

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
278	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
312	دیگر شرح تبدیلی	3.7

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

3.7 دیگر شرح تبدیلی

ٹینکی سے 3000 L min^{-1} پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہوگی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے ہیں۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 3.54: انعکاس 3000 L min^{-1} کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس r کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی h ہے۔ یوں پانی کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہوگا جہاں حجم کو H سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل 3.65)۔ اب ہمیں انعکاس

$$\frac{dH}{dt} = -3000$$

بتلایا گیا ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتی ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{dh}{dt}$$

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں H اور h کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہوگا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{dH}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

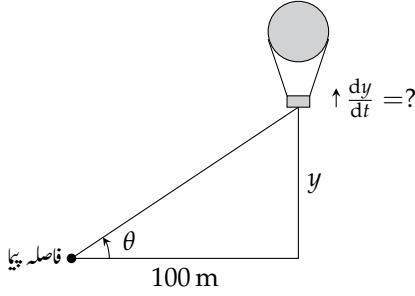
جہاں دائیں جانب r مستقل ہے۔ اس میں $\frac{dH}{dt}$ کی معلوم قیمت پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح $\frac{dh}{dt}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

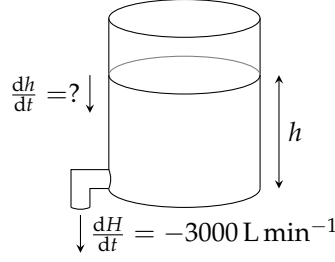
پانی کی گہرائی $\frac{3}{\pi r^2}$ میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہوگی۔ مثلاً $r = 1 \text{ m}$ اور $r = 10 \text{ m}$ کی صورت میں شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95 \text{ m min}^{-1} = -95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 1 \text{ m})$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095 \text{ m min}^{-1} = -0.95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 10 \text{ m})$$



شکل 3.66: غبارہ (مثال 3.55)



شکل 3.65: پانی کی ٹینکی (مثال 3.54)

□

مثال 3.55: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل 3.66)۔ غبارے کی نقطہ اڑان سے 100 m دور واقع فاصلہ پیتا⁴¹ سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پیتا کا زاویہ صعود $\frac{\pi}{4}$ تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح $0.14 \text{ rad min}^{-1}$ تھی۔ اس لمحہ پر غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟
حل: ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔

پہلا قدم: موقع کی تصویر کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات θ اور y درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پیتا کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو t سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ θ اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پیتا سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ 100 m ہے جس کو متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔
دوسرا قدم: ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad min}^{-1} \quad (\theta = \frac{\pi}{4})$$

تیسرا قدم: جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے $\theta = \pi/4$ کی صورت میں $\frac{dy}{dt}$ پوچھا گیا ہے۔
چوتھا قدم: متغیرات θ اور y کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100} = \tan \theta \quad \Rightarrow \quad y = 100 \tan \theta$$

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے t کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو $\frac{dy}{dt}$ (درکار معلومات) اور $\frac{d\theta}{dt}$ (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{dy}{dt} = 100 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

چھٹا قدم: $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $\frac{d\theta}{dt} = 0.14$ پر کرتے ہوئے $\frac{dy}{dt}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = 100(\sec \frac{\pi}{4})^2(0.14) = 28 \text{ m min}^{-1}$$

□

اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

- مسئلے کی تصویر کشی کریں۔ وقت کو t سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو t کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔
- اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کی روپ میں لکھیں۔
- مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کی روپ میں ہو گا)۔
- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی بار آپ کو دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنا ہو گا۔
- اس کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔ اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔
- معلوم معلومات کو پر کرتے ہوئے نامعلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال 3.56: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ 0.6 km اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ 0.8 km ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ 20 km h^{-1} سے بڑھ رہا ہے۔ پولیس کی گاڑی کی رفتار 60 km h^{-1} ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر اور متغیرات۔ ہم کارتیسی مجدد پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو x محور جبکہ پولیس کی گاڑی کو y محور پر رکھتے ہیں۔ وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ t پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام x ، پولیس کی گاڑی کا مقام y اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ s ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ x ، y اور s متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔
دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8 \text{ km}, \quad y = 0.6 \text{ km}, \quad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ km h}^{-1}, \quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ km h}^{-1}$$

اس لئے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی y رخ چل رہی ہے۔
تیسرا قدم: ہمیں $\frac{dx}{dt}$ تلاش کرنا ہے۔

چوتھا قدم: مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق $s^2 = x^2 + y^2$ ہے۔
پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ کی مدد سے t کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

چھٹا قدم: $x = 0.8$ ، $y = 0.6$ ، $\frac{dy}{dt} = -60$ اور $\frac{ds}{dt} = 20$ پر کرتے ہوئے $\frac{dx}{dt}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} 20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2 + 0.6^2}} \left(0.8 \frac{dx}{dt} + 0.6(-60) \right) \\ 20 &= 0.8 \frac{dx}{dt} - 36 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{20 + 36}{0.8} = 70 \end{aligned}$$

اس لمحہ پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار 70 km h^{-1} ہے۔

□

مثال 3.57: پانی کی مخروطی ٹینکی $9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس 5 m ، اس کا قد 10 m ہے اور اس کی نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی 6 m ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔
پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

H : لمحہ t (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

x : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

y : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ H ، x اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔
دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6 \text{ m}, \quad \frac{dH}{dt} = 9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$$

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{dy}{dt}$ تلاش کرنا ہے۔
چوتھا قدم: متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

چونکہ لمحہ t پر ہمیں x اور $\frac{dx}{dt}$ کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی ہے لہذا ہمیں x سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ متشابہ مشکلات استعمال کرتے ہوئے شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \implies x = \frac{y}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

پانچواں قدم: t کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2 \frac{dy}{dt}$$

اس کو $\frac{dy}{dt}$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \frac{dH}{dt}$$

چھٹا قدم: دی گئی معلومات یعنی $y = 6$ اور $\frac{dH}{dt} = 9$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi(6^2)} \cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \text{ m min}^{-1}$$

□

اس لمحے پر پانی کی گہرائی 0.32 m min^{-1} سے بڑھ رہی ہے۔

سوالات

سوال 1: فرض کریں کہ دائرے کا رداس r اور رقبہ $S = \pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{dr}{dt}$ اور $\frac{dS}{dt}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال 2: فرض کریں کہ رداس r اور سطحی رقبہ $S = \frac{4}{3}\pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{dr}{dt}$ اور $\frac{dS}{dt}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال 3: نیلن کے رداس r ، قد h اور حجم H کا تعلق $H = \pi r^2 h$ ہے۔

ا. r کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dh}{dt}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب. h کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dr}{dt}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نا r اور نا h مستقل ہوں تب $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dr}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

سوال 4: سیدھا کھڑے مخروط جس کا رداس r اور قد h ہوں کا حجم $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہوگا۔

ا. مستقل r کی صورت میں $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dh}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ب. مستقل h کی صورت میں $\frac{dH}{dt}$ اور $\frac{dr}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل h اور r کی صورت میں $\frac{dH}{dt}$ ، $\frac{dr}{dt}$ اور $\frac{dh}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال 5: مزاحمت R میں برقی رو I اور برقی دباؤ V کا تعلق $V = IR$ ہے (شکل میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباؤ 1 V s^{-1} سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو $\frac{1}{3} \text{ A s}^{-1}$ سے گھٹ رہی ہے۔

ا. $\frac{dV}{dt}$ کی قیمت کیا ہے؟

ب. $\frac{dI}{dt}$ کی قیمت کیا ہے؟

ج. $\frac{dR}{dt}$ ، $\frac{dV}{dt}$ اور $\frac{dI}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

د. جب $V = 12$ وولٹ اور $I = 2$ ایمپیر ہوں تب $\frac{dR}{dt}$ کیا ہوگا؟ کیا R بڑھ رہا ہوگا یا گھٹ رہا ہوگا؟

سوال 6: برقی دور میں طاقت P ، مزاحمت R اور برقی رو i کا تعلق $P = i^2 R$ ہے۔ طاقت، مزاحمت اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W)، اوہم (Ω) اور ایمپیر (A) ہیں۔

ا. $\frac{dP}{dt}$ ، $\frac{dR}{dt}$ اور $\frac{di}{dt}$ کا تعلق کیا ہے جہاں P ، R اور i میں سے کوئی بھی مستقل نہیں ہے۔

ب. مستقل P کی صورت میں $\frac{dR}{dt}$ اور $\frac{di}{dt}$ کا کیا تعلق ہے؟

سوال 7: کارتیسی محد میں نقطہ $(x, 0)$ اور $(0, y)$ کے بیچ فاصلہ $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ وقت کو t سے ظاہر کریں۔

ا. مستقل y کی صورت میں $\frac{ds}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ب. اگر x اور y دونوں متغیر ہوں تب $\frac{ds}{dt}$ کا $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کے ساتھ کیا تعلق ہوگا؟

ج. مستقل s کی صورت میں $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کا کیا تعلق ہوگا؟

سوال 8: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ڈبے کے وتر کی لمبائی $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہو گی۔

ا. فرض کریں x ، y اور z مستقل نہیں ہیں۔ $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

ب. مستقل x کی صورت میں $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

ج. مستقل x کی صورت میں $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

سوال 9: ایک مثلث جس کے ضلع a اور b جن کے بیچ زاویہ θ ہو کا رقبہ $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ ہوگا۔

ا. مستقل a اور b کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ب. مستقل b کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ ، $\frac{da}{dt}$ اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ج. a ، b اور θ غیر مستقل ہونے کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ ، $\frac{da}{dt}$ ، $\frac{db}{dt}$ اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

سوال 10: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس r ہے جس سے اس کا رداس 0.01 cm min^{-1} کی شرح سے بڑھتا ہے۔ جب رداس 50 cm ہو تب تختے کا رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

سوال 11: مستطیل کی لمبائی l اور چوڑائی w کی شرح تبدیلی 2 cm s^{-1} اور 2 cm s^{-1} ہیں۔ جب $l = 12 \text{ cm}$ اور $w = 5 \text{ cm}$ ہو تب شرح تبدیلی (i) رقبہ، (ب) محیط، (ج) وتر کیا ہوں گے؟ ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟

سوال 12: مستطیل ڈبے کا ضلع کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ان کی شرح تبدیلی

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}$$

ہیں۔ جس لمحہ $x = 4$ ، $y = 3$ اور $z = 2$ ہوں اس لمحہ ڈبے کے (i) حجم، (ب) سطحی رقبہ، (ج) وتر $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہوگی؟

سوال 13: دیوار کے ساتھ لگی 4 m لمبی سیڑھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے۔ جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیڑھی کا فاصلہ 3 m ہو اس لمحہ پر سیڑھی کا یہ سر 0.5 m s^{-1} کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

ا. اس لمحے پر سیزھی کا بالائی سرکس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

ب. سیزھی، زمین اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔ اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ج. اس لمحے پر سیزھی اور زمین کے بیچ زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟

جواب: (i) $-\frac{3\sqrt{7}}{14} \text{ m s}^{-1}$ ، (ب) $-\frac{\sqrt{7}}{14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

سوال 14: دو ہوائی جہاز 7000 m کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار 1000 km h^{-1} جبکہ جہاز ب کی رفتار 850 km h^{-1} ہے۔ جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ 50 km اور ب کا فاصلہ 100 km ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 15: ایک لڑکی 300 m بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ ہوا پتنگ کو افقی رخ 25 m min^{-1} کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔ اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ 500 m ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟

سوال 16: پرانے انجن کی بیلن کو خراہ کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا پسٹن ڈالا جاتا ہے۔ خراہ کی مشین بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں $25 \mu\text{m}$ بڑھاتی ہے۔ جب رداس 9.8 cm ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال 17: ریت کو $10 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی $\frac{3}{8}$ ہوتی ہے۔ جب ڈھیر 4 m اونچا ہو اس لمحہ ڈھیر کی (i) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب cm s^{-1} میں دیں۔

سوال 18: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی 6 m اور رداس 45 m ہیں سے پانی کو $50 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔ مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔ (i) جب پانی 5 m گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحے پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب cm s^{-1} میں دیں۔

سوال 19: نصف کرہ جس کا رداس $R = 13 \text{ m}$ ہے سے پانی کا انعکاس $6 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے کیا جاتا ہے۔ پانی کا حجم $H = \frac{\pi}{3} y^2 (3R - y)$ ہے جہاں y پانی کی گہرائی ہے۔

ا. جب پانی کی گہرائی 8 m ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

ب. جب پانی کی گہرائی y ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟

ج. جب پانی 8 m گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 20: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔ فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔ دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔

سوال 21: ایک غبارے میں $100\pi \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے ہیلیم ^{42}He گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس 5 m ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 22: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے 6 m اونچائی سے بحری جہاز کی طرح کھینچا جاتا ہے۔ رسی کو 2 m s^{-1} کھینچا جاتا ہے۔ (i) جب رسی کی لمبائی 10 m ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 23: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ 1 m s^{-1} سے حرکت کرتا ہے۔ جب یہ 65 m بلندی پر پہنچتا ہے ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی 17 m s^{-1} کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال 24: مخروط چھلنی میں بیک وقت وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں $10 \text{ cm}^3 \text{ min}^{-1}$ کی شرح سے بھری جاتی ہے۔ (i) چھلنی میں چائے کی گہرائی 5 cm ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحہ پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟

سوال 25: اخراج قلب جرمی کے اڈولف فک نے 1860 کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس پمپ کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً 7 L min^{-1} خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر 6 L min^{-1} اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب 30 L min^{-1} تک خون خارج کر سکتا ہے۔

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

سے کیا جا سکتا ہے جہاں سانس سے خارج CO_2 کی ملی لٹرن فی منٹ میں مقدار کو Q سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں CO_2 کی کثافت mL/L اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں CO_2 کی کثافت کے فرق کو D سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں $Q = 223 \text{ mL/min}$ اور $D = 97 - 56 = 41 \text{ mL/L}$ کی صورت میں

$$y = \frac{223 \text{ mL/min}}{41 \text{ mL/L}} \approx 5.68 \text{ L/min}$$

ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ جب $Q = 233$ اور $D = 41$ ہوں تب D کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ Q میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی ہے۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟

سوال 26: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ x اشیاء کو $c(x)$ لاگت، $r(x)$ آمدنی اور $p(x) = r(x) - c(x)$ منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔ x اور $\frac{dx}{dt}$ کی درج ذیل قیمتوں کے لئے $\frac{dr}{dt}$ ، $\frac{dc}{dt}$ اور $\frac{dp}{dt}$ کا حساب کریں۔

ا.

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x; \quad \frac{dx}{dt} = 0.1, \quad x = 2$$

ب.

$$r(x) = 70x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{x}; \quad \frac{dx}{dt} = 0.05, \quad x = 1.5$$

سوال 27: ایک ذرہ قطع مکانی $y = x^2$ پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدود 10 ms^{-1} کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مہدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بتاتا ہے۔ جب $x = 3 \text{ m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

