احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

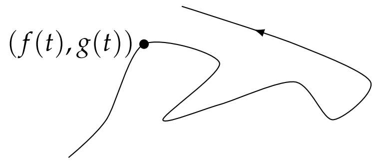
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 10.53: مستوی xy میں ضروری نہیں کہ ذرے کی راہ x یا y کا تفاعل ہو۔

10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول

جب ایک ذرہ شکل 10.53 میں دکھائی گئی راہ پر چلتا ہو، ہم اس کی حرکت کو کارتیسی کلیہ کی صورت میں لکھنے کی توقع نہیں کر سکتے ہیں جو y کو بلا واسطہ x کی صورت میں یا x کو بلا واسطہ y کی صورت میں پیش کرتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم ذرے کی راہ کے ہر محدد کو وقت t کا تفاعل لکھ کر اس راہ کو ایک جوڑی مساوات $x = f(x)$ ، $y = g(t)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔چونکہ یہ مساوات ہر لمحہ t پر ذرے کا مقام دیتے ہیں لہٰذا حرکت پر غور کے لئے یہ مساوات زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔

تعریف: اگر t کے ایک وقفہ پر x اور y استمراری تفاعل

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

ہوں تب نقاط $(x, y) = (f(t), g(t))$ کا سلسلہ، جن کی تعریف مذکورہ بالا مساوات پیش کرتی ہیں، محددی مستوی میں ایک منحنی ہو گی۔ ان مساوات کو اس منحنی کی مقدار معلوم مساوات[22] کہتے ہیں۔ متغیر t منحنی کا مقدار معلوم[23] ہے اور اس کا وقفہ I مقدار معلوم وقفہ[24] کہلاتا ہے۔ اگر I بند وقفہ $a \leq t \leq b$ ہو تب نقطہ $(f(a), g(a))$ منحنی کا ابتدائی نقطہ[25] اور نقطہ $(f(b), g(b))$ اس کا اختتامی نقطہ[26] ہو گا۔ منحنی کو مقدار معلوم روپ دینے[27] سے مراد مستوی میں منحنی کی مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ بیان کرنا ہے۔

□

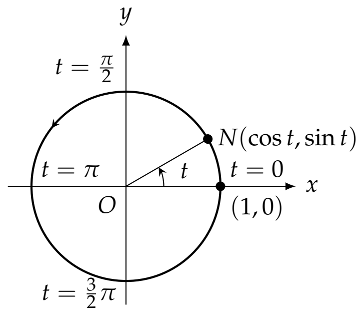
بہت سارے مواقع پر t وقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دیگر مواقع پر یہ کسی اور متغیر مثلاً زاویہ (اگلی مثال) کو ظاہر کر سکتا ہے۔

مثال 10.13: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$
درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

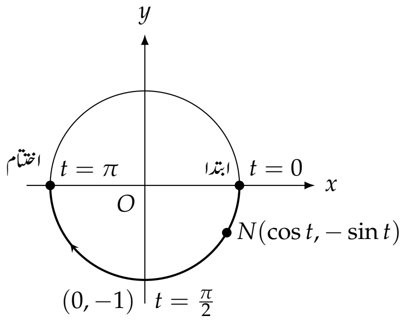
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

---

[22] parametric equations
[23] parameter
[24] parameter interval
[25] initial point
[26] terminal point
[27] parametrization



شکل 10.54: گھڑی کے الٹ رخ حرکت (مثال 10.13)



شکل 10.55: گھڑی کے رخ حرکت (مثال 10.14)

بڑھتے t کے لئے دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک ذرہ کا مقام $N(x, y)$ ظاہر کرتے ہیں (شکل 10.54)۔

چونکہ ہر t کے لئے

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

ہوتا ہے لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ یہ ذرہ اس دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ دائرے کے کتنے حصہ پر ذرہ حرکت کرتا ہے۔

یہ جاننے کے لئے ہم t کو 0 تا 2π کر کے ذرے کی مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ مقدار معلوم t کی ناپ ریڈیئن میں ہے جو ON اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ ہے۔ یہ ذرہ $t = 0$ پر نقطہ $(x, y) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ سے شروع کر کے اوپر اور بائیں چلتے ہوئے $t = \frac{\pi}{2}$ پر $(x, y) = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ پہنچتا ہے۔ یہاں سے یہ بائیں اور نیچے چلتے ہوئے $t = \pi$ پر $(x, y) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$ پہنچتا ہے۔ اس کے بعد ذرہ نیچے اور دائیں چل کر $(0, -1)$ پہنچ کر یہاں سے اوپر اور دائیں چل کر آخر کار $t = 2\pi$ پر نقطہ $(x, y) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$ پر واپس آن پہنچتا ہے۔ یوں $0 \leq t \leq 2\pi$ کرنے سے یہ ذرہ ٹھیک ایک بار دائرہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے۔ □

مثال 10.14: نصف دائرہ
درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

ایک ذرے کا مقام دیتے ہیں جو t کو 0 سے بڑھا کر π کرنے سے بڑھانے سے گھڑی کے رخ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر حرکت کرتا ہے (شکل 10.55)۔

چونکہ مذکورہ بالا مقدار معلوم مساوات سے حاصل محدد دائرہ کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ یہ جاننے کے لئے کہ دائرے کے کتنے حصے پر ذرہ حرکت کرتا ہے، ہم t کو 0 تا π کرتے ہوئے ذرہ کے مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$

پر مذکورہ بالا مساوات سے $(x,y)=(1,0)$ ملتا ہے جو ذرے کا ابتدائی مقام ہے۔ البتہ اب t بڑھانے سے x کی قیمت گھٹتی ہے جبکہ y کی قیمت منفی ہو کر -1 تک پہنچ کر $t=\pi$ پر واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ $t=\pi$ وقفے کا اختتامی نقطہ ہے لہٰذا ذرہ یہیں رہتا ہے۔ یوں ذرہ دائرے کے نچلے نصف حصے پر سفر کرتا ہے۔ □

مثال 10.15: نصف قطع مکافی
مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام $N(x,y)$ درج ذیل مقدار مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x=\sqrt{t},\quad y=t,\quad t\geq 0$$

اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $x=\sqrt{t}$ اور $y=t$ سے t خارج کرتے ہوئے راہ کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اگر ہماری قسمت اچھی ہو، ایسا کرنے سے کوئی جانی پہچانی مساوات حاصل ہو سکتی ہے۔

$$y=t=(\sqrt{t})^2=x^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ ذرے کے مقام کے محدد مساوات $y=x^2$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ یہ کہنا غلط ہو گا کہ یہ ذرہ پورے قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔ یہ ذرہ حقیقت میں نصف قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ ذرے کے مقام کا x محدد کبھی بھی منفی نہیں ہوتا ہے۔ لمحہ $t=0$ پر ذرہ $(0,0)$ سے شروع کرتے ہوئے t بڑھنے سے ربع اول میں رہ کر اوپر بڑھتا جاتا ہے (شکل 10.56)۔ □

مثال 10.16: مکمل قطع مکافی راہ
مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام $N(x,y)$ درج ذیل مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x=t,\quad y=t^2,\quad -\infty<t<\infty$$

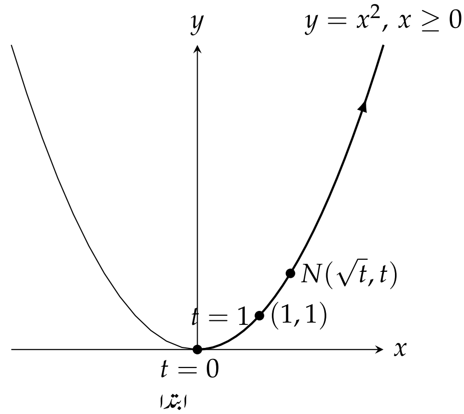
اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $x=t$ اور $y=t^2$ سے t خارج کر کے x اور y کے بیچ مساوات حاصل کرتے ہیں۔

