

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونباتی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونباتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونباتی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیت اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیت
1344	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تنگی اور کردی محدود
1435	12	سمتی قیمت تعامل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تعامل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولائی کی حرکت کی نمونہ کشی
1468	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیت T
1476	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1498	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1507		جوابات
1509	ا	ضمیمہ اول
1511	ب	ضمیمہ دوم
1513	ج	ضمیمہ تین
1515	د	ضمیمہ چار
1517	ه	ضمیمہ پانچ
1519	و	ضمیمہ چھ

1521	ز ضمیمہ سات
1523	ح ضمیمہ آٹھ
1525	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

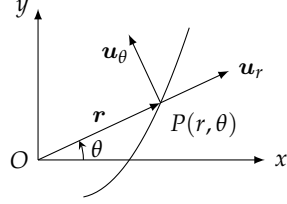
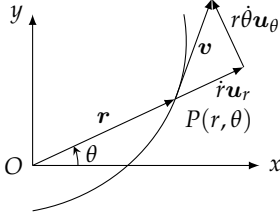
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 12.29: قطبی محدود میں سمتی رفتار سمتیہ $v = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta$ ہو گا۔

شکل 12.28: نقطہ P کا قطبی محدود r سمتیہ r کی مقدار ہو گی۔ یوں u_r ، جو $\frac{r}{|r|}$ ہے $\frac{r}{r}$ ہو گا۔

12.5 فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت

اس حصہ میں ہم قوانین نیوٹن اور قوت کشش کی مدد سے سیاروں کی حرکت کے قوانین کپلر اخذ کریں گے اور زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر بحث کریں گے۔ قوانین نیوٹن سے قوانین کپلر کا حصول احصاء کی اہم کامیابی ہے۔ اس میں وہ سب کچھ درکار ہو گا جو ہم نے اب تک پڑھا ہے جیسا فضا میں سمتیات کا الجبرا اور جیومیٹری، سمتی تفاعل کا احصاء، تفرقی مساوات کے حل، ابتدائی قیمت مسائل اور ترقیبی حصوں کی قطبی محدودی تفریح۔

قطبی اور نیکی محدود میں حرکت کی سمتی مساواتیں

ہم یہاں قطبی محدود کو r ، θ اور نیکی محدود کو r ، θ ، z لکھیں گے۔ ایک ذرہ قطبی محدودی مستوی میں حرکت کرتا ہو، ہم اس کے مقام، سمتی رفتار اور اسراع کو متحرک اکائی سمتیات

$$(12.38) \quad u_r = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j, \quad u_\theta = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j$$

کی روپ میں لکھتے ہیں (شکل 12.28)۔ اکائی سمتیہ u_r کا رخ سمتیہ \vec{OP} کے رخ ہے لہذا $r = ru_r$ ہو گا۔ اکائی سمتیہ u_θ بڑھتے θ کے رخ یعنی سمتیہ u_r کو عمودی ہے۔

مساوات 12.38 سے ہمیں درج ذیل ملتے ہیں۔

$$(12.39) \quad \begin{aligned} \frac{du_r}{d\theta} &= -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j = u_\theta \\ \frac{du_\theta}{d\theta} &= -(\cos \theta)i - (\sin \theta)j = -u_r \end{aligned}$$

ہم وقت کے لحاظ سے u_r اور u_θ کی تبدیلی دیکھنے کی خاطر ان کا تفرق t کے لحاظ سے زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$(12.40) \quad \dot{u}_r = \frac{du_r}{d\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} u_\theta, \quad \dot{u}_\theta = \frac{du_\theta}{d\theta} \dot{\theta} = -\dot{\theta} u_r$$

یوں سمتی رفتار (شکل 12.29)

$$(12.41) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}u_r) = \dot{\mathbf{r}}u_r + r\dot{u}_r = \dot{\mathbf{r}}u_r + r\dot{\theta}u_\theta$$

اور اسراع درج ذیل ہو گا۔

$$(12.42) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\dot{\mathbf{r}}u_r + \dot{\mathbf{r}}\dot{u}_r) + (\dot{\mathbf{r}}\dot{\theta}u_\theta + r\ddot{\theta}u_\theta + r\dot{\theta}\dot{u}_\theta)$$

جب \dot{u}_r اور \dot{u}_θ کے حصول کے لئے مساوات 12.40 استعمال کیا جائے اور اجزاء کو علیحدہ کیے جائیں تب اسراع کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(12.43) \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

