

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1261	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291	10.6	قطبی محدود
1303	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1317	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1319	10.8.1	دائرے
1334	10.9	قطبی محدود میں مکمل

1343	ا	ضمیمہ اول
1345	ب	ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

10.9 قطبی محدود میں مکمل

اس حصہ میں قطبی محدود استعمال کرتے ہوئے مستوی خطوط کا رقبہ، منحنيات کی لمبائی، اور سطح طواف کا رقبہ حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

مستوی میں رقبہ

شکل میں خطہ OTS کے حدود شعاع $\theta = \alpha$ ، شعاع $\theta = \beta$ اور منحنی $r = f(\theta)$ ہیں۔ ہم اس خطہ کو n عدد پنکھا نما ٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں جو زاویہ TOS کی خانہ بندی P پر مبنی ہے۔ ایک علامتی پٹی کا رداس $r_k = f(\theta_k)$ اور وسطی زاویہ $\Delta\theta_k$ ہو گا جبکہ اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k$$

یوں مکمل خطے کا رقبہ تخمیناً

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k$$

ہو گا۔ اگر f استمراری ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ $\|P\| \rightarrow 0$ کرنے سے یہ تخمین بہتر سے بہتر ہو گی لہذا خطے کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

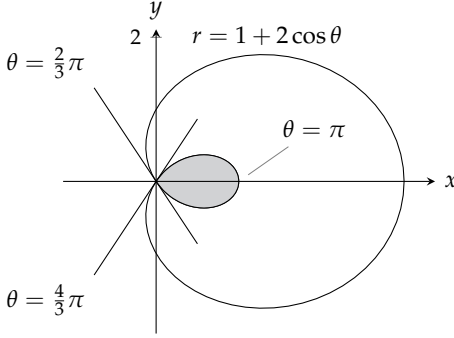
$$\begin{aligned} S &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (f(\theta))^2 d\theta \end{aligned}$$

مبدأ اور منحنی $r = f(\theta)$ ، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ کے بیچ پنکھا نما خطہ کا رقبہ

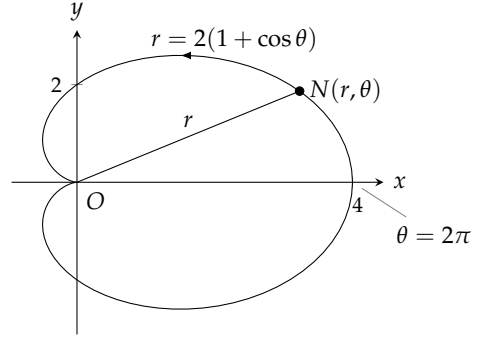
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

یہ درج ذیل تفرقی رقبے کا مکمل ہے۔

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$



شکل 10.144: رقبہ گھونگا (مثال 10.46)



شکل 10.143: قلب نما کی ترسیم برائے مثال 10.45

مثال 10.45: قلب نما $r = 2(1 + \cos \theta)$ کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم قلب نما کو ترسیم (شکل 10.143) کر کے رداس OP کی نشاندہی کرتے ہیں جو $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$ کرنے سے قلب نما پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے۔ یہ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1 + \cos \theta)^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos \theta + 2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos \theta + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \left[3\theta + 4\sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi
 \end{aligned}$$

□

مثال 10.46: درج ذیل گھونگا کے چھوٹے گھیرے کا رقبہ تلاش کریں۔

$$r = 1 + 2 \cos \theta$$

حل: ہم اس گھونگے کو ترسیم کرتے ہیں (شکل 10.144)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے گھیرے $\theta = \frac{2}{3}\pi$ اور $\theta = \frac{4}{3}\pi$ کے بیچ پڑتا جاتا ہے۔ ہم نصف رقبہ $\theta = \frac{2}{3}\pi$ تا $\theta = \pi$ تلاش کر کے اس کو 2 سے ضرب دیتے ہیں۔

$$S = 2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} r^2 d\theta$$

منکمل r^2 کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} r^2 &= (2 \cos \theta + 1)^2 = 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 4 \cos \theta + 1 \\ &= 2 + 2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 1 \\ &= 3 + 2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta \end{aligned}$$

یوں رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (3 + 2 \cos 2\theta + 4 \cos \theta) d\theta \\ &= \left[3\theta + \sin 2\theta + 4 \sin \theta \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= (3\pi) - \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

□

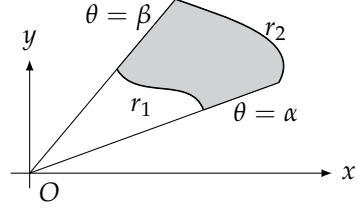
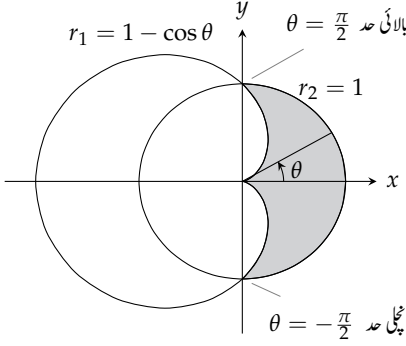
ہم شکل 10.145 طرز خط جو منحنیات $r_1 = r_1(\theta)$ اور $r_2 = r_2(\theta)$ کے بیچ $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ پایا جاتا ہو، کا رقبہ تلاش کرنے کی خاطر منکمل $\frac{1}{2}r_2^2 d\theta$ سے منکمل $\frac{1}{2}r_1^2 d\theta$ منفی کرتے ہیں۔ اس سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

خطہ $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ کا رقبہ

$$(10.47) \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_1^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta$$

مثال 10.47: اس خطے کا رقبہ تلاش کریں جو دائرہ $r = 1$ کے اندر اور قلب نما $r = 1 - \cos \theta$ کے باہر پایا جاتا ہے۔

حل: ہم رقبہ ترسیم کر کے خطے کے حدود اور منکمل کے حدود معلوم کرتے ہیں (شکل 10.146)۔ بیرونی منحنی $r_2 = 1$ جبکہ اندرونی



شکل 10.145: سایہ دار رقبہ تلاش کرنے کی خاطر r_2 اور r_1 کے رقبہ سے O کے رقبہ منہی کیا جاتا ہے۔

شکل 10.146: دائرہ اور قلب نما کے رقبہ (مثال 10.47)

منہی $r_1 = 1 - \cos \theta$ ہے جبکہ θ کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ مساوات 10.47 سے درج ذیل رقبہ حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - 2 \cos \theta) + \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta - \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(2 \cos \theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \left[2 \sin \theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

تفصیلی

□

منہی کی لمبائی

ہم منہی $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ کی لمبائی کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر اس منہی کی درج ذیل مقدار معلوم مساوات لکھتے ہیں۔

$$(10.48) \quad x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

یوں مقدار معلوم لمبائی کے کلیہ (مساوات 10.32)

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

میں x اور y کی قیمتیں مساوات 10.48 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

لمبائی قوس اگر $\alpha \leq \theta \leq \beta$ پر $r = f(\theta)$ کا پہلا استمراری تفرق پایا جاتا ہو اور اگر θ کی قیمت α سے β کرنے سے نقطہ $N(r, \theta)$ پوری مثنی $r = f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس مثنی کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$(10.49) \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

مثال 10.48: قلب نما $r = 1 - \cos \theta$ کی لمبائی دریافت کریں۔

حل: ہم قلب نما کا خاکہ کھینچتے ہیں تاکہ مکمل کے حدود معلوم کر سکیں (شکل 10.147)۔ زاویہ θ کو 0 سے 2π کرنے سے نقطہ $N(r, \theta)$ ٹھیک ایک بار پوری قلب نما پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہذا $\alpha = 0$ اور $\beta = 2\pi$ ہوں گے۔ اب

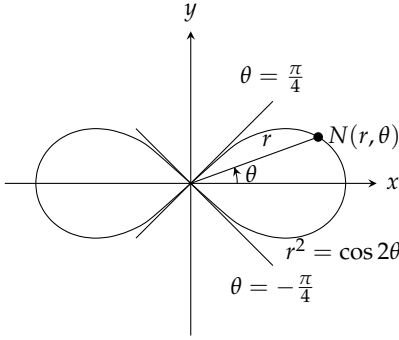
$$r = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = \sin \theta$$

ے

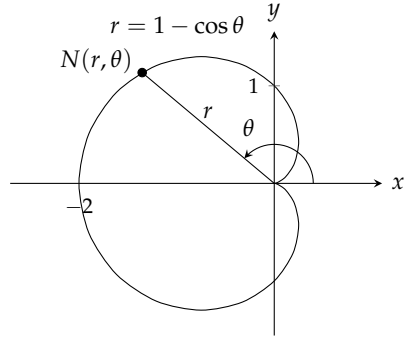
$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1 - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 \\ &= 1 - 2 \cos \theta + \underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1 = 2 - 2 \cos \theta \end{aligned}$$

حاصل ہو گا لہذا لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad (1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ لے } \sin \frac{\theta}{2} \geq 0) \\ &= \left[-4 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$



شکل 10.148: قلب نما کی لمبائی (مثال 10.49)



شکل 10.147: قلب نما کی لمبائی (مثال 10.48)

□

سطح طواف کا رقبہ

سطح طواف کے رقبہ کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات 10.48 کی مدد سے منحنی $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ کی مقدار معلوم مساوات لکھ کر حصہ 10.5 میں دی گئی سطحی رقبے کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

سطح طواف کا رقبہ

اگر $\alpha \leq \theta \leq \beta$ پر $r = f(\theta)$ کا استمراری پہلا تفرق پایا جاتا ہو اور اگر θ کی قیمت α تا β کرنے سے نقطہ $N(r, \theta)$ منحنی $r = f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس منحنی کو محور x اور محور y کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کے رقبے درج ذیل کلیات دیں گے۔

$$(10.50) \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \sin \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (\text{محور } x \text{ کے گرد } (y \geq 0))$$

$$(10.51) \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \cos \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (\text{محور } y \text{ کے گرد } (x \geq 0))$$

مثال 10.49: گھونگا $r^2 = \cos 2\theta$ کے دائیں گھیر کو محور y کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم اس گھیر کا خاکہ بنا کر مکمل کے حد تلاش کرتے ہیں (شکل 10.148)۔ زاویہ θ کی قیمت $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{4}$ کرنے سے نقطہ $N(r, \theta)$ منحنی پر ٹھیک ایک بار گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہذا $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ اور $\beta = \frac{\pi}{4}$ ہوں گے۔

ہم مساوات 10.50 کا مکمل مرحلوں میں حل کرتے ہیں۔ پہلے مرحلہ میں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$(10.52) \quad 2\pi r \cos \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = 2\pi \cos \theta \sqrt{r^4 + \left(r \frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

اس کے بعد $r^2 = \cos 2\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$2r \frac{dr}{d\theta} = -2 \sin 2\theta$$

$$r \frac{dr}{d\theta} = -\sin 2\theta$$

$$\left(r \frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \sin^2 2\theta$$

آخر میں $r^4 = (r^2)^2 = \cos^2 2\theta$ کی بنا مساوات 10.52 میں دائیں ہاتھ جذر درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$\sqrt{r^4 + \left(r \frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = 1$$

ان تمام نتائج کو مل کر ہم رقبہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \cos \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta && \text{مساوات 10.50} \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\pi \cos \theta \cdot (1) d\theta \\ &= 2\pi \left[\sin \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= 2\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

سوالات

قطبی منحنیات کے اندر رقبہ
سوال 1 تا سوال 6 میں منحنیات کے اندر رقبہ تلاش کریں۔

سوال 1: چپٹا گھونگا $r = 4 + 2 \cos \theta$ کے اندر۔

سوال 2: قلب نما $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$ کے اندر۔

سوال 3: چار گل $r = \cos 2\theta$ کے ایک پتا کے اندر۔

سوال 4: دو چشمہ $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, $a > 0$ کے اندر۔

سوال 5: دو چشمہ $r^2 = 4 \sin 2\theta$ کے ایک گھیر کے اندر۔

سوال 6: شش گل $r^2 = 2 \sin 3\theta$ کے اندر۔

مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ

سوال 7 تا سوال 16 میں مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 7: دائرہ $r = 2 \cos \theta$ اور $r = 2 \sin \theta$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال 8: دائرہ $r = 1$ اور $r = 2 \sin \theta$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال 9: دائرہ $r = 2$ اور قلب نما $r = 2(1 - \cos \theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال 10: قلب نما $r = 2(1 + \cos \theta)$ اور $r = 2(1 - \cos \theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال 11: دائرہ $r = \sqrt{3}$ کے باہر اور $r^2 = 6 \cos 2\theta$ کے اندر۔

سوال 12: دائرہ $r = 3a \cos \theta$ کے اندر اور قلب نما $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$ کے باہر رقبہ۔

سوال 13: دائرہ $r = -2 \cos \theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر رقبہ۔

سوال 14: (i) گھونگا $r = 2 \cos \theta + 1$ کے بیرونی گھیر کا رقبہ (شکل 10.144)۔ (ب) گھونگا $r = 2 \cos \theta + 1$ کے اندرونی گھیر کے باہر اور بیرونی گھیر کے اندر رقبہ۔

سوال 15: دائرہ $r = 6$ کے اندر خط $r = 3 \csc \theta$ سے اوپر رقبہ۔

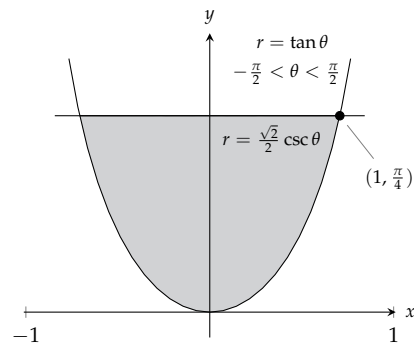
سوال 16: گھونگا $r^2 = 6 \cos 2\theta$ کے اندر اور خط $r = \frac{3}{2} \sec \theta$ کے دائیں جانب رقبہ۔

سوال 17: (i) سایہ دار خطہ شکل 10.149 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔ (ب) ایسا معلوم ہوتا ہے کہ $r = \tan \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ لکیر $x = 1$ اور لکیر $x = -1$ کا متقاربی خط ہو سکتا ہے۔ کیا ایسا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 18: قلب نما $r = \cos \theta + 1$ کے اندر اور دائرہ $r = \cos \theta$ کے باہر خطہ درج ذیل نہیں ہے۔

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(\cos \theta + 1)^2 - \cos^2 \theta] d\theta = \pi$$

ایسا کیوں ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل 10.149: خطہ سوال 17

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