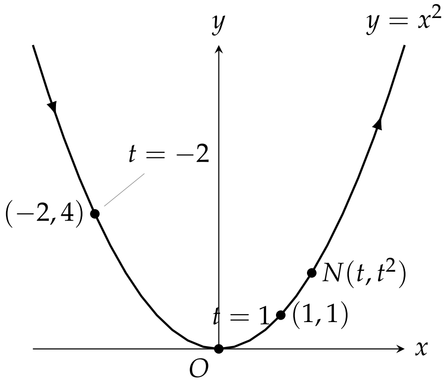
$$y=(t)^2=x^2$$

ذرے کا مقام مساوات $y=x^2$ کو مطمئن کرتی ہے لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ اب مثال 10.15 کے برعکس ذرہ مکمل قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ جیسے جیسے t کی قیمت $-\infty$ سے بڑھ کر ∞ پہنچتی ہے، ذرہ بائیں سے نیچے آتے ہوئے مبدا سے گزر کر اوپر دائیں حرکت کرتا ہے (شکل 10.57)۔ □



شکل 10.56: نصف قطع مکافی راہ (مثال 10.15)



شکل 10.57: مکمل قطع مکافی راہ (مثال 10.16)

جیسا ہم نے مثال 10.16 میں دیکھا، کسی بھی منحنی $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = t,\ y = f(t)$ ہو گی۔ یہ اتنی سادہ صورت ہے کہ اس کو ہم حقیقت میں استعمال نہیں کرتے ہیں لیکن اس سے نظریہ با آسانی سمجھ آتا ہے۔

مثال 10.17: ایک ذرے کا مقام لمحہ t پر $N(x, y)$ درج ذیل دیتے ہیں۔

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس ذرے کی حرکت کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $\cos t = \frac{x}{a}$ اور $\sin t = \frac{y}{b}$ سے t خارج کر کے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \implies \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

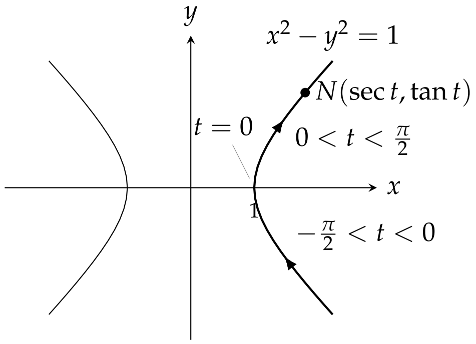
ذرے کا مقام مساوات ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ ذرہ ترخیم پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ذرے کے مقام کے محدد

$$x = a\cos(0) = a, \quad y = b\sin(0) = 0$$

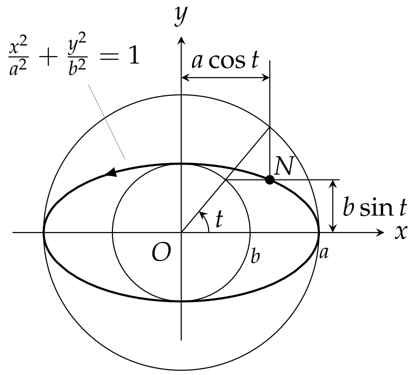
ہوں گے لہٰذا یہ ابتدائی نقطہ $(a, 0)$ سے حرکت شروع کرتا ہے۔ t بڑھانے سے ذرہ اوپر اور بائیں گھڑی کے الٹ رخ حرکت کرتا ہے۔ یہ قطع مکافی کے گرد ایک بار چل کر لمحہ $t = 2\pi$ پر واپس نقطہ $(a, 0)$ پہنچ کر رک جاتا ہے (شکل 10.58)۔ □

مثال 10.18: درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ، جو مثال 10.17 میں $b = a$ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں،

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



شکل 10.59: قطع زائد راہ (مثال 10.19)



شکل 10.58: ترخیمی راہ (مثال 10.17)

دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ □

مثال 10.19: ایک ذرے کا مقام لمحہ t پر درج ذیل مقدار معلوم مساوات دیتے ہیں۔

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

حل: ہم درج ذیل مساوات

$$\sec t = x, \quad \tan t = y$$

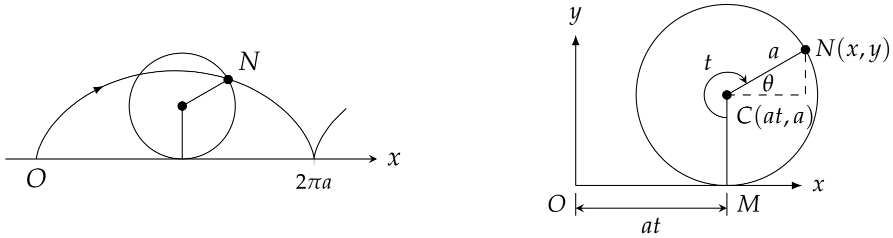
سے t خارج کر کے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ ایسا مماثل $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ کی مدد سے کیا جائے گا۔

$$\sec^2 t - \tan^2 t = x^2 - y^2 = 1$$

چونکہ ذرے کے مقام کے محدد (x, y) مساوات $x^2 - y^2 = 1$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ قطع زائد پر حرکت کرتا ہے۔ متغیر t کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے بڑھ کر $\frac{\pi}{2}$ تک پہنچنے سے $x = \sec t$ کی قیمت مثبت اور $y = \tan t$ کی قیمت $-\infty$ سے ∞ پہنچتی ہے لہٰذا N قطع زائد کے دایاں نصف حصہ پر رہے گا (شکل 10.59)۔ □

مثال 10.20: مستدیر
ایک پہیا جس کا رداس a ہے افقی لکیر پر چل رہا ہے۔ اس کے محیط پر نقطہ N کی راہ کے مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ اس راہ کو مستدیر[28] کہتے ہیں۔

[28] cycloid



شکل 10.60: پہیے کے محیط پر نقطے کا مقام اور متدیر۔

حل: ہم x محور کو وہ لکیر لیتے ہیں جس پر پہیا چل رہا ہے اور لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N کو مبدا پر لیتے ہیں۔ ہم زاویہ t کو مقدار معلوم لیتے ہیں جو پہیا گھومنے کا زاویہ ہے اور اس کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 10.60 میں پہیے کو کچھ دیر بعد دکھایا گیا ہے جہاں اس کا قاعدہ، مبدا سے at فاصلہ پر ہے۔ پہیے کا مرکز (at, a) پر ہو گا اور N کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$x = at + a\cos\theta, \quad y = a + a\sin\theta$$

زاویہ θ کو t کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے ہم شکل سے

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

ہوں گے۔ درکار مساوات

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

ہیں جنہیں عموماً

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{10.28}$$

لکھا جاتا ہے۔ شکل 10.60 میں اس متدیر کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ □

کمتر وقتی منحنی اور یکساں وقتی منحنی

اگر ہم شکل 10.60 کی متدیر کو الٹ کریں، مساوات 10.28 اس پر بھی لاگو ہو گا۔ حاصل منحنی کے دو اہم خواص ہیں۔ پہلی خاصیت مبدا O اور پہلی قوس میں سب سے گہرا نقطہ B سے تعلق رکھتا ہے۔ ایک بلا رگڑ گیند جس پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہو، ان دو نقطوں کو

جوڑنے والی تمام منحنیات میں سب سے جلد اس متدیر پر چلتے ہوئے O سے B پہنچتا ہے۔ یوں اس متدیر کو کمتر وقتی منحنی کہتے ہیں۔ اس کی دوسری خاصیت یہ ہے کہ اگر گیند کو O کی بجائے کسی دوسرے نقطہ سے چلنے دیا جائے یہ گیند B تک پہنچتے ہوئے اتنا ہی وقت لے گا جو یہ O سے B تک پہنچتے ہوئے لیتا ہے۔ یوں اس کو یکساں وقتی منحنی بھی کہتے ہیں۔

کیا O اور B کے بیچ اس کے علاوہ بھی کوئی کمتر وقت کی منحنی پائی جاتی ہے؟ ہم اس کو بطور ریاضیاتی پیش کر سکتے ہیں: ابتدا میں چونکہ گیند کی رفتار صفر ہے لہٰذا اس کی حرکی توانائی صفر ہو گی۔ مبدا $(0,0)$ سے کسی بھی نقطہ (x,y) تک گیند کو پہنچانے کی خاطر mgy کام ثقلی کشش کو کرنا ہو گا اور یہ توانائی لازماً حرکی توانائی میں تبدیلی کے برابر ہو گی، یعنی:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

یوں (x,y) پر پہنچ کر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2gy}$$

ہو گی جس کو

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}$$

گیند کی راہ پر چلتے ہوئے $\mathrm{d}s$ تفرقی فاصلہ ہے

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی مخصوص راہ $y = f(x)$ پر O سے $B(a\pi, 2a)$ تک چلتے ہوئے درکار وقت T_f درج ذیل ہو گا۔

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{10.29}$$

اس وقت (تکمل کی قیمت) کو کونسی منحنی $y = f(x)$ کمتر کرتی ہے؟

پہلی نظر میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسا O سے B تک سیدھی لکیر (جو یقیناً کمتر فاصلہ ہے) پر گیند کمتر وقت میں O سے B تک پہنچے گا لیکن کیا ایسا ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ شروع میں گیند کو سیدھا نیچے گرنے دینے سے جلد زیادہ رفتار حاصل کیا جا سکتا ہے جس کی بنا نسبتاً لمبی راہ بھی کم قوت میں طے کی جا سکتی ہو۔ حقیقت میں یہی درست جواب ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے (ثبوت کو پیش نہیں کیا جائے گا) کہ O سے B تک متدیر O اور B کے بیچ واحد کمتر وقتی منحنی ہے۔

اگرچہ متدیر کو O اور B کے بیچ واحد کم وقتی منحنی ثابت کرنا اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا، ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ متدیر یکساں

وقتی منحنی ہے۔ متدیر کے لئے مساوات 10.29 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
T_{\text{متدیر}} &= \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{2gy}} \\
&= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(1 - \cos t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}
$$

مساوات 10.28 سے
$\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t$ ،
$\mathrm{d}y = a\sin t\,\mathrm{d}t$ اور
$y = a(1 - \cos t)$ ہوں گے

یوں بے رگڑ گیند کو متدیر پر چلتے ہوئے O سے B تک پہنچنے کے لئے $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ وقت درکار ہو گا۔

فرض کریں ہم O کی بجائے متدیر پر نقطہ (x_0, y_0) سے گیند کو چلنے دیں جس کی مطابقتی مقدار معلوم قیمت $t_0 > 0$ ہے۔ متدیر پر اس کے بعد کسی نقطہ (x, y) پر گیند کی سمتی رفتار

$$
v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)} \qquad (y = (1 - \cos t))
$$

ہو گی۔ یوں (x_0, y_0) سے B تک پہنچنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{(2\cos^2\frac{t_0}{2} - 1) - (2\cos^2\frac{t}{2} - 1)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2} - \cos^2\frac{t}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t=t_0}^{t=\pi} \frac{-2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad [u = \cos(t/2),\ c = \cos(t_0/2)] \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1}\frac{u}{c}\right]_{t=t_0}^{t=\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \Big[-\sin^{-1}\frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)}\Big]_{t_0}^{\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}(-\sin^{-1}0 + \sin^{-1}1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}
$$

یہ ٹھیک اتنا ہی وقت ہے جو گیند کو O سے B تک پہنچتے ہوئے درکار ہوتا ہے۔ نقطہ B تک پہنچنے کے لئے درکار وقت پر ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں شکل میں O ، A اور C سے ابتدا کرتے ہوئے تینوں گیند B تک ایک جتنے وقت میں پہنچیں گے۔

معیاری مقدار معلوم روپ

دائرہ

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

ترخیم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

رداس a کے دائرہ کا پیدا کردہ متدیر

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم