

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی کمالات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	متناهی مجموعہ سے اندازہ لگانا
531	۱	ضمیمہ دوم



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 5

# تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

### 5.1 غیر قطعی کمالات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق  $f(x)$  سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق  $f$  ہے۔ ان تفاعل کو  $f$  کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو  $f$  کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔



## الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمیل

تعریف: تفاعل  $f(x)$  کا الٹ تفرق تب  $F(x)$  ہو گا جب  $f$  کے دائرہ کار میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

$f$  کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کا غیر قطعی تکمیل<sup>1</sup> ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x) dx$$

علامت  $\int$  کو علامت تکمیل کہتے ہیں۔ تفاعل  $f$  کو متکمل<sup>2</sup> اور  $x$  کو تکمیل کا متغیر<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل  $f$  کے حاصل کردہ الٹ تفرق  $F$  اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکمیلی علامت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$(5.1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

مستقل  $C$  کو تکمیل کا مستقل<sup>4</sup> یا اختیاری مستقل<sup>5</sup> کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " $x$  کے لحاظ سے تفاعل  $f$  کا غیر قطعی تکمیل  $F(x) + C$  ہے۔"  $F(x) + C$  کے حصول کو  $f$  کے تکمیل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1:  $\int 2x dx$  تلاش کریں۔  
حل:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$2x$  کا الٹ تفرق  $x^2$  ہے اور  $C$  تکمیل کا مستقل ہے۔ کلیہ  $x^2 + C$  تفاعل  $2x$  کے تمام تفرقات دیتا ہے۔ یوں  $x^2 + 1$  ،  $x^2 - \pi$  اور  $x^2 + \sqrt{2}$  تفاعل  $2x$  کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔ جدول 5.1 میں غیر قطعی کمالات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

indefinite integral<sup>1</sup>  
integrand<sup>2</sup>  
variable of integration<sup>3</sup>  
constant of integration<sup>4</sup>  
arbitrary constant<sup>5</sup>

جدول 5.1: مکمل کے کلیات

تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے	غیر قطعی مکمل
$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$	1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, n \text{ ناظم}$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = \int 1 dx = x + C$ (خصوصی صورت)
$\frac{d}{dx} \left( -\frac{\cos kx}{k} \right) = \sin kx$	2. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin kx}{k} \right) = \cos kx$	3. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	4. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx} (-\cot x) = \csc^2 x$	5. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	6. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx} (-\csc x) = \csc x \cot x$	7. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں  $n = 5$  لیتے ہوئے:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں  $n = -\frac{1}{2}$  لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں  $k = 2$  لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں  $k = \frac{1}{2}$  لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمیل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق مکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{d}{dx}(x \sin x + \cos x + C) = x \cos x + \sin x - \sin x + 0 = x \cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمیل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی تکمل کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ:	$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
(k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	
2. منفی کے لئے قاعدہ:	$\int -f(x) dx = - \int f(x) dx$
(قاعدہ 1 میں $k = -1$ لیا گیا ہے۔)	
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x) \mp g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

- ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب  $kf$  کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ  $f$  کے الٹ تفرق ضرب  $k$  کے برابر ہو۔
- بالخصوص ایک تفاعل اس صورت  $-f$  کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ  $f$  کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔
- ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق  $f \mp g$  کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ  $f$  کے الٹ تفرق اور  $g$  کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکمیلی علامت میں لکھنے سے غیر قطعی تکمل کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: تکمل کا مستقل

$\int 5 \sec x \tan x dx = 5 \int \sec x \tan x dx$	جدول 5.2، قاعدہ 1
$= 5(\sec x + C)$	جدول 5.1، کلیہ 6
$= 5 \sec x + 5C$	غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت
$= 5 \sec x + C'$	مستقل 5C کو مستقل $C'$ لکھا گیا ہے
$= 5 \sec x + C$	$C'$ ایک مستقل ہے جس کو ہم اب C سے ظاہر کرتے ہیں

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل  $C'$  کو بغیر علامت (!) لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, dx = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا مکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ مکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل مکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو مکمل۔

درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx$$

اگر ہم دیکھ کر بتا سکیں کہ  $x^2 - 2x + 5$  کا الٹ تفرق  $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$  ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو مکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو  $C$  لکھا جاسکتا ہے یعنی  $C_1 + C_2 + C_3 = C$  جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو مکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے  $C$  لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل  $C$  لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$  اور  $\cos^2 x$  کے کمالات

بعض اوقات جن کمالات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکنیکی تماشل کی مدد سے ان کمالات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔  $\sin^2 x$  اور  $\cos^2 x$  کے کمالات عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماشل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

□

## سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 1: 18 سوال میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 1: (ا)  $2x$ ، (ب)  $x^2$ ، (ج)  $x^2 - 2x + 1$   
جواب: (ا)  $x^2$ ، (ب)  $\frac{x^3}{3}$ ، (ج)  $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

سوال 2:  $x^7 - 6x + 8$  (ج)،  $x^7$  (ب)،  $6x$  (ا)

سوال 3:  $x^{-4} + 2x + 3$  (ج)،  $x^{-4}$  (ب)،  $-3x^{-4}$  (ا)  
جواب:  $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$  (ج)،  $-\frac{1}{3}x^{-3}$  (ب)،  $x^{-3}$  (ا)

سوال 4:  $-x^{-3} + x - 1$  (ج)،  $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$  (ب)،  $2x^{-3}$  (ا)

سوال 5:  $2 - \frac{5}{x^2}$  (ج)،  $\frac{5}{x^2}$  (ب)،  $\frac{1}{x^2}$  (ا)  
جواب:  $2x + \frac{5}{x}$  (ج)،  $-\frac{5}{x}$  (ب)،  $-\frac{1}{x}$  (ا)

سوال 6:  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  (ج)،  $\frac{1}{2x^3}$  (ب)،  $-\frac{2}{x^3}$  (ا)

سوال 7:  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  (ج)،  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  (ب)،  $\frac{3}{2}\sqrt{x}$  (ا)  
جواب:  $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$  (ج)،  $\sqrt{x}$  (ب)،  $\sqrt{x^3}$  (ا)

سوال 8:  $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  (ج)،  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$  (ب)،  $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$  (ا)

سوال 9:  $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$  (ج)،  $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  (ب)،  $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  (ا)  
جواب:  $x^{-1/3}$  (ج)،  $x^{1/3}$  (ب)،  $x^{2/3}$  (ا)

سوال 10:  $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$  (ج)،  $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$  (ب)،  $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$  (ا)

سوال 11:  $\sin \pi x - 3 \sin 3x$  (ج)،  $3 \sin x$  (ب)،  $-\pi \sin \pi x$  (ا)  
جواب:  $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + \cos(3x)$  (ج)،  $-3 \cos x$  (ب)،  $\cos(\pi x)$  (ا)

سوال 12:  $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$  (ج)،  $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$  (ب)،  $\pi \cos \pi x$  (ا)

سوال 13:  $-\sec^2 \frac{3x}{2}$  (ج)،  $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$  (ب)،  $\sec^2 x$  (ا)  
جواب:  $-\frac{2}{3} \tan(\frac{3x}{2})$  (ج)،  $2 \tan(\frac{x}{3})$  (ب)،  $\tan x$  (ا)

سوال 14:  $1 - 8 \csc^2 2x$  (ج)،  $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$  (ب)،  $\csc^2 x$  (ا)

سوال 15:  $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$  (ج)،  $-\csc 5x \cot 5x$  (ب)،  $\csc x \cot x$  (ا)  
جواب:  $2 \csc(\frac{\pi x}{2})$  (ج)،  $\frac{1}{5} \csc(5x)$  (ب)،  $-\csc x$  (ا)

سوال 16:  $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$  (ج)،  $4 \sec 3x \tan 3x$  (ب)،  $\sec x \tan x$  (ا)

سوال 17:  $(\sin x - \cos x)^2$   
 جواب:  $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 18:  $(1 + 2 \cos x)^2$

تکمل کا حصول  
 سوال 19 تا سوال 58 میں مکمل حاصل کریں۔ مکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 19:  $\int (x + 1) dx$   
 جواب:  $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 20:  $\int (5 - 6x) dx$

سوال 21:  $\int (3t^2 + \frac{t}{2}) dt$   
 جواب:  $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 22:  $(\frac{t^2}{2} + 4t^3) dt$

سوال 23:  $(2x^3 - 5x + 7) dx$   
 جواب:  $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 24:  $\int (1 - x^2 - 3x^5) dx$

سوال 25:  $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}) dx$   
 جواب:  $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 26:  $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x) dx$

سوال 27:  $\int x^{-\frac{1}{3}} dx$   
 جواب:  $\frac{3}{2} x^{2/3} + C$

سوال 28:  $\int x^{-\frac{5}{4}} dx$

سوال 29:  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$   
 جواب:  $\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{3}{4} x^{4/3} + C$



سوال 30:  $\int \left( \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

سوال 31:  $\int \left( 8y - \frac{2}{y^{1/4}} \right) dy$   
جواب:  $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

سوال 32:  $\int \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}} \right) dy$

سوال 33:  $\int 2x(1 - x^{-3}) dx$   
جواب:  $x^2 + \frac{2}{x} + C$

سوال 34:  $\int x^{-3}(x + 1) dx$

سوال 35:  $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$   
جواب:  $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

سوال 36:  $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt$

سوال 37:  $\int (-2 \cos t) dt$   
جواب:  $-2 \sin t + C$

سوال 38:  $\int (-5 \sin t) dt$

سوال 39:  $7 \sin \frac{\theta}{3} d\theta$   
جواب:  $-21 \cos \frac{\theta}{3} + C$

سوال 40:  $\int 3 \cos 5\theta d\theta$

سوال 41:  $\int (-3 \csc^2 x) dx$   
جواب:  $3 \cot x + C$

سوال 42:  $\int \left( -\frac{\sec^2 x}{3} \right) dx$

سوال 43:  $\int \frac{\csc \theta \cot \theta}{2} d\theta$   
جواب:  $-\frac{1}{2} \csc \theta + C$

سوال 44:  $\frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta d\theta$

سوال 45:  $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x) dx$   
 جواب:  $4 \sec x - 2 \tan x + C$

سوال 46:  $\int \frac{1}{2} (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx$

سوال 47:  $\int (\sin 2x - \csc^2 x) dx$   
 جواب:  $-\frac{1}{2} \cos 2x + \cot x + C$

سوال 48:  $\int (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) dx$

سوال 49:  $\int 4 \sin^2 y dy$   
 جواب:  $2y - \sin 2y + C$

سوال 50:  $\int \frac{\cos^2 y}{7} dy$

سوال 51:  $\int \frac{1+\cos 4t}{2} dt$   
 جواب:  $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 52:  $\int \frac{1-\cos 6t}{2} dt$

سوال 53:  $\int (1 + \tan^2 \theta) d\theta$  اشارہ۔  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$   
 جواب:  $\tan \theta + C$

سوال 54:  $\int (2 + \tan^2 \theta) d\theta$

سوال 55:  $\int \cot^2 x dx$   
 جواب:  $-\cot x - x + C$

سوال 56:  $\int (1 - \cot^2 x) dx$

سوال 57:  $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta$   
 جواب:  $-\cos \theta + \theta + C$

سوال 58:  $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta$

تکمیلی کلیہ کی تصدیق  
 سوال 59 تا سوال 64 میں دیے گئے کلیات کی تصدیق بذریعہ تفریق کریں۔ ان کلیات کا حصول جلد دکھایا جائے گا۔

$$\int (7x - 2)^3 dx = \frac{(7x-2)^4}{28} + C \quad \text{سوال 59:}$$

$$\int (3x + 5)^{-2} dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C \quad \text{سوال 60:}$$

$$\int \sec^2(5x - 1) dx = \frac{1}{5} \tan(5x - 1) + C \quad \text{سوال 61:}$$

$$\int \csc^2\left(\frac{x-1}{3}\right) dx = -3 \cot\left(\frac{x-1}{3}\right) + C \quad \text{سوال 62:}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C \quad \text{سوال 63:}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C \quad \text{سوال 64:}$$

سوال 65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C \quad \text{ج۔}$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{\sec^3 \theta}{3} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec^2 \theta \quad \text{ج۔}$$

سوال 67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int (2x + 1)^2 dx = \frac{(2x + 1)^3}{3} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int 3(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int 6(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C \quad \text{ج۔}$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3 + C \quad \text{ج۔}$$

نظریہ اور مثالیں  
سوال 69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int f(x) dx \quad \text{ا۔} \quad \int [f(x) + g(x)] dx \quad \text{و۔}$$

$$\int g(x) dx \quad \text{ب۔} \quad \int [f(x) - g(x)] dx \quad \text{د۔}$$

$$\int [-f(x)] dx \quad \text{ج۔} \quad \int [x + f(x)] dx \quad \text{ز۔}$$

$$\int [-g(x)] dx \quad \text{د۔} \quad \int [g(x) - 4] dx \quad \text{ح۔}$$

جواب: (ا)  $-\sqrt{x} + C$ ، (ب)  $x + C$ ، (ج)  $\sqrt{x} + C$ ، (د)  $-x + C$ ، (و)  $x - \sqrt{x} + C$ ، (ز)  $-x - \sqrt{x} + C$ ، (ح)  $\frac{x^2}{2} - \sqrt{x} + C$ ، (د)  $-3x + C$

سوال 70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{d}{dx}e^x, \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x \sin x)$$

## 5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی مکمل میں سے مخصوص الٹ تفرق منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لئے یہ عمل ضروری ہے۔

## ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل صورت کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو تفرقی مساوات<sup>6</sup> کہلاتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

اس مساوات میں  $x$  آزاد متغیر جبکہ  $y$  تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم  $x$  کا ایسا تفاعل  $y$  جانا چاہتے ہیں جس کی نقطہ  $x_0$  پر قیمت  $y_0$  ہو۔ اس کو ابتدائی قیمت مسئلہ<sup>7</sup> کہتے ہیں۔ جیسا مثال 5.7 میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدموں میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال 5.7: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول  
 سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 \text{ ms}^{-2}$$

اگر جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جائے تب  $t$  سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہوگی؟

حل: ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{ll} \frac{dv}{dt} = 9.8 & \text{تفرقی مساوات} \\ v(0) = 0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{array}$$

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ  $t = 0$  پر ساکن جسم کی سمتی رفتار  $v = 0$  ہے جس کو مختصراً  $v(0) = 0$  لکھا جاتا ہے۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا  $t$  کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{array}{ll} \frac{dv}{dt} = 9.8 & \text{تفرقی مساوات} \\ \int \frac{dv}{dt} dt = \int 9.8 dt & t \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ v + C_1 = 9.8t + C_2 & \text{مکمل کا نتیجہ} \\ v = 9.8t + C & \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں} \end{array}$$

<sup>6</sup> differential equation  
<sup>7</sup> initial value problem

آخری مساوات کے تحت لمحہ  $t$  پر جسم کی رفتار  $9.8t + C$  ہوگی جہاں  $C$  نا معلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$v = 9.8t + C$$

$$0 = 9.8(0) + C$$

$$C = 0$$

$$v(0) = 0$$

یوں لمحہ  $t$  پر جسم کی رفتار درج ذیل ہوگی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t \text{ m s}^{-2}$$

□

تفاعل  $f(x)$  کا غیر قطعی تکمل  $F(x) + C$  تفرقی مساوات  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  کا عمومی حل<sup>8</sup>  $y = F(x) + C$  دیتا ہے۔ عمومی حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل<sup>9</sup> تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات  $y(x_0) = y_0$  کو مطمئن کرتا ہے۔ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ  $x_0$  پر  $y$  کی قیمت  $y_0$  ہے جس کو مختصراً  $y(x_0) = y_0$  لکھا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک نقطہ اور ڈھلوان سے منحنی کا حصول

ایک منحنی جو نقطہ  $(1, -1)$  سے گزرتی ہے کا نقطہ  $(x, y)$  پر ڈھلوان  $3x^2$  ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

حل: ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$y(1) = -1$$

منحنی کی ڈھلوان

ابتدائی معلومات

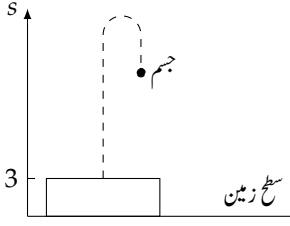
ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

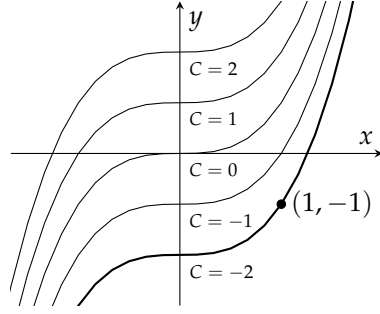
$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 3x^2 dx$$

$$y = x^3 + C$$

تکمل کے مستقلوں کی یکجا کیا گیا ہے



شکل 5.2: تصویر کشی برائے مثال 5.9



شکل 5.1: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال 5.8

عمومی حل  $y = x^3 + C$  ہے جس کو  $C$  کی مختلف قیمتوں کے لئے شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پر کر کے نامعلوم مستقل  $C$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \\ C &= -2 \end{aligned}$$

عمومی حل میں  $C$  پر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل 5.1 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

□

اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ مکمل لینا ہو گا۔ پہلا مکمل

$$\int \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{ds}{dt} + C$$

تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔ دوسرا مکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال 5.9: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول  
زمین سے 3 m بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ  $t = 0$  پر سیدھا اوپر  $160 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ  $9.8 \text{ ms}^{-2}$  کی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو بطور  $t$  کا تفاعل تلاش کریں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہو گی؟

حل: اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل 5.2) جہاں لمحہ  $t$  پر زمین سے جسم کی بلندی کو  $s$  سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $s$  متغیر  $t$  کا دوگنا قابل تفرق تفاعل ہے لہذا جسم کی رفتار اور اسراع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

چونکہ ہمارے ریاضی نمونہ میں اسراع گھٹتے ہوئے  $s$  کے رخ عمل کرتی ہے لہذا ہمارا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -9.8 \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = 160, \quad s(0) = 3 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

ہم تفرقی مساوات کو  $t$  کے لحاظ سے مکمل کر کے  $\frac{ds}{dt}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{d^2s}{dt^2} dt = \int (-9.8) dt$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + C_1$$

ہم پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل  $C_1$  تلاش کرتے ہیں۔

$$160 = -9.8(0) + C_1 \quad \frac{ds}{dt}(0) = 160$$

$$C_1 = 160$$

یوں  $\frac{ds}{dt}$  کا کلیہ مکمل ہوتا ہے:

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + 160$$

ہم  $t$  کے لحاظ سے  $\frac{ds}{dt}$  کا مکمل لیتے ہوئے  $s$  تلاش کرتے ہیں۔

$$\int \frac{ds}{dt} dt = \int (-9.8t + 160) dt$$

$$s = -4.9t^2 + 160t + C_2$$

ہم دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے  $C_2$  حاصل کرتے ہیں۔

$$3 = -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$



یوں مخصوص حل  $s$  کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر  $t$  ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لہذا  $t = 3$  پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں  $t = 3$  پر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9 \text{ m}$$

□

یک رتبہ تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال 5.7 اور مثال 5.8 میں دیکھا گیا، جبکہ در رتبہ تفرق تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال 5.9 میں دیکھا گیا۔ اسی طرح تین رتبہ تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہوگی۔ ہر بار الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ابتدائی قیمت درکار ہوگی۔

### منحنی حل کا خاکہ

تفرق مساوات کے حل کی ترسیم کو منحنی حل<sup>10</sup> یا منحنی تکمل<sup>11</sup> کہتے ہیں۔ تفرق مساوات  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$  کے حل  $y = C + x^3$  کو شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم  $f(x)$  کا الٹ تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرق مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

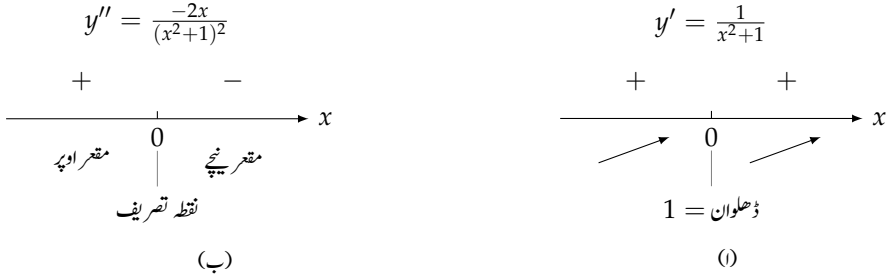
مثال 5.10: درج ذیل تفرق مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

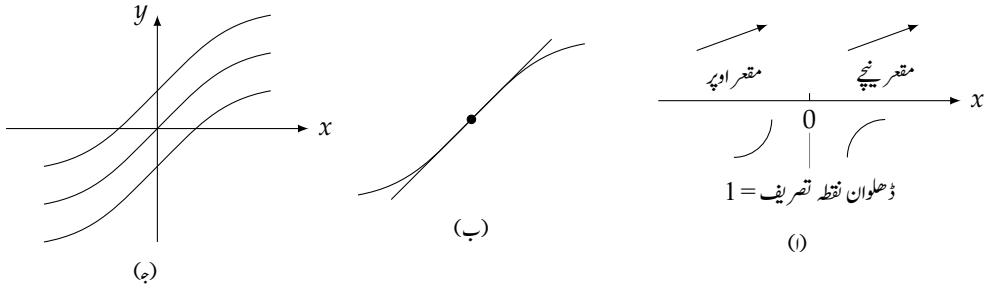
حل: پہلا قدم:  $y'$  اور  $y''$ : منحنی کی عمومی صورت  $y'$  اور  $y''$  پر منحصر ہوتی ہے (حصہ 4.4)۔ ہم  $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$  پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق  $y''$  دیتا ہے:

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

دوسرا قدم: اتار چڑھاؤ۔  $y'$  کا دائرہ کار  $(-\infty, \infty)$  ہے۔ نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا ہے لہذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔ چونکہ  $y' > 0$  ہے لہذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ  $x = 0$  پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے (شکل 5.3)۔



شکل 5.3: منحنی کی اتار چڑھاؤ اور مقعر (مثال 5.10)



شکل 5.4: منحنی کی عمومی صورت (مثال 5.10)

تیسرا قدم: مقعر۔ دو گنا تفرق  $x = 0$  پر  $(+)$  سے تبدیل ہو کر  $(-)$  ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا  $x = 0$  پر نقطہ تصریف پایا جائے گا (شکل 5.3-ب)۔

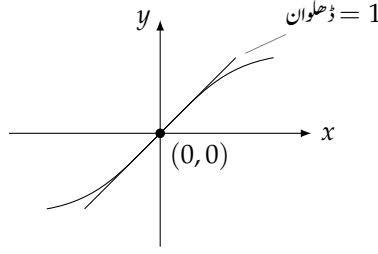
چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کی جھکاؤ شکل 5.4-ا اور اس کی عمومی صورت شکل 5.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔

پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

یوں  $x \rightarrow \pm\infty$  پر منحنی افقی ہو گی۔

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ  $x = 0$  پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے لہذا  $y$  محور کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل 5.4-ج۔ □



شکل 5.5: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال 5.11)

مثال 5.11: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2 + 1} & \text{تفرقی مساوات} \\ y(0) &= 0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

حل: ہم نے مثال 5.10 میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل 5.4-ج میں دکھایا گیا ہے۔ ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ  $(0, 0)$  سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کی درکار مخصوص حل ہے جس کو شکل 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ □

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  میں تفاعل  $f(x)$  کے الٹ تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے، جس پر آگے ایک باب میں غور کیا جائے گا، جبکہ تفاعل  $g(x) = \sqrt{1+x^4}$  کا الٹ تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}$  کو ہم ترتیبی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

### ریاضیاتی نمونہ کشی

ریاضیاتی نمونہ کشی عموماً چار اقدام پر مبنی ہوتا ہے۔ ہم پہلے حقیقی دنیا میں کسی عمل (مثلاً گیند کا گرنا یا کھانسی کے دوران سانس کی نالی کا سکڑنا) کا مشاہدہ کرتے ہوئے اس کے اہم خصوصیات کو ظاہر کرنے والے ریاضی متغیرات کا نظام بناتے ہیں اور معلومات کا ریاضی استعارہ کرتے ہیں۔ اس کے بعد متغیرات کے تعلقات کو (عموماً) موجودہ ریاضی کی زبان میں لکھتے ہوئے نتائج اخذ کرتے ہیں۔ اس کے بعد ریاضیاتی حاصل نتائج کو زیر غور نظام پر لاگو کرتے ہیں۔ آخر میں ہم ریاضی نمونہ سے حاصل نتائج کا مشاہدے کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ پیش گوئی کر سکتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ دیگر نظام پر قابل اطلاق ہو گا۔ بہترین نمونہ وہ ہے جس کے نتائج مشاہدے کے عین مطابق ہوں، جو پیش گوئی کر سکے، جس کا استعمال وسیع اور آسان ہو۔

گیند کے گرنے کو مثال بناتے ہوئے مذکورہ بالا اقدام واضح کرتے ہیں۔ پہلے قدم پر ہم درج ذیل متغیرات اور مشاہدے اکٹھے کرتے ہیں۔  
متغیرات:

فاصلہ:  $s$ وقت:  $t$ 

ابتدائی قیمتیں:

لحظہ  $t = 0$  پر  $s = 0$  اور  $v = 0$  ہیں۔فرض کیا گیا تعلق:  $s = 4.9t^2$ 

دوسرے قدم پر احصاء استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ریاضی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

$$v = 9.8t$$

$$a = 9.8$$

تیسرے قدم پر نتائج کی تشریح کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے لحاظ سے مفہوم بیان کرتے ہیں۔ یوں لحظہ  $t$  پر رفتار  $9.8t$  میٹر فی سیکنڈ ہوگا جبکہ کسی بھی گرتے ہوئے جسم کی اسراع  $9.8 \text{ m s}^{-2}$  ہوگی۔

آخری قدم پر ہم آزادانہ گرنے والے جسم کی لحاظی رفتار اور اسراع ناپ کر تصدیق کرتے ہیں کہ ریاضی نمونہ درست نتائج کی پیش گوئی کر سکتا ہے۔

### نقل اترنا بذریعہ کمپیوٹر

کسی بھی نظام کو سمجھنے کی خاطر ہم مختلف حالات میں اس کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض پیچیدہ نظام کا مشاہدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ (مثلاً جب مشاہدہ بہت مہنگا یا خطرناک ہو یا اس کے لئے بہت وقت درکار ہو۔) ایٹم بم یا سیلابی تباہی یا کھنشاں کا مشاہدہ اس زمرے میں آتے ہیں۔ ان نظام پر غور کرنے کے لئے ہم ریاضی نمونہ کا سہارا لیتے ہیں۔ جہاں نظام کا حساب پیچیدہ یا بہت لمبا ہو وہاں کمپیوٹر کا استعمال سودمند ثابت ہوتا ہے۔ بلند عمارت، دریا پر پل یا برقیاتی اودار بنانے سے پہلے ان کے نمونوں پر کمپیوٹر کی مدد سے غور کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ ہم کمپیوٹر پر عمل کا نقل اتارتے<sup>12</sup> ہیں۔

### سوالات

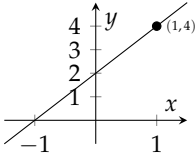
ابتدائی قیمت مسائل

سوال 1: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.6 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

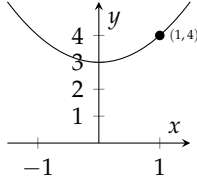
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y(1) = 4$$

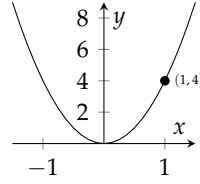
جواب: (ب)



(ا)

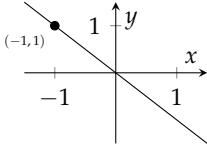


(ب)

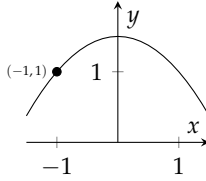


(ج)

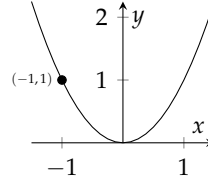
شکل 5.6: تریسہات برائے سوال 1



(ا)



(ب)



(ج)

شکل 5.7: تریسہات برائے سوال 2

سوال 2: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.7 میں کون سی تریسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y(-1) = 1$$

جواب: (ب)

سوال 3 تا سوال 22 میں دیے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 3:  $\frac{dy}{dx} = 2x - 7$ ,  $y(2) = 0$

جواب:  $y = x^2 - 7x + 10$

سوال 4:  $\frac{dy}{dx} = 10 - x$ ,  $y(0) = -1$

سوال 5:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x, \quad x > 0, \quad y(2) = 1$   
 جواب:  $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

سوال 6:  $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

سوال 7:  $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$   
 جواب:  $y = 9x^{1/3} + 4$

سوال 8:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

سوال 9:  $\frac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$   
 جواب:  $s = t + \sin t + 4$

سوال 10:  $\frac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

سوال 11:  $\frac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$   
 جواب:  $r = \cos(\pi\theta) - 1$

سوال 12:  $\frac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

سوال 13:  $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$   
 جواب:  $v = \frac{1}{2} \sec t + \frac{1}{2}$

سوال 14:  $\frac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\frac{\pi}{2}\right) = -7$

سوال 15:  $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$   
 جواب:  $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

سوال 16:  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

سوال 17:  $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$   
 جواب:  $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

سوال 18:  $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{3t}{8}, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4$

سوال 19:  $\frac{d^3 y}{dx^3} = 6, y''(0) = -8, y'(0) = 0, y(0) = 5$   
 جواب:  $y = x^3 - 4x^2 + 5$

سوال 20:  $\frac{d^3 \theta}{dt^3} = 0, \theta''(0) = -2, \theta'(0) = -\frac{1}{2}, \theta(0) = \sqrt{2}$

سوال 21:  $y^{(4)} = -\sin t + \cos t, y'''(0) = 7, y''(0) = y'(0) = -1, y(0) = 0$   
 جواب:  $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

سوال 22:  $y^{(4)} = -\cos x + 8 \sin 2x, y'''(0) = 0, y''(0) = y'(0) = 1, y(0) = 3$

رفتار سے مقام معلوم کرنا  
 سوال 23 تا سوال 26 میں رفتار  $v = \frac{ds}{dt}$  اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ  $t$  پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 23:  $v = 9.8t + 5, s(0) = 10$   
 جواب:  $s = 4.9t^2 + 5t + 10$

سوال 24:  $v = 32t - 2, s(1/2) = 4$

سوال 25:  $v = \sin \pi t, s(0) = 0$   
 جواب:  $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

سوال 26:  $v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, s(\pi^2) = 1$

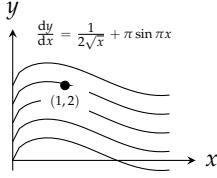
اسراع سے مقام کی تلاش  
 سوال 27 تا سوال 30 میں اسراع  $a = \frac{dv}{dt}$ ، ابتدائی رفتار اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ  $t$  پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 27:  $a = 32, v(0) = 20, s(0) = 5$   
 جواب:  $s = 16t^2 + 20t + 5$

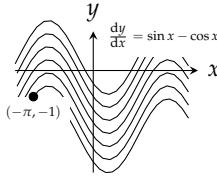
سوال 28:  $a = 9.8, v(0) = -3, s(0) = 0$

سوال 29:  $a = -4 \sin 2t, v(0) = 2, s(0) = -3$   
 جواب:  $s = \sin(2t) - 3$

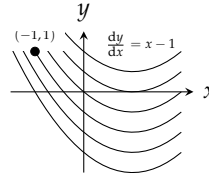
سوال 30:  $a = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{3t}{\pi}, v(0) = 0, s(0) = -1$



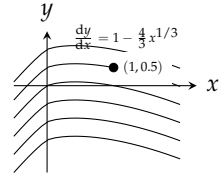
شکل 5.11: منحنیات برائے  
سوال 36



شکل 5.10: منحنیات برائے  
سوال 35



شکل 5.9: منحنیات برائے  
سوال 34



شکل 5.8: منحنیات برائے  
سوال 33

ترسیم کا حصول

سوال 31: ایسی ترسیم  $y = f(x)$  تلاش کریں جو نقطہ  $(9, 4)$  سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان  $3\sqrt{x}$  ہو۔  
جواب:  $y = 2x^{3/2} - 50$

سوال 32: منحنی  $y = f(x)$  نقطہ  $(0, 1)$  سے گزرتی ہے جہاں اس کا مماس افقی ہے۔ یہ ترسیم  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$  کو مطمئن کرتی ہے۔ اس ترسیم کو تلاش کریں۔

منحنیات حل (تکملی منحنیات)  
سوال 33 تا سوال 36 میں منحنی حل دکھائے گئے ہیں۔ دیے نقطے پر منحنی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 33: ترسیمات کو شکل 33 میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب:  $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

سوال 34: ترسیمات کو شکل 34 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 35: ترسیمات کو شکل 35 میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب:  $y = -\sin x - \cos x - 2$

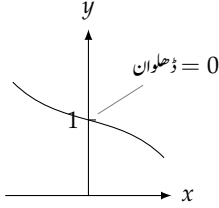
سوال 36: ترسیمات کو شکل 36 میں دکھایا گیا ہے۔

تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچنا مثال 5.10 میں سکھایا گیا۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے سوال 37 تا سوال 40 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کے خاکے بنائیں۔

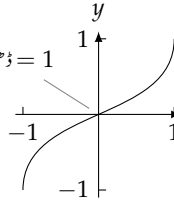
سوال 37:  $\frac{dy}{dx} = 2x$   
جواب: شکل 5.12

سوال 38:  $\frac{dy}{dx} = -2x + 2$

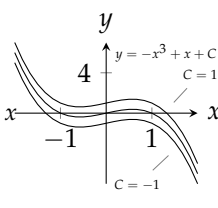




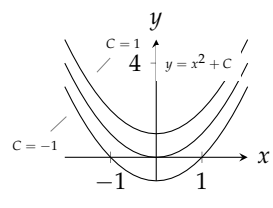
شکل 5.15



شکل 5.14



شکل 5.13



شکل 5.12

سوال 39:  $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$

جواب: شکل 5.13

سوال 40:  $\frac{dy}{dx} = x^2$

سوال 41 تا 44 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ مثال 5.10 اور مثال 5.11 کی طرح بنائیں۔

سوال 41:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad y(0) = 0$

جواب: شکل 5.14

سوال 42:  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}, \quad y(0) = 1$

سوال 43:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

جواب: شکل 5.15

سوال 44:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}, \quad y(0) = 0$

عملی استعمال

سوال 45: چاند پر ثقلی اسراع  $1.6 \text{ m s}^{-2}$  ہے۔ ایک پتھر کو چاند پر گھرے شگاف میں گرایا جاتا ہے۔ اس کی رفتار اس لمحے پر کیا ہوگی

جب یہ 30 سینڈ بعد شگاف کی تہہ تک پہنچتا ہے؟

جواب:  $48 \text{ m s}^{-1}$

سوال 46: ایک راکٹ سطح زمین سے سیدھا اوپر رخ  $20 \text{ m s}^{-2}$  کی اسراع سے اڑتا ہے۔ ایک منٹ بعد اس کی رفتار کیا ہوگی؟

سوال 47: 10 m بلندی سے پانی میں کھودا جاتا ہے۔ پانی میں داخل ہوتے ہوئے لمحے پر آپ کی رفتار کیا ہوگی؟  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$

لیں۔

جواب:  $14 \text{ m s}^{-1}$

سوال 48: مریخ پر سطح کے نزدیک ثقلی اسراع  $3.72 \text{ m s}^{-2}$  ہے۔ ایک راکٹ جس کو مریخ کی سطح سے  $93 \text{ m s}^{-1}$  کی ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جائے کس بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 49: آپ اسلام آباد تا لاہور موٹروے پر  $100 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار سے صفر کر رہے ہیں جب آپ کو سامنے ایک حادثہ نظر آتا ہے۔ آپ یکدم گاڑی کو روکنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گاڑی  $75 \text{ m}$  میں مکمل رک جاتی ہے۔ رکنے کی اسراع تلاش کریں۔ اس کا جواب حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔  
پہلا قدم: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= -k & k \text{ مستقل} \\ \frac{ds}{dt}(0) &= 100, \quad s(0) = 0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

دوسرا قدم:  $t$  کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر  $\frac{ds}{dt} = 0$  حاصل ہو گا۔ (آپ کے جواب میں  $k$  پایا جائے گا)۔  
تیسرا قدم:  $k$  کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر  $s = 75$  حاصل ہوتا ہے۔  
جواب:  $t = \frac{100}{k}$ ,  $k = \frac{200}{3} \text{ km h}^{-2}$

سوال 50: موٹر سائیکل پر با حفاظت صفر کے لئے لازمی ہے کہ آپ  $50 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار سے  $14 \text{ m}$  میں رک سکیں۔ ایسا کرنے کے لئے کتنی اسراع درکار ہو گی؟

سوال 51: ایک ذرہ محوری کلیپر پر  $\frac{d^2 s}{dt^2} = 15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$  اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ لمحہ  $t = 1$  پر  $s = 0$  اور  $\frac{ds}{dt} = 4$  ہیں۔ لمحہ  $t$  پر  $v = \frac{ds}{dt}$  اور  $s$  تلاش کریں۔  
جواب:  $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ ,  $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

سوال 52: چاند پر اپلو-15 پرواز کے داؤد سکاٹ نے پر اور ہتھوڑے کو تقریباً  $1.25 \text{ m}$  بلندی سے ایک ساتھ گرنے دیا۔ چاند پر ہوا کی غیر موجودگی کی بنا دونوں کے گرنے کی رفتار یکساں تھی۔ بتائیں گرنے کا دورانیہ کتنا تھا؟ گرنے کا دورانیہ دریافت کرنے کے لئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے تفاعل  $s$  تلاش کریں جس کا آزاد متغیر  $t$  ہو۔ اس کے بعد  $t$  کی وہ قیمت تلاش کریں جو  $s = 0$  دے۔

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= -1.6 \text{ m s}^{-2} & \text{تفرقی مساوات} \\ \frac{ds}{dt}(0) &= 0, \quad s(0) = 1.25 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

سوال 53: محدودی کلیپر پر مستقل اسراع  $a$  سے حرکت کرتے ہوئے جسم کے مقام  $s$  کی معیاری مساوات درج ذیل ہے

$$(5.2) \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

جہاں لمحہ  $t = 0$  پر جسم کی رفتار  $v_0$  اور مقام  $s_0$  ہیں۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے اس مساوات کو اخذ کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= a & \text{تفرقی مساوات} \\ \frac{ds}{dt}(0) &= v_0, \quad s(0) = s_0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

سوال 54: سیارہ کی سطح کے نزدیک آزادی کے ساتھ گرتے ہوئے جسم کا مقام درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$(5.3) \quad s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

جہاں ثقلی اسراع  $a$ ، سطح سیارہ سے جسم کی ابتدائی بلندی  $s_0$  اور جسم کی ابتدائی رفتار  $v_0$  ہے۔ چونکہ اسراع نیچے رخ (بلندی  $s$  کے الٹ) ہے لہذا مساوات میں منفی کی علامت پائی جاتی ہے۔ اگر لمحہ  $t = 0$  پر جسم کی رفتار اوپر رخ ہو تب  $v_0$  مثبت ہو گا اور اگر اس کا رخ نیچے کو ہو تب  $v_0$  منفی ہو گا۔

مساوات 5.2 استعمال کیے بغیر آپ مساوات 5.3 ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ ابتدائی قیمت مسئلہ کیا ہو گا؟ اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.3 کو حاصل کریں۔

نظریہ اور مثالیں  
سوال 55: رفتار کی الٹ تفرق سے ہٹاؤ کا تعین۔

ا. فرض کریں محور  $s$  پر ایک جسم کی رفتار  $v = 9.8t - 3$  ہے۔  $\frac{ds}{dt}$

1. اگر  $t = 0$  پر  $s = 5$  ہو تب  $t = 1$  تا  $t = 3$  جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

2. اگر  $t = 0$  پر  $s = -2$  ہو تب  $t = 1$  تا  $t = 3$  جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

3. اگر  $t = 0$  پر  $s = s_0$  ہو تب  $t = 1$  تا  $t = 3$  جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

ب. فرض کریں محدودی لکیر پر ایک جسم کا مقام  $s$  متغیر  $t$  کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کیا یہ درست ہے کہ  $\frac{ds}{dt}$  کا الٹ تفرق جانتے ہوئے دورانیہ  $t = a$  تا  $t = b$  کے لئے آپ جسم کا ہٹاؤ جان سکتے ہیں اگرچہ ان دونوں لمحات پر آپ کو جسم کا ہٹاؤ معلوم نہیں ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) 33.2 m ، 33.2 m ، 33.2 m ، (ب) درست

سوال 56: یکسانی حل

اگر قابل تفرق تفاعل  $y = F(x)$  اور  $y = G(x)$  وقفہ  $I$  پر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل ہوں تب کیا  $I$  میں ہر  $x$  کے لئے  $F(x) = G(x)$  ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

## 5.3 مکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق

بعض اوقات انجانے مکمل میں متغیرات کی تبدیلی سے جانا پہچانا مکمل حاصل ہوتا ہے۔ مکمل کے اس طریقہ کو ترکیب بدل کہتے ہیں۔ مکمل کے حصول کا یہ ایک اہم ترین طریقہ ہے۔ انہیں اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

عمومی طاقی قاعدہ کی عملی صورت

جب  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو اور  $n$  ناطق عدد ہو جس کی قیمت  $-1$  نہ ہو تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = u^n \frac{du}{dx}$$

اس مساوات کو ایک دوسری نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل  $u^n \frac{du}{dx}$  کا ایک الٹ تفرق  $\frac{u^{n+1}}{n+1}$  ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int \left( u^n \frac{du}{dx} \right) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

اس مساوات کے بائیں ہاتھ کو عموماً درج ذیل سادہ تفرقی روپ میں لکھا جاتا ہے

$$\int u^n du$$

جہاں دونوں  $dx$  کو آپس میں کانا گیا ہے۔ درج بالا دو مساوات کو ملا کر درج ذیل ملتا ہے

$$(5.4) \quad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1, \text{ ناطق } n)$$

جہاں  $u$  قابل تفرق تفاعل ہے اور  $du$  اس کا تفرق ہے۔

مساوات 5.4 حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہے، اگرچہ یہ متغیر اس کلیہ میں نہیں پایا جاتا ہے اور اس کی علامت اہم نہیں ہے۔ ہم اس متغیر کو کسی بھی علامت مثلاً  $\theta$ ،  $t$ ،  $y$  وغیرہ سے ظاہر کر سکتے تھے۔ مساوات 5.4 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی مکمل کو درج ذیل روپ میں لکھ سکیں

$$\int u^n du, \quad (n \neq -1)$$

جہاں  $u$  قابل تفرق تفاعل ہو اور  $du$  اس کا تفرق ہو تب اس کا حل  $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$  ہو گا۔

مثال 5.12: درج ذیل تکامل حل کریں۔

$$\int (x+2)^5 dx$$

حل: ہم اس تکامل کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\int u^n du$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم  $u = x + 2$  لیتے ہیں لہذا  $du = dx$  ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int (x+2)^5 dx &= \int u^5 du & u = x+2, du = dx \\ &= \frac{u^6}{6} + C & \text{مساوات 5.4 میں } n = 5 \\ &= \frac{(x+2)^6}{6} + C & \text{واپس } u = x+2 \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

□

مثال 5.13:  $u = x^2 + 2x - 3$  لیتے ہوئے  $du = 2x dx + 2 dx = 2(x+1) dx$  اور  $\frac{1}{2} du = (x+1) dx$  ہو گا۔ یوں تکامل

$$\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) dx$$

کو ترکیب بدل سے حل کیا جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) dx &= \int u^2 \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^2 du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} u^3 + C & u \text{ کے لحاظ سے تکامل} \\ &= \frac{1}{6} (x^2 + 2x - 3)^3 + C & u \text{ بدلیں} \end{aligned}$$

□

آخری قدم پر  $u$  کی قیمت واپس پر کی گئی ہے۔

مثال 5.14:

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 t \cos t \, dt &= \int u^4 \, du & u &= \sin t, \, du = \cos t \, dt \\
 &= \frac{u^5}{5} + C & u &\text{ کے لحاظ سے مکمل} \\
 &= \frac{\sin^5 t}{5} + C & u &\text{ بدلیں}
 \end{aligned}$$

□

ترکیب بدل کی کامیابی اس بات پر منحصر ہے کہ ہم ایسا بدل تلاش کر سکیں جو مشکل مکمل کو جانے پہچانے مکمل میں تبدیل کرتا ہو۔ بعض اوقات پہلے بدل کے بعد دوسرا اور تیسرا بدل بھی درکار ہوتا ہے یا ہم کوئی دوسرا بدل استعمال کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات کئی مختلف بدل قابل استعمال ہوں گے (اگلا مثال)۔

مثال 5.15: درج ذیل مکمل حل کریں۔

$$\int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}}$$

حل: ہم مکمل کے مشکل ترین حصے کی سادہ صورت تلاش کرنے کی غرض سے  $u = z^2 + 1$  لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} & u &= z^2 + 1, \, du = 2z \, dz \\
 &= \int u^{-1/3} \, du \\
 &= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C & u &\text{ کے لحاظ سے مکمل} \\
 &= \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\
 &= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{2/3} + C & u &\text{ کا بدل } z^2 + 1 \text{ پر کریں}
 \end{aligned}$$

□

مثال 5.16:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1 + y^2} \cdot 2y \, dy &= \int u^{1/2} \, du & u &= 1 + y^2, \, du = 2y \, dy \\
 &= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C & u &\text{ کے لحاظ سے مکمل} \\
 &= \frac{2}{3} (1 + y^2)^{3/2} + C & u &\text{ کی جگہ } 1 + y^2 \text{ پر کریں}
 \end{aligned}$$

□

مثال 5.17:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4t-1} dt &= \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{4} du & u = 4t-1, du = 4 dt, \frac{1}{4} du = dt \\
&= \frac{1}{4} \int u^{1/2} du \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\
&= \frac{1}{6} u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{6} (4t-1)^{3/2} + C & u \text{ کی جگہ } 4t-1 \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

تکوینیاتی تفاعل

اگر  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو تب  $\sin u$  بھی  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ زنجیری قاعدہ ہمیں  $\sin u$  کا تفرق دیتا ہے:

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

اسی مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\sin u$  مضرب  $\frac{du}{dx}$  کا الٹ تفرق ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int \left( \cos u \frac{du}{dx} \right) dx = \sin u + C$$

بائیں ہاتھ دونوں  $dx$  کو باضابطہ کاٹ کر درج ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.5) \quad \int \cos u du = \sin u + C$$

مساوات 5.5 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمیل کو  $\int \cos u du$  روپ میں لکھ سکیں، ہم  $u$  کے لحاظ سے اس کا تکمیل لیتے ہوئے  $\sin u + C$  حاصل کریں گے۔

مثال 5.18:

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta + 5) d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7} du & u = 7\theta + 5, du = 7 d\theta, \frac{1}{7} du &= d\theta \\
&= \frac{1}{7} \int \cos u du \\
&= \frac{1}{7} \sin u + C & u \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\
&= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C & u \text{ کی جگہ } 7\theta + 5 \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

مسوات 5.5 کی جوڑی مسوات درج ذیل ہے جہاں  $u$  قابل تفرق تفاعل ہے۔

$$(5.6) \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

مثال 5.19:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x^3) dx &= \int \sin(x^3) \cdot x^2 dx \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} du & u = x^3, du = 3x^2 dx, \frac{1}{3} du &= x^2 dx \\
&= \frac{1}{3} \int \sin u du \\
&= \frac{1}{3} (-\cos u + C') & u \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\
&= -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C & \frac{C'}{3} = C \text{ اور } u = x^3
\end{aligned}$$

□

قابل تفرق تفاعل  $u$  کے لئے زنجیری قاعدہ کی مدد سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

$$(5.7) \quad \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$(5.8) \quad \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$(5.9) \quad \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$(5.10) \quad \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$



ہر کلیہ میں  $u$  حقیقی متغیر کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کلیہ کو پرکھنے کے لئے دائیں ہاتھ کا  $u$  کے لحاظ تفرق حاصل کریں۔ ایسا کرنے سے بائیں ہاتھ کا متکمل حاصل ہو گا۔

مثال 5.20:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 2\theta} d\theta &= \int \sec^2 2\theta d\theta & \sec 2\theta &= \frac{1}{\cos 2\theta} \\ &= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2} du & u = 2\theta, d\theta &= \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 u du \\ &= \frac{1}{2} \tan u + C & \text{مساوات 5.7} \\ &= \frac{1}{2} \tan 2\theta + C & u \text{ کی جگہ } 2\theta \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

□

### تکمیل کا ترکیب بدل

مذکورہ بالا تمام مثالیں درج ذیل عمومی کلیہ کی انفرادی مثالیں ہیں۔

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= \int f(u) du & u &= g(x), du = g'(x) dx \\ &= F(u) + C & F(u) &\text{ کا الٹ تفرق } f(u) \\ &= F(g(x)) + C & u &\text{ کی جگہ } g(x) \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

یہ تین اقدام تکمیل کا ترکیب بدل ہیں۔ یہ ترکیب اس لئے کام کرتی ہے کہ  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  کا الٹ تفرق  $F(g(x))$  ہے جہاں  $f$  کا الٹ تفرق  $F$  ہے:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(g(x)) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) & \text{زنجیری قاعدہ} \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x) & \text{چونکہ } F' = f \end{aligned}$$

ترکیب بدل پر مزید غور اگلے ابواب میں کیا جائے گا۔

## سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں دیا گیا بدل استعمال کرتے ہوئے غیر قطعی مکمل کو معیاری روپ میں لاتے ہوئے حل کریں۔

سوال 1:  $\int \sin 3x \, dx, \quad u = 3x$   
جواب:  $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$

سوال 2:  $\int x \sin(2x^2) \, dx, \quad u = 2x^2$

سوال 3:  $\int \sec 2t \tan 2t \, dt, \quad u = 2t$   
جواب:  $\frac{1}{2} \sec 2t + C$

سوال 4:  $\int (1 - \cos \frac{t}{2})^2 \sin \frac{t}{2} \, dt, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2}$

سوال 5:  $\int 28(7x - 2)^{-5} \, dx, \quad u = 7x - 2$   
جواب:  $-(7x - 2)^{-4} + C$

سوال 6:  $\int x^3(x^4 - 1)^2 \, dx, \quad u = x^4 - 1$

سوال 7:  $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} \, dr, \quad u = 1 - r^3$   
جواب:  $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$

سوال 8:  $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y) \, dy, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

سوال 9:  $\int \sqrt{x} \sin^2(x^{3/2} - 1) \, dx, \quad u = x^{3/2} - 1$   
جواب:  $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6} \sin(2x^{3/2} - 2) + C$

سوال 10:  $\int \frac{1}{x^2} \cos^2(\frac{1}{x}) \, dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

سوال 11:  $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta \, d\theta, \quad u = \cot 2\theta, \quad u = \csc 2\theta$   
جواب:  $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C, \quad -\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

سوال 12:  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}, \quad u = 5x + 8, \quad u = \sqrt{5x+8}$

سوال 13 تا سوال 46 میں مکمل حل کریں۔

سوال 13:  $\int \sqrt{3-2s} \, ds$   
 جواب:  $-\frac{1}{3}(3-2s)^{3/2} + C$

سوال 14:  $\int (2x+1)^3 \, dx$

سوال 15:  $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}} \, ds$   
 جواب:  $\frac{2}{5}(5s+4)^{1/2} + C$

سوال 16:  $\int \frac{3 \, dx}{(2-x)^2}$

سوال 17:  $\int \theta \sqrt[4]{1-\theta^2} \, d\theta$   
 جواب:  $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{5/4} + C$

سوال 18:  $\int 8\theta \sqrt[3]{\theta^2-1} \, d\theta$

سوال 19:  $\int 3y \sqrt{7-3y^2} \, dy$   
 جواب:  $-\frac{1}{3}(7-3y^2)^{3/2} + C$

سوال 20:  $\int \frac{4y \, dy}{\sqrt{2y^2+1}}$

سوال 21:  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \, dx$   
 جواب:  $\left(-\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right) + C$

سوال 22:  $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} \, dx$

سوال 23:  $\int \cos(3z+4) \, dz$   
 جواب:  $\frac{1}{3} \sin(3z+4) + C$

سوال 24:  $\int \sin(8z-5) \, dz$

سوال 25:  $\int \sec^2(3x+2) \, dx$   
 جواب:  $\frac{1}{3} \tan(3x+2) + C$

سوال 26:  $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$

سوال 27:  $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} dx$   
 جواب:  $\frac{1}{2} \sin^6(\frac{x}{3}) + C$

سوال 28:  $\int \tan^7 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx$

سوال 29:  $\int r^2 (\frac{r^3}{18} - 1)^5 dr$   
 جواب:  $(\frac{r^3}{18} - 1)^6 + C$

سوال 30:  $\int r^4 (7 - \frac{r^5}{10})^3 dr$

سوال 31:  $\int x^{1/2} \sin(x^{3/2} + 1) dx$   
 جواب:  $-\frac{2}{3} \cos(x^{3/2} + 1) + C$

سوال 32:  $\int x^{1/3} \sin(x^{4/3} - 8) dx$

سوال 33:  $\int \sec(v + \frac{\pi}{2}) \tan(v + \frac{\pi}{2}) dv$   
 جواب:  $\sec(v + \frac{\pi}{2}) + C$

سوال 34:  $\int \csc(\frac{v-\pi}{2}) \cot(\frac{v-\pi}{2}) dv$

سوال 35:  $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)} dt$   
 جواب:  $\frac{1}{2 \cos(2t+1)} + C$

سوال 36:  $\int \frac{6 \cos t}{(2 + \sin t)^3} dt$

سوال 37:  $\int \sqrt{\cot y} \csc^2 y dy$   
 جواب:  $-\frac{2}{3} (\cot^3 y)^{1/2} + C$

سوال 38:  $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}} dz$

سوال 39:  $\int \frac{1}{t^2} \cos(\frac{1}{t} - 1) dt$   
 جواب:  $-\sin(\frac{1}{t} - 1) + C$

سوال 40:  $\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t} + 3) dt$

سوال 41:  $\int \frac{1}{\theta^2} \sin \frac{1}{\theta} \cos \frac{1}{\theta} d\theta$   
 جواب:  $-\frac{\sin^2(\frac{1}{\theta})}{2} + C$

سوال 42:  $\int \frac{\cos \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \sin^2 \sqrt{\theta}} d\theta$

سوال 43:  $\int (s^3 + 2s^2 - 5s + 5)(3s^2 + 4s - 5) ds$   
 جواب:  $\frac{(s^3 + 2s^2 - 5s + 5)^2}{2} + C$

سوال 44:  $\int (\theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2)(\theta^3 - \theta + 2) d\theta$

سوال 45:  $\int t^3(1 + t^4)^3 dt$   
 جواب:  $\frac{1}{16}(1 + t^4)^4 + C$

سوال 46:  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} dx$

قدم با قدم تکمیل کی سادہ روپ کا حصول  
 اگر آپ تکمیل کی سادہ روپ کے لئے درکار بدل نہ جانتے ہوں تب تکمیل کی سادہ روپ قدم با قدم تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ تکمیل کو دیکھ کر اندازے سے بدل منتخب کرتے ہوئے تکمیل کو کچھ سادہ بنائیں۔ اگلے قدم میں اس کو مزید سادہ بنانے کی کوشش کریں۔ بدل منتخب کرنے کی صلاحیت اس طرز کے سوالات حل کرنے سے بڑھتی ہے۔ اگلے دو سوالات حل کرنے سے آپ اس طریقے کو سمجھ پائیں گے۔

سوال 47:

$$\int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^3 x)^2} dx$$

ا.  $u = \tan x$  پر کر کے  $u = u^3$  اور اس کے بعد  $v = 2 + u$  پر کریں۔

ب.  $u = \tan^3 x$  کے بعد  $v = 2 + u$  پر کریں۔

ج.  $u = 2 + \tan^3 x$  پر کریں۔

جواب: (الف)  $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$ ، (ب)  $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$ ، (ج)  $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$

سوال 48:

$$\int \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} \sin(x-1) \cos(x-1) dx$$

ا.  $u = x - 1$  پر کرنے کے بعد  $v = \sin u$  اور اس کے بعد  $w = 1 + v^2$  پر کریں۔

ب.  $u = \sin(x - 1)$  کے بعد  $v = 1 + u^2$  پر کریں۔

ج.  $u = 1 + \sin^2(x - 1)$  پر کریں۔

اگلے دو تکملات حل کریں۔

سوال 49:  $\int \frac{(2r-1) \cos \sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}} dr$

جواب:  $\frac{1}{6} \sin \sqrt{3(2r-1)^2+6} + C$

سوال 50:  $\int \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \cos^3 \sqrt{\theta}} d\theta$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال 51 تا سوال 58 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 51:  $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2 - 1)^3$ ,  $s(1) = 3$

جواب:  $s = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)^4 - 5$

سوال 52:  $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 8)^{-1/3}$ ,  $y(0) = 0$

سوال 53:  $\frac{ds}{dt} = 8 \sin^2(t + \frac{\pi}{12})$ ,  $s(0) = 8$

جواب:  $s = 4t - 2 \sin(2t + \frac{\pi}{6}) + 9$

سوال 54:  $\frac{dr}{d\theta} = 3 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta)$ ,  $r(0) = \frac{\pi}{8}$

سوال 55:  $\frac{d^2s}{dt^2} = -4 \sin(2t - \frac{\pi}{2})$ ,  $s'(0) = 100$ ,  $s(0) = 0$

جواب:  $s = \sin(2t - \frac{\pi}{2}) + 100t + 1$

سوال 56:  $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \sec^2 2x \tan 2x$ ,  $y'(0) = 4$ ,  $y(0) = -1$

سوال 57: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی رفتار تمام  $t$  کے لئے  $v = \frac{ds}{dt} = 6 \sin 2t \text{ m s}^{-1}$  ہے۔

اگر لہ  $t = 0$  پر  $s = 0$  ہو تب  $t = \frac{\pi}{2}$  سینڈ پر  $s$  کیا ہوگا؟

جواب:  $6 \text{ m}$

سوال 58: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی اسراع تمام  $t$  کے لئے  $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \pi^2 \cos \pi t \text{ m s}^{-2}$

ہے۔ اگر لہ  $t = 0$  پر  $s = 0$  اور  $v = 8 \text{ m s}^{-1}$  ہوں تب  $t = 1$  سینڈ پر  $s$  کیا ہوگا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 59: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ہم  $2 \sin x \cos x$  کا مکمل تین مختلف طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

ا.

$$\begin{aligned}\int 2 \sin x \cos x \, dx &= \int 2u \, du & u &= \sin x \\ &= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\int 2 \sin x \cos x \, dx &= \int -2u \, du & u &= \cos x \\ &= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\int 2 \sin x \cos x \, dx &= \int \sin 2x \, dx & 2 \sin x \cos x &= \sin 2x \\ &= -\frac{\cos 2x}{2} + C_3\end{aligned}$$

کیا تینوں طریقے درست ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 60:  $u = \tan x$  پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

جبکہ  $u = \sec x$  پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

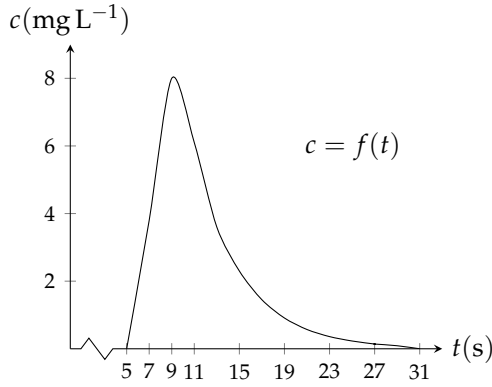
کیا دونوں مکمل درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

## 5.4 متناہی مجموعہ سے اندازہ لگانا

اس حصہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح عملی سوالات ہمیں متناہی مجموعہ<sup>13</sup> سے تخمین کے حصول تک لے کر جاتے ہیں۔

جدول 5.3: رقت رنگ کے ترکیب کے نتائج۔

لحمہ	کثافت رنگ	لحمہ	کثافت رنگ
5	0.0	19	0.91
7	3.8	21	0.57
9	8.0	23	0.36
11	6.1	25	0.23
13	3.6	27	0.14
15	2.3	29	0.09
17	1.45	31	0.00



شکل 5.16: جدول میں دی گئی رنگ کی کثافت بالمقابل وقت کو ترسیم کیا گیا ہے۔

### رقت اور اخراج قلب

فی منٹ جتنے لٹر خون آپ کا قلب خارج کرتا ہے اس کو اخراج قلب کہتے ہیں۔ سکون کی حالت میں کسی شخص کا اخراج قلب 5 یا 6 لٹر فی منٹ ہو سکتا ہے۔ سخت ورزش کے دوران یہ شرح 30 لٹر فی منٹ ہو سکتی ہے۔ بیماری بھی اس شرح کو بہت زیادہ متاثر کر سکتی ہے۔

اخراج قلب کی پیمائش کے لئے طیب صفحہ 321 پر سوال 25 میں دیا گیا طریقہ اختیار کرنے کی بجائے رقت رنگ کی ترکیب استعمال کر سکتا ہے۔ رقت رنگ کی ترکیب میں قلب کے قریب مرکزی داخلی رگ میں 5 mg سے 10 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا جاتا ہے جو قلب کے دائیں حصے میں داخل ہو کر کلیجے سے ہوتے ہوئے قلب کے بائیں حصے سے مرکزی شریان میں خارج کیا جاتا ہے جہاں ہر چند سیکنڈ بعد گزرتے ہوئے خون میں رنگ کی کثافت ناپی جاتی ہے۔ جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک تندرست شخص جو آرام کر رہا ہو کے نتائج دکھائے گئے ہیں جس کو 5.6 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا گیا ہے۔ خون کی دوبارہ گردش کو مد نظر رکھتے ہوئے نتائج پیش کیے گئے ہیں۔



مریض کے قلب کا اخراج معلوم کرنے کی خاطر ہم رنگ کی مقدار کو شکل 5.16 میں دیے کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبے سے تقسیم کر کے 60 سے ضرب دیتے ہیں۔

$$(5.11) \quad \text{رنگ کی مقدار} \times 60 = \frac{\text{اخراج قلب}}{\text{منحنی کے نیچے رقبہ}}$$

اس مساوات میں مختلف مقداروں کی اکائیوں پر نظر ڈال کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات درست جواب دے گی۔ رنگ کی مقدار mg میں ہے جبکہ منحنی کے نیچے رقبہ کی اکائی  $\text{mg L}^{-1} \times \text{s}$  ہوگی لہذا درج بالا مساوات خون کا اخراج لٹرن فی منٹ میں دے گا۔

$$\frac{\text{mg}}{\text{L}} \cdot \frac{\text{سیکنڈ}}{\text{منٹ}} = \frac{\text{لٹر}}{\text{منٹ}}$$

درج ذیل مثال میں ہم شکل 5.16 میں دیے منحنی کے نیچے رقبہ کی تخمینہ قیمت تلاش کرتے ہوئے مریض کا اخراج قلب معلوم کرتے ہیں۔

مثال 5.21: جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک مریض کے ترکیب رقت رنگ کے نتائج دیے گئے ہیں۔ اس کا اخراج قلب تلاش کریں۔

حل: رنگ کی مقدار 5.6 mg ہے لہذا ہمیں صرف منحنی کے نیچے رقبہ چاہیے۔ ہم رقبہ تلاش کرنے کا ایسا کوئی کلیہ نہیں جانتے ہیں جو اس قسم کی نامہوار منحنی کے لئے قابل استعمال ہو۔ البتہ ہم منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیلی حصوں میں تقسیم کر کے تمام مستطیلوں کے رقبے جمع کرتے ہوئے رقبے کی تخمینہ قیمت تلاش کر سکتے ہیں (شکل 5.17)۔ ہر مستطیل کا کچھ حصہ اصل رقبے سے کم رقبہ گھیرتا ہے جبکہ اس کا باقی حصہ اصل رقبے سے زیادہ رقبہ گھیرتا ہے۔ ہم نے تمام مستطیلوں کی چوڑائی 2 منتخب کی ہے۔ ایسا کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ ہر مستطیل کی چوڑائی مختلف منتخب کی جاسکتی ہے۔ ہر مستطیل کا قد مستطیل کے چوڑائی کے دوران تعامل کی تقریباً اوسط قیمت ہوگی۔ ہم تمام مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

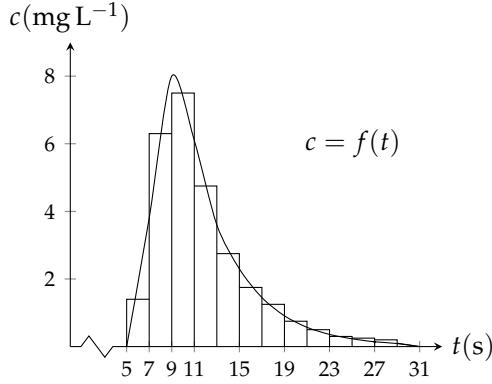
$$\begin{aligned} \text{منحنی کے نیچے رقبہ} &\approx f(6) \cdot 2 + f(8) \cdot 2 + f(10) \cdot 2 + \dots + f(28) \cdot 2 + f(30) \cdot 2 \\ &\approx (1.4)(2) + (6.3)(2) + (7.5)(2) + \dots + (0.1)(2) + (0.045)(2) \\ &\approx (28.8)(2) = 57.6 \text{ mg s L}^{-1} \end{aligned}$$

رنگ کی مقدار کو اس رقبے سے تقسیم کرتے ہوئے 60 سے ضرب دینے سے اخراج قلب حاصل ہوگا۔

$$\text{اخراج قلب} \approx \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{رقبہ}} \times 60 = \frac{5.6}{57.6} \times 60 \approx 5.8 \text{ L min}^{-1}$$

□

مریض کا اخراج قلب تقریباً  $5.8 \text{ L min}^{-1}$  ہے۔



شکل 5.17: منحنی کے نیچے رتبے کو مستطیل رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

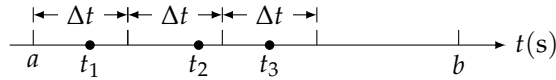
طے شدہ فاصلہ

فرض کریں ہمیں ایک گاڑی کی رفتار تفاعل  $v = \frac{ds}{dt} = f(t) \text{ ms}^{-1}$  معلوم ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقفہ  $a \leq t \leq b$  یہ گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اگر ہمیں  $f$  کا الٹ تفرق  $F$  معلوم ہو تب تب ہم گاڑی کا مقام تفاعل  $s = F(t) + C$  تلاش کر سکتے ہیں جس کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی دورانیے میں طے شدہ فاصل تلاش کیا جاسکتا ہے (سوال 55)۔

رفتار تفاعل  $v = f(t)$  کا الٹ تفرق نہ جاننے ہوئے طے شدہ فاصلے کو مجموعہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔ ہم  $[a, b]$  کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں یوں تقسیم کرتے ہیں کہ ہر ٹکڑے میں رفتار کی قیمت تقریباً غیر متغیر ہو۔ ہم ہر ٹکڑے کے دوران فاصلہ درج ذیل کلیہ سے اخذ کرتے ہوئے

$$\text{فاصلہ} = \text{وقت} \times \text{رفتار} = f(t) \cdot \Delta t$$

وقفہ  $[a, b]$  کے تمام ٹکڑوں میں طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ لیتے ہوئے کل فاصلہ دریافت کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کو درج ذیل ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جہاں ہر ٹکڑا  $\Delta t$  کے برابر ہے۔



پہلے ٹکڑے پر  $t_1$  ایک نقطہ ہے۔ اگر یہ ٹکڑا نہایت چھوٹا ہو تب اس دوران رفتار میں تبدیلی قابل نظر انداز ہو گی۔ یوں اس دوران گاڑی تقریباً  $f(t_1)\Delta t$  فاصلہ طے کرے گی۔ اگر  $t_2$  دوسرے ٹکڑے میں ایک نقطہ ہو تب اس دوران گاڑی  $f(t_2)\Delta t$  فاصل طے کرے گی۔

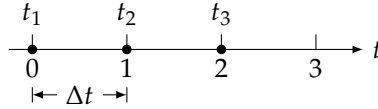
اسی طرح باقی تمام مکلوں کے دوران طے شدہ فاصلے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں حاصل تمام مکلوں کے دوران طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ تقریباً  $[a, b]$  کے دوران کل طے فاصلے  $D$  ہوگا۔ اگر ہم  $n$  عدد مکلوں لیں تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(5.12) \quad D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t$$

آئیں مثال 5.9 کے نتائج پر اس کلیہ کو استعمال کریں۔ ایک گولا کو سیدھا اوپر رخ پھینکا گیا۔ لمحہ  $t$  پر اس کی رفتار  $v = f(t) = -9.8t + 160$  تھی۔ ابتدائی 3 سینڈوں میں گولا 3 m کی ابتدائی بلندی سے 438.9 m کی بلندی تک پہنچا۔ یوں ابتدائی تین سینڈوں میں گولے نے 438.9 m فاصلہ طے کیا۔

مثال 5.22: سیدھا اوپر رخ پھینکے گئے گولے کی رفتار  $v = f(t) = -9.8t + 160$  ہے۔ مجموعہ کا ترکیب استعمال کرتے ہوئے ابتدائی 3 سینڈوں میں طے شدہ فاصلہ کا تخمینہ لگائیں۔ بالکل ٹھیک جواب 435.9 m ہے۔

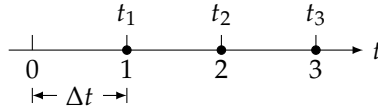
حل: ہم مکلوں کی مختلف تعداد اور مکلوں میں مختلف نقطوں کی انتخاب کے لئے اس مسئلے کو حل کرتے ہیں۔ ہم کل 3 مکلوں لیتے ہیں اور  $f$  کی قیمت ہر مکلوں کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک مکلوں کی لمبائی 1 ہوگی۔



$f$  کی قیمت 0، 1 اور 2 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t && \text{(مساوات 5.12)} \\ &\approx [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &\approx 450.6 \end{aligned}$$

ہم کل 3 مکلوں لیتے ہیں اور  $f$  کی قیمت ہر مکلوں کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک مکلوں کی لمبائی 1 ہوگی۔



جدول 5.4: کلزوں کی تعداد بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہوتا ہے (مثال 5.22)۔

کلزوں کی تعداد	ایک کلزے کی لمبائی	بائیں سر نقطہ مجموعہ	دائیں سر نقطہ مجموعہ
3	1	450.6	421.2
6	0.5	443.25	428.55
12	0.25	439.58	432.23
24	0.125	437.74	434.06
48	0.0625	436.82	434.98
96	0.03125	436.36	435.44
192	0.015625	436.13	435.67

$f$  کی قیمت 1، 2 اور 3 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t \quad (\text{مساوات 5.12}) \\
 &\approx [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) \\
 &\approx 421.2
 \end{aligned}$$

کل 6 کلزے لیتے ہیں اور  $f$  کی قیمت ہر کلزے کے پہلے بائیں اور بعد میں دائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک کلزے کی لمبائی  $\frac{1}{2}$  ہو گی۔ نتائج درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
 D &\approx 443.25 && \text{بائیں ہاتھ سر دے کر قیمتیں} \\
 D &\approx 428.55 && \text{دائیں ہاتھ سر دے کر قیمتیں}
 \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 6 کلزے لیتے ہوئے بہتر جواب حاصل ہوتے ہیں۔ مزید زیادہ کلزے لینے سے جواب میں مزید بہتری پیدا ہوتی ہے۔ جدول 5.4 میں چند نتائج دکھائے گئے ہیں۔

جدول 5.4 سے ہم دیکھتے ہیں کہ بائیں سر نقطہ مجموعہ اصل جواب تک اوپر سے پہنچتا ہے جبکہ دائیں سر نقطہ مجموعہ اصل جواب تک نیچے سے پہنچتا ہے۔ حقیقت میں جواب ان دونوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جدول میں دیا آخری مجموعہ اور اصل جواب میں فرق درج ذیل ہے۔

$$\text{فی صد خلل} = \frac{435.9 - 435.67}{435.9} \times 100 = 0.05\%$$

□

آپ مثال 5.21 اور مثال 5.22 میں مشابہت دیکھ سکتے ہیں۔ دونوں میں تفاعل  $f$  ایک بند وقفہ میں معین ہے جس کی وقفوں پر قیمت کو وقفہ سے ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ ہم اسی ترکیب کو حجم کی تلاش کے لئے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

جَم

درج ذیل دو مثالوں میں ہم متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے جَم تلاش کرتے ہیں۔

مثال 5.23: ایک ٹھوس جسم  $x = \pm 2$ ،  $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$  اور  $z = \pm \sqrt{9 - x^2}$  سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس کے جَم کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم  $x$  محور پر وقفہ  $[-2, 2]$  کو چار برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ٹکڑے کی لمبائی  $\Delta x = 1$  ہو گی۔ ہر ٹکڑے کے بائیں سر نقطے پر جسم کا رقبہ عمودی تراش ایک چکور شکل کا ہو گا۔ ہم ایسے ہر چکور پر فرضی 1 موٹائی کا تختہ بناتے ہیں۔ ان تمام تختوں کے جَم کا مجموعہ اندازاً اصل جسم کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

ایک تختہ کا جَم ہم  $H = Sh$  سے اخذ کر سکتے ہیں جہاں  $H$ ،  $S$  اور  $h$  بالترتیب تختے کا جَم، رقبہ عمودی تراش اور موٹائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ  $x$  پر تختے کا رقبہ عمودی تراش  $S(x) = (2\sqrt{9 - x^2})^2 = 4(9 - x^2)$  ہے جبکہ تختے کی موٹائی ہے لہذا چار تختوں کے جَم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H_4 &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + S(x_4)\Delta x \\ &= 4(9 - x_1^2)(1) + 4(9 - x_2^2)(1) + 4(9 - x_3^2)(1) + 4(9 - x_4^2)(1) \\ &= 4[(9 - (-2)^2) + (9 - (-1)^2) + (9 - (0)^2) + (9 - (1)^2)] \\ &= 4[(9 - 4) + (9 - 1) + (9 - 0) + (9 - 1)] \\ &= 4[36 - 6] = 120 \end{aligned}$$

یہ جواب جسم کے اصل جَم  $H = \frac{368}{3} \approx 122.67$  کے بہت نزدیک ہے۔ جواب میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

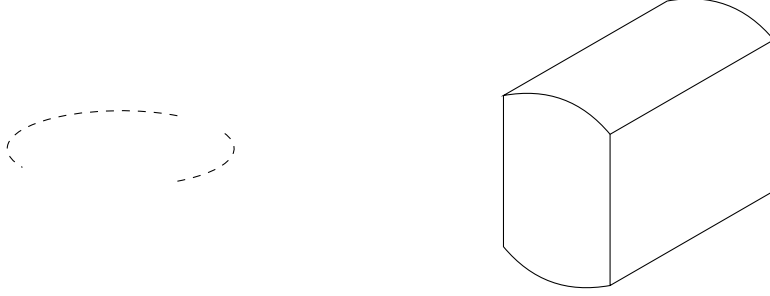
$$= \frac{|H - H_4|}{H} = \frac{\left| \frac{368}{3} - 120 \right|}{\frac{368}{3}} \approx 2.2\%$$

□

وقفہ  $[-2, 2]$  پر ٹکڑوں کی تعداد بڑھانے سے تختوں کی موٹائی کم ہو گی جبکہ حاصل جَم زیادہ درست ہو گا۔

مثال 5.24: ایک کرہ کا رداس 4 ہے۔ اس کا جَم تلاش کریں۔

حل: ہم قاع  $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$  کو  $x$  محور کے گرد گما کر کرہ کی سطح حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم وقفہ  $-4 \leq x \leq 4$  کو آٹھ برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ٹکڑے کی لمبائی  $\Delta x = 1$  ہو گی۔ ہم ہر ٹکڑے کے بائیں سر پر کرہ کے رقبہ عمودی



تراش کے برابر رقبہ کا بیلن جس کی لمبائی 1 ہو لیتے ہیں۔ ان تمام بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تقریباً کرہ کے حجم کے برابر ہو گا۔ ہر ایک بیلن کا حجم  $H = \pi r^2 h$  ہو گا جہاں بیلن کا رداس  $r$  اور اس کی لمبائی  $h$  ہے۔ آٹھوں بیلنوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 H_8 &= \pi[f(x_1)]^2 \Delta x + \pi[f(x_2)]^2 \Delta x + \pi[f(x_3)]^2 \Delta x + \cdots + \pi[f(x_8)]^2 \Delta x \\
 &= \pi \left[ \sqrt{16 - x_1^2} \right]^2 \Delta x + \pi \left[ \sqrt{16 - x_2^2} \right]^2 \Delta x + \pi \left[ \sqrt{16 - x_3^2} \right]^2 \Delta x + \\
 &\quad \cdots + \pi \left[ \sqrt{16 - x_8^2} \right]^2 \Delta x \\
 &= \pi[(16 - (-4)^2) + (16 - (-3)^2) + (16 - (-2)^2) + \cdots + (16 - (3)^2)] \\
 &= \pi[0 + 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7] \\
 &= 84\pi
 \end{aligned}$$

کرہ کا اصل حجم درج ذیل ہے۔

$$H = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (4)^3 = \frac{256\pi}{3}$$

متناہی مجموعہ سے حاصل حجم میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|H - H_8|}{H} \times 100 = \frac{\frac{256\pi}{3} - 84\pi}{\frac{256\pi}{3}} \times 100 \\
 &= \frac{256 - 252}{256} = \frac{1}{64} \approx 1.6\%
 \end{aligned}$$

□

## غیر منفی تفاعل کی اوسط قیمت

متناہی تعداد قیمتوں کی اوسط حاصل کرنے کی خاطر ہم تمام قیمتوں کا مجموعہ لے کر قیمتوں کی تعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔ اب لا متناہی تعداد کی قیمتوں کے اوسط سے کیا مراد ہو گا؟ مثال کے طور پر وقفہ  $[-1, 1]$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کی اوسط قیمت سے کیا مراد ہے؟ ایسے "استمراری" اوسط کا مطلب سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ ہم  $x = -1$  تا  $x = 1$  کے بیچ بلا منصوبہ  $x$  کی مختلف قیمتوں پر تفاعل کی نمونی قیمتوں کے مربع کا اوسط حاصل کرتے ہیں۔ نمونی جسامت بڑھانے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ اوسط کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گا۔ اس قیمت کو ہم وقفہ  $[-1, 1]$  پر تفاعل کا اوسط<sup>14</sup> کہتے ہیں۔

مثال 5.25: وقفہ  $[-1, 1]$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم وقفہ  $[-1, 1]$  کو 6 برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 5.18)۔ یوں ایک ٹکڑے کی لمبائی  $\Delta x = \frac{1}{3}$  ہو گی۔

اب تک کی مثالوں میں متناہی مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم ہر ٹکڑے کے سر پر تفاعل کی قیمت لیتے رہے ہیں۔ اس سے بہتر نتائج اس صورت حاصل ہوتے ہیں جب تفاعل کی قیمت ہر ٹکڑے کی وسط میں لیا جائے۔ چھ ٹکڑوں کی وسط میں تفاعل کی قیمتوں کے اوسط کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔

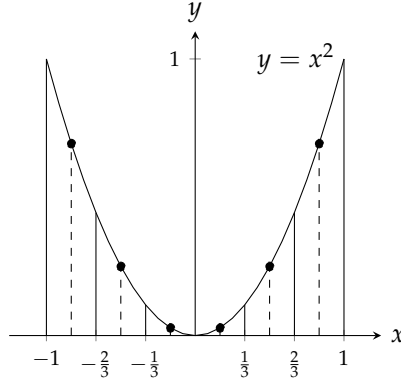
$$\begin{aligned} \text{اوسط قیمت} &\approx \frac{(-\frac{5}{6})^2 + (-\frac{3}{6})^2 + (-\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{6})^2 + (\frac{3}{6})^2 + (\frac{5}{6})^2}{6} \\ &\approx \frac{1}{6} \cdot \frac{25 + 9 + 1 + 1 + 9 + 25}{36} = \frac{70}{216} \approx 0.324 \end{aligned}$$

اس تفاعل کا اصل اوسط  $\frac{1}{3}$  ہے۔

درج ذیل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned} &\frac{(-\frac{5}{6})^2 + (-\frac{3}{6})^2 + (-\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{6})^2 + (\frac{3}{6})^2 + (\frac{5}{6})^2}{6} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{[-1, 1] \text{ لمبائی}} \cdot \left[ f\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + f\left(-\frac{3}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + \cdots + f\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{[-1, 1] \text{ لمبائی}} \cdot [\text{تفاعل کی قیمتیں ضرب ٹکڑے کی لمبائی کا مجموعہ}] \end{aligned}$$

□ اس بار بھی اندازاً قیمت حاصل کرنے کی خاطر تفاعل کی قیمت کو ٹکڑے کی لمبائی سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ حاصل کیا گیا ہے۔



شکل 5.18: تقابل کا اوسط (مثال 5.25)۔

نتیجہ

اس حصہ میں ہم نے تقابل کی قیمت کو ٹکڑے کی لمبائی سے ضرب دے کر مجموعہ حاصل کرنے سے درکار قیمتوں کا اندازہ لگایا گیا۔

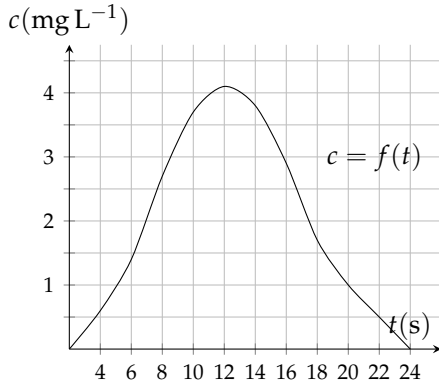
ہم نے مثال 5.22 میں دیکھا کہ ٹکڑوں کی لمبائی کم کرنے سے اصل جواب، جس کو ہم الٹ تفرق سے حاصل کر چکے تھے، کے زیادہ قریب نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ کیا ٹکڑوں کی لمبائی کم سے کم کرنے سے حاصل نتیجہ کی تحدیدی قیمت اصل جواب تک پہنچتی؟ کیا اس مثال میں مجموعہ اور الٹ تفرق کا تعلق اتفاقی ہے؟ کیا ہم مثال 5.21 میں رقبہ، مثال 5.23 اور مثال 5.24 میں حجم اور مثال 5.25 میں اوسط قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں؟ جیسا ہم دیکھیں گے، ان سوالات کے جوابات ہیں "جی ہاں ایسا کیا جاسکتا ہے"، "نہیں یہ اتفاق نہیں ہے" اور "جی ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں۔"

## سوالات

### اخراج قلب

سوال 1: ایک مریض کے اخراج قلب کو رنگ کی ترکیب سے ناپا گیا۔ پیمائش کے نتائج شکل 5.19 میں دیے گئے ہیں جہاں خون کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار 5 mg تھی۔ کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبہ کو مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر حاصل کریں۔ اخراج قلب کتنا ہے؟ (مثال 5.21 دیکھیں۔)





لحہ $t$	کثافت رنگ $c$
2	0
4	0.6
6	1.4
8	2.7
10	3.7
12	4.1
14	3.8
16	2.9
18	1.7
20	1.0
22	0.5
24	0

شکل 5.19: اخراج قلب جانے کے لئے کثافت رنگ بالمتقابل وقت کی پیمائش (سوال 1)۔

جدول 5.5: وقت بالمتقابل کثافت رنگ برائے سوال 2۔

لحہ $t$	کثافت رنگ $c$	لحہ $t$	کثافت رنگ $c$
0	0	16	7.9
2	0	18	7.8
4	0.1	20	6.1
6	0.6	22	4.7
8	2.0	24	3.5
10	4.2	26	2.1
12	6.3	28	0.7
14	7.5	30	0

لفظ	لفظ	لفظ	لفظ
$t(\text{min})$	$v(\text{m s}^{-1})$	$t(\text{min})$	$v(\text{m s}^{-1})$
35	1.2	0	1
40	1.0	5	1.2
45	1.8	10	1.7
50	1.5	15	2.0
55	1.2	20	1.8
60	0	25	1.6
		30	1.4

(ب) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 4

لفظ	لفظ	لفظ	لفظ
$t(\text{s})$	$v(\text{m s}^{-1})$	$t(\text{s})$	$v(\text{m s}^{-1})$
0	0	0	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

(i) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 3

شکل 5.20: رفتار بالمقابل وقت کی پینٹیشن قیمتیں۔

سوال 2: ایک مریض کا اخراج قلب جانے کی خاطر ترکیب رنگ استعمال کیا جاتا ہے۔ کی گئی پینٹیشن کو جدول 5.5 میں پیش کیا گیا ہے جہاں خوب کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار 10 mg ہے۔ پینٹیشن کو ہموار مٹھنی سے ترسیم کریں۔ رقبہ کا اندازہ مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر تلاش کریں۔ اخراج قلب دریافت کریں۔

فاصلہ

سوال 3: ایک ریل گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت شکل 5.20-ا میں دی گئی ہے۔ دس سیکنڈ وقفے کو 10 برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کی (i) بائیں سر، (ب) دائیں سر پر قیمتیں لیتے ہوئے طے فاصل تلاش کریں۔  
جواب: (i) 87 m، (ب) 86m

سوال 4: نہر کے پانی میں ایک بوتل کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.20-ب میں دیا گیا ہے۔ ایک گھنٹہ کے وقفہ کو 12 برابر ٹکڑوں میں تقسیم کریں۔ ان ٹکڑوں کی (i) بائیں سر قیمتیں، (ب) دائیں سر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے وہ فاصل تلاش کریں جو بوتل اس گھنٹہ میں طے کرتا ہے۔

سوال 5: ایک گاڑی جس کا رفتار پیا کار آمد لیکن مسافت پیا غیر کار آمد ہے میں آپ سفر کر رہے ہیں۔ آپ ہر 10 سیکنڈ اس کی رفتار قلم بند کرتے ہیں۔ ان نتائج کو شکل 5.21-ا میں دکھایا گیا ہے۔ سڑک کی لمبائی کی اندازاً قیمت کو (i) بائیں سر نقطہ قیمتیں، (ب) دائیں سر نقطہ قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔  
جواب: (i) 969 m، (ب) 1067 m

سوال 6: ساکن حال سے 36 سیکنڈ میں ایک گاڑی  $142 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار تک پہنچتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.21-ب میں دکھایا گیا ہے۔ (i) مستطیل استعمال کرتے ہوئے ان 36 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ب) گاڑی تقریباً کتنی دیر میں آدھے فاصلہ تک پہنچتی؟ اس لمحے پر گاڑی کی رفتار کتنی تھی؟

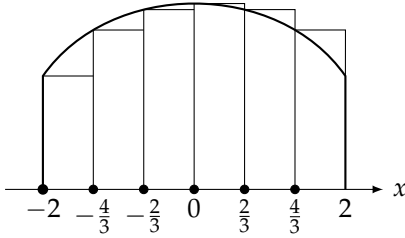
لفحہ گھنٹے	لفحہ گھنٹے	رقار $\text{km h}^{-1}$	رقار $\text{km h}^{-1}$
0	0.006	116	0
0.001	0.007	125	40
0.002	0.008	132	62
0.003	0.009	137	82
0.004	0.010	142	96
0.005			108

(ب) برائے سوال 6

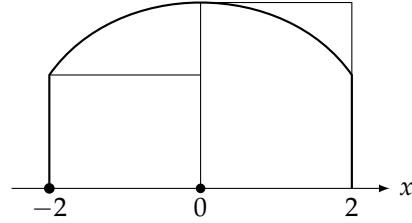
لفحہ سیکنڈ	لفحہ سیکنڈ	رقار $\text{km h}^{-1}$	رقار $\text{km h}^{-1}$
0	70	15	0
10	80	22	44
20	90	35	15
30	100	44	35
40	110	30	30
50	120	35	44
60			35

(i) برائے سوال 5

شکل 5.21: گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت۔



(ب) جسم کے حجم کو 6 چکور بیلیوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔



(i) جسم کے حجم کو 2 چکور بیلیوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

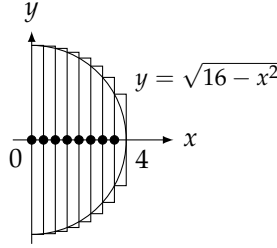
شکل 5.22: حجم کے ٹکڑے (سوال 7 اور سوال 8)

سوال 7: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 2 چکور بیلیوں سے کرتے ہیں (شکل 5.22-i)۔ (i) حجم  $H_2$  تلاش کریں۔ (ب) خلل  $|H - H_2|$  کی  $H$  کے لحاظ سے فی صد قیمت حاصل کریں۔

سوال 8: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 6 چکور بیلیوں سے کرتے ہیں (شکل 5.22-b)۔ (i) حجم  $H_6$  تلاش کریں۔ (ب) خلل  $|H - H_6|$  کو  $H$  کی فی صد کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال 9: فرض کریں ہم مثال 5.24 میں کرہ کا حجم حاصل کرنے کے لئے وقفہ  $-4 \leq x \leq 4$  کو چار برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم ہر ٹکڑے کے بائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہیں۔ (بائیں ترین بیلن کا رقبہ عمودی تراش صفر ہو گا۔) (i) ان بیلیوں کا مجموعی حجم  $H_4$  تلاش کریں۔ (ب) خلل  $|H - H_4|$  کو  $H$  کا فی صد لکھیں؟

سوال 10: ایک کرہ جس کا رداس 5 ہے کا حجم درکار ہے۔ آپ اس کے قطر کو پانچ برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ٹکڑا 2 کے برابر ہو گا۔ آپ ان ٹکڑوں کے بائیں سر نقطوں پر قطر کے عمودی کرہ کو کاٹ کر رقبہ عمودی تراش حاصل کرتے ہیں۔ آپ اتنی ہی رقبہ



شکل 5.23: نصف کرہ (سوال 11)

عمودی تراش والے ایسے بیلن لیتے ہیں جن کی موٹائی 2 ہو۔ ان بیلنوں کے مجموعی حجم سے آپ کرہ کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔  
(i) بیلنوں کا مجموعی حجم  $H_5$  کیا ہو گا؟ (ب) خلل  $|H - H_5|$  کو  $H$  کا فی صد لکھیں۔

سوال 11: رداس 4 کے کرہ کا حجم درکار ہے۔ اس کا محور تشاکل  $x$  محور پر وقفہ  $[0, 4]$  ہے۔ آپ اس وقفہ کو 8 برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر ٹکڑے کے بائیں سر نقطہ پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن جس کی موٹائی ٹکڑے کی لمبائی جتنی ہو کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم تلاش کیا جاتا ہے (شکل 5.23)۔ (i) مجموعی حجم  $H_8$  تلاش کریں (جو نصف کرہ کا حجم ہو گا)۔ (ب) کیا  $H_8$  نصف کرہ کے حجم  $H$  سے کم یا زیادہ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) خلل  $|H - H_8|$  کو  $H$  کا فی صد لکھیں۔

سوال 12: گزشتہ سوال (سوال 11) میں ہر ٹکڑے کے دائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہوئے دوبارہ جوابات حاصل کریں۔

سوال 13: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل  
نقطہ  $x = 0$  اور  $x = 4$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش پیکور شکل کا ہے جس کے کنارے قطع مکانی  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = -\sqrt{x}$  کو مس کرتے ہیں۔ (i) وقفہ  $0 \leq x \leq 4$  کو چار برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے دائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم  $H_4$  تلاش کریں۔ اصل حجم  $H = 32$  ہے۔ خلل  $|H - H_4|$  کو  $H$  کے لحاظ سے فی صد کی صورت میں لکھیں۔ (ج) اس مسئلے کو دوبارہ  $H_8$  کے لئے حل کریں۔

سوال 14: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل  
نقطہ  $x = 0$  اور  $x = 4$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش متساوی الاضلاع شکل کا ہے جس کے قاعدہ قطع مکانی  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = -\sqrt{x}$  کو مس کرتا ہے۔ (i) وقفہ  $0 \leq x \leq 4$  کو چار برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے بائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم  $H_4$  تلاش کریں۔ اصل حجم  $H = 8\sqrt{3}$  ہے۔  $H$  کے لحاظ سے خلل  $|H - H_4|$  کی فی صد قیمت کتنی ہے؟ (ج) سوال کو دوبارہ  $H_8$  کے لئے حل کریں۔

سوال 15: ایک پانی کی ٹینکی نصف کرہ کی مانند ہے جس کا رداس 8 m ہے۔ اس میں پانی کی گہرائی 4 m ہے۔ (i) پانی کی گہرائی کو آٹھ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کی ٹیچی سطح کا رقبہ عمودی تراش والے بیلن استعمال کرتے ہوئے  $H_8$  تلاش کریں۔ (ب) اصل حجم  $H = \frac{320\pi}{3} \text{ m}^3$  ہے۔  $H$  کے لحاظ سے خلل  $|H - H_8|$  کی فی صد قیمت تلاش کریں۔

جدول 5.6: تالاب میں پانی کی گہرائی (سوال 16)

مقام	گہرائی	مقام	گہرائی
$x$	$h$	$x$	$h$
0	2.0	6	3.83
1	2.73	7	3.97
2	3.03	8	4.1
3	3.3	9	4.23
4	3.5	10	4.33
5	3.67		

سوال 16: تیراکی کے ایک مستطیل تالاب کی لمبائی 10 m اور چوڑائی 6 m ہے۔ تالاب کے ایک سرے سے دوسرے سر تک 1 m وقفوں پر پانی کی گہرائی (میٹر) جدول 5.6 میں دی گئی ہے۔ (i)  $h$  کی بائیں سر نقطہ قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تالاب میں پانی کا حجم تلاش کریں۔ (ب) دائیں سر نقطہ قیمت استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال 17: منحنی  $y = \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 2$  کو  $y$  محور کے گرد گمانے سے ایک راکٹ کی قطع مکانی جسم نوک حاصل ہوتی ہے جہاں  $x$  کی پیمائش میٹروں میں ہے۔ اس نوک کا حجم معلوم کرنے کی خاطر ہم  $[0, 2]$  کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر حصے کی لمبائی 0.4 ہوگی۔ ہر حصہ کے بائیں سر نقطہ پر  $x$  محور کے قائمہ جسم کو کانا جاتا ہے اور ان نقطوں پر جسم کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن استعمال کرتے ہوئے نوک کا حجم دریافت کیا جاتا ہے۔ بیلنوں کی لمبائی 0.4 ہوگی۔ (i) مجموعہ  $H_5$  تلاش کریں۔ کیا  $H_5$  کی قیمت  $H$  سے کم یا زیادہ ہوگی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) نوک کا اصل حجم  $H = 2\pi \text{ m}^3$  ہے۔ خلل  $|H - H_5|$  کو  $H$  کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔  
جواب: (i)  $1.6\pi$ ، (ب) 20 %

سوال 18: ہر ٹکڑے کے دائیں سر نقطہ رقبہ عمودی تراش استعمال کرتے ہوئے سوال 17 کو دوبارہ حل کریں۔

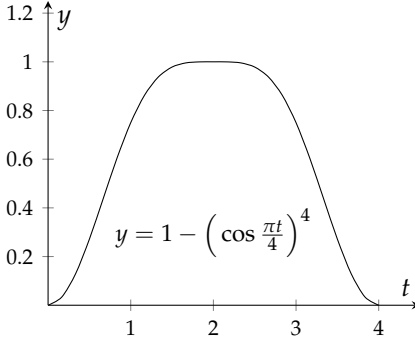
تفاعل کی اوسط قیمت  
سوال 19 تا سوال 22 میں تفاعل  $f$  کی اوسط قیمت درکار ہے۔ دیے گئے وقفہ کو چار ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کی وسط میں تفاعل کی قیمت استعمال کرتے ہوئے متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے اوسط حاصل کریں۔

سوال 19:  $f(x) = x^3$ ,  $[0, 1]$

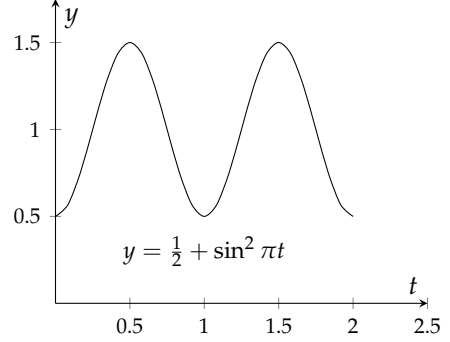
سوال 20:  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $[1, 9]$

سوال 21:  $f(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \pi t$ ,  $[0, 2]$  شکل 5.24

سوال 22:  $f(t) = 1 - (\cos \frac{\pi t}{4})^4$ ,  $[0, 4]$  شکل 5.25



شکل 5.25: ترسیم برائے سوال 22



شکل 5.24: ترسیم برائے سوال 21

رفتار اور فاصلہ  
سوال 23: ایک جسم کو جہاز سے گرنے دیا جاتا ہے۔ جسم کی رفتار مسلسل بڑھتی ہے لیکن ہوائی رگڑ کی بنا گرنے کی اسراع بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ وقت بالقابل جسم کی اسراع کو درج ذیل جدول میں پیش کیا گیا ہے۔

$t(s)$	0	1	2	3	4	5
$a(m/s^2)$	9.8	5.92	3.59	2.18	1.32	0.80

(i) لمحہ  $t = 5$  پر رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) لمحہ  $t = 5$  پر رفتار کی نیچے حد تلاش کریں۔ (ج) لمحہ  $t = 3$  میں گرنے والے فاصلہ کی بالائی حد تلاش کریں۔

جواب: (i)  $22.81 m/s$ ، (ب)  $13.81 m/s$ ، (ج)  $35.175 m$

سوال 24: ایک جسم کو سمندری سطح سے سیدھا اوپر  $125 m/s$  کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ اس جسم پر صفر ثقلی قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ (i) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی نیچے حد تلاش کریں۔ ثقلی اسراع کو  $9.8 m/s^2$  لیں۔

آلودگی پر قابو پانا  
سوال 25: تیل کے جہاز سے سمندر میں تیل رس رہا ہے۔ رستا تیل کی مقدار (لٹر فی گھنٹہ) بالقابل وقت (گھنٹہ) کو نیچے جدول میں دیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صورت حال بتدریج خراب ہو رہی ہے۔

گھنٹہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Lh^{-1}$	50	70	97	136	190	265	369	516	720

(i) ان پانچ گھنٹوں میں خارج تیل کی مقدار کی بالائی اور نیچے حد تلاش کریں۔ (ب) آٹھ گھنٹوں میں خارج تیل کی بالائی اور نیچے حد تلاش کریں۔ (ج) ابتدائی آٹھ گھنٹوں بعد تیل مسلسل  $720 Lh^{-1}$  سے رستا ہے۔ اگر جہاز میں ابتدائی طور کل  $25000 L$  تیل ہو تب تمام تیل

خارج ہونے کے لئے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنا وقت درکار ہو گا۔  
جواب: (ا) 758 L ، 543 L ، (ب) 2363 L ، 1693 L ، (ج) 31.4 h ، 32.4 h

سوال 26: ایک بجلی گھر تیل کو جلا کر برقی طاقت پیدا کرتا ہے۔ تیل جلنے سے پیدا آلودگی کو کم کرنے کی خاطر دھواں کش کو چھلنی سے گزارا جاتا ہے جو نجاست کو روک دیتا ہے۔ وقت کے ساتھ ساتھ چھلنی کی کارگزاری کم پڑ جاتی ہے اور اس کو تبدیل کرنا لازمی ہو جاتا ہے۔ ہر مہینے کی آخر میں ہوا میں خارج نجاست کی شرح ناپی جاتی ہے، اگر یہ مقدار سرکاری حد سے زیادہ ہو تب چھلنی کو تبدیل کیا جاتا ہے۔ اس پیمائش کی ایک مثال چلی جدول میں دکھائی گئی ہے جہاں یومیہ خارج نجاست کی مقدار کی اکائی ٹن (1000 kg) ہے۔

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
نجاست	0.2	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

(ا) تمام مہینوں کو 30 دنوں کا تصور کریں۔ فرض کریں نئی چھلنی سے یومیہ 0.05 ٹن نجاست نکل پاتی ہے۔ جون کے مہینے کی آخر تک ہوا میں کل خارج نجاست کی مقدار کی بالائی حد کیا ہو گی؟ اس کی چلی حد کیا ہو گی؟ (ب) بہترین حالات میں کل 125 ٹن نجاست کتنے عرصہ میں ہوا میں خارج ہو گا؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 27 تا سوال 30 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے (ا) دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) وقفہ کو  $n = 100$  ،  $n = 200$  اور  $n = 1000$  برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کی وسط میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب میں حاصل قیمتوں سے تفاعل کی اوسط تقریب تلاش کریں۔ (د)  $n = 1000$  کے لئے حاصل اوسط تقریب استعمال کرتے ہوئے مساوات  $f(x) = \sin x$  کو حل کریں۔

سوال 27:  $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$

سوال 28:  $f(x) = \sin^2 x, \quad [0, \pi]$

سوال 29:  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

سوال 30:  $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم



