

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ ہکونیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ ہکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12
943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصوص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 ہکونیاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	
1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	
1211	10 مخروطی حصے، مختبی مقدار معلوم اور قطبی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	ضمیمہ اول	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

ترسیم کی پہچان

سوال 1 تا سوال 1 میں دیے قطع مکانی کا ہم پلہ درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x$$

اس کے بعد قطع مکانی کے ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔

سوال 1: شکل 10.14-ا

سوال 2: شکل 10.14-ب

سوال 3: شکل 10.14-ج

سوال 4: شکل 10.14-د

سوال 5 تا سوال 8 میں دیے مخروط کا درج ذیل میں ہم پلہ مساوات تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

دیے گئے مخروط کا ماسکہ اور اس تلاش کریں۔ اگر قطع دائرہ دیا گیا ہو تب اس کے متقارب بھی دریافت کریں۔

سوال 5: ترسیم شکل 10.15-ا میں دیا گیا ہے

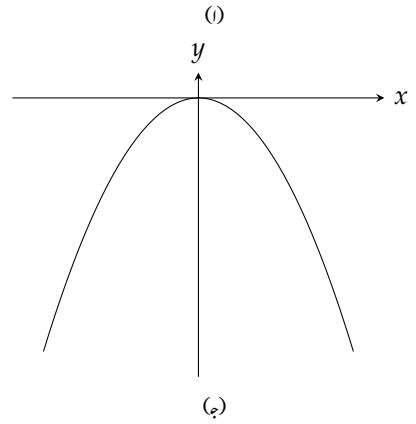
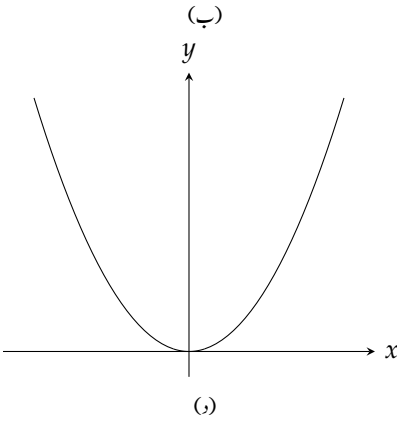
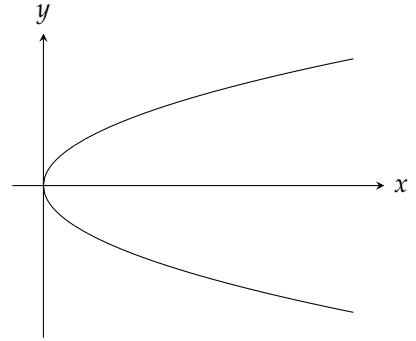
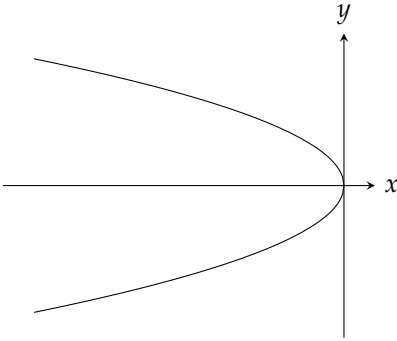
سوال 6: ترسیم شکل 10.15-ب میں دیا گیا ہے

سوال 7: ترسیم شکل 10.15-ج میں دیا گیا ہے

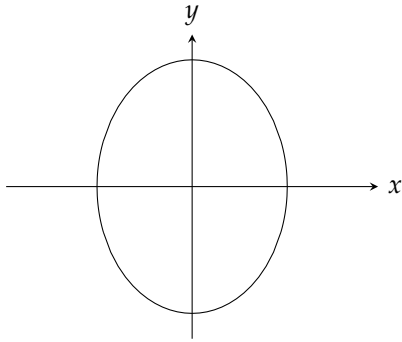
سوال 8: ترسیم شکل 10.15-د میں دیا گیا ہے

قطع مکانی

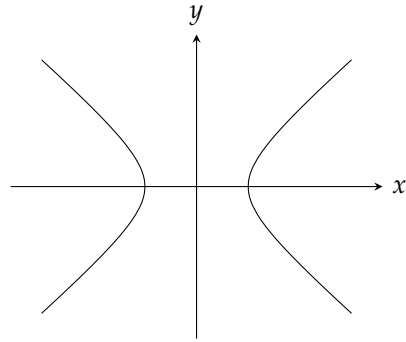
سوال 9 تا سوال 16 میں دیے گئے قطع مکانی کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرنے کے بعد اس کو ترسیم کریں۔ ماسکہ اور ناظمہ کو بھی ترسیم میں شامل کریں۔



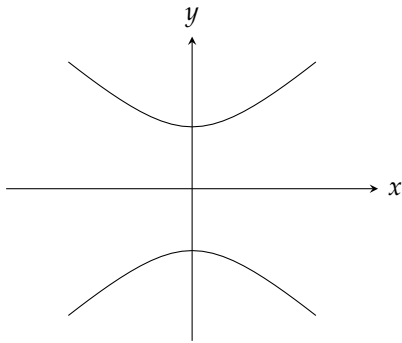
شکل 10.14: ترسیم برائے سوال 1 تا سوال 4



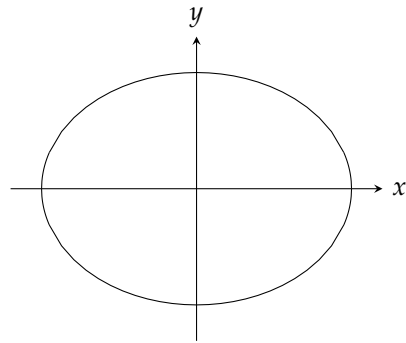
(ب)



(د)



(ج)



(ا)

شکل 10.15: تزیینات برائے سوال 5 تا سوال 8

سوال 9: $y^2 = 12x$

سوال 10: $x^2 = 6y$

سوال 11: $x^2 = -8y$

سوال 12: $y^2 = -2x$

سوال 13: $y = 4x^2$

سوال 14: $y = -8x^2$

سوال 15: $x = -3y^2$

سوال 16: $x = 2y^2$

ترخیم

سوال 17 تا سوال 24 میں دیے گئے ترخیم کی مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر ترسیم کر کے ترسیم پر ماسکہ دکھائیں۔

سوال 17: $16x^2 + 25y^2 = 400$

سوال 18: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال 19: $2x^2 + y^2 = 2$

سوال 20: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال 21: $3x^2 + 2y^2 = 6$

سوال 22: $9x^2 + 10y^2 = 90$

سوال 23: $6x^2 + 9y^2 = 54$

سوال 24: $169x^2 + 25y^2 = 4225$

سوال 25 اور سوال 26 میں xy مستوی میں پائے جانے والے ترخیم کے ماسکہ اور راس کی معلومات دی گئی ہے جس کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ ترخیم کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال 25: ماسکے $(\pm\sqrt{2}, 0)$ اور راس $(\pm 2, 0)$

سوال 26: ماسکے $(0, \pm 4)$ اور راس $(0, \pm 5)$

قطع زائد

سوال 27 تا سوال 34 میں قطع زائد کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ مساوات کو معیاری روپ میں لکھیں اور قطع زائد کا متقارب دریافت کریں۔ قطع زائد کا خاکہ کھینچ کر متقارب اور ماسکہ بھی دکھائیں۔

سوال 27: $x^2 - y^2 = 1$

سوال 28: $9x^2 - 16y^2 = 144$

سوال 29: $y^2 - x^2 = 8$

سوال 30: $y^2 - x^2 = 4$

سوال 31: $8x^2 - 2y^2 = 16$

سوال 32: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال 33: $8y^2 - 2x^2 = 16$

سوال 34: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال 35 تا سوال 38 میں xy مستوی پر قطع زائد کے ماسکہ، راس اور متقارب کی معلومات دی گئی ہے۔ قطع زائد کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ قطع زائد کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال 35: ماسکے $(0, \pm\sqrt{2})$ اور متقارب $y = \pm x$

سوال 36: ماسکے $(\pm 2, 0)$ اور متقارب $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$

سوال 37: ماسکے $(\pm 3, 0)$ اور متقارب $y = \pm \frac{4}{3}x$

سوال 38: ماسکے $(0, \pm 2)$ اور متقارب $y = \pm \frac{1}{2}x$

مخروطی حصوں کا انتقال

سوال 39: قطع مکانی $y^2 = 8x$ کو 2 اکائیاں نیچے اور 1 اکائی دائیں منتقل کر کے قطع مکانی $(y+2)^2 = 8(x-1)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکانی کے راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکانی کا خاکہ بنائیں۔

سوال 40: قطع مکانی $x^2 = -4y$ کو 1 اکائی بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کرتے ہوئے قطع مکانی $(x+1)^2 = -4(y-3)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکانی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکانی کا خاکہ بنائیں۔

سوال 41: ترسیم $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ کو 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے ترسیم $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترسیم کا ماسکہ، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکہ، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 42: ترسیم $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے منتقل کر کے ترسیم $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترسیم کا ماسکہ، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکہ، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 43: قطع زائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کر کے قطع زائد $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کے مرکز، ماسکہ، راس اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نئے مرکز، ماسکہ، راس اور متقارب ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال 44: قطع زائد $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتے ہوئے قطع زائد $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکہ اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نیا مرکز، ماسکہ اور متقارب ترسیم کر کے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال 45 تا سوال 48 میں قطع مکانی کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع مکانی کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع مکانی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ معلوم کریں۔

سوال 45: $y^2 = 4x$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں نیچے۔

سوال 46: $y^2 = -12x$ ، 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال 47: $x^2 = 8y$ ، 1 اکائی دائیں اور 7 اکائیاں نیچے۔

سوال 48: $x^2 = 6y$ ، 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے۔

سوال 49 تا سوال 52 میں ترخیم کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے ترخیم کی مساوات تلاش کر کے نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز معلوم کریں۔

سوال 49: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 1 اکائی نیچے۔

سوال 50: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ، 3 اکائیاں دائیں اور 4 اکائیاں اوپر۔

سوال 51: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ، 2 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال 52: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ، 43 اکائیاں بائیں اور 5 اکائیاں نیچے۔

سوال 53 تا سوال 56 میں قطع زائد کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع زائد کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب معلوم کریں۔

سوال 53: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ، دائیں 2 اکائیاں اور اوپر 2 اکائیاں

سوال 54: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ، بائیں 5 اکائیاں اور نیچے 1 اکائی

سوال 55: $y^2 - x^2 = 1$ ، بائیں 1 اکائیاں اور نیچے 1 اکائی

سوال 56: $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ ، دائیں 1 اکائیاں اور اوپر 3 اکائیاں

سوال 57 تا سوال 68 میں دیے گئے مخروط حصوں کا (جیسا مناسب ہو) مرکز، ماسکے، راس، متقارب اور رداس دریافت کریں۔

سوال 57: $x^2 + 4x + y^2 = 12$

سوال 58: $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 144$

سوال 59: $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

سوال 60: $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

سوال 61: $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

سوال 62: $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

سوال 63: $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

سوال 64: $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

سوال 65: $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

سوال 66: $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

سوال 67: $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

سوال 68: $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

عدم مساوات

سوال 69 تا سوال 74 میں عدم مساوات یا عدم مساوات کی جوڑی دی گئی ہے۔ xy مستوی میں اس خطہ کو ترسیم کریں۔

سوال 69: $9x^2 + 16y^2 \leq 144$

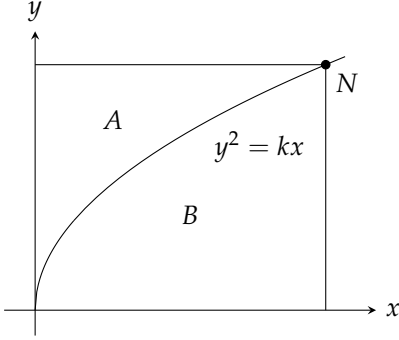
سوال 70: $x^2 + y^2 \geq 1, \quad 4x^2 + y^2 \leq 4$

سوال 71: $x^2 + 4y^2 \geq 4, \quad 4x^2 + 9y^2 \leq 36$

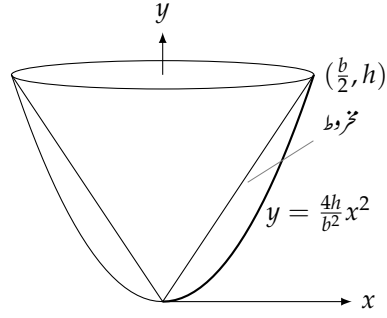
سوال 72: $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \leq 0$

سوال 73: $4y^2 - x^2 \geq 4$

سوال 74: $|x^2 - y^2| \leq 1$



شکل 10.17: خطے برائے سوال 81



شکل 10.16: جسم طواف برائے سوال 75

نظریہ اور مثالیں

سوال 75: قطع مکافی ٹھوس جسم کے حجم کا کلیہ آرمیڈی
قطع مکافی $y = \frac{4h}{b^2}x^2$ اور $y = h$ میں گھیرے ہوئے خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ
اس جسم کا حجم مطابق مخروط کے حجم کا $\frac{3}{2}$ گنا ہوگا (شکل 10.16)۔

سوال 76: معلق پل کی رسیاں قطع مکافی کی صورت میں لٹکی ہوتی ہیں۔
ایک معلق پل کی کیت m کلو گرام فی میٹر ہے۔ اس پل کو رسیوں سے لٹکایا گیا ہے۔ اگر مبداء پر رسی کا افقی تناؤ H ہو تب رسی کی منحنی
درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mg}{H}x$$

اس تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ رسی کی منحنی کی مساوات ایک قطع مکافی ہے۔ $x = 0$ پر $y = 0$ ابتدائی معلومات
ہے۔

سوال 77: نقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(2,2)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 78: نقاط $(2,3)$ ، $(3,2)$ اور $(-4,3)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 79: ایک دائرہ جس کا مرکز $(-2,1)$ پر ہے نقطہ $(1,3)$ سے گزرتا ہے۔ کیا نقطہ $(1.1, 2.8)$ اس دائرے پر، اس
کے اندر یا اس کے باہر پایا جاتا ہے؟

