

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$a^x$ اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیتال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ نیکنویاتی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکنویاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکنویاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1041	9 لائنائی تسلسل	
1041	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	

1059	ا ضمیمہ اول	
1061	ب ضمیمہ دوم	



## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## سوالات

ترتیب کے اجزاء کی تلاش  
سوال 1 تا سوال 6 میں ترتیب کی  $n$  ویں جزو کا کلیہ دیا گیا ہے۔ اس کے ابتدائی اجزاء  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $a_3$  اور  $a_4$  تلاش کریں۔

سوال 1:  $a_n = \frac{1-n}{n^2}$

سوال 2:  $a_n = \frac{1}{n!}$

سوال 3:  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

سوال 4:  $a_n = 2 + (-1)^n$

سوال 5:  $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$

سوال 6:  $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

سوال 7 تا سوال 12 میں ابتدائی ایک یا دو اجزاء اور کلیہ دی گئی ہے۔ ابتدائی دس اجزاء تلاش کریں۔

سوال 7:  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \left(\frac{1}{2^n}\right)^n$

سوال 8:  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

سوال 9:  $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{a_n}{2}$

سوال 10:  $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{n+1}$

سوال 11:  $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

سوال 12:  $a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

ترتیب کے کلیہ کی تلاش  
سوال 13 تا سوال 22 میں دیے گئے ترتیب کے  $n$  ویں جزو کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 13:  $1, -1, 1, -1, 1, \dots$  ہر بار 1 کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔

سوال 14:  $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$  ہر بار 1 کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔

سوال 15:  $1, -4, 9, -16, 25, \dots$  مثبت عدد صحیح کا مربع جس کی علامت ہر بار تبدیل ہوتی ہے۔

سوال 16:  $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$  مثبت عدد صحیح کے مربع کا بالکس متناسب جس کی علامت ہر بار تبدیل ہوتی ہے۔

سوال 17:  $0, 3, 8, 15, 24, \dots$  مثبت عدد صحیح کے مربع سے 1 کم۔

سوال 18:  $-3, -3, -2, -1, 0, 1, \dots$  سے شروع کرتے ہوئے عدد صحیح۔

سوال 19:  $1, 5, 9, 13, 17, \dots$  ہر دوسرا طاق مثبت عدد صحیح۔

سوال 20:  $2, 6, 10, 14, 18, \dots$  ہر دوسرا جفت مثبت عدد صحیح۔

سوال 21:  $1, 0, 1, 0, 1, \dots$  باری باری 1 اور 0

سوال 22:  $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots$  ہر مثبت عدد صحیح دو بار۔

کیلکولیٹر کی مدد سے حد کی تلاش  
سوال 23 تا سوال 26 میں کیلکولیٹر کے ساتھ تجربات کرتے ہوئے  $N$  کی وہ قیمت تلاش کریں جو دی گئی عدم مساوات کو تمام  $n > N$  کے لئے مطمئن کرتا ہو۔ دی گئی عدم مساوات، تسلسل کی حد کی باضابطہ تعریف کے تحت ہے۔ تسلسل کی تفصیل پیش کریں اور اس کی حد تلاش کریں۔

$$|\sqrt[n]{0.5} - 1| < 10^{-3} \quad \text{سوال 23}$$

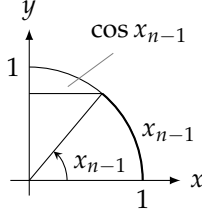
$$|\sqrt[n]{n} - 1| < 10^{-3} \quad \text{سوال 24}$$

$$(0.9)^n < 10^{-3} \quad \text{سوال 25}$$

$$\frac{2^n}{n!} < 10^{-7} \quad \text{سوال 26}$$

سوال 27: ترکیب نیوٹن سے حاصل ترتیبات  
ترکیب نیوٹن کی قابل تفرق تقابل  $f(x)$  پر اطلاق سے ابتدائی قیمت  $x_0$  اور اس کے بعد اعداد کی ترتیب  $\{x_n\}$  حاصل ہوتی ہے جو موزوں صورت میں  $f$  کے صفر پر مرکوز ہوگی۔ اس ترتیب کا کلیہ تواری درج ذیل ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



شکل 9.10: اکائی دائرہ برائے سوال 9.10

ا. دکھائیں کہ  $f(x) = x^2 - a^2$ ,  $a > 0$  کا کلیہ تولی  $x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2}$  ہے۔

ب. ابتدائی قیمت  $x_0 = 1$  اور  $a = 3$  لیتے ہوئے وہاں تک یک بعد دیگرے اجزاء تلاش کریں جب اجزاء دہرانے شروع ہو جاتے ہیں۔ کون سے عدد کی تخمین حاصل ہوتی ہے؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 28: گزشتہ سوال (سوال 27) میں  $a = 3$  کی بجائے  $a = 2$  لیتے ہوئے جزو-ب دوبارہ حل کریں۔

سوال 29:  $\frac{\pi}{2}$  کی تعریف تولی اگر آپ  $x_1 = 1$  سے شروع کر کے  $\{a_n\}$  کے باقی اجزاء کو قاعدہ  $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$  سے حاصل کریں تب ایک ایسی ترتیب حاصل ہوگی جو بہت تیزی سے  $\frac{\pi}{2}$  پر مرکوز ہوگی۔ (i) ایسا کر کے دیکھیں۔ (ب) اتنی تیز ارتکاز کی وجہ شکل 9.10 کی مدد سے پیش کریں۔

سوال 30: گاڑیاں بنانے والا ایک کارخانہ دھاتی چادر کو دبا کر ایک گاڑی کا ڈھانچہ اوسطاً 7.25 گھنٹوں میں تیار کرتا ہے۔ اگر ڈھانچہ تیار کرنے کے لئے درکار وقت میں سالانہ 6% کی رونما ہو تب  $n$  سالوں بعد

$$S_n = 7.25(0.94)^n$$

اتنا وقت درکار ہو گا۔ کتنے سالوں بعد تقریباً 3.5 گھنٹے درکار ہوں گے؟ جواب کو دو مختلف طریقوں سے تلاش کریں:

ا. تسلسل  $S_n$  کا وہ پہلا جزو تلاش کریں جو 3.5 کے برابر یا اس سے کم ہو۔

ب. تقابل  $f(x) = 7.25(0.94)^x$  ترسیم کر کے دیکھیں یہ کہاں لکیر  $y = 3.5$  کو مس کرتی ہے۔

نظریہ اور مثالیں  
سوال 31 تا سوال 34 میں معلوم کریں کہ آیا تسلسل غیر گھٹتی ہے اور کیا یہ اوپر سے محدود ہے۔

$$a_n = \frac{3n+1}{n+1} \quad \text{سوال 31}$$

سوال 32:  $a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

سوال 33:  $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$

سوال 34:  $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$

سوال 35 تا سوال 40 میں کون سی ترتیب مرتکز ہے اور کون سی منفرج؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35:  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

سوال 36:  $a_n = n - \frac{1}{n}$

سوال 37:  $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

سوال 38:  $a_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$

سوال 39:  $a_n = [(-1)^n + 1] \left( \frac{n+1}{n} \right)$

سوال 40: ایک ترتیب کا پہلا جزو  $x_1 = \cos(1)$ ، اگلا جزو  $x_2 = x_1$  یا  $\cos(2)$  میں سے جو بھی بڑا ہے، اس سے اگلا جزو  $x_3 = x_2$  یا  $\cos(3)$  میں سے جو بھی بڑا (دائیں جانب زیادہ دور) ہے۔ یوں عمومی جزو درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = \{x_n, \cos(n+1)\} \text{ زیادہ بڑا}$$

سوال 41: غیر بڑھتے ترتیمات  
ایک ترتیب جس میں تمام  $n$  کے لئے  $a_n > a_{n+1}$  ہو غیر بڑھتا ترتیب<sup>15</sup> کہلاتا ہے۔ اگر ہر  $n$  کے لئے  $M \leq a_n$  ہو جہاں  $M$  کوئی عدد ہو تب  $M$  کو ترتیب  $\{a_n\}$  کی زیریں حد بندی<sup>16</sup> کہتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ یہ ترتیب نیچے سے محدود<sup>17</sup> ہے۔ مسئلہ 9.1 سے اخذ کریں کہ ایسا غیر بڑھتا تسلسل جو نیچے سے محدود ہو مرتکز ہو گا جبکہ غیر بڑھتا تسلسل جو نیچے سے محدود نہ ہو منفرج ہو گا۔

سوال 42 تا سوال 46 میں سوال 41 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ کون سی ترتیب مرتکز اور کون سی منفرج ہے۔

سوال 42:  $a_n = \frac{n+1}{n}$

nonincreasing sequence<sup>15</sup>

lower bound<sup>16</sup>

bounded from below<sup>17</sup>

سوال 43:  $a_n = \frac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$

سوال 44:  $a_n = \frac{1-4^n}{2^n}$

سوال 45:  $a_n = \frac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$

سوال 46:  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3$

سوال 47: ترتیب  $\{\frac{n}{n+1}\}$  کی کم سے کم بالائی حد بندی 1 ہے۔ دکھائیں کہ اگر عدد  $M$  ایک سے کم ہو تب  $\{\frac{n}{n+1}\}$  کے اجزاء آخر کار  $M$  سے تجاوز کر جائیں گے۔ یعنی  $M < 1$  کی صورت میں ایسا عدد صحیح  $N$  موجود ہو گا کہ جب  $n > N$  ہو تب  $\frac{n}{n+1} > M$  ہو گا۔ چونکہ ہر  $n$  کے لئے  $\frac{n}{n+1} < 1$  ہے لہذا یوں ثابت ہوتا ہے کہ  $\{\frac{n}{n+1}\}$  کی بالائی حد بندی 1 ہو گی۔

سوال 48: کم سے کم بالائی حد بندی کی یکتائی  
دکھائیں کہ اگر  $M_1$  اور  $M_2$  ترتیب  $\{a_n\}$  کے کم سے کم بالائی حد بندی ہوں تب  $M_1 = M_2$  ہو گا، یعنی کسی بھی ترتیب کے دو مختلف کم سے کم بالائی حد بندی نہیں ہو سکتی ہیں۔

سوال 49: کیا ضروری ہے کہ اوپر سے محدود، مثبت اعداد کی ترتیب  $\{a_n\}$  لازماً مرکب ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: اگر  $\{a_n\}$  مرکب ترتیب ہو تب دکھائیں کہ ہر مثبت عدد  $\epsilon$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد صحیح  $N$  ہو گا کہ تمام  $m$  اور  $n$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$m > N \text{ اور } n > N \implies |a_m - a_n| < \epsilon$$

سوال 51: حد کی یکتائی  
ثابت کریں کہ ہر ترتیب کا حد یکساں ہو گا، یعنی، دکھائیں کہ اگر  $L_1$  اور  $L_2$  ایسے اعداد ہوں کہ  $a_n \rightarrow L_1$  اور  $a_m \rightarrow L_2$  ہوں تب  $L_1 = L_2$  ہو گا۔

سوال 52: ترتیبات اور حد  
دکھائیں کہ اگر ترتیب  $\{a_n\}$  کے دو ذیلی ترتیبات کے حد مختلف ہوں،  $L_1 \neq L_2$  تب  $\{a_n\}$  منفرد ترتیب ہو گی۔

سوال 53: ترتیب  $\{a_n\}$  کے جفت اشاریہ کے اجزاء کو  $a_{2k}$  اور طاق اشاریہ کے اجزاء کو  $a_{2k+1}$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ثابت کریں کہ  $a_{2k} \rightarrow L$  اور  $a_{2k+1} \rightarrow L$  کی صورت میں  $a_n \rightarrow L$  ہو گا۔

سوال 54: دکھائیں کہ ترتیب  $\{a_n\}$  اس صورت 0 کو مرکب ہو گا جب مطلق قیمتیں  $\{|a_n|\}$  صفر کو مرکب ہوں۔

کمپیوٹر کا استعمال  
سوال 55 تا سوال 66 میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. ابتدائی 25 اجزاء کا حساب لگا کر انہیں ترسیم کریں۔ کیا ترتیب اوپر یا نیچے سے محدود نظر آتی ہے؟ کیا یہ منفرد یا مرکب نظر آتی ہے؟  
ارٹھکڑ کی صورت میں حد  $L$  کتنا ہے؟

ب. اگر تسلسل مرکب ہو تب ایسا عدد صحیح  $N$  تلاش کریں کہ  $n \geq N$  کے لئے  $|a_n - L| \leq 0.01$  ہو۔ ترتیب میں کتنا آگے  
جا کر  $L$  اور اجزاء کے بیچ فاصلہ 0.0001 سے کم ہو گا؟

سوال 55:  $a_n = \sqrt[n]{n}$

سوال 56:  $a_n = \left(2 + \frac{0.5}{n}\right)^n$

سوال 57:  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$

سوال 58:  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

سوال 59:  $a_n = \sin n$

سوال 60:  $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

سوال 61:  $a_n = \frac{\sin n}{n}$

سوال 62:  $a_n = \frac{\ln n}{n}$

سوال 63:  $a_n = (0.9999)^n$

سوال 64:  $a_n = 123456^{1/n}$

سوال 65:  $a_n = \frac{8^n}{n!}$

سوال 66:  $a_n = \frac{n^{41}}{19^n}$

سوال 67: سود در سود:  $A_0$  جمع کرتے ہیں جو سالانہ  $r$  فی صد سود کا ایک سال میں  $m$  مرتبہ حساب لگا کر آپ کے رقم میں جمع  
کرتی ہے۔ مزید آپ ہر سال  $b$  رقم بھی بینک میں جمع کرتے ہیں یا  $b < 0$  کی صورت میں بینک سے نکالتے ہیں۔ یوں  $n + 1$  سال  
بعد کل رقم درج ذیل ہو گی۔

(9.1) 
$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right) A_n + b$$



ا. اگر  $A_0 = 1000$  ،  $r = 0.02015$  ،  $m = 12$  اور  $b = 50$  ہوں تب ابتدائی 100 نقطوں  $(n, A_n)$  کو ترسیم کریں۔ پانچ سال کے آخر میں آپ کی رقم کتنی ہو گی؟ کیا  $\{A_n\}$  مرتکز ہے؟ کیا  $\{A_n\}$  محدود ہے۔

ب. اگر  $A_0 = 5000$  ،  $r = 0.00589$  ،  $m = 12$  اور  $b = -50$  ہوں تب ابتدائی 100 نقطوں  $(n, A_n)$  کو ترسیم کریں۔

ج. اگر آپ بینک میں 5000 رقم مستقل طور پر جمع کریں جس پر سالانہ 4.5% سود ہو جس کا ایک سال میں چار مرتبہ حساب کیا جاتا ہو تب کتنے سالوں بعد آپ کی رقم 20000 ہو گی۔ اگر سود 6.25% ہو؟

د. سود در سود کا تعلق مساوات 9.1 میں پیش کیا گیا ہے جو  $k \geq 0$  کے لئے درج ذیل تعلق کو مطمئن کرتی ہے

$$(9.2) \quad A_k = (1 + r/m)^k (A_0 + mb/r) - \frac{mb}{r}$$

جس کی تصدیق کی خاطر مساوات 9.1 اور مساوات 9.2 کی ابتدائی 50 اجزاء کا آپس میں موازنہ کریں۔ اس کے بعد مساوات 9.2 سے مساوات 9.1 اخذ کریں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

