

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
875	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نکتہ بنائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1261 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1304 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم

1311 ا ضمیمہ اول

1313 ب ضمیمہ دوم

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

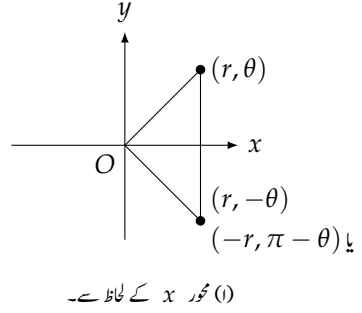
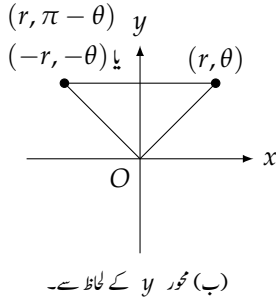
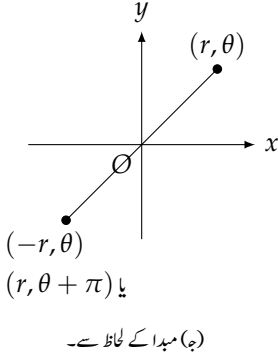
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 10.103: تشاکلی کے تین پرکھ۔

## 10.7 قطبی محدود میں ترسیم

اس حصہ میں مساوات کو قطبی محدود میں ترسیم کرنے کے تراکیب پر غور کیا جائے گا۔

### تشاکلی

قطبی محدود میں تشاکلی کا معیاری پرکھ شکل 10.103 میں دکھایا گیا ہے۔

قطبی ترسیمات کے ہرکھ تشاکلی

ا. محور x کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ  $(r, \theta)$  ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ  $(r, -\theta)$  یا  $(-r, \pi - \theta)$  بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل 10.103-ا)۔

ب. محور y کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ  $(r, \theta)$  ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ  $(r, \pi - \theta)$  یا  $(-r, -\theta)$  بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل 10.103-ب)۔

ج. مبداء کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ  $(r, \theta)$  ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ  $(-r, \theta)$  یا  $(r, \theta + \pi)$  بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل 10.103-ج)۔

ڈھلوان

قطبی منحنی  $r = f(\theta)$  کی ڈھلوان  $\frac{dy}{dx}$  ہے تاکہ  $r' = \frac{df}{d\theta}$ ۔ اس کی وجہ سمجھنے کی خاطر  $f$  کی ترسیم کو درج ذیل مقدار معلوم مساوات کی ترسیم فرض کریں۔

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$$

اگر  $f$  متغیر  $\theta$  کا قابل تفرق تفاعل ہو تب  $x$  اور  $y$  بھی  $\theta$  کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور جب  $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$  ہو تب ہم  $\frac{dy}{dx}$  کو درج ذیل مقدار معلوم کلیہ سے اخذ کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} && \text{مساوات 10.30} \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta) \cdot \sin \theta)}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta) \cdot \cos \theta)} \\ &= \frac{\frac{df}{d\theta} \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{\frac{df}{d\theta} \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} && \text{تفرق کا کلیہ ضرب} \end{aligned}$$

منحنی  $r = f(\theta)$  کی ڈھلوان جہاں  $(r, \theta)$  پر  $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$  ہونا ضروری ہے۔

$$(10.36) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(r, \theta)} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} \quad \frac{dx}{d\theta} \neq 0$$

اگر مبداء پر منحنی  $r = f(\theta)$  کا زاویہ  $\theta = \theta_0$  ہو تب  $f(\theta_0) = 0$  ہو گا اور مساوات 10.36 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(r, \theta)} = \frac{f'(\theta_0) \sin \theta_0}{f'(\theta_0) \cos \theta_0} = \tan \theta_0$$

اگر مبداء پر  $r = f(\theta)$  کا زاویہ  $\theta_0$  ہو تب مبداء پر منحنی کی ڈھلوان  $\tan \theta_0$  ہو گی۔ مبداء پر ڈھلوان کی بات کرتے ہوئے ہم کہتے ہیں " $(0, \theta)$ " پر ڈھلوان "ناکہ" مبداء پر ڈھلوان "کیونکہ قطبی منحنی مبداء سے کئی بار گزر سکتی ہے اور  $\theta$  کی مختلف قیمتوں کے لئے یہاں ڈھلوان مختلف ہو گی۔

مثال 10.32: قلب نما  
منحنی  $r = 1 - \cos \theta$  ترسیم کریں۔

حل: درج ذیل کی بنیاد پر منحنی محور  $x$  کے لحاظ سے متماثل ہے۔

$$\begin{aligned} (r, \theta) \text{ منحنی پر ہے} &\implies r = 1 - \cos \theta \\ &\implies r = 1 - \cos(-\theta) \quad \cos \theta = \cos(-\theta) \\ &\implies (r, \theta) \text{ بھی ترسیم پر ہے} \end{aligned}$$

جیسے جیسے  $\theta$  کی قیمت 0 سے  $\pi$  تک بڑھتی ہے،  $\cos \theta$  کی قیمت 1 سے -1 تک گھٹتی ہے اور  $r = 1 - \cos \theta$  کی قیمت کم سے کم قیمت 0 سے بڑھ کر زیادہ سے زیادہ قیمت 2 تک پہنچتی ہے۔  $\theta$  کی قیمت  $\pi$  سے  $2\pi$  تک بڑھانے سے  $\cos \theta$  کی قیمت -1 سے واپس 1 تک پہنچتی ہے اور  $r$  کی قیمت 2 سے واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ  $\cos \theta$  کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہے لہذا  $\theta = 2\pi$  کے بعد بھی منحنی دوبارہ حاصل ہوگی۔

یہ منحنی مبدا سے  $\tan(0) = 0$  ڈھلوان پر نکلتی ہے اور مبدا پر  $\tan(2\pi) = 0$  ڈھلوان پر پہنچتی ہے۔

ہم  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$  کی مختلف قیمتوں کے لئے  $r$  کی قیمتیں

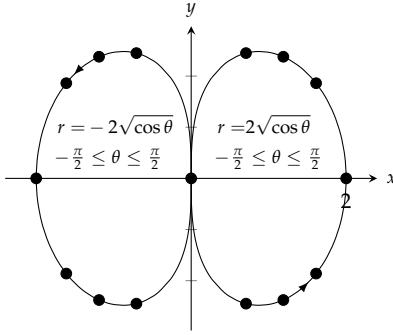
$\theta$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$r$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

معلوم کر کے ان نقطوں کو ترسیم کرتے ہیں جس کا تماس مبدا پر افقی ہو گا۔ محور  $x$  میں اس کا عکس لیتے ہوئے ہم ترسیم مکمل کرتے ہیں (شکل 10.104)۔ شکل 10.104 میں تیر کا نشان بڑھتی  $\theta$  کے رخ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ اس منحنی کی شکل قلب کی مانند ہے لہذا اس منحنی کو قلب نما کہتے ہیں۔ پھر کی اور چرخی پر تہہ در تہہ ہموار دھاگہ لپیٹنے کے لئے قلب نما اشکال کے کیم<sup>38</sup> استعمال کئے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ کئی ریڈیو اینٹینا کی شعاع بھی قلب نما ہوتی ہے۔ □

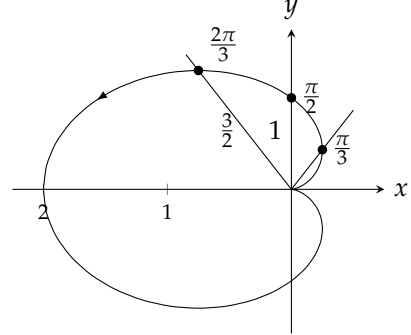
مثال 10.33: منحنی  $r^2 = 4 \cos \theta$  ترسیم کریں۔

حل: مساوات  $r^2 = 4 \cos \theta$  کے لئے ضروری ہے کہ  $\cos \theta \geq 0$  ہو لہذا پورا ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم  $\theta$  کو وقفہ  $-\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{\pi}{2}$  میں رکھتے ہیں۔ درج ذیل کی بنیاد پر منحنی محور  $x$  کے لحاظ سے متماثل ہے۔

$$\begin{aligned} (r, \theta) \text{ ترسیم پر ہے} &\implies r^2 = 4 \cos \theta \\ &\implies r^2 = 4 \cos(-\theta) \quad \cos \theta = \cos(-\theta) \\ &\implies (r, -\theta) \text{ بھی ترسیم پر ہے} \end{aligned}$$



شکل 10.105: ترسیم برائے (مثال 10.33)



شکل 10.104: قلب نما (مثال 10.32)

یہ ترسیم مبدا کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned}
 (r, \theta) \text{ ترسیم پر ہے} &\implies r^2 = 4 \cos \theta \\
 &\implies (-r)^2 = 4 \cos \theta \\
 &\implies \text{نقطہ } (-r, \theta) \text{ بھی ترسیم پر ہے}
 \end{aligned}$$

مذکورہ بالا دو تشاکلی کو ملا کر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور  $y$  کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہو گا۔

یہ ترسیم  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  اور  $\theta = \frac{\pi}{2}$  کے لئے مبدا سے گزرتی ہے۔ چونکہ ان زاویوں پر  $\tan \theta$  کی قیمت لامتناہی ہے لہذا مبدا پر ترسیم کا مماس انتصابی ہو گا۔ وقفہ  $-\frac{\pi}{2}$  تا  $\frac{\pi}{2}$  میں ہر  $\theta$  کے لئے کلیہ  $r^2 = 4 \cos \theta$  متغیر  $r$  کی درج ذیل دو قیمتیں دیتا ہے۔

$$r = \pm 2\sqrt{\cos \theta}$$

ہم اس وقفہ میں مختلف نقطے

$\theta$	0	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$r$	$\pm 2$	$\pm 1.9$	$\pm 1.7$	$\pm 1.4$	0

معلوم کر کر انہیں ترسیم کر کے ہموار منحنی سے آپس میں جوڑتے ہیں۔ مماس اور تشاکلی کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل منحنی حاصل کی جاتی ہے (شکل 10.105)۔

□

## تیزی سے ترسیم کا حصول

قطبی مساوات  $r = f(\theta)$  کو ترسیم کرنے کے لئے کہ ہم  $(r, \theta)$  کی قیمتوں کا جدول بنا کر ان نقطوں کو ترسیم کر کے بڑھتے  $\theta$  رخ انہیں ہموار لکیر سے ملاتے ہیں۔ اگر ہمارے پاس اتنے زیادہ نقطے ہوں کہ قطبی ترسیم کا ہر گھیرا اور چھ کا صاف نظر آتا ہو تب یوں ترسیم کرنا ٹھیک ہے۔ درج ذیل اقدام ترسیم کی ایک دوسری ترکیب بیان کرتے ہیں جو نسبتاً آسان اور تیز ثابت ہوتا ہے۔

ا. پہلے کارٹیس  $r\theta$  مستوی میں  $r = f(\theta)$  ترسیم کریں (یعنی  $\theta$  کی قیمتوں کو افقی اور مطابقتی  $r$  کی قیمتوں کو انتصابی محور پر رکھیں۔)

ب. اب کارٹیس ترسیم کو بطور جدول اور رہبر لیتے ہوئے قطبی ترسیم حاصل کریں۔

صرف نقطے ترسیم کرنے سے کارٹیس ترسیم اس لئے بہتر ہے کہ کارٹیس ترسیم سے جلد دیکھا جاسکتا ہے کہاں قیمتیں مثبت، منفی یا غیر موجود ہوتی ہیں۔ اس کے علاوہ  $r$  کا بڑھنا اور گھٹنا بھی واضح ہوتا ہے۔ ہم  $r = 1 + \cos(\frac{\theta}{2})$  اور  $r^2 = \sin 2\theta$  کو مثال بنا کر اس ترکیب کو دیکھتے ہیں۔

مثال 10.34: درج ذیل منفی ترسیم کریں۔

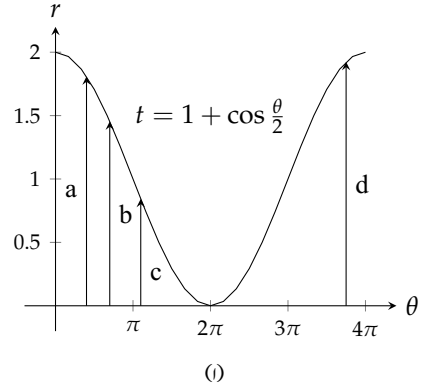
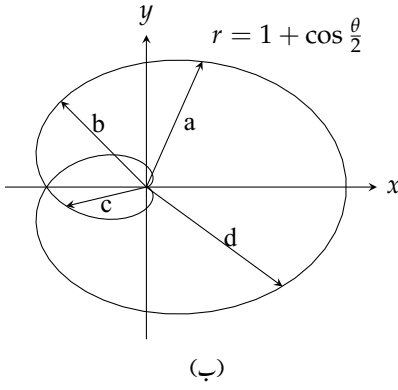
$$r = 1 + \cos \frac{\theta}{2}$$

حل: ہم پہلے  $r$  بالمقابل  $\theta$  کو کارٹیس  $r\theta$  مستوی میں ترسیم کرتے ہیں۔ چونکہ کوسائن کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہے لہذا مکمل ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم  $\theta$  کا وقفہ  $0$  تا  $2\pi$  لیں گے۔ کارٹیس مستوی پر محور  $\theta$  سے ترسیم تک لکیروں کی لمبائی (شکل 10.106-ا) قطبی ترسیم کا رداس  $r$  دیتی ہیں (شکل 10.106-ب)۔

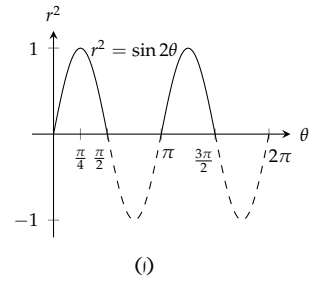
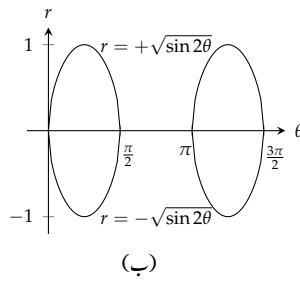
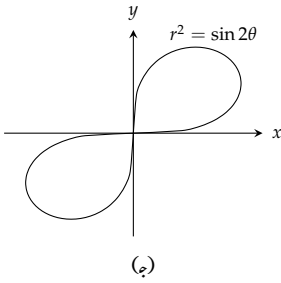
□

مثال 10.35: منفی  $r^2 = \sin 2\theta$  ترسیم کریں۔

حل: ہم  $r$  کی بجائے  $r^2$  بالمقابل  $\theta$  کو کارٹیس  $r^2\theta$  مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 10.107-ا) جہاں  $r^2$  کو متغیر تصور کیا گیا ہے جس کی قیمت مثبت کے ساتھ ساتھ منفی بھی ہو سکتی ہے۔ اس کے بعد ہم  $r = \pm \sqrt{\sin 2\theta}$  کو کارٹیس  $r\theta$  مستوی پر ترسیم کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل 10.107-ا کے نقطہ دار حصے کا جذر نہیں لیا جاسکتا ہے لہذا شکل 10.107-ب میں یہ حصے خالی رہتے ہیں جبکہ جذر کی بنا باقی حصے کے مثبت اور منفی حصے پائے جاتے ہیں۔ آخر میں ہم قطبی ترسیم حاصل کرتے ہیں۔ کارٹیس ترسیم (شکل 10.107-ب) دو بار قطبی ترسیم (شکل 10.107-ج) کو ڈھانپتا دیتا ہے۔ ہم کسی ایک گھیرا کو، یا دونوں گھیروں کے بالائی نصف یا دونوں کے گھیروں کے نچلے نصف استعمال کر سکتے تھے۔ البتہ دو بار ڈھانپنے سے کوئی نقصان نہیں ہوتا ہے اور ہم تقاضے کے رویہ کو بہتر سمجھ پاتے ہیں۔ □



شکل 10.106: ترسیمات برائے مثال 10.34



شکل 10.107: ترسیم برائے مثال 10.35



## قطبی قطب کے نقاط تقاطع کی تلاش

قطبی ترسیم میں ایک نقطہ کو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے لہذا یہ فیصلہ کرنے کے لئے خصوصی دھیان کرنا ہو گا کہ آیا کسی قطبی مساوات کی ترسیم پر ایک نقطہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح قطبی ترسیمات کے نقاط تقاطع معلوم کرتے ہوئے بھی دھیان رکھنا ضروری ہے۔ عین ممکن ہے کہ نقطہ تقاطع ایک ترسیم کو جن قطبی محدود مطمئن کرتا ہو، وہ ان قطبی محدود سے مختلف ہوں جن پر یہی نقطہ تقاطع دوسری قطبی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے تمام نقاط تقاطع دریافت ہوں۔ تمام نقاط تقاطع صرف مساوات ترسیم کر کے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