سوال 80: جہاں دائرہ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ محدودی محوروں کو قطع کرتا ہے وہاں اس دائرے کے مماس معلوم کریں۔

سوال 81: قطع مکانی $y^2 = kx, k > 0$ پر نقطہ N سے محدودی محور کے متوازی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ ان لکیروں اور محدودی محوروں کے کے بیچ مستطیل خطہ کو قطع مکانی دو حصوں A اور B میں تقسیم کرتا ہے (شکل 10.17)۔ (الف) دکھائیں کہ ان خطوں کو y محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت 4 : 1 ہے۔ (ب) ان خطوں کو x محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت کیا ہوگی؟

سوال 82: دکھائیں کہ لکیر $x = -p$ پر کسی بھی نقطہ سے منحنی $y^2 = 4px$ پر دو مماس، آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال 83: ترتیم $x^2 + 4y^2 = 4$ میں محصور زیادہ سے زیادہ رقبے کے مستطیل کے اضلاع معلوم کریں۔ مستطیل کے اضلاع محدودی محور کے متوازی ہیں۔

سوال 84: ترتیم $9x^2 + 4y^2 = 36$ کو (الف) x محور، (ب) y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم معلوم کریں۔

سوال 85: ربع اول میں x محور، لکیر $x = 4$ اور قطع زائد $9x^2 - 4y^2 = 36$ کے بیچ نکتونی خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

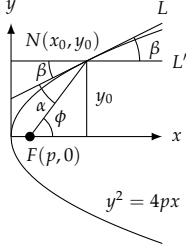
سوال 86: ایک خطہ کا بایاں سرحد محور y ، دایاں سرحد قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ جبکہ اس کا نیچا اور بالائی سرحد لکیر $y = \pm 3$ ہیں۔ اس خطہ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 87: محور x کے بالائی اور ترتیم $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$ کے نیچے خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

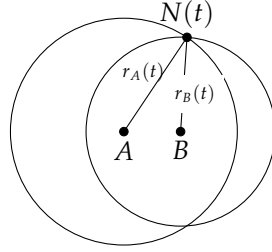
سوال 88: قطع زائد $y^2 - x^2 = 1$ کے بالائی شاخ $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ کو $y = \sqrt{x^2 + 1}$ کو x محور گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 89: پانی کی سطح کو پہلے A اور بعد میں B پر چھو کر شکل 10.18 میں دکھائے گئے امواج پیدا کئے گئے۔ جیسے جیسے یہ امواج پھیلتے ہیں، ان کا نقطہ قطع ایک منحنی بناتا ہے جو قطع زائد کی طرح معلوم ہوتا ہے۔ کیا ایسا حقیقتاً ہوگا؟ یہ جاننے کے لئے ہم A اور B پر مرکز دائروں کو امواج کا نمونہ لے سکتے ہیں۔

لحہ t پر نقطہ N مرکز A سے $r_A(t)$ اور B سے $r_B(t)$ فاصلہ پر ہوگا۔ چونکہ دائروں کے رداس ایک مستقل رفتار (موج کی رفتار) سے بڑھتے ہیں لہذا $\frac{dr_A}{dt} = \frac{dr_B}{dt}$ ہوگا۔ اس سے اخذ کریں کہ $r_A - r_B$ ایک مستقل ہوگا لہذا N اس قطع زائد پر پایا جائے گا جس کے ماسکہ A اور B ہیں۔



شکل 10.19: قطع مکانی میں انعکاس (سوال 90)



شکل 10.18: امواج برائے سوال 89

سوال 90: قطع مکانی کے خواص انعکاس
 قطع مکانی $y^2 = 4px$ پر عمومی نقطہ $N(x_0, y_0)$ کو شکل 10.19 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر لکیر L اس قطع مکانی کا مماس ہے۔ قطع مکانی کا ماسک $F(p, 0)$ ہے۔ نقطہ N سے دائیں منعکس شعاع L' ، محور x کے متوازی ہے۔ ہم دکھاتے ہیں کہ F سے خارج، N پر پہنچتا شعاع انعکاس کے بعد L' کا ہم مکان ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر ہم دکھاتے ہیں کہ $\beta = \alpha$ ہو گا۔ اس مساوات کی تصدیق درج ذیل اقدام کے ذریعہ کریں۔

ا. دکھائیں کہ $\tan \beta = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0 - p}$ ہو گا۔

ج. درج ذیل مماثل

$$\tan \alpha = \frac{\tan \phi - \tan \beta}{1 + \tan \phi \tan \beta}$$

استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\tan \alpha = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔ چونکہ α اور β دونوں زاویہ حادہ ہیں لہذا $\tan \beta = \tan \alpha$ یعنی $\beta = \alpha$ ہو گا۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

