احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ v

میری پہلی کتاب کا دیباچہ vii

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 15
1.3 تفاعل 32
1.4 ترسیم کی منتقلی 54
1.5 تکونیاتی تفاعل 74

2 حدود اور استمرار 95
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 95
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 113
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف 126
2.4 تصور حد کی توسیع 146

ا ضمیمہ دوم 155

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. یک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **بائیں ہاتھ حد**[7] حاصل ہو گا۔اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **دائیں ہاتھ حد**[8] حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

یک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔اسی لئے عام حد کو بعض اوقات **دو طرفہ حد**[9] بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر یک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

تعریف: **دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف**
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) ، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **دائیں ہاتھ حد** L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

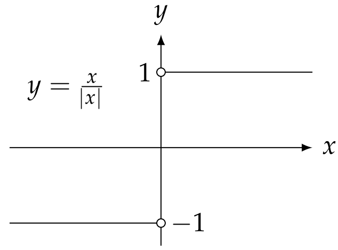
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

فرض کریں کہ وقفہ (c, a) ، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **بائیں ہاتھ حد** M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

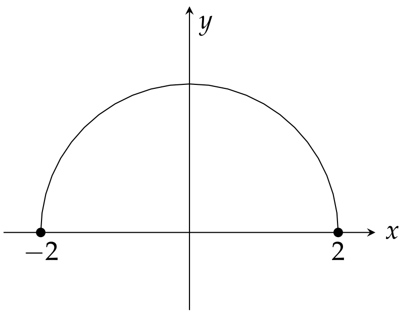
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

---

[7] left-handed limit
[8] right-handed limit
[9] two-sided limit



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔



شکل 2.43: تفاعل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔

شکل 2.42 میں تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -1$$

$x \to a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔اسی طرح $x \to a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا دائرہ کار $[-2, 2]$ ہے۔تفاعل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

نقطہ $x = -2$ پر تفاعل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔اسی طرح $x = 2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x = -2$ اور $x = 2$ پر تفاعل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ $\square$

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔دو تفاعل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تفاعل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: یک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x\to c} f(x)=L \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to c^-} f(x)=L \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x=0$ پر: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔($x=0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x=1$ پر: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$ ہے اگرچہ $f(1)=1$ ہے۔ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔(دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x=2$ پر: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=1$ اور $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$ ہیں۔ $\lim_{x\to 2} f(x)=1$ ہے اگرچہ $f(2)=2$ ہے۔

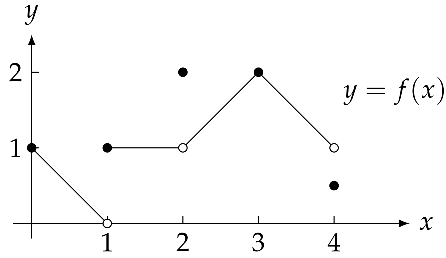
$x=3$ پر: $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=2$ ہے۔

$x=4$ پر: $\lim_{x\to 4^-} f(x)=1$ ہے اگرچہ $f(4)\neq 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔(نقطہ $x=4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

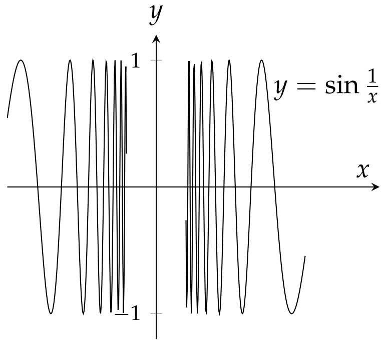
اس کے علاوہ $[0,4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ □

اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا یک طرفہ حد موجود تھا۔درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x=0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x=0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نا ہی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y=\sin\frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔
حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ایسا کوئی یکتا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔یوں $x=0$ پر $\sin\frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نا کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ □



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26

لامتناہی حد

آئیں تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے $x\to 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔ یوں $x\to 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x\to 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

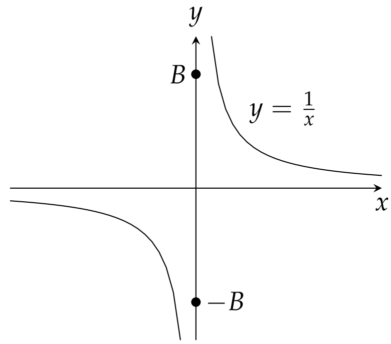
یہ لکھنے سے ہم ہرگز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x\to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x\to 0^-$ کرنے سے $f(x)=\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

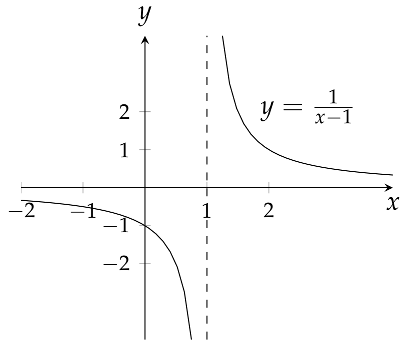
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

یہاں بھی ہم ہرگز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x\to 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: یک طرفہ حد
$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.46: تفاعل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27

حل: **ترسیمی حل:** تفاعل $y=\frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y=\frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y=\frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y=\frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=\infty,\quad \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x-1$ اور اس کے بالعکس متناسب پر غور کریں۔ $x\to1^+$ کرنے سے $(x-1)\to0^+$ اور $\frac{1}{x-1}\to\infty$ ملتے ہیں۔ $x\to1^-$ کرنے سے $(x-1)\to0^-$ اور $\frac{1}{x-1}\to-\infty$ ملتے ہیں۔ □

مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد

(ا) $x=0$ کے قریب $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (ب) $x=-3$ کے قریب $g(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔

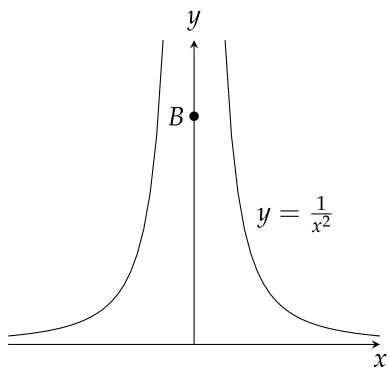
حل: (ا) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

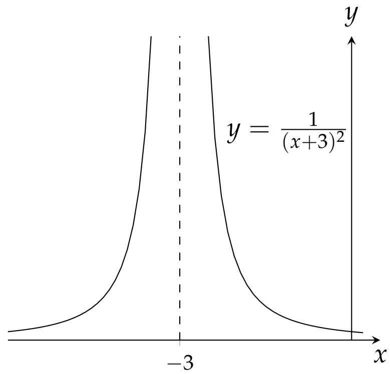
(ب) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x\to-3}g(x)=\lim_{x\to-3}\frac{1}{(x+3)^2}=\infty$$

□



شکل 2.48: تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.49: تفاعل $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \to 0^+$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \to 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: ناطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \qquad \text{(ا)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \qquad \text{(ب)}$$

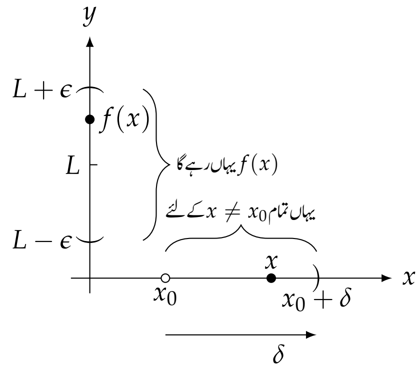
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \qquad \text{(ج)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \qquad \text{(د)}$$

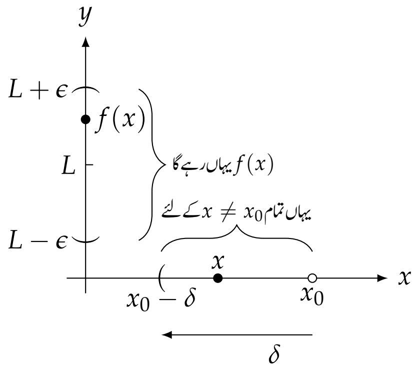
$$\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \qquad \text{(و)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \qquad \text{(ہ)}$$

جزو (ا) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہٰذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔جزو (ہ) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جا سکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.1}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

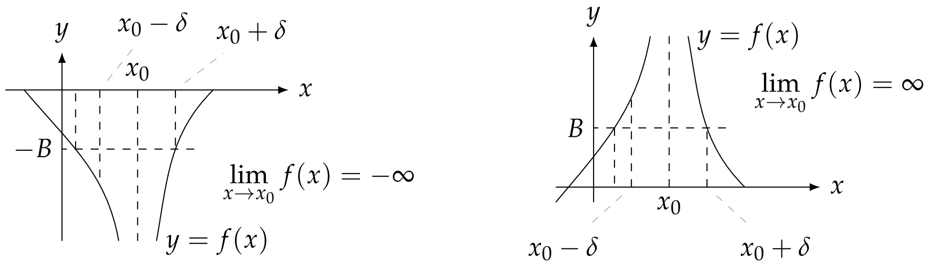
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

بائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.2}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$



شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$0 < x - x_0 < \delta \implies \left| f(x) - L \right| < \epsilon \tag{2.3}$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\delta < x - x_0 < 0 \implies \left| f(x) - L \right| < \epsilon \tag{2.4}$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| f(x) - L \right| < \epsilon \tag{2.5}$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبدا سے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: **لامتناہی حد**
(ا) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم