احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات

گزشتہ حصے میں ہم نے فاصلے، رقبے، حجم اور اوسط قیمتوں کو متناہی مجموعوں کی مدد سے حاصل کیا۔ منتخب تفاعل کی قیمتوں کو وقفوں کی لمبائیوں کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے یہ مجموعے حاصل کیے گئے۔ اس حصہ میں ان وقفوں کی لمبائیوں کو کم سے کم اور تعداد کو زیادہ سے زیادہ کرتے ہوئے مجموعہ کی تحدیدی قیمت پر غور کیا جائے گا۔ متعدد ارکان پر مشتمل مجموعے کو ظاہر کرنے کی علامت پہلے متعارف کرتے ہیں۔

متناہی مجموعہ کی علامت

درج ذیل مجموعہ کو

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t$$

یونانی حروف تہجی کا بڑا حرف Σ ("سگما") استعمال کرتے ہوئے $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو k کی 1 تا n قیمتوں کے لئے Δt ضرب t_k پر f کی قیمتوں کا مجموعہ ہے۔ مجموعہ کی یوں اظہار کو سگما علامتی اظہار کہتے ہیں۔

تعریف: متناہی مجموعہ کا سگما علامتی اظہار
علامت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ سے مراد مجموعہ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ہے۔ مجموعہ کے ارکان[15] a_1 تا a_n ہیں جہاں a_1 مجموعے کا پہلا اور a_n مجموعے کا آخری رکن ہے۔ متغیر k مجموعی سلسلہ کا اشاری[16] کہلاتا ہے۔ k کی قیمتیں 1 تا n عدد صحیح ہیں۔ مجموعی سلسلہ کا زیریں حد[17] 1 جبکہ مجموعی سلسلہ کا بالائی حد[18] n ہے۔ زیریں اور بالائی حدود کوئی بھی دو عدد صحیح ممکن ہیں۔

□

مثال 5.26:

مجموعہ کی سگما صورت	ارکان کی صورت میں مجموعہ	مجموعہ کی قیمت
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1+2+3+4+5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1)+(-1)^2(2)+(-1)^3(3)$	$-1+2-3=-2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

[15] terms
[16] index of summation
[17] lower limit of summation
[18] upper limit of summation

□

مجموعی سلسلہ کا زیریں حد 1 سے ہٹ کر ہو سکتا ہے۔

مثال 5.27: مجموعہ $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ کو سگما علامتی روپ میں لکھیں۔

حل:

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+1) \qquad k = 0 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$
$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) \qquad k = 1 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

□

متناہی مجموعہ کا الجبرا

متناہی مجموعوں کے ساتھ کام کرتے ہوئے درج ذیل قواعد بروئے کار لائے جا سکتے ہیں۔

قاعدہ مجموعہ: $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

قاعدہ فرق: $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

قاعدہ ضرب مستقل: $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ جہاں c کوئی عدد ہے۔

قاعدہ مستقل قیمت: $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$ جہاں c کوئی مستقل قیمت ہے۔

اس فہرست میں کوئی حیران کن حقیقت پیش نہیں کی گئی ہے۔ ان کے با ضابطہ ثبوت (الکراجی) الجبرائی ماخوذ سے حاصل کیے جا سکتے ہیں جنہیں ضمیمہ ا میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال 5.28:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2) = 3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}k^2 \qquad \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k = -1\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k = -\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \text{قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k+4) &= \sum_{k=1}^{3}k + \sum_{k=1}^{3}4\\ &= (1+2+3)+(3\cdot 4) && \text{قاعدہ مستقل قیمت}\\ &= 6+12 = 18\end{aligned}$$

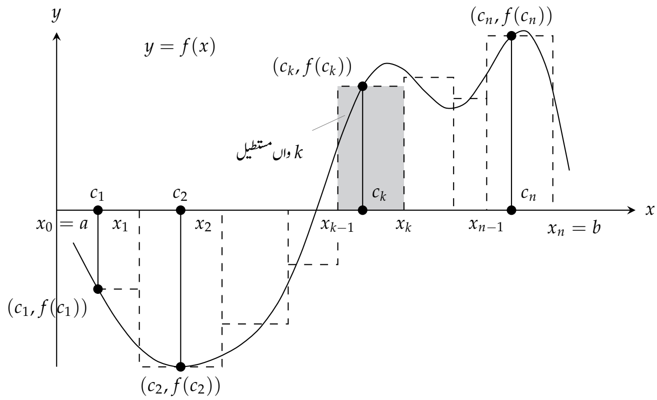
□

مثبت عدد صحیح کے کلیات مجموعہ

متناہی مجموعوں کے کئی کلیات پائے جاتے ہیں جن میں سے مشہور ترین کلیات شروع کے n عدد صحیح کا مجموعہ ہے (جو گاوس نے 5 سال کی عمر میں اخذ کیا) اور شروع کے n عدد صحیح کے مربع اور مکعب کے مجموعوں کے کلیات ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k &= \frac{n(n+1)}{2} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح}\\ \sum_{k=1}^{n}k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مربع}\\ \sum_{k=1}^{n}k^3 &= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مکعب}\end{aligned} \tag{5.13}$$

مثال 5.29: $\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k)$ تلاش کریں۔



شکل 5.26: بند وقفہ $[a, b]$ پر عمومی تفاعل $y = f(x)$ ۔ تفاعل اور x محور کے بیچ رقبہ کو تخمینی طور پر مستطیلوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ c_1 کو عین x_0 پر منتخب کیا ہوا دکھایا گیا ہے۔

حل: ہم مجموعہ کو مجموعی سلسلہ کے روپ میں لکھے بغیر الجبرائی قواعد استعمال کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{k=1}^{4}(k^2 - 3k) = \sum_{k=1}^{4} k^2 - 3\sum_{k=1}^{4} k$$

قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل

$$= \frac{4(4+1)(8+1)}{6} - 3\Big(\frac{4(4+1)}{2}\Big)$$

$n = 4$ لیتے ہوئے مساوات 5.13

$$= 30 - 30 = 0$$

□

ریمان مجموعے

ہم نے حصہ 5.4 میں تخمینی مجموعوں پر غور کیا جو زیادہ عمومی ریمان مجموعہ کی مخصوص مثالیں تھیں۔ ان مثالوں میں تفاعل کی قیمتیں غیر منفی تھیں جبکہ ریمان مجموعہ میں ایسی پابندی نہیں پائی جاتی ہے۔ وقفہ $[a, b]$ پر دیے گئے اختیاری استمراری تفاعل $y = f(x)$ کو a اور b کے بیچ نقاط $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ پر n ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (شکل 5.26)۔ یہ نقطے صرف درج ذیل شرط کے تحت منتخب کیے جاتے ہیں۔

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

اس علامتی روپ میں مطابقت پیدا کرنے کی خاطر a کو x_0 اور b کو x_n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل سلسلہ

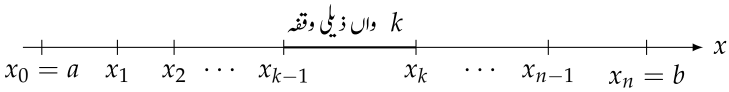
$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

کو $[a, b]$ کی خانہ بندی[19] کہتے ہیں۔

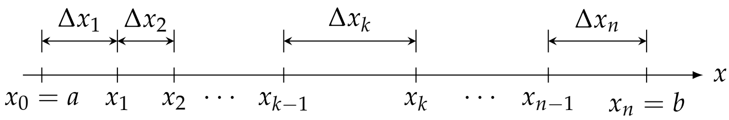
P کی خانہ بندی درج ذیل n عدد بند ذیلی وقفوں[20] کو ظاہر کرتی ہے۔

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

بند ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کو P کا k واں ذیلی وقفہ کہتے ہیں۔



k ویں ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ہے۔



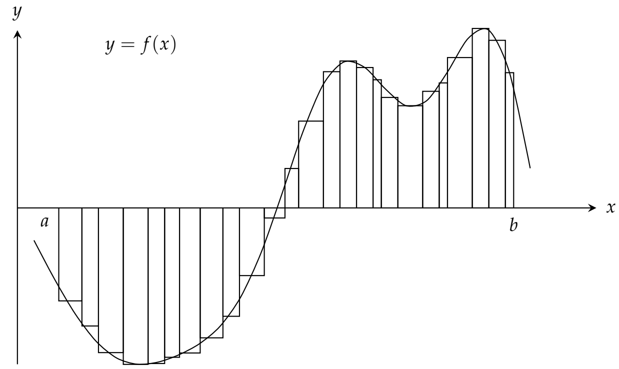
ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں ہم کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ذیلی وقفہ میں تفاعل $y = f(x)$ پر نقطہ $(c_k, f(c_k))$ تک مستطیل بناتے ہیں۔ جب تک نقطہ c_k ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں پایا جاتا ہو اس کا مقام غیر اہم ہے (شکل 5.26)۔

اگر $f(c_k)$ مثبت ہو تب عدد $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے قد ضرب قاعدہ یعنی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ اگر $f(c_k)$ منفی عدد ہو تب $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے رقبہ کے نفی کے برابر ہو گا۔ ہم ان تمام $f(c_k)\Delta x_k$ حاصل ضرب جن کی تعداد n ہے کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

یہ مجموعہ جو P اور c_k کی انتخاب پر منحصر ہے وقفہ $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ[21] کہلاتا[22] ہے۔

$[a, b]$ کے خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرتے ہوئے خانہ بندی سے حاصل مستطیل تفاعل f اور x محور کے بیچ خطہ کو بہتر سے بہتر ظاہر کرتے ہیں (شکل 5.27 کا شکل 5.26 کے ساتھ موازنہ کریں)۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ ہماری



شکل 5.27: وقفہ $[a,b]$ کے زیادہ باریک خانہ بندی سے مستطیلوں کی تعداد بڑھتی ہے جن کے قاعدہ نسبتاً چھوٹے ہوتے ہیں۔

اس توقع کو پرکھنے کی خاطر ہمیں خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کو ریاضیاتی صورت میں لکھنا ہو گا اور جاننا ہو گا کہ آیا مطابقتی مجموعہ کی کوئی تحدیدی قیمت پائی جاتی ہے۔ ہم درج ذیل تعریف کی مدد سے ایسا کر پائیں گے۔

خانہ بندی P کی معیار[23] سے مراد سب سے لمبے خانے کی لمبائی ہے جس کو درج ذیل علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|P\| \qquad \text{(اس کو "}P\text{ کا معیار" پڑھیں)}$$

خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کی بجائے اب ہم کہتے ہیں کہ خانوں کی معیار صفر تک پہنچائی جاتی ہے۔ جیسے جیسے معیار کی قیمت صفر کے نزدیک ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم اور ان کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہوتی جاتی ہے۔ خانوں کی چوڑائی کم کرنے سے باریک مستطیل پیدا ہوں گے۔

مثال 5.30: وقفہ $[0,2]$ کی خانہ بندی سلسلہ $P=\{0,0.2,0.6,1,1.5,2\}$ ہے۔ P کے پانچ ذیلی وقفے درج ذیل ہیں۔

$$[0,0.2],\ [0.2,0.6],\ [0.6,1],\ [1,1.5],\ [1.5,2]$$

ان ذیلی وقفوں کی لمبائیاں $\Delta x_1=0.2$ ، $\Delta x_2=0.4$ ، $\Delta x_3=0.4$ ، $\Delta x_4=0.5$ اور $\Delta x_5=0.5$ ہیں۔ ان میں سب سے لمبے ذیلی وقفہ کی لمبائی 0.5 ہے لٰہذا خانہ بندی P کا معیار $\|P\|=0.5$ ہے۔ اس مثال میں دو ذیلی وقفوں کی لمبائی 0.5 ہے۔ □

[19] partition
[20] subintervals
[21] Riemann sum
[22] جرمنی کے ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے ایسے مجموعوں کی تحدیدی قیمتوں پر کام کیا۔
[23] norm

تعریف: قطعی تکمل بطور ریمان مجموعوں کا حد
فرض کریں وقفہ $[a,b]$ پر $f(x)$ ایک معین تفاعل ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے وقفہ $[a,b]$ پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ کا حد اس صورت عدد I ہو گا جب درج ذیل شرط پورا ہوتا ہو:

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کسی بھی منتخب عدد c_k کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\|P\| < \delta \quad \implies \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k\right| < \epsilon$$

□

اگر یہ حد موجود ہو تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I$$

وقفہ $[a,b]$ پر عدد I تفاعل f کا قطعی تکمل[24] کہلاتا ہے، اور ہم کہتے ہیں کہ $[a,b]$ پر f قابل تکمل[25] ہے اور $[a,b]$ پر f کا ریمان مجموعہ عدد I پر مرکوز[26] ہے۔

ہم عموماً I کو $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ لکھتے ہیں جو " a تا b تفاعل f کا تکمل" پڑھا جاتا ہے۔ یوں اگر حد موجود ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ خانہ بندی تبدیل کرتے ہوئے اور ہر خانے میں c_k کا مقام تبدیل کرنے کے باوجود استمراری f کی صورت میں $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعوں $\sum f(c_k)\Delta x_k$ کی تحدیدی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ ریمان نے 1854 میں درج ذیل مسئلہ ثابت کرتے ہوئے اس حقیقت کی تصدیق کر دی۔ ریمان کے ثبوت کی جدید صورت احصاء کی تقریباً تمام اعلیٰ کتابوں میں پایا جاتا ہے۔

مسئلہ 5.1: قطعی تکمل کی موجودگی
تمام استمراری تفاعل قابل تکمل ہیں۔ یعنی وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کا $[a,b]$ پر قطعی تکمل موجود ہو گا۔

---
[24] definite integral
[25] integrable
[26] converges

ہم کیوں یقین کریں کہ یہ مسئلہ کار آمد ہو گا؟ وقفہ $[a, b]$ کی عمومی خانہ بندی P فرض کریں۔ چونکہ تفاعل f استمراری ہے لہٰذا ہر ذیلی وقفہ پر اس کی کوئی کم سے کم قیمت k_L اور کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت k_H ہو گی۔ کم سے کم قیمتوں (شکل 5.28-ا) سے حاصل ضرب $k_L \Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا زیریں مجموعہ[27] L کہلاتا ہے۔

$$L = k_{L1}\Delta x_1 + k_{L2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Ln}\Delta x_n$$

اسی طرح زیادہ سے زیادہ قیمتوں (شکل 5.28-ب) سے حاصل ضرب $k_H \Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا بالائی مجموعہ H کہلاتا ہے۔

$$H = k_{H1}\Delta x_1 + k_{H2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Hn}\Delta x_n$$

ان کا فرق $H - L$ شکل 5.28-ج میں دکھائے گیے سیاہ ڈبوں کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ جیسا جیسا $\|P\| \to 0$ کیا جائے ان ڈبوں کی تعداد بڑھتی جائے گی جبکہ ان کی چوڑائی اور لمبائی کم سے کم ہوتی جائے گی۔ ہم $\|P\|$ کو صفر کے کافی نزدیک کرتے ہوئے غیر منفی عدد $H - L$ کو کسی بھی چھوٹے سے چھوٹے مثبت عدد ϵ سے کم کر سکتے ہیں، یعنی

$$\lim_{\|P\|\to 0}(H - L) = 0 \tag{5.14}$$

اور جیسا اعلیٰ نصاب میں دکھایا گیا ہے درج بالا سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} H \tag{5.15}$$

بند وقفوں پر استمراری تفاعل کی ایک خاصیت جس کو یکساں استمرار[28] کہتے ہیں کی بدولت مساوات 5.14 اور مساوات 5.15 کار آمد ہیں۔ یہ خاصیت ممکن بناتی ہے کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ان ڈبوں، جو H اور L کے فرق کو ظاہر کرتے ہیں، کی چوڑائی کو کم سے کم کرتے ہوئے ان کی قد کو کم سے کم بنایا جا سکتا ہے اور ہم ان کی چوڑائی کم کرتے ہوئے ان کے قد کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ چونکہ یکساں استمرار سے منسلک ϵ بالمقابل δ کی دلیل ہم نے یہاں پیش نہیں کی ہے لہٰذا ہم مساوات 5.15 کو ثبوت نہیں مان سکتے ہیں البتہ مذکورہ بالا دلائل اصل ثبوت کی روح پیش کرتے ہیں۔

ہم وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل f کے لئے مساوات 5.15 کو درست تصور کرتے ہوئے P کے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ لکھتے ہیں. اب ہر k کے لئے $k_L \le f(c_k) \le k_H$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le H$$

---

[27] lower sum
[28] uniform continuity

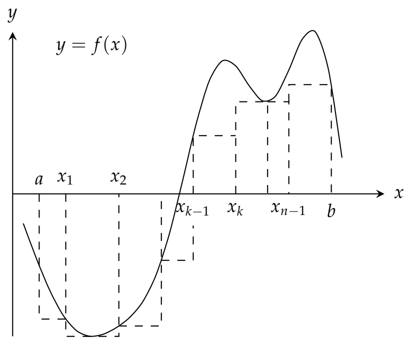
$\|P\| \to 0$ کہ کرتے ہیں کہ ہم اخذ کرتے ہیں سے ہم ترمیم شدہ روپ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ (مسئلہ 2.4) کی ترمیم شدہ روپ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ H اور L کے بیچ پایا جاتا ہے۔ مسئلہ بیچ f کا ریمان مجموعہ
کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کا حد موجود ہو گا اور یہ L اور H کی مشترکہ تحدیدی قیمت ہو گی:

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} H$$

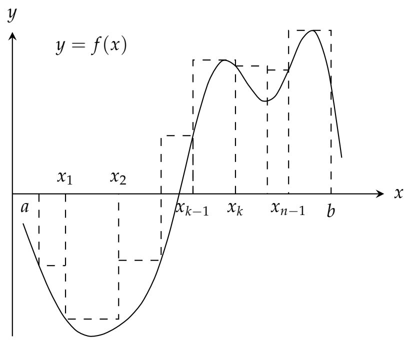
ایک لمحہ رک کر اس نتیجہ پر غور کریں۔اس نتیجہ کے تحت ہم c_k کو جس طرح بھی منتخب کریں، $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت وہی حاصل ہو گی۔ ہر $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی کم سے کم قیمت منتخب کر کے وہی حد حاصل ہو گا۔ اسی طرح ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت منتخب کر کے بھی وہی حد حاصل ہو گا۔ c_k کو بلا منصوبہ منتخب کر کے بھی یہی حد حاصل ہو گا۔

اگرچہ ہم نے قطعی تکمل کی موجودگی کا مسئلہ بالخصوص استمراری تفاعل کے لئے پیش کیا، حقیقت میں کئی غیر استمراری تفاعل بھی قابل تکمل ہیں۔ غیر محدود تفاعل کی تکمل پر اسی باب میں غور کیا جائے گا۔

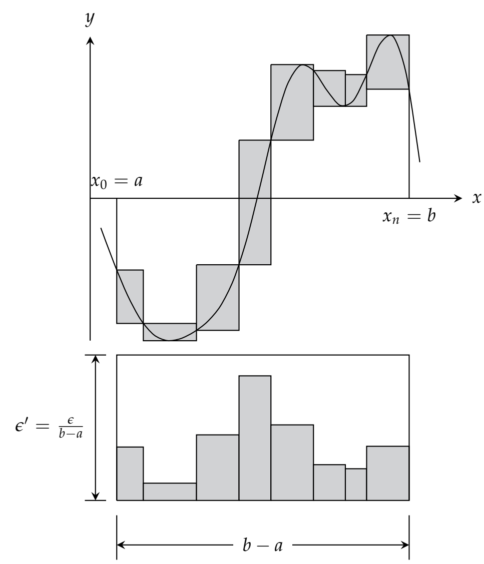
بغیر ریمان تکمل والے تفاعل



(ا) زیریں مجموعہ $L = \sum_{k=1}^{n} k_L \Delta x_k$

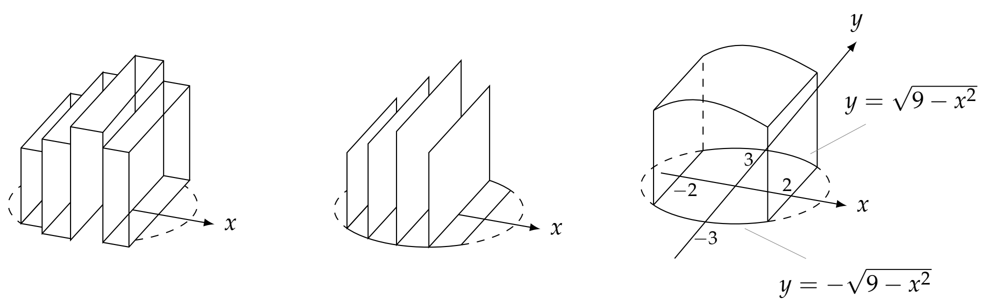


(ب) بالائی مجموعہ $H = \sum_{k=1}^{n} k_H \Delta x_k$



(ج) فرق $H - L$ کو $\epsilon' \cdot (b-a)$ یعنی ϵ سے کم بنایا جا سکتا ہے۔

شکل 5.28: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق۔


x
x
y
$y = \sqrt{9 - x^2}$
3
−2
2
x
−3
$y = -\sqrt{9 - x^2}$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم