9	لیگرینج ضاربین
1657	13.10	کلیہ نیلر

1665	14 تکمل بالکثرت
1665	14.1 دوہرا نکملات
1685	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701	14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712	14.4 کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727	14.5 تعین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756	14.7 نکملات بالکثرت میں بدل
1771	15 سستی میدان میں تکمل
1771	15.1 لکیری تکمل
1774	15.1.1 جمع پذیری
1778	15.2 سستی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ
1789	جوابات
1853	ا ضمیمہ اول
1855	ب ضمیمہ دوم
1857	ج ضمیمہ تین
1859	د ضمیمہ چار
1861	ه ضمیمہ پانچ
1863	و ضمیمہ چھ
1865	ز ضمیمہ سات
1867	ح ضمیمہ آٹھ
1869	ط ضمیمہ آٹھ
1871	ی نکملات کا مختصر جدول

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

15.2 سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ اور بہاؤ

ان طبعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر نکلات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر نکلات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لئے درکار کام اس طرح کے نکلات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات عبور کرتا ہوا سیال کے بہاؤ کی شرح بھی لکیری نکلات سے حاصل کی جاتی ہے۔

سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر سمتی میدان² سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ یہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

استمراری جزوی تفاعل M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کا سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کی ہمراہ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر سے ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر سے ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے تاکہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب 12) کے لئے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبداء پر رکھا جاتا ہے جبکہ اس کا سر سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

میدان ڈھلوان

تعریف: قابل تفرق تفاعل $f(x, y, z)$ کے میدان ڈھلوان³ سے مراد سمتیات ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

کا میدان ہے۔

vector field²
gradient field³

□

مثال 15.5: تقابل $f(x, y, z) = xyz$ کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

□

حل: تقابل f کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان $F = \nabla f = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

فضا میں منحنی کی ہمراہ قوت کا کام

فرض کریں فضا کے ایک خطے میں سمتی میدان $F = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقیاتی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطے میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

ایسی صورت میں منحنی پر $F \cdot T$ ، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ F کا غیر سمتی جزو، کے مکمل کو a تا b کا کام کہتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ پر a تا b قوت $F = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ کا کام W درج ذیل ہو گا۔

$$(15.5) \quad W = \int_{t=1}^{t=b} F \cdot T \, ds$$

□

ثابت محور x رخ مقدار $F(x)$ کی استراری قوت کے کام کا کلیہ $W = \int_a^b F(x) \, dx$ حصہ 6.8 میں اخذ کیا گیا۔ مساوات 15.5 کے حصول کے دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطعہ پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطعہ کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینی مجموعہ کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لئے کہ تحدیدی مکمل کی قیمت کیا ہوگی، ہم قطعہ $[a, b] =$ کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطعہ $[t_k, t_{k+1}]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ قطعہ I کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ \mathbf{r} کا سر نقطہ N_k پر ہو گا اور ذیلی قطعہ $N_k N_{k+1}$ کی لمبائی Δs_k ہوگی۔ اگر منحنی پر $t = c_k$ کے مطابق نقطہ پر F کی قیمت F_k اور منحنی کا مماسی سمتیہ T_k ہو تب $t = c_k$ پر T کے رخ F کا غیر سمتی جزو $F_k \cdot T_k$ ہو گا۔ منحنی کے قطعہ $N_k N_{k+1}$ کی ہمراہ F کا کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$(\text{طے فاصلہ}) \times (\text{حرکت کے رخ قوت کا جزو}) = F_k \cdot T_k \Delta s_k$$

منحنی کی ہمراہ $t = a$ تا $t = b$ کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k$$

جیسا جیسا $[a, b]$ کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری مکمل کو پہنچتا ہے۔

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

اس مکمل سے حاصل عدد کی علامت، t بڑھانے سے حاصل پر چلنے کے، رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے \mathbf{T} کا رخ الٹ ہو گا جس کی بنا $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ اور مکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

علامتیت اور قیمت کا حصول

مکمل کام (مساوات 15.5) کو لکھنے کے چھ طریقے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds && \text{تعریف} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} && \text{مختصر تفریقی روپ} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt && \text{پھیلا کر } dt \text{ شامل کیا گیا ہے} \\
 (15.6) \quad &= \int_{t=a}^{t=b} \left(M \frac{dg}{dt} + N \frac{dh}{dt} + P \frac{dk}{dt} \right) dt && \text{مقدار معلوم } t \text{ اور سمتی رفتار } \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ اجاگر کیے گئے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dt && \text{جزوی تفاعل اجاگر کیے گئے} \\
 &= \int_{t=a}^{t=b} M dx + N dy + P dz && dt \text{ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کی گئی}
 \end{aligned}$$

مساوات 15.6 کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔

مکمل کام کی قیمت کا حصول

مکمل کام کی قیمت حاصل کرنے کے اقدام درج ذیل ہیں۔

1. منحنی پر \mathbf{F} کی قیمت مقدار معلوم t کے تفاعل کی روپ میں لکھیں۔

2. تفرق $\frac{dr}{dt}$ تلاش کریں۔

3. \mathbf{F} اور $\frac{dr}{dt}$ کا غیر سمتی ضرب لیں۔

4. $t = a$ سے $t = b$ تک مکمل کریں۔

مثال 15.6: منحنی $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$ کی ہمراہ $(0, 0, 0)$ سے $(1, 1, 1)$ تک $\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$ کا کام تلاش کریں۔

حل:
پہلا قدم: منحنی پر \mathbf{F} کی قیمت کا حصول۔

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k} \\ &= \underbrace{(t^2 - t^2)}_0\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}\end{aligned}$$

دوسرا قدم: $\frac{dr}{dt}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

تیسرا قدم: \mathbf{F} اور $\frac{dr}{dt}$ کا غیر سمتی ضرب۔

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \frac{dr}{dt} &= [(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}] \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = 0$ تا $t = 1$ تک۔

$$\begin{aligned}W &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9 \right]_0^1 = \frac{29}{60}\end{aligned}$$

□

تکمل ہمراہ بہاو اور دائری بہاو

فرض کریں $F = Mi + Nj + Pk$ میدان قوت کی بجائے فضا کے ایک خط (مثلاً پانی سے چلنے والے جزیئر کا چرخی خانہ یا سمندری طاس) میں بہتا ہوا سیال کے سمتی رفتاری میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسی صورت میں منحنی کی ہمراہ $F \cdot T$ کا تکمل، منحنی کی ہمراہ سیال کا بہاو دے گا۔

تعریف: استراری سمتی رفتاری میدان کے دائرہ کار میں ہموار منحنی $a \leq t \leq b$ $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ پر a سے b تک $F \cdot T$ کا تکمل، $t = a$ سے $t = b$ تک منحنی کا ہمراہ بہاو دے گا:

$$(15.7) \quad \text{ہمراہ بہاو} = \int_a^b F \cdot T \, ds$$

اس عمل کو تکمل ہمراہ بہاو⁴ کہتے ہیں۔ بند منحنی کی صورت میں اس بہاو کو منحنی کے گرد منحنی کی ہمراہ دائری بہاو⁵ کہتے ہیں۔

□

تکمل ہمراہ بہاو کی قیمت بھی تکمل کام کی قیمت کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 15.7: ایک سیال کا سمتی رفتاری میدان $F = xi + zj + yk$ ہے۔ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ اس کی ہمراہ بہاو تلاش کریں۔

$$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

حل: پہلا قدم: منحنی پر F کی قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$F = xi + zj + yk = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$$

دوسرا قدم: $\frac{dr}{dt}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{dr}{dt} = (-\sin t)i + (\cos t)j + k$$

تیسرا قدم: غیر سمتی ضرب $F \cdot \frac{dr}{dt}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} F \cdot \frac{dr}{dt} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1) \\ &= -\sin t \cos t + t \cos t + \sin t \end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = a$ تا $t = b$ تک مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{بہاؤ} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} (-\sin t \cos t + t \cos t + \sin t) dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + \sin t \right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

مثال 15.8: میدان $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ کا دائرہ $0 \leq t \leq 2\pi$ کی $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ ہمراہ دائرہ کے گرد دائری بہاؤ تلاش کریں۔

