

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
278	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
312	دیگر شرح تبدیلی	3.7



## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## 3.7 دیگر شرح تبدیلی

ٹینکی سے  $3000 \text{ L min}^{-1}$  پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہوگی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے ہیں۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 3.54: انعکاس  $3000 \text{ L min}^{-1}$  کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس  $r$  کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی  $h$  ہے۔ یوں پانی کا حجم  $H = \pi r^2 h$  ہوگا جہاں حجم کو  $H$  سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل 3.65)۔ اب ہمیں انعکاس

$$\frac{dH}{dt} = -3000$$

بتلایا گیا ہے جہاں  $t$  وقت کو ظاہر کرتی ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{dh}{dt}$$

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں  $H$  اور  $h$  کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہوگا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{dH}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

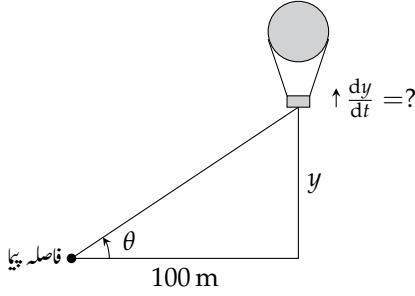
جہاں دائیں جانب  $r$  مستقل ہے۔ اس میں  $\frac{dH}{dt}$  کی معلوم قیمت پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح  $\frac{dh}{dt}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

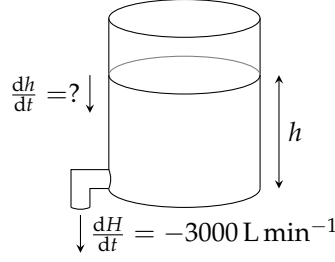
پانی کی گہرائی  $\frac{3}{\pi r^2}$  میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہوگی۔ مثلاً  $r = 1 \text{ m}$  اور  $r = 10 \text{ m}$  کی صورت میں شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95 \text{ m min}^{-1} = -95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 1 \text{ m})$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095 \text{ m min}^{-1} = -0.95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 10 \text{ m})$$



شکل 3.66: غبارہ (مثال 3.55)



شکل 3.65: پانی کی ٹینکی (مثال 3.54)

□

مثال 3.55: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل 3.66)۔ غبارے کی نقطہ اڑان سے 100 m دور واقع فاصلہ پیتا<sup>41</sup> سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پیتا کا زاویہ صعود  $\frac{\pi}{4}$  تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح  $0.14 \text{ rad min}^{-1}$

تھی۔ اس لمحہ پر غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟

حل: ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔

پہلا قدم: موقع کی تصویر کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات  $\theta$  اور  $y$  درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پیتا کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو  $t$  سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ  $\theta$  اور  $y$  متغیر  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پیتا سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ 100 m ہے جس کو متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad min}^{-1} \quad (\theta = \frac{\pi}{4})$$

تیسرا قدم: جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے  $\theta = \pi/4$  کی صورت میں  $\frac{dy}{dt}$  پوچھا گیا ہے۔

چوتھا قدم: متغیرات  $\theta$  اور  $y$  کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100} = \tan \theta \quad \Rightarrow \quad y = 100 \tan \theta$$

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے  $t$  کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو  $\frac{dy}{dt}$  (درکار معلومات) اور  $\frac{d\theta}{dt}$  (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{dy}{dt} = 100 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

چھٹا قدم:  $\theta = \frac{\pi}{4}$  اور  $\frac{d\theta}{dt} = 0.14$  پر کرتے ہوئے  $\frac{dy}{dt}$  کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = 100(\sec \frac{\pi}{4})^2(0.14) = 28 \text{ m min}^{-1}$$

□

### اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

- مسئلے کی تصویر کشی کریں۔ وقت کو  $t$  سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو  $t$  کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔
- اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کی روپ میں لکھیں۔
- مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کی روپ میں ہو گا)۔
- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی بار آپ کو دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنا ہو گا۔
- اس کا  $t$  کے لحاظ سے تفرق لیں۔ اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔
- معلوم معلومات کو پر کرتے ہوئے نامعلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال 3.56: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ 0.6 km اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ 0.8 km ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ  $20 \text{ km h}^{-1}$  سے بڑھ رہا ہے۔ پولیس کی گاڑی کی رفتار  $60 \text{ km h}^{-1}$  ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟  
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر اور متغیرات۔ ہم کارتیسی مجدد پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو  $x$  محور جبکہ پولیس کی گاڑی کو  $y$  محور پر رکھتے ہیں۔ وقت کو  $t$  سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ  $t$  پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام  $x$ ، پولیس کی گاڑی کا مقام  $y$  اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ  $s$  ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $x$ ،  $y$  اور  $s$  متغیر  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔  
دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ  $t$  پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8 \text{ km}, \quad y = 0.6 \text{ km}, \quad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ km h}^{-1}, \quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ km h}^{-1}$$

اس لئے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی  $y$  رخ چل رہی ہے۔  
تیسرا قدم: ہمیں  $\frac{dx}{dt}$  تلاش کرنا ہے۔

چوتھا قدم: مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق  $s^2 = x^2 + y^2$  ہے۔  
پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ کی مدد سے  $t$  کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

چھٹا قدم:  $x = 0.8$  ،  $y = 0.6$  ،  $\frac{dy}{dt} = -60$  اور  $\frac{ds}{dt} = 20$  پر کرتے ہوئے  $\frac{dx}{dt}$  کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} 20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2 + 0.6^2}} \left( 0.8 \frac{dx}{dt} + 0.6(-60) \right) \\ 20 &= 0.8 \frac{dx}{dt} - 36 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{20 + 36}{0.8} = 70 \end{aligned}$$

اس لمحہ پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار  $70 \text{ km h}^{-1}$  ہے۔

□

مثال 3.57: پانی کی مخروطی ٹینکی  $9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس  $5 \text{ m}$  ، اس کا قد  $10 \text{ m}$  ہے اور اس کی نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی  $6 \text{ m}$  ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟  
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔  
پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

$H$  : لمحہ  $t$  (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

$x$  : لمحہ  $t$  (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

$y$  : لمحہ  $t$  (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ  $H$  ،  $x$  اور  $y$  متغیر  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔  
دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ  $t$  پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6 \text{ m}, \quad \frac{dH}{dt} = 9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$$

تیسرا قدم: ہمیں  $\frac{dy}{dt}$  تلاش کرنا ہے۔  
چوتھا قدم: متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

چونکہ لمحہ  $t$  پر ہمیں  $x$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی ہے لہذا ہمیں  $x$  سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ متشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \implies x = \frac{y}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

پانچواں قدم:  $t$  کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2 \frac{dy}{dt}$$

اس کو  $\frac{dy}{dt}$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \frac{dH}{dt}$$

چھٹا قدم: دی گئی معلومات یعنی  $y = 6$  اور  $\frac{dH}{dt} = 9$  پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi(6^2)} \cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \text{ m min}^{-1}$$

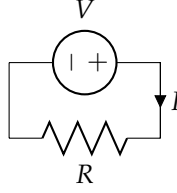
□

اس لمحے پر پانی کی گہرائی  $0.32 \text{ m min}^{-1}$  سے بڑھ رہی ہے۔

## سوالات

سوال 1: فرض کریں کہ دائرے کا رداس  $r$  اور رقبہ  $S = \pi r^2$  وقت  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔  $\frac{ds}{dt}$  اور  $\frac{dr}{dt}$  کا تعلق لکھیں۔

جواب:  $\frac{ds}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$



شکل 3.67: برقی دور برائے سوال 5

سوال 2: فرض کریں کہ  $r$  کا رداس اور سطحی رقبہ  $S = \frac{4}{3}\pi r^2$  وقت  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔  $\frac{dS}{dt}$  اور  $\frac{dr}{dt}$  کا تعلق لکھیں۔

سوال 3: بیلن کے رداس  $r$ ، قد  $h$  اور حجم  $H$  کا تعلق  $H = \pi r^2 h$  ہے۔

ا.  $r$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dh}{dt}$  کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب.  $h$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dr}{dt}$  کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نا  $r$  اور نا  $h$  مستقل ہوں تب  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dr}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

جواب: (ا)  $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$ ، (ب)  $\frac{dH}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt}$ ، (ج)  $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi r h \frac{dr}{dt}$

سوال 4: سیدھا کھڑے مخروط جس کا رداس  $r$  اور قد  $h$  ہوں کا حجم  $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  ہو گا۔

ا. مستقل  $r$  کی صورت میں  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dh}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ب. مستقل  $h$  کی صورت میں  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dr}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل  $h$  اور  $r$  کی صورت میں  $\frac{dH}{dt}$ ،  $\frac{dr}{dt}$  اور  $\frac{dh}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال 5: مزاحمت  $R$  میں برقی رو  $I$  اور برقی دباؤ  $V$  کا تعلق  $V = IR$  ہے (شکل 3.67 میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباؤ  $1 \text{ V s}^{-1}$  سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو  $\frac{1}{3} \text{ A s}^{-1}$  سے گھٹ رہی ہے۔

ا.  $\frac{dV}{dt}$  کی قیمت کیا ہے؟

ب.  $\frac{dI}{dt}$  کی قیمت کیا ہے؟

ج.  $\frac{dR}{dt}$ ،  $\frac{dV}{dt}$  اور  $\frac{dR}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

د. جب  $V = 12$  وولٹ اور  $I = 2$  ایمپیر ہوں تب  $\frac{dR}{dt}$  کیا ہو گا؟ کیا  $R$  بڑھ رہا ہو گا یا گھٹ رہا ہو گا؟

جواب: (ا)  $1 \text{ V s}^{-1}$ ، (ب)  $-\frac{1}{3} \text{ A s}^{-1}$ ، (ج)  $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I} \left( \frac{dV}{dt} - V \frac{dI}{dt} \right)$ ، (د)  $\frac{3}{2} \Omega \text{ s}^{-1}$ ، مزاحمت بڑھ رہی ہے۔

سوال 6: برقی دور میں طاقت  $P$ ، مزاحمت  $R$  اور برقی رو  $i$  کا تعلق  $P = i^2 R$  ہے۔ طاقت، مزاحمت اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W)، اوہم ( $\Omega$ ) اور ایمپیر (A) ہیں۔

ا.  $\frac{dP}{dt}$ ،  $\frac{dR}{dt}$  اور  $\frac{di}{dt}$  کا تعلق کیا ہے جہاں  $P$ ،  $R$  اور  $i$  میں سے کوئی بھی مستقل نہیں ہے۔

ب. مستقل  $P$  کی صورت میں  $\frac{dR}{dt}$  اور  $\frac{di}{dt}$  کا کیا تعلق ہے؟

سوال 7: کارتیسی محد میں نقطہ  $(x, 0)$  اور  $(0, y)$  کے بیچ فاصلہ  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$  ہے۔ وقت کو  $t$  سے ظاہر کریں۔

ا. مستقل  $y$  کی صورت میں  $\frac{ds}{dt}$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کا تعلق کیا ہو گا؟

ب. اگر  $x$  اور  $y$  دونوں متغیر ہوں تب  $\frac{ds}{dt}$  کا  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

ج. مستقل  $s$  کی صورت میں  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کا کیا تعلق ہو گا؟

جواب: (ا)  $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt}$ ، (ب)  $\frac{ds}{dt} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt}$ ، (ج)  $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$

سوال 8: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں  $x$ ،  $y$  اور  $z$  ہیں۔ ڈبے کے وتر کی لمبائی  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  ہو گی۔

ا. فرض کریں  $x$ ،  $y$  اور  $z$  مستقل نہیں ہیں۔  $\frac{ds}{dt}$ ،  $\frac{dx}{dt}$ ،  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dz}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

ب. مستقل  $x$  کی صورت میں  $\frac{ds}{dt}$ ،  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dz}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

ج. مستقل  $x$  کی صورت میں  $\frac{dx}{dt}$ ،  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dz}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 9: ایک مثلث جس کے ضلع  $a$  اور  $b$  جن کے بیچ زاویہ  $\theta$  ہو کا رقبہ  $S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$  ہو گا۔

ا. مستقل  $a$  اور  $b$  کی صورت میں  $\frac{dS}{dt}$  اور  $\frac{d\theta}{dt}$  کا تعلق کیا ہوگا؟

ب. مستقل  $b$  کی صورت میں  $\frac{dS}{dt}$ ،  $\frac{da}{dt}$  اور  $\frac{d\theta}{dt}$  کا تعلق کیا ہوگا؟

ج.  $a$ ،  $b$  اور  $\theta$  غیر مستقل ہونے کی صورت میں  $\frac{dS}{dt}$ ،  $\frac{da}{dt}$ ،  $\frac{db}{dt}$  اور  $\frac{d\theta}{dt}$  کا تعلق کیا ہوگا؟

جواب: (ا)  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt}$  (ب)  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$  (ج)  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a \sin \theta \frac{db}{dt}$

سوال 10: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس  $r$  ہے جس سے اس کا رداس  $0.01 \text{ cm min}^{-1}$  کی شرح سے بڑھتا ہے۔ جب رداس  $50 \text{ cm}$  ہو تب تختے کا رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

سوال 11: مستطیل کی لمبائی  $l$  اور چوڑائی  $w$  کی شرح تبدیلی  $2 \text{ cm s}^{-1}$  اور  $2 \text{ cm s}^{-1}$  ہیں۔ جب  $l = 12 \text{ cm}$  اور  $w = 5 \text{ cm}$  ہو تب شرح تبدیلی (ا) رقبہ، (ب) محیط، (ج) وتر کیا ہوں گے؟ ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟

جواب: (ا)  $14 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  سے بڑھتا ہے؛ (ب)  $0 \text{ cm s}^{-1}$ ، مستقل؛ (ج)  $-\frac{14}{13} \text{ cm s}^{-1}$ ، گھٹ رہا ہے۔

سوال 12: مستطیل ڈبے کے ضلع کی لمبائیاں  $x$ ،  $y$  اور  $z$  ہیں۔ ان کی شرح تبدیلی

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}$$

ہیں۔ جس لمحہ  $x = 4$ ،  $y = 3$  اور  $z = 2$  ہوں اس لمحہ ڈبے کے (ا) حجم، (ب) سطحی رقبہ، (ج) وتر  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  کی تبدیلی کی شرح کیا ہوگی؟

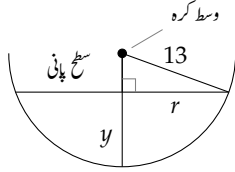
سوال 13: دیوار کے ساتھ لگی  $4 \text{ m}$  لمبی سیزھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے (شکل 3.68)۔ جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیزھی کا فاصلہ  $3 \text{ m}$  ہو اس لمحہ پر سیزھی کا یہ سر  $0.5 \text{ m s}^{-1}$  کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

ا. اس لمحے پر سیزھی کا بالائی سر کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

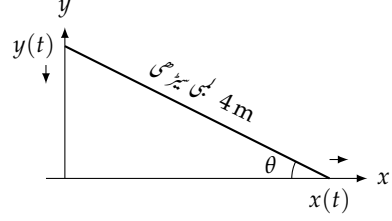
ب. سیزھی، زمین اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔ اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ج. اس لمحے پر سیزھی اور زمین کے بیچ زاویہ  $\theta$  کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟





شکل 3.69: نصف کرہ ٹینکی (سوال 19)



شکل 3.68: دیوار کے ساتھ سیڑھی (سوال 13)

جواب: (i)  $-\frac{3\sqrt{7}}{14} \text{ m s}^{-1}$ ، (ب)  $-\frac{\sqrt{7}}{14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

سوال 14: دو ہوائی جہاز 7000 m کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار  $1000 \text{ km h}^{-1}$  جبکہ جہاز ب کی رفتار  $850 \text{ km h}^{-1}$  ہے۔ جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ 50 km اور ب کا فاصلہ 100 km ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 15: ایک لڑکی 300 m بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ ہوا پتنگ کو افقی رخ  $25 \text{ m min}^{-1}$  کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔ اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ 500 m ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟  
جواب:  $20 \text{ m s}^{-1}$

سوال 16: پرانے انجن کی بیلن کو خراہ کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا پسٹن ڈالا جاتا ہے۔ خراہ کی مشین بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں  $25 \mu\text{m}$  بڑھاتی ہے۔ جب رداس 9.8 cm ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

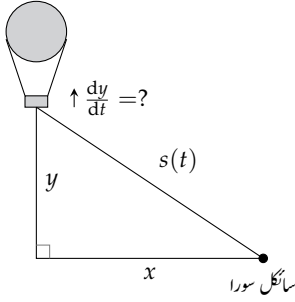
سوال 17: ریت کو  $10 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی  $\frac{3}{8}$  ہوتی ہے۔ جب ڈھیر 4 m اونچا ہو اس لمحہ ڈھیر کی (i) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب  $\text{cm s}^{-1}$  میں دیں۔  
جواب: (i)  $\frac{dh}{dt} = 11.19 \text{ cm min}^{-1}$ ، (ب)  $\frac{dr}{dt} = 14.92 \text{ cm min}^{-1}$

سوال 18: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی 6 m اور رداس 45 m ہیں سے پانی کو  $50 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔ مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔ (i) جب پانی 5 m گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحہ پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب  $\text{cm s}^{-1}$  میں دیں۔

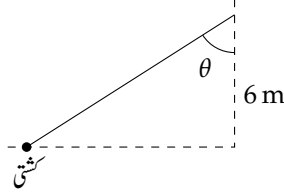
سوال 19: نصف کرہ جس کا رداس  $R = 13 \text{ m}$  ہے سے پانی کا انعکاس  $6 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے کیا جاتا ہے (شکل 3.69)۔ پانی کا حجم  $H = \frac{\pi}{3} y^2 (3R - y)$  ہے جہاں y پانی کی گہرائی ہے۔

ا. جب پانی کی گہرائی 8 m ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

ب. جب پانی کی گہرائی y ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟



شکل 3.70: کشتی کو بندرگاہ میں کھینچا جاتا ہے (سوال 22)



شکل 3.71: غبارہ کے نیچے سے گاڑی گزرتی ہے (سوال 23)

ج۔ جب پانی 8 m گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

جواب: (ا)  $-\frac{1}{24\pi} \text{ m min}^{-1}$ ، (ب)  $r = \sqrt{26y - y^2} \text{ m}$ ، (ج)  $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi} \text{ m min}^{-1}$

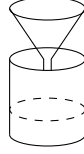
سوال 20: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔ فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔ دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔

سوال 21: ایک غبارے میں  $100\pi \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے ہلیم <sup>42</sup> گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس 5 m ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہو گا؟  
جواب:  $1 \text{ m/min}$ ،  $40\pi \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$

سوال 22: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے 6 m اونچائی سے بندرگاہ کی طرح کھینچا جاتا ہے (شکل 3.70)۔ رسی کو  $2 \text{ m s}^{-1}$  کی رفتار کھینچا جاتا ہے۔ (ا) جب رسی کی لمبائی 10 m ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ  $\theta$  کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 23: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ  $1 \text{ m s}^{-1}$  سے حرکت کرتا ہے۔ جب یہ 65 m بلندی پر پہنچتا ہے ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی  $17 \text{ m s}^{-1}$  کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے (شکل 3.71)۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟  
جواب:  $11 \text{ m s}^{-1}$

سوال 24: مخروط چھلنی میں بیک وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں  $10 \text{ cm}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے بھری جاتی ہے (شکل 3.72)۔ (ا) چھلنی میں چائے کی گہرائی 5 cm ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحہ پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟



شکل 3.72: مخروط چھلنی (سوال 24)

سوال 25: اخراج قلب جرمی کے اڈولف ٹک نے 1860 کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس جملے کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً  $7 \text{ L min}^{-1}$  خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر  $6 \text{ L min}^{-1}$  اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب  $30 \text{ L min}^{-1}$  تک خون خارج کر سکتا ہے۔

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

سے کیا جا سکتا ہے جہاں سانس سے خارج  $\text{CO}_2$  کی ملی لٹرن فی منٹ میں مقدار کو  $Q$  سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں  $\text{CO}_2$  کی کثافت  $\text{mL/L}$  اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں  $\text{CO}_2$  کی کثافت کے فرق کو  $D$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں  $Q = 223 \text{ mL/min}$  اور  $D = 97 - 56 = 41 \text{ mL/L}$  کی صورت میں

$$y = \frac{223 \text{ mL/min}}{41 \text{ mL/L}} \approx 5.68 \text{ L/min}$$

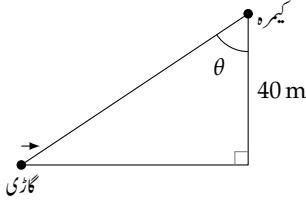
ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ جب  $Q = 233$  اور  $D = 41$  ہوں تب  $D$  کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ  $Q$  میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی ہے۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟  
جواب:  $\frac{466}{1681} \text{ L min}^{-1}$  سے بڑھ رہا ہے۔

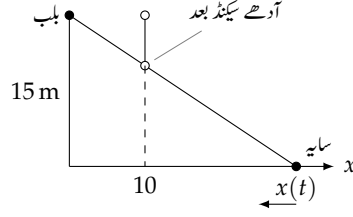
سوال 26: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ  $x$  اشیاء کو  $c(x)$  لاگت،  $r(x)$  آمدنی اور  $p(x) = r(x) - c(x)$  منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔  $x$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کی درج ذیل قیمتوں کے لئے  $\frac{dr}{dt}$ ،  $\frac{dc}{dt}$  اور  $\frac{dp}{dt}$  کا حساب کریں۔

ا.

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x; \quad \frac{dx}{dt} = 0.1, \quad x = 2$$



شکل 3.74: گاڑی کی ویڈیو (سوال 32)



شکل 3.73: گیند کا سایہ (سوال 31)

ب.

$$r(x) = 70x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{x}; \quad \frac{dx}{dt} = 0.05, \quad x = 1.5$$

سوال 27: قطع مکانی پر حرکت۔ ایک ذرہ قطع مکانی  $y = x^2$  پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا  $x$  محدود  $10 \text{ m s}^{-1}$  کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مبداء سے ذرہ تک خط،  $x$  محور کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتا ہے۔ جب  $x = 3 \text{ m}$  ہو تب  $\theta$  کس شرح سے تبدیل ہو گا؟  
جواب:  $1 \text{ rad s}^{-1}$

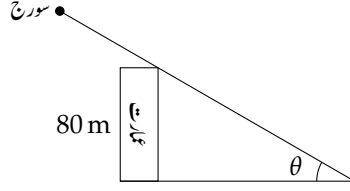
سوال 28: دوسرا قطع مکانی۔ ایک ذرہ دائیں سے بائیں جانب قطع مکانی  $y = \sqrt{-x}$  پر یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا  $x$  محدود  $\frac{8}{\text{ms}}$  سے گھٹتا ہے۔ مبداء سے ذرہ تک خط،  $x$  محور کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتا ہے۔ جب  $x = -4 \text{ m}$  ہو تب  $\theta$  کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 29: مستوی پر حرکت۔ کار تیزی محدود پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے تعین گر  $x$  اور  $y$  محدود وقت  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ اگر  $\frac{dx}{dt} = -1 \text{ m s}^{-1}$  اور  $\frac{dy}{dt} = -5 \text{ m s}^{-1}$  ہوں تب مبداء سے ذرے کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟  
جواب:  $-5 \text{ m s}^{-1}$

سوال 30: حرکت پذیر سایہ۔  $2 \text{ m}$  قد کا ایک شخص گلی میں روشنی کے کھمبے کی طرف  $1.5 \text{ m s}^{-1}$  رفتار سے چل رہا ہے۔ کھمبے میں نسب بلب زمین سے  $5 \text{ m}$  بلندی پر ہے۔ جب شخص کھمبے سے  $4 \text{ m}$  فاصلے پر ہو، اس کا سایہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 31: دوسرا حرکت کرتا سایہ۔ کھمبے پر بلب  $15 \text{ m}$  بلندی پر نسب ہے۔ کھمبے سے  $10 \text{ m}$  فاصلے پر اتنی ہی بلندی سے ایک گیند کو زمین پر گرنے دیا جاتا ہے (شکل 3.73)۔ آدھے سینڈ بعد زمین پر گیند کا سایہ کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ ( $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ )  
جواب:  $490 \text{ m s}^{-1}$

سوال 32: آپ  $80 \text{ km h}^{-1}$  رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی سے  $150 \text{ m}$  کے فاصلے پر  $40 \text{ m}$  کی بلندی سے گاڑی کی ویڈیو<sup>43</sup> بنا رہے ہیں جو سیدھی آپ کی طرف آرہی ہے (شکل 3.74)۔ اس لمحے پر کیمرے کا زاویہ میلان سے شرح سے تبدیل ہو گا؟ دو سینڈ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟



شکل 3.75: عمارت کا سایہ (سوال 35)

سوال 33: برف کی پگھلتی تہہ۔ ایک لوہے کا کرہ جس کا رداس 0.1 m ہے پر برف کی یکساں موٹائی کی تہہ جمائی جاتی ہے جو  $10 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  کی شرح سے پگھلتی ہے۔ جس لمحے پر تہہ کو موٹائی 2 cm ہو اس لمحے پر تہہ کی موٹائی کس شرح سے تبدیل ہوگی؟  
جواب:  $\frac{dr}{dt} = 55 \mu\text{m s}^{-1}$ ,  $\frac{dS}{dt} = 1.66 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

سوال 34: موٹروے پولیس۔ 1 km بلندی پر ایک جہاز پشاور سے اسلام آباد کی موٹروے کے ٹھیک اوپر  $500 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار سے پرواز کرتے ہوئے موٹروے پر سامنے سے آمد گاڑی کا فاصلہ 5 km ناپتا ہے جو اس لمحے پر  $100 \text{ km h}^{-1}$  کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ گاڑی کی رفتار تلاش کریں۔

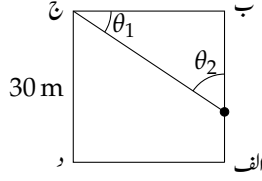
سوال 35: عمارت کا سایہ۔ سال کے کسی ایک دن سورج 80 m بلند عمارت کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے (شکل 3.75)۔ جب عمارت کا سایہ ہموار زمین پر 60 m ہو، سایے کے سر سے سورج تک کا خط زمین کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنتا ہے جو اس لمحے  $0.27^\circ/\text{min}$  کی شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔ سایے کی لمبائی کس شرح سے گھٹتی ہے؟ جواب  $\text{cm}/\text{min}$  میں دیں اور ریڈیئن کا استعمال کرنا نہ بھولیں۔  
جواب:  $58.9 \text{ cm}/\text{min}$

سوال 36: چال قدمی۔ ایک چوراہے پر دو سڑک  $90^\circ$  زاویے سے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک سڑک پر عفت بریجنڈ چوراہے کی جانب  $2 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے بڑھتی ہے جبکہ دوسری سڑک پر اس کا چھوٹا بھائی زریاب خان  $1.5 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے چوراہے سے دور چلا جاتا ہے۔ جب عفت بریجنڈ اور زریاب خان چوراہے سے بالترتیب 20 m اور 15 m کے فاصلے پر ہوں، زاویہ  $\theta$  کی شرح تبدیلی کیا ہوگی؟

سوال 37: بچوں کا کھیل۔ ایک کھیل میں کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے دوڑ کر گھری کی الٹ رخ چکور راہ پر  $6 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے چکر لگاتا ہے۔ چکور کے اطراف کی لمبائی 30 m ہے (شکل 3.76)۔

ا. جب کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے 10 m فاصلے پر ہو، اس کا نقطہ ج سے فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ب. اس لمحے پر زاویہ  $\theta_1$  اور  $\theta_2$  کس شرح سے تبدیل ہوتے ہیں؟



شکل 3.76: بیچوں کا کھیل (سوال 37)

جواب: (ا)  $\frac{-12}{\sqrt{13}} \text{ m s}^{-1}$ ، (ب)  $\frac{d\theta_1}{dt} = -0.138 \text{ rad s}^{-1}$ ،  $\frac{d\theta_2}{dt} = 0.138 \text{ rad s}^{-1}$

سوال 38: ایک گھڑی کے سیکنڈوں کی سوئی کی لمبائی 20 cm ہے۔ جب یہ سوئی چار بجے پر ہو اس لمحہ بارہ بجے کی نشان سے اس کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 39: بحری جہاز - نقطہ M سے دو بحری جہاز آپس میں  $120^\circ$  کا زاویہ بناتے ہوئے روانہ ہوتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار  $28 \text{ km h}^{-1}$  ہے جبکہ جہاز ب کی رفتار  $20 \text{ km h}^{-1}$  ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟  
جواب:  $4\sqrt{109} \text{ km h}^{-1}$



ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم



