احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 2

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکونیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں با ضابطہ وضع کرتے ہیں۔ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔تفاعل کی تفرق، جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 1: ایک پتھر $100\,\mathrm{m}$ اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے دارانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔یوں پہلی t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

(الف) پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2-0} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔

(ب) پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(1)^2}{2-1} = 14.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔ □

مثال 2: پتھر کی رفتار $t = 1\,\mathrm{s}$ اور $t = 2\,\mathrm{s}$ پر تلاش کریں۔

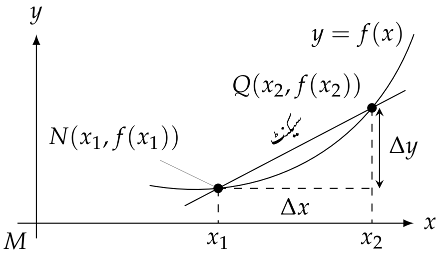
حل: ہم وقتی وقفہ $[t_0, t_0 + h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا درج بالا کلیہ میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے "لمحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔یوں $t_0 = 1$ اور $t_0 = 2$ کے لئے $h = 0.1, 0.01, \cdots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

h	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ کے لئے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ پر پتھر کی رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔اسی طرح $t_0 = 2$ پر پتھر کی رفتار $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ نظر آئے گی۔ □



شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

اوسط شرح تبدیلی اور سیکنٹ خطوط

x کے لحاظ سے تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1, x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی h $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1, x_2]$ پر $y = f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

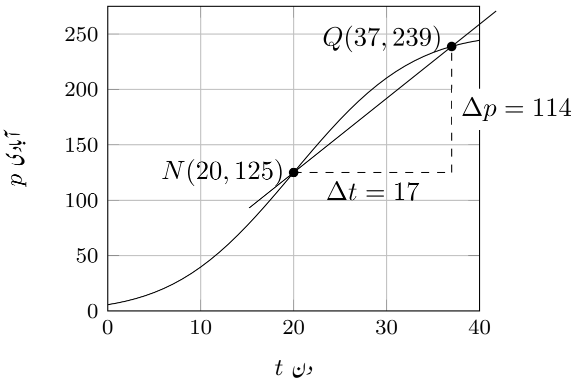
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گزرتے ہوئے خط کو ترسیم کا **سیکنٹ**[1] کہتے ہیں۔یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

مثال 3: نمو آبادی کی اوسط شرح
ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

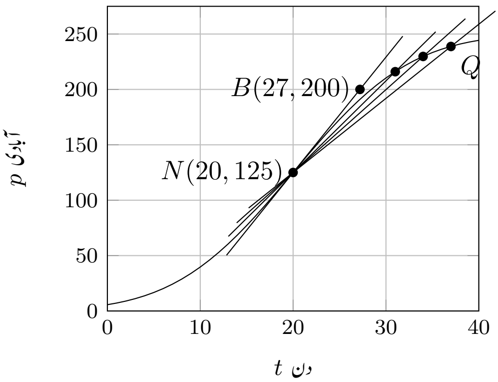
حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔یوں $37 - 20 = 17$ دنوں میں آبادی میں $239 - 125 = 114$ تبدیل رونما ہوئی۔یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7(\text{مکھیاں فی دن})$$

[1] secant



شکل 2.2: مکھی کی نمو آبادی



شکل 2.3: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔ □

درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

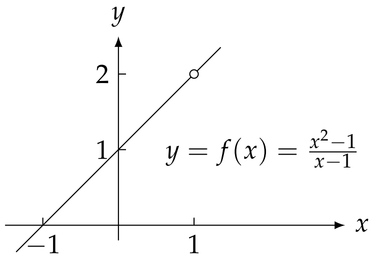
مثال 4: مثال 3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
$(37,239)$	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
$(35,230)$	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
$(32,216)$	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
$(27,200)$	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو چھوتا ہے۔اس خط کو دیے گئے منحنی کا **مماس**[2] کہتے ہیں۔اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 مکھیاں فی دن ہو گی۔ □

[2]tangent



شکل 2.4: شکل برائے مثال 5

لمحہ $t=1$ اور لمحہ $t=2$ پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو **لمحاتی شرح تبدیلی**[3] کہتے ہیں۔جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لمحاتی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔لمحاتی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم **حد**[4] کہتے ہیں۔

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5: تفاعل $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ نقطہ $x=1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟
حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x=1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے f تعین کرتا ہے۔کسی بھی $x\neq 1$ کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1 \qquad (x\neq 1)$$

یوں خط $y=x+1$ جس سے نقطہ $x=1$ یعنی $(1,2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

[3] instantaneous rates of change
[4] limits

$x(\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \ (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 تک پہنچنے سے $f(x)$ کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا x ایک تک پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

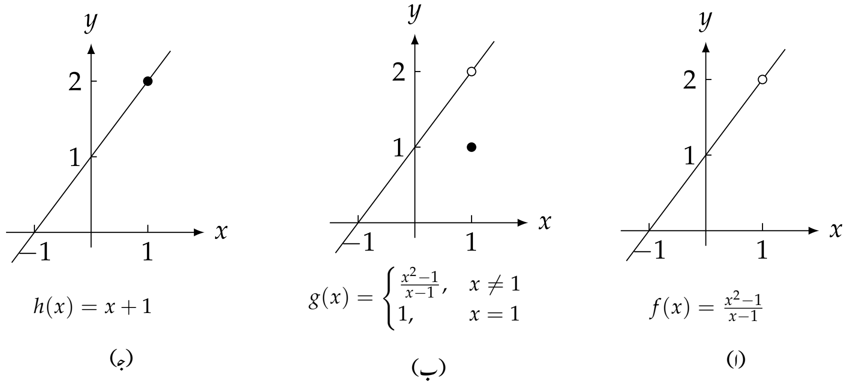
x کی قیمت x_0 تک پہنچنے کو $x \to x_0$ لکھا جاتا ہے۔ □

