

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
685	6.6	سطح طواف کا رقبہ
697	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
709	6.7.1	وسطانی مرکز
714	6.8	کام
729	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
738	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
753	7	ماورائی تفاعل
754	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

772	قدرتی لوگار تھم	7.2
790	قوت نمائی تفاعل	7.3
805	a^x اور $\log_a x$	7.4
816	افزائش اور تنزل	7.5
830	قاعدہ لھویٹال	7.6
846	اضافی شرح نمو	7.7
851	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
857	الٹ بکونیاتی تفاعل	7.8
873	الٹ بکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
891	بدلولی تفاعل	7.10

901	ضمیمہ اول	ا
903	ضمیمہ دوم	ب

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

7.10 ہڈولی تقابل

ہر ایسا تقابل f جس کے دائرہ کار کا وسط مبداء پر واقع ہو کو ایک جفت اور ایک طاق تقابل کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

یوں قوت نمائی تقابل e^x کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

قوت نمائی تقابل e^x کا جفت اور طاق حصہ، جنہیں بالترتیب x کا ہڈولی کوسائن اور ہڈولی سائن کہتے ہیں، از خود اہمیت کے حامل ہیں۔ یہ چکدار ٹھوس مادہ میں لہروں کی حرکت، کھبوں کے بیچ برقی تاروں کا روپ، اور دھاتی مسرد کار²⁶ میں حرارتی کی تقسیم کو بیان کرتے ہیں۔

تعریف اور تماثل

ہڈولی کوسائن اور ہڈولی سائن کی تعریف جدول 7.7 کی پہلی دو مساواتیں پیش کرتی ہیں۔ اس جدول میں ہڈولی ٹینجٹ، ہڈولی کوٹینجٹ، ہڈولی سیکنٹ، اور ہڈولی کو سیکنٹ کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ ہم دیکھیں گے، ہڈولی تقابل ان ٹکونیاتی تقابل کے ساتھ کافی ملنے جلتے ہیں جن کے توسط سے ان کے نام رکھے گئے ہیں۔ ان کو شکل 7.66 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

تماثل

ہڈولی تقابل جدول 7.8 میں دی گئی تماثل کو مطمئن کرتے ہیں۔ ماسوائے علامت، ہم ان تماثل کو ٹکونیاتی تقابل سے جانتے ہیں۔

جدول 7.7: چھ بنیادی ہڈولی تفاعل

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	x کا ہڈولی کوسائن
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	x کا ہڈولی سائن
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہڈولی ٹینجینٹ
$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہڈولی کوٹینجینٹ
$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہڈولی سیکنٹ
$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہڈولی کوسیکنٹ

جدول 7.8: ہڈولی تفاعل کے متاتل۔

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

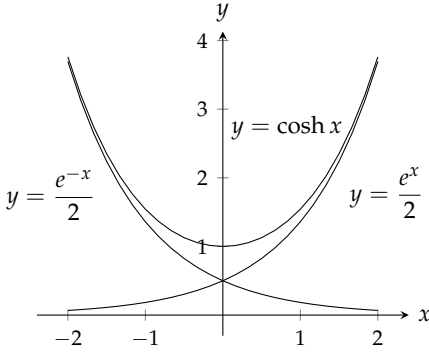
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

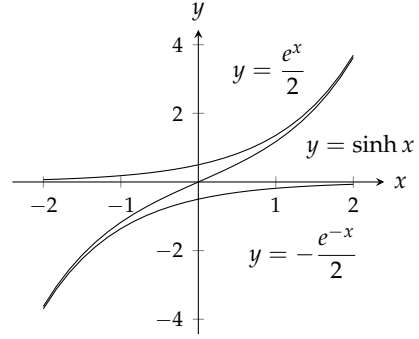
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

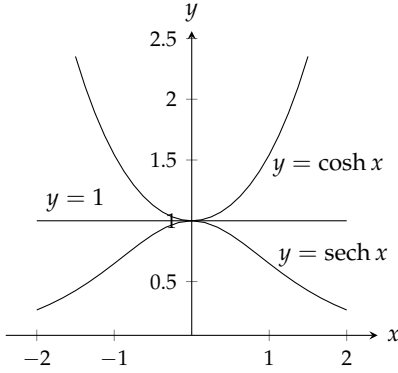
$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$



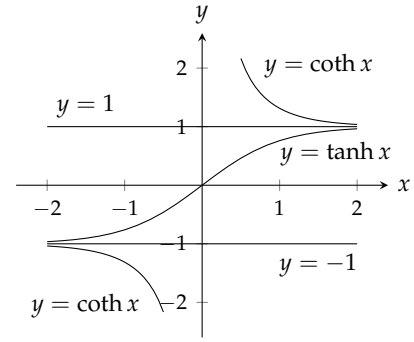
(ب) ہڈولوی کوسائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



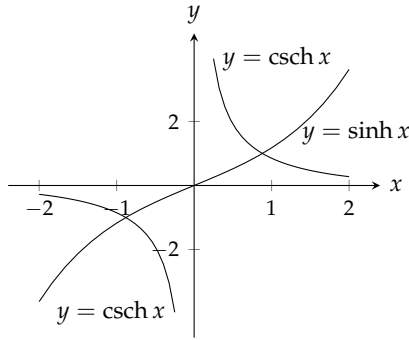
(ا) ہڈولوی سائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



(د) ہڈولوی کوسائن اور ہڈولوی سیکنٹ۔



(ج) ہڈولوی ٹینجٹ اور ہڈولوی کوٹینجٹ۔



(س) ہڈولوی سائن اور ہڈولوی کوسیکنٹ۔

شکل 7.66: چھ بنیادی ہڈولوی تقابل۔

جدول 7.9: ہڈولی تفاعل کے کلیات تفرق اور کلیات تکمل۔

(ب) ہڈولی تفاعل کے تکمل۔	(ا) ہڈولی تفاعل کے تفرق۔
$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

تفرق اور تکمل

چھ بنیادی ہڈولی تفاعل، قابل تفرق تفاعل e^x اور e^{-x} کے ناطق مجموعے ہیں، لہذا یہ ہر اس نقطہ پر قابل تفرق ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔ یہاں بھی تکنیکی تفاعل کے ساتھ مشابہت نظر آتی ہے۔ جدول 7.9-ا کے کلیات تفرق سے جدول 7.9-ب کے کلیات تکمل حاصل ہوتے ہیں۔ تکنیکی تفاعل کی طرح ہڈولی تفاعل کی قیمتوں کو بھی کیلو لیٹر سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 7.69:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tanh \sqrt{1+t^2}) &= \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt{1+t^2}) \\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

□

مثال 7.70:

$$\begin{aligned} \int \coth 5x \, dx &= \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} \quad u = \sinh 5x \\ &= \frac{1}{5} \ln|u| + C = \frac{1}{5} \ln|\sinh 5x| + C \end{aligned}$$

□

مثال 7.71:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sinh^2 x \, dx &= \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2} \, dx && \text{جدول 7.8} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\cosh 2x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh 2x}{2} - x \right]_0^1 \\
 &= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672
 \end{aligned}$$

□

مثال 7.72:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \, dx &= \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2) \, dx \\
 &= \left[e^{2x} - 2x \right]_0^{\ln 2} = (e^{2 \ln 2} - 2 \ln 2) - (1 - 0) \\
 &= 4 - 2 \ln 2 - 1 \\
 &\approx 1.6137
 \end{aligned}$$

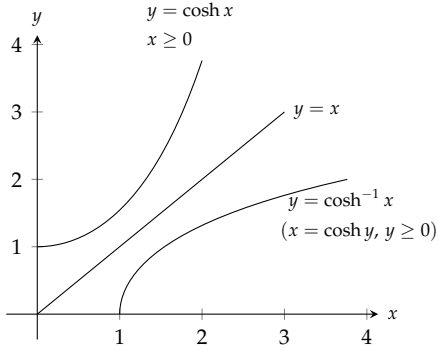
□

الٹ ہڈولی تقاعسل

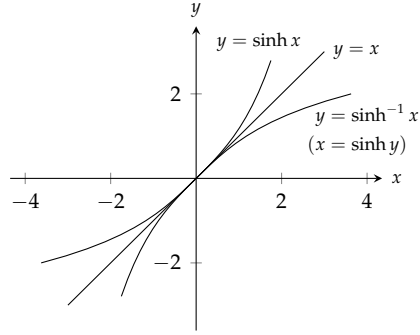
ہم چھ بنیادی ہڈولی تقاعسل کو مکمل میں استعمال کرتے ہیں۔ چونکہ $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x > 0$ لہذا x کے لحاظ سے ہڈولی سائن بڑھتا تقاعسل ہے۔ ہم اس کے الٹ کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$y = \sinh^{-1} x$$

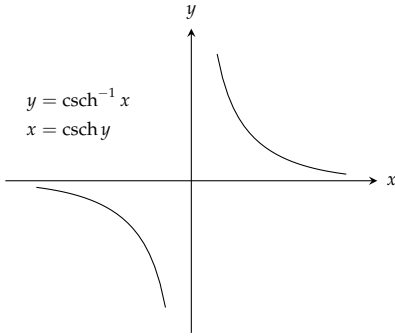
وقفہ $-\infty < x < \infty$ میں ہر x کے لئے $y = \sinh^{-1} x$ کی قیمت وہ ہوگی جس کے ہڈولی سائن کی قیمت x ہو۔ تقاعسل $y = \sinh x$ اور $y = \sinh^{-1} x$ کے ترسیات کو شکل 7.67-۱ میں پیش کیا گیا ہے۔



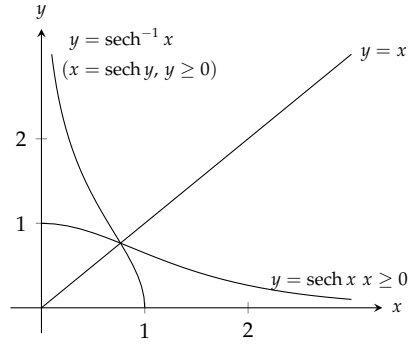
(ب) ہڈولی کوسائن اور الٹ ہڈولی کوسائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔



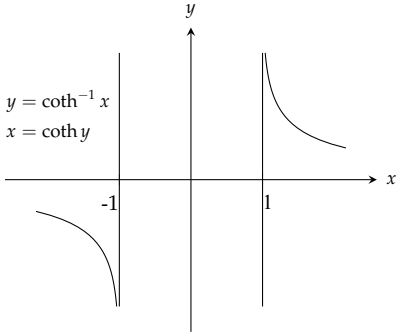
(ل) ہڈولی سائن اور الٹ ہڈولی سائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔



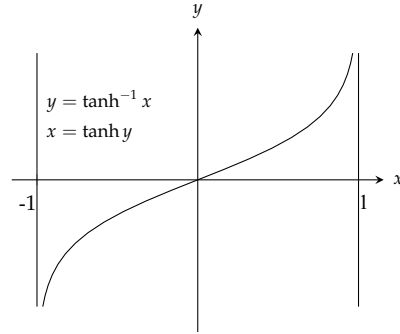
(ز) الٹ ہڈولی کو سینٹ کا ترسیم۔



(ج) ہڈولی سینٹ اور الٹ ہڈولی سینٹ کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔



(و) الٹ ہڈولی کو ٹینجٹ کا ترسیم۔



(ه) الٹ ہڈولی ٹینجٹ کا ترسیم۔

شکل 7.67: چھ بنیادی ہڈولی تفاعل کے الٹ۔

جدول 7.10: الٹ ہڈولی تقابل کے چند کارآمد تماثل

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

جیسا آپ شکل 7.66-ب میں دیکھ سکتے ہیں، تقابل $y = \cosh x$ ایک ایک نہیں ہے۔ البتہ اس کی پابند شدہ روپ $y = \cosh x, x \geq 0$ ایک ایک ہے لہذا اس کا الٹ پایا جائے گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

متغیر $x \geq 1$ کے ہر قیمت کے لئے وقفہ $0 \leq y \leq \infty$ میں $y = \cosh^{-1} x$ ایک ایسا عدد ہو گا جس کے ہڈولی کوسائن کی قیمت x ہو گی۔ تقابل $y = \cosh x, x \geq 0$ اور $y = \cosh^{-1} x$ کی ترسیمات کو شکل 7.67-ب میں دکھایا گیا ہے۔

تقابل $y = \cosh x$ کی طرح $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ بھی ایک ایک نہیں ہے، البتہ x کو غیر منفی قیمتوں پر پابند کرنے سے $y = \operatorname{sech} x$ ایک ایک ہوتا ہے جس کا الٹ پایا جائے گا۔ اس الٹ کو

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقفہ $(0, 1]$ میں x کی ہر قیمت کے لئے $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ وہ عدد ہو گا جس کا الٹ ہڈولی سینٹ x ہو گا۔

ہڈولی کوسینٹ، ہڈولی ٹینجینٹ اور ہڈولی کوٹینجینٹ اپنے اپنے دائرہ کار پر ایک ایک ہیں لہذا ان کے الٹ پائے جائیں گے جنہیں

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x, \quad y = \operatorname{coth}^{-1} x$$

سے ظاہر کیا گیا ہے کو شکل 7.67-د، و، و میں ترسیم کیا گیا ہے۔

کارآمد تماثل

چند کارآمد تماثل کو جدول 7.10 میں پیش کیا گیا ہے۔ تقابل $\sinh^{-1} x$ اور $\tanh^{-1} x$ کی قیمتیں جاننے ہوئے ان تماثل کی استعمال سے $\operatorname{sech}^{-1} x$ ، $\operatorname{csch}^{-1} x$ اور $\operatorname{coth}^{-1} x$ کی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔

جدول 7.11: الٹ ہڈولی تفاعل کے تفرق۔

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} \\
 \frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1 \\
 \frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1 \\
 \frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1 \\
 \frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} &= \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad 0 < u < 1 \\
 \frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} &= \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad u \neq 0
 \end{aligned}$$

الٹ ہڈولی تفاعل کے تفرق اور مکمل

الٹ ہڈولی تفاعل کا اہم ترین استعمال، مکمل کے ذریعہ جدول 7.11 میں کلیات تفرق سے کلیات مکمل کا حصول ہے۔

تفاعل $\tanh^{-1} u$ اور $\coth^{-1} u$ کے تفرق پر $|u| < a$ اور $|u| > 1$ کی پابندی، ان تفاعل پر پابندی کی بنا ہے (شکل 7.67-، دیکھیں)۔ کلیات تفرق کو کلیات مکمل میں تبدیل کرتے وقت $|u| < 1$ اور $|u| > 1$ میں امتیاز اہمیت حاصل کرتا ہے۔ اگر $|u| < 1$ ہو تب $\frac{1}{1-u^2}$ کا مکمل $\tanh^{-1} u + C$ ہو گا۔ اس کے برعکس $|u| > 1$ کی صورت میں مکمل $\coth^{-1} u + C$ ہو گا۔

مثال 7.73: دکھائیں کہ اگر متغیر x کا u قابل تفرق تفاعل ہو اور جس کی قیمتیں 1 سے زیادہ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

حل: ہم پہلے عددی $x > 1$ کی صورت میں $y = \cosh^{-1} x$ کا تفرق معلوم کرتے ہیں۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

$$x = \cosh y$$

$$1 = \sinh y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

اس کا مساوی

x کے لحاظ سے تفرق

$$x > 0, y > 0, \sinh y > 0$$

$$\cosh y = x$$

جدول 7.12: وہ مکمل جو الٹ ہڈولی تقابل دیتے ہیں۔

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right), \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right), \quad u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C & u^2 > a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad 0 < u < a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C, \quad u \neq 0$$

یوں $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ سے درکار نتیجہ ملتا ہے:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$$

□

موزوں بدل استعمال کرتے ہوئے جدول 7.11 میں دیے گئے کلیات تفرق سے جدول 7.12 کے کلیات مکمل اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 7.74: مکمل $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}$ کی قیمت دریافت کریں۔

حل: قطعی مکمل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} \int \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} & u &= 2x \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= \left[\sinh^{-1} \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \sinh^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \sinh^{-1}(0) \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - 0 \approx 0.98665 \end{aligned}$$



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

