

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

|     |                                       |     |
|-----|---------------------------------------|-----|
| 1   | ابتدائی معلومات                       | 1   |
| 1   | حقیقی اعداد اور حقیقی خط              | 1.1 |
| 15  | محدود، خطوط اور بڑھوتری               | 1.2 |
| 32  | تفاعل                                 | 1.3 |
| 54  | ترسیم کی منتقلی                       | 1.4 |
| 74  | تکوینیاتی تفاعل                       | 1.5 |
| 95  | حدود اور استمرار                      | 2   |
| 95  | تبدیلی کی شرح اور حد                  | 2.1 |
| 113 | حد تلاش کرنے کے قواعد                 | 2.2 |
| 126 | مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف | 2.3 |
| 146 | تصور حد کی توسیع                      | 2.4 |
| 165 | استمرار                               | 2.5 |
| 184 | مماسی خط                              | 2.6 |
| 199 | تفرق                                  | 3   |
| 199 | تفاعل کا تفرق                         | 3.1 |
| 221 | قواعد تفرق                            | 3.2 |
| 240 | تبدیلی کی شرح                         | 3.3 |
| 257 | تکوینیاتی تفاعل کا تفرق               | 3.4 |
| 277 | زنجیری قاعدہ                          | 3.5 |
| 294 | خفی تفرق اور ناطق قوت نما             | 3.6 |
| 310 | دیگر شرح تبدیلی                       | 3.7 |

|     |       |                                                          |
|-----|-------|----------------------------------------------------------|
| 325 | 4     | تفرق کا استعمال                                          |
| 325 | 4.1   | تفاعل کی انتہائی قیمتیں                                  |
| 340 | 4.2   | مسئلہ اوسط قیمت                                          |
| 356 | 4.3   | مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ              |
| 356 | 4.3.1 | پرکھ                                                     |
| 368 | 4.4   | $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم                             |
| 391 | 4.5   | $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء   |
| 418 | 4.6   | بہترین بنانا                                             |
| 442 | 4.7   | خط بندی اور تفرقات                                       |
| 465 | 4.8   | ترکیب نیوٹن                                              |
| 477 | 5     | تکمل                                                     |
| 477 | 5.1   | غیر قطعی تکملات                                          |
| 489 | 5.2   | تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی |
| 505 | 5.3   | تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق         |
| 516 | 5.4   | اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ                              |
| 534 | 5.5   | ریمان مجموعے اور قطعی تکملات                             |
| 561 | 5.6   | خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ                       |
| 578 | 5.7   | بنیادی مسئلہ                                             |
| 599 | 5.8   | قطعی تکمل میں بدل                                        |
| 605 | 5.9   | اعدادی تکمل                                              |
| 605 | 5.10  | قاعدہ ذوزرقہ                                             |
| 625 | 6     | تکمل کا استعمال                                          |
| 625 | 6.1   | منحنیات کے بیچ رقبہ                                      |
| 629 | 6.1.1 | تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد                               |
| 640 | 6.2   | تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش                                |
| 648 | 6.3   | اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا                          |
| 663 | 6.4   | تکلی چھلے                                                |
| 676 | 6.5   | مستوی منحنیات کی لمبائیاں                                |
| 687 | 6.6   | سطح طواف کا رقبہ                                         |
| 699 | 6.7   | معیار اثر اور مرکز کمیت                                  |
| 711 | 6.7.1 | وسطانی مرکز                                              |
| 716 | 6.8   | کام                                                      |
| 731 | 6.9   | فشار سیال اور قوت سیال                                   |
| 740 | 6.10  | بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال                        |
| 755 | 7     | ماورائی تفاعل                                            |
| 756 | 7.1   | الٹ تفاعل اور ان کے تفرق                                 |

|     |                                    |      |
|-----|------------------------------------|------|
| 774 | قدرتی لوگار تھم                    | 7.2  |
| 792 | قوت نمائی تفاعل                    | 7.3  |
| 807 | $\log_a x$ اور $a^x$               | 7.4  |
| 818 | افزائش اور تنزل                    | 7.5  |
| 832 | قاعدہ لھوپیٹال                     | 7.6  |
| 848 | اضافی شرح نمو                      | 7.7  |
| 853 | 7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش        |      |
| 859 | الٹ نیکونائی تفاعل                 | 7.8  |
| 875 | الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل   | 7.9  |
| 892 | ہذلولی تفاعل                       | 7.10 |
| 913 | ایک رتبہ تفرقی مساوات              | 7.11 |
| 931 | یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان | 7.12 |

|      |                           |  |
|------|---------------------------|--|
| 943  | 8 مکمل کے طریقے           |  |
| 943  | 8.1 مکمل کے بنیادی کلیات  |  |
| 959  | 8.2 مکمل بالخص            |  |
| 964  | 8.2.1 بار بار استعمال     |  |
| 974  | 8.3 جزوی کسر              |  |
| 989  | 8.4 نیکونائی بدل          |  |
| 1000 | 8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر |  |
| 1017 | 8.6 غیر مناسب مکمل        |  |

|      |                                                     |  |
|------|-----------------------------------------------------|--|
| 1043 | 9 لامتناہی تسلسل                                    |  |
| 1043 | 9.1 اعداد کی ترتیب کی حد                            |  |
| 1061 | 9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے                  |  |
| 1078 | 9.3 لامتناہی تسلسل                                  |  |
| 1097 | 9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ         |  |
| 1108 | 9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ          |  |
| 1118 | 9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ |  |
| 1129 | 9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز              |  |
| 1143 | 9.8 طاقی تسلسل                                      |  |
| 1160 | 9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل                          |  |
| 1172 | 9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے           |  |
| 1191 | 9.11 طاقی تسلسل کے استعمال                          |  |

|      |                                                 |  |
|------|-------------------------------------------------|--|
| 1211 | 10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود |  |
| 1211 | 10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں            |  |
| 1237 | 10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی    |  |

|                |        |                                          |
|----------------|--------|------------------------------------------|
| 1246 . . . . . | 10.3   | دو درجی مساوات اور گھومنا                |
| 1261 . . . . . | 10.4   | مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول |
| 1277 . . . . . | 10.5   | احصاء اور مقدار معلوم منحنیات            |
| 1291 . . . . . | 10.6   | قطبی محدود                               |
| 1303 . . . . . | 10.7   | قطبی محدود میں ترسیم                     |
| 1317 . . . . . | 10.8   | محروط حصوں کے قطبی مساوات                |
| 1319 . . . . . | 10.8.1 | دائرے                                    |
| 1333 . . . . . | 10.9   | قطبی محدود میں مکمل                      |

|                |        |                                          |
|----------------|--------|------------------------------------------|
| 1347           | 11     | سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری        |
| 1347 . . . . . | 11.1   | مستوی میں سمتیت                          |
| 1364 . . . . . | 11.2   | کار تہی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت |
| 1372 . . . . . | 11.2.1 | کرہ                                      |
| 1382 . . . . . | 11.3   | ضرب نقطہ                                 |
| 1383 . . . . . | 11.3.1 | حساب                                     |
| 1398 . . . . . | 11.4   | صلیبی ضرب                                |

|      |   |            |
|------|---|------------|
| 1407 | ا | ضمیمہ اول  |
| 1409 | ب | ضمیمہ دوم  |
| 1411 | ج | ضمیمہ تین  |
| 1413 | د | ضمیمہ چار  |
| 1415 | ه | ضمیمہ پانچ |
| 1417 | و | ضمیمہ چھ   |
| 1419 | ز | ضمیمہ سات  |
| 1421 | ح | ضمیمہ آٹھ  |
| 1423 | ط | ضمیمہ آٹھ  |

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 11.4 صلیبی ضرب

اس حصہ میں سمتیات کے ضرب کی دوسری قسم پر غور کیا جائے گا جس کو صلیبی ضرب کہتے ہیں۔ چونکہ صلیبی ضرب کا حاصل سمتی ہوتا ہے لہذا اس ضرب کو سمتی ضرب<sup>23</sup> بھی کہتے ہیں۔

برقیات، مقناطیسیات، صلیبی ضرب، حرکت سیال اور میکانیات مدار میں قوتوں کے اثرات پر غور میں صلیبی ضرب اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ انہیں صلیبی ضرب کے خواص پر غور کریں۔

## دو سمتیات کا صلیبی ضرب

ہم خلا میں دو غیر صفر سمتیات  $A$  اور  $B$  سے شروع کرتے ہیں۔ غیر متوازی سمتیات  $A$  اور  $B$  سطح کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ قاعدہ سے اس سطح پر عمودی اکائی سمتیہ  $n$  منتخب کرتے ہیں۔ یوں سطح میں  $A$  سے  $B$  کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیاں، زاویہ  $\theta$  موڑنے سے، انگوٹھا  $n$  کا رخ دے گا (شکل 11.49)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ  $0 \leq \theta \leq \pi$  لیا جاتا ہے۔ ہم سمتی ضرب  $A \times B$  کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

تعریف:

$$(11.27) \quad A \times B = (|A||B| \sin \theta)n$$

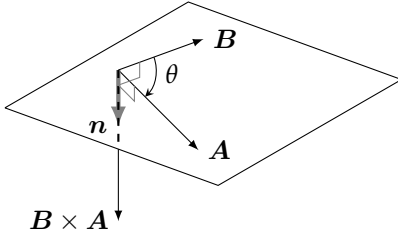
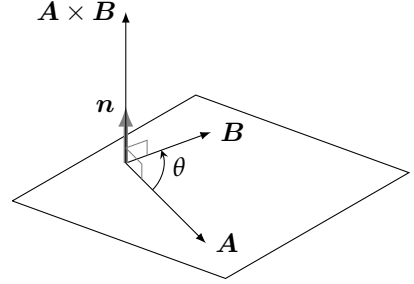
□

چونکہ سمتیہ  $A \times B$  اکائی عمودی سمتیہ  $n$  کا غیر سمتی مضرب ہے لہذا یہ  $A$  اور  $B$  دونوں کو عمودی ہوگا۔ سمتیات  $A$  اور  $B$  کے سمتی ضرب کو عموماً  $A$  اور  $B$  کا صلیبی ضرب<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ صلیبی ضرب کو صلیب کے نشان  $\times$  سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسی کی بنا یہ صلیبی ضرب کہلاتا ہے۔

چونکہ  $0$  اور  $\pi$  کے سائن صفر ہوتے ہیں لہذا ہم مساوات 11.27 میں دو غیر صفر متوازی سمتیات کے صلیبی ضرب کی تعریف  $0$  لیں گے۔

اگر  $A$  یا  $B$  صفر ہو تب ہم  $A \times B$  کی قیمت صفر لیں گے۔ یوں دو سمتیات  $A$  اور  $B$  کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہوگا جب  $A$  اور  $B$  متوازی ہوں یا ان میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ اس طرح غیر صفر سمتیات کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہوگا جب یہ متوازی ہوں۔

vector product<sup>23</sup>  
cross product<sup>24</sup>

شکل 11.50: صلیبی ضرب  $B \times A$ شکل 11.49: صلیبی ضرب  $A \times B$  $A \times B$  بالقابل  $B \times A$ 

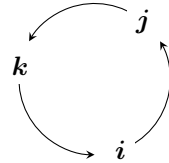
غیر صفر سمتی ضرب میں سمتیات کی ترتیب بدلنے سے حاصل ضرب کی سمت الٹ ہوتی ہے۔ اگر ہم سمتیہ  $B$  سے  $A$  کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیوں کو، زاویہ  $\theta$  موڑیں، تب ہمارا انگوٹھا پہلے رخ کا مخالف رخ دے گا (یہاں پہلے رخ سے مراد  $A \times B$  کے حصول میں انگوٹھے کا رخ ہے)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ  $0 \leq \theta \leq \pi$  لیا جاتا ہے۔ شکل 11.50 میں ان نتائج کو دکھایا گیا ہے۔ یوں تمام سمتیات  $A$  اور  $B$  کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(11.28) \quad B \times A = -(A \times B)$$

ضرب نقطہ کے برعکس صلیبی ضرب نا قابل تبادل<sup>25</sup> ہے۔

صلیبی ضرب کی تعریف  $i$ ،  $j$  اور  $k$  کی جوڑیوں پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جنہیں دکھائے گئے دائرے سے با آسانی یاد رکھا جاسکتا ہے۔

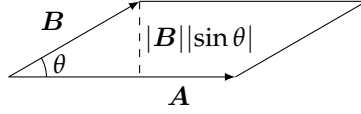
$$(11.29) \quad \begin{aligned} i \times j &= -(j \times i) = k \\ j \times k &= -(k \times j) = i \\ k \times i &= -(i \times k) = j \end{aligned}$$



اکائی سمتیات کے ہم صلیبی ضرب صفر ہوں گے:

$$\begin{aligned} i \times i &= (|i||i| \sin 0^\circ) n = ((1)(1)(0)) n = 0 \\ j \times j &= (|j||j| \sin 0^\circ) n = ((1)(1)(0)) n = 0 \\ k \times k &= (|k||k| \sin 0^\circ) n = ((1)(1)(0)) n = 0 \end{aligned}$$

non commutative<sup>25</sup>



شکل 11.51: متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ ضرب قد کے برابر ہوتا ہے۔

صلیبی ضرب  $A \times B$  متوازی الاضلاع کا رقبہ ہو گا

چونکہ  $n$  اکائی سمتیہ ہے لہذا  $A \times B$  کی مقدار

$$(11.30) \quad |A \times B| = |A||B|\sin\theta|n| = |A||B|\sin\theta$$

ہو گی جو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جس کے ضلع  $A$  اور  $B$  ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ  $|A|$  جبکہ اس کا قد  $|B \sin\theta|$  ہے (شکل 11.51)۔

قوت مروڑ

نقطہ  $N$  پر چول کے ساتھ سلاخ کا ایک سر منسلک ہے جس کے دوسرے سے پر قوت  $F$  عمل کرتی ہے۔ چول سے سلاخ کے دوسرے سر تک ہٹاؤ کو سمتیہ  $r$  ظاہر کرتا ہے (شکل 11.52)۔ قوت مروڑ کی مقدار سے مراد ہم  $r$  کی لمبائی ضرب قوت کا وہ حصہ جو  $r$  کو عمودی ہے، لیتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار کو

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار} = |r||F|\sin\theta$$

یا  $|r \times F|$  لکھ سکتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ قاعدہ سے حاصل اکائی سمتیہ  $n$  استعمال کرتے ہوئے قوت مروڑ سمتیہ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

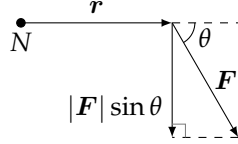
$$\text{قوت مروڑ سمتیہ} = (|r||F|\sin\theta)n = r \times F$$

یاد رہے کہ (غیر صفر سمتیات کی صورت میں)  $A \times B$  تب 0 ہوتا ہے جب  $A$  اور  $B$  متوازی ہوں۔ قوت مروڑ کی تعریف عین اس حقیقت کے مطابق ہے۔ یوں اگر قوت عین سلاخ کے متوازی عمل کرے تب حاصل قوت مروڑ صفر ہو گا۔

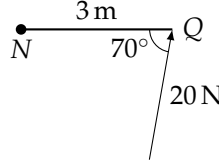
مثال 11.26: قوت مروڑ کی مقدار شکل 11.53 میں درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} |\vec{NQ} \times \vec{F}| &= |\vec{NQ}||F|\sin 70^\circ & \text{مساوات 11.30} \\ &\approx (3)(20)(0.94) \\ &\approx 56.4 \text{ N m} \end{aligned}$$

□



شکل 11.52: قوت مروڑ۔



شکل 11.53: قوت مروڑ (مثال 11.26)۔

قوانین تلازم اور تقسیم

صلیبی ضرب عام طور غیر تلازمی ہو گا چونکہ  $(A \times B) \times C$  سمتیات  $A$  اور  $B$  کے مستوی میں پایا جاتا ہے جبکہ  $A \times (B \times C)$  سمتیات  $B$  اور  $C$  کے مستوی میں پایا جاتا ہے۔ اس کے باوجود درج ذیل قواعد مطمئن ہوتے ہیں۔

$$(11.31) \quad (rA) \times (sB) = (rs)(A \times B) \quad \text{غیر سمتی قاعدہ تقسیم}$$

$$(11.32) \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{سمتی قاعدہ تقسیم}$$

$$(11.33) \quad (B + C) \times A = B \times A + C \times A \quad \text{سمتی قاعدہ تقسیم}$$

مساوات 11.31 کی ایک مخصوص صورت درج ذیل ہے۔

$$(11.34) \quad (-A) \times B = A \times (-B) = -(A \times B)$$

غیر سمتی قاعدہ تقسیم ثابت کرنے کی خاطر مساوات 11.31 کے دونوں اطراف پر مساوات 11.27 عائد کر کے نتائج کا موازنہ کریں۔ سمتی قاعدہ تقسیم مساوات 11.32 کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس کی حقیقت کو یہاں تسلیم کرتے ہیں۔ اس کا ثبوت ضمیمہ Z میں پیش کیا گیا ہے۔ مساوات 11.33 کو مساوات 11.32 سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.32 کے دونوں اطراف کو  $-1$  سے ضرب کر کے حاصل اجزاء کے مقام تبدیل کریں۔

$A \times B$  کا کلیہ بذریعہ مقطع

ہم  $A \times B$  کا حساب کارتیسی محدودی نظام میں  $A$  اور  $B$  سے کرنا چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad B = b_1 i + b_2 j + a_3 k$$

قواعد تقسیم اور  $i$ ،  $j$  اور  $k$  کے قواعد ضرب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} A \times B &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + a_3 k) \\ &= a_1 b_1 i \times i + a_1 b_2 i \times j + a_1 b_3 i \times k \\ &\quad + a_2 b_1 j \times i + a_2 b_2 j \times j + a_2 b_3 j \times k \\ &\quad + a_3 b_1 k \times i + a_3 b_2 k \times j + a_3 b_3 k \times k \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \end{aligned}$$

مذکورہ بالا مساوات کا آخری حصہ قالب

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

کو کھول کر ملتا ہے۔

یوں اگر سمتیات  $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$  اور  $B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$  ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(11.35) \quad A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال 11.27:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

□

مثال 11.28:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

□

مثال 11.29:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

□

مثال 11.30:

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5(1-3) - 3(2+4) + 1(6+4) = 10 - 18 + 10 = 2$$

□

مثال 11.31: صلیبی ضرب  $A \times B$  اور  $B \times A$  درج ذیل سمتیات کے لئے حاصل کریں۔

$$A = 2i + j + k, \quad B = -4i + 3j + k$$

حل:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$= -2i - 6j + 10k$$

$$B \times A = -(A \times B) = 2i + 6j - 10k$$

□

مثال 11.32: ایک مستوی پر نقاط  $P(1, -1, 0)$ ،  $Q(2, 1, -1)$  اور  $R(-1, 1, 2)$  پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کو عمودی سمتیہ تلاش کریں۔



حل: سمتیات  $\vec{PQ}$  اور  $\vec{PR}$  اس سطح میں پائے جائیں گے۔ چونکہ سمتیہ  $\vec{PQ} \times \vec{PR}$  ان دونوں سمتیات کو عمودی ہے لہذا یہ مستوی کو بھی عمودی ہو گا۔ اجزاء کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\vec{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (-1-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\vec{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (2-0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

□

مثال 11.33: ایک مثلث کے راس  $P(1, -1, 0)$ ،  $Q(2, 1, -1)$  اور  $R(-1, 1, 2)$  ہیں۔ اس مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: سمتیات  $\vec{PQ}$  اور  $\vec{PR}$  جس متوازی الاضلاع کے ضلع ہوں اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| &= |6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = 6\sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{مثال 11.32}$$

□

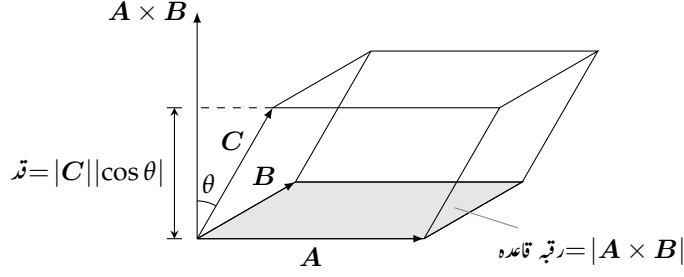
مثلث کا رقبہ اس کا نصف  $3\sqrt{2}$  ہو گا۔

مثال 11.34: سطح  $P(1, -1, 0)$ ،  $Q(2, 1, -1)$  اور  $R(-1, 1, 2)$  کا عمودی اکائی سمتیہ  $\mathbf{n}$  دریافت کریں۔

حل: چونکہ  $\vec{PQ} \times \vec{PR}$  مستوی کو عمودی ہے لہذا  $\mathbf{n}$  کا رخ یہی سمتیہ دے گا۔ ہم اس سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کر کے عمودی اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں۔

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

چونکہ سطح کے دو آپس میں مخالف رخ عمودی سمتیات پائے جاتے ہیں لہذا اس سطح کا دوسرا عمودی اکائی سمتیہ  $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$  ہو گا۔ □



شکل 11.54: مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ ضرب قد کے برابر ہو گا۔

غیر سمتی سے ضرب

ضرب  $(A \times B) \cdot C$  کو  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کا غیر سمتی سے ضرب کہتے ہیں جہاں سمتیات کی ترتیب یہی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں (شکل 11.54) کہ غیر سمتی سے ضرب کی مطلق قیمت

$$|(A \times B) \cdot C| = |A \times B| |C| \cos \theta$$

اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم دیتی ہے جس کے اضلاع  $A$ ،  $B$  اور  $C$  ہوں۔ مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ  $|A \times B|$  اور اس کے قد  $|C| \cos \theta$  کا حاصل ضرب نقطہ

$$\begin{aligned} \text{حجم} &= (\text{قد}) \cdot (\text{رقبہ قاعدہ}) \\ &= |A \times B| \cdot |C| \cos \theta \\ &= |(A \times B) \cdot C| \end{aligned}$$

ہو گا۔

سمتیات  $A$  اور  $B$  کی سطح کو شکل 11.54 میں قاعدہ دکھایا گیا ہے۔ ہم سمتیات  $B$  اور  $C$  کی سطح یا سمتیات  $A$  اور  $C$  کی سطح کو قاعدہ لے کر بھی حجم تلاش کر سکتے ہیں۔ چونکہ حجم اٹل قیمت ہے لہذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(11.36) \quad (A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$$

اب غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے لہذا مساوات 11.36 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(11.37) \quad (A \times B) \cdot C = A \cdot (A \times C)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر سمتی سے ضرب میں سمتیات کا مقام تبدیل کئے بغیر صلیبی ضرب اور نقطہ ضرب کے مقامات کو بدلا جاسکتا ہے۔

غیر سمتی سہ ضرب کی قیمت مقطع سے حاصل کی جاسکتی ہے:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= A \cdot \left[ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k \right] \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(11.38) \quad A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال 11.35: سمتیات  $A = i + 2j - k$ ،  $B = -2i + 3k$  اور  $C = 7j - 4k$  ایک مستطیلی متوازی السطوح بناتے ہیں۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -21 - 16 + 13 = -23 \end{aligned}$$

□

یوں حجم  $|A \cdot (B \times C)| = 23$  ہو گا۔

سوالات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



ضمیمہ ج

ضمیمہ تین





ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چھ



ضمیمہ ز

ضمیمہ سات





ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