حل:

$$1. \text{ دائرہ پر } \mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$2. \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$3. \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1$$

$$4. \text{ دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔}$$

$$\begin{aligned} \text{دائری بہاؤ} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt \\ &= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

□

مستوی منحنی کو عبور کرتا ہوا بہاؤ

مستوی xy میں ہموار بند منحنی C میں محیط خطہ سے سیال کے اخراج و دخول کی شرح C پر $F \cdot n$ (منحنی کے بیرونی عمودی اکائی سمتیہ پر رخ رفتاری میدان کے غیر سمتی جزو) کے لکیری تکمل سے حاصل ہو گی۔ اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا F کا بہاؤ (یا نفاذ) کہتے ہیں۔ برقی یا مقناطیسی میدان F کی صورت میں بھی اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا بہاؤ یا نفاذ کہیں گے اگرچہ ان میں کوئی بہتا ہوا سیال نہیں پایا جاتا ہے۔

تعریف: استراری سمتی میدان $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ کے دائرہ کار میں ہموار مسطح بند منحنی C جس کا بیرونی رخ عمودی اکائی سمتیہ n ہو کی صورت میں C کو عبور کرتا ہوا F کا بہاؤ⁶ درج ذیل تکمل دے گا۔

$$(15.8) \quad C = \int_C F \cdot n \, ds$$

□

منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ (نفاذ) اور دائری بہاؤ میں فرق سے واقف ہونا ضروری ہے۔ منحنی C کو عبور کرتا ہوا F کے بہاؤ سے مراد منحنی پر $F \cdot n$ (منحنی کے بیرونی عمود کے رخ F کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ بند منحنی C کے گرد F کے دائری بہاؤ سے مراد منحنی پر $F \cdot T$ (منحنی کے اکائی مماس کے رخ F کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ منحنی عبور کرتا ہوا بہاؤ سے مراد F کے عمودی جزو کا تکمل جبکہ دائری بہاؤ سے مراد F کے مماسی جزو کا تکمل ہے۔ روز مرہ زندگی میں منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ یعنی نفاذ کو مختصراً بہاؤ کہا جاتا ہے۔

مساوات 15.8 کے تکمل کی قیمت معلوم کرنے کی خاطر ہم مقدار معلوم روپ

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b$$

سے ابتدا کرتے ہیں۔ یوں t کی قیمت a سے b تک بڑھانے سے منحنی پر ایک سرے سے دوسرے سر تک ٹھیک ایک بار چلا جائے گا۔ منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ T اور کارٹیزی محدودی نظام کے اکائی سمتیہ k کا سمتی ضرب منحنی کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ n دے گا۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایسے دو سمتی ضرب $T \times k$ اور $k \times T$ پائے جاتے ہیں۔ ان میں کونسا بیرونی اکائی سمتیہ دے گا؟ مقدار معلوم t بڑھانے سے C پر چلنے کے رخ پر اس کا جواب منحصر ہو گا۔ اگر منحنی پر حرکت گھڑی وار ہو تب $k \times T$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا جبکہ خلاف گھڑی حرکت کی صورت میں $T \times k$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا۔ عموماً خلاف گھڑی حرکت کے لئے کلیات اخذ کیے جاتے ہیں۔ یوں $n = T \times k$ ہو گا۔ اگرچہ مساوات 15.8 میں دیے گئے تکمل کی قیمت منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر نہیں ہے، ہم خلاف گھڑی حرکت تصور کرتے ہوئے مساوات 15.8 کو حل کرنے کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔

ارکان کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$n = T \times k = \left(\frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j \right) \times k = \frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j$$

flux⁶

اگر $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ ہو تب

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M(x, y) \frac{dy}{ds} - N(x, y) \frac{dx}{ds}$$

لہذا

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.9) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_C M dy - N dx$$

یاد رہے کہ C پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے بند تکمل \oint کی قیمت حاصل کی جائے گی۔ اس تکمل کے حصول کی خاطر ہم M ، dy ، N اور dx کو مقدار معلوم t کی روپ میں لکھ کر $t = a$ تا $t = b$ تکمل لیتے ہیں۔ ہمیں بہاؤ (نفاذ) تلاش کرنے کے لئے \mathbf{n} یا ds جاننے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ مخفی C پر خلاف گھڑی ٹھیک ایک بار چلتے ہوئے کوئی بھی ہموار مقدار معلوم روپ $x = g(t)$ ، $y = h(t)$ ، جہاں $a \leq t \leq b$ ہو، استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مثال 15.9: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو پار کرتا ہوا $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ کا بہاؤ (نفاذ) تلاش کریں۔

حل: مقدار معلوم روپ $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ دائرے پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے لہذا مساوات 15.9 حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیے جاسکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} M &= x - y = \cos t - \sin t, & dy &= d(\sin t) = \cos t dt \\ N &= x = \cos t, & dx &= d(\cos t) = -\sin t dt \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} &= \int_C M dy - N dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t) dt \quad \text{مساوات 15.9} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

دائرہ کو عبور کرتا ہوا \mathbf{F} کا بہاؤ π ہے۔ چونکہ نتیجہ مثبت ہے لہذا دائرے سے کل بہاؤ کا رخ باہر کو ہو گا۔ دائرے میں دخول کی صورت میں نتیجہ منفی ہوتا۔ □

سوالات

سمتہ میدان اور میدان ڈھلوان
سوال 15.1 تا سوال 15.4 میں متعلق کے میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 15.1: $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

سوال 15.2: $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

سوال 15.3: $g(x, y, z) = e^z - \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 15.4: $g(x, y, z) = xy + yz + xz$

سوال 15.5: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ پیش کریں کہ F کی مقدار مبدا سے (x, y) تک فاصلہ کے مربع کا بالکل متناسب ہو اور F کا رخ مبدا کے رخ ہو۔ (یہ میدان مبدا پر غیر معین ہے۔)

سوال 15.6: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $F = M(x, y)i + N(x, y)j$ پیش کریں کہ $F = 0$ پر $(0, 0)$ پر $|F| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ہو اور F دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو گھڑی وار مماسی ہو۔

کام

سوال 15.7 تا سوال 15.12 میں $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ قوت F کا کام درج ذیل راہوں پر تلاش کریں۔

ا. سیدھی لکیر $C_1: r(t) = ti + tj + tk, 0 \leq t \leq 1$

ب. قوسی راہ $C_2: r(t) = ti + t^2j + t^4k, 0 \leq t \leq 1$

ج. راہ $C_3 \cup C_4$ جو $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ اور $(1, 1, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ خطی قطعات پر مشتمل ہے۔

سوال 15.7: $F = 3yi + 2xj + 4zk$

سوال 15.8: $F = \frac{1}{1+x^2}j$

سوال 15.9: $F = \sqrt{z}i - 2xj + \sqrt{y}k$

سوال 15.10: $F = xyi + yzj + xzk$

سوال 15.11: $F = (3x^2 - 3x)i + 3zj + k$

$$\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k} \quad \text{سوال 15.12}$$

سوال 15.13 تا سوال 15.16 میں بڑھتے t رخ \mathbf{F} کا کام تلاش کریں۔

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}, \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1 \quad \text{سوال 15.13}$$

$$\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}, \quad \text{سوال 15.14}$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \frac{t}{6}\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}, \mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{سوال 15.15}$$

$$\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\mathbf{k}, \mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \frac{t}{6}\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{سوال 15.16}$$

لکیرے، تکرار اور متوالیوں میں سمتی میدان
سوال 15.17: نقطہ $(-1, 1)$ سے $(2, 4)$ تک منحنی $y = x^2$ پر $\int_C xy \, dx + (x + y) \, dy$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 15.18: ایک مثلث جس کے راس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ اور $(0, 1)$ ہیں پر $\int_C (x - y) \, dx + (x + y) \, dy$ کی قیمت غلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 15.19: نقطہ $(4, 2)$ سے $(1, -1)$ تک منحنی $x = y^2$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ کے لئے $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 15.20: نقطہ $(1, 0)$ سے $(0, 1)$ تک اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ کے لئے $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ کی قیمت غلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

جوابات

