

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرق پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزنقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1247

ا ضمیمہ اول

1249

ب ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

ترخیم

سوال 1 تا سوال 8 میں ترخیم کی سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد ترخیم کے ماسکے اور ناظمہ تلاش کر کے ترسیم کریں۔

سوال 1: $16x^2 + 25y^2 = 400$

سوال 2: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال 3: $2x^2 + y^2 = 2$

سوال 4: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال 5: $3x^2 + 2y^2 = 6$

سوال 6: $9x^2 + 10y^2 = 90$

سوال 7: $6x^2 + 9y^2 = 54$

سوال 8: $169x^2 + 25y^2 = 4225$

سوال 9 تا سوال 12 میں ترخیم کے ماسکے یا راس اور سنک دیا گیا ہے۔ ترخیم xy مستوی میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ ان میں ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال 9: ماسکے $(0, \pm 3)$ اور سنک 0.5

سوال 10: ماسکے $(\pm 8, 0)$ اور سنک 0.2

سوال 11: راس $(0, \pm 70)$ اور سنک 0.1

سوال 12: س $(\pm 10, 0)$ اور سنک 0.24

سوال 13 تا سوال 16 میں ترخیم کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ ترخیم xy مستوی میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ شکل 10.42 کو دیکھ کر ترخیم کی سنک معلوم کریں۔ اس کے بعد ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال 13: ماسکہ $(\sqrt{5}, 0)$ ، ناظمہ $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$

سوال 14: ماسکہ $(4, 0)$ ، ناظمہ $x = \frac{16}{3}$

سوال 15: ماسکہ $(-4, 0)$ ، ناظمہ $x = -16$

سوال 16: ماسکہ $(\sqrt{2}, 0)$ ، ناظمہ $x = -2\sqrt{2}$

سوال 17: ایک ترخیم جس کی سنک $\frac{4}{5}$ ہو کو ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال 18: سیارہ پلوٹو (جس کی سنک 0.25 ہے) کا مدار ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال 19: ایک ترخیم کے آخری سر $(1, 1)$ ، $(3, 4)$ ، $(1, 7)$ اور $(-1, 4)$ ہیں۔ اس ترخیم کا خاکہ کھینچیں، اس کی معیاری مساوات، ماسکہ، سنک اور ناظمہ تلاش کریں۔

سوال 20: ایک ترخیم کی سنک $\frac{2}{3}$ جبکہ لکیر $x = 9$ اس کی ناظمہ اور $(4, 0)$ مطابقتی ماسکہ ہے۔ اس ترخیم کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 21: درج ذیل ترخیم a ، b اور c کی کن قیمتوں کے لئے مبدا پر x محور کے متوازی ہو گا اور نقطہ $(-1, 2)$ سے گزرے گا؟

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

اس ترخیم کی سنک کیا ہے؟

سوال 22: ترخیم کی خاصیت انعکاس

ایک ترخیم کو اس کے محور اکبر کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ترخیمی جسم کی اندرونی سطح پر چاندی لگا کر ترخیمی آئینہ بنایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس ترخیمی آئینہ کے ایک ماسکہ سے خارج شعاع انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے۔ صدا بھی اسی راہ کو اپناتا ہے۔ اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جاتا ہے۔ (اشارہ: ترخیم کو xy مستوی پر معیاری مقام پر رکھ کر دکھائیں کہ کسی بھی نقطہ N سے دونوں ماسکوں تک لکیر، N پر ترخیم کے مماس کے ساتھ ایک جیسے زاویے بناتے ہیں۔)

قطع زائد

سوال 23 تا سوال 30 میں قطع زائد کی سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد قطع زائد کے ماسکہ اور ناظمہ معلوم کر کے ترسیم کریں۔

سوال 23: $x^2 - y^2 = 1$

سوال 24: $9x^2 - 16y^2 = 144$

سوال 25: $y^2 - x^2 = 8$

سوال 26: $y^2 - x^2 = 4$

سوال 27: $8x^2 - 2y^2 = 16$

سوال 28: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال 29: $8y^2 - 2x^2 = 16$

سوال 30: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال 31 تا سوال 34 میں قطع زائد کی سنک اور راس یا ماسکے دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد xy مستوی میں پائے جاتے ہیں جن کا مرکز مبداء پر ہے۔ ان قطع زائد کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال 31: سنک 3 راس $(0, \pm 1)$

سوال 32: سنک 2 راس $(\pm 2, 0)$

سوال 33: سنک 3 ماسکے $(\pm 3, 0)$

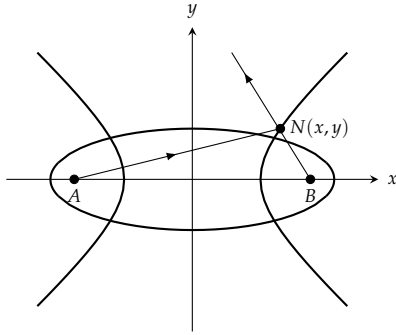
سوال 34: سنک 1.25 ماسکے $(0, \pm 5)$

سوال 35 تا سوال 38 میں قطع زائد کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد xy مستوی میں پائے جاتے ہیں اور ان کا مرکز مبداء پر پایا جاتا ہے۔ قطع زائد کی سنک اور معیاری مساوات تلاش کریں۔

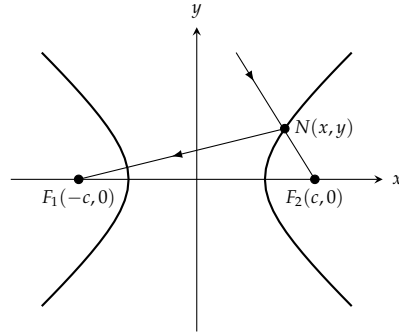
سوال 35: ماسکے $(4, 0)$ ، ناظمہ $x = 2$

سوال 36: ماسکے $(\sqrt{10}, 0)$ ، ناظمہ $x = \sqrt{2}$

سوال 37: ماسکے $(-2, 0)$ ، ناظمہ $x = -\frac{1}{2}$



شکل 10.46: قطع زائد اور ترخیم برائے سوال 42



شکل 10.45: قطع زائد برائے سوال 41

سوال 38: ماسکہ $(-6, 0)$ ، ناظمہ $x = -2$

سوال 39: ایک قطع زائد کی سبک $\frac{3}{2}$ اور ایک ماسکہ $(1, -3)$ ہے۔ اس کا مطابق ناظمہ لکیر $y = 2$ ہے۔ اس قطع زائد کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 40: سبک کی قطع زائد کی صورت پر اثر سبک بڑھانے سے قطع زائد کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ یہ جاننے کے لئے مساوات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو a اور b کی بجائے a اور e کی صورت میں لکھیں۔ مختلف e کی قیمتوں کے لئے قطع زائد ترسیم کریں (a مستقل لیں)۔

سوال 41: قطع زائد کی خاصیت انعکاس دکھائیں کہ قطع زائد کے ایک ماسکہ کی طرف گامزن شعاع، قطع زائد سے انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے (شکل 10.45)۔ (اشارہ: دکھائیں کہ نقطہ N پر قطع زائد کا مماس قطع NF_1 اور NF_2 کے بیچ زاویہ کو نصف میں تقسیم کرتا ہے۔)

سوال 42: ہم ماسکہ ترخیم اور قطع زائد دکھائیں کہ ایک ترخیم اور قطع زائد جن کے ایک جیسے ماسکہ A اور B ہوں، ایک دوسرے کو 90° درجہ پر قطع کرتے ہیں (شکل 10.46)۔ (اشارہ: ماسکہ A سے خارج شعاع قطع زائد کے نقطہ N پر پہنچ کر قطع زائد سے یوں منعکس ہو گا جیسا یہ شعاع ماسکہ B سے خارج ہوا ہو (سوال 41)۔ یہی شعاع ترخیم سے منعکس ہو کر ماسکہ B پر پہنچتا ہے (سوال 22)۔)

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

