

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	
463	4.8 ترکیب نیوٹن	
475	5 تکمل	5
475	5.1 غیر قطعی مکملات	
487	5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	
503	5.3 مکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	
514	5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	
531	5.5 ریمان مجموعے اور قطعی مکملات	
557	5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	
573	5.7 بنیادی مسئلہ	
577	ضمیمہ اول	ا
579	ضمیمہ دوم	ب



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## بغیر ریمان مکمل والے تفاعل

غیر استمراری تفاعل، ماسوائے چند، ناقابل مکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا  $[0, 1]$  پر کوئی ریمان مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ناطق} \\ 0, & \text{غیر ناطق} \end{cases}$$

وقفہ  $[0, 1]$  کے کسی بھی خانہ بندی  $P$  کے لئے ہلائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

$$H = \sum k_H \Delta x_k = \sum 1 \cdot \Delta x_k = \sum \Delta x_k = 1,$$

$$L = \sum k_L \Delta x_k = \sum 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

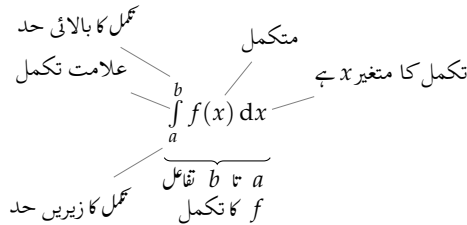
وقفہ  $[0, 1]$  پر  $f$  کے مکمل کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ  $\|P\| \rightarrow 0$  سے  $H$  اور  $L$  کی ایک جیسی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} L = 0, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} H = 1$$

یوں  $[0, 1]$  پر  $f$  کا مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔ مستقل مضرب  $k f$  کا بھی مکمل نہیں پایا جاتا ہے ماسوائے جب  $k$  صفر ہو۔

## اصطلاحات

علامت  $\int_a^b f(x) dx$  کے ساتھ بہت ساری اصطلاح وابستہ ہیں۔ یوں  $\int$  کو علامت تکمیل کہتے ہیں،  $a$  مکمل کا زیریں حد جبکہ  $b$  مکمل کا بالائی حد ہے،  $f$  متکمل ہے،  $x$  مکمل کا متغیر ہے، جبکہ  $\int_a^b f(x) dx$  سے مراد  $a$  تا  $b$  تفاعل  $f$  کا تکمیل ہے۔ مکمل حل کرنے سے مراد مکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔





کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی کھل کی قیمت متغیر کی علامت پر۔ یوں کھل میں غیر تابع متغیر کو  $x$  کی بجائے  $u$  یا  $t$  سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x) dx \text{ کی بجائے } \int_a^b f(u) du \text{ یا } \int_a^b f(t) dt \text{ لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں کھل سے مراد ریہان مجموعہ ہے لہذا غیر تابع متغیر کا کھل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا اور تینوں کھل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ اسی لیے کھل کے متغیر کو نقلی متغیر<sup>29</sup> کہتے ہیں۔

مثال 5.31: درج ذیل ریہان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو کھل کی صورت میں لکھیں جہاں  $P$  وقفہ  $[-1, 3]$  کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k$$

حل: نقطہ  $c_k$  پر تفاعل  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$  کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ  $[-1, 3]$  کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں  $-1$  تا  $3$  تفاعل  $f$  کا کھل درکار ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k = \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx$$

□

### مستقل تفاعل

ہمیں مسئلہ 5.1 قطعی کھل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں ایک دوسرا مسئلہ زیر استعمال ہو گا۔ مستقل تفاعل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  ایک مستقل تفاعل  $f(x) = c$  ہو تب  $c_k$  کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k && f(c_k) \text{ ہر نقطہ پر } c \text{ کے برابر ہے} \\ &= c \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب} \\ &= c(b - a) && \sum_{k=1}^n \Delta x_k \text{ وقفہ } [a, b] \text{ کی لمبائی } b - a \text{ ہے} \end{aligned}$$

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت  $c(b - a)$  کے برابر ہے لہذا مکمل کی قیمت بھی یہی ہوگی۔ یوں درج ذیل درست ہوگا۔

وقفہ  $[a, b]$  جس پر تفاعل  $f(x)$  کی قیمت مستقل  $c$  ہے کا مکمل درج ذیل ہوگا۔

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b - a)$$

مثال 5.32:

$$ا. \int_{-1}^4 3 dx = 3(4 - (-1)) = (3)(5) = 15$$

$$ب. \int_{-1}^4 (-3) dx = -3(4 - (-1)) = (-3)(5) = -15$$

□

غیر منفی تفاعل کے ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال 5.22 میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ  $[0, 3]$  پر گولا کی تفاعل رفتار

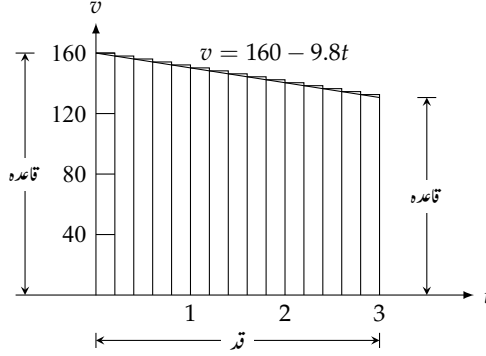
$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے ریمان مجموعے تھے۔ شکل 5.34 میں  $t$  محور اور تفاعل  $v = 160 - 9.8t$  کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس ذوزنقہ رقبہ کا قد 3، زیریں قاعدہ 160 اور بالائی قاعدہ 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہے، اتنا اصل رقبہ پر مستطیل بہتر بیٹھتے ہیں۔ ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$رقبہ = \text{قد} \cdot \frac{\text{زیریں قاعدہ} + \text{بالائی قاعدہ}}{2} = 3 \cdot \frac{130.6 + 160}{2} = 435.9$$

آپ کو یاد ہو گا کہ مثال 5.22 میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ ہم مکمل کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں:

$$\int_0^3 (160 - 9.8t) dt = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$



شکل 5.34: وقفہ  $[0, 3]$  پر سمتی رفتار تفاعل  $v = 160 - 9.8t$  کے ریمان رقبہ کے لئے مستطیل۔

ہم مکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں  $x$  محور اور استمراری غیر منفی تفاعل  $y = f(x)$  کے رقبہ کا کلیہ معلوم ہو تب ہم مکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے مکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  پر  $f(x) \geq 0$  استمراری ہے۔ تفاعل  $f$  کے ترسیم اور  $x$  محور کے رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

□

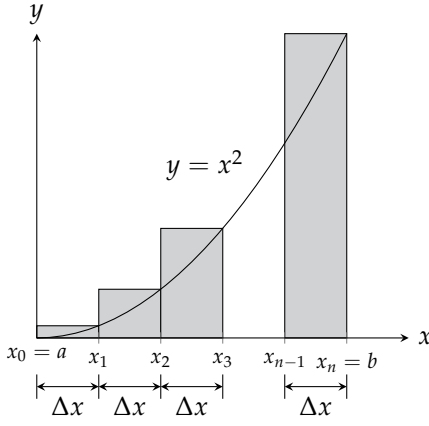
ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لئے پیش کیا۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لئے بھی کارآمد ہو گا؟ اس کا جواب ہے، "جی ہاں"، البتہ یہ ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

مثال 5.33: رقبہ استعمال کرتے ہوئے مکمل کی قیمت کا تلاش درج ذیل مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

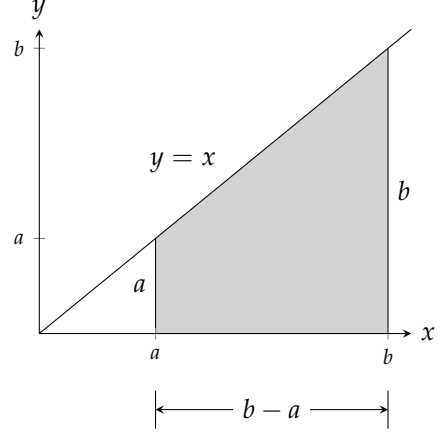
$$\int_a^b x dx, \quad 0 < a < b$$

حل: ہم خط  $a < x < b$  کے لئے  $y = x$  ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل 5.35)۔ مکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش کرتے ہیں۔

$$\int_a^b x dx = (b - a) \cdot \frac{a + b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$



شکل 5.36: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال 5.34)



شکل 5.35: خطہ برائے مثال 5.33

یوں  $a = 1$  اور  $b = \sqrt{5}$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_1^{\sqrt{5}} x \, dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

□

دھیان رہے کہ  $x$  کا الٹ تفرق  $\frac{x^2}{2}$  ہے جو مکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔

مثال 5.34: قطعی مکمل سے رقبے کا حصول  
قطع مکانی  $y = x^2$  اور  $x$  محور کے بیچ وقفہ  $[0, b]$  پر رقبہ تلاش کریں (شکل 5.36)۔

حل: ہم مکمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تقابل کو ترسیم کر کے وقفہ  $[0, b]$  کو  $n$  یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی  $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$  ہو گی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x, \quad x_n = n\Delta x = b$$

ہم جس طرح چاہیں  $c_k$  نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو  $c_k$  منتخب کرتے ہیں۔ یوں  $c_1 = x_1$  ،  $c_2 = x_2$  ، وغیرہ ہو گا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$f(c_1)\Delta x = f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x = (1^2)(\Delta x)^3$$

$$f(c_2)\Delta x = f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2\Delta x = (2^2)(\Delta x)^3$$

⋮

$$f(c_n)\Delta x = f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2\Delta x = (n^2)(\Delta x)^3$$

ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 (\Delta x)^3 \\
 &= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^n k^2 && (\Delta x)^3 \text{ مستقل ہے} \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{مساوات 5.13 میں } \Delta x = \frac{b}{n} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

اب قطعی تکمل کی تعریف

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

استعمال کرتے ہوئے  $x = 0$  تا  $x = b$  قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n && \text{یہاں } \|P\| \rightarrow 0 \text{ سے مراد } n \rightarrow \infty \text{ ہے} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{b^3}{3}
 \end{aligned}$$

یوں  $b = 1$  اور  $b = 1.5$  کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{1.5} x^2 dx = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

□

یہاں بھی دھیان رہے کہ  $x^2$  کا الٹ تغرق  $\frac{x^3}{3}$  ہے۔

## سوالات

سگما روپ  
سوال 1 تا سوال 6 میں مجموعہ کو سگما روپ میں لکھنے کے بعد اس کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1:  $\sum_{k=1}^2 \frac{6k}{k+1}$

سوال 2:  $\sum_{k=1}^3 \frac{k-1}{k}$

سوال 3:  $\sum_{k=1}^4 \cos k\pi$

سوال 4:  $\sum_{k=1}^5 \sin k\pi$

سوال 5:  $\sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

سوال 6:  $\sum_{k=1}^4 (-1)^k \cos k\pi$

سوال 7: درج ذیل میں سے کونسی  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$  کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا.  $\sum_{k=1}^6 2^{k-1}$       ب.  $\sum_{k=0}^5 2^k$       ج.  $\sum_{k=-1}^4 2^{k+1}$

سوال 8: درج ذیل میں سے کونسی  $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$  کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا.  $\sum_{k=1}^6 (-2)^{k-1}$       ب.  $\sum_{k=0}^5 (-1)^k 2^k$       ج.  $\sum_{k=-2}^3 (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

سوال 9: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

$$\text{ا. } \sum_{k=2}^4 \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \quad \text{ب. } \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{k+1} \quad \text{ج. } \sum_{k=-1}^1 \frac{(-1)^k}{k+2}$$

سوال 10: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^4 (k-1)^2 \quad \text{ب. } \sum_{k=-1}^3 (k+1)^2 \quad \text{ج. } \sum_{k=-3}^{-1} k^2$$

سوال 11 تا 16 میں دیے مجموعوں کو گناروپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلہ کی زیریں حد پر منحصر ہو گا۔

$$\text{سوال 11: } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\text{سوال 12: } 1 + 4 + 9 + 16$$

$$\text{سوال 13: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\text{سوال 14: } 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$\text{سوال 15: } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\text{سوال 16: } -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$$

متناہی مجموعہ کی قیمت

سوال 17: فرض کریں کہ  $\sum_{k=1}^n a_k = -5$  اور  $\sum_{k=1}^n b_k = 6$  ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^n 3a_k \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \quad \text{د. } \sum_{k=1}^n (b_k - 2a_k)$$

$$\text{ب. } \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{6} \quad \text{د. } \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$$

سوال 18: فرض کریں کہ  $\sum_{k=1}^n a_k = 0$  اور  $\sum_{k=1}^n b_k = 1$  ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^n 8a_k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^n 250b_k \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^n (a_k + 1) \quad \text{د. } \sum_{k=1}^n (b_k - 1)$$

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے الجبرائی فقرہوں کی قیمتوں کو صفحہ 533 پر دیے گئے متنہائی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات 5.13 میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال 19:

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^{10} k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^{10} k^2 \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^{10} k^3$$

سوال 20:

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^{13} k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^{13} k^2 \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^{13} k^3$$

$$\text{سوال 21: } \sum_{k=1}^7 (-2k)$$

$$\text{سوال 22: } \sum_{k=1}^5 \frac{\pi k}{15}$$

$$\text{سوال 23: } \sum_{k=1}^6 (3 - k^2)$$

$$\text{سوال 24: } \sum_{k=1}^6 (k^2 - 5)$$

$$\text{سوال 25: } \sum_{k=1}^5 k(3k + 5)$$

$$\text{سوال 26: } \sum_{k=1}^7 k(2k + 1)$$

$$\text{سوال 27: } \sum_{k=1}^5 \frac{k^3}{225} + \left( \sum_{k=1}^5 k \right)^3$$



سوال 28:  $\left(\sum_{k=1}^7 k\right)^2 - \sum_{k=1}^7 \frac{k^3}{4}$

ریمان مجموعوں کے لئے مستطیلیں  
سوال 29 تا سوال 32 میں تقابل  $f(x)$  کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کی ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ  $\sum_{k=1}^4 f(c_k) \Delta x_k$  کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں  $k$  ویں ذیلی وقفہ کا (I) بائیں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ  $c_k$  ہے۔ (ہائیں، دائیں اور وسطی نقطوں کے لئے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

سوال 29:  $f(x) = x^2 - 1, [0, 2]$

سوال 30:  $f(x) = -x^2, [0, 1]$

سوال 31:  $f(x) = \sin x, [-\pi, \pi]$

سوال 32:  $f(x) = \sin x + 1, [-\pi, \pi]$

سوال 33: خانہ بندی  $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$  کا معیار تلاش کریں۔

سوال 34: خانہ بندی  $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$  کا معیار تلاش کریں۔

حد کا بطور تکمیل اظہار  
سوال 35 تا سوال 42 میں دیے گئے حد کو بطور قطعی تکمیل ظاہر کریں۔

سوال 35:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k$  جہاں  $[0, 2]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 36:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2c_k^3 \Delta x_k$  جہاں  $[-1, 0]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 37:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k$  جہاں  $[-7, 5]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 38:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \Delta x_k$  جہاں  $[1, 4]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 39:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$  جہاں  $[2, 3]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 40:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$  جہاں  $[0, 1]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 41:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\sec c_k) \Delta x_k$  جہاں  $[-\pi/4, 0]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

سوال 42:  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\tan c_k) \Delta x_k$  جہاں  $[0, \pi/4]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے۔

مسئله تفاعل  
سوال 43 تا سوال 48 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-2}^1 5 \, dx \quad \text{سوال 43}$$

$$\int_3^7 (-20) \, dx \quad \text{سوال 44}$$

$$\int_0^3 (-160) \, dt \quad \text{سوال 45}$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2} \, d\theta \quad \text{سوال 46}$$

$$\int_{-2.1}^{3.4} 0.5 \, ds \quad \text{سوال 47}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2} \, dr \quad \text{سوال 48}$$

رقبہ سے مکمل کی قیمت کا حصول  
سوال 49 تا سوال 56 میں مکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبہ سے مکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_{-2}^4 \left( \frac{x}{2} + 3 \right) \, dx \quad \text{سوال 49}$$

$$\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4) \, dx \quad \text{سوال 50}$$

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx \quad \text{سوال 51}$$

$$\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2} \, dx \quad \text{سوال 52}$$

سوال 53:  $\int_{-2}^1 |x| dx$

سوال 54:  $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

سوال 55:  $\int_{-1}^1 (2 - |x|) dx$

سوال 56:  $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^2}) dx$

سوال 57 تا سوال 60 میں کھل کی قیمت کو رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال 57:  $\int_0^b x dx, \quad b > 0$

سوال 58:  $\int_0^b 4x dx, \quad b > 0$

سوال 59:  $\int_a^b 2s ds, \quad 0 < a < b$

سوال 60:  $\int_a^b 3t dt, \quad 0 < a < b$

قیمت کی تلاش

سوال 61 تا سوال 72 میں دیے کھل کی قیمت کو مثال 5.33 اور مثال 5.34 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 61:  $\int_1^{\sqrt{2}} x dx$

سوال 62:  $\int_{0.5}^{2.5} x dx$

سوال 63:  $\int_{\pi}^{2\pi} \theta d\theta$

سوال 64:  $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r dr$

سوال 65:  $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 dx$

سوال 66:  $\int_0^{0.3} s^2 ds$

سوال 67:  $\int_0^{1/2} t^2 dt$

سوال 68:  $\int_0^{\pi/2} \theta^2 d\theta$

سوال 69:  $\int_0^{2a} x dx$

سوال 70:  $\int_a^{\sqrt{3}a} x dx$

سوال 71:  $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 dx$

سوال 72:  $\int_0^{3b} x^2 dx$

رقبے کی تلاش  
سوال 73 تا سوال 76 میں وقفہ  $[0, b]$  پر  $x$  محور اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ قطعی مکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 73:  $y = 3x^2$

سوال 74:  $y = \pi x^2$

سوال 75:  $y = 2x$

سوال 76:  $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں  
سوال 77: درج ذیل مکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ کرنے کی خاطر درکار  $a$  اور  $b$  تلاش کریں۔ (اشارہ: مکمل کہاں مثبت ہے؟)

$$\int_a^b (x - x^2) dx$$

سوال 78: درج ذیل مکمل کی قیمت کم سے کم کرنے کی خاطر درکار  $a$  اور  $b$  تلاش کریں۔

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) dx$$

سوال 79: بڑھتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے  
(i) فرض کریں کہ جیسے جیسے  $x$  وقفہ  $[a, b]$  پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل  $f(x)$  کی ترسیم بتدریج اوپر اٹھتی ہے۔ فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  کی  $n$  عدد یکساں لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں خانہ بندی  $P$  ہے جہاں ایک خانے کی لمبائی  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  ہے۔ شکل 5.37 کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس خانہ بندی پر  $f$  کے بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق کو تریسی طور پر مستطیل  $R$  سے ظاہر

کیا جاسکتا ہے جس کی جسامت  $[f(b) - f(a)]$  ضرب  $\Delta x$  ہے۔ (اشارہ: فرق  $H - L$  ان رقبوں کا مجموعہ ہے جن کے وتر  $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$  اس ترتیب پر پائے جاتے ہیں۔ انہیں افقی مستطیل  $R$  پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔)  
(ب) فرض کریں ذیلی وقفوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں بلکہ خانہ بندی  $[a, b]$  پر مختلف ذیلی وقفوں کی لمبائی  $\Delta x_k$  مختلف ہے۔ اگر  $\Delta x_H$  خانہ بندی  $P$  کا معیار ہو تب دکھائیں کہ

$$H - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_H$$

ہو گا لہذا  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (H - L) = 0$  ہو گا۔

سوال 80: گھٹتے تقاض کے بالائی اور زیریں مجموعے  
(i) فرض کریں کہ جیسے جیسے  $x$  وقفہ  $[a, b]$  پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تقاض  $f(x)$  کی ترتیب بتدریج نیچے گرتی ہے۔ سوال 79 کی طرح اس کا خاکہ بنائیں۔ فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  کی خانہ بندی  $P$  ہے جہاں تمام خانوں کی لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہیں۔ سوال 79 کی طرح فرق  $H - L$  تلاش کریں۔  
(ب) فرض کریں کہ خانوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہے بلکہ ہر  $\Delta x_k$  مختلف ہے۔ دکھائیں کہ سوال 79 کی عدم مساوات

$$H - L \leq |f(b) - f(a)| \Delta x_H$$

اب بھی کارآمد ہے لہذا  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (H - L) = 0$  ہو گا۔

سوال 81: مکمل  $\int_0^b x^2 dx, b > 0$  کی قیمت مثال 5.34 کی طرز پر حاصل کریں البتہ اب ہر خانے کا بائیں سر نقطہ قیمت استعمال کریں (شکل 5.38)۔

سوال 82: دکھائیں کہ مجموعہ

$$S_n = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right]$$

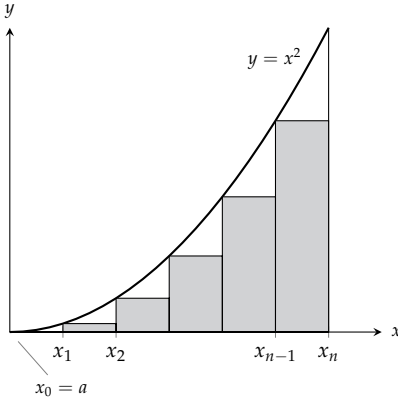
درحقیقت  $\int_0^1 x dx$  کا تخمینہ رقبہ دیتا ہے۔ یوں حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ  $[0, 1]$  کا یکساں  $n$  ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کا بائیں سر نقطہ قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبہ کا مجموعہ لکھیں۔)

سوال 83: درج ذیل

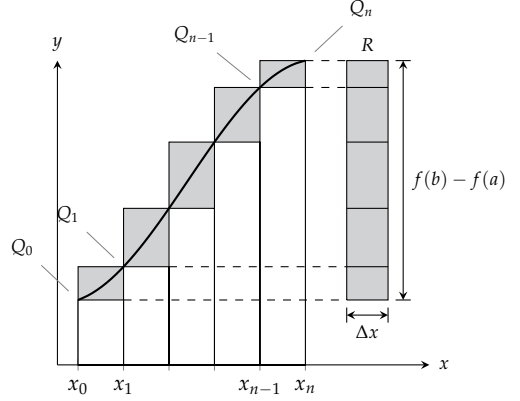
$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

کو

$$S_n = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right]$$



شکل 5.38: ریمان مستطیل برائے سوال 81



شکل 5.37: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق  $[f(b) - f(a)]\Delta x$  ہو گا۔

روپ میں لکھیں جس کو  $\int_0^1 x^2 dx$  کی تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ  $[0, 1]$  کو  $n$  برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں اور ہر خانے کے بائیں سرنقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیں۔)

سوال 84: درج ذیل کلیہ استعمال

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \dots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos(m+1/2)h}{2 \sin(h/2)}$$

کرتے ہوئے  $y = \sin x$  کے نیچے  $x = 0$  تا  $x = \pi/2$  رقبہ درج ذیل دو اقدام سے تلاش کریں۔

ا. وقفہ  $[0, \pi/2]$  کو  $n$  برابر لمبائیوں کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مطابقتی بالائی مجموعہ  $H$  تلاش کریں۔

ب.  $n \rightarrow \infty$  اور  $\Delta x = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$  کرتے ہوئے  $H$  کا حد تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 85 تا سوال 90 میں دیے گئے عمل پر مرکوز ریمان مجموعوں کے ساتھ منسلک مستطیلوں کو کمپیوٹر پر بنائیں۔ ذیلی وقفوں کی تعداد  $n = 4, 10, 20, 50$  لیں اور ان کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر لیں۔

سوال 85:  $\int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$

سوال 86:  $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0 \quad \text{سوال 87}$$

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx = 1 \quad \text{سوال 88}$$

$$\int_{-1}^1 |x| \, dx = 1 \quad \text{سوال 89}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln 2 \quad \text{سوال 90}$$

سوال 91: (i) مجموعہ  $S_n$  جس کو سوال 82 میں پیش کیا گیا ہے کو سنگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ (ب) سوال 83 میں دیے گئے  $S_n$  کے لئے دوبارہ حل کریں۔

سوال 92: مجموعہ  $\sin h + \sin 2h + \dots + \sin mh$  جسے سوال 84 میں پیش کیا گیا ہے کو سنگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر کی مدد سے  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔

سوال 93: بائیں نقطہی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مثال 5.23 کے مجموعہ کی سنگما علامتی روپ درج ذیل ہے۔

$$S_4 = \sum_{k=1}^4 4[9 - (-2 + (k-1))^2]$$

ا. سنگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطہی مجموعہ  $S_8$  اور  $S_{25}$  لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب  $\frac{4}{8}$  اور  $\frac{4}{25}$  ہوگی۔

ب. سنگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطہی مجموعہ  $S_n$  لکھیں جو  $n$  خانوں پر مشتمل ہے اور جہاں ہر خانے کی لمبائی  $\frac{4}{n}$  ہے۔

ج. حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 94: بائیں سر نقطہی قیمت مجموعہ برائے مثال 5.24 درج ذیل ہے۔

$$S_8 = \sum_{k=1}^8 \pi[16 - (-1 + (k-1))^2]$$

ا. بائیں سر نقطہی مجموعہ  $S_{16}$  اور  $S_{80}$  کو سنگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{10}$  ہوگی۔

ب. بائیں سر نقطہی مجموعہ  $S_n$  کو سنگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی  $\frac{8}{n}$  اور خانوں کی تعداد  $n$  ہوگی۔

ج. حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہوگا؟

## 5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ

اس حصہ میں مکمل کے قواعد اور مکمل کا رقبہ کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ اوسط قیمت پر دوبارہ غور کیا جائے گا۔

## قطعی مکمل کے خواص

ہم عموماً قطعی مکملوں کا مجموعہ اور فرق حاصل کرنا چاہتے ہیں یا مکمل کو مستقل سے ضرب دینا چاہتے ہیں یا ان کا موازنہ دیگر قطعی مکمل کے ساتھ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ایسا درج ذیل قواعد کے تحت کرتے ہیں۔

قواعد برائے قطعی تکمل

$$1. \text{ صفر: } \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{تعریف})$$

$$2. \text{ مکمل کی ترتیب: } \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{تعریف})$$

$$3. \text{ مستقل مضرب: } \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے})$$

$$(k = -1) \quad \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \text{ مجموعہ اور فرق: } \int_a^b (f(x) \mp g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \mp \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \text{ جمع پذیری: } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

6. کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات: اگر وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت  $f_H$  اور کم سے کم قیمت  $f_L$  ہو تب درج ذیل ہو گا:

$$f_L \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f_H \cdot (b - a)$$

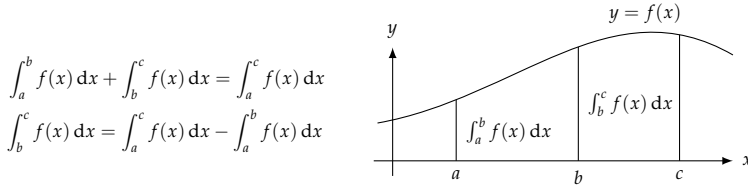
7. غلبہ: اگر  $[a, b]$  پر  $f(x) \geq g(x)$  ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

اگر  $[a, b]$  پر  $f(x) \geq 0$  ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$





شکل 5.39: قطعی کھل کی جمع پذیری

ماسوائے پہلے دو قواعد کے تمام کو قطعی کھل کی تعریف بذریعہ ریمان مجموعہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ ان قواعد کے ثبوت نہایت آسان ہوں گے۔ چونکہ ریمان مجموعہ یہ خواص رکھتا ہے لہذا آپ سوچتے ہوں گے کہ مجموعہ کا حد بھی یہی خواص رکھتا ہو گا۔ حقیقت میں ثبوت پیش کرتے ہوئے ذیلی وقفوں کے معیار کے  $\delta - \epsilon$  کے پیچیدہ دلائل درکار ہوں گے۔ یقیناً ان قواعد کے ثبوت اتنے آسان نہیں ہیں۔ ہم صرف دو قواعد کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ باقی قواعد کے ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پائے جاتے ہیں۔

دھیان رہے کہ قاعدہ 1 درحقیقت ایک تعریف ہے۔ ہم چاہیں گے کہ صفر لمبائی کے تمام کھل کی قیمت صفر ہو۔ پہلا قاعدہ قطعی کھل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے  $a = b$  کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 2 بھی تعریف ہے جو قطعی کھل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے  $b < a$  کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 3 اور قاعدہ 4 حد اور غیر قطعی کھل کے مماثل قواعد کی طرح ہیں۔ دو تفاعل کے کھل جانتے ہوئے ہم ان کے تمام مستقل مضرب، مجموعہ اور فرق کے کھل جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ 3 اور 4 کو بار بار استعمال کرتے ہوئے اختیاری قابل کھل تفاعل کے کسی بھی متناہی خطی میل کا جزو در جزو کھل حاصل کر سکتے ہیں۔ کسی بھی مستقل  $c_1, \dots, c_n$  جن کی علامتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں، اور وقفہ  $[a, b]$  پر قابل کھل تفاعل  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx$$

جس کا ثبوت، جو ریاضی مانوڈ سے حاصل کیا جاسکتا ہے، کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

شکل 5.39 میں مثبت تفاعل کے لئے قاعدہ 5 دکھایا گیا ہے جو کسی بھی تفاعل کے لئے درست ہے۔

ثبوت: قاعدہ 3

قاعدہ 3 کے تحت تقابل ضرب  $k$  کا مکمل تقابل کا مکمل ضرب  $k$  ہو گا۔ یہ درج ذیل کی بنا پر درست ہے۔

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x) dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= k \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

□

ثبوت : قاعدہ 6

قاعدہ 6 کہتا ہے کہ  $[a, b]$  پر مکمل کی قیمت کبھی بھی  $f$  کی کم سے کم قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے کم نہیں ہو گی اور نا ہی یہ کبھی  $f$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے زیادہ ہو گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ  $[a, b]$  کی کسی بھی خانہ بندی اور  $c_k$  کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}f_L \cdot (b - a) &= f_L \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n f_L \cdot \Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \\ &\leq f_H \cdot \Delta x_k \\ &= f_H \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\ &= f_H \cdot (b - a)\end{aligned}$$

مختصراً وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  کے تمام ریمان مجموعے درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$f_L \cdot (b - a) \leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \leq f_H \cdot (b - a)$$

لہذا ان کا حد، یعنی مکمل، بھی اس شرط کو مطمئن کرتا ہو گا۔

□

مثال 5.35: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 5, \quad \int_1^4 f(x) dx = -2, \quad \int_{-1}^1 h(x) dx = 7$$

درج ذیل ہوں گا۔

.1

$$\int_4^1 = - \int_1^4 f(x) dx = -(-2) = 2 \quad \text{قاعدہ 2}$$

.2

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)] dx &= 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 h(x) dx \\ &= 2(5) + 3(7) = 31 \end{aligned} \quad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}$$

.3

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 + (-2) = 3 \quad \text{قاعدہ 5}$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں درج ذیل تین عمومی نکلات کا حصول سیکھا۔

$$(5.16) \quad \int_a^b c dx = c(b-a) \quad (\text{مستقل } c)$$

$$(5.17) \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad (0 < a < b)$$

$$(5.18) \quad \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \quad (b < 0)$$

صفحہ 557 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتائج کو وسعت دی جاسکتی ہے۔

مثال 5.36: قیمت تلاش کریں:  $\int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - 7t + 5\right) dt$

حل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - 7t + 5\right) dt &= \frac{1}{4} \int_0^2 t^2 dt - 7 \int_0^2 t dt + \int_0^2 5 dt && \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2^3}{3}\right) - 7 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 5(2 - 0) && \text{مساوات 5.16 تا مساوات 5.18} \\ &= \frac{2}{3} - 14 + 10 = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

□

مثال 5.37: قیمت تلاش کریں:  $\int_2^3 x^2 dx$

حل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx &= \int_0^3 x^2 dx && \text{قاعدہ 5} \\ \int_2^3 x^2 dx &= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^2 x^2 dx && \text{درج بالا حل کریں} \\ &= \frac{3^2}{3} - \frac{2^2}{3} && \text{مساوات 5.18} \\ &= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

□

ہم  $\int_2^3 x^2 dx$  کے حل پر مزید غور حصہ میں کریں گے۔

قطعی نکلن کا کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات (کمتر بلند تر عدم مساوات، قاعدہ 6) کہتا ہے کہ  $\int_a^b f dx$  کا  $f_L \cdot (b - a)$  کم سے کم حد ہے جبکہ  $f_H \cdot (b - a)$  زیادہ سے زیادہ حد ہے۔

مثال 5.38: دکھائیں کہ  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

حل: وقفہ  $[0, 1]$  پر  $\sqrt{1 + \cos x}$  کی زیادہ سے زیادہ (بلند تر) قیمت  $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$  ہے لہذا

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx &\leq \sqrt{1 + \cos x}_{\text{بلند تر}} \cdot (1 - 0) && \text{قاعدہ 6} \\ &\leq \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

□

تکمل کی قیمت  $\sqrt{2}$  سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے لہذا تکمل 2 نہیں ہو سکتا ہے۔

مثال 5.39: عدم مساوات  $\cos x \geq (1 - x^2/2)$  تمام  $x$  کے لئے درست ہے۔ تکمل  $\int_0^1 \cos x \, dx$  کی کم سے کم (کمتر) قیمت تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos x \, dx &\geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx && \text{قاعدہ 7} \\ &\geq \int_0^1 1 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \, dx && \text{قاعدہ 3، قاعدہ 4} \\ &\geq 1 \cdot (1 - 0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1)^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83 \end{aligned}$$

□

تکمل کی قیمت کم از کم  $\frac{5}{6}$  کے برابر ہے۔

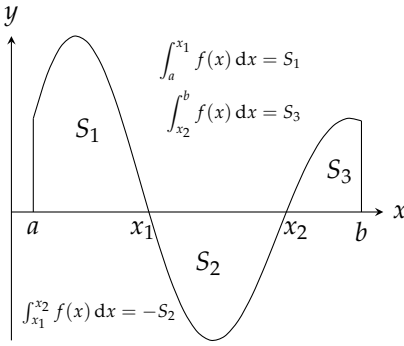
تکمل اور کل رقبہ

اگر وقفہ  $[a, b]$  پر  $y = f(x)$  قابل تکمل تقاضا ہو جس کی قیمت کہیں مثبت اور کہیں منفی ہو تب  $[a, b]$  پر  $f$  کا ریمان مجموعہ  $x$  محور کے بالائی جانب مستطیلوں کے رقبوں اور  $x$  محور کے نیچے جانب مستطیلوں کے رقبوں کی منفی قیمتوں کا مجموعہ ہوگا (شکل 5.40)۔ چونکہ مثبت اور منفی مقداریں ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں لہذا اس مجموعے کی تحدیدی قیمت تقاضا اور  $x$  محور کے نیچے کل رقبہ سے کم ہوگی۔ تکمل کی قیمت محور سے اوپر جانب رقبہ منفی محور سے نیچے جانب رقبہ کے برابر ہوگی۔

اس کا مطلب ہے کہ رقبہ کو تکمل سے حاصل کرتے ہوئے دھیان رکھنا ہوگا۔

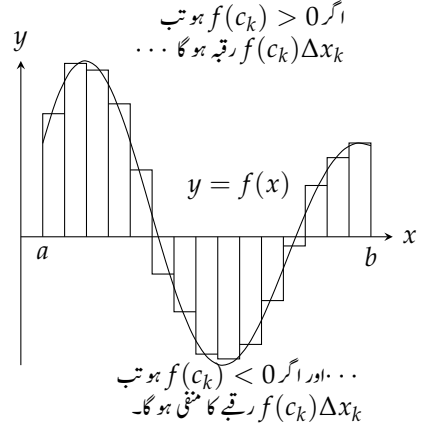
مثال 5.40: وقفہ  $0 \leq x \leq 3$  پر منفی  $y = 4 - x^2$  اور  $x$  محور کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

حل:  $x$  پر وقفہ  $[0, 3]$  کو منفی دو خانوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ایک خانے میں  $f(x) = 4 - x^2$  کی قیمت مثبت اور دوسرے خانے میں منفی ہے (شکل 5.41)۔ منفی اور  $x$  محور کے نیچے رقبہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان خانوں پر تکمل لے کر جوابات کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔



(ب)  $a$  تا  $b$  قاع  $f$  کا مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^b = S_1 - S_2 + S_3$$



(i) ریمان مجموعہ رقبوں کا الجبرائی مجموعہ ہے اور دونوں کی تحدیدی قیمت مکمل ہے۔

شکل 5.40: مکمل اور کل رقبہ کا تعلق۔

وقفہ  $[0, 2]$  پر مکمل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4 - x^2) dx &= \int_0^2 4 dx - \int_0^2 x^2 dx \\ &= 4(2 - 0) - \frac{(2)^3}{3} \\ &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

مساوات 5.16 اور مساوات 5.18

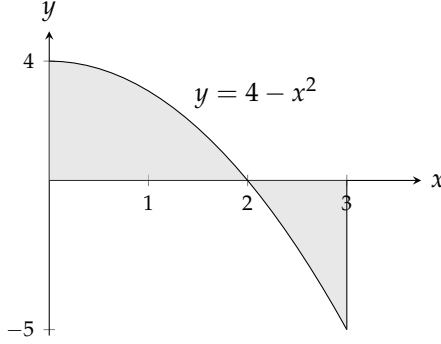
وقفہ  $[2, 3]$  پر مکمل:

$$\begin{aligned} \int_2^3 (4 - x^2) dx &= \int_2^3 4 dx - \int_2^3 x^2 dx \\ &= 4(3 - 2) - \left( \frac{(3)^2}{3} - \frac{(2)^2}{3} \right) \\ &= 4 - \frac{19}{3} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

مساوات 5.16 اور مثال 5.37

□

کل رقبہ  $\frac{16}{3} + \left| -\frac{7}{3} \right| = \frac{23}{3}$  ہو گا۔



شکل 5.41: کچھ رقبہ  $x$  محور سے اور کچھ اس سے نیچے پایا جاتا ہے (مثال 5.40)۔

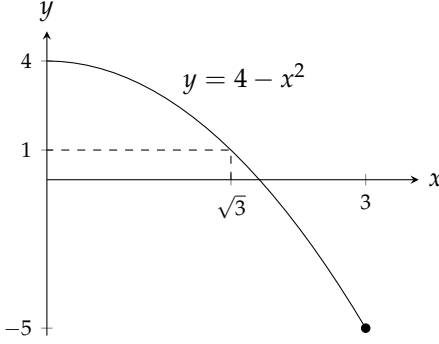
### اختیاری استمراری تفاعل کی اوسط قیمت

ہم نے مثال 5.25 میں غیر منفی استمراری تفاعل کی اوسط قیمت پر تبصرہ کیا۔ ہم اب  $f$  کا غیر منفی ہونے کی شرط کو ختم کرتے ہوئے تفاعل کی اوسط قیمت کی تعریف پیش کرنے کے قابل ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر استمراری تفاعل کم از کم ایک بار اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔

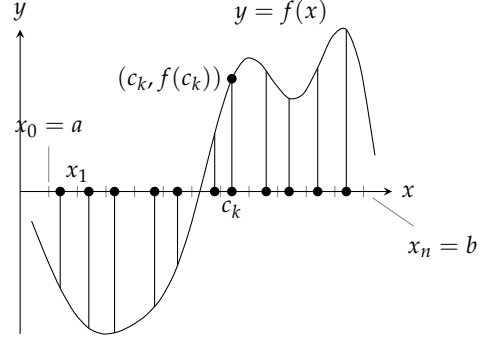
ہم دوبارہ ریاضیات سے اوسط قیمت کا تصور لیتے ہیں جہاں  $n$  اعداد کی انفرادی قیمتوں کے مجموعہ کو  $n$  سے تقسیم کرنے سے اعداد کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔ بند وقفہ  $[a, b]$  پر استمراری تفاعل  $f$  کے لئے لامتناہی تعداد کے اعداد کو لینا ہو گا لیکن ہم یکساں وقفوں پر تفاعل سے نمونہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم  $[a, b]$  کو برابر لمبائیوں کے  $n$  ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  ہو گی۔ ہم ہر ذیلی وقفے پر  $f$  کی قیمت نقطہ  $c_k$  پر حاصل کرتے ہیں (شکل 5.42)۔ ان  $n$  نمونوں کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(c_k) && \text{مجموعہ کی سنگماروپ} \\ &= \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x}_{f \text{ پر } [a, b] \text{ کا رییمان مجموعہ}} \end{aligned}$$

یوں نمونی قیمتوں کی اوسط قیمت ہر صورت  $[a, b]$  پر  $f$  کا رییمان مجموعہ ضرب  $\frac{1}{b-a}$  ہو گی۔ ہم جیسے جیسے نمونہ کی جسامت (تعداد) بڑھاتے جائیں اور خانہ بندی کے معیار کو صفر کے قریب تر کریں، یہ اوسط قیمت  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  تک پہنچے گی۔ اس نتیجے سے ہمیں درج ذیل تعریف ملتی ہے۔



شکل 5.43: وقفہ  $[0, 3]$  پر تقابل  $f = 4 - x^2$  کی اوسط قیمت 1 کو تقابل  $x = \sqrt{3}$  پر اختیار کرتا ہے (مثال 5.41)۔



شکل 5.42: وقفہ  $[a, b]$  پر تقابل کی نمونی قیمتیں۔

تعریف: اگر  $[a, b]$  پر  $f$  قابل مکمل تقابل ہو تب  $[a, b]$  پر  $f$  کی اوسط قیمت<sup>30</sup> درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

مثال 5.41: وقفہ  $[0, 3]$  پر  $f(x) = 4 - x^2$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ کیا دیے گئے وقفے میں کسی نقطے پر  $f$  کی قیمت اس اوسط جتنی ہو گی؟

حل:

$$\begin{aligned} f_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 (4 - x^2) dx = \frac{1}{3} \left( \int_0^3 4 dx - \int_0^3 x^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 4(3-0) - \frac{(3)^3}{3} \right) = \frac{1}{3} (12 - 9) = 1 \end{aligned}$$

وقفہ  $[0, 3]$  پر  $f$  کی اوسط قیمت 1 ہے۔ تقابل کی قیمت یہی تب ہو گی جب  $4 - x^2 = 1$  ہو گا جس سے  $x = \pm \sqrt{3}$  ملتے ہیں۔ چونکہ ان دو نقطوں میں سے صرف  $x = \sqrt{3}$  وقفہ  $[0, 3]$  پر پایا جاتا ہے لہذا دیے گئے وقفے میں  $x = \sqrt{3}$  پر  $f$  کی قیمت اوسط قیمت 1 کے برابر ہو گی (شکل 5.43)۔

□



### اوسط قیمت مسئلہ برائے قطعی تکملات

بند وقفہ پر استمراری تفاعل کی قیمت، بند وقفہ پر کم از کم ایک بار، تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہوگی۔ اس فقرے کو قطعی تکملات کا اوسط قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ 5.2: مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات  
اگر  $[a, b]$  پر  $f$  قابل تکمل ہو تب  $[a, b]$  میں کسی نقطہ  $c$  پر درج ذیل ہوگا (شکل 5.44)۔

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ہم نے مثال 5.41 میں  $f$  کو حاصل اوسط قیمت کے برابر پر کرتے ہوئے  $x$  کی وہ قیمت تلاش کی جہاں تفاعل اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔ البتہ اس سے یہ حقیقت ثابت نہیں ہوتی ہے کہ ایسا نقطہ موجود ہونا لازمی ہے۔ اس سے صرف اتنا ثابت ہوتا ہے کہ مثال 5.41 میں ایسا نقطہ موجود تھا۔ مسئلہ 5.2 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں زیادہ عمومی دلیل درکار ہوگی۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.2

اگر ہم قاعدہ 6 میں (کمتر بلند تر قاعدہ) دونوں اطراف کو  $(b-a)$  سے تقسیم کریں تب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f_L \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f_H$$

چونکہ  $f$  استمراری ہے لہذا استمراری تفاعل کے مسئلہ 2.9 کے تحت تفاعل  $f_L$  اور  $f_H$  کے سچ تمام قیمتیں اختیار کرے گا۔ اس طرح  $f$  ہر صورت وقفہ  $[a, b]$  میں کسی نقطہ  $c$  پر  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  قیمت بھی اختیار کرے گا۔

□

تفاعل کا استمراری ہونا یہاں ضروری ہے۔ غیر استمراری تفاعل اپنی اوسط قیمت کے اوپر سے چھلانگ لگا کر گزر سکتا ہے (شکل 5.45)۔

ہم مسئلہ 5.2 سے مزید کیا جان سکتے ہیں؟ ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5.42: اگر  $[a, b]$  پر  $f$  قابل تکمل ہو جہاں  $a \neq b$  ہے اور اگر

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

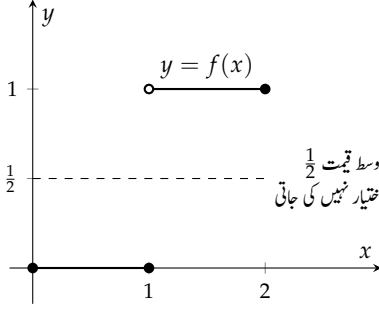
ہو تب  $[a, b]$  میں کم از کم ایک بار  $f(x) = 0$  ہوگا۔

حل: وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  کی اوسط قیمت درج ذیل ہوگی۔

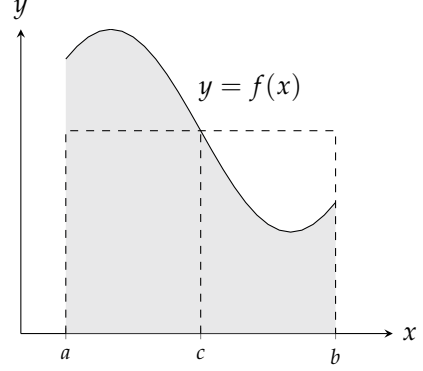
$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

□

مسئلہ 5.2 کے تحت  $[a, b]$  میں کسی نقطہ  $c$  پر  $f$  یہی اوسط قیمت اختیار کرے گا۔



شکل 5.45: غیر استمراری تفاعل ضروری نہیں کہ اوسط قیمت اختیار کرے۔



شکل 5.44: وقفہ  $[a, b]$  کے کسی نقطہ  $c$  پر  
 $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$  ہو گا۔

### سوالات

معلوم خواص اور قیمتوں سے دیگر تكميلات كى قيمتوں كا حصول

سوال 1: فرض كريں  $f$  اور  $g$  استمرارى ہيں اور درج ذيل تكميلات ديے گئے ہيں۔

$$\int_1^2 f(x) dx = -4, \quad \int_1^5 f(x) dx = 6, \quad \int_1^5 g(x) dx = 8$$

صفحہ 557 پر ديے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذيل تلاش كريں۔

$$\int_1^5 [f(x) - g(x)] dx \quad \text{ا.} \quad \int_2^5 g(x) dx \quad \text{ب.} \quad \int_1^2 3f(x) dx \quad \text{ج.}$$

$$\int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx \quad \text{د.} \quad \int_2^5 f(x) dx \quad \text{ه.} \quad \int_5^1 g(x) dx \quad \text{و.}$$

سوال 2: فرض كريں  $f$  اور  $h$  استمرارى ہيں اور درج ذيل ديے گئے ہيں۔

$$\int_1^9 f(x) dx, \quad \int_7^9 f(x) dx, \quad \int_7^9 h(x) dx = 4$$

صفحہ 557 پر ديے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذيل تلاش كريں۔

$$\int_1^9 -2f(x) dx \text{ ا.} \quad \int_7^9 [2f(x) - 3h(x)] dx \text{ ج.} \quad \int_1^7 f(x) dx \text{ د.}$$

$$\int_7^9 [f(x) + h(x)] dx \text{ ب.} \quad \int_9^1 f(x) dx \text{ د.} \quad \int_9^7 [h(x) - f(x)] dx \text{ و.}$$

سوال 3: فرض کریں  $\int_1^2 f(x) dx = 5$  دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int_1^2 f(u) du \text{ ا.} \quad \int_2^1 f(t) dt \text{ ج.} \quad \int_1^2 \sqrt{3}f(z) dz \text{ ب.} \quad \int_1^2 [-f(x)] dx \text{ د.}$$

سوال 4: فرض کریں  $\int_{-3}^0 g(t) dt = \sqrt{2}$  دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int_0^{-3} g(t) dt \text{ ا.} \quad \int_{-3}^0 g(u) du \text{ ب.} \quad \int_{-3}^0 [-g(x)] dx \text{ ج.} \quad \int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}} dr \text{ د.}$$

سوال 5: فرض کریں  $f$  استمراری ہے جبکہ  $\int_0^3 f(z) dz = 3$  اور  $\int_0^4 f(z) dz = 7$  دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int_3^4 f(z) dz \text{ ا.} \quad \int_4^3 f(t) dt \text{ ب.}$$

سوال 6: فرض کریں  $h$  استمراری ہے جبکہ  $\int_{-1}^1 h(r) dr = 0$  اور  $\int_{-1}^3 h(r) dr = 6$  دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int_1^3 h(r) dr \text{ ا.} \quad - \int_3^1 h(u) du \text{ ب.}$$

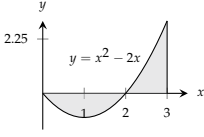
سوال 7 تا سوال 18 میں دیے مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_3^1 7 dx \text{ سوال 7:}$$

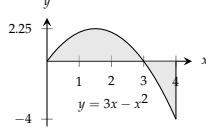
$$\int_0^{-2} \sqrt{2} dx \text{ سوال 8:}$$

$$\int_0^2 5x dx \text{ سوال 9:}$$

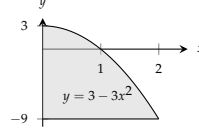
$$\int_3^5 \frac{x}{8} dx \text{ سوال 10:}$$



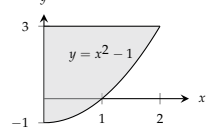
شکل 5.49: رقبہ سوال 22



شکل 5.48: رقبہ سوال 21



شکل 5.47: رقبہ سوال 20



شکل 5.46: رقبہ سوال 19

سوال 11:  $\int_0^2 (2t - 3) dt$

سوال 12:  $\int_0^{\sqrt{2}} (t - \sqrt{2}) dt$

سوال 13:  $\int_2^1 (1 + \frac{z}{2}) dz$

سوال 14:  $\int_3^0 (2z - 3) dz$

سوال 15:  $\int_1^2 3u^2 du$

سوال 16:  $\int_{1/2}^1 24u^2 du$

سوال 17:  $\int_0^2 (3x^2 + x - 5) dx$

سوال 18:  $\int_1^0 (3x^2 + x - 5) dx$

رقبہ سوال 19 تا سوال 22 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 19:  $x = 0$  تا  $x = 2$  کے مابین منحنی  $y = x^2 - 1$  اور  $y$  محور کے بیچ رقبہ (شکل 5.46)۔

سوال 20: رقبہ شکل 5.47 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 21: رقبہ شکل 5.48 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 22: رقبہ شکل 5.49 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد (i) دیے وقفے پر تفاعل مکمل کریں، اور (ب) تفاعل اور  $x$  محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 23:  $y = x^2 - 6x + 8, [0, 3]$

سوال 24:  $y = -x^2 + 5x - 4, [0, 2]$

سوال 25:  $y = 2x - x^2, [0, 3]$

سوال 26:  $y = x^2 - 4x, [0, 5]$

اوسط قیمت

سوال 27 تا سوال 34 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اس وقفے پر تفاعل کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ دیے گئے وقفہ پر کس نقطہ یا نقطوں پر تفاعل کی قیمت اس کی اوسط قیمت کے برابر ہوگی؟

سوال 27:  $f(x) = x^2 - 1, [0, \sqrt{3}]$

سوال 28:  $f(x) = -\frac{x^2}{2}, [0, 3]$

سوال 29:  $f(x) = -3x^2 - 1, [0, 1]$

سوال 30:  $f(x) = 3x^2 - 3, [0, 1]$

سوال 31:  $f(t) = (t - 1)^2, [0, 3]$

سوال 32:  $f(t) = t^2 - t, [-2, 1]$

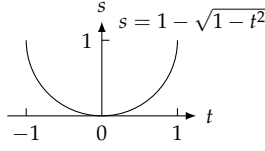
سوال 33:  $g(x) = |x| - 1, [-1, 3](ج), [1, 3](ب), [0, 3](i)$

سوال 34:  $h(x) = -|x|, [-1, 1](ج), [0, 1](ب), [-1, 0](i)$

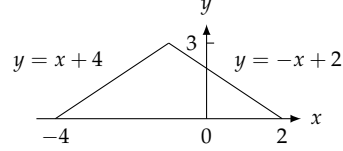
سوال 35 تا سوال 38 دیے گئے وقفہ پر تفاعل کی اوسط قیمت (بغیر مکمل) تلاش کریں۔

سوال 35:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & -4 \leq x \leq -1 \\ -x + 2, & -1 < x \leq 2 \end{cases} \quad [-4, 2] \quad \text{شکل 5.50}$$



شکل 5.51



شکل 5.50

سوال 36: وقفہ  $[-1, 1]$  پر تفاعل  $f(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$  جس کو شکل 5.51 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 37: وقفہ  $[0, 2\pi]$  پر تفاعل  $f(t) = \sin t$  دیا گیا ہے۔

سوال 38: وقفہ  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  پر تفاعل  $f(\theta) = \tan \theta$  دیا گیا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔  

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

سوال 40: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کا بہتر اندازہ حاصل کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

سوال 41: دکھائیں کہ  $\int_0^1 \sin(x^2) dx$  کی قیمت کسی صورت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 42: دکھائیں کہ  $\int_0^1 \sqrt{x+8} dx$  کی قیمت  $2\sqrt{2}$  اور 3 کے بیچ پائی جاتی ہے۔

سوال 43: فرض کریں  $f$  استمراری ہے اور  $\int_1^2 f(x) dx = 4$  دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ  $[1, 2]$  پر کم از کم ایک بار  $f(x) = 4$  ہو گا۔

سوال 44: فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  اور  $g$  استمراری ہیں جہاں  $a \neq b$  ہے۔ مزید  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = 0$  دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ  $[a, b]$  میں کم از کم ایک بار  $f(x) = g(x)$  ہو گا۔

سوال 45: غیر منفی تفاعل کا مکمل  
کمتر بلند تر عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں جہاں  $f$  قابل مکمل ہے۔

$$f(x) \geq 0, \quad [a, b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

سوال 46: غیر مثبت تفاعل کا مکمل  
درج ذیل دکھائیں جہاں  $f$  قابل مکمل ہے۔

$$f(x) \leq 0, \quad [a, b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

سوال 47: عدم مساوات  $\sin x \leq x$  کسی بھی  $x \geq 0$  کے لئے درست ہے۔ مکمل  $\int_0^1 \sin x dx$  کی قیمت کی بالائی حد تلاش کریں۔

سوال 48: وقفہ  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  پر عدم مساوات  $\sec x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$  درست ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے  $\int_0^1 \sec x dx$  کی قیمت کی زیریں حد تلاش کریں۔

سوال 49: اگر  $[a, b]$  پر قابل مکمل  $f$  کی عمومی قیمت اوسط  $f$  ہو تب  $[a, b]$  پر عدد اوسط  $f$  اور  $f$  کے مکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ کیا ایسا ہوتا ہے؟ کیا درج ذیل درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b f_{\text{اوسط}} dx = \int_a^b f dx$$

سوال 50: کیا اچھا ہوتا کہ وقفہ  $[a, b]$  پر قابل مکمل تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل قواعد پر پورا اترتی۔

$$1. \quad (f + g)_{\text{اوسط}} = f_{\text{اوسط}} + g_{\text{اوسط}}$$

$$2. \quad (kf)_{\text{اوسط}} = k(f)_{\text{اوسط}}$$

$$3. \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{اگر} \quad f_{\text{اوسط}} \leq g_{\text{اوسط}}$$

سوال 51: اگر  $150 \text{ km h}^{-1}$  فاصلہ طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار  $30 \text{ km h}^{-1}$  اور واپسی اسی راہ کو طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار  $50 \text{ km h}^{-1}$  ہو تب دونوں اطراف کو ملا کر آپ کی اوسط رفتار کتنی ہو گی؟

سوال 52: ایک ڈیم سے  $10 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے  $1000 \text{ m}^3$  پانی خارج کیا گیا اور اس کے بعد  $20 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے مزید  $1000 \text{ m}^3$  پانی خارج کیا گیا۔ پانی خارج کرنے کی اوسط شرح دریافت کریں۔

## 5.7 بنیادی مسئلہ

اس حصہ میں کھلی احصاء کا بنیادی مسئلہ پیش کیا جائے گا جو مکمل اور تفرق کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اس مسئلہ نے ریاضیات میں بہت زیادہ ترقی کو ممکن بنایا جس نے اگلے دو صدیوں تک سائنس میں ہلچل مچا دی۔ انسانی تاریخ میں اس مسئلہ کی دریافت کو سب سے زیادہ اہم تصور کیا جاتا ہے۔ لہنسز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس مسئلہ کو دریافت کیا۔

## بنیادی مسئلہ، جزو اول

قابل مکمل تفاعل  $f(t)$  کا مقررہ عدد  $a$  سے عدد  $x$  تک مکمل از خود ایک تفاعل  $F$  ہو گا جس کی  $x$  پر قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$(5.19) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

مثال کے طور پر اگر  $f$  غیر منفی ہو اور  $a$  کے دائیں جانب  $x$  پایا جاتا ہو تب  $a$  تا  $x$  ترسیم کے نیچے رقبہ  $F(x)$  ہو گا۔ مکمل کا بالائی حد  $x$  ہے اور  $F$  کسی بھی حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی طرح ایک تفاعل ہے۔ یوں متغیر  $x$  کی ہر قیمت کے لئے  $F(x)$  ایک مخصوص قیمت دیگا جو  $a$  تا  $x$  تفاعل  $f$  کا مکمل ہو گا۔

نئے تفاعل متعارف کرنے کی ایک اہم ترکیب مساوات 5.19 دیتی ہے جو تفرق مساوات کا حل بھی دیتی ہے (جس پر کچھ دیر میں غور کیا جائے گا)۔ مساوات 5.19 کا یہاں ذکر کرنا اس لئے ضروری ہے کہ یہ مکمل اور تفرق کے بیچ تعلق بیان کرتی ہے۔ یوں اگر  $f$  کوئی بھی استمراری تفاعل ہو تب  $F$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق  $f$  ہو گا۔ اس طرح ہر  $x$  پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

یہ تصور اتنا اہم ہے کہ یہ احصاء کے بنیادی مسئلہ کا پہلا جزو دیتا ہے۔

مسئلہ 5.3: احصاء کا بنیادی مسئلہ، جزو اول

اگر  $[a, b]$  پر  $f$  استمراری ہو تب  $[a, b]$  کے ہر نقطہ پر  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  کا درج ذیل تفرق پایا جائے گا۔

$$(5.20) \quad \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

یہ نتیجہ خوبصورت، طاقتور اور حیران کن ہے اور عین ممکن ہے کہ مساوات 5.20 پوری ریاضیات میں اہم ترین مساوات ہو۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل  $f$  کے لئے تفرق مساوات  $\frac{dF}{dx} = f$  کا حل موجود ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل  $f$  کسی دوسرے تفاعل،



یعنی  $\int_a^x f(t) dt$  کا تفرق ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے۔ اور یہ کہتی ہے کہ مکمل اور تفرق کے عمل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.3

ہم تفرق کی تعریف کو تفاعل  $F(x)$  پر لاگو کرتے ہوئے اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل حاصل تقسیم

$$(5.21) \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

لکھ کر دکھاتے ہیں کہ  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے اس کا حد  $f(x)$  ملتا ہے۔

مساوات 5.21 میں  $F(x+h)$  اور  $F(x)$  کی مکملی روپ پر کرنے سے شمار کنندہ درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

صفحہ 557 پر جمع پذیری کا قاعدہ برائے مکملات دائیں ہاتھ کی درج ذیل سادہ روپ دیتی ہے

$$\int_x^{x+h} f(t) dt$$

لہذا مساوات 5.21 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} [F(x+h) - F(x)] \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

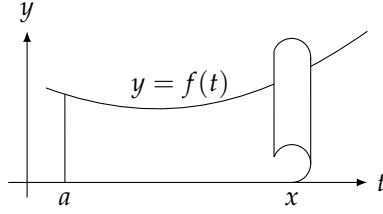
مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی مکملات (مسئلہ 5.2) کے تحت مساوات 5.22 میں دی گئی آخری تعلق کی قیمت، وقفہ  $x$  تا  $x+h$  پر  $f$  کی کسی ایک قیمت کے برابر ہوگی۔ یوں اس وقفہ میں کسی عدد  $c$  پر درج ذیل ہو گا۔

$$(5.23) \quad \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

یوں  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے  $\frac{1}{h}$  ضرب مکمل  $\int_x^{x+h} f(t) dt$  کی قیمت جاننے کی لئے ہم  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے  $f(c)$  کی قیمت پر نظر رکھتے ہیں۔

جیسے جیسے  $h \rightarrow 0$  ہوتا ہے ویسے ویسے وقفے کا سر  $x+h$  اس کے سر  $x$  کے قریب سے قریب ہوتا جاتا ہے جس کی وجہ سے  $c$  بھی  $x$  کے قریب سے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ چونکہ  $x$  پر  $f$  استمراری ہے لہذا  $f(c)$  کی قیمت  $f(x)$  کے قریب سے قریب پہنچتی ہے:

$$(5.24) \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$



شکل 5.52: نقطہ  $x$  پر زمین کو قالین شرح  $f(x) = \frac{dA}{dx}$  سے ڈھانپتا ہے۔

دوبارہ شروع سے بات کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad \text{تفرق کی تعریف}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad \text{مساوات 5.22}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \quad \text{مساوات 5.23}$$

$$= f(x) \quad \text{مساوات 5.24}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگر  $f$  کی قیمتیں مثبت ہوں تب درج ذیل مساوات

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

کی ایک خوبصورت جیومیٹریائی معنی اخذ کی جاسکتی ہے۔ چونکہ تب  $a$  تا  $x$  تقابل  $f$  کا مکمل  $a$  تا  $x$  محور  $x$  اور  $f$  کے پچھ رقبہ ہو گا۔ فرض کریں کہ آپ اس رقبہ پر بائیں سے دائیں چلتے ہوئے ایک قالین بچھاتے ہیں جس کی متغیر چوڑائی  $f(t)$  ہو۔ جب قالین نقطہ  $x$  سے گزرتا ہے اس لمحہ زمین ڈھانپنے کی شرح  $f(x)$  ہوگی (شکل 5.52)۔

مثال 5.43:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\pi}^x \cos t dt = \cos x \quad \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \cos t$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

□



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

