احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفر. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

Vii																										,	يباچ	,
ix																						4	یبادٍ	، کا د	ناب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	•
1																							٠	لمومات	، مع	ابتدائی	1	L
1																		خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																										1.2		
32																							Ĺ	تفاعل		1.3		
54																					غلى	انمذ	م کی	ترسيم		1.4		
74																					بل	نفاء	انی اِنی	بنكوني		1.5		
95																								/		حدود ا	2)
95																										2.1		
113															٠.		عد	قواه	کے	ئے ۔	_,	پ کر	لاثر	פנ "		2.2		
126																										2.3		
146																										2.4		
165																							ار	استمر		2.5		
184	١.																					Į	ی ز	مماسح		2.6		
199)																									تفرق	3	Ł
199)																				ت ,	تف	K,	تفاعل		3.1	-	
221																					رں	, زق	ی ہ ِ تفر	عا ر قواعد		3.2		
240																										3.3		
257																										3.4		
277																										3.5		
294																										3.6		
310) .																			ىلى	تبد	ح .	شرر	د گیر		3.7		

عـــنوان

 325 340 340 341 340 341 352 363 364 374 385 386 387 391 44 391 45 46 47 46 47 48 51 52 53 54 55 55 56 57 57 58 58 59 605 605 605 70 7		تفرق کا استعال	4
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 59 50 50<td></td><td></td><td></td>			
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 59 50 50<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td>	اوسط قیمت	4.2 متله	
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 59 50 50<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
 391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر	356	3.1	
418 بیترین بنان 4.6 442 خط بخد کی اور تنو تات 47 خط بخد کی اور تر تات 47 خط بخد کی اور ریانسان نموند کئی 5 477 کسی محلت 5.1 489 کسی محلت 5.2 505 تعلق محلوات، ابتدائی قیت سخلے، اور ریانسانی نموند کئی 5.3 505 محلی بدریج شرکیب پرل ر زخیری تامده کا الد اطالق 5.6 534 نموسیت برتی، اور اوسط قیت سخل 5.5 551 نموسیت برتی، اور اوسط قیت سخل 5.6 578 بیادی مخلد 5.7 599 نموسیت برتی، اور اوسط قیت سخل 5.8 605 بیادی مخلد 5.9 605 بیادی مخلد 5.0 605 بیادی مخلد 6.1 625 بیادی مخلیات کا سرون کی کی اش ر بر کی کی اس	اور y'' کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442 غط بدی کا اور تو تات 465 خیر توشی کلداد 477 4.8 477 5.1 477 5.1 489 5.1 5.2 تقری ساوات، ابتدائی تیب سنت، اور ریافسیاتی موند شی 5.3 5.2 5.5 کلی بدر بید ترایی بیر بید ترای بید تری بید بید تری بید بید تری بید تری بید بید بید تری بید بید بید بید بید بید بید بید بید بی			
465 ریب نیوش 4.8 477 کل کا 477 خیر تطبی محملات 5.1 489 خیر تطبی محملات 5.2 5.2 تفری سیدان آبید آئی قیت سلخ، اور ریاضیاتی تموند گشی 5.3 5.3 کل استدائی آبید سید ترکیب بدل. و تیجری تامیده کا الت طالق 5.4 5.4 اید اداره میزدید شمای آبید سید ترکیب اور ادسط قیت سلخ 5.5 5.5 در محمل محمل میزدید سید 5.6 5.7 نیادی مسئل 5.8 5.8 قطعی محمل میں بدل 5.9 605 اعدادی مسئل 5.10 625 اعدادی تعلی اسید تعلیت و الاسرحد 6.1 629 مسئیات کی تجار ترس اور تیجال 6.2 640 مسئی اسید تعلیت و الاسرحد 65. مسئی شواف که جمی کی طاش 6.5 663 مسئی شواف کی جمی کی طاش 6.5 670 مسئی شواف کی جمی کی المیان اور قیت سیال 6.7 711 میار افزاد توب سیال 6.8 740 فیادی شوئی استمال 6.10			
477 گل قریق الطاق الله 5.1 489 قریق ساوات، ابتدائی آیت سئط، اور ریاضیاتی موند آشی 5.2 505 تغیلی سرایید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.3 516 تغیلی شریعید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.4 54 اندازه بذر اید شای گموید 5.5 561 تغیادی مسئلد 5.6 578 تغیادی مسئلد 5.7 599 تغیادی مسئلد 5.8 605 تغیادی مسئلد 5.9 605 تغیادی مسئل 5.9 605 تغیادی مسئل 6.1 625 تغیادی مسئل 6.1 629 تغیادی وزاند 6.2 640 مینان کارتج کی کات والا سرحد 6.2 648 تغیال کات کر جم کی حال ال سرح الحال المراح و المراح و الحال المراح و الحال المراح و المراح و الحال المراح و المرح و المراح و المراح و المرح و المرح و المرا			
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت محمید 5.5 551 بخیری محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 561 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 579 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمید 5.9 605 بخیری محمید و نوشی 6.5 625 بخیری محمید و نوشی محمید و نوش	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت محمید 5.5 551 بخیری محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 561 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 579 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمید 5.9 605 بخیری محمید و نوشی 6.5 625 بخیری محمید و نوشی محمید و نوش	477	کیل .	5
489 ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی 505 تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3 516 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.4 534 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.5 551 5.6 562 نصوعیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 5.7 578 نیادی سئلہ 5.8 579 5.8 605 5.8 605 5.9 605 تعدادی محملہ 6.5 605 تعدادی محملہ 6.5 625 تعدادی وزرنقہ 6.1 626 منحنیات کے فتی رتب 627 کمیل کا استعمال 6.1 640 منحنیات والا سرحم 640 کمیل سیل کا الے کر قبم کی سائل 7.5 640 کمیل سیل کی سیل کی سیل الے کہ اللے اللے اللے اللے اللے اللے اللے الل		•	5
505 کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق 5.3 516 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.4 54 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.5 55 ریمان تجویم اور قطعی تحملیت 5.6 56 محمل کا سرا برا اور اصطفی تحمل میں بدل 5.8 605 نظمی تحمل میں بدل 5.9 605 اعدادی تحمل کا استعمال 6.1 625 محمل کا استعمال 6.1 626 محمل کا استعمال 6.1 640 مستحدی تحمل میں اور چھلا 6.2 648 محمل کا سرا ہو تے کلیات والا سرحد 6.3 663 اجسام طواف کے تجم۔ قرص اور چھلا 6.3 665 محمدی متحدیات کی لمبائیاں 6.5 670 معیاد اثر اور مرکز کہتے 6.7 671 معیاد اثر اور مرکز کہتے 6.7 671 فضل مرکز کہتے 6.8 731 بادی قش اور دیگر نمونی استعمال 6.9 740 افرائی قاعل 6.10	ر با		
516 اندازه بذرایید تثانای مجموعها 534 5.5 5.6 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.7 5.8 5.8 5.8 5.8 5.8 5.9 5.9 5.0 605 606 605 606			
534 ريمان مجموع اور قطعي تحمالت 5.5 561 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.6 578 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.7 579 5.8 605 5.8 605 5.9 605 6.05 605 6.05 605 6.05 605 6.05 605 6.06 626 6.1 627 6.1 640 معنیات کے قی رقب 640 معنیات کے قبلیت والا مرحد 640 معنیات کے قبلیت والا اور چھلا 648 معنیات کی اسائیل اور چھلا 650 معنیات کی اسائیل اور و توبیل اور قی مرکز کمیت 660 معنیات کی اسائیل اور قی مرکز کمیت 660 معنیات کی اسائیل اور قی مونی استعال اور قبل مونی استعال			
561 فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل 5.6 578 5.7 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 5.9 605 5.0 5.10 625 605 6.1 626 6.2 6.1 627 6.2 6.2 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 663 6.4 6.5 664 6.5 6.5 665 6.6 6.6 6.6 670 6.2 6.4 687 6.3 6.4 688 6.5 6.6 689 6.6 6.7 710 6.8 6.8 731 6.8 6.9 740 6.10 6.5 755 7 10 6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578 بنیادی سئلد 5.7 5,10 5.8 5.8 5.8 5.8 6.0 5.8 6.0 5.9 5.9 6.0 5.9 6.0 5.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.1 6.2 6.2 6.2 6.1 6.2 6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599 قطع کمل میں برل 5.8 605 5.9 605 5.9 605 5.10 625 5.10 625 6.1 629 6.1 640 7 6.2 6.2 6.3 6.2 6.4 6.3 6.5 6.4 6.6 6.5 6.6 6.9 6.7 6.7 7 6.7 7 6.8 7 6.9 6.0 6.0 6.1 6.9 6.9 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و	^ت کمل میں بدل	5.8 قطعی	
 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 625 تاعدہ ذوزنقہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا 6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 میار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 میار اثر اور مرکز کمیت 6.9 وسطانی مرکز 6.7 میار اور قوت سیال اور قوت سیال 6.10 میادرائی تفاعل 			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اگر رقبہ 6.1.1 640 تدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 640 شکل کا کٹر جم کی طاش 6.3 648 باب کوس اور چھلا 6.4 650 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 699 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 711 وسطانی مرکز 6.8 731 وسطانی مرکز 6.8 731 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 740 بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال 7 7 ماورائی نقاعل 7			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اگر رقبہ 6.1.1 640 تدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 640 شکل کا کٹر جم کی طاش 6.3 648 باب کوس اور چھلا 6.4 650 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 699 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 711 وسطانی مرکز 6.8 731 وسطانی مرکز 6.8 731 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 740 بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال 7 7 ماورائی نقاعل 7		کا ب	_
629 تدريل ہوتے کليات والا سرحد 640 6.2 640 6.2 6.3 6.4 6.4 6.5 6.5 6.6 6.6 6.6 6.7 6.6 6.8 6.7 711 6.8 731 6.8 740 6.0 755 6.0	0_0		6
640 گیاں کاٹ کر قجم کی طاش 648 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 6.4 676 شوی متحدیات کی لمبائیاں 687 6.6 689 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 67 6.71 711 0.71 68 6.71 716 وسطانی مرکز 6.8 مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال 740 مادرائی نقاعل			
648 اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا 6.3 663 شکلی چھلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.9 699 6.7 6.7 711 6.7 7 688 7.1 6.8 731 6.8 7 740 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 755 ماورائی نقاعل 7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663 بکی چیلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 711 6.7 7 711 6.8 7 710 6.8 7 731 10 6.0 740 6.10 6.10 755 3 6.10 6.10) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 687 6.5 688 6.6 699 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 6.7 6.7.1 70 6.8 731 8 740 6.10 755 ماورائی تفاعل	•		
687 شطح طواف کا رقبہ 699 6.7 711 6.7 711 6.7.1 716 9 6.8 731 700 6.10 701 6.10 702 6.10 703 6.10 704 6.10 705 6.10 706 6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

عـــنوان

قدرتی لوگار تھم	7.2	
قوت نمائی تفاعل	7.3	
807 $\log_a x$ let a^x	7.4	
	7.5	
قاعده گھوپیٹال کی میں میں میں میں میں ہوتی ہوتی ہوتی ہے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔	7.6	
اضافی شرح نمو	7.7	
7.7.1 ترقیمی اور شانکی علاش		
الث تكونياتى تفاعل	7.8	
الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9	
ہذالولی تفاعل	7.10	
يك رتبي تفرقی مساوات	7.11	
يوگر كى اعداد كى تركيب؛ ميدان ڈھلوان	7.12	
المريق 43	ا تکمل کے	8
ر تمکن کے بنیادی کلیات	8.1	
تكمل بالحصص		
964	0.2	
974	8.3	
كونياتى بدلُ	8.4	
حبدول کمل اور کمپیوٹر	8.5	
	8.6	
, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	0.0	
ىلىل 1043	! لا مت ناہی ^{تن}	9
اعداد کی ترتیب کی حد	9.1	
ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	9.2	
لامتناي تسلسل	9.3	
غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پر کھ	9.4	
یر غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پر کھ	9.5	
یر منفی اجزاء کے شکسل کا تنابی اور جذری پر کھ	9.6	
بیر کی ابراء کے سطح ما بی اور جدری چرھی ۔		
بدليا مشكل الشكل اور مشروط الرتفازي	9.7 9.8	
	9.8	
پیر اور مقلان مسلس کا از تکاز؛ خلل کے اندازے	9.9 9.10	
یر من کار نظر: کس کے انداز کے	9.10	
طاق عن کے استعمال	9.11	
ھے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد	ا1 مخروطی ج	0
ے میں مدیر کا ہوتے ہی گئی۔ مخروطی جھے اور دو قدری مساواتیں	10.1	•
ر می تعداد می از در معنون کا جماعت بندی	10.2	

10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا	
10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول	
1077 ميار متر معارم منجن س	
د.10 اخصاء اور مقدار مسلوم خنتیات	
10.6 قطبی محدد	
10.7 قطبی محدد میں ترسیم	
10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات	
1319	
سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیشری	11
تمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری 11.1 مستوی میں سمتیات	11
11.1 مستونی نیل مهیات	
1359	1
نيميم دوم	ب

ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كي

2011 كتوبر _2011

باب 11

سمتیات اور خلامیں تحلیلی جیو میٹری

اس حصہ میں سمتیات اور سہ بعدی محددی نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے نقاعل پر غور کے لئے محددی مستوی موزوں ہے، ای طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے نقاعل پر غور کے لئے محددی خلاء موزوں ہے۔ ہم محددی مستوی میں ایک تیمرا محور شامل کر کے محددی خلاء پیدا کرتے ہیں۔ بیہ محود کلا مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

11.1 مستوى مين سمتيات

بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی کھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاو، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہوگی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جانا ہوگا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہوگا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہوگا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کرتا ہے اور جسم کی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمتی رفتار بیان کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر کے اس نشان کو سمتیہ کہتے ہیں۔

تعریف: ایک مستوی میں کی مخصوص رخ خط کو سمتیہ ¹ کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابریا کیساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیبی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیبا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف جبی، مثلاً v ، سے ظاہر کیا جائے گا 2 نقطہ A سے نقطہ A تک سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف جبی، مثلاً v ، مشکل کی سے کہ مولی کا میں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل میں و کھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل کھتے ہیں۔

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{EF}$$

غير سمتيه اور غير سمتي مضرب

ہم کی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی رگئی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی % 50 بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور v ایک سمتیہ ہوتب شبت c کی صورت میں v اور cv کے رخ ایک جیسے ہول گے جبکہ مفی c کی صورت میں ان کے رخ ایک جیسے ہول گے جبکہ مفی کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہول گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی ہیں۔ ہیں جبکہ میں جبکہ عبیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ 0 حاصل ہو گا، جو ایک نقط پر مشتمل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گیا۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ 0 کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

vecto

 $[\]overline{v}$ vector \overline{v} کانشان \overline{v} وانشان \overline{v} داد \overline{v} دروم \overline{v} وانشان \overline{v} وانسان \overline{v}

11.1. مـــتوى مــين سمتيات

جيوميٹريائي مجموعه: قاعده متوازي الاضلاع

 v_1 وو غیر صفر سمتیات v_1 اور v_2 کا جیو میٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر v_1 کا نمائندہ، مثلاً v_1 سے v_2 تک متر v_1 اختای نقطہ v_1+v_2 کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ v_1+v_2 کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ v_1+v_2 کے نمائندہ کا سمتیہ ہوگا۔ یوں اگر v_2 کے مر v_3 کس سمتیہ ہوگا۔ یوں اگر v_1

$$v_1 = \overrightarrow{AB}, \quad v_2 = \overrightarrow{BC}$$

ہوں تب

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں v_1+v_2 متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے المذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع 5 کہتے ہیں۔

اجزاء

دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب بیہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مصرب ہوں، لینی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ $\,v\,$ کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

 v_2 اور v_2 اور v_2 سمتیات v_1 اور v_2 سمتی v_3 اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتی کو اس کے اجزاء v_1 اور v_2 میں تحلیل کیا گیا ہے۔

 6 سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کار تیبی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور ہیے اجزاء از خود موزوں اساسی سمتیہ جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مصرب ہوتے ہیں۔ مثبت x محور کے رخ اسای سمتیہ نقطہ (0,0) سے نقطہ (0,1) تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اسای سمتیہ کی علامت x ہے۔ شبت x محور کے رخ اسای سمتیہ نقطہ x اللہ کیا جاتا ہے اور اس اسای سمتیہ کی علامت x ہے۔ شبت x کور کے رخ اسای سمتیہ نقطہ x متوازی سمتی x کیا جاتا ہے اور اس اسای سمتیہ کی علامت x ہے۔ اب غیر سمتی x کے لئے محور x متوازی سمتیہ کی کم المبائی x و گاری ہوگا۔ اس طرح غیر سمتی x کے متوازی x سمتیہ کی لمبائی x ہوگا۔ شکل میں سمتیہ کے اور اور x کے لئے اور اور x کے اور اور x کے لئے اور اور x کے اور اور x کی کیا گیا ہے:

 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$

parallelogram law⁵ basic⁶ a تحریف: v=ai+bj ہوں گے۔ اعداد v ہوتب i اور i کے رخ، سمتیہ v=ai+bj ہوں گے۔ اعداد i اور i ، اسای سمتیات i اور i کے رخ، سمتی i کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

(11.1)
$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} \quad \Leftrightarrow \quad a = a', \quad b = b'$$

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر مول گے جب i اور j کے رخ، ان کے مطابقی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر مول۔

الجبرائي مجموعه

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر
$$v_1=a_1m{i}+b_2m{j}$$
 اور $v_1=a_1m{i}+b_1m{j}$ بوگرہ ہوگا۔ $v_1+v_2=(a_1+a_2)m{i}+(b_1+b_2)m{j}$

مثال 11.2:

$$(2i-4j) + (5i+3j) = (2+5)i + (-4+3)j = 7i - j$$

.11.1 مـــتوى مـــين سمتيات

تفريق

 v_2 ایک سمتیہ v کا منفی سمتیہ v کا منفی سمتیہ v ہوگا۔ اس کی لمبائی v کی لمبائی ہوگی البتہ اس کا رخ v کا مخالف ہوگا۔ سمتیہ v_1 ہوگہ ویہ لیس گے۔ چیومیٹریائی طور پر ہم v_1 کے سر ہے v_2 کے سمتیہ رسیم کریں گے۔ یہ مگل شکل میں دکھایا گیا ہے جہاں v_1 کے سرتک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ مگل شکل میں دکھایا گیا ہے جہاں

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = v_1 + (-v_2) = v_1 - v_2$$

اں کے علاوہ v_1 اور v_2 کے دم مشتر کہ نقط پر رکھ کر v_1 اور v_2 ترسیم کر کے v_2 کے سر ہے v_1 کے سرتک سمتیہ v_1 اور v_2 ہوگا۔ یہ عمل شکل میں چیش کیا گیا ہے جہال درج ذیل ہے۔ v_1 ہوگا۔ یہ عمل شکل میں چیش کیا گیا ہے جہال درج ذیل ہے۔

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -v_2 + v_1 = v_1 - v_2$$

 v_1 عاصل کیا جا سکتا ہے۔ v_1 خرید، v_2 کے سرے v_1 ترسیم کر کے v_2 عاصل کیا جا سکتا ہے۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

(11.2)
$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (a_1 - a_2)\mathbf{i} + (b_1 - b_2)\mathbf{j}$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

مثال 11.3:

$$(6i+2j)-(3i-5j)=(6-3)i+(2-(-5))j=3i+7j$$

 $\vec{N}_1 = x_1 i + y_1 j$ کے کے کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $N_2(x_2,y_2)$ کی نظم $N_1(x_1,y_1)$ کے نظم $N_2(x_2,y_2)$ کے اجزاء کے متی کرتے ہیں۔ اجزاء کو \vec{O} کی اجزاء کے متی کرتے ہیں۔

ی مو کار درج زیل ہو گا۔ $N_2(x_2, y_2) = N_1(x_1, y_1)$

(11.3)
$$N_1 \dot{N}_2 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

مثال 11.4: نقطه $N_1(3,4)$ سے نقطہ $N_2(5,1)$ تک سمتیہ درج زیل ہے۔

$$N_1 \stackrel{\rightharpoonup}{N}_2 = (5-3)i + (1-4)j = 2i - 3j$$

مقدار

سمتی v=ai+bj کی لمبائی v=ai+bj مثلث v=ai+bj ہے۔ سمتی v=ai+bj ہیں دو انتصابی کلیریں وہی ہیں جو مطلق قیت کو ظاہر کرنے کے پر سمنانہ فیثا خورث لا گو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے۔ سمتیہ کی لمبائی |v| میں دو انتصابی کلیریں وہی ہیں جو مطلق قیت کو ظاہر کرنے کے لئے استعال کی جاتی ہیں۔

(11.4)
$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
 $v = ai + bj$

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ °30 زاویہ پر 20 N کی قوت F سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتی ہے جبکہ اس کا انتصابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتصابی جزو معلوم کریں۔

b=10 اور $a=10\sqrt{3}$ اور ال کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں۔ اس مثلث ہے F=ai+bj اور ال F=ai+bj عرف مثلث ہوتے ہیں۔ قوت کا افتی جزو $10\sqrt{3}i$ اور انتصابی جزو 10j ہوگا۔ انتصابی جزو کا رخ نیچے ہے لہذا یہ منتی ہے۔

غير سمتي ضرب

غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور v=ai+bj ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔ cv=c(ai+bj)=(ca)i+(cb)j

سمتيه cv کي لمبائي سمتيه v کي لمبائي ضرب |c| ہو گا:

$$|c\mathbf{v}| = |(ca)\mathbf{i} + (cb)\mathbf{j}|$$

$$= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2}$$

$$= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)}$$

$$= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= |c||\mathbf{v}|$$

 ${\rm length^7} \\ {\rm magnitude^8}$

.11.1 مـــتوى مـــين سمتيات

یوں اگر
$$|cv|=|c||v|$$
 ہو گا۔ ایک سمتیہ ہو تب $|cv|=|c||v|$ ہو گا۔

مثال v=-3i+4j اور c=-2 اور v=-3i+4j اور تب ورج زیل ہوگا۔

$$|\mathbf{v}| = |-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|-2\mathbf{v}| = |(-2)(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})| = |6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |\mathbf{c}||\mathbf{v}|$$

صفر سمتنيه

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ 0 کو ظاہر کرنے کے لئے 0 کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

$$|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

اكائى سمتيات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی
$$1$$
 ہو اکائی سمتیہ ⁹ کہلائے گا۔ سمتیات i اور j اکائی سمتیات ہیں۔ $|i|=|1i+0j|=\sqrt{1^2+0^2}=1$, $|j|=|0i+1j|=\sqrt{0^2+1^2}=1$

سمتیہ u جو اکائی سمتیہ i کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے۔

(11.6)
$$\boldsymbol{u} = (\cos \theta) \boldsymbol{i} + (\sin \theta) \boldsymbol{j}$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی للذا u مجمی اکائی سمتیہ ہوگا لینی:

$$|u| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا $x^2+y^2=1$ کا سر N مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2+y^2=1$ پر چاتا ہے جو مستوی میں ہر مکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

unit vector⁹

لميائی اور رخ

v
eq 0 اگر $v \neq 0$ ہوتب

$$\left| \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \right| = \left| \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \boldsymbol{v} \right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} |\boldsymbol{v}| = 1$$

ہو گا لہٰذا $\frac{v}{|v|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ v کا رخ ہو گا۔ یوں ہم v کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل ککھ سکتے ہیں۔

$$oldsymbol{v} = |oldsymbol{v}| \left(rac{oldsymbol{v}}{|oldsymbol{v}|}
ight)$$

یوں اگر u
eq 0 ہوتب

ا. $rac{v}{|v|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ v کا رخ ہو گا۔

ب. مساوات |v| واس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔ v=|v| بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ v=3i-4j کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب تکھیں۔

حل:

$$|v| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$
 $\frac{v}{|v|} = \frac{3i - 4j}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$ \dot{v} $v = 3i - 4j = \underbrace{5}_{\hat{i},\hat{j}} \left(\underbrace{\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j}_{\hat{i},\hat{j}}\right)$

.11.1 مــتوى مــين سمتيات

ڈ *هلوان، مماس اور عمود*

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گا۔ علیہ متازی ہوں۔ یوں $a \neq 0$ کی ڈھلوان ہو گا۔

کسی نقط پر ایک مختی کو ایک سمتیہ تب مماسی ¹⁰ یا عصو دی ¹¹ ہو گا جب اس نقطہ پر مختی کا مماس اور بیہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگل مثال میں ایس سمتیہ کو تلاش کرنا د کھایا گیا ہے۔

مثال $y=rac{x^3}{2}+rac{1}{2}$ پر منحنی $y=rac{x^3}{2}+rac{1}{2}$ کو ممای اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

طل: ہم نقطہ (1,0) پر منحیٰ کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں۔

اس نقطہ پر منحیٰ کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \frac{3x^2}{2}\bigg|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

v اور اس کے ہر غیر صفر مصرب کی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ v=2i+3j اور اس کے ہر غیر صفر مصرب کی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ کا ایسا مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v=3i کا ایسا مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v=3i ہو ہم کو سمتیہ مصرب مصرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی v=3i

$$|v| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یون درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

سمتی u کی لبائی 1 ہے اور یہ (1,1) پر منحنی کا ممال ہے۔ درج ذیل سمتی u

$$-u = -\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

جو خالف رخ ہے بھی (1,1) پر منحنی کا ممال ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی ممالی سمتیہ کو دوسری اکائی ممالی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جاستی ہے۔

 $tangent^{10}$ $normal^{11}$

نقطہ (1,1) پر منحنی کا عمودی سمتیے تلاش کرنے کی خاطر ہم اییا اکائی سمتیے معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان سے کی ڈھلوان کے بالعکس متناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم u کے غیر سمتی اجزاء کے مقامت آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر اییا سمتیے معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$n = -rac{3}{\sqrt{13}}i + rac{2}{\sqrt{13}}j, \qquad -n = rac{3}{\sqrt{13}}i - rac{2}{\sqrt{13}}j$$

یباں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقط پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں

[1,1] پر منحنی کو عمودی ہیں۔

سوالات

جیومیٹری اور حساب

سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات A ، B اور C کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

$${1\over 2}A-C$$
 .. $A-2B$.. $A+B+C$... $A+B$..

سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات B ، A اور C کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

$$A-(B-C)$$
 . $2A-rac{1}{2}B$. $A+B+C$. $A-B$.

روپ ai+bj کیلی۔ نتائج کو $C=\sqrt{3}i-\pi j$ اور B=i+6j ، A=2i-7j کیلی۔ نتائج کو ai+bj کو میل B=i+6j ، وب میل کھیلی۔

A+2B :3 سوال

A+B-C :4 سوال

 $3\boldsymbol{A} - \frac{1}{\pi}\boldsymbol{C}$:5 سوال

2A - 3B + 32j :6 سوال

 $v \cdot u$ اور $v \cdot u$ ویتے ہیں۔ $v \cdot u$ اور u دیتے ہیں۔

11.1.مـــتوي مـــين سمتيات . 11.1

ا. $oldsymbol{w}$ کو $oldsymbol{u}$ اور $oldsymbol{v}$ کی صورت میں کھیں۔

ب. v کو u اور w کی صورت میں لکھیں۔

موال 8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $m{u}$ اور $m{w}$ دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے۔ سمتیہ $m{a}$ کو $m{u}$ اور $m{w}$ کی صورت میں کھیں۔

سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیر کو ai+bj روپ میں لکھیں۔ محددی سطح پر مبداسے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

 $N_1(5,7)$ اور $N_2(2,9)$ کے $N_2(2,9)$ تااث کریں۔

A(-5,3) اور B(-10,8) کے \overline{A} تطاع \overline{A} تا تا کریں۔

A(-7,-8) اور B(6,11) کے \overline{A} قطع \overline{A} علائی کریں۔ A(-7,-8)

ریات N_1 اور $N_1 N_2$ کی کافع $N_1 N_2$ اور $N_2 N_2 N_3$ اور $N_1 N_3$ عاش کریں۔

 $N_2(-4,3)$ اور $N_3(1,3)$ اور $N_3(1,3)$ اور N_3 قطع N_3 قطع N_3 تلاش کریں جہاں $N_3(1,3)$ اور $N_3(1,3)$ کو ملائے والے قطع کا وسطی نقطہ N_3 ہے۔

وال 15: نقاط C(-1,3) ، B(2,0) ، A(1,-1) ویه C(-1,3) ، وراد تال اور C(-1,3) ، وراد تال اور تال کا مجموعه تلاش کریں۔

اور \overrightarrow{A} اور B(-2,5) ہیں۔ $\overrightarrow{AB}=4i-2j$ اور B(-2,5) ہیں۔

A(2,9) اور نقطہ A(2,9) اور نقطہ A(2,9) اور نقطہ A(3,9) اور نقطہ ا

Q(3,3) اور نقط N = -6i - 4j ویا گیا ہے۔ نقطہ N = N اور نقط N = N اور نقطہ اور نقط N = N

ا کائی سمتیات ai+bj روپ میں استان ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو ai+bj روپ میں تکھیں۔

 $u=(\cos\theta)i+(\sin\theta)j$ واور $\theta=\frac{2\pi}{3}$ اور $\theta=\frac{2\pi}{3}$ اور $\theta=\frac{\pi}{3}$ اور $t=(\cos\theta)i+(\sin\theta)$ متیات $t=(\cos\theta)i+(\sin\theta)i$ اور $t=(\cos\theta)i+(\sin\theta)i$ متیات $t=(\cos\theta)i+(\sin\theta)i$

 $u=(\cos heta)i+(\sin heta)j$ عوال 20: زاویہ $heta=-rac{3\pi}{4}$ اور $heta=-rac{3\pi}{4}$ اور $heta=-rac{\pi}{4}$ کریں۔ واکرہ $heta=x^2+y^2=1$ کی تربیم بھی تال کریں۔

سوال 21: سمتی j کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈیئن گھاکر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

بوال 22: سمتی j کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن گھماکر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

رنْ تلاشْ کریں۔ $oldsymbol{u}=(\cos heta)oldsymbol{i}+(\sin heta)oldsymbol{j}$ اک رنْ تلاشْ کریں۔

وال 23: 6i-8j

-i+3j :24 سوال

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقط پر مختی کے ممای اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحتی اور سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد جار ہوگی۔)

$$y = x^2$$
, $(2,4)$:25 $y = x^2$

$$x^2 + 2y^2 = 6$$
, $(2,1)$:26

$$y = \tan^{-1} x$$
, $(1, \frac{\pi}{4})$:27

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (0,1) \quad :28$$

ضمیمها ضمیمه اول

ضمیمه د وم