ہم مساوات $\mathbf{r} = ru_r + z\mathbf{k}$ کے دائیں ہاتھ جزو جمع کر کے ان مساواتوں کو وسعت دے کر فضا میں حرکت کے لئے قابل استعمال بنا سکتے ہیں۔ یوں نکلے محدود میں درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.44) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= ru_r + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}}u_r + r\dot{\theta}u_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ $z \neq 0$ کی صورت میں $r = |\mathbf{r}|$ ہو گا۔

سمتیات \mathbf{u}_r ، \mathbf{u}_θ اور \mathbf{k} دایاں ہاتھ چھوٹ دیتے ہیں جس میں درج ذیل ہوں گے (شکل 12.30)۔

$$(12.45) \quad \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta$$

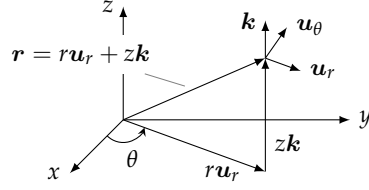
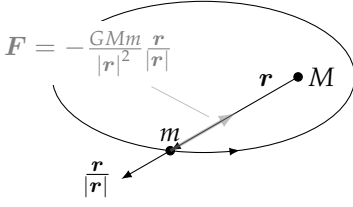
سیارے مستوی میں حرکت کرتے ہیں

نیوٹن کا قانون تجاذب کہتا ہے کہ اگر سورج کی کمیت M ، سیارہ کی کمیت m اور سورج کے کمیتی مرکز سے سیارہ کے کمیتی مرکز تک رداس سمتیہ \mathbf{r} ہو تب سیارہ اور سورج کے بیچ قوت کشش \mathbf{F} درج ذیل ہو گا (شکل 12.31) جہاں G (عالمگیر) تجاذبی مستقل²⁴ کہلاتا ہے۔

$$(12.46) \quad \mathbf{F} = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

اگر قوت کی اکائی نیوٹن، کمیت کی اکائی کلو گرام اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہو تب $G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ہو گا۔ نیوٹن کے دوسرے قانون $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ کو مساوات 12.46 کے ساتھ ملا کر

gravitational constant²⁴



شکل 12.31: قوت کشش دونوں کمیتوں کے بیچ سیدھے خط پر ہو گا۔

شکل 12.30: تکلی محدود میں تعین گر سمتیہ اور بنیادی اکائی سمتیات

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

(12.47)

حاصل ہو گا۔ سیارہ ہر لمحہ سورج کی جانب اسراع پذیر ہے۔

مساوات 12.47 کہتی ہے کہ \mathbf{r} کا غیر سمتی مضرب $\ddot{\mathbf{r}}$ ہے لہذا

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

(12.48)

ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ از خود $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ کا تفرق ہے:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_0 + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

(12.49)

یوں مساوات 12.48 درج ذیل کا معادل ہے

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$$

(12.50)

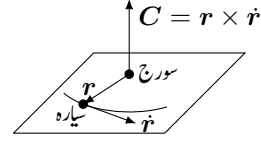
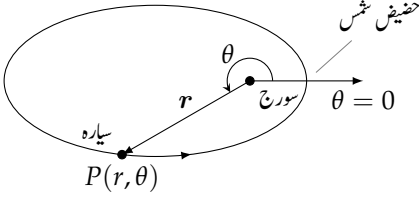
جس کا مکمل

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}$$

(12.51)

ہے جہاں \mathbf{C} مستقل سمتیہ ہے۔

ہمیں مساوات 12.51 بتاتی ہے کہ \mathbf{r} اور $\dot{\mathbf{r}}$ ہر لمحہ ایک ایسے مستوی میں ہوں گے جو \mathbf{C} کو عمودی ہو گا۔ یوں سورج کے مرکز سے گزرتی مستوی میں سیارے حرکت کرتے ہیں (شکل 12.32)۔



شکل 12.32: سورج کے گرد سیارہ اس مستوی میں حرکت کرتا ہے جو $C = r \times \dot{r}$ کو عمودی ہو اور سورج کے کیمی مرکز سے گزرتا ہے۔

شکل 12.33: حرکت سیارہ کا محدود نظام۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے حرکت، $\theta > 0$ کی بنا، گھڑی کے مخالف رخ ہے۔

محدد اور ابتدائی معلومات

ہم نکلی محدود کے مرکز کو سورج کے کیمی مرکز پر رکھتے ہیں اور سیارے کی حرکت کو قطبی محدود سطح لیتے ہیں۔ یوں r سیارے کا تعین کر سکتے ہو گا۔ یوں $|r| = r$ اور $\frac{r}{|r|} = \hat{r}$ ہوں گے۔ ہم C کو محور z پر رکھتے ہیں لہذا C کا رخ k ہو گا۔ یوں k کا $r \times \dot{r}$ کے ساتھ وہی دائیں ہاتھ کا تعلق ہو گا جو اس کے ساتھ C کا ہے اور مثبت z محور سے دیکھتے ہوئے سیارہ گھڑی کے مخالف رخ گھومے گا۔ اس طرح t بڑھنے سے θ بڑھے گا لہذا تمام t کے لئے $\theta > 0$ ہو گا۔ ہم اس لمحہ کو ابتدائی لمحہ منتخب کرتے ہیں جب سیارہ سورج کے قریب ترین ہو اور نکلی محدود کو (اگر ضرورت ہو) محور z کے گرد یوں گھماتے ہیں کہ ابتدائی لمحہ پر r اور ابتدائی شعاع ہم مکان ہوں۔ یوں ابتدائی شعاع سیارے کے حسیض شمس²⁵ سے گزرے گا (شکل 12.33)۔

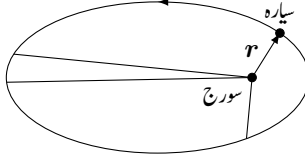
اگر ہم وقت کی پیمائش یوں کریں کہ حسیض شمسی پر $t = 0$ ہو تب سیارے کی حرکت کی ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

ا. لمحہ $t = 0$ پر $r = r_0$ ہو گا جو کم سے کم رداس ہے،

ب. لمحہ $t = 0$ پر (r) کی قیمت کم سے کم ہونے کی بنا $\dot{r} = 0$ ہو گا،

ج. لمحہ $t = 0$ پر $\theta = 0$ ہو گا،

د. لمحہ $t = 0$ پر $|v| = v_0$ ہو گا۔



شکل 12.34: سورج اور سیارہ کے بیچ سیدھی لکیر مساوی اوقات میں مساوی رقبوں کو واضح کرتی ہے۔

مزید

$$\begin{aligned}
 v_0 &= |v|_{t=0} \\
 &= \left| \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \right|_{t=0} && \text{مساوات 12.41} \\
 &= \left| r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \right|_{t=0} && \dot{r} = 0 \text{ } t = 0 \\
 &= (r \dot{\theta} |\mathbf{u}_\theta|)_{t=0} \\
 &= r \dot{\theta} \Big|_{t=0} && |\mathbf{u}_\theta| = 1 \\
 &= (r \dot{\theta})_{t=0} && r \text{ اور } \dot{\theta} \text{ دونوں مثبت ہیں}
 \end{aligned}$$

کی بنا ہم درج ذیل بھی جانتے ہیں۔

ۛ۔ لمحہ $t = 0$ پر $r \dot{\theta} = v_0$ ہو گا۔

کپلر کا پہلا قانون (قانون مخروط حصہ)

کپلر کا پہلا قانون کہتا ہے کہ سیارے کی حرکت مخروطی ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج پایا جاتا ہے۔ اس مخروط کی سک

$$(12.52) \quad e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$$

اور قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(12.53) \quad r = \frac{(1+e)r_0}{1+e \cos \theta}$$

کپلر کا دوسرا قانون (قانون یکساں رقبہ)

کپلر کا دوسرا قانون کہتا ہے کہ سورج سے سیارہ تک ردا سی سمتیہ (جو ہمارے نمونہ میں r ہو گا) مساوی اوقات میں مساوی علاقوں کو واضح کرتا ہے (شکل 12.34)۔ اس قانون کو اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات 12.41 استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.51 میں دی گئی حاصل صلیبی

ضرب $C = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
 C &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
 &= r \mathbf{u}_r \times (\dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta) \quad \text{مساوات 12.41} \\
 (12.54) \quad &= r \dot{r} \underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r)}_0 + r(r\dot{\theta}) \underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta)}_k \\
 &= r(r\dot{\theta}) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

لحہ $t = 0$ پر اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(12.55) \quad C = [r(r\dot{\theta})]_{t=0} \mathbf{k} = r_0 v_0 \mathbf{k}$$

مساوات 12.54 میں C کی یہ قیمت پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(12.56) \quad r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0 \quad \text{یعنی} \quad r_0 v_0 \mathbf{k} = r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}$$

قطبی مجدد میں تفرقی رقبہ درج ذیل لکھا جاتا ہے (حصہ 10.9)۔

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

یوں $\frac{dS}{dt}$ کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$(12.57) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r_0 v_0$$

جو کپلر کا دوسرا قانون ہے۔

زمین کے لئے r_0 تقریباً $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ، v_0 تقریباً 30 km s^{-1} ہے لہذا $\frac{dS}{dt}$ تقریباً $2.25 \times 10^9 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ ہو گا۔ یوں آپ کے دل کی ہر ایک دھڑکن میں زمین اپنے مدار میں 30 km فاصلہ طے کرتی ہے اور سورج سے زمین تک رداسی خط $2.25 \times 10^9 \text{ km}^2$ رقبہ واضح کرتا ہے۔

کپلر کے پہلے قانون کا ثبوت

یہ دکھانے کی خاطر کہ سورج کے گرد سیارے کا مدار مخروطی ہوتا ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج واقع ہوتا ہے، ہمیں r کو متغیر θ کا تفاعل لکھنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں ایک لمبا حساب کرنا ہو گا۔

ہم وقتی طور پر θ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات 12.43 اور مساوات 12.47 میں $\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ کے عددی سر ایک دوسرے کے برابر پر لکھ کر درج ذیل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$(12.58) \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

اس میں ہم مساوات 12.56 سے θ کی جگہ $\frac{r_0 v_0}{r^2}$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$(12.59) \quad \dot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم متغیرات تبدیل کرتے ہوئے اس سے درجہ اول کی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ یوں زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$p = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dt} = p \frac{dp}{dr}$$

لکھ کر مساوات 12.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(12.60) \quad p \frac{dp}{dr} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

دونوں اطراف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے r کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔

$$(12.61) \quad p^2 = (\dot{r})^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1$$

لحہ $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $r = r_0$ اور $\dot{r} = 0$ سے C_1 کی قیمت تعین ہوگی۔

$$C_1 = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}$$

اس طرح مساوات 12.61 کو ترتیب دینے کے بعد درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.62) \quad \dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

مساوات 12.58 سے مساوات 12.62 حاصل کرنے میں ہم نے r کی دو درجی تفرقی مساوات سے r کی ایک درجی تفرقی مساوات حاصل کی۔ ہمیں اب θ کی روپ میں r کو لکھنا باقی ہے لہذا ہم θ کو دوبارہ مساوات میں لاتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 12.62 کے دونوں اطراف کو مساوات $r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0$ (مساوات 12.56) کے مطابق اطراف سے تقسیم کر کے حقیقت $\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{dr}{d\theta}$ بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(12.63) \quad \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$(12.64) \quad = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \quad h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2}$$

اس کی مزید سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$u = \frac{1}{r}, \quad u_0 = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}, \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(12.65) \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u_0^2 - u^2 + 2hu - 2hu_0 = (u_0 - h)^2 - (u - h)^2$$

$$(12.66) \quad \frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}$$

ہمیں کس علامت کا انتخاب کرنا ہو گا؟ ہم جانتے ہیں کہ $\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$ مثبت ہے۔ ساتھ ہی $t = 0$ پر r کم سے کم قیمت سے شروع ہوتا ہے لہذا یہ یکدم گھٹ نہیں سکتا ہے، اور ابتدائی مثبت لمحات میں $\dot{r} \geq 0$ ہو گا لہذا

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \leq 0 \quad \text{اور} \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \geq 0$$

ہو گا۔ مساوات 12.66 میں منفی علامت درست ہو گی۔ یہ جاننے کے بعد ہم مساوات 12.66 کو ترتیب دے کر θ کے لحاظ سے دونوں اطراف اک تکمل لیتے ہیں۔

$$(12.67) \quad \frac{-1}{\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}} \frac{du}{d\theta} = 1$$

$$\cos^{-1} \left(\frac{u - h}{u_0 - h} \right) = \theta + C_2$$

چونکہ $\theta = 0$ پر $u = u_0$ ہو گا اور $\cos^{-1}(1) = 0$ ہوتا ہے لہذا C_2 صفر ہو گا۔ یوں

$$(12.68) \quad \frac{u - h}{u_0 - h} = \cos \theta$$

اور

$$(12.69) \quad \frac{1}{r} = u = h + (u_0 - h) \cos \theta$$

ہو گا جس کو چند الجبرائی اقدام کے بعد

$$(12.70) \quad r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e \cos \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(12.71) \quad e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$$

ہوں گے۔ مساوات 12.70 اور مساوات 12.71 مل کر کہتے ہیں کہ سیارے کی راہ مخروطی ہو گی جس کے ایک ماسکد پر سورج ہو گا اور جس کی سبک $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ ہو گی۔ یہ قانون کپلر اول کی جدید مساوات ہے۔

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

