

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نکتہ ناتی تفاعل	7.8
875	الٹ نکتہ ناتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نکتہ ناتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1261	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291	10.6	قطبی محدود
1303	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1317	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1319	10.8.1	دائرے
1333	10.9	قطبی محدود میں مکمل

1347	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1347	11.1	مستوی میں سمتیت
1364	11.2	کار تہی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1372	11.2.1	کرہ

1377 ا ضمیمہ اول

1379 ب ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتیاں اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

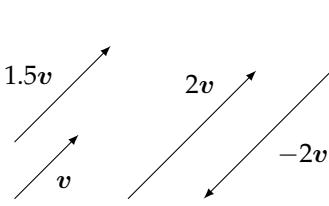
اس حصہ میں سمتیاں اور سہ بعدی محدود نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محدود مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محدود خلا موزوں ہے۔ ہم محدود مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محدود خلا پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور xy مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

11.1 مستوی میں سمتیاں

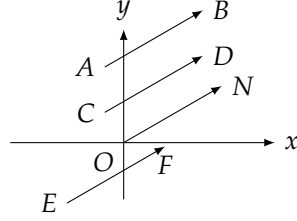
بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاؤ، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہوگی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہوگا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاؤ بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہوگا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہوگا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر دار کلیروں کو ہم سمت بند خطوط تصور کرتے اور سمتیاں کہتے ہیں۔



شکل 11.2: سمتیہ کے غیر سمتی مضرب۔



شکل 11.1: یکساں لمبائی اور یکساں رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: ایک مستوی میں سمت بند خط کو سمتیہ¹ کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً v ، سے ظاہر کیا جائے گا²۔ نقطہ A سے نقطہ B تک تیر کو ہم \vec{AB} لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل 11.1 میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{ON} = \vec{EF}$$

□

غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل 11.2)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی 50% بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

¹vector

²قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان \vec{v} یا نصف تیر کا نشان \vec{v} ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور v ایک سمتیہ ہو تب مثبت c کی صورت میں v اور cv کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی c کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی³ کہلاتے ہیں جبکہ cv کے مضرب کو v کا غیر سمتی⁴ مضرب کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ 0 حاصل ہوگا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہوگا جس کی لمبائی صفر ہوگی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ 0 کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات v_1 اور v_2 کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر v_1 کا نمائندہ، مثلاً A سے B تک، ترسیم کر کے v_1 کے اختتامی نقطہ (سر) B پر v_2 کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل 11.3 میں \vec{BC} میں $v_2 = \vec{BC}$ ہے۔ مجموعہ $v_1 + v_2$ اب v_1 کے دم A سے v_2 کے سر C تک سمتیہ ہوگا۔ یوں اگر

$$v_1 = \vec{AB}, \quad v_2 = \vec{BC}$$

ہوں تب

$$v_1 + v_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ہوگا۔ چونکہ اس عمل میں $v_1 + v_2$ متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع⁵ کہتے ہیں (شکل 11.4)۔

اجزاء

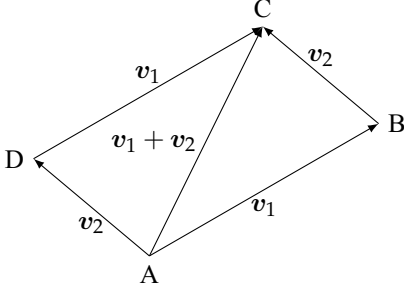
دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ v کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

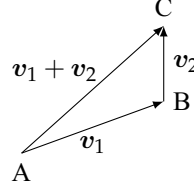
$$v = v_1 + v_2$$

لکھنا ممکن ہو، سمتیات v_1 اور v_2 سمتیہ v کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ v کو اس کے اجزاء v_1 اور v_2 میں تحلیل کیا گیا ہے۔

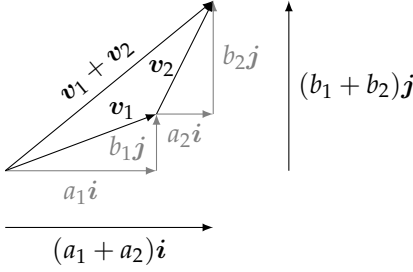
scalar³
scalar multiple⁴
parallelogram law⁵



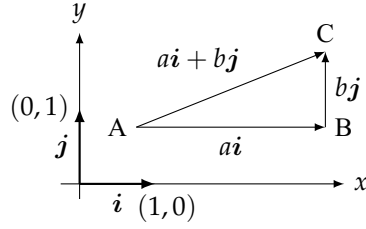
شکل 11.4: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع یکساں لمبائی ہونے کی بنا پر ABCD متوازی الاضلاع ہو گا۔



شکل 11.3: سمتیات v_1 اور v_2 کا مجموعہ۔



شکل 11.6: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔



شکل 11.5: اساس سمتیات i اور j کو استعمال کر کے کسی بھی سمتیہ \vec{AC} کو لکھا جاسکتا ہے۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں اساسی⁶ سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت x محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(1,0)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت i ہے۔ مثبت y محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(0,1)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت j ہے۔ اب غیر سمتی a کے لئے محور x کے متوازی سمتیہ ai کی لمبائی $|a|$ ہوگی جبکہ اس کا رخ $a > 0$ کے لئے دایاں اور $a < 0$ کے لئے بائیں ہوگا۔ اس طرح غیر سمتی b کے لئے محور y کے متوازی سمتیہ bj کی لمبائی $|b|$ ہوگی جبکہ اس کا رخ $b > 0$ کے لئے اوپر اور $b < 0$ کے لئے نیچے ہوگا۔ شکل 11.5 میں سمتیہ $\vec{AC} = v$ کو اجزاء i اور j میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$v = ai + bj$$

تعریف: اگر $v = ai + bj$ ہو تب i اور j کے رخ، سمتیہ v کے اجزاء سمتیات ai اور bj ہوں گے۔ اعداد a اور b ، اساسی سمتیات i اور j کے رخ، سمتیہ v کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

□

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$(11.1) \quad ai + bj = a'i + b'j \Leftrightarrow a = a', \quad b = b'$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب i اور j کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 11.6)۔

