

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور ناظم قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونباتی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونباتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونباتی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تنگی اور کردی محدود
1435	12	سستی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سستی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1468	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1476	12.4	اٹخا، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1576	13.5	زنجیری قاعدہ
1589	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1593		جوابات
1595	ا	ضمیمہ اول
1597	ب	ضمیمہ دوم

1599	ج ضمیمہ تین
1601	د ضمیمہ چار
1603	ه ضمیمہ پانچ
1605	و ضمیمہ چھ
1607	ز ضمیمہ سات
1609	ح ضمیمہ آٹھ
1611	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

13.6 پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات

اب تک تفاعل، مثلاً $w = f(x, y)$ کے جزوی تفرقات تلاش کرتے ہوئے ہم x اور y کو بالکل آزاد غیر تابع متغیرات تصور کرتے رہے ہیں، اگرچہ عملی زندگی میں ضروری نہیں کہ ایسا ہو۔ مثال کے طور پر ہم گیس کی اندرونی توانائی U کو دباؤ P ، حجم H اور حرارت T کا تفاعل $U = f(P, H, T)$ لکھ سکتے ہیں۔ اگر گیس کے انفرادی مالیکیول ایک دوسرے پر اثر انداز نہ ہوں تب P ، H اور T مثالی گیس کے قانون

$$PH = nRT \quad n, R \text{ مستقل ہیں}$$

کو مطمئن کریں گے لہذا یہ متغیرات بالکل آزاد ہر گز نہیں ہوں گے۔ ایسی صورت میں جزوی تفرقات کی تلاش پیچیدہ ثابت ہوتے ہیں۔ بہر حال ان سے نمٹنا ضروری ہے۔

فیصلہ کریں کہ کون سے متغیرات غیر تابع اور کون سے تابع ہیں

اگر تفاعل $w = f(x, y, z)$ کے متغیرات کسی تعلق، مثلاً $z = x^2 + y^2$ کے پابند ہوں تب f کے جزوی تفرقات کی جیومیٹریائی معنی اور عددی قیمت اس پر منحصر ہوں گے کہ کن متغیرات کو غیر تابع اور کن کو تابع متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔ اس انتخاب کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر آئیں $w = x^2 + y^2 + z^2$ اور $z = x^2 + y^2$ کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کریں۔

مثال 13.37: تفاعل $w = x^2 + y^2 + z^2$ اور متغیرات کو پابند کرنے والی مساوات $z = x^2 + y^2$ کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کریں۔

حل: ہمیں چار متغیرات کی دو مساوات دی گئی ہیں جنہیں ہم دو (تابع) متغیرات کے لئے باقی (غیر تابع) متغیرات کی صورت میں حل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرنے کو کہا جائے، اس کا مطلب ہے کہ w تابع متغیر اور x تابع متغیر ہے۔ یوں ہمارے پاس تابع اور غیر تابع متغیرات منتخب کرنے کے درج ذیل ممکنات ہیں۔

تابع	غیر تابع
w, z	x, y
w, y	x, z

ہم دونوں صورتوں میں w کو منتخب غیر تابع متغیرات کی صورت میں صریحاً لکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم دوسری مساوات استعمال کرتے ہوئے پہلی مساوات کا دوسرا تابع متغیر خارج کرتے ہیں۔

پہلی انتخاب میں z دوسرا تابع متغیر ہو گا۔ ہم پہلی مساوات میں اس کی جگہ $x^2 + y^2$ پر کر کے اس کو خارج کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس سے

$$(13.34) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$$

حاصل ہو گا جو x اور y غیر تابع متغیرات لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی مساوات ہے۔

دوسری انتخاب میں غیر تابع متغیرات x اور z ہیں جبکہ دوسرا تابع تغیر y ہے۔ یوں y خارج کرنے کی خاطر ہم پہلی مساوات میں y^2 کی جگہ $z - x^2$ پر کر کے

$$(13.35) \quad w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں غیر تابع متغیرات x اور z منتخب کرنے سے $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.34 اور مساوات 13.35 ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔ ہم $z = x^2 + y^2$ استعمال کرتے ہوئے ایک سے دوسری مساوات حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ یوں ہمارے پاس ایک $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی بجائے دو نتائج موجود ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں پوری معلومات فراہم کیے بغیر جزوی تفرق حاصل کرنے کو کہا گیا۔ ہمیں پوچھنا ہو گا کہ کونسا $\frac{\partial w}{\partial x}$ درکار ہے؟

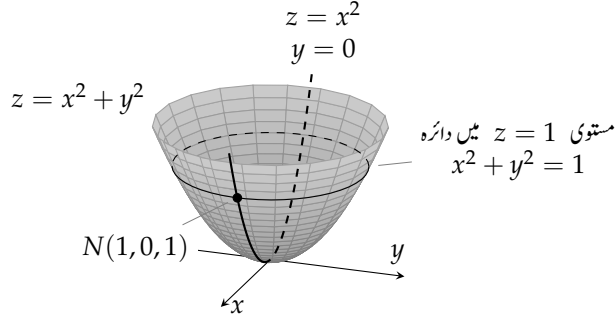
ہم مساوات 13.34 اور مساوات 13.35 کی جیومیٹریائی (شکل 13.27) مطلب کو دیکھ کر جان سکتے ہیں کہ یہ جوابات ایک دوسرے سے مختلف کیوں ہیں۔ تفاعل $w = x^2 + y^2 + z^2$ مبدا سے نقطہ (x, y, z) کا فاصلہ ناپتا ہے۔ شرط $z = x^2 + y^2$ کہتا ہے کہ نقطہ (x, y, z) قطع مکانی کے جسم طواف پر پایا جاتا ہے۔ صرف اس سطح پر چلتے ہوئے نقطہ $N(x, y, z)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ سے کیا مراد ہے؟ مثال کے طور پر نقطہ $(1, 0, 1)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی کیا قیمت ہوگی؟

اگر ہم x اور y کو غیر تابع متغیرات لیں تب ہم y کو مستقل (موجودہ صورت میں $y = 0$) تصور کرتے ہوئے x تبدیل کرتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ N مستوی xz میں قطع مکانی $z = x^2$ پر حرکت کرے گا۔ اس قطع مکانی پر چلتے ہوئے، w جو مبدا سے N تک فاصلے کا مربع ہے تبدیل ہو گا۔ ہم ایسی صورت میں درج ذیل حاصل کرتے ہیں (جو مذکورہ بالا پہلا نتیجہ ہے۔)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$$

نقطہ $(1, 0, 1)$ پر اس کی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6$$



شکل 13.27: نقطہ N کو پابند کرنے سے جزوی تفرقات کے مختلف نتائج حاصل ہوں گے۔

اگر ہم x اور z کو غیر تابع متغیرات منتخب کریں تب ہم z کو مستقل رکھتے ہوئے x تبدیل کر کے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ N کا z محدود 1 ہے لہذا x تبدیل کرنے سے N مستوی $z = 1$ میں ایک دائرہ پر حرکت کرے گا۔ اس دائرہ پر چلتے ہوئے مبدا سے N تک فاصلہ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہذا w جو اس فاصلے کا مربع ہے بھی تبدیل نہیں ہو گا۔ یوں

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

□

ہو گا جو دوسرا انتخاب کرتے ہوئے ہم حاصل کر چکے ہیں۔

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

