

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا کتابی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1344 . . . . .	11.2	کار تیزی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تکلی اور مربع سطحیں
1423 . . . . .	11.7	تکلی اور کروی محدود
1435 . . . . .	12	سمتی قیمت تعامل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تعامل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1475 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1497 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513 . . . . .	13	کثیر المتغیر تعامل اور جزوی تفرقات
1513 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تعامل
1528 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1543 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1560 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1592 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تعامل کے جزوی تفرقات
1599 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1638 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1655 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالکثرت
1663 . . . . .	14.1 دوہرا نکملات
1675	جوابات
1677	ا ضمیمہ اول
1679	ب ضمیمہ دوم
1681	ج ضمیمہ تین
1683	د ضمیمہ چار
1685	ه ضمیمہ پانچ
1687	و ضمیمہ چھ
1689	ز ضمیمہ سات
1691	ح ضمیمہ آٹھ
1693	ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## باب 14

# تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

### 14.1 دوہرا تکملات

ہم  $xy$  مستوی میں محدود خطہ پر استمراری تفاعل  $f(x, y)$  کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دوگنا) تکمل اور باب 5 میں متعارف کردہ ایک گنا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جاسکتی ہے۔

مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل  $f(x, y)$  درج ذیل مستطیل خطہ  $R$  میں معین ہے۔

$$R : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

ہم تصور میں  $R$  پر  $x$  اور  $y$  محور کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو  $R$  کو چھوٹے چھوٹے رقبوں  $\Delta S = \Delta x \Delta y$  میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ  $\Delta S_k$  میں ایک نقطہ  $(x_k, y_k)$  منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(14.1) \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

اگر پورے  $R$  میں  $f$  استمراری ہو، تب ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ  $\Delta x$  اور  $\Delta y$  دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے سے مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو  $R$  پر  $f$  کا دوہرا تکامل<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint_R f(x, y) dS \quad \text{یا} \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(14.2) \quad \iint_R f(x, y) dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات  $[a, b]$  اور  $[c, d]$  کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات 14.2 میں حد کی قیمت، نا تو رقبات  $\Delta S_k$  کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر  $\Delta S_k$  میں نقطہ  $(x_k, y_k)$  کے مقام پر منحصر ہو گی۔ انفرادی مجموعات  $S_n$  کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کا حد آخر میں وہی ایک ہو گا۔ استمراری  $f$  کے لئے اس حد کی وجودیت اور یکتائی کے ثبوت اعلیٰ نصاب میں دیے جاتے ہیں۔ دوہرا تکامل کی وجودیت کے لئے  $f$  کا استمرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

### دوہرا تکاملات کے خواص

ایک گننا تکاملات کی طرح، دوہرا تکاملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لئے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

$$ا. \quad \iint_R kf(x, y) dS = k \iint_R f(x, y) dS \quad \text{جہاں } k \text{ کوئی مستقل ہے۔}$$

$$ب. \quad \iint_R (f(x, y) \mp g(x, y)) dS = \iint_R f(x, y) dS \mp \iint_R g(x, y) dS$$

$$ج. \quad \text{اگر } R \text{ پر } f(x, y) \geq 0 \text{ ہو تب } \iint_R f(x, y) dS \geq 0$$

$$د. \quad \text{اگر } R \text{ پر } f(x, y) \geq g(x, y) \text{ ہو تب } \iint_R f(x, y) dS \geq \iint_R g(x, y) dS$$

یہ خواص ایک گننا تکاملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ 5.6)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

$$ه. \quad \iint_R f(x, y) dS = \iint_{R_1} f(x, y) dS + \iint_{R_2} f(x, y) dS$$

جہاں ایک دوسرے کو نا ڈھانپنے والے مستطیل  $R_1$  اور  $R_2$  خطوں کا مجموعہ (اشتراک)  $R$  ہے۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا انکملات بطور حجم

ثابت  $f(x, y)$  کی صورت میں ہم مستطیل خطہ  $R$  پر  $f$  کے دوہرا انکمل کو ٹھوس منشور نما کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی نچلا سطح  $R$  اور بالائی سطح  $z = f(x, y)$  ہو گی۔ مجموعہ  $S_n = \sum f(x_k, y_k) \Delta S_k$  میں ہر رکن  $f(x_k, y_k) \Delta S_k$  ایک انتصابی مستطیلی منشور نما کا حجم ہو گا جو بنیاد  $\Delta S_k$  پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینہ قیمت ہو گی۔ یوں مجموعہ  $S_n$  پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمینہ ہو گی۔ اس حجم کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(14.3) \quad \text{حجم} = \lim S_n = \iint_R f(x, y) \, dS$$

جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج، باب 6 میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا انکمل کے حصول کا مسئلہ فوبینی

فرض کریں ہم مستوی  $xy$  میں مستطیل خطہ  $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$  پر مستوی  $z = 4 - x - y$  کے نیچے حجم تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ 6.2 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور  $x$  کے عمودی نکلیاں لیں تب حجم

$$(14.4) \quad \int_{x=0}^{x=2} S(x) \, dx$$

ہو گا جہاں  $x$  پر رقبہ عمودی تراش  $S(x)$  ہے۔ ہم  $x$  کی ہر قیمت کے لئے درج ذیل مکمل سے  $S(x)$  معلوم کر سکتے ہیں

$$(14.5) \quad S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) \, dy$$

جو مختصر  $z = 4 - x - y$  کے نیچے،  $x$  پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہو گا۔ رقبہ  $S(x)$  کے حصول میں  $x$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $y$  کے لحاظ سے مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 14.3 اور مساوات 14.4 کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(14.6) \quad \begin{aligned} \text{حجم} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x) \, dx = \int_{x=0}^{x=2} \left( \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[ 4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \left( \frac{7}{2} - x \right) dx = \left[ \frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5 \end{aligned}$$

اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) \, dy \, dx$$



دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ، جسے بار بار متکمل<sup>2</sup> کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے  $x$  کو مستقل ٹھراتے ہوئے  $y$  کے لحاظ سے  $4 - x - y$  کا مکمل  $y = 0$  تا  $y = 1$  لیں اور اس کے بعد  $y$  کو مستقل ٹھراتے ہوئے  $x$  کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا مکمل  $x = 0$  تا  $x = 2$  لیں۔

اگر ہم محور  $y$  کے عمودی نکلیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا۔ ایسی صورت میں ایک علامتی عمودی تراش رقبہ،  $y$  کا تفاعل ہو گا:

$$(14.7) \quad S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx = \left[ 4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y$$

یوں پورے جسم کا حجم

$$(14.8) \quad \text{جَم} = \int_{y=0}^{y=1} S(y) dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y) dy = \left[ 6y - y^2 \right]_0^1 = 5$$

ہو گا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

ہم اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$\text{جَم} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dx dy$$

لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے  $y$  کو مستقل ٹھراتے ہوئے  $x$  کے لحاظ سے  $4 - x - y$  کا مکمل  $x = 0$  تا  $x = 2$  لیں۔ اس کے بعد  $x$  کو مستقل ٹھراتے ہوئے  $y$  کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا مکمل  $y = 0$  تا  $y = 1$  لیں۔ اس بار ہم بار بار مکمل کے حصول میں پہلے  $x$  اور بعد میں  $y$  کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں جو مساوات 14.6 میں مکمل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ  $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$  پر درج ذیل دوہرا مکمل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint_R (4 - x - y) dS$$

اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں مکمل اس دوہرا مکمل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبینی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا مکمل، کسی بھی ترتیب سے، بار بار مکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ (جناب فوبینی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

مسئلہ 14.1: مسئلہ فوینین (پہلا روپ)

اگر مستطیل خطہ  $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  پر  $f(x, y)$  استمراری ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

مسئلہ فوینین کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا انکمل کی قیمت بار بار انکمل سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں دوہرا انکمل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے لحاظ سے انکمل لے سکتے ہیں۔

مسئلہ فوینین مزید کہتا ہے کہ دوہرا انکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بار بار انکمل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کار آمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم جلد ایک مثال میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم  $x$  محور یا  $y$  محور کے عمودی سطحیں لے کر نکالیں گے۔

مثال 14.1: خطہ  $R : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$  میں  $f(x, y) = 1 - 6x^2y$  کے دوہرا انکمل  $\iint_R f(x, y) dS$  کی قیمت تلاش کریں۔

حل: مسئلہ فوینین کے تحت درج ذیل ہو گا:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dS &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 [x - 2x^3y]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = [2y - 8y^2]_{-1}^1 = 4 \end{aligned}$$

انکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy dx &= \int_0^2 [y - 3x^2y^2]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)] dx = \int_0^2 2 dx = 4 \end{aligned}$$

□

آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا انکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسا<sup>3</sup> میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

میکسا احکامات

درکار دوہرا انکمل

integrate(integrate(x<sup>2</sup> \* y, x), y);

$\int \int x^2 y dx dy$

integrate(integrate(x \* cos(y), x, 0, 1), y, -%pi/3, %pi/4);

$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \int_0^1 x \cos y dx dy$

wxMaxima<sup>3</sup>

### محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا اکملات

محدود غیر مستطیل خطہ پر تقابل  $f(x, y)$  کا دوہرا اکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی  $R$  پر مستطیل جال بچھاتے ہیں لیکن جزوی مجموعہ میں صرف ان چھوٹے رقبوں  $\Delta S = \Delta x \Delta y$  کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہوں۔ ہم ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ  $\Delta S_k$  میں کوئی نقطہ  $(x_k, y_k)$  منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

اس مجموعہ میں اور مستطیل خطے پر مجموعہ (مساوات 14.1) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام  $\Delta S_k$  مل کر خطہ  $R$  کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے ہیں۔ البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو،  $S_n$  میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور  $R$  کا زیادہ سے زیادہ حصہ  $S_n$  میں شامل ہو گا۔ اگر  $f$  استمراری ہو اور  $R$  کی سرحد، متغیر  $x$  کی متناہی تعداد کے استمراری تقابل اور (یا) متغیر  $y$  کی متناہی تعداد کے استمراری تقابل کی ترسیمات، ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر متناہی طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ  $S_n$  کا حد موجود ہو گا۔ ہم اس حد کو  $R$  پر  $f$  کا دوہرا اکمل کہتے ہیں:

$$\iint_R f(x, y) dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum f(x, y_k) \Delta S_k$$

یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

غیر مستطیل خطہ پر استمراری تقابل کے دوہرا اکملات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا اکملات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی ہے کہ اگر  $R$  کو ایسے دو خطوں  $R_1$  اور  $R_2$  میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \iint_{R_1} f(x, y) dS + \iint_{R_2} f(x, y) dS$$

ہم  $R$  پر استمراری اور مثبت  $f$  کی صورت میں  $R$  اور  $z = f(x, y)$  کے چھٹوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی  $\iint_R f(x, y) dS$  کرتے ہیں۔

اگر شکل میں مستوی  $xy$  میں دکھائے گئے خطہ کی طرح  $R$  ہو اور حجم کی "بالائی" حد  $y = g_2(x)$ ، "زیریں" حد  $y = g_1(x)$ ، اور اطراف کے حدود خط  $x = a$  اور خط  $x = b$  ہوں تب ہم حجم  $H$  کو ٹکیوں کی ترکیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے رقبہ عمودی تراش تلاش کرتے ہیں

$$S(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy$$

اور اس کے بعد  $x = a$  سے  $x = b$  تک  $S(x)$  کا مکمل لیتے ہوئے بار بار مکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$(14.9) \quad H = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

اسی طرح اگر شکل میں دکھائے گئے خطہ کی طرح  $R$  ہو اور حجم کے حدود  $x = h_1(y)$ ،  $x = h_2(y)$  اور خط  $y = c$  اور  $y = d$  ہوں تب تکلیوں کی ترکیب سے بار بار مکمل سے حجم تلاش کیا جاسکتا ہے:

$$(14.10) \quad H = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

ہم نے دیکھا کہ مساوات 14.9 اور مساوات 14.9، جو  $R$  پر  $f$  کے دوہرا مکمل ہیں، دونوں حجم دیتے ہیں۔ اس کی وجہ مسئلہ فوبینی کی درج ذیل زیادہ مضبوط صورت ہے۔

مسئلہ 14.2: مسئلہ فوبینی (مضبوط روپ)  
فرض کریں خطہ  $R$  پر  $f$  استمراری ہے۔

ا. اگر  $R$  کو  $a \leq x \leq b$ ،  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$  تعین کرتے ہوں جہاں  $[a, b]$  پر  $g_1$  اور  $g_2$  استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

ب. اگر  $R$  کو  $c \leq y \leq d$ ،  $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$  تعین کرتے ہوں جہاں  $[c, d]$  پر  $h_1$  اور  $h_2$  استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

مثال 14.2: ایک منشور جس کا قاعدہ مستوی  $xy$  میں ایک مثلث ہو، جس کے اضلاع محور  $x$ ، خط  $x = 1$  اور خط  $y = x$  ہوں اور جس کا اس درج ذیل مستوی میں پایا جاتا ہو، کا حجم تلاش کریں۔

$$z = f(x, y) = 3 - x - y$$

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ 0 اور 1 تک کسی بھی  $x$  کے لئے  $y$  کی قیمت  $y = 0$  تا  $y = x$  ہوگی۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left[ 3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left( 3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[ \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1 \end{aligned}$$

تکملات لینے کی ترتیب الٹ کرنے سے درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left[ 3x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left( 3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2}y^2 \right) dy = \left[ \frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1 \end{aligned}$$

□

دونوں تکملات کے جواب ایک جیسے ہیں۔ ہمیں یہی توقع تھی۔

اگرچہ مسئلہ فوبنی ہمیں یقین دہانی کرتا ہے کہ دوسرا مکمل کی قیمت بار بار مکمل میں کسی بھی ترتیب سے تکملات لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے، حقیقت میں ایک مکمل کا حصول دوسرے سے آسان ہو سکتا ہے۔ اگلی مثال میں آپ ایسی صورت حال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.3: مستوی  $xy$  میں محور  $x$ ، خط  $x = 1$  اور خط  $y = x$  کے بیچ خطہ  $R$  ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iint_R \frac{\sin x}{x} dS$$

حل: مکمل کا خطہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم پہلے  $y$  اور بعد میں  $x$  کے لحاظ سے مکمل لیں تب

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx &= \int_0^1 \left( y \frac{\sin x}{x} \right)_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \sin x dx \\ &= -\cos(1) + 1 \approx 0.46 \end{aligned}$$

ہوگا۔ اگر ہم مکمل لینے کی ترتیب الٹ کریں تب

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$$

ہوگا اور چونکہ  $\int ((\sin x)/x) dx$  کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جاسکتا ہے لہذا ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہیں۔

قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں کہ کس ترتیب سے مکمل لینے سے ہمیں آسانی ہوگی لہذا اس پر زیادہ مت سوچیں اور کسی ایک ترتیب سے حل کرنے کی کوشش کریں اور اگر مشکلات پیش آئیں تب مکمل کی ترتیب الٹ کر کے دوبارہ کوشش کریں۔

□

نکمل کے حدود کی تلاش

دوہرا نکمل کی قیمت کے حصول میں سب سے مشکل کام نکمل کے حد تلاش کرنا ہو سکتا ہے۔ خوش قسمتی سے ایک اچھا طریقہ کار موجود ہے جس پر ہم چل سکتے ہیں۔

نکمل کے حدود تلاش کرنے کا طریقہ کار

(i) خطہ  $R$  پر  $\iint_R f(x, y) dS$  کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے  $y$  اور بعد میں  $x$  کے لحاظ سے نکمل لینے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

1. خاکہ: نکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنيات پر نام و نشان لگائیں۔

2. نکمل کے  $y$  حد: بڑھتی  $y$  رخ خطہ  $R$  سے گزرتا ہوا انتضابی خطہ  $L$  کھینچیں۔ جن مقامات پر  $L$  اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ نکمل کے  $y$  حد ہوں گے۔

3. نکمل کے  $x$  حد: وہ  $x$  حد منتخب کریں جن میں  $R$  سے گزرتی ہوئی تمام انتضابی لکیریں شامل ہوں۔ نکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

(ب) اسی دوہرا نکمل کو بطور بار بار نکمل حل کرتے ہوئے، ترتیب الٹ کرنے سے، انتضابی لکیروں کی بجائے افقی لکیریں استعمال کریں۔ نکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

مثال 14.4: درج ذیل نکمل کے خطہ نکمل کا خاکہ بنائیں اور نکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے اس ماسوائی نکمل لکھیں۔

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx$$

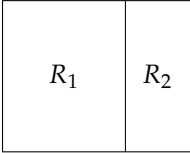
حل: نکمل کا خطہ، عدم مساوات  $x^2 \leq y \leq 2x$  اور  $0 \leq x \leq 2$  دیتے ہیں۔ یوں اس خطہ کے حد، خط  $x = 0$ ، خط  $x = 2$  اور منحنيات  $y = x^2$  اور  $y = 2x$  ہوں گی۔

تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے ہم اس خطہ پر افقی لکیریں کھینچتے ہیں۔ یہ لکیریں اس خطہ میں  $x = \frac{y}{2}$  پر داخلی ہوتی ہیں اور  $x = \sqrt{y}$  پر اس سے خارج ہوتی ہیں۔ ان تمام افقی لکیریں کو شامل کرنے کے لئے ہمیں  $y = 0$  سے  $y = 4$  تک لینا ہو گا۔ یوں متبادل تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy$$

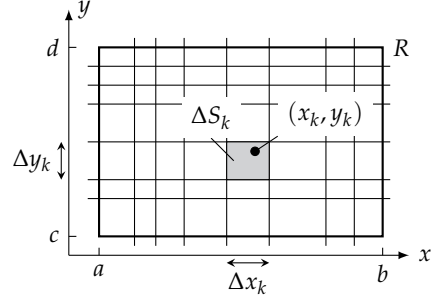
□

ان دونوں تکملات کے جواب 8 ہے۔

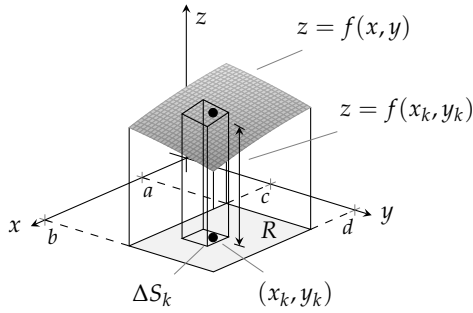


$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) \, dS = \iint_{R_1} f(x, y) \, dS + \iint_{R_2} f(x, y) \, dS$$

شکل 14.2: دوہرا انکملات بھی ایک گٹنا انکملات کی طرح  
مجموعیت دائرہ کار کی خاصیت رکھتے ہیں۔

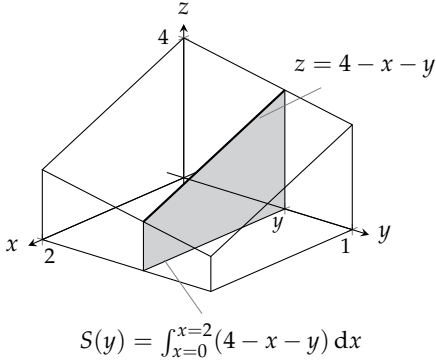


شکل 14.1: خطہ  $R$  کو مستطیل جال چھوٹے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے رقبے  $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$  ہوں گے۔

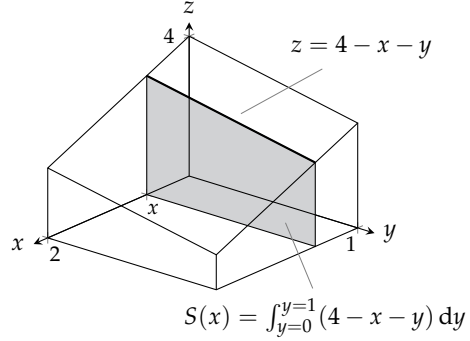


شکل 14.3: ٹھوس جسم کو تخمینہ طور پر متعدد مستطیل منشور نما سے ظاہر کرتے ہوئے ہم زیادہ عمومی منشور نما کے حجم کو بطور دوہرا انکمل تعین کر سکتے ہیں۔ یہاں منشور کا حجم  $R$  پر  $f(x, y)$  کا دوہرا انکمل ہو گا۔

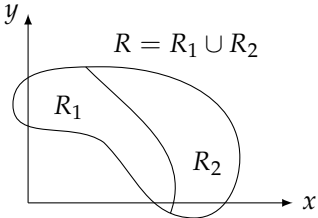




شکل 14.5: رقبہ عمودی تراش  $S(y)$  حاصل کرنے کے لئے ہم  $y$  کو مستقل ٹھہراتے ہوئے  $x$  کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔

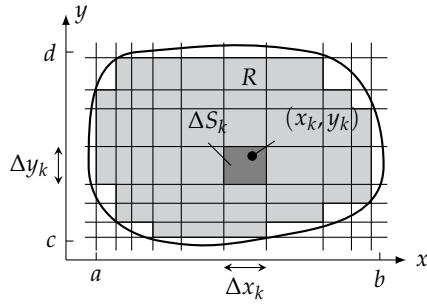


شکل 14.4: رقبہ عمودی تراش  $S(x)$  حاصل کرنے کے لئے ہم  $x$  کو مستقل ٹھہراتے ہوئے  $y$  کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔



$$\iint_R f(x, y) dS = \iint_{R_1} f(x, y) dS + \iint_{R_2} f(x, y) dS$$

شکل 14.7: مستطیل خطہ کی مجموعیت کی خاصیت ان غیر مستطیل خطوں کے لئے بھی کارآمد ہے جن کی پوری سرحد استمراری منحنیات سے بنی ہو۔



شکل 14.6: غیر مستطیل محدود خطہ کو مستطیل جال سے خانہ بند کیا گیا ہے۔

جوابات



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



ضمیمہ ج

ضمیمہ تین





ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چ



ضمیمہ ز

ضمیمہ سات





ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