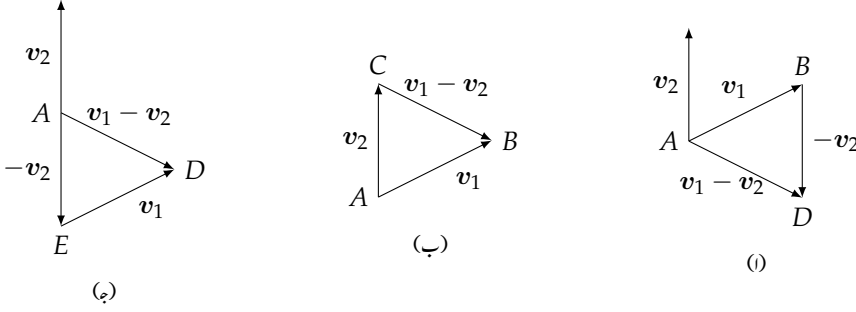
اگر $v_1 = a_1i + b_1j$ اور $v_2 = a_2i + b_2j$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j$$

مثال 11.2:

$$(2i - 4j) + (5i + 3j) = (2 + 5)i + (-4 + 3)j = 7i - j$$

□



شکل 11.7: سمتیہ $v_1 - v_2$ کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔

تفریق

ایک سمتیہ v کا منفی سمتیہ $-v = (-1)v$ ہو گا۔ اس کی لمبائی v کی لمبائی ہو گی البتہ اس کا رخ v کا مخالف ہو گا۔ سمتیہ v_2 کو سمتیہ v_1 سے منفی کرنے کی خاطر ہم $-v_2$ اور v_1 کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم v_1 کے سر سے $-v_2$ کھینچ کر v_1 کے دم سے $-v_2$ کے سر تک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل 11.7-ا میں دکھایا گیا ہے جہاں

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = v_1 + (-v_2) = v_1 - v_2$$

اس کے علاوہ v_1 اور v_2 کے دم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر v_1 اور v_2 ترسیم کر کے v_2 کے سر سے v_1 کے سر تک سمتیہ $v_1 - v_2$ ہو گا۔ یہ عمل شکل 11.7-ب میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -v_2 + v_1 = v_1 - v_2$$

مزید، $-v_2$ کے سر سے v_1 ترسیم کر کے $v_1 - v_2$ حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 11.7-ج)۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

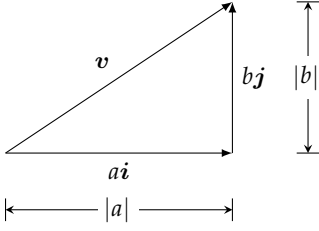
$$(11.2) \quad v_1 - v_2 = (a_1 - a_2)i + (b_1 - b_2)j$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

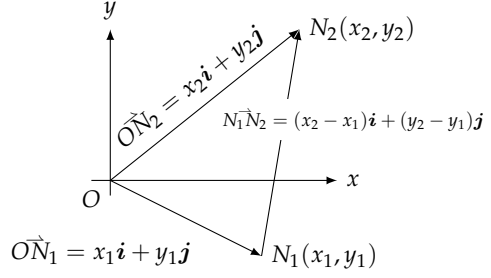
مثال 11.3:

$$(6i + 2j) - (3i - 5j) = (6 - 3)i + (2 - (-5))j = 3i + 7j$$

□



شکل 11.9: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جاسکتی ہے۔



شکل 11.8

ہم نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $\vec{ON}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ کے اجزاء کو $\vec{ON}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔

$N_1(x_1, y_1)$ سے $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(11.3) \quad \vec{N_1N_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

مثال 11.4: نقطہ $N_1(3, 4)$ سے نقطہ $N_2(5, 1)$ تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\vec{N_1N_2} = (5 - 3)\mathbf{i} + (1 - 4)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

□

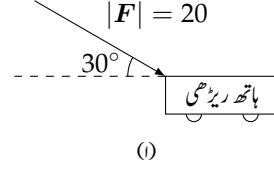
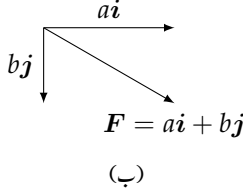
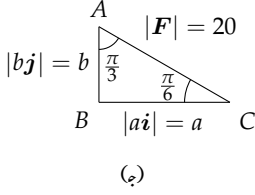
مقدار

سمتیہ $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ کی لمبائی⁷ یا مقدار⁸ $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ہے۔ سمتیہ \mathbf{v} اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے (شکل 11.9)۔ سمتیہ کی لمبائی $|\mathbf{v}|$ میں دو انتصابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$(11.4) \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

length⁷
magnitude⁸



شکل 11.10: ہاتھ ریڑھی (مثال 11.5)

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ 30° زاویہ پر 20 N کی قوت F سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں (شکل 11.10-ج)۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتحابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتحابی جزو معلوم کریں۔

حل: ہم قوت $F = ai + bj$ اور اس کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں (شکل 11.10-ب اور شکل 11.10-ج)۔ اس مثلث سے $a = 10\sqrt{3}$ اور $b = 10$ حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو $10\sqrt{3}i$ اور انتحابی جزو $10j$ ہے۔ یوں $F = 10\sqrt{3}i - 10j$ ہو گا۔ انتحابی جزو کا رخ نیچے ہے لہذا یہ منفی ہے۔ \square

غیر سمتی ضرب

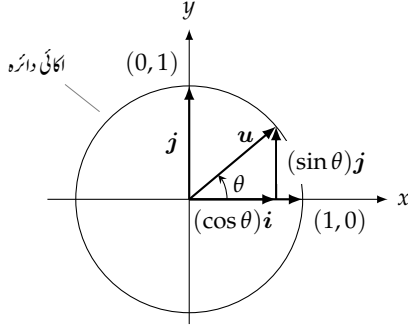
غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور $v = ai + bj$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$cv = c(ai + bj) = (ca)i + (cb)j \quad (11.5)$$

سمتیہ cv کی لمبائی سمتیہ v کی لمبائی ضرب $|c|$ ہو گا:

$$\begin{aligned} |cv| &= |(ca)i + (cb)j| \\ &= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{c^2} \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= |c||v| \end{aligned}$$

یوں اگر c غیر سمتی ہو اور v ایک سمتیہ ہو تب $|cv| = |c||v|$ ہو گا۔



شکل 11.11: مستوی میں ہر اکائی سمتیہ کو $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 11.6: اگر $c = -2$ اور $v = -3i + 4j$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$|v| = |-3i + 4j| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned} |-2v| &= |(-2)(-3i + 4j)| = |6i - 8j| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||v| \end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0i + 0j$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کو ظاہر کرنے کے لئے $\mathbf{0}$ کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔ صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

$$|ai + bj| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

اکائی سمتیات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو اکائی سمتیہ⁹ کہلائے گا۔ سمتیات i اور j اکائی سمتیات ہیں۔

$$|i| = |1i + 0j| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad |j| = |0i + 1j| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

سمتیہ u جو اکائی سمتیہ i کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل 11.11)۔

$$(11.6) \quad u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی لہذا u بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|u| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا 2π کرنے سے u کا سر N مہد کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

لمبائی اور رخ

اگر $v \neq 0$ ہو تب

$$\left| \frac{v}{|v|} \right| = \left| \frac{1}{|v|} v \right| = \frac{1}{|v|} |v| = 1$$

ہو گا لہذا $\frac{v}{|v|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ v کا رخ ہو گا۔ یوں ہم v کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$v = |v| \left(\frac{v}{|v|} \right)$$

یوں اگر $u \neq 0$ ہو تب

۱. $\frac{v}{|v|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ v کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\frac{v}{|v|}$ کو v کا رخ کہتے ہیں۔

ب. مساوات $v = |v| \left(\frac{v}{|v|} \right)$ سمتیہ v کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ $v = 3i - 4j$ کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

حل:

$$\begin{aligned}
 |v| &= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 && v \text{ کی لمبائی} \\
 \frac{v}{|v|} &= \frac{3i - 4j}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j && v \text{ کا رخ} \\
 v &= 3i - 4j = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}} \left(\underbrace{\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j}_{\text{رخ}} \right)
 \end{aligned}$$

□

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں $a \neq 0$ کی صورت میں سمتیہ $v = ai + bj$ کا ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گا (شکل 11.12)۔

کسی نقطہ پر ایک منحنی کو ایک سمتیہ تب مماسی¹⁰ یا عمودی¹¹ ہو گا جب اس نقطہ پر منحنی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

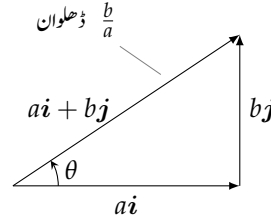
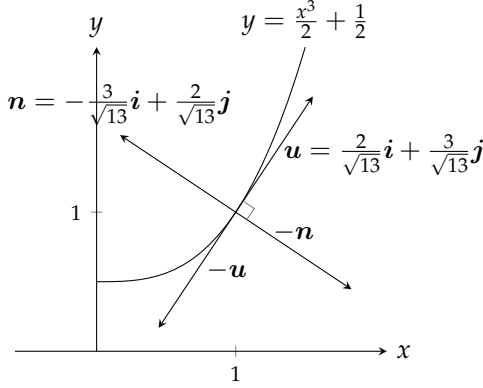
مثال 11.8: نقطہ $(1, 1)$ پر منحنی $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

حل: ہم نقطہ $(1, 0)$ پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل 11.13)۔

اس نقطہ پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \frac{3x^2}{2} \Big|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

tangent¹⁰
normal¹¹



شکل 11.12: اگر $a \neq 0$ ہو تب سمتیہ $v = ai + bj$ کی ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گی۔

شکل 11.13: ایک نقطہ پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیہ (مثال 11.8)

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ $v = 2i + 3j$ اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کی ڈھلوان $\frac{3}{2}$ ہے۔ سمتیہ v کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی 1 ہو ہم v کو

$$|v| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

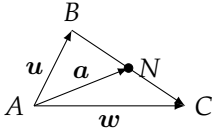
سمتیہ u کی لمبائی 1 ہے اور یہ $(1, 1)$ پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-u = -\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

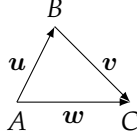
جو مخالف رخ ہے بھی $(1, 1)$ پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جاسکتی ہے۔

نقطہ $(1, 1)$ پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان u کی ڈھلوان کے بالعکس تناسب کے منافی کے برابر ہو۔ ہم u کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

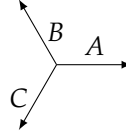
$$n = -\frac{3}{\sqrt{13}}i + \frac{2}{\sqrt{13}}j, \quad -n = \frac{3}{\sqrt{13}}i - \frac{2}{\sqrt{13}}j$$



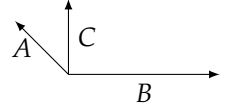
شکل 11.17



شکل 11.16



شکل 11.15



شکل 11.14

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں $(1, 1)$ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ □

سوالات

جیومیٹری اور حساب
سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات A ، B اور C کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $A + B$ ب. $A + B + C$ ج. $A - 2B$ د. $\frac{1}{2}A - C$

جوابات: شکل 11.18

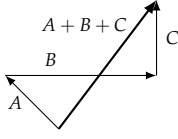
سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات A ، B اور C کو شکل 11.15 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $A - B$ ب. $A + B + C$ ج. $2A - \frac{1}{2}B$ د. $A - (B - C)$

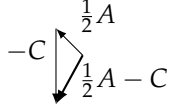
سوال 3 تا سوال 6 میں $A = 2i - 7j$ ، $B = i + 6j$ اور $C = \sqrt{3}i - \pi j$ لیں۔ نتائج کو $ai + bj$ روپ میں لکھیں۔

سوال 3: $A + 2B$
جواب: $4i + 5j$

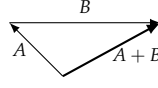
سوال 4: $A + B - C$



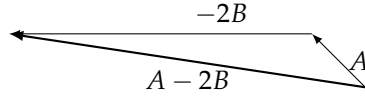
(ب)



(ج)



(د)



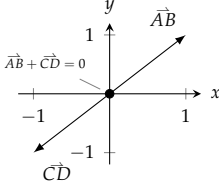
(ه)

شکل 11.18

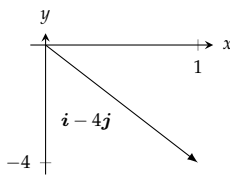
سوال 5: $3A - \frac{1}{\pi}C$ جواب: $(6 - \frac{\sqrt{3}}{\pi})i - 20j$ سوال 6: $2A - 3B + 32j$ سوال 7: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات u ، v اور w دیتے ہیں (شکل 11.16)۔ا. w کو u اور v کی صورت میں لکھیں۔ب. v کو u اور w کی صورت میں لکھیں۔جواب: (د) $w = v + u$ (ب) $v = w - u$ سوال 8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات u اور w دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے (شکل 11.17)۔ سمتیہ a کو u اور w کی صورت میں لکھیں۔سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیہ کو $ai + bj$ روپ میں لکھیں۔ محدودی سطح پر مبداسے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔سوال 9: نقاط $N_1(5, 7)$ اور $N_2(2, 9)$ کے بیچ قطع $\vec{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

جواب: شکل 11.19

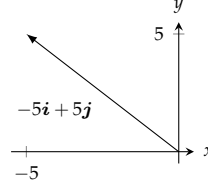
سوال 10: نقاط $N_1(1, 2)$ اور $N_2(-3, 5)$ کے بیچ قطع $\vec{N_1N_2}$ تلاش کریں۔



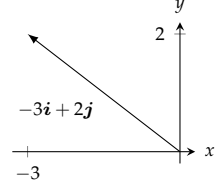
شکل 11.22



شکل 11.21



شکل 11.20



شکل 11.19

سوال 11: نقاط $A(-5, 3)$ اور $B(-10, 8)$ کے بیچ قطع \vec{AB} تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.20

سوال 12: نقاط $A(-7, -8)$ اور $B(6, 11)$ کے بیچ قطع \vec{AB} تلاش کریں۔

سوال 13: نقاط $N_1(1, 3)$ اور $N_2(2, -1)$ کے بیچ قطع $\vec{N_1N_2}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.21

سوال 14: نقاط $N_3(1, 3)$ اور N_4 کے بیچ قطع $\vec{N_3N_4}$ تلاش کریں جہاں $N_1(2, -1)$ اور $N_2(-4, 3)$ کو ملانے والے قطع کا وسطی نقطہ N_4 ہے۔

سوال 15: نقاط $A(1, -1)$ ، $B(2, 0)$ ، $C(-1, 3)$ اور $D(-2, 2)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیات \vec{AB} اور \vec{CD} کا مجموعہ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.22

سوال 16: نقطہ A سے مبداء تک سمتیہ، جہاں $\vec{AB} = 4i - 2j$ اور $B(-2, 5)$ ہیں۔

سوال 17: سمتیہ $\vec{AB} = 3i - j$ اور نقطہ $A(2, 9)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ B تلاش کریں۔
جواب: $(5, 8)$

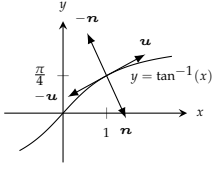
سوال 18: سمتیہ $\vec{NQ} = -6i - 4j$ اور نقطہ $Q(3, 3)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ N تلاش کریں۔

اکائی سمتیات

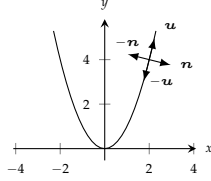
سوال 19 تا سوال 22 میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو $ai + bj$ روپ میں لکھیں۔

سوال 19: زاویہ $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے لئے اکائی سمتیات $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

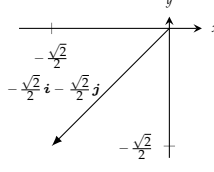
جواب: شکل 11.23



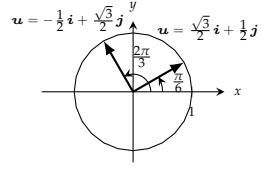
شکل 11.26



شکل 11.25



شکل 11.24



شکل 11.23

سوال 20: زاویہ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ اور $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ کے لئے اکائی سمتیات $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 21: سمتیہ j کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈین گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔
جواب: شکل 11.24

سوال 22: سمتیہ j کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال 23 اور سوال 24 میں اکائی سمتیہ $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ اسی رخ تلاش کریں۔

سوال 23: $6i - 8j$

جواب: $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$

سوال 24: $-i + 3j$

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور اکائی سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہوگی۔)

سوال 25: $y = x^2$, $(2, 4)$
جواب: $u = \frac{1}{\sqrt{17}}i + \frac{4}{\sqrt{17}}j$, $-u = -\frac{1}{\sqrt{17}}i - \frac{4}{\sqrt{17}}j$,
شکل 11.25 $n = \frac{4}{\sqrt{17}}i - \frac{1}{\sqrt{17}}j$, $-n = -\frac{4}{\sqrt{17}}i + \frac{1}{\sqrt{17}}j$

سوال 26: $x^2 + 2y^2 = 6$, $(2, 1)$

سوال 27: $y = \tan^{-1} x$, $(1, \frac{\pi}{4})$
جواب: $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j)$, $-u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2i - j)$,
شکل 11.26 $n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-i + 2j)$, $-n = \frac{1}{\sqrt{5}}(i - 2j)$

سوال 28: $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (0, 1)$

سوال 29 تا سوال 32 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

سوال 29: $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0, \quad (1, 0)$
جواب: $u = \pm \frac{1}{5}(-4i + 3j), \quad v = \pm \frac{1}{5}(3i + 4j)$

سوال 30: $x^2 - 6xy + 8y^2 - 2x - 1 = 0, \quad (1, 1)$

سوال 31: $y = \int_0^x \sqrt{3+t^4} dt, \quad (0, 0)$
جواب: $u = \pm \frac{1}{2}(i + \sqrt{3}j), \quad v = \pm \frac{1}{2}(-\sqrt{3}i + j)$

سوال 32: $y = \int_e^x \ln(\ln t) dt, \quad (e, 0)$

لمبائی اور رخ

سوال 33 اور سوال 34 میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 33: $5i + 12j$
جواب: $13(\frac{5}{13}i + \frac{12}{13}j)$

سوال 34: $2i - 3j$

سوال 35: سمتیہ $3i - 4j$ کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔
جواب: $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j, \quad -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$

سوال 36: سمتیہ $A = -i + 2j$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 2 ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں؟

سوال 37: دکھائیں کہ $A = 3i + 6$ اور $B = -i - 2j$ ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

سوال 38: دکھائیں کہ $A = 3i + 6$ اور $B = \frac{1}{2}i + j$ کے رخ ایک دوسرے جیسے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: آپ ایک ریڑھی کو قوت F سے کھینچ رہے ہیں جس کی مقدار $|F| = 10 \text{ N}$ ہے۔ زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ

30° ہے۔ اس قوت کے x اور y اجزاء تلاش کریں۔
جواب: $5\sqrt{3}i, 5j$

سوال 40: پتنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ 45° زاویہ پر 5 N قوت سے کھینچتی ہے۔ اس قوت کے افقی اور انحصاری اجزاء تلاش کریں۔

سوال 41: سمتیہ $A = 2i + j$ ، $B = i + j$ اور $C = i - j$ دیے گئے ہیں۔ ایسے غیر سمتیات α اور β کہ $A = \alpha B + \beta C$ ہو۔
جواب: $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$

سوال 42: سمتیات $A = i - 2j$ ، $B = 2i + 3j$ اور $C = i + j$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ $A = A_1 + A_2$ لکھیں جہاں A_1 سمتیہ B کے متوازی اور A_2 سمتیہ C کے متوازی ہے۔ (سوال 41 دیکھیں۔)

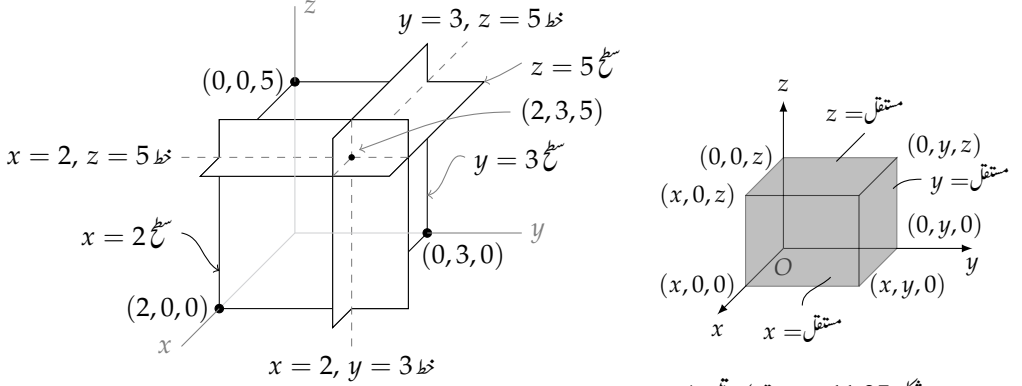
سوال 43: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شمال کی طرف 60° پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لئے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (i) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔
جواب: (i) $(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ ، $(5 \cos 60^\circ, 5 \sin 60^\circ)$ ، (ب) $(\frac{5+\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2})$ ، $(5 \cos 60 + 10 \cos 315, 5 \sin 60 + 10 \sin 315)$

سوال 44: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، شمال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد یہ مغرب سے 30° زاویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (i) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

سوال 45: مستوی میں v ایک سمتیہ ہے جو y محور کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ v کی ڈھلوان اور سمتیہ $-v$ کی ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $-v = -ai - bj$ کی ڈھلوان $\frac{(-b)}{(-a)}$ ہے۔ یہی v کی بھی ڈھلوان ہے۔

11.2 کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضائیں سمتیات

ہم اب سہ بعدی کار تیبی محدود بیان کرتے ہیں اور فضا میں اپنا راستہ تلاش کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم فاصلہ کی تعریف جانیں گے، فضا میں سمتیات کے ساتھ کام کرنا (مستوی کے قواعد اب بھی لاگو ہوں گے، پس اب ایک محدود بڑھ جائے گا)، اور نقطوں کے سلسلہ کا مساوات اور عدم مساوات کے ساتھ تعلق سیکھیں گے۔



شکل 11.27: دایاں ہاتھ کار تیزی نظام۔

شکل 11.28: سطح $x = 2$ ، $y = 3$ اور $z = 5$ نقطہ $(2, 3, 5)$ سے گزرتی تین خط تعین کرتے ہیں۔

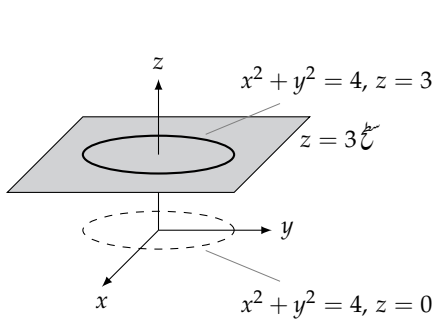
کار تیزی محدود

فضا میں نقطہ کی تلاش کے لئے تین آپس میں عمودی محدود محور استعمال کیے جاتے ہیں۔ شکل 11.27 میں محور Ox ، Oy اور Oz دایاں ہاتھ محدود نظام دیتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کے نظام میں، آگٹوٹے کو باقی انگلیوں کے ساتھ زاویہ قائمہ پر رکھتے ہوئے، اگر آپ اپنے دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو مثبت x محور پر رکھ کر انہیں مثبت y محور کی جانب موڑیں تب آپ کا آگٹوٹھا مثبت z محور پر ہو گا۔

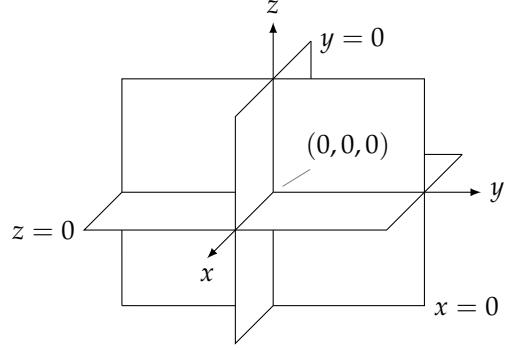
فضا میں نقطہ N سے گزرتی، محوروں کے قائمہ سطحیں ان محور کو اعداد (x, y, z) پر قطع کریں گی۔ یہی اعداد نقطہ N کے کار تیزی محدود ہوں گے۔

محور x پر نقطوں کے y اور z محدود صفر ہوں گے لہذا ان کے محدود کی صورت $(x, 0, 0)$ ہو گی۔ اسی طرح محور y پر نقطوں کے x اور z محدود صفر ہوں گے لہذا ان نقطوں کے محدود کی صورت $(0, y, 0)$ ہو گی۔ محور z پر نقطوں کے x اور y محدود صفر ہوں گے لہذا ان کے محدود کی صورت $(0, 0, z)$ ہو گی۔

محور x کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا x محدود وہی ہو گا جس x محدود پر یہ سطح x محور کو قطع کرتا ہے۔ اس سطح پر نقطوں کے y اور z محدود کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح محور y کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک y محدود ہو گا اور محور z کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک z محدود ہو گا۔ ان سطحوں کی مساوات لکھتے ہوئے ہم اس مشترکہ محدود کی قیمت لکھتے ہیں۔ یوں مستوی $x = 2$ محور x کو عمودی ہے اور یہ مستوی محور x کو نقطہ $x = 2$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $y = 3$ محور y کو عمودی ہے اور اس کو نقطہ $y = 3$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $z = 5$ محور z کو عمودی ہے اور اس محور کو نقطہ $z = 5$ پر قطع کرتا ہے۔ شکل 11.28 میں مستوی $x = 2$ ، $y = 3$ اور $z = 5$ دکھائے گئے ہیں۔ ان کا مشترک نقطہ بھی دکھایا گیا ہے جہاں یہ تینوں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔



شکل 11.30: بلند دائرہ (مثال 11.10)

شکل 11.29: سطح $x=0$ ، $y=0$ اور $z=0$ فضا کو آٹھ شمن میں تقسیم کرتے ہیں۔

مستوی $x=2$ اور $y=3$ ایک دوسرے کو ایک لکیر پر قطع کرتے ہیں (شکل 11.28) جو محور z کے متوازی ہے۔ اس لکیر کو جوڑی مساوات $x=2$ ، $y=3$ ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ (x, y, z) صرف اور صرف اس صورت اس لکیر پر پایا جائے گا جب $x=2$ اور $y=3$ ہوں۔ اسی طرح مستوی $y=3$ اور $z=5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $y=3$ ، $z=5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور x کے متوازی ہوگی۔ مستوی $x=2$ اور $z=5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $x=2$ ، $z=5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور y کے متوازی ہوگی۔

محدی محوروں کے تین مستوی xy ¹² جس کی معیاری مساوات $z=0$ ؛ مستوی yz جس کی معیاری مساوات $x=0$ اور مستوی xz جس کی معیاری مساوات $y=0$ ہے پائی جاتی ہیں۔ یہ تینوں مستوی مبدا $(0,0,0)$ پر آپس میں ملتے ہیں (شکل 11.29)۔

تین محدودی مستوی ¹³ $x=0$ ، $y=0$ اور $z=0$ فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں ثمن ¹⁴ کہتے ہیں۔ وہ ثمن جس میں تمام محدود مثبت ہیں پہلا ثمن ¹⁵ کہلاتا ہے۔ باقی سات ثمن کو نام دینے کا کوئی روایتی طریقہ نہیں پایا جاتا ہے۔

چونکہ فضا کے کارتیسی محدود ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں لہذا ان محدود کو مستطیل محدود ¹⁶ بھی کہتے ہیں۔

درج ذیل مثال میں ہم مساواتوں اور عدم مساواتوں کا خلا میں ہم پلہ نقطے تلاش کرتے ہیں۔

¹² xy-plane
¹³ coordinate planes
¹⁴ octant
¹⁵ first octant
¹⁶ rectangular coordinates

مثال 11.9:

مساوات اور عدم مساوات تفصیل

$$\begin{aligned}
 & z \geq 0 \quad xy \text{ مستوی میں اور اس سے اوپر نصف فضا میں تمام نقطے۔} \\
 & x = -3 \quad \text{مستوی } x \text{ کو نقطہ } x = -3 \text{ پر عمودی سطح۔ یہ سطح } yz \text{ مستوی کے متوازی اور 3 اکائیاں} \\
 & \quad \text{اس کے پیچھے ہے۔} \\
 & z = 0, x \leq 0, y \geq 0 \quad \text{مستوی } xy \text{ کا ربع دوم۔} \\
 & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \text{پہلا ششمن۔} \\
 & -1 \leq y \leq 1 \quad \text{سطح } y = 1 \text{ اور } y = -1 \text{ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔} \\
 & y = -2, z = 2 \quad \text{وہ خط جس میں سطح } y = -2 \text{ اور سطح } z = 2 \text{ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، یا وہ خط جو} \\
 & \quad \text{نقطہ } (0, -2, 2) \text{ سے گزرتا ہے اور محور } x \text{ کے متوازی ہے۔} \\
 & \quad \square
 \end{aligned}$$

مثال 11.10: کون سے نقاط $N(x, y, z)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؟

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{اور} \quad z = 3$$

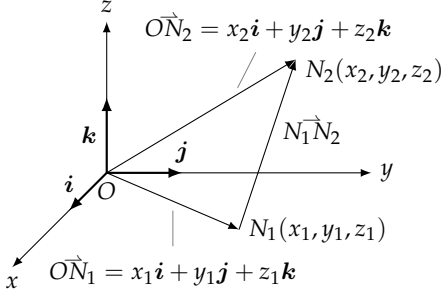
حل: یہ نقطے افقی سطح $z = 3$ میں پائے جاتے ہیں اور اس سطح میں یہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ بناتے ہیں۔ ہم ان نقطوں کو "سطح" $z = 3$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ یا مختصراً "دائرہ" $x^2 + y^2 = 4, z = 3$ کہتے ہیں (شکل 11.30)۔ \square

فضا میں سمتیات

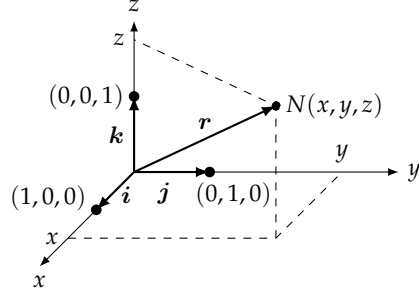
سمت بند خطوط کا سلسلہ جو قوت، ہٹاؤ، اور سمتی رفتار ظاہر کرتے ہوں سمتیات کہلاتے ہیں، جیسے یہ مستوی میں کہلائے جاتے ہیں۔ سمتی مجموعہ، سمتی تفریق اور غیر سمتی ضرب کے وہی قواعد یہاں بھی کارآمد ہوں گے۔

مبدأ سے نقاط $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ تک سمت بند خطوط اساسی سمتیات ہیں (شکل 11.31) جنہیں بالترتیب i ، j اور k سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مبدأ O سے عمومی نقطہ $N(x, y, z)$ تک تعین گزرتیہ r^{17} درج ذیل ہو گا۔

$$(11.7) \quad \vec{r} = \vec{ON} = xi + yj + zk$$



شکل 11.32: دو نقطوں کے بیچ سمتیہ۔



شکل 11.31: فضا میں نقطے کا تعین گر سمتیہ۔

تعریف: فضا میں سمتیات کا مجموعہ اور تفریق کسی بھی سمتیات $A = a_1i + a_2j + a_3k$ اور $B = b_1i + b_2j + b_3k$ کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$A + B = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

$$A - B = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$

□

دو نقاط کے بیچ سمتیہ

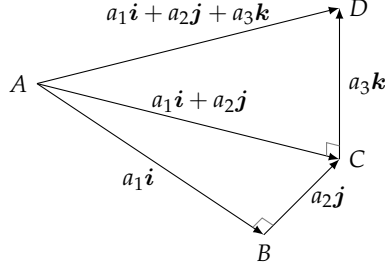
ہم نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ $N_1\vec{N}_2$ کو

$$\begin{aligned} N_1\vec{N}_2 &= \vec{ON}_1 - \vec{ON}_2 \\ &= (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جو N_1 اور N_2 کے محدود کی صورت میں ہے (شکل 11.32)۔

یوں نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(11.8) \quad N_1\vec{N}_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$



شکل 11.33: قائمہ مثلث ABC اور ACD پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے \vec{AD} کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔

مقدار

جیسا ہم جانتے ہیں، سمتیہ کی مقدار اور سمت اس کے اہم خصوصیات ہیں۔ ہم مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے شکل 11.33 میں سمتیہ $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ کی مقدار (لمبائی) کا کلیہ تلاش کرتے ہیں۔ مثلث ABC سے

$$|\vec{AC}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ہو گا لہذا مثلث ACD سے

$$|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}| = |\vec{AD}| = \sqrt{|\vec{AC}|^2 + |\vec{CD}|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ہو گا۔

یوں $A = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ کی مقدار (لمبائی) درج ذیل ہوگی۔

$$|A| = |a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

غیر سمتی ضرب

تعریف: اگر c غیر سمتی اور A ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$cA = (ca_1)\mathbf{i} + (ca_2)\mathbf{j} + (ca_3)\mathbf{k}$$

□

مثال 11.11: سمتیہ $A = i - 2j + 3k$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔

$$|A| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

□

اگر ہم سمتیہ $A = a_1i + a_2j + a_3k$ کو غیر سمتی c سے ضرب دیں تب، مستوی میں غیر سمتی ضرب کی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا، cA کی لمبائی $|c|$ ضرب A کی لمبائی ہوگی:

$$\begin{aligned} cA &= ca_1i + ca_2j + ca_3k \\ (11.9) \quad |cA| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2} = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + c^2a_3^2} \\ &= |c| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |c||A| \end{aligned}$$

مثال 11.12: سمتیہ A مثال 11.11 میں دیا گیا ہے۔ یوں

$$2A = 2(i - 2j + 3k) = 2i - 4j + 6k$$

کی لمبائی درج ذیل ہوگی:

$$\begin{aligned} \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (6)^2} &= \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} \\ &= \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14} = 2|A| \end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

فضا میں صفر سمتیہ سے مراد سمتیہ $0 = 0i + 0j + 0k$ ہے۔ مستوی میں صفر سمتیہ کی طرح فضا میں 0 کی لمبائی صفر ہوگی اور اس کا کوئی رخ نہیں ہوگا۔

اکائی سمتیات

فضا میں اکائی سمتیہ کی لمبائی 1 ہوگی۔ اساسی سمتیات درج ذیل کی بنا اکائی سمتیات ہیں۔

$$\begin{aligned} |i| &= |1i + 0j + 0k| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\ |j| &= |0i + 1j + 0k| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \\ |k| &= |0i + 0j + 1k| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \end{aligned}$$

مقدار اور رخ

اگر $A \neq 0$ ہو تب $\frac{A}{|A|}$ ایک اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ وہی ہو گا جو A کا رخ ہے۔ یوں ہم A کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(11.10) \quad A = |A| \cdot \frac{A}{|A|}$$

مثال 11.13: سمتیہ $A = i - 2j + 3k$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

حل:

$$A = |A| \cdot \frac{A}{|A|} \quad \text{مساوات 11.10}$$

$$= \sqrt{14} \cdot \frac{i - 2j + 3k}{\sqrt{14}} \quad \text{مثال 11.11}$$

$$= \sqrt{14} \left(\frac{1}{\sqrt{14}}i - \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{3}{\sqrt{14}}k \right) = (\text{رخ } A) \cdot (\text{لبائی } A)$$

□

مثال 11.14: نقطہ $N_1(1, 0, 1)$ سے نقطہ $N_2(3, 2, 0)$ تک سمتیہ کے رخ میں اکائی سمتیہ u تلاش کریں۔

حل: ہم $N_1 \vec{N}_2$ کو اس کی لبائی سے تقسیم کر کے u حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} N_1 \vec{N}_2 &= (3 - 1)i + (2 - 0)j + (0 - 1)k = 2i + 2j - k \\ |N_1 \vec{N}_2| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \\ u &= \frac{N_1 \vec{N}_2}{|N_1 \vec{N}_2|} = \frac{2i + 2j - k}{3} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k \end{aligned}$$

□

مثال 11.15: سمتیہ $A = 2i + 2j - k$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لبائی 6 ہو۔

حل: ہم اس سمتیہ کے رخ اکائی سمتیہ کو 6 سے ضرب کر کے جواب حاصل کرتے ہیں:

$$6 \frac{A}{|A|} = 6 \frac{2i + 2j - k}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6 \frac{2i + 2j - k}{3} = 4i + 4j - 2k$$

□

فضا میں فاصلہ

فضا میں نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ، سمتیہ $\vec{N_1N_2}$ کی لمبائی $|\vec{N_1N_2}|$ ہو گی۔

نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$(11.11) \quad |\vec{N_1N_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال 11.16: نقاط $N_1(2, 1, 5)$ اور $N_2(-2, 3, 0)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} |\vec{N_1N_2}| &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (0 - 5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 25} \\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

□

11.2.1 کرہ

ہم مساوات 11.11 استعمال کر کے اس کرہ کی مساوات لکھتے ہیں جس کا مرکز $N_0(x_0, y_0, z_0)$ اور رداس a ہو۔ نقطہ $N(x, y, z)$ اس صورت اس کرہ پر پایا جائے گا جب $|\vec{N_0N_1}| = a$ ہو یعنی:

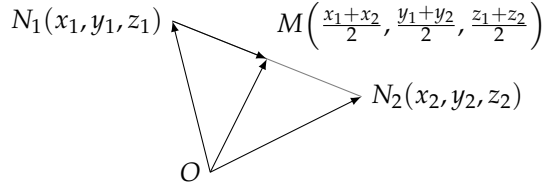
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

ایک کرہ جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) اور رداس a ہو کی معیاری مساوات درج ذیل ہے۔

$$(11.12) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

مثال 11.17: درج ذیل کرہ کا مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$



شکل 11.34: نقاط N_1 اور N_2 کے محدود کی اوسط قطع N_1N_2 کے وسطی نقطہ کے محدود ہوں گے۔

حل: ہم مستوی میں دائرے کا مرکز اور رداس حاصل کرنے کی طرح یہاں بھی x ، y اور z کے مربع تکمیل کر کے معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کر کے مرکز اور رداس دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 &= 0 \\ (x^2 + 3x) + y^2 + (z^2 - 4z) &= -1 \\ \left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + y^2 + \left(z^2 - 4z + \left(-\frac{4}{2}\right)^2\right) &= -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{2}\right)^2 \\ (x + \frac{3}{2})^2 + y^2 + (z - 2)^2 &= -1 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

یہ مساوات 11.12 ہے لہذا $x_0 = -\frac{3}{2}$ ، $y_0 = 0$ ، $z_0 = 2$ اور $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$ ہیں۔ یوں مرکز $(-\frac{3}{2}, 0, 2)$ اور رداس $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہو گا۔
□

مثال 11.18:

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$x^2 + y^2 + z^2 < 4$	کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا اندرون۔
$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$	ٹھوس کرہ جو $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کے سطح اور اندرون پر مشتمل ہو۔
$x^2 + y^2 + z^2 > 4$	کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا بیرون۔
$x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$	کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا نچلا نصف حصہ۔

وسطی نقاط

کسی بھی قطع کا وسطی نقطہ اوسط کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

اس کی وجہ درج ذیل ہے (شکل 11.34)۔

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{ON}_1 + \frac{1}{2}N_1\vec{N}_2 = \vec{ON}_1 + \frac{1}{2}(\vec{ON}_2 - \vec{ON}_1) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{ON}_1 + \vec{ON}_2) \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2}\vec{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\vec{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\vec{k}\end{aligned}$$

مثال 11.19: نقطہ $N_1(3, -2, 0)$ اور $N_2(7, 4, 4)$ کو ملانے والی قطع کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (5, 1, 2)$$

□

سوالات

سلسلہ، مساوات اور عدم مساوات سوال 1 تا سوال 12 میں ان نقطوں کے سلسلہ کی جیومیٹریکی تفصیل بیان کریں جو دی گئی جوڑی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 1: $x = 2, y = 3$

سوال 2: $x = -1, z = 0$

سوال 3: $y = 0, z = 0$

سوال 4: $x = 1, y = 0$

سوال 5: $x^2 + y^2 = 4, z = 0$

سوال 6: $x^2 + y^2 = 4, z = -2$

سوال 7: $x^2 + z^2 = 4, y = 0$

سوال 8: $y^2 + z^2 = 1, x = 0$

سوال 9: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

سوال 10: $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad y = -4$

سوال 11: $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25, \quad z = 0$

سوال 12: $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

سوال 13 تا سوال 18 میں ان نقاط کے سلسلہ کو جیومیٹریائی بیان کریں جو دی گئی عدم مساوات یا مساوات اور عدم مساوات کی جوڑی کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 13: (i) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 0$ (ب) $x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad z = 0$

سوال 14:

ا. $0 \leq x \leq 1$

ب. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$

ج. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$

سوال 15:

ا. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

ب. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

سوال 16: (i) $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0$ (ب) $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 3$ (ج) $x^2 + y^2 \leq 1$ جہاں x پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال 17: (i) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$ (ب) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0$

سوال 18: (i) $x = y, \quad z = 0$ (ب) $x = y, \quad z$ جہاں $x = y, \quad z$ پر کوئی شور لاگو نہیں ہے۔

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے سلسلہ کو ایک مساوات یا جوڑی مساوات سے ظاہر کریں۔

سوال 19: وہ مستوی جو (i) نقطہ $(3, 0, 0)$ پر محور x ، (ب) نقطہ $(0, -1, 0)$ پر محور y ، (ج) نقطہ $(0, 0, -2)$ پر محور z کو عمودی ہے۔

سوال 20: ایک مستوی جو نقطہ $(3, -1, 2)$ پر (i) محور x ، (ب) محور y ، (ج) محور z کو عمودی ہے۔

سوال 21: ایک مستوی جو نقطہ $(3, -1, 1)$ پر (i) مستوی xy ، (ب) مستوی yz ، (ج) مستوی xz کو عمودی ہے۔

سوال 22: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0, 0, 0)$ ہو اور جو (i) مستوی xy ، (ب) مستوی yz ، (ج) مستوی xz میں پایا جاتا ہو۔

سوال 23: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0, 2, 0)$ ہو اور جو (i) مستوی xy ، (ب) مستوی yz ، (ج) مستوی $y = 2$ میں پایا جاتا ہو۔

سوال 24: وہ دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(-3, 4, 1)$ ہو اور جو (i) مستوی xy ، (ب) مستوی yz ، (ج) مستوی xz کے متوازی ہو۔

سوال 25: نقطہ $(1, 3, -1)$ سے گزرتا خط جو (i) محور x ، (ب) محور y ، (ج) محور z کے متوازی ہو۔

سوال 26: فضا میں وہ نقطے جن کا فاصلہ مبدا اور نقطہ $(0, 2, 0)$ سے یکساں ہو۔

سوال 27: وہ دائرہ جس میں نقطہ $(1, 1, 3)$ سے گزرتا ہوا ایسا مستوی جو محور z کے عمودی ہو ایک ایسے دائرہ کو جاملتا ہے جس کا رداس 5 اور مرکز $(0, 0, 0)$ ہیں۔

سوال 28: فضا میں ان نقطوں کا سلسلہ جن کا فاصلہ $(0, 0, 1)$ سے 2 اور $(0, 0, -1)$ سے 2 ہو۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