تعریف: **حد کی غیر رسمی تعریف**
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ پر تفاعل $f(x)$ معین ہے جبکہ عین نقطہ x_0 پر $f(x)$ غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لئے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 تک پہنچنے سے f کی قیمت **حد** L تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراد پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد $10\,\mu\text{m}$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف جلد پیش کریں گے۔

مثال 6: $x \to x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجودیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں f کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تفاعل g کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تفاعل h کا $x \to 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں یعنی $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$۔ □



شکل 2.5: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$

بعض اوقات $\lim_{x\to x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔اس کی مثال تفاعل $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور تکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہو۔

مثال 7:

ا. $\lim_{x\to 2}(4) = 4$

ب. $\lim_{x\to 13}(4) = 4$

ج. $\lim_{x\to 3} x = 3$

د. $\lim_{x\to 2}(5x-3) = 10-3 = 7$

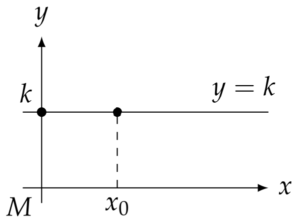
ہ. $\lim_{x\to -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3}$

□

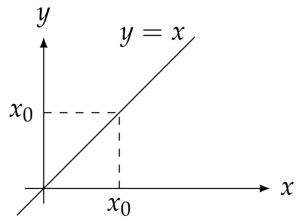
مثال 8:

ا. اگر f مماثلی تفاعل $f(x) = x$ ہو تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ل)۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$



(ب) مستقل تفاعل



(ا) مماثل تفاعل

شکل 2.6: اشکال برائے مثال 7

ب. اگر f مستقل تفاعل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k$$

□

مثال 9: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔
درج ذیل تفاعل کا $x \to 0$ پر رویہ کیسا ہو گا؟

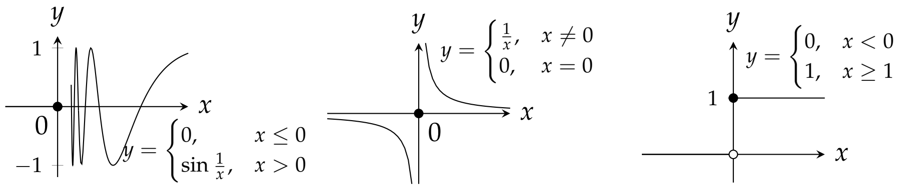
ا. $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

ب. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ج. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

حل:

ا. اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ کا $x \to 0$ پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تفاعل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لئے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لئے U کی قیمت 1 ہے۔یوں 0 کے قریب پہنچنے سے U کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔



(ا) اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ (ب) $g(x)$ (ج) $f(x)$

شکل 2.7: اشکال برائے مثال 9

ب. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

□

سوالات 2.1

ترسیم سے حد

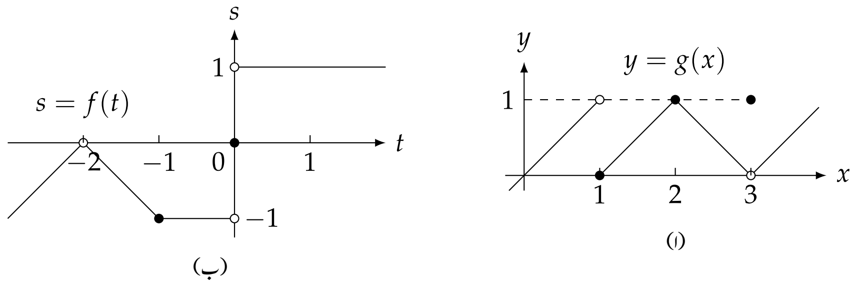
سوال 1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{x\to 1} g(x)$ ب. $\lim_{x\to 2} g(x)$ ج. $\lim_{x\to 3} g(x)$

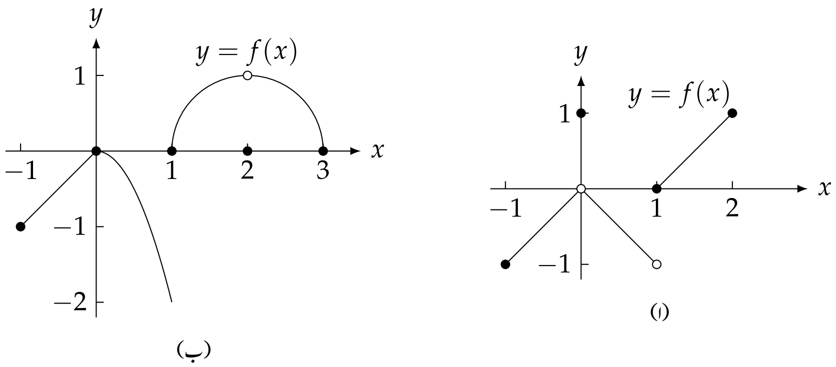
سوال 2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{t\to -2} f(t)$ ب. $\lim_{t\to -1} f(t)$ ج. $\lim_{t\to 0} f(t)$

سوال 3: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ا) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟



شکل 2.8: اشکال برائے سوال 1 اور سوال 2



شکل 2.9: اشکال برائے سوال 3 اور سوال 4

ا. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے

ب. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ج. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

د. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

ہ. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

و. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے

سوال 4: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

ا. $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود نہیں ہے

ب. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

ج. $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے

د. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

ہ. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(1,3)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

وجودیت اور حد

سوال 5 اور سوال 6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

سوال 5: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

سوال 6: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

سوال 7: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x\to x_0} f(x)$ کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 8: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1,1]$ میں تمام x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 9: اگر $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟ اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

سوال 10: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ لازماً موجود ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ لازماً ہو گا؟ کیا ہم $\lim_{x\to 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11: $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $x = -3.1, -3.01, -3.001, \cdots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔ اس جدول سے $\lim_{x\to -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس نقاط $x = -2.9, -2.99, \cdots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. تفاعل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \to -3$ کے لئے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

سوال 12: $g(x)=\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینی قیمتوں $x=1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ پر تفاعل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0=\sqrt{2}$ کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ $x\to\sqrt{2}$ کے لئے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 13: $G(x)=\frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $x=-5.9, -5.99, -5.999, \cdots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x\to -6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس $x=-6.1, -6.01, -6.001, \cdots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہو گا؟

ب. G کو $x_0=6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x\to -6$ کے لئے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 14: $h(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$ لیں۔

ا. نقاط $x=2.9, 2.99, 2.999, \cdots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to 3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کے برعکس $x=3.1, 3.01, 3.001, \cdots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. $x_0=3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x\to 3$ کے لئے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to 3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 15: $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|-1}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to -1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -1$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 16: $F(x) = \frac{x^2+3x+2}{2-|x|}$ لیں۔

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -2$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to -2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -2$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -2} F(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 17: $g(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ لیں۔

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 18: $G(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ لیں۔

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $t_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{t\to 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $x \to 1$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 20: $f(x) = \frac{3^x-1}{x}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $x \to 0$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 21 تا سوال 28 میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو تفاعل میں پر کرتے ہوئے تفاعل کی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x\to 2} 2x$

سوال 22: $\lim_{x\to 0} 2x$

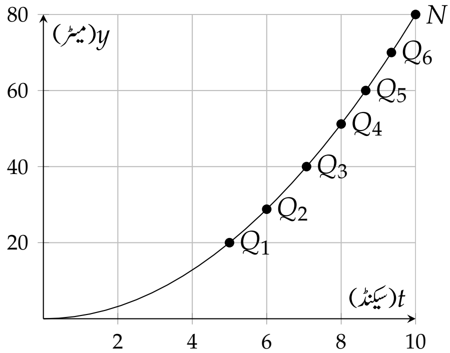
سوال 23: $\lim_{x\to \frac{1}{3}} (3x-1)$

سوال 24: $\lim_{x\to 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال 25: $\lim_{x\to -1} 3x(2x-1)$

سوال 26: $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 27: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sin x$



شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم

سوال 28: $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے وقفہ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

سوال 29: $f(x) = x^3 + 1$؛ (الف) $[2, 3]$، (ب) $[-1, 1]$

سوال 30: $g(x) = x^2$؛ (الف) $[-1, 1]$، (ب) $[-2, 0]$

سوال 31: $h(t) = \cos t$؛ (الف) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$، (ب) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

سوال 32: $g(t) = 2 + \cos t$؛ (الف) $[0, \pi]$، (ب) $[-\pi, \pi]$

سوال 33: $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ ؛ $[0, 2]$

سوال 34: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ ؛ $[1, 2]$

سوال 35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ NQ_1 ، NQ_2 ، $\cdots$ ، NQ_6 کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10\,\mathrm{s}$ پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔(الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے 1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

سوال 37: تفاعل $F(x)=\frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x=2$ ، $\frac{11}{10}$ ، $\frac{101}{100}$ ، $\frac{1001}{1000}$ ، $\frac{10001}{10000}$ اور $x=1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔(الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $x\neq 1$ کے لئے وقفہ $[1,x]$ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔ (ب) $x=1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 38: $x\geq 0$ کے لئے $g(x)=\sqrt{x}$ لیں۔

ا. وقفہ $[1,2]$ ، $[1,1.5]$ اور $[1,1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h=0.1,0.01,0.001,0.0001,0.00001$ کے لئے x کے لحاظ سے وقفہ $[1,1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x=1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h\to 0$ کے لئے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 39: $t\neq 0$ کے لئے $f(t)=\frac{1}{t}$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t=2$ تا $t=3$ اور (ب) وقفہ $t=2$ تا $t=T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T=2.1$ ، $T=2.01$ ، $T=2.001$ ، $T=2.0001$ ، $T=2.00001$ اور $T=2.000001$ ، کے لئے وقفہ $[2,T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t=2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \to 2$ کے لئے تلاش کریں۔($T = 2$ پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال 40 تا سوال 45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔(الف) نقطہ x_0 کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر تفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 40: $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

سوال 41: $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2}$

سوال 42: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

سوال 43: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

سوال 44: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$

سوال 45: $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3-3\cos x}$

2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔پہلے تین مسئلے مثال 8 کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 1: حد کے خواص
اگر $\lim_{x\to c} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ہوں، جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = L+M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = L-M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to c} kf(x) = kL$ (k مستقل عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $M\neq 0$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ہو گا بشرطیکہ $L^{\frac{m}{n}}$ حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا مجموعہ ہو گا۔
2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا فرق ہو گا۔
3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہو گا۔
5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل تقسیم ہو گا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔
6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہو گا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ ا میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 1: $\lim_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}$ تلاش کریں۔

حل: مثال 8 کے نتائج $\lim_{x\to c} x = c$ اور $\lim_{x\to c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

ا. $\lim_{x\to c} x^2 = (\lim_{x\to c} x)(\lim_{x\to c} x) = c\cdot c = c^2$ حاصل ضرب یا طاقت

ب. $\lim_{x\to c}(x^2+5) = \lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5 = c^2+5$ مجموعہ اور (ا)

ج. $\lim_{x\to c} 4x^2 = 4\lim_{x\to c} x^2 = 4c^2$ ضرب مستقل اور (ا)

د. $\lim_{x\to c}(4x^2-3) = \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 = 4c^2-3$ فرق اور (ج)

ہ. $\lim_{x\to c} x^3 = (\lim_{x\to c} x^2)(\lim_{x\to c} x) = c^2\cdot c = c^3$ حاصل ضرب اور (ا) یا طاقت

و. $\lim_{x\to c}(x^3+4x-3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c}(4x^2-3) = c^3+4c^2-3$ مجموعہ، (ج) اور (د)

ز. $\lim_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)}{\lim_{x\to c}(x^2+5)} = \frac{c^3+4c^2-3}{c^2+5}$ حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب)

□

مثال 2: $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3}$ تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3} &= \sqrt{4(-2)^2-3} \\ &= \sqrt{16-3} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

مثال 1-د اور $n=\frac{1}{2}$ کے ساتھ قاعدہ طاقت

□

مسئلہ 1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x\to c$ کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں۔ ناطق تفاعل کا حد $x\to c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2: **کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا**
اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

مسئلہ 3: **غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا**
فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c) \neq 0$ ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 3:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5} = \frac{0}{6} = 0$$

یہ ایک ہی قدم میں مثال 1 کا حل ہے۔ □

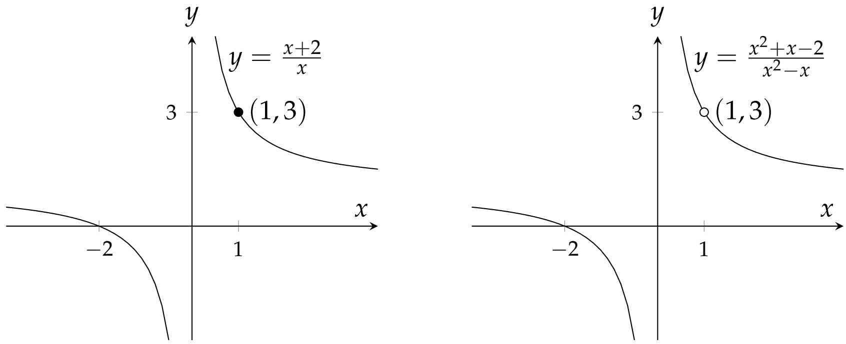
صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے اسقاط

مسئلہ 3 ناطق تفاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تفاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹتے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پر کرنے سے حد حاصل کیا جا سکتا ہے۔درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x = 1$ پر صفر ہیں۔یوں $(x-1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جا سکتا ہے۔

مثال 4: یکساں جزو کی منسوخی
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $x = 1$ پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہو گا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے۔البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$$



(ب) (ا)

شکل 2.11: ماسوائے نقطہ $(1,3)$ کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

اب $x \neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

شکل 2.11 میں $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ اور $y = \frac{x+2}{x}$ کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔یہ ترسیم صرف نقطہ $(1,3)$ پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔البتہ اس نقطہ پر دونوں تفاعل کا حد ایک جیسا ہے۔ $\square$

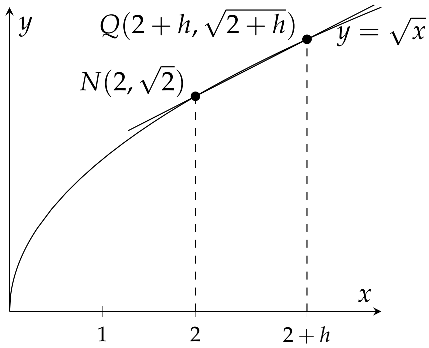
مثال 5: ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا

$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $h = 0$ پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نم اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق[5] $\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔نسب نما میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} && \text{مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} && \text{جس کو ہم کاٹتے ہیں}
\end{aligned}$$

[5] conjugate expression



شکل 2.12: $N \to Q$ کرنے سے سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے

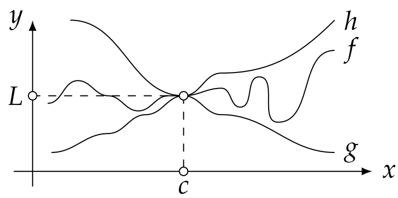
یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}} && \text{نسب نما اب } h=0 \text{ پر صفر نہیں ہے} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

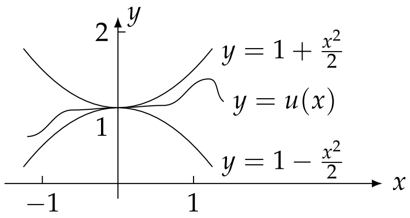
دھیان رہے کہ تفاعل $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ درحقیقت تفاعل $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2, \sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h, \sqrt{2+h})$ کے بیچ سیکنٹ کی ڈھلوان ہے اور $0 \to h$ کرنے سے مراد $N \to Q$ ہے۔نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ہم نے دیکھا کہ اس سیکنٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □

مسئلہ بیچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔اس کو مسئلہ بیچ اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل f سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل g اور تفاعل h کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تفاعل کے بیچ پھنسے ہوئے تفاعل کی قیمت L ہو گی (شکل 2.13)۔اس کا ثبوت ضمیمہ ا میں دیا گیا ہے۔



شکل 2.13: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔



شکل 2.14: شکل برائے مثال 6

مسئلہ 4: **مسئلہ بیچ**
فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو، میں (ممکن ہے کہ) ماسوائے $x = c$ پر تمام x کے لئے

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

ہے۔مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

ہے۔تب $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ہو گا۔

مثال 6: اگر تمام $x \neq 0$ کے لئے $1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} u(x)$ تلاش کریں۔
حل: چونکہ

$$\lim_{x\to 0}(1 - \frac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0}(1 + \frac{x^2}{2}) = 1$$

ہیں لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل 2.14)۔ □

مثال 7: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x\to c} \left| f(x) \right| = 0$ ہو تب $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ہو گا۔
حل: چونکہ $-\left| f(x) \right| \le f(x) \le \left| f(x) \right|$ ہے، اور $-\left| f(x) \right|$ اور $\left| f(x) \right|$ کا حد 0 ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $f(x)$ کا حد بھی 0 ہو گا۔ □

سوالات 2.2

حد کا حساب

سوال 1 تا سوال 16 میں حد تلاش کریں۔

سوال 1: $\lim_{x\to -7}(2x+5)$

سوال 2: $\lim_{x\to 12}(10-3x)$

سوال 3: $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$

سوال 4: $\lim_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$

سوال 5: $\lim_{t\to 6}8(t-5)(t-7)$

سوال 6: $\lim_{s\to \frac{2}{3}}3s(2s-1)$

سوال 7: $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$

سوال 8: $\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-7}$

سوال 9: $\lim_{y\to -5}\frac{y^2}{5-y}$

سوال 10: $\lim_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 11: $\lim_{x\to -1}3(2x-1)^2$

سوال 12: $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

سوال 13: $\lim_{y\to -3}(5-y)^{\frac{4}{3}}$

سوال 14: $\lim\limits_{z\to0}(2z-8)^{\frac{1}{3}}$

سوال 15: $\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

سوال 16: $\lim\limits_{h\to0}\frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال 17 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 17: $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}$

سوال 18: $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال 19: $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}$

سوال 20: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال 21: $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2+t-2}{t^2-1}$

سوال 22: $\lim\limits_{t\to-1}\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال 23: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

سوال 24: $\lim\limits_{y\to0}\frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال 25: $\lim\limits_{u\to1}\frac{u^4-1}{u^3-1}$

سوال 26: $\lim\limits_{v\to2}\frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال 27: $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

سوال 28: $\lim\limits_{x\to4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

سوال 29: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

سوال 30: $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

قواعد حد کا استعمال

سوال 31: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ 1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0}(f(x)+7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)}\\
&= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)}\\
&= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

سوال 32: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$ ہیں۔ مسئلہ 1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} &= \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{(\lim_{x\to 1} p(x))(\lim_{x\to 1}(4-r(x)))} && \text{(ب)}\\
&= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{(\lim_{x\to 1} p(x))(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x))} && \text{(پ)}\\
&= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

سوال 33: $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ اور $\lim_{x\to c} g(x) = -2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$

ب. $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

ج. $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x))$

د. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

سوال 34: $\lim_{x\to 4} f(x)=0$ اور $\lim_{x\to 4} g(x)=-3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$

ب. $\lim_{x\to 4} xf(x)$

ج. $\lim_{x\to 4}(g(x))^2$

د. $\lim_{x\to 4} \frac{g(x)}{f(x)-1}$

سوال 35: $\lim_{x\to b} f(x)=7$ اور $\lim_{x\to b} g(x)=-3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$

ب. $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

ج. $\lim_{x\to b} 4g(x)$

د. $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$

سوال 36: $\lim_{x\to -2} p(x)=4$ ، $\lim_{x\to -2} r(x)=0$ اور $\lim_{x\to -2} s(x)=-3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x))$

ب. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

ج. $\lim_{x\to -2} \frac{-4p(x)+5r(x)}{s(x)}$

اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لمحاتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنا یہ احصاء میں عموماً درپیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

سوال 37 تا سوال 42 میں اس حد کو دیے گئے x پر تفاعل $f(x)$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 37: $f(x)=x^2, \quad x=1$

سوال 38: $f(x)=x^2, \quad x=-2$

سوال 39: $f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$

سوال 40: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = -2$

سوال 41: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$

سوال 42: $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$

مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 43: اگر $-1 \le x \le 1$ کے لئے $\sqrt{5-2x} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} f(x)$ تلاش کریں۔

سوال 44: اگر تمام x کے لئے $2 - x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ ہو تب $\lim_{x\to 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال 45: (الف) یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x}$$

(ب) $-2 \le x \le 2$ کے لئے $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ ، $y = \frac{x \sin x}{2-2\cos x}$ اور $y = 1$ ترسیم کریں۔ $x \to 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

سوال 46: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لئے مطمئن ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(ب) $-2 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$ ، $y = \frac{1-\cos x}{x^2}$ اور $y = \frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ان ترسیم کا رویہ $x \to 0$ کرتے ہوئے کیسا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر $[-1,1]$ میں x کے لئے $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ اور $x < -1$ اور $x > 1$ کے لئے $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x\to c} f(x)$ خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 48: فرض کریں کہ تمام $x \neq 2$ کے لئے $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5$ ہے۔کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا $f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x\to 2} f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہات پیش کریں۔

سوال 49: اگر $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$ ہو تب $\lim_{x\to 4} f(x)$ کیا ہو گا؟

سوال 50: اگر $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (ب) $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال 51: (الف) اگر $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$ ہو تب $\lim_{x\to 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
(ب) اگر $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 4$ ہو تب $\lim_{x\to 2} f(x)$ کیا ہو گا؟

سوال 52: اگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to 0} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گے؟

کمپیوٹر

سوال 53: (الف) $\lim_{x\to 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 54: (الف) $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x\to 0} h(x)$ تلاش کریں۔
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبرا سے حاصل کریں۔

2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہو گی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دارومدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مستری انجن کی نلی کا قطر $50\ \mu\text{m}$ درستگی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

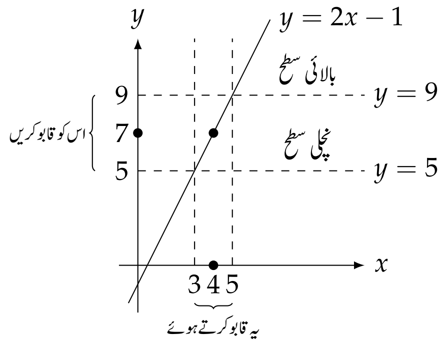
مثال 1: خطی تفاعل قابو کرنا
تفاعل $y = 2x - 1$ کے خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟
حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لئے $\left|y - 7\right| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $\left|y - 7\right|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\left|y - 7\right| = \left|(2x - 1) - 7\right| = \left|2x - 8\right|$$

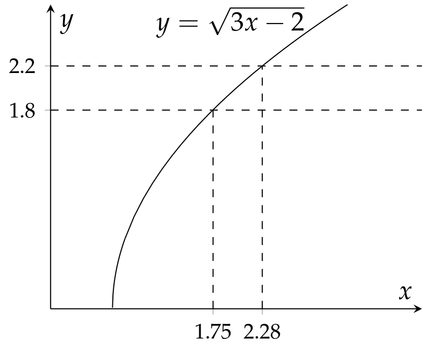
یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $\left|2x - 8\right| < 2$ کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\left|2x - 8\right| &< 2 \\
-2 < 2x - 8 &< 2 \\
6 < 2x &< 10 \\
3 < x &< 5 \\
-1 < x - 4 &< 1
\end{aligned}$$

x کو $x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □



شکل 2.15: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 1)



شکل 2.16: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔

ٹیکنالوجی

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جا سکتے ہیں۔ درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور نچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی لکیروں سے ظاہر کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفہ میں تفاعل کا رویہ دیکھا جا سکتا ہے۔

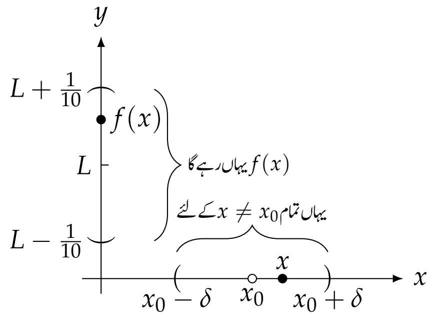
مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x-2}$ کے ترسیم پر y محور کے مطلوبہ وقفہ $(1.8, 2.2)$ پر غور کریں۔ یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل 2.16)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ $(1.98, 2.02)$ اور $(1.9998, 2.0002)$ پر بھی تفاعل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2: 6 cm اندرونی قطر کے ایک لٹر پیمائشی پیالے پر 1 mm وقفہ پر افقی لکیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔
پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ ایک لٹر $(1000\,\mathrm{cm}^3)$ پانی ناپنے کی خاطر h کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل $1\,\%$ سے کم ہونا چاہیے۔
حل: ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \le 10$$

یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہو گی۔

$$\begin{aligned}
|36\pi h - 1000| &\le 10 \\
-10 \le 36\pi h - 1000 &\le 10 \\
990 \le 36\pi h &\le 1010 \\
\tfrac{990}{36\pi} \le h &\le \tfrac{1010}{36\pi} \\
8.8 \le h &\le 8.9
\end{aligned}$$



شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم

یوں $1\,\%$ درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1\,\text{cm}$ یعنی $1\,\text{mm}$ ہے۔پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر افقی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مائع ناپنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ $\square$

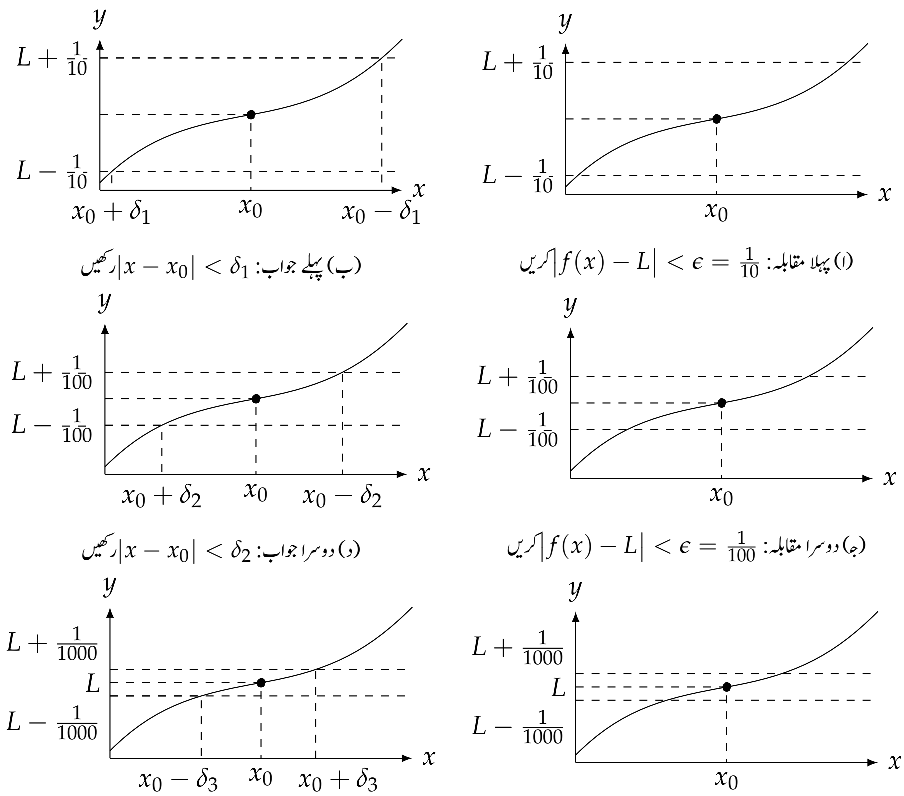
حد کی باضابطہ تعریف

مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \to x_0$ کرنے سے $f(x)$ کا حد L حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہو گی (شکل 2.17)۔البتہ اتنا جاننا کافی نہیں ہے چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھراتی ہو۔

ہمیں سے کہا جا سکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100{,}000}$ ہے۔ہر مرتبہ ہم x_0 کے ارد گرد ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جا سکتا ہے۔البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جا سکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھر تھراہٹ کا شکار ہوتے ہوئے L تک نہ پہنچتی ہو۔

شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔شکی انسان قابل قبول چھوٹ ϵ چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔



(ا) پہلا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں

(ب) پہلے جواب: $|x - x_0| < \delta_1$ رکھیں

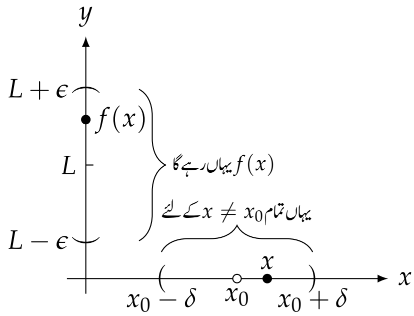
(ج) دوسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں

(د) دوسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_2$ رکھیں

(ہ) تیسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں

(و) تیسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_3$ رکھیں

شکل 2.18: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ



شکل 2.19: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لئے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی قریب ہو گی۔

تعریف: **حد کی با ضابطہ تعریف**
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں $f(x)$ معین ہے جبکہ نقطہ x_0 پر عین ممکن ہے کہ $f(x)$ معین نہ ہو۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ آپ خراد کی مشین پر قطر L کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔ اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج نہیں دیتی ہے لہٰذا آپ کو $f(x)$ قطر یعنی $L-\epsilon$ اور $L+\epsilon$ کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہو گا۔ دھرا کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لئے x کو قابو میں رکھنا ضروری ہو گا لہٰذا x کو $x-\delta$ اور $x+\delta$ کے بیچ رکھنا ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ ϵ کم کی جائے، آپ کو ویسے ویسے δ کو درست کرنا ہو گا۔

تعریف کو پرکھنے کی مثالیں

حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی ہے البتہ اس سے حد کی درستگی کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 3: دکھائیں کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$ ہے۔

حل: حد کی تعریف میں $x_0 = 1$ ، $f(x) = 5x - 3$ اور $L = 2$ لیں۔کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہمیں موزوں $\delta > 0$ تلاش کرنا ہو گا تا کہ اگر $x \neq 1$ ہو اور $x_0 = 1$ سے x کا فاصلہ δ سے کم ہو یعنی اگر

$$0 < |x - a| < \delta$$

ہو تب $L = 2$ سے $f(x)$ کا فاصلہ ϵ سے کم ہو گا یعنی:

$$\left|f(x) - 2\right| < \epsilon$$

ہم ϵ کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے δ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\left|(5x-3)-2\right| &= |5x-5| < \epsilon\\ 5|x-1| &< \epsilon\\ |x-1| &< \frac{\epsilon}{5}\end{aligned}$$

یوں ہم $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ لے سکتے ہیں (شکل 2.20)۔اب اگر $0 < |x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\left|(5x-3)-2\right| = |5x-5| = 5|x-1| < 5(\tfrac{\epsilon}{5}) = \epsilon$$

اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$ ہے۔

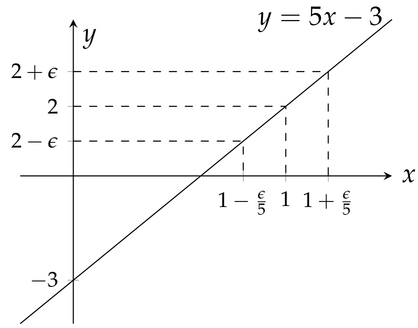
$\delta = \frac{\epsilon}{5}$ وہ واحد قیمت نہیں ہے جس کے لئے $0 < |x-1| < \delta$ سے مراد $|5x-5| < \epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔ δ کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لئے بھی $0 < |x-1| < \delta$ سے مراد $|5x-5| < \epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔حد کی تعریف بہترین δ کی بات نہیں کرتی ہے بلکہ δ کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو کی بات کرتی ہے۔ □

مثال 4: دو اہم حد

تصدیق کریں: (ا) $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ (ب) $\lim_{x\to x_0} k = k$ جہاں k مستقل ہے۔

حل: (ا) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا $\delta > 0$ تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لئے

$0 < |x - x_0| < \delta$ سے مراد $|x - x_0| < \epsilon$ ہو۔



شکل 2.20: تفاعل $f(x) = 5x - 3$ کے لئے $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{5}$ کی صورت میں $\left|f(x) - 2\right| < \epsilon$ ہو گا (مثال 3)۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ δ کی قیمت ϵ کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل 2.21-ا)۔ یوں ثابت ہو کہ $\lim_{x\to x_0} = x_0$ ہے۔

(ب) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا δ تلاش کرنا ہے کہ ہر x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{سے مراد} \quad |k-k| < \epsilon \quad \text{ہو۔}$$

چونکہ $k - k = 0$ ہے لہٰذا کسی بھی مثبت عدد کو δ لیا جا سکتا ہے (شکل 2.21-ب)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to x_0} k = k$ ہے۔ □

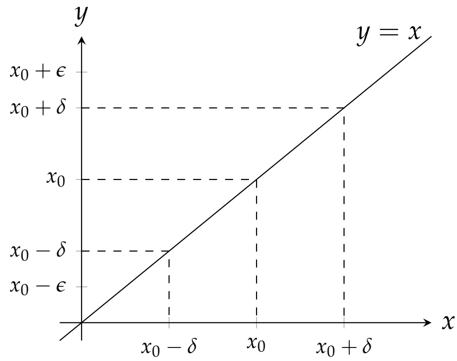
دیے گئے ϵ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

مثال 3 اور مثال 4 میں x_0 کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر $\left|f(x) - L\right|$ کی قیمت ϵ سے کم تھی x_0 کے لحاظ سے تشاکلی تھا۔ یوں ہم δ کو وقفہ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشاکل نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا ہے، ہم x_0 سے وقفے کے قریبی سر تک فاصلے کو δ لے سکتے ہیں۔

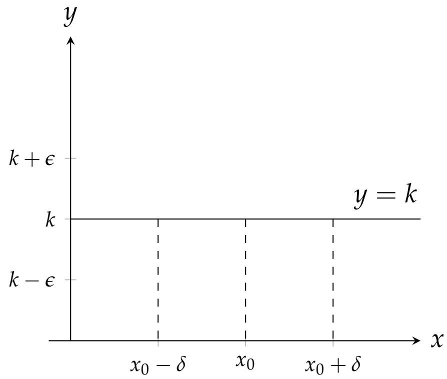
مثال 5: حد $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$ کے لئے $\epsilon = 1$ کے لحاظ سے $\delta > 0$ تلاش کریں۔ یعنی ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت $\implies$ کو پڑھیں "سے مراد"۔)

$$0 < |x-5| < \delta \quad \overset{\text{سے مراد}}{\implies} \quad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$

حل: اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ (a, b) تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد



(ا) $0 < |x - x_0| < \delta$ کی صورت میں $f(x) = x$ کے لئے جب بھی $\delta \le \epsilon$ ہو تب $\left|f(x) - x_0\right| < \epsilon$ ہو گا۔



(ب) تفاعل $f(x) = k$ کے لئے کسی بھی مثبت δ کی صورت میں $\left|f(x) - k\right| < \epsilon$ ہو گا۔

شکل 2.21: اشکال برائے مثال 4

$\delta > 0$ حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کا وسط نقطہ x_0 ہو اور یہ وقفہ (a, b) کے اندر پایا جاتا ہو۔

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں کہ اس وقفے پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

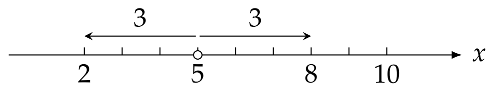
$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x-1} - 2\right| &< 1 \\
-1 < \sqrt{x-1} - 2 &< 1 \\
1 < \sqrt{x-1} &< 3 \\
1 < x - 1 &< 9 \\
2 < x &< 10
\end{aligned}$$

عدم مساوات کھلے وقفہ $(2, 10)$ پر تمام نقطوں کے لئے مطمئن ہوتی ہے لہٰذا یہ اس وقفے پر تمام $x \neq 5$ کے لئے بھی مطمئن ہو گی۔

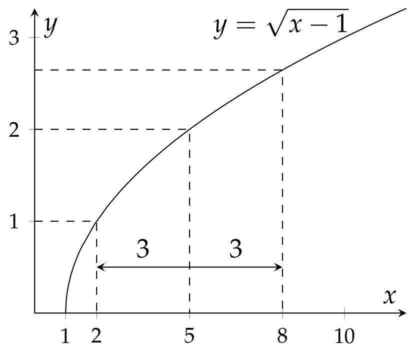
دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کو وقفہ $(2, 10)$ میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ $(2, 10)$ کے قریبی سر کا فاصلہ 3 ہے۔اس طرح $\delta = 3$ یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے $0 < |x - 5| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x وقفہ $(2, 10)$ میں پائے جائیں گے جس سے $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 5| < 3 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$

□



(ا) $x_0 = 5$ کے ارد گرد رداس 3 کا کھلا وقفہ $(2, 10)$ کے اندر پایا جائے گا۔



(ب) تفاعل اور وقفہ

شکل 2.22: اشکال برائے مثال 5

دیے گئے f ، L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

ایسا $\delta > 0$ کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

کو دو قدموں میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ (a, b) حاصل کریں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو کھلا وقفہ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، جس کا وسط x_0 ہے، کو (a, b) کے اندر رکھے۔اس δ وقفہ میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہو گی۔

مثال 6: ثابت کریں کہ درج ذیل تفاعل کے لئے $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

حل: ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - 4\right| < \epsilon$$

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|f(x)-4\right|<\epsilon$ کو حل کرتے ہوئے $x_0=2$ کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام $x\neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔اب $x\neq x_0=2$ کے لئے $f(x)=x^2$ ہے لہٰذا عدم مساوات کی صورت $\left|x^2-4\right|<\epsilon$ ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\left|x^2-4\right| &< \epsilon \\
-\epsilon < x^2-4 &< \epsilon \\
4-\epsilon < x^2 &< 4+\epsilon \\
\sqrt{4-\epsilon} < |x| &< \sqrt{4+\epsilon} && \text{فرض کریں کہ } \epsilon<4 \text{ ہے} \\
\sqrt{4-\epsilon} < x &< \sqrt{4+\epsilon}
\end{aligned}$$

کھلا وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon},\sqrt{4+\epsilon})$ میں تمام $x\neq 2$ کے لئے عدم مساوات $\left|f(x)-4\right|<\epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta>0$ تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ $(2-\delta,2+\delta)$ کو $(\sqrt{4-\epsilon},\sqrt{4+\epsilon})$ کے اندر رکھتا ہو۔نقطہ $x_0=2$ سے کھلا وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon},\sqrt{4+\epsilon})$ کے قریبی سر کا فاصلہ δ ہو گا۔یوں $2-\sqrt{4-\epsilon}$ اور $\sqrt{4+\epsilon}-2$ میں سے کم قیمت δ کے برابر ہو گی۔ δ کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لئے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0<|x-2|<\delta \quad \implies \quad \left|f(x)-4\right|<\epsilon$$

□

درج بالا مثال میں ہم نے $\epsilon<4$ کیوں فرض کیا؟ اس لئے کہ تمام x کے لئے ایسا δ کہ $\delta>|x-2|>0$ سے مراد $\left|f(x)-4\right|<\epsilon<4$ ہو میں ہم نے δ کی وہ قیمت دریافت کی جو ϵ کے کسی بھی بڑی قیمت کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسئلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی با ضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے ہیں۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسئلوں (بالخصوص حصہ 2.2 کے مسئلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کیے جاتے ہیں۔آئیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال 7: قاعدہ مجموعہ
اگر $\lim_{x\to c} f(x)=L$ اور $\lim_{z\to c} g(x)+M$ ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$$

حل: فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہم ایسا مثبت عدد δ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| &= \left|(f(x)-L)+(g(x)-M)\right| \\ &\le \left|f(x)-L\right| + \left|g(x)-M\right| \qquad \text{تکونی عدم مساوات}\end{aligned}$$

چونکہ $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_1 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \sigma_1 \quad \implies \quad \left|f(x)-L\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ $\lim_{x\to c} g(x) = M$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_2 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \sigma_2 \quad \implies \quad \left|g(x)-M\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ δ_1 اور δ_2 میں سے چھوٹی قیمت δ کے برابر ہے۔اب اگر $0 < |x-c| < \delta$ ہو تب

$$\left|f(x)-L\right| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x-c| < \delta_1$$

ہوں گے، اور $|x-c| < \delta_2$ اور $\left|g(x)-M\right| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔اس طرح

$$\left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا۔اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$ ہے۔ □

سوالات

نقطہ پر وقفے کا وسط لانا

سوال 1 تا سوال 6 میں x محور پر وقفہ (a,b) ترسیم کریں جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے۔اس کے بعد ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $|x-x_0| < \delta$ سے مراد $a < x < b$ ہو۔

سوال 1: $a=1, b=7, x_0=5$

سوال 2: $a=1, b=7, x_0=2$

سوال 3: $a=-\frac{7}{2}, b=-\frac{1}{2}, x_0=-3$

سوال 4: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 5: $a = \frac{4}{9}, b = \frac{4}{7}, x_0 = \frac{1}{2}$

سوال 6: $a = 2.7591, b = 3.2391, x_0 = 3$

δ کا حصول بذریعہ ترسیم

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم