احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ix

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 15
1.3 تفاعل 32
1.4 ترسیم کی منتقلی 54
1.5 تکونیاتی تفاعل 74

2 حدود اور استمرار 95
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 95
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 113
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف 126
2.4 تصور حد کی توسیع 146
2.5 استمرار 165
2.6 مماسی خط 184

3 تفرق 199
3.1 تفاعل کا تفرق 199
3.2 قواعد تفرق 221
3.3 تبدیلی کی شرح 240
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 257
3.5 زنجیری قاعدہ 277
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 294
3.7 دیگر شرح تبدیلی 310

4 تفرق کا استعمال 325
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں 325
4.2 مسئلہ اوسط قیمت 340
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ 356
4.3.1 پرکھ 356
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم 368
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء 391
4.6 بہترین بنانا 418
4.7 خط بندی اور تفرقات 442
4.8 ترکیب نیوٹن 463

5 تکمل 475
5.1 غیر قطعی تکملات 475
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی 487
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق 503
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ 514
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات 532
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ 559
5.7 بنیادی مسئلہ 576
5.8 قطعی تکمل میں بدل 597
5.9 اعدادی تکمل 603
5.10 قاعدہ ذوزنقہ 603

6 تکمل کا استعمال 623
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ 623
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 627
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش 638
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا 646
6.4 نلکی چھلے 661
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 674
6.6 سطح طواف کا رقبہ 685
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 697
6.7.1 وسطانی مرکز 709
6.8 کام 714
6.9 فشار سیال اور قوت سیال 729
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال 738

7 ماورائی تفاعل 753
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق 754

7.2 قدرتی لوگارتھم 772
7.3 قوت نمائی تفاعل 790
7.4 a^x اور $\log_a x$ 805
7.5 افزائش اور تنزل 816
7.6 قاعدہ لھوپیٹال 830

ا ضمیمہ اول 835

ب ضمیمہ دوم 837

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

7.6 قاعدہ لھوپیٹال

ایسا کسر جس کا نسب نما اور شمار کنندہ دونوں تحدیدی نقطہ پر صفر کو پہنچتے ہوں، کا حد تلاش کرنے کا قاعدہ یعقوب برنولی نے دریافت کیا جس کو قاعدہ لھوپیٹال کہتے ہیں۔

وسطی حاصل تقسیم

اگر نقطہ $x=a$ پر تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر ہوں تب $x=a$ پر کرتے ہوئے $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ کا حصول ممکن نہیں ہو گا چونکہ ایسا کرنے سے $\frac{0}{0}$ ملتا ہے جو بے معنی ہے اور جس کو وسطی روپ[20] کہتے ہیں۔ اب تک ہم دیکھ چکے ہیں کہ جو حد وسطی روپ دیں ان کا حد تلاش کرنا کبھی آسان اور کبھی مشکل ہوتا ہے۔ ہم نے حصہ 3.4 میں کافی محنت کے بعد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ کی قیمت حاصل کی۔ اس کے برعکس تفرق کے حصول میں استعمال ہونے والا درج ذیل حد تلاش کرنے میں ہمیں کوئی دشواری پیش نہیں ہوئی،

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگرچہ اس حد میں $x=a$ پر کرنے سے ہر صورت $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے ہم تفرق کے حصول میں حد کے استعمال سے استفادہ کرتے ہوئے ان حد کو تلاش کرتے ہیں جو وسطی روپ کو جنم دیتے ہیں۔

مسئلہ 7.2: قاعدہ لھوپیٹال (پہلی صورت)
فرض کریں کہ $f(a)=g(a)=0$ ہے جبکہ $f'(a)$ اور $g'(a)$ موجود ہیں جہاں $g'(a)\neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{7.29}$$

ثبوت: ہم $f'(a)$ اور $g'(a)$، جو از خود حد کو ظاہر کرتے ہیں، سے شروع کرتے ہوئے واپس چلتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{f'(a)}{g'(a)}&=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

[20] intermediate form

□

قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے f کے تفرق f' کو g کے تفرق g' سے تقسیم کریں۔ یاد رہے کہ $\frac{f}{g}$ کا تفرق $(\frac{f}{g})'$ درست نتیجہ نہیں دیگا۔

مثال 7.36:

$$\text{(ا)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x} = \left.\frac{3-\cos x}{a}\right|_{x=0} = 2$$

$$\text{(ب)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(ج)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left.\frac{1-\cos x}{3x^2}\right|_{x\to 0} = ? \quad \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}$$

□

ہم دیکھتے ہیں کہ مثال 7.36 کے جزو-ج میں قاعدہ لھوپیٹال کے استعمال کے باوجود $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی بہتر روپ کہتی ہے کہ جب تک ہمیں $\frac{0}{0}$ حاصل ہو ہم اس قاعدہ کو بار بار استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں اس مثال کو حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} && \text{اس بار } \tfrac{0}{0} \text{ نہیں ملا}
\end{aligned}$$

مسئلہ 7.3: قاعدہ لھوپیٹال (بہتر روپ)
فرض کریں کہ $f(a)=g(a)=0$ ہے جبکہ f اور g کھلے وقفہ I پر قابل تفرق ہیں۔ اس وقفہ پر نقطہ a پایا جاتا ہے۔مزید فرض کریں کہ $x \neq a$ کی صورت میں I پر $g'(x) \neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.30}$$

اگر دائیں ہاتھ حد موجود ہو یا یہ ∞ اور یا $-\infty$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال 7.37:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2}}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}-\frac{1}{2}}{2x} \qquad \frac{0}{0}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2}=-\frac{1}{8} \qquad \frac{0}{0} \text{ نہیں ہے}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے جیسے $\frac{0}{0}$ سے کچھ ہٹ کر ملتا ہے آپ حد تلاش کر پائیں گے۔

مثال 7.38:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} \qquad \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\frac{0}{1}=0 \qquad \frac{0}{0} \text{ نہیں ہے}$$

اگر $\frac{0}{0}$ ملنے کے بعد رکنے کی بجائے ہم مزید ایک بار قاعدہ لھوپیٹال استعمال کریں تب ہمیں درج ذیل غلط نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

□

مثال 7.39:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x}=\infty \qquad \frac{0}{0} \text{ نہیں ملا}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال وہاں بھی قابل استعمال ہو گا جہاں وسطی روپ $\frac{\infty}{\infty}$ ہو۔ اگر $x\to a$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ دونوں لامتناہی تک پہنچتے ہوں تب اگر درج ذیل میں دایاں حد موجود ہو تب

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ہو گا۔ یہاں a از خود متناہی یا لا متناہی ہو سکتا ہے۔

مثال 7.40:

$$(\text{ا})\quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sec x}{1+\tan x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \sin x = 1$$

$$(\text{ب})\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

□

وسطی حاصل ضرب اور فرق

بعض اوقات ہم وسطی روپ $0\cdot\infty$ اور $\infty-\infty$ کو الجبرا کی مدد سے $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ لکھ سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم یہ نہیں کہتے ہیں کہ عدد $0\cdot\infty$ یا $\infty-\infty$ موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ عدد $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ موجود ہے۔ یہ روپ کسی بھی عدد کو ظاہر نہیں کرتے ہیں بلکہ محض تفاعل کے رویہ کو بیان کرتے ہیں۔

مثال 7.41:

$$\lim_{x\to0^+} x\cot x \qquad 0\cdot\infty \text{ کی بنا } x\cot x \text{ کو مختلف روپ میں لکھیں}$$

$$= \lim_{x\to0^+} x\cdot\frac{1}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\tan x} \qquad \text{اب } \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

□

مثال 7.42: تلاش کریں: $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

حل: اگر $x\to0^+$ ہو تب $\sin x\to0^+$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\to\infty-\infty$$

اسی طرح اگر $x \to 0^-$ ہو تب $\sin x \to 0^-$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = -\infty - (\infty) = -\infty + \infty$$

دونوں صورتوں میں ہم حد جاننا ممکن نہیں ہے۔ ہمیں تفاعل کو نئی صورت

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

میں لکھ کر قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x \sin x} && \tfrac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

□

وسطی طاقت

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم