احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ix

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 15
1.3 تفاعل 32
1.4 ترسیم کی منتقلی 54
1.5 تکونیاتی تفاعل 74

2 حدود اور استمرار 95
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 95
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 113
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف 126
2.4 تصور حد کی توسیع 146
2.5 استمرار 165
2.6 مماسی خط 184

3 تفرق 199
3.1 تفاعل کا تفرق 199
3.2 قواعد تفرق 221
3.3 تبدیلی کی شرح 240
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 257
3.5 زنجیری قاعدہ 277
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 294
3.7 دیگر شرح تبدیلی 310

4 تفرق کا استعمال 325
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں . . . 325
4.2 مسئلہ اوسط قیمت . . . 340
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ . . . 356
4.3.1 پرکھ . . . 356
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم . . . 368
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء . . . 391
4.6 بہترین بنانا . . . 418
4.7 خط بندی اور تفرقات . . . 442
4.8 ترکیب نیوٹن . . . 464

5 تکمل 477
5.1 غیر قطعی تکملات . . . 477
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی . . . 489
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق . . . 505
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ . . . 516
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات . . . 534
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ . . . 561
5.7 بنیادی مسئلہ . . . 578
5.8 قطعی تکمل میں بدل . . . 599
5.9 اعدادی تکمل . . . 605
5.10 قاعدہ ذوزنقہ . . . 605

6 تکمل کا استعمال 625
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ . . . 625
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد . . . 629
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش . . . 640
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا . . . 648
6.4 نلکی چھلے . . . 663
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں . . . 676
6.6 سطح طواف کا رقبہ . . . 687
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت . . . 699
6.7.1 وسطانی مرکز . . . 711
6.8 کام . . . 716
6.9 فشار سیال اور قوت سیال . . . 731
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال . . . 740

7 ماورائی تفاعل 755
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق . . . 756

7.2 قدرتی لوگارتھم . . . 774
7.3 قوت نمائی تفاعل . . . 792
7.4 a^x اور $\log_a x$ . . . 807
7.5 افزائش اور تنزل . . . 818
7.6 قاعدہ لھوپیٹال . . . 832
7.7 اضافی شرح نمو . . . 848
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش . . . 853
7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل . . . 859
7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل . . . 875
7.10 ہذلولی تفاعل . . . 892
7.11 یک رتبی تفرقی مساوات . . . 913
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان . . . 931

8 تکمل کے طریقے 943
8.1 تکمل کے بنیادی کلیات . . . 943
8.2 تکمل بالحصص . . . 959
8.2.1 بار بار استعمال . . . 964
8.3 جزوی کسر . . . 974
8.4 تکونیاتی بدل . . . 989

ا ضمیمہ اول 995

ب ضمیمہ دوم 997

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

8.4 تکونیاتی بدل

ہم $a^2 + x^2$ ، $a^2 - x^2$ اور $x^2 - a^2$ میں تکونیاتی بدل پر کر کے ایک مربع جزو حاصل کرتے ہیں جو ایسے تکمل، جن میں ان کا جذر پایا جاتا ہو، کو سادہ صورت میں بدل دیتا ہے۔ ان سادہ تکمل کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے۔

تین بنیادی بدل

تین عمومی بدل $x = a\tan\theta$ ، $x = a\sin\theta$ اور $x = a\sec\theta$ ہیں جو شکل 8.8 میں قائمہ مثلثوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

$x = a\tan\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta \tag{8.14}$$

$x = a\sin\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta \tag{8.15}$$

$x = a\sec\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

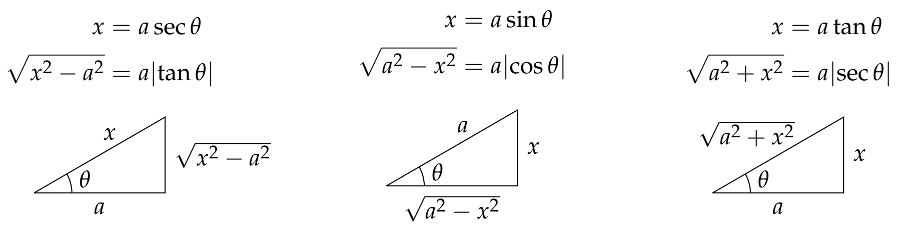
$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta \tag{8.16}$$

تکونیاتی بدل

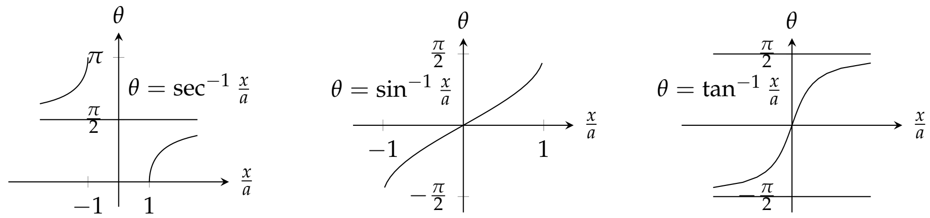
ا. $x = a\tan\theta$ لے کر $a^2 + x^2$ کی جگہ $a^2\sec^2\theta$ پر کریں۔

ب. $x = a\sin\theta$ لے کر $a^2 - x^2$ کی جگہ $a^2\cos^2\theta$ پر کریں۔

ج. $x = a\sec\theta$ لے کر $x^2 - a^2$ کی جگہ $a^2\tan^2\theta$ پر کریں۔



شکل 8.8: تکونیاتی بدل کو حوالہ مثلث۔



شکل 8.9: الٹ تکونیاتی تفاعل کے ترسیمات۔

ہم ایسا بدل استعمال کرنا چاہیں گے جو قابل واپسی ہو تا کہ آخری قدم پر اس کو واپس کرتے ہوئے اصل متغیرات میں نتیجہ لکھ سکیں۔ مثال کے طور پر اگر $x = a\tan\theta$ کی صورت میں ہم چاہیں گے کہ تکمل لینے کے بعد آخری قدم پر $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ لکھنا ممکن ہو۔ اسی طرح $x = a\sin\theta$ کی صورت میں ہم تکمل کے بعد $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ اور $x = a\sec\theta$ کے لئے $\theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$ پر کرنا چاہیں گے۔

جیسا ہم حصہ 7.8 سے جانتے ہیں ان تفاعل کے الٹ صرف مخصوص وقفہ پر پائے جاتے ہیں (شکل 8.9)۔ الٹ کے لئے درج ذیل ضروری ہے۔

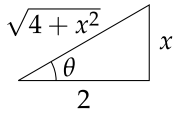
ا. $x = a\tan\theta$ کا الٹ $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ پر ہو گا۔

ب. $x = a\sin\theta$ کا الٹ $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ پر ہو گا۔

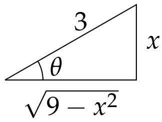
ج. $x = a\sec\theta$ کا الٹ $\theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ پر $\frac{x}{a} \ge 1$ کی صورت میں اور وقفہ $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ پر $\frac{x}{a} \le -1$ کی صورت میں ہو گا۔

حساب کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم بدل $x = a\sec\theta$ کے استعمال کو ان تکمل تک پابند کرتے ہیں جن میں $\frac{x}{a} \ge 1$ ہو۔ اس طرح θ وقفہ $[0, \frac{\pi}{2})$ میں ہو گا جہاں $\tan\theta \ge 0$ ہو گا۔ یوں $a > 0$ کی صورت میں

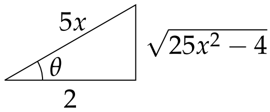
$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta| = a\tan\theta$$



شکل 8.10: حوالہ مثلث برائے مثال 8.25



شکل 8.11: حوالہ مثلث برائے مثال 8.26



شکل 8.12: حوالہ مثلث برائے مثال 8.27

ہو گا جو مطلق کی علامت سے آزاد ہے۔

مثال 8.25: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$ حل کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x &= 2\tan\theta, \quad \mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\\
4+x^2 &= 4+4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta
\end{aligned}$$

یوں

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{|\sec\theta|} && \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|\\
&= \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C\\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C && \text{شکل } 8.10\\
&= \ln\left|\sqrt{4+x^2} + x\right| + C' && C' = C - \ln 2
\end{aligned}$$

ہو گا۔ آپ اس پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہم نے $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$ کو x کی صورت میں کس طرح لکھا۔ ہم نے ابتدائی بدل $x = 2\tan\theta$ کے لئے حوالہ مثلث (شکل 8.10) کا خاکہ بنایا اور اسی سے نسبتیں $\tan\theta = \frac{x}{2}$ اور $\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ پڑھیں۔ □

مثال 8.26: تکمل $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$ حل کریں۔

حل: جزو $9-x^2$ کی جگہ ایک مربع جزو پر کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$x = 3\sin\theta, \quad \mathrm{d}x = 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$9 - x^2 = 9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta$$

یوں

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{9\sin^2\theta\cdot 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{|3\cos\theta|} \\
&= 9\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{9}{2}\Big(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\Big) + C \\
&= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C \\
&= \frac{9}{2}\Big(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\Big) + C && \text{شکل } 8.11 \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C
\end{aligned}$$

ہو گا جہاں شکل 8.11 سے نسبتیں $\sin\theta = \frac{x}{3}$ اور $\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ پڑھی گئی ہیں۔ □

مثال 8.27: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-4}},\ x > \frac{2}{5}$ حل کریں۔

حل: ہم جذر کو

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\Big(x^2 - \frac{4}{25}\Big)} = 5\sqrt{x^2 - \Big(\frac{2}{5}\Big)^2}$$

صورت میں لکھتے ہیں تاکہ یہ $x^2 - a^2$ روپ میں ہو۔ اس کے بعد درج ذیل بدل استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2}{5}\sec\theta, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\
x^2 - \Big(\frac{2}{5}\Big)^2 &= \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} = \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta \\
\sqrt{x^2 - \Big(\frac{2}{5}\Big)^2} &= \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta && \tan\theta > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

یوں

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2-(4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\tan\theta}$$
$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\ln\lvert\sec\theta+\tan\theta\rvert + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2}+\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C$$

ہو گا جہاں تکونیاتی نسبت شکل 8.27 سے پڑھی گئی ہے۔ □

بعض اوقات دو درجی جزو کے طاقت کا تکمل تکونیاتی بدل سے ممکن ہوتا ہے۔ آئیں اگلی مثال میں اس عمل کو دیکھیں۔

مثال 8.28: منحنی $y=\frac{4}{x^2+4}$، محور x، لکیر $x=0$ اور $x=2$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کو ترسیم کر کے ترکیب قرص (حصہ 6.3) سے حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$H = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\,dx = 16\pi\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2} \qquad R(x)=\frac{4}{x^2+4}$$

اس تکمل کو حل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$x = 2\tan\theta, \quad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta, \quad \theta=\tan^{-1}\frac{x}{2}$$
$$x^2+4 = 4\tan^2\theta+4, \quad 4(\tan^2\theta+1) = 4\sec^2\theta$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$H = 16\pi\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$
$$= 16\pi\int_0^{\pi/4}\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\sec^2\theta)^2}$$
$$= 16\pi\int_0^{\pi/4}\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi\int_0^{\pi/4}2\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \pi\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \pi\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \pi\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right] \approx 4.04$$

□

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم