احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفر. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

Vii																										,	يباچ	,
ix																						4	یبادٍ	، کا د	ناب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	•
1																							٠	لمومات	، مع	ابتدائی	1	L
1																		خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																										1.2		
32																							Ĺ	تفاعل		1.3		
54																					غلى	انمذ	م کی	ترسيم		1.4		
74																					بل	نفاء	انی اِنی	بنكوني		1.5		
95																								/		حدود ا	2	•
95																										2.1		
113															٠.		عد	قواه	کے	ئے ۔	_,	پ کر	لاثر	פנ "		2.2		
126																										2.3		
146																										2.4		
165																							ار	استمر		2.5		
184	١.																					Į	ی ز	مماسح		2.6		
199)																									تفرق	3	Ł
199)																				ت ,	تف	K,	تفاعل		3.1	-	
221																•					رں	, زق	ی ہ ِ تفر	عا ر قواعد		3.2		
240																										3.3		
257																										3.4		
277																										3.5		
294																										3.6		
310) .																			ىلى	تبد	ح .	شرر	د گیر		3.7		

عـــنوان

 325 340 340 341 340 341 352 363 364 374 385 386 387 391 44 391 45 46 47 46 47 48 51 52 53 54 55 55 56 57 57 58 58 59 605 605 605 70 7		تفرق کا استعال	4
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 57 59 57 57 59 57 59 59 50 50<td></td><td></td><td></td>			
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 57 59 57 57 59 57 59 59 50 50<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td>	اوسط قیمت	4.2 متله	
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 57 59 57 57 59 57 59 59 50 50<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
 391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر	356	3.1	
418 بیترین بنان 4.6 442 خط بخد کی اور تنو تات 47 خط بخد کی اور تر تات 47 خط بخد کی اور ریانسان نموند کئی 5 477 کسی محلت 5.1 489 کسی محلت 5.2 505 تعلق محلوات، ابتدائی قیت سئلے، اور ریانسانی نموند کئی 5.3 505 محل بدراید شرکی کی تابدر کا الحالی 5.3 516 بحدی عادر الحقی محلی 5.5 534 بدراید شعر محلی 5.6 553 ریمان مجموع عادر الحقی محلی 5.6 578 بیدای محلد 5.7 599 بیدای محلد 5.8 605 بیدای محلد 5.9 605 بیدای محلد 5.10 625 بیدای محلی ادر نوب کلیات والد روز نیت 6.1 629 بیدای محلی ادر نیخ بالی ادر نوب کلیات والد روز کیلی و ادر کی محلی ادر نیال ادر نوب بالی ادر نیخ بالی و ادر کی محلی ادر نیال ادر نوب بالی و ادر کر کر کیت 6.5 687 میدار نیز ادر نوب بالی و نیز بالی بالی و نوب بالی و نیا بالی و نوب بالی و نوب بالی و نوب بالی و نیا بالی و نیز بالی محلی ادا نوب بالی و نوب بالی و نیا بالی و نوب بالی و نیا بالی و نیا بالی و نوب بالی و نیا بالی و نیا بالی و نیا بالی و ن	اور y'' کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442 غط بدی کا اور تو تات 465 خیر توشی کلداد 477 4.8 477 5.1 477 5.1 489 5.1 5.2 تقری ساوات، ابتدائی تیب سنت، اور ریافسیاتی موند شی 5.3 5.2 5.5 کلی بدر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بیر بید ترایی بیر بیر بید بیر بید بیر بید بیر بیر بیر بید بیر			
465 ریب نیوش 4.8 477 کل کا 477 خیر تطبی محملات 5.1 489 خیر تطبی محملات 5.2 5.2 تفری سیدان آبید آئی قیت سلخ، اور ریاضیاتی تموند گشی 5.3 5.3 کل 5.3 5.4 اعداده بذریعہ شامی آبید آئی قیت سلخ، اور ادسط قیت سلخ 5.5 ریمان تجوی عواد رحلط تیت سلخ 5.6 نصوصیات، وتب، اور ادسط قیت سلخ 5.7 نیادی سلخ 5.8 قطبی محمل میں بدل 6.5 اعدادی محمل 6.5 اعدادی محمل 6.5 اعدادی محمل 6.6 محمل محمل الله الله الله الله الله الله الله ال			
477 گل قریق الطاق الله 5.1 489 قریق ساوات، ابتدائی آیت سئط، اور ریاضیاتی موند آشی 5.2 505 تغیلی سرایید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.3 516 تغیلی شریعید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.4 54 اندازه بذر اید شای گموید 5.5 561 تغیادی مسئلد 5.6 578 تغیادی مسئلد 5.7 599 تغیادی مسئلد 5.8 605 تغیادی مسئلد 5.9 605 تغیادی مسئل 5.9 605 تغیادی مسئل 6.1 625 تغیادی مسئل 6.1 629 تغیادی وزاند 6.2 640 مینان کارتج کی کات والا سرحد 6.2 648 تغیال کات کر جم کی حال ال سرح الحال المراح و المرح و المراح و المراح و المرح و المرح و المرا			
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترقی سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.4 516 محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت است بالی ممثلہ 5.5 561 محمد بداری ممثلہ 578 محمد بدار اوسط قیت سئلہ 5.8 579 محمد بداری ممثل میں بدل 605 5.8 5.9 605 اعداد کی محل میں بدل 6.5 625 اعداد کی محل میں بدل 6.5 625 محدینیات کی طاش 6.1 626 محدینیات کی طاش مربر میں بدتے کھارت و الاسم میں بدتے کھارت و اللہ مربر میں اور چیل میں بدل	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترقی سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت اطلاق 5.4 516 محمد بدرایید ترکیب بدل. و نمیری قاعده کا الت است بالی ممثلہ 5.5 561 محمد بداری ممثلہ 578 محمد بدار اوسط قیت سئلہ 5.8 579 محمد بداری ممثل میں بدل 605 5.8 5.9 605 اعداد کی محل میں بدل 6.5 625 اعداد کی محل میں بدل 6.5 625 محدینیات کی طاش 6.1 626 محدینیات کی طاش مربر میں بدتے کھارت و الاسم میں بدتے کھارت و اللہ مربر میں اور چیل میں بدل	477	کیل .	5
489 ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی 505 تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3 516 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.4 534 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور اسط قیت سئلہ 5.5 56 نصوعیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 5.7 578 نیادی سئلہ 5.8 578 نیادی سئلہ 5.8 580 نیادی سئلہ 5.9 605 اعدادی محمل 5.0 605 محمل اللہ 5.0 605 محمل اللہ 5.0 605 محمل محمل اللہ 6.0 605 محمل محمل ہوتے کا گھی ہوتے 6.1 625 محمل محمل ہوتے کہ تھی ہوتے 6.2 629 محمل محمل ہوتے کہ تھی ہوتے 6.3 640 محمل ہوتے کہ تھی ہوتے 6.3 65 محمل ہوتے کہ تھی ہوتے 6.3 660 محمل ہوتے 6.3 670 محمل ہوتے 6.5 687 محمل ہوتے 6.7 788 ہوتے 6.8 799 مدار آئر اور مرکز کیوتی استعال ہوتے 6.9 740 ہوتی مخینے میں ہوتے 6.3 750 ہوتی ہوتے 6.3 750 ہوتے 6.3 750 ہوتے 6.3 750<		•	5
505 کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق 5.3 516 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.4 54 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.5 551 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.6 561 امدازہ بخراید متاباتی تحقیم 5.6 578 امدازہ بخراید متاباتی تحقیم 5.8 579 بخرای میں بدل 5.9 605 اعدادی محقیل 5.0 605 اعدادی محقیل 6.1 625 اعدادی محقیل قرار بجویل 626 معنیات کے تخار بیار ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 640 بدیل ہوتے کلیات والا سرحد 648 بدیل ہولی تحقیل 6.3 663 بدیل ہولے کلیاں کاٹ کر تجمیل وار چھلا 6.3 664 بدیل بیاری تحقیل محقیل میں اور چھلا 6.5 670 معیاد اثر اور مرکز کہتے 6.7 671 میادی اثر اور مرکز کہتے 6.8 731 بدائی قبال اور وقت بیال اور وقت بیال اور وقت بیال اور وقت بیال استعال 7 740 بدائی قبال می استعال 7	ر با		
516 اندازه بذرایید تثانای مجموعها 534 5.5 5.6 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.7 5.8 5.8 5.8 5.8 5.8 5.9 5.9 5.0 605 606 605 606			
534 ريمان مجموع اور قطعي تحمالت 5.5 561 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.6 578 خمادی سئله 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 6.9 605 6.0 6.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.0 605 6.0 6.1 605 6.1 6.1 625 6.1 6.1 629 6.1 6.1 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 640 6.4 6.4 648 6.4 6.5 649 6.6 6.5 650 6.6 6.6 661 6.6 6.6 662 6.6 6.6 663 6.6 6.6 664 6.6 6.6 665 6.6 6.6 666 6.6 6.6 667 6.5 6.6 <td></td> <td></td> <td></td>			
561 فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل 5.6 578 5.7 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 5.9 605 5.9 605 5.10 625 625 6.1 629 5.2 6.1 640 6.2 6.2 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 663 6.4 6.5 664 6.5 6.5 665 6.6 6.6 6.6 670 6.5 6.6 6.7 711 6.7 6.8 731 6.8 6.9 740 6.10 6.5 6.10 6.5 6.6 755 7 10 6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578 بنیادی سئلد 5.7 5,10 5.8 5.8 5.8 5.8 6.0 5.8 6.0 5.9 5.9 6.0 5.9 6.0 5.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.1 6.2 6.2 6.2 6.1 6.2 6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599 قطع کمل میں برل 5.8 605 5.9 605 5.9 605 5.10 625 5.10 625 6.1 629 6.1 640 7 6.2 6.2 6.3 6.2 6.4 6.3 6.5 6.4 6.6 6.5 6.6 6.9 6.7 6.7 7 6.7 7 6.8 7 6.9 6.0 6.0 6.1 6.9 6.9 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و	^ت کمل میں بدل	5.8 قطعی	
 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 625 تاعدہ ذوزنقہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا 6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 میار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 میار اثر اور مرکز کمیت 6.9 وسطانی مرکز 6.7 میار اور قوت سیال اور قوت سیال 6.10 میادرائی تفاعل 			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اتا والا سرحد 6.0 ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 کلیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 گیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.4 ہوائے کے جم ہے قرص اور چھلا 6.5 محفیات کی لمبائیاں 6.6 محفیات کی لمبائیاں 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 کام 731 دیار کی قش اور وقیت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور وقیر سیعال اور وقیر شعولی استعال کے افرائی تفاعل 740 ماورائی تفاعل			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اتا والا سرحد 6.0 ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 کلیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 گیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.4 ہوائے کے جم ہے قرص اور چھلا 6.5 محفیات کی لمبائیاں 6.6 محفیات کی لمبائیاں 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 کام 731 دیار کی قش اور وقیت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور وقیر سیعال اور وقیر شعولی استعال کے افرائی تفاعل 740 ماورائی تفاعل		کا ب	_
629 تدريل ہوتے کليات والا سرحد 640 6.2 640 6.2 6.3 6.4 6.4 6.5 6.5 6.6 6.6 6.6 6.7 6.6 6.8 6.7 711 6.8 731 6.8 740 6.0 755 6.0	0_0		6
640 گیاں کاٹ کر قجم کی طاش 648 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 6.4 676 شوی متحدیات کی لمبائیاں 687 6.6 689 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 67 6.71 711 0.71 68 6.71 716 وسطانی مرکز 6.8 مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال 740 مادرائی نقاعل			
648 اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا 6.3 663 شکلی چھلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.9 699 6.7 6.7 711 6.7 7 688 7.1 6.8 731 6.8 7 740 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 755 ماورائی نقاعل 7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663 بکی چیلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 711 6.7 7 711 6.8 7 710 6.8 7 731 10 6.0 740 6.10 6.10 755 10 6.10 7) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 687 6.5 688 6.6 699 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 6.7 6.7.1 70 6.8 731 8 740 6.10 755 ماورائی تفاعل	•		
687 شطح طواف کا رقبہ 699 6.7 711 6.7 711 6.7.1 716 9 6.8 731 700 6.10 701 6.10 702 6.10 703 6.10 704 6.10 705 6.10 706 6.10 707 6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.7 معیار اثر قبل اور قب سیال 6.9 فشار سیال اور قب سیال 6.9 نشار سیال اور دیگر نمونی استعال 6.10 ماورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.7 معیار اثر قبل اور قب سیال 6.9 فشار سیال اور قب سیال 6.9 نشار سیال اور دیگر نمونی استعال 6.10 ماورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

عـــنوان

قدرتی لوگار تھم	7.2	
قوت نمائی تفاعل	7.3	
807 $\log_a x$ let a^x	7.4	
	7.5	
قاعده گھوپیٹال کی میں میں میں میں میں ہوتی ہوتی ہوتی ہے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔	7.6	
اضافی شرح نمو	7.7	
7.7.1 ترقیمی اور شانی علاش		
الث تكونياتى تفاعل	7.8	
الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9	
ہذالولی تفاعل	7.10	
يك رتبي تفرقی مساوات	7.11	
يوگر كى اعداد كى تركيب؛ ميدان ڈھلوان	7.12	
المريق 43	ا تکمل کے	8
ر تمکن کے بنیادی کلیات	8.1	
تكمل بالحصص		
964	0.2	
974	8.3	
كونياتى بدلُ	8.4	
حبدول کمل اور کمپیوٹر	8.5	
	8.6	
, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	0.0	
ىلىل 1043	! لا مت ناہی ^{تن}	9
اعداد کی ترتیب کی حد	9.1	
ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	9.2	
لامتناي تسلسل	9.3	
غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پر کھ	9.4	
یر غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پر کھ	9.5	
یر منفی اجزاء کے شکسل کا تنابی اور جذری پر کھ	9.6	
بیر کی ابراء کے سطح ما بی اور جدری چرھی ۔		
بدليا مشكل، على اور مشروط ارتفاز	9.7 9.8	
	9.8	
پیر اور مقلان مسلس کا از تکاز؛ خلل کے اندازے	9.9 9.10	
یر من کار نظر: کس کے انداز کے	9.10	
طاق من کے استعمال	9.11	
ھے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد	ا مخروطی ج	0
ے میں مدیر کا ہوتے ہی گئی۔ مخروطی جھے اور دو قدری مساواتیں	10.1	•
ر می تعداد می از در معنون کا جماعت بندی	10.2	

10.3 دو در جی مساوات اور گھومنا	
1261 متادی متحدیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول 1277 معندار معلوم منحنیات 10.6 امساء اور مقدار معلوم منحنیات 10.6 امساء کیرد میں ترسیم 10.7 امساء کیرد میں ترسیم 10.8 امساء کیرد میں ترسیم 10.9 امساء کیر میں ترسیم 1347 مساء کیری سے میں تعلیل جیو میرطری 1347 مساء کیری میں سے میں تعلیل کیری میرسیمیں کیریں سے میں تعلیل کیری سے میں تعلیل کیری کیری سے میں تعلیل کیری سے میں تعلیل کیری کیری سے میں تعلیل کیری کیری کیری کیری کیری سے میں کیری کیری کیری کیری کیری کیری کیری کی	
1291 قطبی محدد 1303 قطبی محدد میں ترسیم 10.7 قطبی محدد میں ترسیم 10.8 10.8 1319 دائرے 10.9 قطبی محدد میں محمل 1333 10.9 1347 مستوی میں شخلیلی جیو میسٹری 1347 مستوی میں سمتیات 1347 11.1	
1291 قطبی محدد 1303 قطبی محدد میں ترسیم 10.7 قطبی محدد میں ترسیم 10.8 10.8 1319 دائرے 10.9 قطبی محدد میں محمل 1333 10.9 1347 مستوی میں شخلیلی جیو میسٹری 1347 مستوی میں سمتیات 1347 11.1	
10.7 قطبی محدد میں ترسیم	
1317 خروط حصول کے قطبی مساوات 1319 10.8.1 1333 ارکے 10.9 10.9 1347 مستیات اور خلا میں خلیلی جیو میٹری 1347 مستوی میں سمتیات 1347 11.1	
10.8.1 دائرے . 10.8.1 1333	
1 سمتیات اور خلا میں تخلیلی جیو میٹری 1347 11.1 مستوی میں سمتیات	
11.1 مستوی میں سمتیات	
11.1 مستوی میں سمتیات	11
	11
ضممه اول	
U/2.	ı
. ضيمه دوم	ب

ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كي

2011 كتوبر _2011

باب 11

سمتیات اور خلامیں تحلیلی جیو میٹری

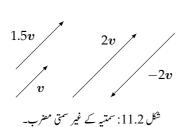
اس حصہ میں سمتیات اور سہ بعدی محددی نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے نقاعل پر غور کے لئے محددی مستوی موزوں ہے، ای طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے نقاعل پر غور کے لئے محددی خلاء موزوں ہے۔ ہم محددی مستوی میں ایک تیمرا محور شامل کر کے محددی خلاء پیدا کرتے ہیں۔ بیہ محود کلا مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

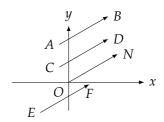
11.1 مستوى مين سمتيات

بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی کھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاو، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہوگی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جانا ہوگا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جمم کا ہٹاو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہوگا جس سمت یہ جم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہوگا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جمم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کرتا ہے اور جمم کی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمتی رفتار بیان کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر کے اس نشان کو سمتیہ کہتے ہیں۔





شکل 11.1: کیسال لمبائی اور کیسال رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: ایک مستوی میں کسی مخصوص رخ خط کو سمتیہ ¹ کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا کیساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

П

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف جبی، مثلاً v، سے ظاہر کیا جائے گا 2 نقطہ A سے نقطہ A تک تیر کو ہم A لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل 11.1 میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک بی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل کھتے ہیں۔

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{EF}$$

غير سمتيه اور غير سمتى مضرب

ہم کی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل 11.2)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگئی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔ وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو مثلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

vector '

 \overline{v} المار کے اللہ کا اللہ کا اللہ کا اللہ کا اللہ کا اللہ کی اللہ کا اللہ کا اللہ کی اللہ کیا جاتا ہے۔ \overline{v} کا اللہ کی اللہ کی

اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور v ایک سمتیہ ہو تب شبت c کی صورت میں v اور c کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی c کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے خالف ہوں گے۔ یبال خقیقی اعداد تبدیلی پیانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی c کہلاتے ہیں۔ c کا غیر سمتی مضرب c کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ 0 حاصل ہو گا، جو ایک نقطہ پر مشتل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گا۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ 0 کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

جيو ميٹريائي مجموعه: قاعده متوازى الاصلاع

 v_1 دو غیر صفر سمتیات v_1 اور v_2 کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر v_1 کا نمائندہ، مثلاً v_1 سے v_2 تاکہ، ترسیم کر کے v_1 اختابی نقطہ v_1 کی v_2 کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (مرم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل v_1 میں v_2 کے برمی کو کسیمتیہ ہوگا۔ یوں اگر اب v_1 کے مرمی کے سرمیتیہ ہوگا۔ یوں اگر

$$v_1 = \overrightarrow{AB}, \quad v_2 = \overrightarrow{BC}$$

ہوں تب

$$v_1 + v_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں v_1+v_2 متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع 5 کہتے ہیں (شکل 11.4)۔

اجزاء

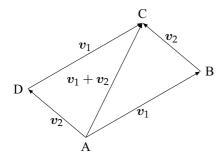
دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب بیہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مصرب ہوں، لینی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ v کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

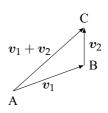
$$v = v_1 + v_2$$

 v_2 اور v_1 اور v_2 سمتیات v_1 اور v_2 سمتی v_3 اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتی v_1 کو اس کے اجزاء v_1 اور v_2 میں تحلیل کیا گیا ہے۔

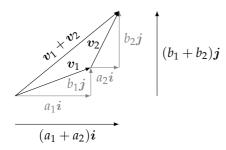
scalar multiple⁴ parallelogram law⁵



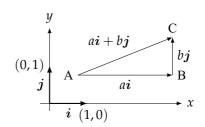
شکل 11.4: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع کیسال لمبائی ہوئے۔ ہوئا متوازی الاضلاع ہوگا۔



شكل 11.3: سمتيات v_1 اور v_2 كا مجموعه شكل



شکل 11.6: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔



شکل 11.5: اساس سمتیات i اور j کو استعال کر کے کسی جمی سمتیہ \overrightarrow{AC} کو ککھا جا سکتا ہے۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کار تیمی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں اساسی x سمتیہ جن کی لمبائی x ہوتی ہے ، کے مصرب ہوتے ہیں۔ مثبت x محرب کو رکے رخ اساسی سمتیہ نقطہ x مصرب اساسی سمتیہ کی علامت x ہے۔ مثبت x محرب کو رکے رخ اساسی سمتیہ نقطہ x مصرب کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت x ہے۔ مثبت x محرب کو رکے رخ اساسی سمتیہ نقطہ x محرب کی علامت x ہے۔ اب غیر سمتی x کے گور x کے محوازی سمتیہ کی لمبائی متنا x کی معرب کی علامت x ہے۔ اب غیر سمتی x کے گور x کے محوازی سمتیہ کی لمبائی x کی میں محرب کی محر

$$v = ai + bj$$

a تعریف: a اور b ہوں گے۔ اعداد v ہوت v اور b اور b کے رخ، سمتیہ v کے اجزاء سمتیات a اور b ہوں گے۔ اعداد b ہوں گے۔

.11.1 مـــتوى مــين سمتيات

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

(11.1)
$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} \quad \Leftrightarrow \quad a = a', \quad b = b'$$

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہول گے جب i اور j کے رخ، ان کے مطابقی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہول۔

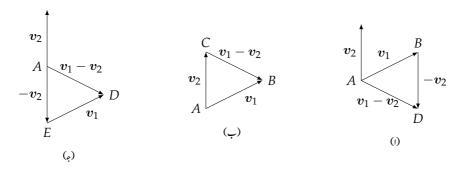
الجبرائي مجموعه

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 11.6)۔

اور
$$v_1=a_1$$
 اور $v_2=a_2$ اور $v_1=a_1$ اور $v_1=a_1$ اور $v_1=a_1$ اور $v_1+v_2=(a_1+a_2)i+(b_1+b_2)j$

اثال 11.2:

$$(2i-4j)+(5i+3j)=(2+5)i+(-4+3)j=7i-j$$



 $v_1 - v_2$ کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔ $v_1 - v_2$

تفريق

 v_2 ہوگا۔ سمتیہ v کا منفی سمتیہ v کا خالف ہوگا۔ اس کی لمبائی v کی لمبائی ہوگا البتہ اس کا رخ v کا خالف ہوگا۔ سمتیہ کو سمتیہ v_1 ہو میٹریائی طور پر ہم v_1 کے سرے v_2 اور v_1 کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم v_1 کے سرے v_2 کر سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل v_1 اس دکھایا گیا ہے جہاں v_2 کے سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل v_1 اس دکھایا گیا ہے جہاں

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = v_1 + (-v_2) = v_1 - v_2$$

 v_1 اور v_2 کے دم مشتر کہ نقطہ پر رکھ کر v_1 اور v_2 ترسیم کر کے v_2 کے سر سے v_1 کے سرتک سمتیہ v_1 اور v_2 ہوگا۔ v_2 اور v_2 بیا گیا ہے۔ جہاں درج ذیل ہے۔ v_1 ہوگا۔ یہ عمل شکل 11.7۔ بیس پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -v_2 + v_1 = v_1 - v_2$$

-(ا-11.7 رشکا v_1-v_2 عاصل کیا جا سکتا ہے (شکل v_1-v_2 عاصل کیا جا سکتا ہے v_1

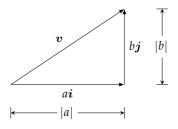
درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

(11.2)
$$v_1 - v_2 = (a_1 - a_2)i + (b_1 - b_2)j$$

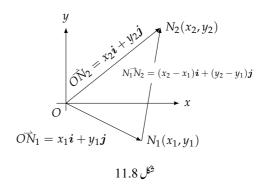
اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

مثال 11.3:

$$(6i+2j)-(3i-5j)=(6-3)i+(2-(-5))j=3i+7j$$



شکل 11.9: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جا سکتی ہے۔



 $\vec{N}_1 = x_1 i + y_1 j$ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $N_2(x_2, y_2)$ کے منتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $N_1(x_1, y_1)$ کے اجزاء کو $\vec{N}_2 = x_2 i + y_2 j$ کے اجزاء کو $\vec{N}_2 = x_2 i + y_2 j$

 $N_2(x_2, y_2)$ سے $N_1(x_1, y_1)$ تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

(11.3)
$$N_1 \dot{N}_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$$

مثال 11.4: نقطہ $N_1(3,4)$ سے نقطہ $N_2(5,1)$ تک سمتیہ درج زیل ہے۔

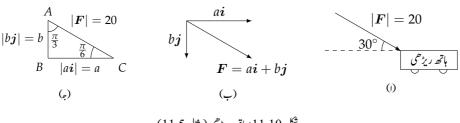
$$N_1 N_2 = (5-3)i + (1-4)j = 2i - 3j$$

مقدار

سمتیہ v=ai+bj کی لمبائی 7 یا مقدار $v=ai+bj=\sqrt{a^2+b^2}$ ہے۔ سمتیہ $v=ai+bj=\sqrt{a^2+b^2}$ کائمہ مثلث پر مسئلہ فیٹاغورث لا گو کرنے سے یہ کلیہ افذ ہوتا ہے (شکل 11.9)۔ سمتیہ کی لمبائی |v| میں دو انتصابی کلیریں وہی ہیں جو مطلق قیت کو ظاہر کرنے کے لئے استعال کی جاتی ہیں۔

(11.4)
$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
 $v = ai + bj$

 $length^7$ magnitude⁸



شكل 11.10: ماتھ ريڑھي (مثال 11.5)

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ 30° زادیہ یہ 20 N کی قوت F سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں (شکل 11.10-۱)۔ قوت کا افتی جزو ریزهی کو حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتصالی جزو ریزهی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افتی اور انتصالی جزو معلوم کریں۔

طل: ہم قوت F=ai+bj اور اس کے اہزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں (شکل 11.10-ب اور شکل 11.10-ج)۔ اس مثلث سے $a=10\sqrt{3}$ اور انتصالی جزو b=10 عاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افتی جزو $10\sqrt{3}i$ اور انتصالی جزو b=10ہو گا۔ انتصابی جزو کا رخ نیجے ہے للذا ہے منفی ہے۔ $F=10\sqrt{3}i-10j$

غير سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور v=ai+bj ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔ $c\mathbf{v} = c(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) = (ca)\mathbf{i} + (cb)\mathbf{j}$ (11.5)

سمتیه cv کی لمبائی سمتیه v کی لمبائی ضرب |c| ہوگا:

$$|c\mathbf{v}| = |(ca)\mathbf{i} + (cb)\mathbf{j}|$$

$$= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2}$$

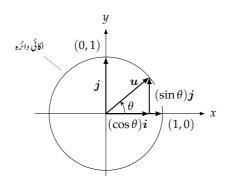
$$= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)}$$

$$= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= |c||\mathbf{v}|$$

یوں اگر $|coldsymbol{v}|=|c||oldsymbol{v}|$ ہو گا۔

.11. مستوی مسین سمتیات



 $u=(\cos heta)i+(\sin heta)j$ کے متوی میں ہر اکائی سمتیہ کو $u=(\cos heta)i+(\sin heta)$

مثال
$$v=-3i+4j$$
 اور $c=-2$ اور $v=-3i+4j$ اور تب ورج زیل ہوگا۔

$$|\mathbf{v}| = |-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|-2\mathbf{v}| = |(-2)(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})| = |6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||\mathbf{v}|$$

صفر سمتيه

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیں 0 کو ظاہر کرنے کے لئے 0 کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

$$|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

اكائى سمتيات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو اکائی سمتیہ 9 کہلائے گا۔ سمتیات i اور j اکائی سمتیات ہیں۔

$$|i| = |1i + 0j| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$
, $|j| = |0i + 1j| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

سمتیہ u جو اکائی سمتیہ i کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل 11.11)۔

(11.6)
$$\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی للذا u مجی اکائی سمتیہ ہوگا لینی:

$$|u| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا $x^2+y^2=1$ کا سر N مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2+y^2=1$ پر چپاتا ہے جو مستوی میں ہر مکنہ رخ کا اکائی سمتیہ وے گا۔

لمبائی اور رخ

v
eq 0 اگر v = 0 ہوتب

$$\left| \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \right| = \left| \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \boldsymbol{v} \right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} |\boldsymbol{v}| = 1$$

ہو گا لہٰذا $\frac{v}{|v|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ ہو گا۔یوں ہم v کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل ککھ سکتے ہیں۔

$$oldsymbol{v} = |oldsymbol{v}| \left(rac{oldsymbol{v}}{|oldsymbol{v}|}
ight)$$

یوں اگر u
eq 0 ہوتب

ا. $rac{v}{|v|}$ اکائی سمتیہ ہوگا جس کا رخ v کا رخ ہوگا۔ یوں ہم $rac{v}{|v|}$ کو رخ کہتے ہیں۔

unit vector⁹

11.1.مـــتوي مـــين سمتيات . 11.1

ب. ماوات |v| وال کر لیا کی المبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔ v=|v| بیان کرتی ہے۔

مثال v=3i-4j مثال مته v=3i-4j مثال مثال مته مثال مته مته v=3i-4j

حل:

$$|v| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$
 يُ لَيِلُ v $\frac{v}{|v|} = \frac{3i - 4j}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$ يُ يَلِ v $v = 3i - 4j = \underbrace{5}_{\hat{b}, l} \left(\underbrace{\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j}_{\hat{b}, l}\right)$

ڈ *هلوان، مماس اور عمود*

کسی نقط پر ایک مفخیٰ کو ایک سمتیہ تب مماسی ¹⁰ یا عصو دی ¹¹ ہو گا جب اس نقطہ پر مفخیٰ کا مماس اور بیہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگل مثال میں ایس سمتیہ کو تلاش کرنا و کھایا گیا ہے۔

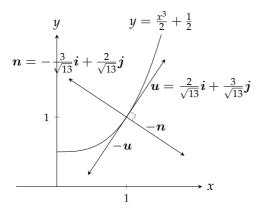
مثال 11.8: نقطه (1,1) پر منحنی $\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}$ کو ممای اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

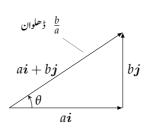
حل: ہم نقط (1,0) پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل 11.13)۔

اس نقطہ پر منحیٰ کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \frac{3x^2}{2}\bigg|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

 $tangent^{10}$ $normal^{11}$





 $oldsymbol{v}=aoldsymbol{i}+a$ بوتب سمتيa
eq 0 بوگري ره طوان $rac{b}{a}$ بوگري ره طوان $rac{b}{a}$ بوگري

شکل 11.13: ایک نقطه پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیه (مثال 11.8)

v اور اس کے ہر غیر صفر مصرب کی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ v=2i+3j اور اس کے ہر غیر صفر مصرب کی ڈھلوان کی کا کی ہے۔ سمتیہ کا ایبا مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v ہو ہم کو کا کیا گیا ہوئی مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v ہو ہم میں کو سمتیہ مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v ہو ہم میں مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v ہو ہم میں مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v ہو ہم میں مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v ہو ہم میں مصرب مصرب میں مصرب میں مصرب کی المبائی کے لئے جس کی لمبائی والم مصرب میں مصرب کی المبائی کے لئے جس کی لمبائی والم کے لئے جس کی لمبائی والم کی المبائی کے لئے جس کی لمبائی والم کے لئے جس کی لمبائی والمبائی کے لئے جس کی المبائی والم کی المبائی والمبائی کے لئے جس کی لمبائی والمبائی کے لئے جس کے لئے جس کی المبائی والمبائی کے لئے جس کی لمبائی والمبائی کے لئے جس کی لمبائی والمبائی کے لئے جس کی لمبائی والمبائی والمبائی کے لئے جس کی لمبائی والمبائی والمبائی کے لئے جس کی لمبائی والمبائی کے لئے کہ میں کے لئے جس کی لمبائی والمبائی کے لئے کہ کے لئے جس کی لمبائی کے لئے کے لئے جس کی لمبائی کے لئے کہ کے لئے کے لئے کہ کے لئے کے لئے کے لئے کہ کے لئے کے لئے کہ کے لئے کہ کے لئے کہ کے لئے کے لئے

$$|v| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

سمتیہ u کی لمبائی 1 ہے اور یہ (1,1) پر مفخیٰ کا مماں ہے۔ درج ذیل سمتیہ

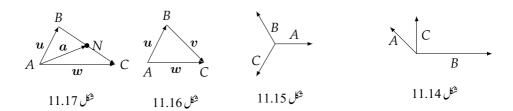
$$-\boldsymbol{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

جو خالف رخ ہے بھی (1,1) پر منحیٰ کا ممال ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی ممالی سمتیہ کو دوسری اکائی ممالی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جاعتی ہے۔

نقطہ (1,1) پر مخنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایبا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان سے کی ڈھلوان کے بالعکس متناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم u کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایبا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$n = -rac{3}{\sqrt{13}}i + rac{2}{\sqrt{13}}j, \qquad -n = rac{3}{\sqrt{13}}i - rac{2}{\sqrt{13}}j$$

1359



یبال بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقط پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں (1,1) پر منحنی کو عمودی ہیں۔

سوالات

جیومیٹری اور حساب سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $m{B}$ ، $m{A}$ اور $m{C}$ کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ وم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

$$\frac{1}{2}A-C$$
 . $A-2B$. $A+B+C$. $A+B$.

سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $m{A}$ ، $m{B}$ ، ور $m{C}$ کو شکل 11.15 میں دکھایا گیا ہے۔ افہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ وم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

$$A-(B-C)$$
 .. $2A-rac{1}{2}B$.. $A+B+C$... $A-B$..

موال $C=\sqrt{3}i-\pi j$ اور B=i+6j ، A=2i-7j کین۔ نتائج کو A=i+b روپ میں لکھیں۔

$$oldsymbol{A}+2oldsymbol{B}$$
 :3 سوال

$$A+B-C$$
 :4 سوال

عوال 5:
$$3oldsymbol{A} - rac{1}{\pi}oldsymbol{C}$$

$$2A - 3B + 32j$$
 :6 سوال

 $v \cdot u$ اور w دیتے ہیں (شکل a a اور b دیتے ہیں (شکل a b a b b a

ا. $oldsymbol{u}$ کو $oldsymbol{u}$ اور $oldsymbol{v}$ کی صورت میں کھیں۔

ب. v کو u اور w کی صورت میں لکھیں۔

سوال 8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات u اور w دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے (شکل a11.17)۔ سمتیہ a کو a اور a کی صورت میں ککھیں۔

سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیہ کو ai+bj روپ میں لکھیں۔ محددی سطح پر مبدا سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

 $N_1(5,7)$ اور $N_2(2,9)$ کے $N_2(2,9)$ تلاش کریں۔

 $N_1(1,2)$ اور $N_1(1,2)$ کے تھ قطع $N_1(1,2)$ تا تاش کریں۔

A(-5,3) اور B(-10,8) کے \overline{B} تطاق کریں۔ A(-5,3) اور

A(-7,-8) اور B(6,11) کی قطع A(-7,-8) علائی کریں۔

 $N_2(-4,3)$ اور $N_3(1,3)$ اور $N_3(1,3)$ اور N_3 قطع N_3 قطع N_3 تلاش کریں جہاں $N_3(1,3)$ اور $N_3(1,3)$ کو ملائے والے قطع کا وسطی نقطہ N_3 ہے۔

وال 15: نقاط C(-1,3) ، B(2,0) ، A(1,-1) ویه C(-1,3) ، وراد تال اور C(-1,3) ، وراد تال اور تال کا مجموعه تلاش کریں۔

اور B(-2,5) اور $\overrightarrow{AB}=4i-2j$ ہیں۔ B(-2,5) اور انظم A

Q(3,3) اور نقط N = -6i - 4j ویا گیا ہے۔نقطہ N = -6i اور نقط N = -6i

ا کائی سمتیات ai+bj روپ میں کریں۔ ان سمتیات کو ai+bj روپ میں کھیں۔

11.1.مـــتوي مـــين سمتيات . 11.1

 $m{u}=(\cos heta)m{i}+(\sin heta)m{j}$ عوال 19: زاویہ $m{\theta}=\frac{2\pi}{3}$ اور $m{\theta}=\frac{2\pi}{3}$ کریں۔ وائرہ $x^2+y^2=1$

 $u=(\cos\theta)i+(\sin\theta)j$ وال $u=(\cos\theta)i+(\sin\theta)$ وال $u=(\cos\theta)i+(\sin\theta)j$ والكي متيات والكي متيان والكي عن غال كريي والكي عن ما كل كريي والكرون والكرون والكي متيام والكرون والكر

سوال 21: سمتی j کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈیئن گھاکر حاصل اکائی سمتی ترسیم کریں۔

سوال 22: سمتی j کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیٹن گھماکر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال 23 اور سوال 24 میں اکائی سمتیہ $u=(\cos heta)i+(\sin heta)$ ای رخ تلاش کریں۔

6i-8j :23 سوال

 $-m{i}+3m{j}$:24 سوال

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے ممائ اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہو گی۔)

$$y = x^2$$
, $(2,4)$:25 $y = x^2$

$$x^2 + 2y^2 = 6$$
, $(2,1)$:26 سوال

$$y = \tan^{-1} x$$
, $(1, \frac{\pi}{4})$:27

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
, $(0,1)$:28 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

سوال 29 تا سوال 32 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے ممای اور عمودی اکائی سمتیہ تلاش کریں۔

$$3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0$$
, $(1,0)$:29

$$x^2 - 6xy + 8y^2 - 2x - 1 = 0$$
, $(1,1)$:30 $(1,1)$

$$y = \int_0^x \sqrt{3 + t^4} \, dt$$
, $(0,0)$:31

 $y = \int_e^x \ln(\ln t) \, \mathrm{d}t, \quad (e, 0) \quad :32$

لمبائي اور رخ

سوال 33 اور سوال 34 میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

5i + 12j :33 سوال

2i-3j :34 سوال

سوال 35: سمتیہ i-4j کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔

 $^{\circ}$ سمتیہ $^{\circ}$ وہ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں $^{\circ}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ طاش کریں جس کی لمبائی $^{\circ}$ ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں $^{\circ}$

سوال 37: وکھائیں کہ A=3i+6 اور B=-i-2j اور B=-i-2j ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

رن ایک دوسرے جیتے ہیں۔ $B=rac{1}{2}i+j$ اور A=3i+6 کے رخ ایک دوسرے جیتے ہیں۔ A=3i+6

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: آپ ایک ریزهی کو قوت F سے کھنچی رہے ہیں جس کی مقدار $|F|=10\,\mathrm{N}$ ہے۔زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ x اور y اجزاء تلاش کریں۔

سوال 40: پٹنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ °45 زاویہ پر 5 N قوت سے کھینچی ہے۔ اس قوت کے افقی اور انتصابی اجزاء تلاش کریں۔

eta اور B=i+j ، A=2i+j بیل دالیے غیر سمتیات B=i+j ، A=2i+j بیل دالیے A=lpha اور کا A=lpha

A= عوال 42= سمتیات C=i+j اور B=2i+3j ، A=i-2j دیے گئے ہیں۔ سمتی عوال 42= A_1 سمتی A_2 سمتی A_2 متوازی اور A_1 سمتی A_2 سمتی A_3 سمتی A_4 سمتی A_4 سمتی A_5 سمتی A_5

سوال 43: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شال کی طرف 60° پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لئے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھنے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، شبت x محور پر مشرق اور شبت y محور پر شال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنے کا مقام تلاش کریں۔

سوال 44: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، ٹال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد بیہ مغرب سے 30° داویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھنے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xx کے مبدا پر گھونسلا، بثبت x محور پر مشرق اور مثبت ب کور پر شال رکھ (۱) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنے کا مقام تلاش کریں۔

سوال 45: مستوی میں v ایک سمتیہ ہے جو y محور کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ v کی ڈھلوان اور سمتیہ v کی ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ضمیمها ضمیمه اول

ضمیمه بروم