

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
73	نکونائی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
111	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
124	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
129	ضمیمہ دوم	1

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 2

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکنیکیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں باضابطہ وضع کرتے ہیں۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔ کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔ دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔ تفاعل کی تفرق، جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 1: ایک پتھر 100 m اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے دارانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہوگی؟
حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔ یوں پہلی t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(الف) \quad پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2-0} = 9.8 \text{ m s}^{-1} \text{ ہوگی۔}$$

$$(ب) \quad پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(1)^2}{2-1} = 14.7 \text{ m s}^{-1} \text{ ہوگی۔}$$

□

مثال 2: پتھر کی رفتار $t = 1 \text{ s}$ اور $t = 2 \text{ s}$ پر تلاش کریں۔
حل: ہم وقتی وقفہ $[t_0, t_0 + h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

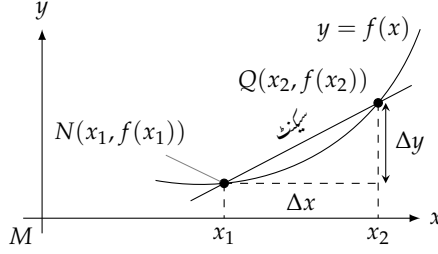
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا درج بالا کلیہ میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے "لمحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں $t_0 = 1$ اور $t_0 = 2$ کے لئے $h = 0.1, 0.01, \dots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

h	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ کے لئے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار 9.8 m s^{-1} کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ پر پتھر کی رفتار 9.8 m s^{-1} ہوگی۔ اسی طرح $t_0 = 2$ پر پتھر کی رفتار 19.6 m s^{-1} نظر آئے گی۔

□



شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سکینٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

اوسط شرح تبدیلی اور سکینٹ خطوط

x کے لحاظ سے متعلق $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1, x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1, x_2]$ پر $y = f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔ جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گزرتے ہوئے خط کو ترسیم کا سکینٹ¹ کہتے ہیں۔ یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سکینٹ NQ کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

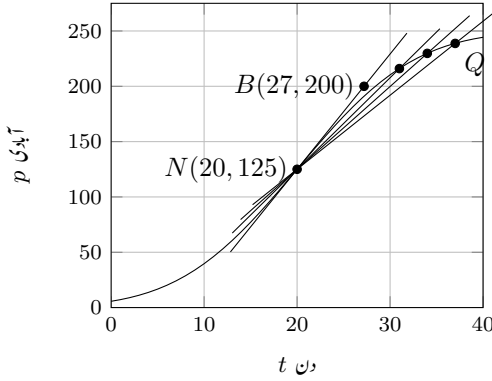
مثال 3: نمو آبادی کی اوسط شرح

ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔ تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

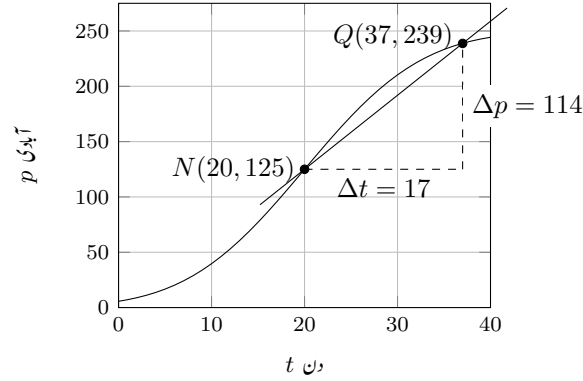
حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔ یوں $239 - 125 = 114$ تبدیل رونما ہوئی۔ یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7 \text{ (کھیاں فی دن)}$$

¹ secant



شکل 2.3: کبھی کی بیسیوں دن نمو آبادی



شکل 2.2: کبھی کی نمو آبادی

□

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔

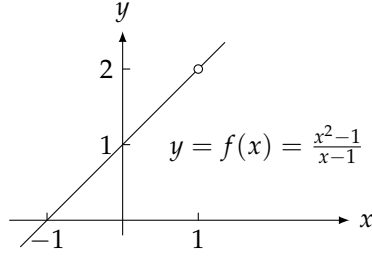
درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔ اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

مثال 4: مثال 3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟
حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
(37, 239)	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
(35, 230)	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
(32, 216)	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
(27, 200)	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو چھوتا ہے۔ اس خط کو دیے گئے منحنی کا مماس² کہتے ہیں۔ اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 کھیاں فی دن ہو گی۔

□



شکل 2.4: شکل برائے مثال 5

لحہ $t = 1$ اور لحہ $t = 2$ پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو لحاقی شرح تبدیلی³ کہتے ہیں۔ جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لحاقی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔ درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔ لحاقی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔ اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم حد⁴ کہتے ہیں۔

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5: تفاعل $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ نقطہ $x = 1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟
حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا مساوی $x = 1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے f تعین کرتا ہے۔ کسی بھی $x \neq 1$ کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$$

یوں خط $y = x + 1$ جس سے نقطہ $x = 1$ یعنی $(1, 2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔ اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

$x (\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 تک پہنچنے سے $f(x)$ کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا x ایک تک پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

□

x کی قیمت x_0 تک پہنچنے کو $x \rightarrow x_0$ لکھا جاتا ہے۔

تعریف: حد کی غیر رسمی تعریف

فرض کریں کہ x_0 کی پڑوس میں ایک کھلے وقفہ پر تقابل $f(x)$ معین ہے۔ یہ تقابل نقطہ x_0 پر غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لئے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 تک پہنچنے سے f کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

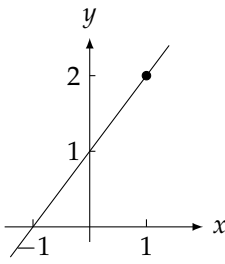
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراہ پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد $10 \mu\text{m}$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف جلد پیش کریں گے۔

مثال 6: $x \rightarrow x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجودیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں f کا $x \rightarrow 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تقابل g کا $x \rightarrow 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تقابل h کا $x \rightarrow 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں

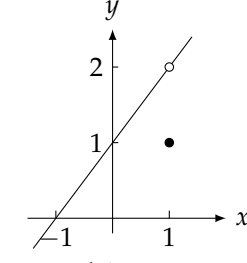
□

یعنی $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$



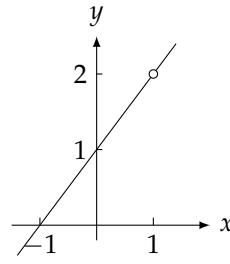
$$h(x) = x + 1$$

(ج)



$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(ب)



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

(ا)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 \quad \text{شکل 2.5}$$

بعض اوقات $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کی مثال تقاض $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور ٹکونیاتی تقاض کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہو۔

مثال 7:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 13} (4) = 4 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7 \quad \text{د.}$$

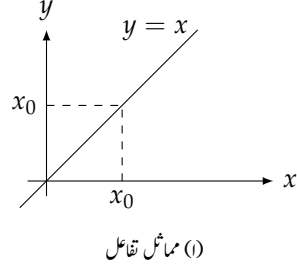
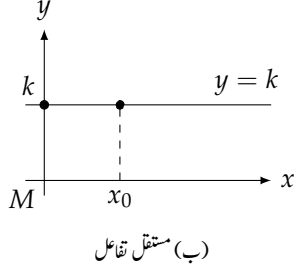
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3} \quad \text{ه.}$$

□

مثال 8:

ا. اگر f مماثل تقاض $f(x) = x$ ہو تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہوگا (شکل 2.6-ل)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$



شکل 2.6: اشکال برائے مثال 7

ب. اگر f مستقل تقاقل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

□

مثال 9: عین ممکن ہے کہ تقاقل کے دائرہ کار میں تقاقل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔
درج ذیل تقاقل کا $x \rightarrow 0$ پر رویہ کیسا ہو گا؟

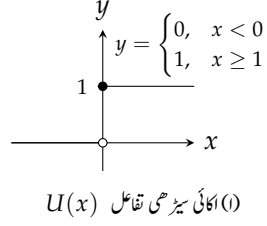
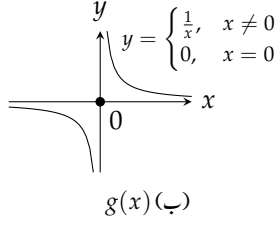
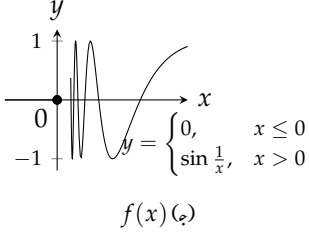
$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ا.}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{ج.}$$

حل:

ا. اکائی میٹر ہی تقاقل $U(x)$ کا $x \rightarrow 0$ پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تقاقل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لئے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لئے U کی قیمت 1 ہے۔ یوں 0 کے قریب پہنچنے سے U کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔



شکل 2.7: اشکال برائے مثال 9

ب. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔ اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

□

سوالات 2.1

ترسیم سے حد

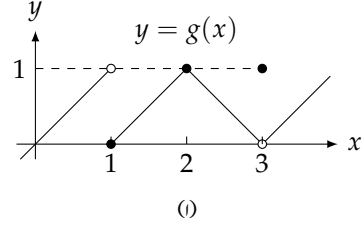
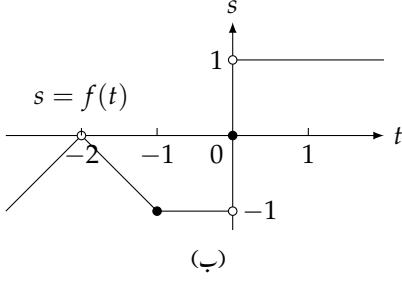
سوال 1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ب. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ج. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

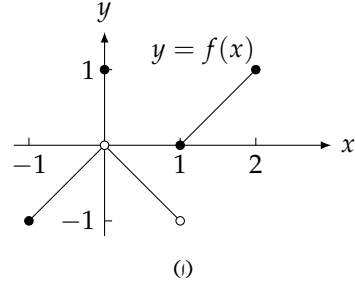
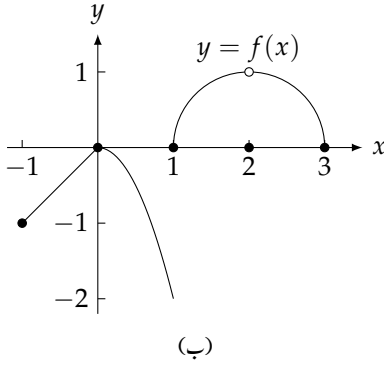
سوال 2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{t \rightarrow -2} f(t)$ ب. $\lim_{t \rightarrow -1} f(t)$ ج. $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$

سوال 3: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ا) کے لئے درج ذیل فقرہ میں سے کون سے درست ہیں؟



شکل 2.8: اشکال برائے سوال 1 اور سوال 2



شکل 2.9: اشکال برائے سوال 3 اور سوال 4

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے} \quad .$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ وقفہ } (-1, 1) \quad .$$

میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad .$$

سوال 4: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ وقفہ } (1, 3) \text{ میں}$$

ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ موجود نہیں ہے}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ وقفہ } (-1, 1)$$

میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ موجود نہیں ہے}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \quad .$$

وجودیت اور حد

سوال 5 اور سوال 6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

سوال 5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

سوال 6: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

سوال 7: فرض کریں کہ مساوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 8: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1, 1]$ میں تمام x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 9: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟ اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

سوال 10: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ لازماً موجود ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ لازماً ہو گا؟ کیا ہم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11: $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $-3.1, -3.01, -3.001, \dots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس نقاط $-2.9, -2.99, \dots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. تفاعل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \rightarrow -3$ کے لئے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

سوال 12: $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینی قیمتوں $x = 1.4, 1.41, 1.414, \dots$ پر تقابل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0 = \sqrt{2}$ کے قریب تقابل ترسیم کریں۔ $x \rightarrow \sqrt{2}$ کے لئے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 13: $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $x = -5.9, -5.99, -5.999, \dots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس $x = -6.1, -6.01, -6.001, \dots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہو گا؟

ب. G کو $x_0 = 6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x \rightarrow -6$ کے لئے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 14: $h(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$ لیں۔

ا. نقاط $x = 2.9, 2.99, 2.999, \dots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کے برعکس $x = 3.1, 3.01, 3.001, \dots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. $x_0 = 3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x \rightarrow 3$ کے لئے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 15: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے $x \rightarrow -1$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 16: $F(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{2 - |x|}$ لیں۔

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -2$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ ترسیم سے $x \rightarrow -2$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 17: $g(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ لیں۔

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 18: $G(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$ لیں۔

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $t_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{t \rightarrow 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $1 \rightarrow x$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 20: $f(x) = \frac{3^x - 1}{x}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $0 \rightarrow x$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 21 تا 28 میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو تقابل میں پر کرتے ہوئے تقابل کی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$

سوال 22: $\lim_{x \rightarrow 0} 2x$

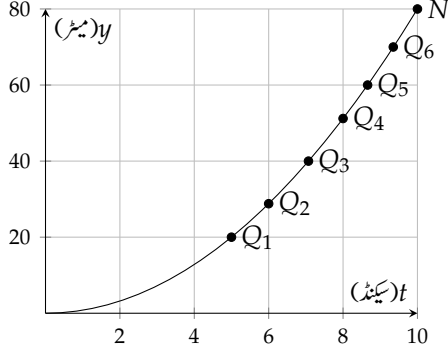
سوال 23: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x - 1)$

سوال 24: $\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال 25: $\lim_{x \rightarrow -1} 3x(2x - 1)$

سوال 26: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 27: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin x$



شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالقابل وقت ترسیم

سوال 28: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{1 - \pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے وقفہ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

سوال 29: $f(x) = x^3 + 1$ (الف) $[2, 3]$ ، (ب) $[-1, 1]$

سوال 30: $g(x) = x^2$ (الف) $[-1, 1]$ ، (ب) $[-2, 0]$

سوال 31: $h(t) = \cos t$ (الف) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ، (ب) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

سوال 32: $g(t) = 2 + \cos t$ (الف) $[0, \pi]$ ، (ب) $[-\pi, \pi]$

سوال 33: $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ $[0, 2]$

سوال 34: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ $[1, 2]$

سوال 35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ NQ_1 ، NQ_2 ، \dots ، NQ_6 کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10$ s پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔ (الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے 1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

سوال 37: $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x = 2$ ، $\frac{11}{10}$ ، $\frac{101}{100}$ ، $\frac{1001}{1000}$ اور $x = 1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔ (الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $x \neq 1$ کے لئے وقفہ $[1, x]$ پر تقابل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔ (ب) $x = 1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔ اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 38: $x \geq 0$ کے لئے $g(x) = \sqrt{x}$ لیں۔

ا. وقفہ $[1, 2]$ ، $[1, 1.5]$ اور $[1, 1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ کے لئے x کے لحاظ سے وقفہ $[1, 1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x = 1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h \rightarrow 0$ کے لئے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 39: $t \neq 0$ کے لئے $f(t) = \frac{1}{t}$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t = 2$ تا $t = 3$ اور (ب) وقفہ $t = 2$ تا $t = T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T = 2.1$ ، $T = 2.01$ ، $T = 2.001$ ، $T = 2.0001$ اور $T = 2.000001$ کے لئے وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t = 2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \rightarrow 2$ کے لئے تلاش کریں۔ ($T = 2$ پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجھنا کرنا ہو گا۔)

سوال 40 تا سوال 45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔ (الف) نقطہ x_0 کے قریب متفاعل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر متفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 40: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

سوال 41: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$

سوال 42: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

سوال 43: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

سوال 44: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

سوال 45: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3 - 3 \cos x}$

2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔ پہلے تین مسئلے مثال 8 کے نتائج کو لے کر کشیر رکنی، ناطق متفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔ چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقنوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 1: حد کے خواص
اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ اور $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ہوں، جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M \quad \text{قاعدہ مجموعہ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M \quad \text{قاعدہ فرق:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M \quad \text{قاعدہ ضرب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = kL \quad (k \text{ مستقل عدد ہے}) \quad \text{قاعدہ ضرب مستقل:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0 \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}} \quad \text{اگر } m \text{ اور } n \text{ عدد صحیح ہوں تب } L^{\frac{m}{n}} \text{ ہوگا بشرطیکہ } L^{\frac{m}{n}} \text{ حقیقی عدد ہو۔} \quad \text{قاعدہ طاقت:}$$

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا مجموعہ ہوگا۔
2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا فرق ہوگا۔
3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا حاصل ضرب ہوگا۔
4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہوگا۔
5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا حاصل تقسیم ہوگا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔
6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہوگا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 1: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$ تلاش کریں۔

حل: مثال 8 کے نتائج $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ اور $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

حاصل ضرب یا طاقت $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = (\lim_{x \rightarrow c} x)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c \cdot c = c^2$ ا.

ب. $\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5 = c^2 + 5$ مجموعہ اور (i)

ج. $\lim_{x \rightarrow c} 4x^2 = 4 \lim_{x \rightarrow c} x^2 = 4c^2$ ضرب مستقل اور (i)

د. $\lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3 = 4c^2 - 3$ فرق اور (ج)

حاصل ضرب اور (i) یا طاقت $\lim_{x \rightarrow c} x^3 = (\lim_{x \rightarrow c} x^2)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c^2 \cdot c = c^3$ د.

مجموعہ، (ج) اور (د) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x - 3) = \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = c^3 + 4c^2 - 3$ د.

حاصل تقسیم، (د) اور (ب) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)} = \frac{c^3 + 4c^2 - 3}{c^2 + 5}$ د.

□

مثال 2: $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$ تلاش کریں۔
حل:

مثال 1-د اور $n = \frac{1}{2}$ کے ساتھ قاعدہ طاقت $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{4(-2)^2 - 3} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$

□

مسئلہ 1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x \rightarrow c$ کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں۔ ناطق تفاعل کا حد $x \rightarrow c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2: کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا
اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

مسئلہ 3: غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا

فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c) \neq 0$ ہے تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 3:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

□

یہ ایک ہی قدم میں مثال 1 کا حل ہے۔

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے اسقاط

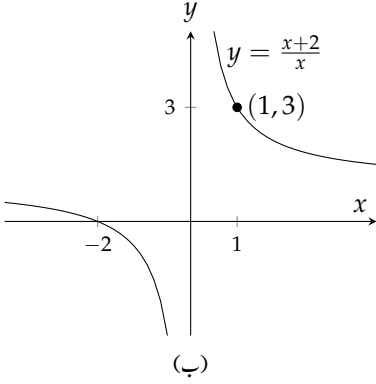
مسئلہ 3 ناطق تفاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تفاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔ صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹتے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پر کرنے سے حد حاصل کیا جاسکتا ہے۔ درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x = 1$ پر صفر ہیں۔ یوں $(x - 1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جاسکتا ہے۔

مثال 4: یکساں جزو کی منسوخی

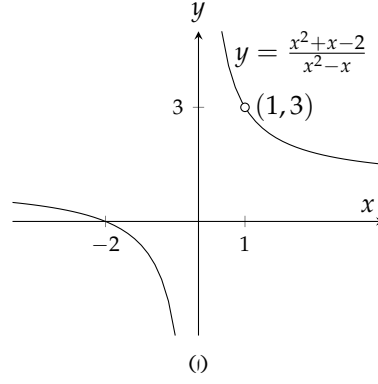
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} \text{ تلاش کریں۔}$$

حل: ہم $x = 1$ پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہوگا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے۔ البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}$$



(ب)



(i)

شکل 2.11: ماسوائے نقطہ (1, 3) کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

اب $x \neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$

شکل 2.11 میں $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ اور $y = \frac{x+2}{x}$ کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔ یہ ترسیم صرف نقطہ (1, 3) پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ البتہ اس نقطہ پر دونوں تقابل کا حد ایک جیسا ہے۔ □

مثال 5: ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \text{ تلاش کریں۔}$$

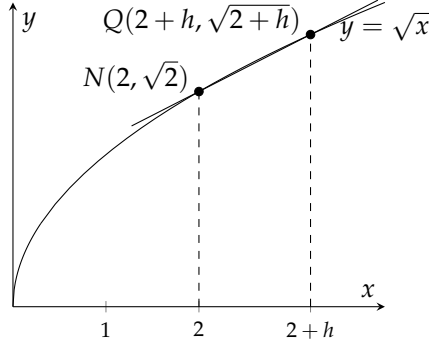
حل: ہم $h = 0$ پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نم اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔ البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔ نسب نما میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{2 + h - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے

جس کو ہم کاٹتے ہیں

conjugate expression⁵



شکل 2.12: $Q \rightarrow N$ کرنے سے سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے

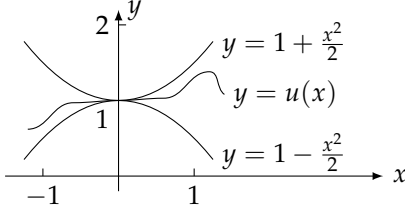
یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} \quad \text{نسب نما اب } h=0 \text{ پر صفر نہیں ہے} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

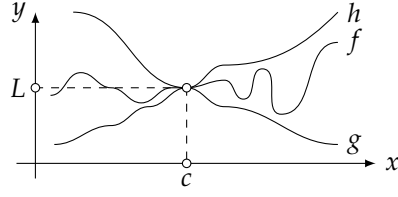
دھیان رہے کہ تقابل $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ درحقیقت تقابل $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2, \sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h, \sqrt{2+h})$ کے بیچ سیکنٹ کی ڈھلوان ہے اور $h \rightarrow 0$ کرنے سے مراد $Q \rightarrow N$ ہے۔ نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ ہم نے دیکھا کہ اس سیکنٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □

مسئلہ بیچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔ اس کو مسئلہ بیچ اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تقابل f سے ہے جس کی قیمتیں تقابل g اور تقابل h کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تقابل کے بیچ پھنسے ہوئے تقابل کی قیمت L ہوگی (شکل 2.13)۔ اس کا ثبوت ضمیمہ امیں دیا گیا ہے۔



شکل 2.14: شکل برائے مثال 6



شکل 2.13: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔

مسئلہ 4: مسئلہ بیچ

فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو، میں (ممکن ہے کہ) مساوی x = c پر تمام x کے لئے

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ہے۔ مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

ہے۔ تب $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ہو گا۔

مثال 6: اگر تمام $x \neq 0$ کے لئے $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ تلاش کریں۔
حل: چونکہ

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2}) = 1$$

□

ہیں لہذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل 2.14)۔

مثال 7: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ ہو گا۔

حل: چونکہ $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ہے، اور $-|f(x)|$ اور $|f(x)|$ کا حد 0 ہے لہذا مسئلہ بیچ کے تحت $f(x)$ کا حد بھی 0 ہو گا۔

□

سوالات 2.2

حد کا حساب

سوال 1 تا سوال 16 میں حد تلاش کریں۔

سوال 1: $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$

سوال 2: $\lim_{x \rightarrow 12} (10 - 3x)$

سوال 3: $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$

سوال 4: $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

سوال 5: $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$

سوال 6: $\lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}} 3s(2s - 1)$

سوال 7: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+6}$

سوال 8: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4}{x-7}$

سوال 9: $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5-y}$

سوال 10: $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 11: $\lim_{x \rightarrow -1} 3(2x - 1)^2$

سوال 12: $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^{1984}$

سوال 13: $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{\frac{4}{3}}$

2.2. حد تلاش کرنے کے قواعد

$$\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{\frac{1}{3}} \quad \text{سوال 14:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1} \quad \text{سوال 15:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2} \quad \text{سوال 16:}$$

سوال 17 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} \quad \text{سوال 17:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3} \quad \text{سوال 18:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5} \quad \text{سوال 19:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2} \quad \text{سوال 20:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1} \quad \text{سوال 21:}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} \quad \text{سوال 22:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2} \quad \text{سوال 23:}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2} \quad \text{سوال 24:}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4-1}{u^3-1} \quad \text{سوال 25:}$$

$$\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^3-8}{v^4-16} \quad \text{سوال 26:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \quad \text{سوال 27:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} \quad \text{سوال 28:}$$

سوال 29: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

سوال 30: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

قواعد حد کا استعمال

سوال 31: فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ 1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)} \\ &= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1 + 7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

سوال 32: فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 5$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$ ہیں۔ مسئلہ 1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (p(x)(4-r(x)))} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 5h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} (4-r(x)))} && \text{(ب)} \\ &= \frac{\sqrt{5 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} 4 - \lim_{x \rightarrow 1} r(x))} && \text{(پ)} \\ &= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

سوال 33: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$ اور $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + 3g(x)) \quad \text{ج.} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)} \quad \text{د.} \quad \lim_{x \rightarrow c} 2f(x)g(x) \quad \text{ب.}$$

سوال 34: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ اور $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^2 \quad \text{ج.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3) \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x)-1} \quad \text{د.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} xf(x) \quad \text{ب.}$$

سوال 35: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$ اور $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow b} 4g(x) \quad \text{ج.} \quad \lim_{x \rightarrow b} (f(x) + g(x)) \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{د.} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) \quad \text{ب.}$$

سوال 36: $\lim_{x \rightarrow -2} p(x) = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} r(x) = 0$ اور $\lim_{x \rightarrow -2} s(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4p(x)+5r(x)}{s(x)} \quad \text{ج.} \quad \lim_{x \rightarrow -2} (p(x) + r(x) + s(x)) \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x) \quad \text{ب.}$$

اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لہجائی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنیاد احصاء میں عموماً درپیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سوال 37 تا سوال 42 میں اس حد کو دیے گئے x پر تفاعل $f(x)$ کے لئے تلاش کریں۔

$$f(x) = x^2, \quad x = 1 \quad \text{سوال 37}$$

$$f(x) = x^2, \quad x = -2 \quad \text{سوال 38}$$

سوال 39: $f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$

سوال 40: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = -2$

سوال 41: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$

سوال 42: $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$

مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 43: اگر $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے $\sqrt{5-2x} \leq f(x) \leq \sqrt{5-x^2}$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ تلاش کریں۔

سوال 44: اگر تمام x کے لئے $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال 45: (الف) یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$$

(ب) $-2 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ ، $y = \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$ اور $y = 1$ ترسیم کریں۔ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

سوال 46: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لئے مطمئن ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(ب) $-2 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$ ، $y = \frac{1-\cos x}{x^2}$ اور $y = \frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ ان ترسیم کا رویہ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے کیا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر $[-1, 1]$ میں x کے لئے $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ اور $x < -1$ اور $x > 1$ کے لئے $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 48: فرض کریں کہ تمام $x \neq 2$ کے لئے $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -5$ ہے۔ کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا $f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہات پیش کریں۔

سوال 49: اگر $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ کیا ہو گا؟

سوال 50: اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال 51: (الف) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
(ب) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 4$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کیا ہو گا؟

سوال 52: اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گے؟

کمپیوٹر

سوال 53: (الف) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 54: (الف) $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ تلاش کریں۔
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبر سے حاصل کریں۔

2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہوگی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دارومدار درپیش مسئلہ پر ہوگا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مسٹری انجن کی تلی کا قطر $50 \mu\text{m}$ درنگی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دواساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

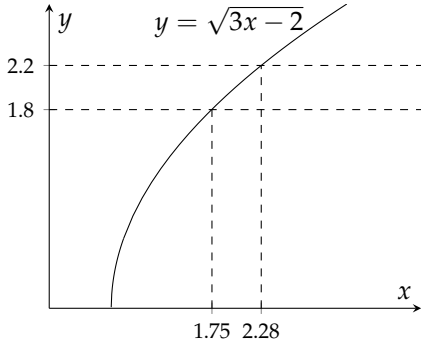
مثال 1: خطی تفاعل قابو کرنا
تفاعل $y = 2x - 1$ کے خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟
حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لئے $|y - 7| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $|y - 7|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

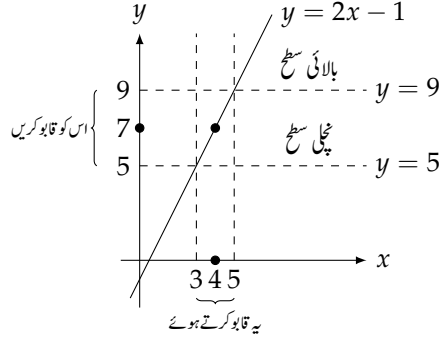
یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $|2x - 8| < 2$ کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 &< 2x - 8 < 2 \\ 6 &< 2x < 10 \\ 3 &< x < 5 \\ -1 &< x - 4 < 1 \end{aligned}$$

x کو $x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □



شکل 2.16: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔



شکل 2.15: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 1)

ٹیکنالوجی

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جاسکتے ہیں۔ درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور چھٹی مطلوبہ سطحوں کو افقی کلیروں سے ظاہر کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفہ میں تفاعل کا رویہ دیکھا جاسکتا ہے۔

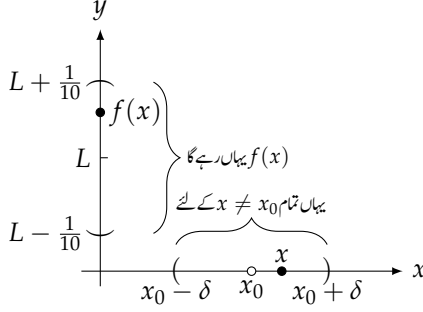
مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ کے ترسیم پر y محور کے مطلوبہ وقفہ (1.8, 2.2) پر غور کریں۔ یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل 2.16)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ (1.98, 2.02) اور (1.9998, 2.0002) پر بھی تفاعل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2: 6 cm اندرونی قطر کے ایک لٹری پیالے پر 1 mm وقفہ پر افقی کلیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔
پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ ایک لٹر (1000 cm^3) پانی ناپنے کی خاطر h کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل 1% سے کم ہونا چاہیے۔
حل: ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطہین ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \leq 10$$

یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہوگی۔

$$\begin{aligned} |36\pi h - 1000| &\leq 10 \\ -10 &\leq 36\pi h - 1000 \leq 10 \\ 990 &\leq 36\pi h \leq 1010 \\ \frac{990}{36\pi} &\leq h \leq \frac{1010}{36\pi} \\ 8.8 &\leq h \leq 8.9 \end{aligned}$$



شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم

یوں 1% درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1 \text{ cm}$ یعنی 1 mm ہے۔ پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر افقی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مانع ناپنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ □

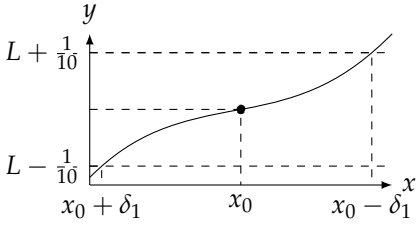
حد کی باضابطہ تعریف

مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تقابل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \rightarrow x_0$ کرنے سے $f(x)$ کا حد L حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

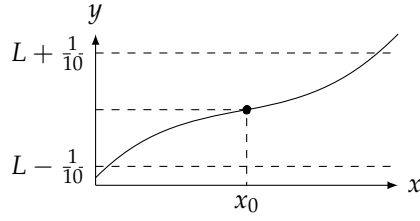
فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہوگی (شکل 2.17)۔ البتہ اتنا کافی نہیں ہے چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھراتی ہو۔

ہمیں بتلایا جاسکتا ہے کہ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100,000}$ سے کم خلل کو برداشت کیا جاسکتا ہے۔ ہر مرتبہ ہم x_0 کے قریب ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x رکھتے ہوئے قابل برداشت خلل کے اندر رہا جاسکتا ہے۔ البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جاسکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھر تھراتے ہوئے L سے دور ہو جاتی ہو۔

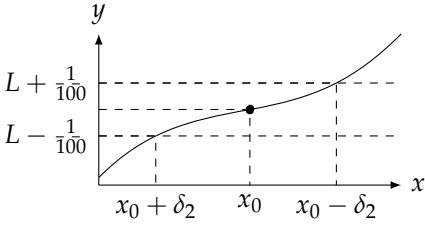
شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔ شکی انسان قابل قبول خلل ϵ پیش کرتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔



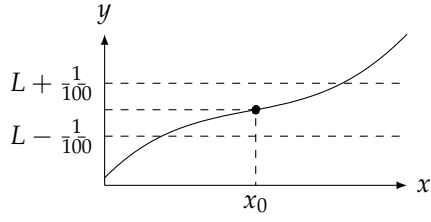
(ب) پہلے جواب: $|x - x_0| < \delta_1$ رکھیں



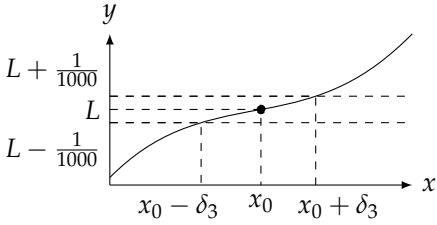
(ا) پہلا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں



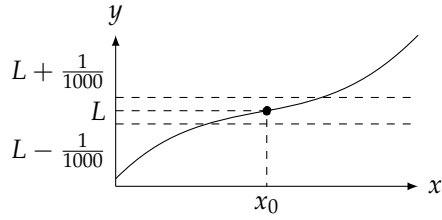
(د) دوسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_2$ رکھیں



(ج) دوسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں

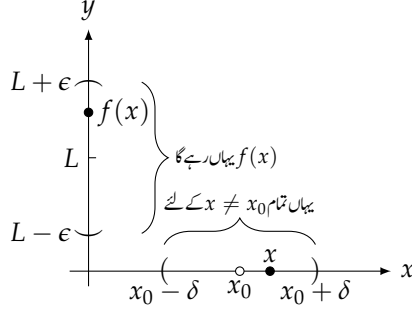


(و) تیسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_3$ رکھیں



(ب) تیسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں

شکل 2.18: فنکشن اور عالم کا مقابلہ



شکل 2.19: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لئے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی قریب ہوگی۔

تعریف: حد کی با ضابطہ تعریف

فرض کریں کہ x_0 پر ایک کھلے وقفہ میں، ممکنہ طور پر ماسوائے نقطہ x_0 پر، $f(x)$ معین ہے۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابق عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتے ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 تک پہنچتی ہو ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

