

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیت
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولا کی حرکت کی نمونہ کشی
1468	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیت T
1476	12.4	انحنا، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استتار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1561		جوابات
1565	ا	ضمیمہ اول
1567	ب	ضمیمہ دوم
1569	ج	ضمیمہ تین
1571	د	ضمیمہ چار

1573	ھ ضمیمہ پانچ
1575	و ضمیمہ چھ
1577	ز ضمیمہ سات
1579	ح ضمیمہ آٹھ
1581	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 13

کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات

چانزہ

سائنس میں دو یا دو سے زائد غیر تابع متغیرات کے تفاعل ایک متغیر کے تفاعل سے زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں اور ان کی علم احصاء زیادہ عمدہ ہوتی ہے۔ زیادہ متغیرات ایک دوسرے پر زیادہ طریقوں سے اثر انداز ہو سکتے ہیں جس کی بنا ان کے تفرقات مختلف اور زیادہ دلچسپ صورتیں اختیار کر سکتے ہیں۔ ان کے عملیات زیادہ اقسام کے عملی مسائل میں کام آتے ہیں۔ احتمال، سیالی حرکیات، اور برقیات، وغیرہ، پر غور کے دوران ان سے زائد متغیرات کے تفاعل قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں۔ ان تفاعل کی ریاضیات، سائنس کی عظیم کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل

کئی تفاعل ایک سے زائد متغیرات کے تابع ہوتے ہیں۔ دائری ٹکلی کا حجم، اس کے رداس اور قد سے، تفاعل $H = \pi r^2 h$ دیتا ہے۔ مستوی xy میں نقطہ $N(x, y)$ کے دو محدود سے، قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ کا قد تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم ایک سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل متعارف کرتے ہیں اور ان کو ترسیم کرنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

تفاعل اور متغیرات

کثیر غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی تعریف بالکل واحد متغیر کے تفاعل کی طرح کی جاتی ہے۔ ان کے وقفے حقیقی (تین، چار، وغیرہ) اعداد کے مرتب جوڑی کے سلسلے ہوں گے اور ان کی سعت، اس طرح کے حقیقی اعداد کے سلسلے ہوں گے جن کے ساتھ ہم کام کرتے آ رہے ہیں۔

تعریفات: فرض کریں n عدد حقیقی اعداد x_1, x_2, \dots, x_n کا سلسلہ D ہے۔ تب D پر حقیقی قیمت تفاعل f^1 سے مراد وہ قاعدہ ہے جو D کے ہر رکن کو حقیقی عدد

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

مختص کرتا ہو۔ سلسلہ D اس تفاعل کا دائرہ کار² ہو گا۔ تفاعل f کی قیمتوں کا سلسلہ f کی سمت³ ہو گی۔ علامت w تفاعل f کا تابع متغیر⁴ ہو گا اور f کو n غیر تابع متغیرات⁵ x_1 تا x_n کا تفاعل کہتے ہیں۔ ہم ان x کو تفاعل کے داخلی متغیرات⁶ اور w کو تفاعل کا خارجی متغیر⁷ بھی کہتے ہیں۔

□

اگر f دو غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب عموماً ہم ان غیر تابع متغیرات کو x اور y کہتے ہیں اور f کے دائرہ کار کو مستوی xy میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔ اگر f تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب ہم ان متغیرات کو x ، y اور z کہتے ہیں اور تفاعل کے دائرہ کار کو فضا میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ہم وہ حروف استعمال کرتے ہیں جو ہمیں ان چیزوں کی یاد دلا سکیں جن کے لئے یہ متغیرات استعمال کیے گئے ہوں۔ یہ کہنے کی خاطر کہ دائری نگلی کا حجم اس کے رداس r اور قد h کا تفاعل ہو گا، ہم $H = f(r, h)$ لکھ سکتے ہیں۔ بالخصوص ہم $f(r, h)$ کی جگہ وہ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں جو r اور h کی قیمتوں سے H کی قیمت دیتا ہو، یعنی ہم $H = \pi r^2 h$ لکھ سکتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں r اور h غیر تابع متغیرات ہوں گے اور H تابع متغیر ہو گا۔

ہمیشہ کی طرح، ہم تفاعل کی تعریف کلیہ میں غیر تابع متغیرات کی قیمتیں پر کر کے مطابقتی تابع متغیر کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 13.1: نقطہ $(3, 0, 4)$ پر تفاعل $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

real valued function¹
domain²
range³
dependent variable⁴
independent variable⁵
input variable⁶
output variable⁷

وقف

ایک سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کی تعریف میں، ہمیشہ کی طرح، ہم ان مداخل کو شامل نہیں کرتے ہیں جو مخلوط اعداد دیتے ہیں یا جن کی وجہ سے تقسیم صفر کا عمل پیدا ہوتا ہو۔ یوں $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ میں y کی قیمت x^2 کی قیمت سے کم نہیں ہو سکتی ہے اور $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ میں xy کی قیمت صفر نہیں ہو سکتی ہے۔ ان شرائط کو مطمئن کرتے ہوئے، تفاعل کے دائرہ کار سے مراد وہ بڑے سے بڑا سلسلہ ہو گا جس پر تفاعل کا تعریفی قاعدہ حقیقی اعداد پیدا کرتا ہو۔

مثال 13.2: دو متغیرات کے تفاعل

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	پورا مستوی	$[-1, 1]$

□

مثال 13.3: تین متغیرات کے تفاعل

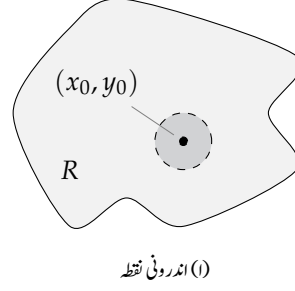
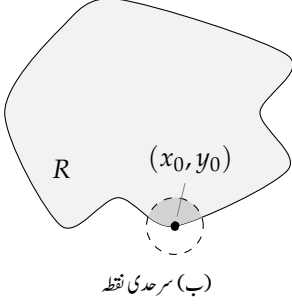
تفاعل	دائرہ کار	سعت
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	پوری فضا	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	نصف فضا $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

□

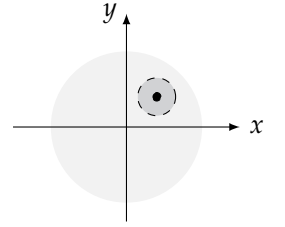
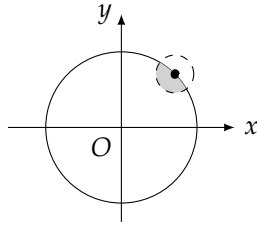
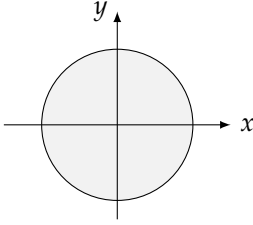
بالکل حقیقی کلیہ کے وقفوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کی طرح، مستوی کے حصوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے ہو سکتے ہیں۔

تعریفات: مستوی xy میں خط (سلسلہ) R میں نقطہ (x_0, y_0) تب R کا اندرونی نقطہ⁸ ہو گا جب یہ اس قرص کا مرکز ہو جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہو (شکل 13.1)۔ نقطہ (x_0, y_0) تب R کا سرحدی نقطہ⁹ ہو گا جب ہر اس قرص میں، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، R کے بیرونی اور R کے اندرونی نقطے پائے جاتے ہوں۔ (ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ از خود R میں شامل ہو۔)

⁸ interior point
⁹ boundary point



شکل 13.1: مستوی خطہ R کا اندرونی نقطہ اور سرحدی نقطہ۔ اندرونی نقطہ لازماً R کا حصہ ہو گا جبکہ ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ کا حصہ ہو۔



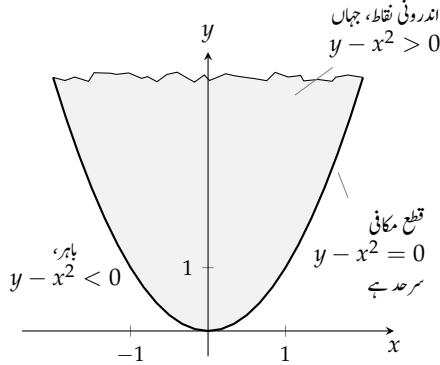
شکل 13.2: مستوی میں اکائی قرص کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے۔

ایک خطہ کے اندرونی نقطے، بطور ایک سلسلہ، اس خطہ کی اندرونی¹⁰ ہوں گے۔ اس خطہ کے سرحدی نقطے اس کی سرحد¹¹ ہیں۔ ایسا خطہ جو مکمل طور پر اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو کھلا¹² خطہ کہلاتا ہے۔ ایسا خطہ جس میں اس کے تمام سرحدی نقطے شامل ہوں بند¹³ خطہ کہلاتا ہے۔

□

حقیقی اعداد کے وقفوں کی طرح، مستوی میں بعض خطے نا کھلا اور نا ہی بند ہوتے ہیں۔ شکل 13.2 کے کھلا قرص میں چند، نا کہ تمام، سرحدی نقطے شامل کرنے سے ایسا خطہ حاصل ہو گا جو نا کھلا ہو گا اور نا ہی بند ہو گا۔ اس میں شامل سرحدی نقطے اس کو کھلا وقفہ بننے سے روکتے ہیں جبکہ اس میں نا شامل سرحدی نقطے اس کو بند خطہ بننے سے روکتے ہیں۔

¹⁰ interior
¹¹ boundary
¹² open
¹³ closed



شکل 13.3: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار سایہ دار خطہ ہے اور اس کی سرحد قطع مکانی $y = x^2$ ہے۔

تعریف: مستوی میں مقررہ رداس کے قرص میں پائے جانے والا خطہ محدود¹⁴ ہو گا۔ ایسا خطہ جو محدود نا ہو غیر محدود¹⁵ ہو گا۔

□

مثال 13.4:

مستوی میں محدود سلسلے: خطی قطعات؛ مثلثیں؛ مثلثوں کی اندرون؛ مستطیلیں؛ اقراص۔

مستوی میں غیر محدود سلسلے: خطوط؛ محدود محور؛ لامتناہی وقفہ پر معین تفاعل کی ترسیم؛ ربعات، نصف مستوی؛ مستوی از خود۔

□

مثال 13.5: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار بند اور غیر محدود ہے (شکل 13.3)۔ قطع مکانی $y = x^2$ اس دائرہ کار کی سرحد ہے۔ قطع مکانی سے اوپر نقطے دائرہ کار کی اندرون ہیں۔

□

فضا میں اندرون، سرحد، کھلا، بند، محدود اور غیر محدود کی تعریفیں عین مستوی میں انہیں کی تعریفوں کی طرح ہیں۔ اضافی بعد کی بنا ہم قرص کی بجائے گیند لیتے ہیں۔ بند گیند¹⁶ میں کرہ کی اندرونی نقطوں کے ساتھ گیند بھی شامل ہو گا۔ کھلا گیند¹⁷ میں گیند کی اندرونی نقطے شامل ہوں گے جبکہ گیند از خود اس میں شامل نہیں ہو گا۔

bounded¹⁴
unbounded¹⁵
closed ball¹⁶
open ball¹⁷

تعریفات: فضا میں خطہ D میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) اس صورت D کا اندرونی نقطہ¹⁸ ہو گا جب یہ نقطہ ایسے گیند کا مرکز ہو جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ اگر ہر گیند، جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) ہو، میں شامل نقطوں میں کچھ نقطے D کے اندرونی اور کچھ اس کے بیرونی نقطے ہوں تب یہ نقطہ D کا سرحدی نقطہ¹⁹ ہو گا۔ خطہ D کے اندرونی نقطوں کا سلسلہ D کا اندرونی²⁰ ہو گا۔ خطہ D کے سرحدی نقطوں کا سلسلہ D کا سرحد²¹ ہو گا۔

ایک ایسا خطہ جو صرف اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو کھلا²² خطہ کہلائے گا۔ ایک خطہ جس میں خطے کا پورا سرحد شامل ہو بند²³ خطہ کہلائے گا۔

□

مثال 13.6:

فضا میں کھلا سلسلہ کھلا گیند، کھلا نصف فضا $z > 0$ ؛ ربع اول (بغیر تحدیدی سطحیں)؛ فضا از خود

فضا میں بند سلسلے خطوط؛ مستوی؛ بند گیند؛ بند نصف فضا $z \geq 0$ ؛ ربع اول بمع اس کے تحدیدی سطحیں؛ فضا از خود

ناکھلا اور نابند بند گیند جس میں تحدیدی کرہ کا کچھ حصہ شامل نہ ہو؛ ٹھوس مربع جس میں ایک تحدیدی سطح یا کنارہ یا کونا شامل نہ ہو

□

دو متغیرات کے تفاعل کی ترسیمات اور ہم قد منحنیات

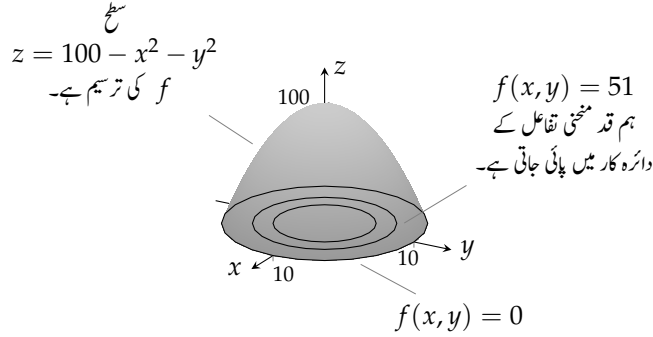
تفاعل $f(x, y)$ کی تصویر کشی دو طریقوں سے کی جاسکتی ہے۔ اول، ہم اس دائرہ کار میں f کی منحنیات ترسیم کر سکتے ہیں جس پر f کی قیمت مستقل ہو۔ دوم، ہم فضا میں سطح $z = f(x, y)$ ترسیم کر سکتے ہیں۔

تعریفات: اس مستوی میں نقطوں کا سلسلہ جہاں $f(x, y)$ کی قیمت ایک مستقل c ہو، $f(x, y) = c$ کی ہم قد منحنی²⁴ کہلاتا ہے۔ فضا میں f کے دائرہ کار میں (x, y) کے لئے تمام نقطوں $(x, y, f(x, y))$ کا سلسلہ f کی ترسیم²⁵ کہلاتا ہے۔ تفاعل f کی ترسیم کو سطح²⁶ $z = f(x, y)$ بھی کہتے ہیں۔

□

دھیان رہے کہ ہم قد منحنیات اس مستوی میں پائی جاتی ہیں جس پر تفاعل کا دائرہ کار پایا جاتا ہو۔

interior point¹⁸boundary point¹⁹interior²⁰boundary²¹open²²closed²³level curve²⁴graph²⁵surface²⁶



شکل 13.4: قنصل کی ترسیم اور منتخب ہم قد منحنیات۔

سوالات

مثال 13.7: قنصل $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ ترسیم کریں اور مستوی میں f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنیات $f(x, y) = 51$ اور $f(x, y) = 75$ ترسیم کریں۔

حل: قنصل f کا دائرہ کار پورا xy مستوی ہے جبکہ اس کی سعت 100 جتنا یا اس سے کم تمام حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔ قطع مکانی $z = 100 - x^2 - y^2$ اس کی ترسیم ہے جس کا کچھ حصہ شکل 13.4 میں دکھایا گیا ہے۔

مستوی xy میں ان نقطوں کا سلسلہ جن پر درج ذیل ہو، ہم قد منحنی $f(x, y) = 0$ ہوگی جو ایک دائرہ ہے جس کا رداس 10 اور جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \text{یعنی} \quad f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0$$

اسی طرح ہم قد منحنیات $f(x, y) = 51$ اور $f(x, y) = 75$ درج ذیل دائرے ہوں گے جو xy مستوی میں پائے جاتے ہیں اور جن کے مراکز عین مبدا پر پائے جاتے ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 49 \quad \text{یعنی} \quad f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51$$

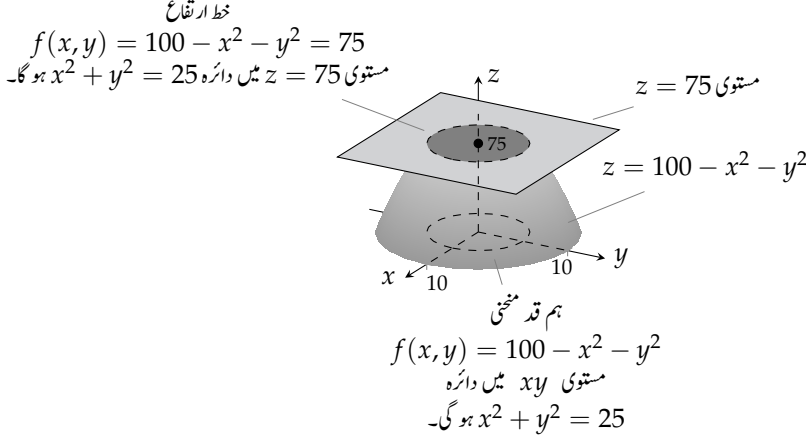
$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{یعنی} \quad f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$$

□ ہم قد منحنی $f(x, y) = 100$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔ (اس کے باوجود یہ ایک ہم قد منحنی ہے۔)

خطوط ارتقاع

فضا میں وہ منحنی جس میں مستوی $z = c$ سطح $z = f(x, y)$ کو مس کرتا ہو، ان نقطوں پر مشتمل ہوگی جو قنصل $f(x, y) = c$ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کو خط ارتقاع²⁷ $f(x, y) = c$ کہتے ہیں تاکہ اس کے قنصل اور f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x, y) = c$ ہو۔

contour line²⁷



شکل 13.5: تقابل $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ کی ترسیم اور مستوی $z = 75$ کے ساتھ اس کا تقاطع۔

کے سچ تمیز کرنا ممکن ہو۔ شکل 13.5 میں تقابل $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ کی سطح $z = 100 - x^2 - y^2$ پر خط ارتفاع $f(x, y) = 75$ دکھایا گیا ہے۔ یہ خط ارتفاع ٹھیک دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ، جو تقابل کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x, y) = 75$ ہے، کے اوپر کچھ بلندی پر پایا جاتا ہے۔

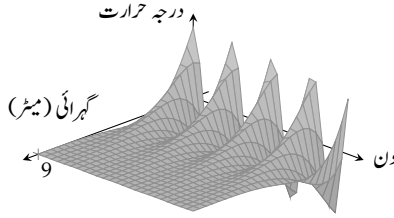
بعض ریاضی دان خط ارتفاع اور ہم قد منحنی میں تمیز نہیں کرتے ہیں اور دونوں کو کسی ایک نام سے پکارتے ہیں۔ ایسی صورت میں متن سے آپ جان سکتے ہیں کہ کس کی بات کی گئی ہے۔ عموماً نقشات پر (سطح سمندر سے) مستقل بلندی کو ظاہر کرنے والی منحنیات کو خط ارتفاع پکارا جاتا ہے نا کہ ہم قد منحنیات۔

سہ متغیری تقابل کی ہم قد منحنیات

مستوی میں جن نقطوں پر دو غیر تابع متغیرات کے تقابل کی قیمت ایک مستقل $f(x, y) = c$ ہو اس تقابل کے دائرہ کار میں ایک منحنی تشکیل دیتے ہیں۔ فضا میں جن نقطوں پر تین غیر تابع متغیرات کے تقابل کی قیمت ایک مستقل $f(x, y, z) = c$ ہو اس تقابل کے دائرہ کار ایک سطح تشکیل دیتے ہیں۔

تعریف: فضا میں ان نقطوں (x, y, z) کا سلسلہ جن پر تین غیر تابع متغیرات کے تقابل کی قیمت ایک مستقل $f(x, y, z) = c$ ہو، f کی ہم قد سطح²⁸ کہلاتا ہے۔

□



شکل 13.6: سطح زمین کی نسبت سے گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت۔

مثال 13.8: درج ذیل تفاعل کے ہم قد سطحوں پر تبصرہ کریں۔

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

حل: تفاعل f کی قیمت، مبدا سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ ہو گا۔ ہر ہم قد سطح $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c, c > 0$ کا کرہ ہو گا جس کا مرکز مبدا پر ہو گا۔ ہم قد سطح $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔

ہم یہاں تفاعل کو ترسیم نہیں کر رہے ہیں۔ ایک تفاعل جو نقاط $(x, y, z, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ پر مشتمل ہو، چار متغیری فضا میں پایا جائے گا۔ اس کی بجائے ہم تفاعل کے دائرہ کار میں ہم قد سطحوں کو دیکھ رہے ہیں۔

اس تفاعل کی ہم قد سطحیں ہمیں تفاعل کے دائرہ کار میں چلتے ہوئے تفاعل کی قیمت کی تبدیلی دکھاتی ہیں۔ اگر ہم رداس c کے کرہ، جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر چہل قدمی کریں تب تفاعل کی قیمت بدستور c رہے گی۔ ایک کرہ سے دوسری کرہ منتقل ہونے پر تفاعل کی قیمت تبدیل ہو گی۔ مبدا سے دوری تفاعل کی قیمت بڑھاتی ہے جبکہ مبدا کے قریب ہونے سے اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا دار و مدار ہمارے چلنے کے رخ پر ہو گا۔ تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا رخ پر انحصار ایک اہم حقیقت ہے جس پر بعد کے حصہ میں غور کیا جائے گا۔ □

کمپیوٹر ترسیم کشی

کمپیوٹر کی مدد سے دو متغیرات کا تفاعل با آسانی ترسیم کیا جاسکتا ہے۔ عموماً ترسیم ہمیں کلیہ سے زیادہ معلومات جلدی فراہم کرتی ہے۔

مثال 13.9: تفاعل $w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.656x)e^{-0.656x}$ کی ترسیم کو شکل 13.6 میں دکھایا گیا ہے، جہاں وقت کو t اور فاصلہ کو x ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ترسیم سطح زمین سے نیچے درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت دکھاتی ہے۔ گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی w کو سطحی تبدیلی کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ چار میٹر کی گہرائی پر سطح تبدیلی کے 6.3 فی صد جتنی تبدیلی پائی جاتی ہے۔ نو میٹر گہرائی پر پورے سال درجہ حرارت میں تبدیلی قابل نظر انداز ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 4 میٹر گہرائی پر درجہ حرارت سطحی درجہ حرارت سے تقریباً آدھا سال پیچھے ہے۔ یوں اس گہرائی پر گرمی کی موسم میں کم سے کم اور سردی کی موسم میں زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت ہو گا۔ (میں مشورہ دوں گا کہ زیر زمین ایک کمرہ ضرور بنائیں۔) □

سوالات

دائرہ کار، سعت اور ہم قد منحنیات

سوال 1 تا سوال 12 میں (ا) تفاعل کا دائرہ کار تلاش کریں، (ب) تفاعل کی سعت تلاش کریں، (ج) تفاعل کی ہم قد منحنی پر تبصرہ کریں، (د) تفاعل کے دائرہ کار کی سرحد معلوم کریں، (ه) کیا دائرہ کار کھلا خط، بند خط یا دونوں میں سے کوئی نہیں ہے، (و) کیا دائرہ کار محدود یا غیر محدود ہے؟

سوال 1: $f(x, y) = y - x$

سوال 2: $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

سوال 3: $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$

سوال 4: $f(x, y) = x^2 - y^2$

سوال 5: $f(x, y) = xy$

سوال 6: $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

سوال 7: $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

سوال 8: $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

سوال 9: $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

سوال 10: $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

سوال 11: $f(x, y) = \sin^{-1}(y - x)$

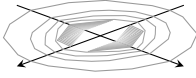
سوال 12: $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

ہم قد ترسیمات اور تفاعل کے پہچان

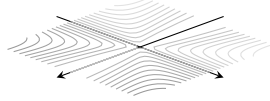
سوال 13 تا سوال 18 میں دی گئی ہم قد ترسیمات کی سطحیں شکل 13.18 تا شکل 13.17 میں دی گئی ہیں۔ ہم قد ترسیمات کی سطح پہچانیے۔

سوال 13: ہم قد ترسیم شکل 13.7 میں دی گئی ہے۔

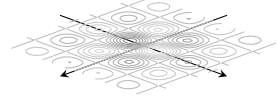
سوال 14: ہم قد ترسیم شکل 13.8 میں دی گئی ہے۔



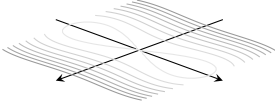
شکل 13.9



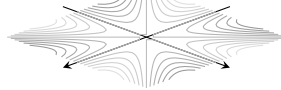
شکل 13.8



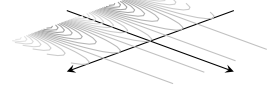
شکل 13.7



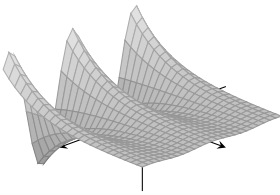
شکل 13.12



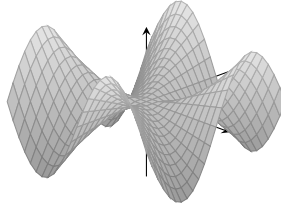
شکل 13.11



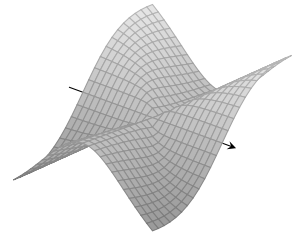
شکل 13.10



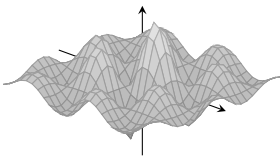
شکل 13.15



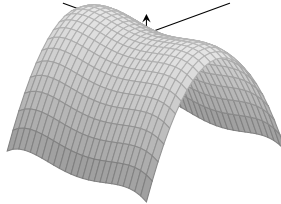
شکل 13.14



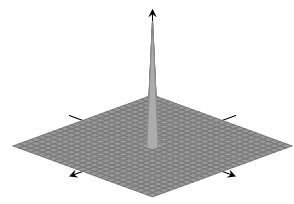
شکل 13.13



شکل 13.18



شکل 13.17



شکل 13.16

سوال 15: ہم قد ترسیم شکل 13.9 میں دی گئی ہے۔

سوال 16: ہم قد ترسیم شکل 13.10 میں دی گئی ہے۔

سوال 17: ہم قد ترسیم شکل 13.11 میں دی گئی ہے۔

سوال 18: ہم قد ترسیم شکل 13.12 میں دی گئی ہے۔

دو متغیراتے کے تفاعل کے پچااض

سوال 19 تا سوال 28 میں تفاعل کی قیمتوں کو دو طرح دکھائیں۔ (1) سطح $z = f(x, y)$ کو ترسیم کرتے ہوئے اور (ب) تفاعل کے دائرہ کار میں منتخب ہم قد مضنیات ترسیم کرتے ہوئے۔ ہر ایک ہم قد مضنی کی نشاندہی تفاعل کی قیمت سے کریں۔

سوال 19: $f(x, y) = y^2$

سوال 20: $f(x, y) = 4 - y^2$

سوال 21: $f(x, y) = x^2 + y^2$

سوال 22: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 23: $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

سوال 24: $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

سوال 25: $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

سوال 26: $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

سوال 27: $f(x, y) = 1 - |y|$

سوال 28: $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

ہم قد سطحیہ

سوال 29 تا سوال 36 میں قفائل کا ایک علاقہقی ہم قد سطح کا خاکہ بنائیں۔

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{سوال 29}$$

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{سوال 30}$$

$$f(x, y, z) = x + z \quad \text{سوال 31}$$

$$f(x, y, z) = z \quad \text{سوال 32}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 \quad \text{سوال 33}$$

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2 \quad \text{سوال 34}$$

$$f(x, y, z) = z - x^2 - y^2 \quad \text{سوال 35}$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} \quad \text{سوال 36}$$

ہم قد منحنی کے تلاش

سوال 37 تا سوال 40 میں قفائل $f(x, y)$ کی اس ہم قد منحنی کی مساوات تلاش کریں جو دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہو۔

$$f(x, y) = 16 - x^2 - y^2, \quad (2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{سوال 37}$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1, 0) \quad \text{سوال 38}$$

$$f(x, y) = \int_x^y \frac{dt}{1+t^2}, \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{سوال 39}$$

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad (1, 2) \quad \text{سوال 40}$$

ہم قد سطح کے تلاش

سوال 41 تا سوال 44 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہم قد سطح کی مساوات تلاش کریں۔

$$f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z, \quad (3, -1, 1) \quad \text{سوال 41}$$

$$\text{سوال 42: } f(x, y, z) = \ln(x^2 + y + z^2), \quad (-1, 2, 1)$$

$$\text{سوال 43: } g(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!z^n}, \quad (\ln 2, \ln 4, 3)$$

$$\text{سوال 44: } g(x, y, z) = \int_x^y \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \int_{\sqrt{2}}^z \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}, \quad (0, \frac{1}{2}, 2)$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: فضا میں ایک کثیر پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت۔

کیا لکیر $x = 20 - t, y = t, z = 20$ پر تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ: اس لکیر پر $w = (f, y, z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال 46: فضا میں ایک کثیر پر تفاعل کی کم سے کم قیمت۔

کیا لکیر $x = t - 1, y = t - 2, z = t + 7$ پر تفاعل $f(x, y, z) = xy - z$ کی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ: اس لکیر پر $w = (f, y, z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال 47: جہاز کا صوتی دھماکا

ایک جہاز کے نیچے زمین پر اس خطہ کی چوڑائی w جہاں جہاز کا صوتی دھماکا انسان برائے راست (جو فضا میں ہوا کی مختلف سطحوں سے منعکس نہ ہو) سن سکتا ہو، درج ذیل کا تفاعل ہو گا۔

$$\bullet \quad T \quad \text{زمین پر ہوا کی درجہ حرارت (کیلون)}$$

$$\bullet \quad h \quad \text{جہاز کی بلندی (کلو میٹر)}$$

$$\bullet \quad d \quad \text{درجہ حرارت کی انتصابی شرح تبدیلی (کیلون فی کلو میٹر)}$$

اس چوڑائی کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$w = 4\sqrt{\frac{Th}{d}}$$

یہ جہاز 16.8 km کی بلندی پر پرواز کرتا ہوا بحیرہ عرب سے کراچی شہر پہنچ رہا ہے۔ اگر سطحی درجہ حرارت 290 K اور انتصابی شرح حرارت 5 K km^{-1} ہو تب جہاز ساحل سے کتنا دور ہو گا جب اس کا صوتی دھماکا سنائی دے۔

سوال 48: جیسا کہ آپ جانتے ہیں، واحد حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تعامل کی ترسیم دو محدودی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ دو غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تعامل کی ترسیم تین محدودی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ تین غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تعامل کی ترسیم چار محدودی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ آپ چار غیر تابع متغیرات کے تعامل $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟۔ آپ n غیر تابع متغیرات کے تعامل $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟

کمپیوٹر کا استعمال۔ صریح سطح

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال 49 تا سوال 52 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے مستطیل پر سطح ترسیم کریں۔

ب. اس مستطیل میں کئی ہم قد منحنيات ترسیم کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی f کی ہم قد منحنی ترسیم کریں۔

$$\text{سوال 49: } f(x, y) = x \sin \frac{y}{2} + y \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq 5\pi, \quad 0 \leq y \leq 5\pi$$

$$\text{سوال 50: } f(x, y) = (\sin x)(\cos x)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}, \quad 0 \leq x \leq 5\pi, \quad 0 \leq y \leq 5\pi$$

$$\text{سوال 51: } f(x, y) = \sin(x + 2 \cos y), \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi, \quad -2\pi \leq y \leq 2\pi$$

$$\text{سوال 52: } f(x, y) = e^{(x^{0.1}-y)} \sin(x^2 + y^2), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad -2\pi \leq y \leq \pi$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ نفی سطح

سوال 53 تا سوال 56 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ہم قد سطیہ ترسیم کریں۔

$$\text{سوال 53: } 4 \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

$$\text{سوال 54: } x^2 + z^2 = 1$$

$$\text{سوال 55: } x + y^2 - 3z^2 = 1$$

$$\text{سوال 56: } \sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2 + z^2} = 2$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ مقدار معلوم سطح

جیسا کہ آپ کسی مقدار معلوم وقفہ I پر مستوی میں منحنيات کو مقدار معلوم مساوات $x = f(t), y = g(t)$ کی روپ میں لکھتے

ہیں، آپ بعض اوقات کسی مقدار معلوم مستطیل $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$ وقفہ پر فضا میں سطحوں کو مقدار معلوم تین مساوات $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$ کی روپ میں لکھ سکتے ہیں۔ کمپیوٹر اس قسم کی مقدار معلوم مساواتوں سے سطح ترسیم کر سکتا ہے۔ سوال 57 تا سوال 60 میں کمپیوٹر کی مدد سے سطحیں ترسیم کریں۔ ساتھ ہی xy مستوی میں چند ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 57: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$

سوال 58: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$

سوال 59: $x = (2 + \cos u) \cos v, y = (2 + \cos u) \sin v, z = \sin u, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

سوال 60: $x = 2 \cos u \cos v, y = 2 \cos u \sin v, z = 2 \sin u, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$

13.2 حد اور استمرار

اس حصہ میں کثیر المتغیر تفاعل کی حد اور استمرار پر غور کیا جائے گا۔

حد

اگر نقطہ (x_0, y_0) کے قریب تمام نقاط (x, y) کے لئے تفاعل $f(x, y)$ کی قیمتیں کسی مقررہ حقیقی عدد L کے بہت زیادہ قریب ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے نقطہ (x, y) نقطہ (x_0, y_0) تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، تفاعل f کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ تعریف، واحد متغیر کے تفاعل کی حد کی تعریف کی مانند ہے۔ البتہ، دھیان رہے کہ اگر (x_0, y_0) تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون میں پایا جاتا ہو تب (x, y) نقطہ (x_0, y_0) تک کسی بھی رخ سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔ جیسا آپ نیچے دی گئی مثالوں میں سے چند میں دیکھیں گے، قریب پہنچنے کا رخ بعض اوقات مسئلہ کھڑا کر سکتا ہے۔

تعریف: اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابق عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ f کے دائرہ کار میں تمام (x, y) کے لئے

$$(13.1) \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon$$

ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ (x_0, y_0) تک (x, y) پہنچنے سے $f(x, y)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

□

حد کی تعریف میں $\delta\sigma$ کی شرط اس کی معادل ہے کہ، کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$(13.2) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{اور} \quad 0 < |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon$$

یوں حد کی قیمت تلاش کرتے ہوئے ہم مستوی میں فاصلوں کی صورت یا محدود میں فرق کی صورت میں سوچ سکتے ہیں۔

حد کی تعریف، تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون کے ساتھ سرحدی نقاط (x_0, y_0) کے لئے بھی کارآمد ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x, y) ہر وقت دائرہ کار کے اندر رہے۔

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح درج ذیل دکھائے جاسکتے ہیں۔

$$(13.3) \quad \begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x &= x_0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y &= y_0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} k &= k \quad \text{کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے} \end{aligned}$$

یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ دو تفاعل کے مجموعہ کا حد، ان تفاعل کے انفرادی حد (اگر دونوں موجود ہوں) کا مجموعہ ہو گا۔ اسی طرح کے نتائج فرق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، مستقل مضرب اور طاقت کے لئے بھی دکھائے جاسکتے ہیں۔

مسئلہ 13.1: دو متغیرات کے تفاعل کے حد کے خواص اگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

ہوں تب درج ذیل قواعد کارآمد ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim[f(x, y) + g(x, y)] = L + M$

قاعدہ فرق: $\lim[f(x, y) - g(x, y)] = L - M$

قاعدہ مستقل مضرب: $\lim kf(x, y) = kL$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}$ اگر $M \neq 0$ ہو۔

قاعدہ طاقت: $\lim [f(x, y)]^m/n = L^{m/n}$ اگر m اور n اعداد صحیح اور $L^{m/n}$ ایک حقیقی عدد ہو۔

تمام حد $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ کی صورت میں حاصل کیے جائیں گے اور L ، M کا حقیقی اعداد ہونا لازمی ہے۔

مسائل 13.3 پر مسئلہ 13.1 کے اطلاق سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ کرتے ہوئے کثیر رکنی اور نا طلق تفاعل کی حد ہم (x_0, y_0) پر تفاعل کی قیمت سے حاصل کرتے ہیں۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل معین ہو۔

مثال 13.10:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (3, -4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

مثال 13.11: درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

حل: چونکہ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ پر نسب نما 0 کو پہنچتا ہے لہذا ہم قاعدہ حاصل تقسیم (مسئلہ 13.1) استعمال نہیں کر سکتے ہیں۔ البتہ نسب نما اور شمار کنندہ کو $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ سے ضرب دے کر ایسا معادل حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے جس کا حد ہم تلاش کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \quad \text{الجبہ} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad \text{جزو } (x - y) \text{ کا نا گیا} \\ &= 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0 \end{aligned}$$

□

استمرار

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمرار کی تعریف حد کی صورت میں کی جاتی ہے۔

تعریف: اگر

ا. (x_0, y_0) پر f معین ہو،

ب. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ موجود ہو،

ج. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ہو،

تب تفاعل f نقطہ (x_0, y_0) پر استمراری³⁰ ہو گا۔ ایک تفاعل جو اپنے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری ہو استمراری³¹ ہو گا۔

□

حد کی تعریف کی طرح، استمرار کی تعریف بھی f کے دائرہ کار کے تمام اندرونی نقاط کے ساتھ ساتھ سرحدی نقاط پر بھی قابل اطلاق ہوتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ پورے وقت نقطہ (x, y) تفاعل کے دائرہ کار میں رہے۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، مسئلہ 13.1 کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ استمراری تفاعل کے الجبرائی جوڑ ہر اس نقطہ پر استمراری ہوں گے جس پر تمام شامل تفاعل استمراری ہوں۔ اس کا مطلب ہے کہ جہاں تمام استمراری تفاعل استمراری ہوں وہاں ان کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، مستقل مضرب، حاصل تقسیم اور طاقت استمراری ہوں گے۔ بالخصوص دو متغیرات کی کثیر رکنی اور ناٹھ تفاعل ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

اگر x اور y کا استمراری تفاعل $z = f(x, y)$ ہو جبکہ z کا استمراری تفاعل $w = g(z)$ ہو، تب مرکب $w = g(f(x, y))$ استمراری ہو گا۔ یوں ہر نقطہ (x, y) پر درج ذیل استمراری ہوں گے۔

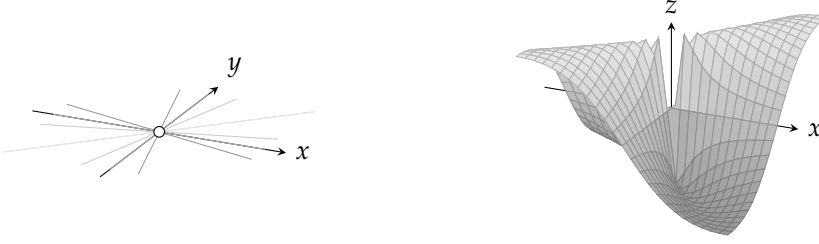
$$e^{x-y}, \quad \cos \frac{xy}{x^2 + 1}, \quad \ln(1 + x^2 y^2)$$

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمراری تفاعل کا مرکب بھی استمراری ہو گا، بس اتنا ضروری ہے کہ وہاں ہر تفاعل استمراری ہو۔

مثال 13.12: دکھائیں کہ ماسوائے مبدا درج ذیل ہر نقطہ پر استمراری ہے (شکل 13.19)۔

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

continuous³⁰
continuous³¹



شکل 13.19: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تفعل $f(x,y)$ استمراری ہے۔

حل: ہر نقطہ $(x,y) \neq (0,0)$ پر تفعل کی قیمت x اور y کے ناطق تفعل سے حاصل کی جاتی ہے لہذا f استمراری ہوگا۔

نقطہ $(0,0)$ پر f کی قیمت معین ہے، لیکن ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ $(x,y) \rightarrow (0,0)$ کرتے ہوئے اس کا حد غیر موجود ہے۔ اس کی وجہ، جیسا ہم دیکھیں گے، یہ ہے کہ مبادا تک مختلف راہوں سے پہنچتے ہوئے مختلف نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

درج ذیل کی بنا، سورخ دار لکیر $y = mx, x \neq 0$ پر m کی ہر قیمت کے لئے تفعل f کی ایک مستقل قیمت ہوگی۔

$$f(x,y)|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

یوں اس لکیر پر جیسے جیسے مبادا تک پہنچتا ہے، f کی حد اتنی ہوگی:

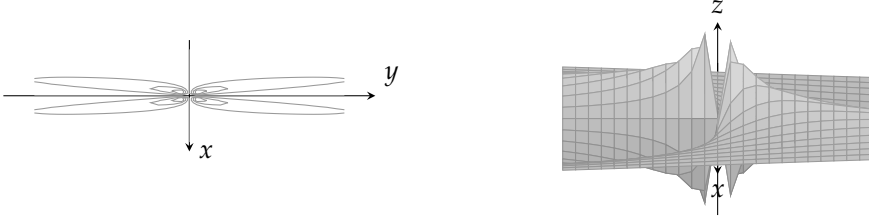
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x,y)|_{y=mx}] = \frac{2m}{1 + m^2}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ حد کی قیمت m پر منحصر ہے۔ یوں ایسی کوئی یکتا قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کو مبادا تک (x,y) پہنچنے پر ہم f کی حد کہہ سکیں۔ مبادا پر حد غیر موجود ہے لہذا مبادا پر تفعل غیر استمراری ہوگا۔ □

دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفعل کے حد کے بارے میں ایک اہم نقطہ مثال 13.12 میں اجاگر ہوا۔ ایک نقطہ پر حد کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ اس نقطہ تک تمام آمد راہوں پر حد کی قیمت ایک جیسی ہو۔ یوں جب بھی ہم ایک نقطہ تک ایسی راہیں تلاش کریں جن پر حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب اس نقطہ پر تفعل کا حد غیر موجود ہوگا۔

حد کی غیر موجودگی کے دوراہ پرکھ

اگر (x_0, y_0) تک نقطہ (x,y) ایسی دو مختلف راہوں سے پہنچے جن پر $f(x,y)$ کے حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$ غیر موجود ہوگا۔



شکل 13.20: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تقابل $f(x, y) = 2x^2y/(x^4 + y^2)$ استتاری ہے۔

□

مثال 13.13: دکھائیں کہ $(0,0)$ تک (x, y) پہنچنے سے درج ذیل تقابل کا کوئی حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 13.20)۔

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

حل: متغی $y = kx^2, x \neq 0$ پر اس تقابل کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$f(x, y)|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}$$

یوں

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx^2}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[f(x, y)|_{y=kx^2} \right] = \frac{2k}{1 + k^2}$$

ہو گا جو آمد راہ پر منحصر ہے۔ اگر (x, y) نقطہ $(0,0)$ تک قطع مکانی $y = x^2$ راہ پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k = 1$ ہے، تب حد 1 کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ اگر (x, y) نقطہ $(0,0)$ تک محور x پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k = 0$ ہے، تب حد 0 کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں دو راہ پرکھ کے تحت $(0,0)$ تک (x, y) کے پہنچنے سے f کا کوئی حد حاصل نہیں ہو گا۔ □

یہاں آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ مباداتک نقطہ (x, y) کے پہنچنے سے بہت سارے مختلف حد ملتے ہیں لہذا یہ کہنا درست نہیں کہ f کا حد غیر موجود ہے۔ یہی وہ نقطہ ہے جسے سمجھنا ضروری ہے۔ حد کی تعریف کہتی ہے کہ حد کی قیمت راہ پر منحصر نہیں ہو سکتی۔

دو سے زیادہ متغیرات کے تفعل

دو متغیرات کے تفعل کے حد اور استمرار کی تعریف اور ان تفعل کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، طاقت اور مرکب کے بارے میں حاصل نتائج تین یا تین سے زیادہ متغیرات کے تفعل کے لئے بھی کارآمد ہیں۔ درج ذیل تفعل اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہیں

$$\ln(x + y + z) \quad \text{اور} \quad \frac{y \sin z}{x - 1}$$

اور درج ذیل طرز کا حد، جہاں N نقطہ (x, y, z) کو ظاہر کرتا ہے، حاصل کرنے کے لئے تفعل میں نقطہ پر کیا جاتا ہے۔

$$\lim_{N \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2 + \cos 0} = \frac{1}{2}$$

سوالات

حد کے قیمتے کی تلاش

سوال 1 تا سوال 12 میں حد کی قیمت تلاش کریں۔

$$\text{سوال 1:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2}$$

$$\text{سوال 2:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\text{سوال 3:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

$$\text{سوال 4:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2$$

$$\text{سوال 5:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi/4)} \sec x \tan y$$

$$\text{سوال 6:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{x^2 + y^3}{x + y + 1}$$

$$\text{سوال 7:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0, \ln 2)} e^{x-y}$$

$$\text{سوال 8:} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \ln |1 + x^2 y^2|$$

سوال 9: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

سوال 10: $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$

سوال 11: $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x \sin y}{x^2 + 1}$

سوال 12: $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/2, 0)} \frac{\cos y + 1}{y - \sin x}$

ماصلہ تقسیم کے حد

حاصل تقسیم کو ترتیب دیتے ہوئے سوال 13 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

سوال 13: $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

سوال 14: $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

سوال 15: $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

سوال 16: $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq x^2}} \frac{y + 4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x}$

سوال 17: $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

سوال 18: $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x + y \neq 4}} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}$

سوال 19: $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,0) \\ 2x - y \neq 4}} \frac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (4,3) \\ x \neq y+1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1} \quad \text{سوال 20:}$$

تین متغیرات کے قاطع کا حد
سوال 21 تا سوال 26 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{N \rightarrow (1,3,4)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad \text{سوال 21:}$$

$$\lim_{N \rightarrow (1,-1,-1)} \frac{2xy+yz}{x^2+z^2} \quad \text{سوال 22:}$$

$$\lim_{N \rightarrow (3,3,0)} (\sin^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z) \quad \text{سوال 23:}$$

$$\lim_{N \rightarrow (-1/4, \pi/2, 2)} \tan^{-1} xyz \quad \text{سوال 24:}$$

$$\lim_{N \rightarrow (\pi, 0, 3)} ze^{-2y} \cos 2x \quad \text{سوال 25:}$$

$$\lim_{N \rightarrow (0, -2, 0)} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{سوال 26:}$$

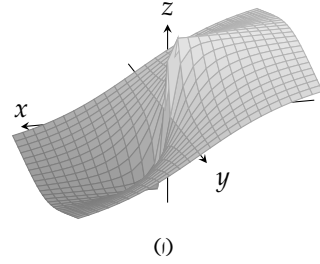
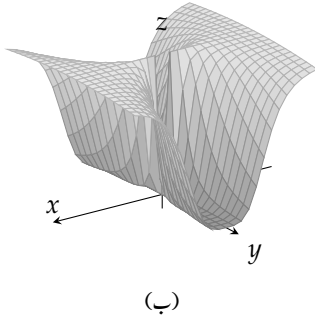
مستوی میں استرار
سوال 27 تا سوال 30 میں کس نقطہ (x, y) پر مستوی میں قاطع استراری ہیں؟

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{ب}) \quad f(x, y) = \sin(x + y) \quad (\text{ا}) \quad \text{سوال 27:}$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2+1} \quad (\text{ب}) \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} \quad (\text{ا}) \quad \text{سوال 28:}$$

$$g(x, y) = \frac{x+y}{2+\cos x} \quad (\text{ب}) \quad g(x, y) = \sin \frac{1}{xy} \quad (\text{ا}) \quad \text{سوال 29:}$$

$$g(x, y) = \frac{1}{x^2-y} \quad (\text{ب}) \quad g(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2} \quad (\text{ا}) \quad \text{سوال 30:}$$



شکل 13.21

فضا میں استمرار

سوال 31 تا سوال 34 میں کس نقطہ (x, y, z) پر فضا میں تقابل استمراری ہیں؟

سوال 31: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ (ب) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ (ا)

سوال 32: $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z$ (ب) $f(x, y, z) = \ln xyz$ (ا)

سوال 33: $h(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + z^2 - 1}$ (ب) $h(x, y, z) = xy \sin \frac{1}{z}$ (ا)

سوال 34: $h(x, y, z) = \frac{1}{|xy| + |z|}$ (ب) $h(x, y, z) = \frac{1}{|y| + |z|}$ (ا)

نقطہ پر حد غیر موجود

نقطہ تک مختلف راہ پر پہنچتے ہوئے سوال 35 تا سوال 42 میں دکھائیں کہ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ کرتے ہوئے تقابل کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 35: $f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (شکل 13.21-ا)

سوال 36: $h(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$ (شکل 13.21-ب)

سوال 37: $h(x, y) = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$

سوال 38: $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$

$$g(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{سوال 39}$$

$$g(x, y) = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{سوال 40}$$

$$h(x, y) = \frac{x^2+y}{y} \quad \text{سوال 41}$$

$$h(x, y) = \frac{x^2}{x^2-y} \quad \text{سوال 42}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 43: کیا $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ کی صورت میں (x_0, y_0) کا معین ہونا لازمی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 44: اگر $f(x_0, y_0) = 3$ ہو تب درج ذیل کے بارے میں (i) (x_0, y_0) پر استمراری f کی صورت میں،

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

(ب) (x_0, y_0) پر غیر استمراری f کی صورت میں کیا کہا جاسکتا ہے۔ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

دو متغیرات کے تقابل کا مسئلہ سچ کہتا ہے کہ اگر ایک فرض، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، کے اندر تمام $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ پر $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ ہو، اور $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ کرتے ہوئے g اور h دونوں کا حد متناہی اور L ہو تب

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ہو گا۔ سوال 45 تا سوال 50 میں اس نتیجہ کا سہارا لیتے ہوئے جواب دیں۔

سوال 45: کیا

$$1 - \frac{x^2 y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$

جانتے ہوئے آپ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}$$

کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 46: کیا

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

جانتے ہوئے

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 47: کیا $|\sin(1/x)| \leq 1$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin \frac{1}{x}$$

سوال 48: کیا $|\cos(1/y)| \leq 1$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \frac{1}{y}$$

سوال 49: (i) دوبارہ مثال 13.12 کو پڑھیں۔ اب درج ذیل کلیہ میں $m = \tan \theta$ پر کر کے اس کی سادہ صورت حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ f کی قیمت لکیر کے زاویہ میلان پر منحصر ہی گی۔

$$f(x,y)|_{y=mx} = \frac{2m}{1+m^2}$$

(ب) جزو-ا میں حاصل کلیہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ لکیر $y = mx$ پر چلتے ہوئے $(x,y) \rightarrow (0,0)$ کرنے سے f کے حد کی قیمت -1 تا 1 ہو سکتی ہے جو قریب پہنچنے کی راہ کے زاویہ پر منحصر ہو گی۔سوال 50: $f(0,0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں جو درج ذیل کو مبدا پر بھی استمراری بناتا ہو۔

$$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

قطبی محدود میں متبادل

اگر کارتیسی محدود میں $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ کے حصول میں پیش رفت نہ ہو تب قطبی محدود میں حد تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر $x = r \cos \theta$ اور $y = r \sin \theta$ کرتے ہوئے $r \rightarrow 0$ کے لئے حاصل تفاعل کا حد تلاش کریں۔ دوسرے الفاظ میں یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ آیا کوئی ایسا عدد L پایا جاتا ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو:

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کا ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام r اور θ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$|r| < \delta \implies |f(r, \theta) - L| < \epsilon$$

اگر ایسا L موجود ہو تب

$$(13.4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = L$$

ہو گا۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3 \theta = 0$$

ہو گا۔ آخری عدم مساوات کی تصدیق کرنے کی خاطر ہمیں دکھانا ہو گا کہ $f(r, \theta) = r \cos^3 \theta$ اور L مساوات 13.4 کو مطمئن کرتے ہیں۔ یعنی ہمیں دکھانا ہو گا کہ کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام r اور θ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$(13.5) \quad |r| < \delta \implies |r \cos^3 \theta - 0| < \epsilon$$

چونکہ

$$|r \cos^3 \theta| = |r| |\cos^3 \theta| \leq |r| \cdot 1 = |r|$$

ہوتا ہے لہذا $\delta = \epsilon$ لینے سے تمام r اور θ کے لئے مساوات 13.5 مطمئن ہو گا۔

اس کے برعکس $|r|$ جتنا بھی چھوٹا کیوں نا ہو درج ذیل تفاعل کی قیمت 0 سے 1 تک ہو سکتی ہے لہذا $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ غیر موجود ہو گا۔

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^2} = \cos^2 \theta$$

درج بالا دو تفاعل میں $r \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد کی موجودگی یا غیر موجودگی کا مسئلہ سیدھا تھا۔ البتہ ضروری نہیں کہ قطبی محدود میں متبادل سودمند ثابت ہو، بلکہ بعض اوقات ایسا کرنے سے ہم بالکل غلط نتیجہ کی طرف راغب ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، تمام سیدھے خطوط $\theta = c$

، جہاں c مستقل ہے، پر حد موجود ہو سکتا ہے اگرچہ وسیع معنوں میں حد غیر موجود ہو گا۔ مثال 13.13 میں اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے۔ قطبی محد میں $r \neq 0$ کے لئے $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ درج ذیل ہو گا۔

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \cos \theta \sin 2\theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$$

اب θ برقرار رکھتے ہوئے $r \rightarrow 0$ کرنے سے حد 0 ملتا ہے۔ البتہ راہ $y = x^2$ پر $r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$ لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{r \cos \theta \sin 2\theta}{r^2 \cos^4 \theta + (r \cos^2 \theta)^2} \\ &= \frac{2r \cos^2 \theta \sin \theta}{2r^2 \cos^4 \theta} = \frac{r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

سوال 51 تا سوال 56 میں $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ کرتے ہوئے f کا حد تلاش کریں یا دکھائیں کہ اس کا حد غیر موجود ہے۔

$$f(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{سوال 51:}$$

$$f(x, y) = \cos \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{سوال 52:}$$

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{سوال 53:}$$

$$f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + x + y^2} \quad \text{سوال 54:}$$

$$f(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{سوال 55:}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{سوال 56:}$$

سوال 57 اور سوال 58 میں $f(0, 0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں کہ f مہدا پر بھی استقاری ہو۔

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{سوال 57:}$$

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{سوال 58:}$$

$\delta\epsilon$ تعریفے کا استعمال

سوال 59: دکھائیں کہ حد کی تعریف (مساوات 13.1) میں $\delta\epsilon$ پر عائد شرط مساوات 13.2 میں دی گئی شرط کے مترادف ہے۔

سوال 60: $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ کرتے ہوئے تقابل $f(x, y)$ کے حد کی باضابطہ $\delta\epsilon$ تعریف کو مد نظر رکھتے ہوئے $(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ کرتے ہوئے $g(x, y, z)$ کے حد کی تعریف پیش کریں۔ چار غیر تابع متغیرات کے تقابل $h(x, y, z, t)$ کی حد کی تعریف کیا ہوگی؟

سوال 61 تا سوال 64 میں تقابل $f(x, y)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یاد دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ (x, y) کے لئے

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے یا دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام (x, y) کے لئے

$$|x| < \delta, |y| < \delta \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے۔ ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

سوال 61: $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \epsilon = 0.01$

سوال 62: $f(x, y) = \frac{y}{x^2+1}, \quad \epsilon = 0.05$

سوال 63: $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+1}, \quad \epsilon = 0.01$

سوال 64: $f(x, y) = \frac{x+y}{2+\cos x}, \quad \epsilon = 0.02$

سوال 65 تا سوال 68 میں تقابل $f(x, y, z)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یاد دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ (x, y, z) کے لئے

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta \implies |f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے یا دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام (x, y, z) کے لئے

$$|x| < \delta, \quad |y| < \delta, \quad |z| < \delta \implies |f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے۔ ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

سوال 65: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.015$

سوال 66: $f(x, y, z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008$

سوال 67: $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}, \quad \epsilon = 0.015$

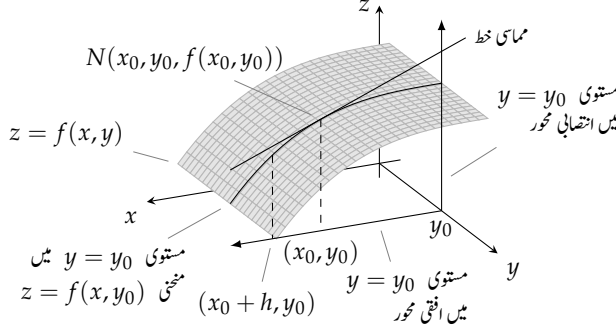
سوال 68: $f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03$

سوال 69: دکھائیں کہ ہر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل $f(x, y, z) = x + y - z$ استمراری ہے۔

سوال 70: دکھائیں کہ مبدا پر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ استمراری ہے۔

13.3 جزوی تفرقات

جب ماسوائے ایک غیر تابع متغیر کے ہم باقی تمام کو برقرار رکھیں اور اس ایک متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا تفرق لیں تو ہمیں "جزوی" تفرق حاصل ہوتا ہے۔ اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ جزوی تفرقات کیسے پائے جاتے ہیں اور واحد متغیر کے تفاعل کے تفرق کے قواعد بروئے کار لاتے ہوئے جزوی تفرقات کی قیمت کے حصول کے بارے میں بتایا جائے گا۔



شکل 13.22: مستوی $y = y_0$ اور سطح $z = f(x, y)$ کا نقطہ۔

تعریفات اور علاقیت

اگر تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار میں (x_0, y_0) ایک نقطہ ہو تب انتصابی سطح $y = y_0$ سطح $z = f(x, y)$ کو منحنی $z = f(x, y_0)$ میں مس کرے گا (شکل 13.22)۔ یہ منحنی مستوی $y = y_0$ میں تفاعل $z = f(x, y_0)$ کی تریسم ہو گی۔ اس مستوی میں افقی محدود x ہے؛ انتصابی محدود z ہے۔

ہم نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق سے مراد نقطہ $x = x_0$ پر $f(x, y_0)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے $f(x, y)$ کا جزوی تفرق³²

$$(13.6) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔ (آپ ∂ کو d کی ایک قسم تصور کریں۔)

□

نقطہ $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر مستوی $y = y_0$ میں منحنی $z = f(x, y_0)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے۔ نقطہ N پر منحنی کا مماسی خط، مستوی $y = y_0$ میں وہ خط ہے جو N سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب y کی قیمت برقرار y_0 رکھی جائے تب x کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0, y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0, y_0) پر i کے رخ کی شرح تبدیلی ہے۔

جزوی تفرق کی علامت اس چیز پر منحصر ہو گی جس پر ہم زور دینا چاہتے ہیں۔ یوں درج ذیل علامت اس وقت استعمال کیے جائیں گے جب ہم نقطہ (x_0, y_0) پر زور دینا چاہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

سائنس اور انجینیری میں درج ذیل علامت مقبول ہے جہاں تفاعل کا صریحاً ذکر کیے بغیر نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے z کا جزوی تفرق لیا گیا ہے۔

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

جہاں جزوی تفرق کو ایک تفاعل تصور کرنا مقصود ہو وہاں درج ذیل علامت استعمال کیے جائیں گے، جہاں x لے لحاظ سے f (یا z) کے جزوی تفرقات لیے گئے ہیں۔

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے $f(x, y)$ کے جزوی تفرق کی تعریف، x کے لحاظ سے f کی جزوی تفرق کی تعریف کی طرح ہے۔ ہم x کو x_0 رکھتے ہوئے y_0 پر y کے لحاظ سے $f(x_0, y)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

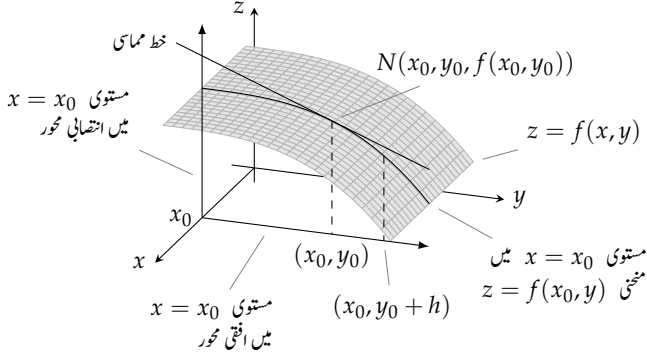
تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے $f(x, y)$ کا جزوی تفرق³³

$$(13.7) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right|_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

نقطہ $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر مستوی $x = x_0$ میں منحنی $z = f(x_0, y)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے (شکل 13.23)۔ نقطہ N پر منحنی کا مماس خط، مستوی $x = x_0$ میں وہ خط ہے جو N سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب x کی قیمت برقرار x_0 رکھی جائے تب y کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0, y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0, y_0) پر j کے رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔



شکل 13.23: مستوی $x = x_0$ اور سطح $z = f(x, y)$ کا قاطع۔

متغیر y کے لحاظ سے جزوی تفرق کو x کے لحاظ سے جزوی تفرق کی طرح لکھا جاتا ہے:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y$$

دھیان رہے کہ نقطہ (x_0, y_0) پر اب سطح $z = f(x, y)$ کے ساتھ دو مماسی خط منسلک ہیں (شکل 13.24)۔ شکل 13.24 میں ظاہری طور پر دو مماس کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔ کیا ایسے دو مماسی کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی ہو گا؟ جزوی تفرق کے بارے میں مزید معلومات جاننے کے بعد ہم اس سوال کا جواب دے پائیں گے۔

حساب

جیسا ہم مساوات 13.6 سے جانتے ہیں، y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیگا۔ اسی طرح مساوات 13.7 کہتی ہے کہ x کو مستقل رکھتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیگا۔

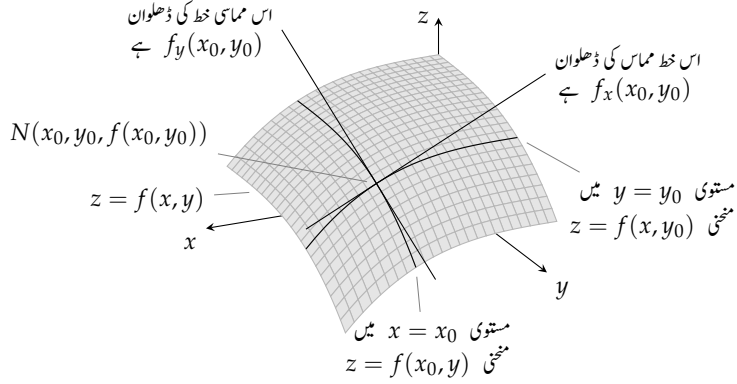
مثال 13.14: نقطہ $(4, -5)$ پر درج ذیل کے لئے $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

حل: ہم y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial x}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

نقطہ $(4, -5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial x}$ کی قیمت $2(4) + 3(-5) = -7$ ہوگی۔



شکل 13.24: نقطہ N پر دو مماس کا تعین کردہ سطح ظاہری طور پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔

اسی طرح ہم x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial y}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1$$

□

نقطہ $(4, -5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمت $3(4) + 1 = 13$ ہوگی۔

مثال 13.15: تقابل $f(x, y) = y \sin xy$ کا $\frac{\partial f}{\partial y}$ معلوم کریں۔

حل: ہم x کو مستقل تصور جبکہ f کو y اور $\sin xy$ کا حاصل ضرب تصور کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy \end{aligned}$$

□

فہیات

جزوی تفرق کمپیوٹر آپ کو حساب میں کئی بعد تک مدد فراہم کر سکتا ہے۔ آپ ایک غیر تابع متغیر کے علاوہ تمام متغیرات کی قیمتیں فراہم کر کے واحد متغیر کے لحاظ سے جزوی تفرق معلوم کر کے ترسیم کر سکتے ہیں۔ جزوی تفرق اور سادہ تفرق کے لئے کمپیوٹر کی زبان میں عموماً ایک جیسی اصطلاح استعمال کی جاتی ہے۔ جزوی تفرقات کے حصول میں کمپیوٹر ضرور استعمال کریں۔

مثال 13.16: تفعل $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$ کے لئے f_x تلاش کریں۔

حل: ہم f کو حاصل تقسیم تصور کر کے y کو مستقل رکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial x} (2y) - 2y \frac{\partial}{\partial x} (y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2} \end{aligned}$$

□

مثال 13.17: مستوی $x = 1$ قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ کو قطع مکافی میں قطع کرتا ہے۔ نقطہ $(1, 2, 5)$ پر اس قطع مکافی کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

حل: مماس کی ڈھلوان نقطہ $(1, 2)$ پر جزوی تفرق $\frac{\partial z}{\partial y}$ کی قیمت ہوگی:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \right|_{(1,2)} = 2y|_{(1,2)} = 2(2) = 4$$

تصدیق کی خاطر ہم قطع مکافی کو واحد متغیر تفعل $z = (1)^2 + y^2 = 1 + y^2$ کی مستوی $x = 1$ میں ترسیم تصور کر کے $y = 2$ پر اس کی ڈھلوان حاصل کرتے ہیں۔ یہ ڈھلوان جس کو سادہ تفرق سے حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہوگا۔

$$\left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=2} = \left. \frac{d}{dy} (1 + y^2) \right|_{y=2} = 2y|_{y=2} = 4$$

□

سادہ تفرق کی طرح جزوی تفرق کے لئے بھی خفی تفرق کارآمد ہے۔

مثال 13.18: اگر درج ذیل مساوات دو غیر تابع متغیرات x اور y کا تفعل z دیتی ہو جس کا جزوی تفرق موجود ہو تب $\frac{\partial z}{\partial x}$ تلاش کریں۔

$$yz - \ln z = x + y$$

حل: ہم y کو مستقل اور z کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x} \ln z &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \\ y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 + 0 \quad y \text{ مستقل} \\ \left(y - \frac{1}{z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 \quad \frac{\partial}{\partial x}(yz) = y \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{z}{yz - 1}\end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی تعریف، دو متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی طرح ہے۔ یہ ایک متغیر کے لحاظ سے سادہ تفرق ہوتے ہیں جبکہ باقی تمام متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔

مثال 13.19: اگر x ، y اور z غیر تابع متغیرات ہوں جن کا تفاعل

$$f(x, y, z) = x \sin(y + 3z)$$

ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [x \sin(y + 3z)] = x \frac{\partial}{\partial z} \sin(y + 3z) \\ &= x \cos(y + 3z) \frac{\partial}{\partial z} (y + 3z) = 3x \cos(y + 3z)\end{aligned}$$

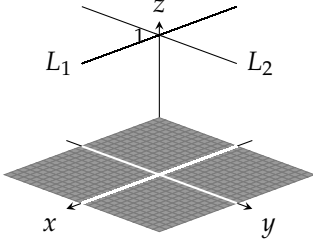
□

مثال 13.20: متوازی جڑے برقی مزاحمت

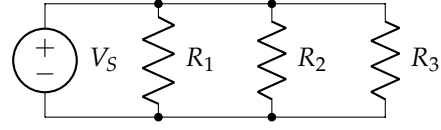
اگر R_1 ، R_2 اور R_3 مزاحمت متوازی جڑے ہوں تب ان کا معادل مزاحمت R درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 13.25)۔

$$(13.8) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

برقی مزاحمتوں کی قیمتیں $R_3 = 90 \Omega$ ، $R_2 = 45 \Omega$ ، $R_1 = 30 \Omega$ لیتے ہوئے جزوی تفرق $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ حاصل کریں۔



شکل 13.26: تفاعل f چار کھلے رعبات اور لکیر L_1 ، L_2 پر مشتمل ہے (مثال 13.21)۔



شکل 13.25: اس طرح جوڑے گئے مزاحمتوں کو متوازی جڑا کہتے ہیں۔

حل: ہم R_1 اور R_3 کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ تلاش کرنے کی خاطر مساوات 13.8 کے دونوں اطراف کا R_2 کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \\ -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial R_2} &= 0 - \frac{1}{R_2^2} + 0 \\ \frac{\partial R}{\partial R_2} &= \frac{R^2}{R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2} \right)^2\end{aligned}$$

مزاحمتوں کی دی گئی قیمتیں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{3+2+1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

یوں $R = 15 \Omega$ حاصل ہوتا ہے لہذا درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

□

استمرار اور جزوی تفرق کی موجودگی کا تعلق

ایک نقطہ پر ایک تفاعل کا x اور y دونوں کے لحاظ سے جزوی تفرق موجود ہونے کے باوجود تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ یہ واحد متغیر تفاعل سے مختلف ہے جہاں تفاعل کے تفرق کی موجودگی اس کی استمرار یقینی بناتی ہے۔ ہاں (جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے)، اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، $f(x, y)$ کے جزوی تفرق موجود ہوں جو پورے قرص میں استمراری ہوں تب (x_0, y_0) پر f استمراری ہو گا۔

مثال 13.21: درج ذیل تفاعل

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

نقطہ $(0, 0)$ پر غیر استراری ہے (شکل 13.26)۔ لکیر $y = x$ پر چلتے ہوئے نقطہ (x, y) کا (x_0, y_0) تک پہنچنے سے f کا حد 0 حاصل ہوتا ہے جبکہ $f(0, 0) = 1$ ہے۔ نقطہ $(0, 0)$ پر f کے جزوی تفرقات f_x ، f_y ، جو شکل میں خط L_1 اور L_2 کی ڈھلوان ہیں، دونوں موجود ہیں۔
□

دو مرتبی جزوی تفرقات

تفاعل $f(x, y)$ کو دو بار تفرق کرنے سے ہمیں اس تفاعل کا دو مرتبی تفرق ملتا ہے۔ ان تفرقات کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \text{ یا } f_{xx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \text{ یا } f_{yy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \text{ یا } f_{yx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \text{ یا } f_{xy} \end{aligned}$$

ان کی تعریفی مساوات درج ذیل ہیں

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

جہاں تفرق لینے کی ترتیب دھیان سے دیکھیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) & \text{پہلے } y \text{ اور بعد میں } x \text{ کے ساتھ تفرق لیں} \\ f_{yx} &= (f_y)_x & \text{ان کا بھی یہی مطلب ہے۔} \end{aligned}$$

مثال 13.22: اگر $f(x, y) = x \cos y + ye^x$ ہو تب

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos y + ye^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\sin y + e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ye^x \end{aligned}$$

اور درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= -x \sin y + e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\sin y + e^x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -x \cos y\end{aligned}$$

□

مسئلہ پولر

آپ نے مثال 13.22 میں دھیان دیا ہو گا کہ مدغم دور تہی جزوی تفرقات

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

کی قیمتیں ایک جیسی تھیں۔ یہ محض اتفاق نہیں ہے۔ جہاں بھی f ، f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} استمراری ہوں یہ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 13.2: مدغم تفرقہ مسئلہ یا مسئلہ پولر

اگر ایک کھلے خطہ میں، جس میں نقطہ (a, b) پایا جاتا ہو، $f(x, y)$ اور اس کے جزوی تفرقات f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} معین ہوں اور (a, b) پر یہ تمام استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(13.9) \quad f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

مسئلہ پولر (مسئلہ 13.2) کا ثبوت آپ کو ضمیمہ ط میں ملے گا۔

مسئلہ 13.2 کہتا ہے کہ مدغم دور تہی جزوی تفرق کے حصول میں ہم کسی بھی ترتیب سے تفرق لے سکتے ہیں۔ بعض اوقات ایسا مددگار ثابت ہوتا ہے۔

مثال 13.23: درج ذیل تفاعل کے لئے $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ تلاش کریں۔

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$$

حل: ہمیں $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ کہتا ہے کہ پہلے y کے لحاظ سے تفرق لیں اور بعد میں x کے لحاظ سے تفرق لیں۔ البتہ اگر ہم پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تفرق لیں تب نتیجہ زیادہ جلدی اور زیادہ آسانی سے صرف دو قدموں میں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} &= 1\end{aligned}$$

اب پہلے y اور بعد میں x کا تفرق لیتے ہوئے اسی کو دوبارہ حل کر کے دیکھیں۔ □

مزید بلند رتبہ کے جزوی تفرقات

عملی استعمال میں یک رتی اور دو رتی جزوی تفرقات زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں لہذا ہمیں عموماً انہیں سے واسطہ ہوگا۔ جہاں تک تفاعل کے بلند تفرقات کی بات ہے، ہم ایک تفاعل کا تفرق جتنی بار چاہیں لیں سکتے ہیں بشرطیکہ ایسے تفرقات موجود ہوں۔ یوں ہم تین رتی اور چار رتی تفرقات لے سکتے ہیں جنہیں درج ذیل علامتوں کی طرز پر ظاہر کیا جائے گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y} &= f_{yyx} \\ \frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y} &= f_{yyxx}\end{aligned}$$

دو رتی تفرق کی طرح، تفرق کی ترتیب غیر اہم ہے جب تک تمام تفرقات استمراری ہوں۔

سوالات

یکے رتبہ جزوی تفرق کے تلاش
سوال 1 تا سوال 22 میں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$

سوال 2: $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

سوال 3: $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$

سوال 4: $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

سوال 5: $f(x, y) = (xy - 1)^2$

سوال 6: $f(x, y) = (2x - 3y)^3$

سوال 7: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 8: $f(x, y) = (x^3 + y/2)^{2/3}$

سوال 9: $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

سوال 10: $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

سوال 11: $f(x, y) = \frac{x+y}{xy-1}$

سوال 12: $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13: $f(x, y) = e^{x+y+1}$

سوال 14: $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + y)$

سوال 15: $f(x, y) = \ln(x + y)$

سوال 16: $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

سوال 17: $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$

سوال 18: $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$

سوال 19: $f(x, y) = x^y$

سوال 20: $f(x, y) = \log_y x$

سوال 21: تمام t کے لئے g متراوی ہے $f(x, y) = \int_x^y g(t) dt$

سوال 22: $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \quad (|xy| < 1)$

سوال 23 تا سوال 34 میں f_x ، f_y اور f_z تلاش کریں۔

$$f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2 \quad \text{سوال 23}$$

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz \quad \text{سوال 24}$$

$$f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{سوال 25}$$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad \text{سوال 26}$$

$$f(x, y, z) = \sin^{-1}(xyz) \quad \text{سوال 27}$$

$$f(x, y, z) = \sec^{-1}(x + yz) \quad \text{سوال 28}$$

$$f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z) \quad \text{سوال 29}$$

$$f(x, y, z) = yz \ln(xy) \quad \text{سوال 30}$$

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} \quad \text{سوال 31}$$

$$f(x, y, z) = e^{-xyz} \quad \text{سوال 32}$$

$$f(x, y, z) = \tanh(x + 2y + 3z) \quad \text{سوال 33}$$

$$f(x, y, z) = \sinh(xy - z^2) \quad \text{سوال 34}$$

سوال 35 تا سوال 40 میں ہر متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا جبزوی تفرق تلاش کریں۔

$$f(t, \alpha) = \cos(2\pi t - \alpha) \quad \text{سوال 35}$$

$$g(u, v) = v^2 e^{2u/v} \quad \text{سوال 36}$$

$$h(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \theta \cos \phi \quad \text{سوال 37}$$

$$g(r, \theta, z) = r(1 - \cos \theta) - z \quad \text{سوال 38}$$

$$\text{سوال 39: قلب کا کام}$$

$$W(P, H, \delta, v, g) = PH + \frac{H\delta v^2}{2g}$$

$$A(c, h, k, m, q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2} \quad \text{سوال 40:}$$

دور تہ جزوی تفروق کا حصول

سوال 41 تا سوال 46 میں تفاعل کے تمام دور تہ جزوی تفروقات تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x + y + xy \quad \text{سوال 41:}$$

$$f(x, y) = \sin xy \quad \text{سوال 42:}$$

$$g(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x \quad \text{سوال 43:}$$

$$h(x, y) = xe^y + y + 1 \quad \text{سوال 44:}$$

$$r(x, y) = \ln(x, y) \quad \text{سوال 45:}$$

$$s(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{سوال 46:}$$

مدغم جزوی تفروقات

سوال 47 تا سوال 50 میں $w_{xy} = w_{yx}$ کی تصدیق کریں۔

$$w = \ln(2x + 3y) \quad \text{سوال 47:}$$

$$w = e^x + x \ln y + y \ln x \quad \text{سوال 48:}$$

$$w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4 \quad \text{سوال 49:}$$

$$w = x \sin y + y \sin x + xy \quad \text{سوال 50:}$$

سوال 51: بغیر قلم اٹھائے بتائیں کہ درج ذیل میں x کے لحاظ سے پہلے اور y کے لحاظ سے بعد میں یا اس کے الٹ حل کرتے ہوئے f_{xy} زیادہ جلدی حاصل ہو گا۔

$$f(x, y) = x \sin y + e^y \quad \text{ا.}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad \text{ب.}$$

$$ج. \quad f(x, y) = y + \frac{x}{y}$$

$$د. \quad f(x, y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1)$$

$$ه. \quad f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$$

$$و. \quad f(x, y) = x \ln xy$$

سوال 52: درج ذیل میں تمام کا پانچ رتی جزوی تفرق $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$ صفر کے برابر ہے۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر آپ کس متغیر کے لحاظ سے پہلے جزوی تفرق لیں گے؟ بغیر کچھ لکھے جواب دینے کی کوشش کریں۔

$$ا. \quad f(x, y) = y^2 x^4 e^x + 2$$

$$ب. \quad f(x, y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$$

$$ج. \quad f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$$

$$د. \quad f(x, y) = x e^{y^2/2}$$

جزوی تفرق کے تعریف کا استعمال

سوال 53 اور سوال 54 میں جزوی تفرق کی تعریف بذریعہ حد استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ پر تفاعل کا جزوی تفرق حاصل کریں۔

$$\text{سوال 53:} \quad f(x, y) = 1 - x + y - 3x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (1, 2)$$

$$\text{سوال 54:} \quad f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (-2, 1)$$

سوال 55: فرض کریں $w = f(x, y, z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial z}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(1, 2, 3)$ پر $f(x, y, z) = x^2 y z^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

سوال 56: فرض کریں $w = f(x, y, z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(-1, 0, 3)$ پر $f(x, y, z) = -2xy^2 + yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

تفرقات جزوی

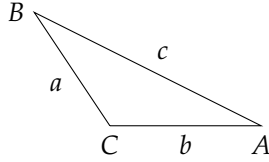
سوال 57: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1, 1, 1)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

سوال 58: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1, -1, -3)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xz + y \ln x - x^2 + 4 = 0$$

سوال 59 اور سوال 59 درج ذیل مثلث کے بارے میں ہے۔



سوال 59: A کو خفی طور پر a ، b اور c کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial A}{\partial a}$ اور $\frac{\partial A}{\partial b}$ تلاش کریں۔

سوال 60: a کو خفی طور پر A ، b اور B کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial a}{\partial A}$ اور $\frac{\partial a}{\partial B}$ تلاش کریں۔

سوال 61: غیر تابع متغیرات x اور y کی صورت میں تفاعل u اور v مساوات $x = v \ln u$ اور $y = u \ln v$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق v_x ، جو موجود ہے، کو u اور v کی صورت میں لکھیں۔ (اشارہ: دونوں مساوات کا تفرق x کے لحاظ سے لے کر v_x کے لئے حل کریں۔)

سوال 62: غیر تابع متغیرات u اور v کی صورت میں تفاعل x اور y مساوات $u = x^2 - y^2$ اور $v = x^2 - y$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق $\frac{\partial x}{\partial u}$ اور $\frac{\partial y}{\partial u}$ ، جو موجود ہیں تلاش کریں۔ (اشارہ: سوال 61 میں دیا گیا اشارہ دیکھیں۔) اب $s = x^2 + y$ لیتے ہوئے $\frac{\partial s}{\partial u}$ حاصل کریں۔

مساوات لاپلاس
تین بعدی مساوات لاپلاس

$$(13.10) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

کو فضا میں برقرار حال حراری تقسیم $T = f(x, y, z)$ ، تجاذبی مخفی قوت اور برقی ساکن مخفی قوت مطمئن کرتے ہیں۔ مساوات 13.10 سے جزو $\frac{\partial f}{\partial z}$ نکالنے سے دو بعدی مساوات لاپلاس

$$(13.11) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

حاصل ہوتی ہے جو مستوی میں مخفی قوت اور برقرار حال حراری تقسیم بیان کرتی ہے۔

دکھائیں کہ سوال 63 تا سوال 68 میں دیا ہر ایک تفاعل مساوات لاپلاس میں سے کسی ایک کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\text{سوال 63: } f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$$

$$\text{سوال 64: } f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$$

$$\text{سوال 65: } f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$$

$$\text{سوال 66: } f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{سوال 67: } f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\text{سوال 68: } f(x, y, z) = e^{2x+4y} \cos 5z$$

مساوات موج

سمندر کے کنارے کھڑے ہو کر سمندری امواج کی لی گئی تصویر میں نشیب و فراز کا ایک منظم نقش نظر آتا ہے۔ ہمیں فضا میں فاصلہ کے لحاظ سے دوری انتصابی حرکت نظر آتی ہے۔ پانی میں کھڑے ہو کر ہم گزرتی امواج کی بنا پانی کا اتار چھڑاؤ محسوس کرتے ہیں۔ ہم وقت کے لحاظ سے دوری انتصابی حرکت دیکھتے ہیں۔ طبیعیات میں اس خوبصورت تشابہ کی کو یک بعدی مساوات موج

$$(13.12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

بیان کرتی ہے جہاں w موج، x فاصلاتی متغیر، t لمحاتی متغیر اور c رفتار ہے۔

سمندری سطح پر فاصلہ x ہو گا لیکن دیگر عملی استعمال میں x ارتعاش پذیر تار کے ساتھ ساتھ فاصلہ، ہوا میں فاصلہ (صوتی امواج)، یا فضا میں فاصلہ (امواج نور) ہو سکتا ہے۔ عدد c کی قیمت موج کی قسم اور ذریعہ پر منحصر ہو گا۔

دکھائیں کہ سوال 69 تا سوال 75 میں تمام تفاعل مساوات موج کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 69: $w = \sin(x + ct)$

سوال 70: $w = \cos(2x + 2ct)$

سوال 71: $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$

سوال 72: $w = \ln(2x + 2ct)$

سوال 73: $w = \tan(2x - 2ct)$

سوال 74: $w = 5 \cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

سوال 75: $w = f(u)$: جہاں f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل، $u = a(x + ct)$ اور a مستقل ہیں۔

جوابات

شکل 13.18 جو تفاعل $z = \cos x \cos y e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$ (13) ہے۔

حصہ 13.1 صفحہ 1521

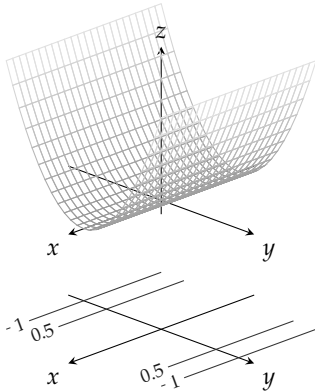
شکل 13.13 جو تفاعل $z = -\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ (14) ہے۔

شکل 13.16 جو تفاعل $z = \frac{1}{4x^2+y^2}$ (15) ہے۔

شکل 13.15 جو تفاعل $z = e^{-y} \cos x$ (16) ہے۔

شکل 13.14 جو تفاعل $z = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ (17) ہے۔

شکل 13.17 جو تفاعل $z = y^2 - y^4 - x^2$ (18) ہے۔



(1) (i) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) خطوط $y - x = c$ ، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے (ه) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

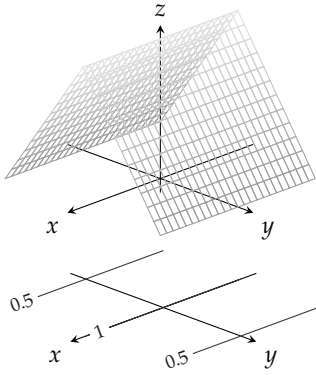
(3) (i) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) $z \geq 0$ ، (ج) $f(x, y) = 0$ کے لئے مرکز عین مہدا پر ہے؛ $f(x, y) \neq 0$ کے لئے وہ ترخیم جس کا مرکز $(0, 0)$ جبکہ محور اکبر اور محور اصغر با ترتیب محور x اور محور y پر ہوں، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے، (ه) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

(5) (i) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) $f(x, y) = 0$ کے لئے محور x اور محور y جبکہ $f(x, y) \neq 0$ کے لئے قطع زائد جس کے متقارب محور x اور محور y ہیں، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے، (ه) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

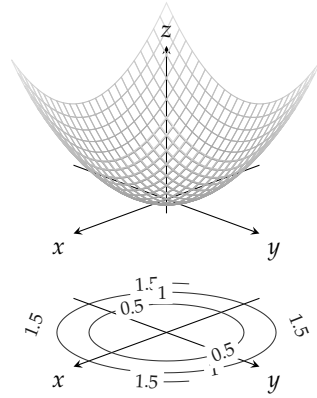
(7) (i) وہ تمام (x, y) جو $x^2 + y^2 < 16$ کو مطمئن کرتے ہوں، (ب) $z \geq \frac{1}{4}$ ، (ج) وہ دائرے جن کے مرکز مہدا پر ہوں اور جن کے رداس $r < 4$ ہوں، (د) دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ سرحد ہے، (ه) کھلا، (و) محدود

(9) (i) $(x, y) \neq (0, 0)$ ، (ب) تمام حقیقی، (ج) وہ دائرے جن کے مراکز مہدا پر ہوں اور جن کے رداس $r > 0$ ہوں، (د) واحد نقطہ $(0, 0)$ سرحدی نقطہ ہے، (ه) کھلا، (و) غیر محدود

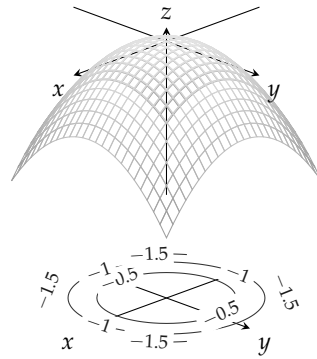
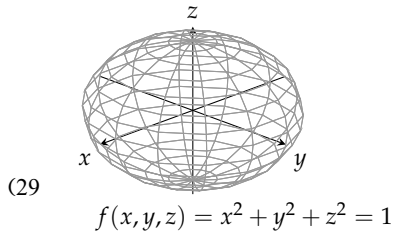
(11) (i) وہ تمام (x, y) جو $-1 \leq y - x \leq 1$ کو مطمئن کرتے ہوں، (ب) $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ ، (ج) $y - x = c$ طرز کے خطوط جہاں $-1 \leq c \leq 1$ ہے، (د) دو سیدھے خطوط $y = 1 + x$ اور $y = -1 + x$ سرحد ہیں، (ه) بند، (و) غیر محدود



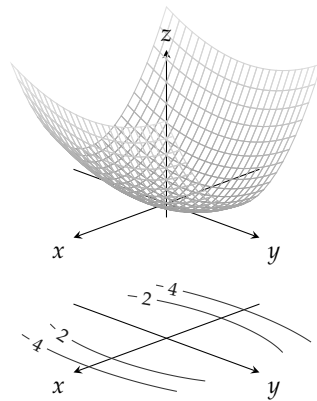
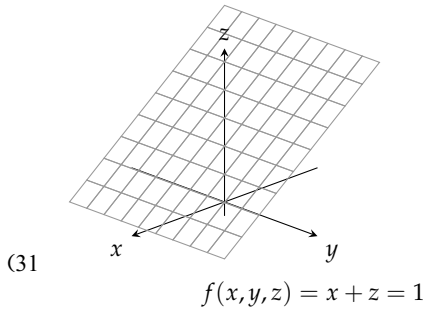
(27)



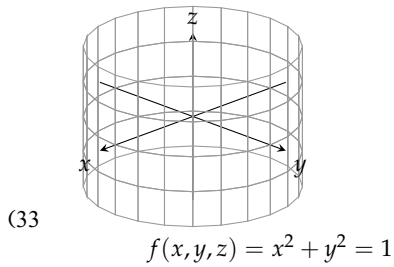
(21)



(23)



(25)



$$(39) \text{ راہ } y = mx \text{ لیں جہاں } m \text{ ایک مستقل } m \neq -1$$

$$(41) \text{ راہ } y = kx^2 \text{ لیں جہاں } k \text{ ایک مستقل } k \neq 0 \text{ ہو۔}$$

$$(43) \text{ نہیں}$$

$$(45) \text{ حد } 1 \text{ ہے۔}$$

$$(47) \text{ حد } 0 \text{ ہے۔}$$

$$(49) \text{ جہاں } f(x, y)|_{y=mx} = \sin 2\theta \quad (i) \quad \tan \theta = m$$

$$(51) \quad 0$$

$$(53) \text{ غیر موجود ہے۔}$$

$$(55) \quad \frac{\pi}{2}$$

$$(57) \quad f(0, 0) = \ln 3$$

$$(61) \quad \delta = 0.1$$

$$(63) \quad \delta = 0.005$$

$$(65) \quad \delta = \sqrt{0.015}$$

$$(67) \quad \delta = 0.005$$

$$\text{حصہ 13.3 صفحہ 1553}$$

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy-1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy-1)$$

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$$

$$(11) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^2-1}{(xy-1)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$$

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+1}$$

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$$

$$(17) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sin(x-3y) \cos(x-3y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6 \sin(x-3y) \cos(x-3y)$$

$$(19) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

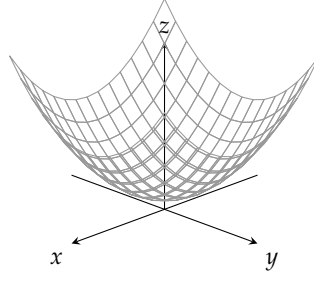
$$(21) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -g(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$$

$$(23) \quad f_x = y^2, \quad f_y = 2xy, \quad f_z = -4z$$

$$(25) \quad f_x = 1, f_y = -y(y^2+z^2)^{-1/2}, \quad f_z = -z(y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$(27) \quad f_x = \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, \quad f_y = \frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, \quad f_z = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$$

$$(29) \quad f_x = \frac{1}{x+2y+3z}, \quad f_y = \frac{2}{x+2y+3z}, \quad f_z = \frac{3}{x+2y+3z}$$



$$f(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 1$$

$$z = x^2 + y^2 + 1$$

$$\text{یعنی } x^2 + y^2 = 10 \quad (37)$$

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = 2 \tan^{-1} \sqrt{2} \quad (39)$$

$$\sqrt{x-y} - \ln z = 2 \quad (41)$$

$$\frac{x+y}{z} = \ln 2 \quad (43)$$

$$(45) \text{ جی. پی. اے. } 2000$$

$$(47) \quad 63 \text{ km}$$

$$\text{حصہ 13.2 صفحہ 1534}$$

$$(1) \quad \frac{5}{2}$$

$$(3) \quad 2\sqrt{6}$$

$$(5) \quad 1$$

$$(7) \quad \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad 1$$

$$(11) \quad 0$$

$$(13) \quad 0$$

$$(15) \quad -1$$

$$(17) \quad 2$$

$$(19) \quad \frac{1}{4}$$

$$(21) \quad \frac{19}{12}$$

$$(23) \quad 2$$

$$(25) \quad 3$$

$$(27) \text{ تمام } (x, y), \text{ ماسوائے } (0, 0) \text{ تمام } (x, y)$$

$$(29) \text{ تمام } (x, y) \text{ ماسوائے جہاں } x = 0 \text{ یا } y = 0 \text{ ہو،}$$

$$(31) \text{ تمام } (x, y, z), \text{ ماسوائے } (0, 0, 0) \text{ تمام } (x, y, z)$$

$$(33) \text{ تمام } (x, y, z) \text{ جہاں } x^2 + y^2 \neq 1 \text{ ہو،}$$

$$(35) \text{ راہ } y = x, x < 0 \text{ اور } y = x, x > 0 \text{ لیں۔}$$

$$(37) \text{ راہ } y = kx^2 \text{ لیں جہاں } k \text{ ایک مستقل ہو۔}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y} &= x^2 - \sin y + \sin x, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= 2y - y \sin x, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos y, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + \cos x \\
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{x+y}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2} \quad (45) \\
\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{-1}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2}{2x+3y}, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y}, \quad (47) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-6}{(2x+3y)^2} \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4, \quad (49) \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} &= 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3 \\
(س) \cdot x \frac{\partial}{\partial x} (س) \cdot x \frac{\partial}{\partial x} (ج) \cdot y \frac{\partial}{\partial y} (ب) \cdot x \frac{\partial}{\partial x} (ا) \quad (51) \\
&\quad y \frac{\partial}{\partial y} (س) \cdot y \frac{\partial}{\partial y} (ج) \\
f_x(1,2) &= -13, f_y(1,2) = -2 \quad (53) \\
&\quad 12 \quad (55) \\
&\quad -2 \quad (57) \\
\frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{a}{bc \sin A}, \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c \cos A - b}{bc \sin A} \quad (59) \\
v_x &= \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1} \quad (61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_x &= -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad (31) \\
f_y &= -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}, \\
f_z &= -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)} \\
f_x &= \operatorname{sech}^2(x+2y+3z), \quad (33) \\
f_y &= 2 \operatorname{sech}^2(x+2y+3z), \\
f_z &= 3 \operatorname{sech}^2(x+2y+3z) \\
\frac{\partial f}{\partial t} &= -2\pi \sin(2\pi t - \alpha), \quad (35) \\
\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \sin(2\pi t - \alpha) \\
\frac{\partial h}{\partial \rho} &= \sin \theta \cos \phi, \quad (37) \\
\frac{\partial h}{\partial \theta} &= \rho \cos \theta \cos \phi, \\
\frac{\partial h}{\partial \phi} &= -\rho \sin \theta \sin \phi \\
W_P(P, H, \delta, v, g) &= H, \quad (39) \\
W_H(P, H, \delta, v, g) &= P + \frac{\delta v^2}{2g}, \\
W_\delta(P, H, \delta, v, g) &= \frac{Hv^2}{2g}, \\
W_v(P, H, \delta, v, g) &= \frac{H\delta v}{g}, \\
W_g(P, H, \delta, v, g) &= -\frac{H\delta v^2}{2g^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 1 + y, \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (41) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \\
\frac{\partial g}{\partial x} &= 2xy + y \cos x, \quad (43)
\end{aligned}$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

