

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	
463	4.8 ترکیب نیوٹن	
475	تکمل	5
475	5.1 غیر قطعی کمالات	
487	5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	
489	ضمیمہ دوم	1

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 5

تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

5.1 غیر قطعی کمالات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق $f(x)$ سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق f ہے۔ ان تفاعل کو f کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو f کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے موزوں تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمیل

تعریف: تفاعل $f(x)$ کا الٹ تفرق تب $F(x)$ ہو گا جب f کے دائرہ کار میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

f کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ x کے لحاظ سے f کا غیر قطعی تکمیل¹ ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x) dx$$

علامت \int کو علامت تکمیل کہتے ہیں۔ تفاعل f کو متکمل² اور x کو تکمیل کا متغیر³ کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل f کے حاصل کردہ الٹ تفرق F اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکمیلی علامت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$(5.1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

مستقل C کو تکمیل کا مستقل⁴ یا اختیاری مستقل⁵ کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " x کے لحاظ سے تفاعل f کا غیر قطعی تکمیل $F(x) + C$ ہے۔" $F(x) + C$ کے حصول کو f کے تکمیل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1: $\int 2x dx$ تلاش کریں۔
حل:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$2x$ کا الٹ تفرق x^2 ہے اور C تکمیل کا مستقل ہے۔ کلیہ $x^2 + C$ تفاعل $2x$ کے تمام تفرقات دیتا ہے۔ یوں $x^2 + 1$ ، $x^2 - \pi$ اور $x^2 + \sqrt{2}$ تفاعل $2x$ کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔ جدول 5.1 میں غیر قطعی کمالات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

indefinite integral¹
integrand²
variable of integration³
constant of integration⁴
arbitrary constant⁵

جدول 5.1: مکمل کے کلیات

تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے	غیر قطعی مکمل
$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$	1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, n \text{ نا طق}$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = \int 1 dx = x + C$ (خصوصی صورت)
$\frac{d}{dx} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) = \sin kx$	2. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin kx}{k} \right) = \cos kx$	3. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	4. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx} (-\cot x) = \csc^2 x$	5. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	6. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx} (-\csc x) = \csc x \cot x$	7. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں $n = 5$ لیتے ہوئے:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں $n = -\frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں $k = 2$ لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں $k = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمیل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق مکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{d}{dx}(x \sin x + \cos x + C) = x \cos x + \sin x - \sin x + 0 = x \cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمیل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی کمالات کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ:	$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
(k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	
2. منفی کے لئے قاعدہ:	$\int -f(x) dx = - \int f(x) dx$
(قاعدہ 1 میں $k = -1$ لیا گیا ہے۔)	
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x) \mp g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

ا. ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب kf کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ f کے الٹ تفرق ضرب k کے برابر ہو۔

ب. بالخصوص ایک تفاعل اس صورت $-f$ کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ f کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔

ج. ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق $f \mp g$ کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ f کے الٹ تفرق اور g کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکلی علامت میں لکھنے سے غیر قطعی کمالات کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: مکمل کا مستقل

جدول 5.2، قاعدہ 1	$\int 5 \sec x \tan x dx = 5 \int \sec x \tan x dx$
جدول 5.1، کلیہ 6	$= 5(\sec x + C)$
غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت	$= 5 \sec x + 5C$
مستقل $5C$ کو مستقل C' لکھا گیا ہے	$= 5 \sec x + C'$
C' ایک مستقل ہے جس کو ہم اب C سے ظاہر کرتے ہیں	$= 5 \sec x + C$

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل C' کو بغیر علامت (!) لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, dx = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا مکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ مکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل مکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو مکمل۔

درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx$$

اگر ہم دیکھ کر بتا سکیں کہ $x^2 - 2x + 5$ کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو مکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو C لکھا جاسکتا ہے یعنی $C_1 + C_2 + C_3 = C$ جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو مکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے C لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل C لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے عملیات

بعض اوقات جن عملیات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکنیکی تماشل کی مدد سے ان عملیات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔ $\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے عمل عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماشل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

□

سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 1: 18 سوال میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 1: (ا) $2x$ ، (ب) x^2 ، (ج) $x^2 - 2x + 1$
جواب: (ا) x^2 ، (ب) $\frac{x^3}{3}$ ، (ج) $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

سوال 2: $x^7 - 6x + 8$ (ج)، x^7 (ب)، $6x$ (ا)

سوال 3: $x^{-4} + 2x + 3$ (ج)، x^{-4} (ب)، $-3x^{-4}$ (ا)
جواب: $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$ (ج)، $-\frac{1}{3}x^{-3}$ (ب)، x^{-3} (ا)

سوال 4: $-x^{-3} + x - 1$ (ج)، $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ (ب)، $2x^{-3}$ (ا)

سوال 5: $2 - \frac{5}{x^2}$ (ج)، $\frac{5}{x^2}$ (ب)، $\frac{1}{x^2}$ (ا)
جواب: $2x + \frac{5}{x}$ (ج)، $-\frac{5}{x}$ (ب)، $-\frac{1}{x}$ (ا)

سوال 6: $x^3 - \frac{1}{x^3}$ (ج)، $\frac{1}{2x^3}$ (ب)، $-\frac{2}{x^3}$ (ا)

سوال 7: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (ج)، $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ب)، $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ (ا)
جواب: $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$ (ج)، \sqrt{x} (ب)، $\sqrt{x^3}$ (ا)

سوال 8: $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (ج)، $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ (ب)، $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ (ا)

سوال 9: $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ (ج)، $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ (ب)، $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ (ا)
جواب: $x^{-1/3}$ (ج)، $x^{1/3}$ (ب)، $x^{2/3}$ (ا)

سوال 10: $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ (ج)، $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ (ب)، $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ (ا)

سوال 11: $\sin \pi x - 3 \sin 3x$ (ج)، $3 \sin x$ (ب)، $-\pi \sin \pi x$ (ا)
جواب: $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + \cos(3x)$ (ج)، $-3 \cos x$ (ب)، $\cos(\pi x)$ (ا)

سوال 12: $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$ (ج)، $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ (ب)، $\pi \cos \pi x$ (ا)

سوال 13: $-\sec^2 \frac{3x}{2}$ (ج)، $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ (ب)، $\sec^2 x$ (ا)
جواب: $-\frac{2}{3} \tan(\frac{3x}{2})$ (ج)، $2 \tan(\frac{x}{3})$ (ب)، $\tan x$ (ا)

سوال 14: $1 - 8 \csc^2 2x$ (ج)، $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$ (ب)، $\csc^2 x$ (ا)

سوال 15: $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$ (ج)، $-\csc 5x \cot 5x$ (ب)، $\csc x \cot x$ (ا)
جواب: $2 \csc(\frac{\pi x}{2})$ (ج)، $\frac{1}{5} \csc(5x)$ (ب)، $-\csc x$ (ا)

سوال 16: $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$ (ج)، $4 \sec 3x \tan 3x$ (ب)، $\sec x \tan x$ (ا)

سوال 17: $(\sin x - \cos x)^2$
جواب: $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 18: $(1 + 2 \cos x)^2$

تکمل کا حصول
سوال 19 تا سوال 58 میں مکمل حاصل کریں۔ مکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $\int (x + 1) dx$
جواب: $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 20: $\int (5 - 6x) dx$

سوال 21: $\int (3t^2 + \frac{t}{2}) dt$
جواب: $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 22: $(\frac{t^2}{2} + 4t^3) dt$

سوال 23: $(2x^3 - 5x + 7) dx$
جواب: $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 24: $\int (1 - x^2 - 3x^5) dx$

سوال 25: $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}) dx$
جواب: $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 26: $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x) dx$

سوال 27: $\int x^{-\frac{1}{3}} dx$
جواب: $\frac{3}{2} x^{2/3} + C$

سوال 28: $\int x^{-\frac{5}{4}} dx$

سوال 29: $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$
جواب: $\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{3}{4} x^{4/3} + C$

سوال 30: $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

سوال 31: $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}} \right) dy$
جواب: $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

سوال 32: $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}} \right) dy$

سوال 33: $\int 2x(1 - x^{-3}) dx$
جواب: $x^2 + \frac{2}{x} + C$

سوال 34: $\int x^{-3}(x + 1) dx$

سوال 35: $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$
جواب: $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

سوال 36: $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt$

سوال 37: $\int (-2 \cos t) dt$
جواب: $-2 \sin t + C$

سوال 38: $\int (-5 \sin t) dt$

سوال 39: $7 \sin \frac{\theta}{3} d\theta$
جواب: $-21 \cos \frac{\theta}{3} + C$

سوال 40: $\int 3 \cos 5\theta d\theta$

سوال 41: $\int (-3 \csc^2 x) dx$
جواب: $3 \cot x + C$

سوال 42: $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3} \right) dx$

سوال 43: $\int \frac{\csc \theta \cot \theta}{2} d\theta$
جواب: $-\frac{1}{2} \csc \theta + C$

سوال 44: $\frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta d\theta$

سوال 45: $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x) dx$
جواب: $4 \sec x - 2 \tan x + C$

سوال 46: $\int \frac{1}{2} (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx$

سوال 47: $\int (\sin 2x - \csc^2 x) dx$
جواب: $-\frac{1}{2} \cos 2x + \cot x + C$

سوال 48: $\int (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) dx$

سوال 49: $\int 4 \sin^2 y dy$
جواب: $2y - \sin 2y + C$

سوال 50: $\int \frac{\cos^2 y}{7} dy$

سوال 51: $\int \frac{1+\cos 4t}{2} dt$
جواب: $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 52: $\int \frac{1-\cos 6t}{2} dt$

سوال 53: $\int (1 + \tan^2 \theta) d\theta$ اشارہ۔ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
جواب: $\tan \theta + C$

سوال 54: $\int (2 + \tan^2 \theta) d\theta$

سوال 55: $\int \cot^2 x dx$
جواب: $-\cot x - x + C$

سوال 56: $\int (1 - \cot^2 x) dx$

سوال 57: $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta$
جواب: $-\cos \theta + \theta + C$

سوال 58: $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta$

تکمیلی کلیہ کی تصدیق
سوال 59 تا سوال 64 میں دیے گئے کلیات کی تصدیق بذریعہ تفریق کریں۔ ان کلیات کا حصول جلد دکھایا جائے گا۔

سوال 59: $\int (7x - 2)^3 dx = \frac{(7x-2)^4}{28} + C$

سوال 60: $\int (3x + 5)^{-2} dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C$

سوال 61: $\int \sec^2(5x - 1) dx = \frac{1}{5} \tan(5x - 1) + C$

سوال 62: $\int \csc^2\left(\frac{x-1}{3}\right) dx = -3 \cot\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

سوال 63: $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C$

سوال 64: $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C$

سوال 65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C$

ب۔ $\int x \sin x dx = -x \cos x + C$

ج۔ $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{\sec^3 \theta}{3} + C$

ب۔ $\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C$

ج۔ $\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec^2 \theta$

سوال 67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $\int (2x + 1)^2 dx = \frac{(2x + 1)^3}{3} + C$

ب۔ $\int 3(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C$

ج۔ $\int 6(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3 + C \quad \text{ج۔}$$

نظریہ اور مثالیں
سوال 69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int f(x) dx \quad \text{ا۔} \quad \int [f(x) + g(x)] dx \quad \text{و۔}$$

$$\int g(x) dx \quad \text{ب۔} \quad \int [f(x) - g(x)] dx \quad \text{و۔}$$

$$\int [-f(x)] dx \quad \text{ج۔} \quad \int [x + f(x)] dx \quad \text{ز۔}$$

$$\int [-g(x)] dx \quad \text{د۔} \quad \int [g(x) - 4] dx \quad \text{ح۔}$$

جواب: (ا) $-\sqrt{x} + C$ ، (ب) $x + C$ ، (ج) $\sqrt{x} + C$ ، (د) $-x + C$ ، (و) $x - \sqrt{x} + C$ ، (ز) $-x - \sqrt{x} + C$ ، (ح) $\frac{x^2}{2} - \sqrt{x} + C$ ، (د) $-3x + C$

سوال 70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{d}{dx}e^x, \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x \sin x)$$

5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

