

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونباتی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونباتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونباتی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تیزی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تعامل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تعامل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تعامل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تعامل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تعامل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629	13.8.1	نتیجہ
1638	13.9	لیگرینج ضاربین
1655	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالشرت
1663	14.1 دوہرا نکملات
1684	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1691	جوابات
1693	ا ضمیمہ اول
1695	ب ضمیمہ دوم
1697	ج ضمیمہ تین
1699	د ضمیمہ چار
1701	ه ضمیمہ پانچ
1703	و ضمیمہ چھ
1705	ز ضمیمہ سات
1707	ح ضمیمہ آٹھ
1709	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت

اس حصہ میں دوہرا تکملات استعمال کرتے ہوئے مستوی میں محدود خطوں کے رقبات اور ان خطوں پر باریک چادروں کی کمیت، معیار اثر، مرکز کمیت، اور حرکت دوارے⁴ کے رداس معلوم کرنا دکھایا جائے گا۔ ان کا حساب باب 6 کے حساب کی طرح ہو گا لیکن اب ہم زیادہ قسم کے اشکال کے لئے حساب کر پائیں گے۔

مستوی میں محدود خطوں کے رقبات

گزشتہ حصہ میں خطہ R پر دوہرا تکمل کی تعریف میں $f(x, y) = 1$ لینے سے جزوی مجموعات کی تخفیف شدہ صورت

$$(14.11) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k = \sum_{k=1}^n \Delta S_k$$

حاصل ہو گی۔ یہ تخمینہ طور پر R کا رقبہ ہو گا۔ جوں جوں شکل 14.15 میں Δx اور Δy صفر کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں توں توں R کے زیادہ سے زیادہ حصہ کو تمام ΔS_k مل کر کو ڈھانپتے ہیں، اور ہم R کی رقبہ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$(14.12) \quad \text{رقبہ} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \iint_R dS$$

تعریف: بند محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(14.13) \quad S = \iint_R dS$$

□

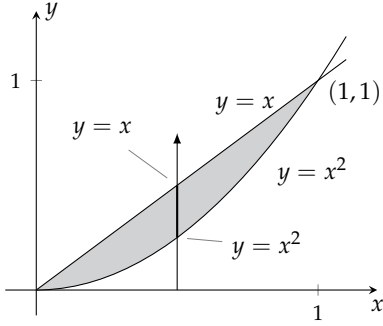
اس باب کے دیگر تعریفات کی طرح، رقبے کی ایک متغیری تعریف کے لحاظ سے، جو ہم پہلے پیش کر چکے ہیں، موجودہ تعریف زیادہ اقسام کے خطوں پر قابل اطلاق ہو گی، لیکن، جن خطوں پر دونوں تعریفات قابل اطلاق ہوں، وہاں موجودہ تعریف گزشتہ تعریف کے عین موافق ہو گی۔

مساوات 14.13 میں دی گئی تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم R پر $f(x, y) = 1$ لیتے ہیں۔

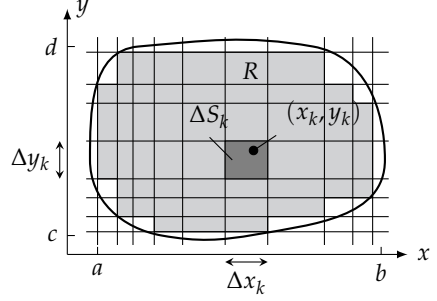
مثال 14.5: ربع اول میں $y = x$ اور $y = x^2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ (شکل 14.16) بنا کر رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



شکل 14.16: قطع مکانی اور کلیہ کے رقبہ (مثال 14.5)۔



شکل 14.15: ایک خطے کے رقبے کی تلاش میں پہلا قدم خطے کی اندرون کی خانہ بندی ہے۔

□

مثال 14.6: قطع مکانی $y = x^2$ اور کلیہ $y = x + 2$ کے رقبہ تلاش کریں۔

حل: اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے مکمل لیں تب ہمیں اس خطے کو R_1 اور R_2 میں تقسیم کر کے درج ذیل دو علیحدہ علیحدہ کلمات کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17)۔

$$S = \iint_{R_1} dS + \iint_{R_2} dS = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy$$

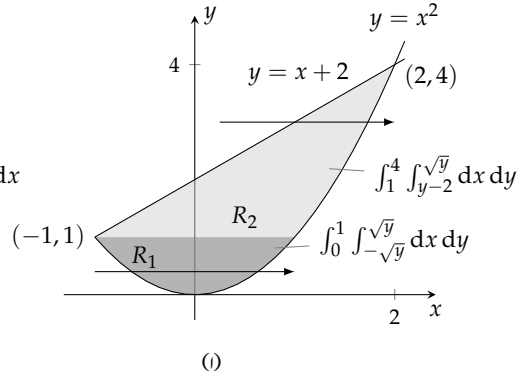
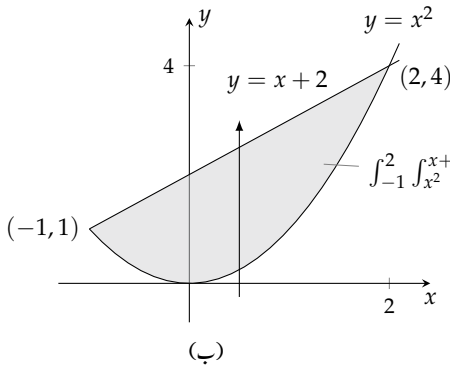
اس کے برعکس مکمل کی ترتیب الٹ کرنے سے صرف ایک مکمل

$$S = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx$$

کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ب)۔ ہم اسی سے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$S = \int_{-1}^2 \left[y \right]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

□



شکل 14.17: (i) اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے مکمل لیں تب رقبہ کے حصول کے لئے دو مکملات کا مجموعہ درکار ہو گا۔ (ب) البتہ پہلے y کے لحاظ سے مکمل لیتے ہوئے صرف ایک مکمل سے حاصل ہو گا۔

اوسط قیمت

بند وقفہ پر قابل مکمل واحد متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس وقفہ پر تفاعل کا مکمل تقسیم لمبائی وقفہ ہو گی۔ بند اور محدود خطہ پر، جس کا رقبہ قابل ناپ ہو، معین قابل مکمل دو متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس خطہ پر تفاعل کا مکمل تقسیم خطہ کا رقبہ ہو گی۔ اگر خطہ R اور تفاعل f ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$(14.14) \quad R \text{ پر } f \text{ کی اوسط قیمت} = \frac{1}{R} \iint_R f \, dS$$

اگر خطہ R پر باریک (بٹی) چادر کی کثافت رقبہ f ہو تب R پر f کے دوہرا مکمل کو R کے رقبہ سے تقسیم کرنے سے اس چادر کی اوسط کثافت حاصل ہو گی جس کی اکائی قیمت فی اکائی رقبہ ہو گی۔ اگر نقطہ (x, y) سے مقررہ نقطہ N تک فاصلہ $f(x, y)$ ہو تب R پر f کی اوسط قیمت، N سے R کے نقاط کا اوسط فاصلہ ہو گا۔

مثال 14.7: مستطیل $R : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$ پر $f(x, y) = x \cos xy$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: خطہ R پر f کا مکمل

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^1 x \cos xy \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left[\sin xy \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^\pi (\sin x - 0) dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

□

ہو گا جبکہ مستطیل R کا رقبہ π ہے۔ یوں R پر f کی اوسط قیمت $\frac{2}{\pi}$ ہو گی۔

مراکز کثیت کے معیار اثر اول اور دوم

باریک چادروں کی کثیت اور معیار اثر تلاش کرنے کے لئے ہم باب 6 کے کلیات کی طرح کلیات استعمال کرتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ دوہرا تکمل کی بنائے ہم زیادہ اشکال اور کثافتی تفاعل کو عمل میں لا سکتے ہیں۔ جدول میں ان کلیات درج ذیل ہیں۔

مستوی xy میں باریک چادر کی کثیت، معیار اثر اول⁵، معیار اثر دوم⁶ اور رداس⁷ دوار کے کلیات

کثافت: $\delta(x, y)$

کثیت: $M = \iint \delta(x, y) dS$

معیار اثر اول: $M_x = \iint y \delta(x, y) dS, \quad M_y = \iint x \delta(x, y) dS$

مرکز کثیت: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر):

$$I_x = \iint y^2 \delta(x, y) dS$$

بلحاظ محور x

$$I_y = \iint x^2 \delta(x, y) dS$$

بلحاظ محور y

$$I_L = \iint r^2(x, y) \delta(x, y) dS, \quad (\text{جہاں } L \text{ سے } (x, y) \text{ کا فاصلہ } r(x, y) \text{ ہے})$$

بلحاظ خط L

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y) dS = I_x + I_y$$

(قطبی معیار اثر) بلحاظ مبدا

رداس دوار:

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$

بلحاظ محور x

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$$

بلحاظ محور y

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$

بلحاظ مبدا

first moment⁵
second moment⁶
radius of gyration⁷

ان کلیات کا استعمال مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے گا۔

معیار اثر اول M_x اور M_y اور معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر) I_x اور I_y میں ریاضیاتی فرق یہ ہے کہ معیار اثر دور "بیرم کے بازوؤں" کے فاصلوں، x اور y ، کا مربع لیتا ہے۔

معیار اثر I_0 کو قطبی معیار اثر⁸ بھی کہتے ہیں۔ کمیٹی کشادہ $\delta(x, y)$ (کمیت فی اکائی رقبہ) ضرب $x^2 + y^2$ ، جو نمائندہ نقطہ (x, y) سے مبداء تک فاصلہ ہے، کا مکمل قطبی معیار اثر کہلاتا ہے۔ چونکہ $I_0 = I_x + I_y$ ہے لہذا ان میں سے کسی دو کے حصول کے بعد تیسرے کو اس تعلق سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ (معیار اثر I_0 بعض اوقات I_z لکھا جاتا اور بلحاظ محور z معیار اثر کہلاتا ہے۔ تب متاثر $I_z = I_x + I_y$ مسئلہ عمودی محور⁹ کہلاتا ہے۔)

رداس دوایر R_x کی تعریف درج ذیل مساوات ہے۔

$$I_x = MR_x^2$$

رداس دوایر ہمیں بتاتا ہے کہ محور x کتنا دور پوری چادر کی کمیت منجمد کرتے ہوئے وہی I_x حاصل ہو گا۔ رداس دوایر استعمال کرتے ہوئے ہم معیار اثر کو کمیت اور لمبائی کی صورت میں لکھ پاتے ہیں۔ رداس R_y اور R_0 کی تعریفات بھی اسی طرح ہیں:

$$I_y = MR_y^2, \quad I_0 = MR_0^2$$

ہم ان تعریفی مساوات کے جذر سے R_x ، R_y اور R_0 کے کلیات لکھتے ہیں۔

ہمیں معیار اثر میں کیا دلچسپی ہے؟ ایک جسم کا پہلا معیار اثر ہمیں ثقلی میدان میں اس جسم کے توازن اور مختلف محوروں کے لحاظ سے اس کی قوت مروڑ کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ اب اگر یہ جسم گھومتا ہوا دھرا ہو تب ہمیں اس میں ذخیرہ توانائی جاننے میں زیادہ دلچسپی ہو گی تاکہ ہم جان سکیں کہ اس کو روکنے کے لئے یا اس کو کسی خاص زاویاتی رفتار تک پہنچانے میں کتنی توانائی درکار ہو گی۔ ایسی صورت میں معیار اثر دوم استعمال ہو گا۔

اس دھرا کو متعدد چھوٹی کمیتوں Δm_k میں تقسیم کریں اور گھومنے کے محور سے k ویں کمیٹی ٹکڑے کے فاصلہ کو r_k سے ظاہر کریں۔ اگر دھرا کی زاویاتی سمتی رفتار $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ریڈین فی سیکنڈ ہو، تب اس ٹکڑے کا کمیٹی مرکز اپنے مدار میں خطی رفتار

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k \theta) = r_k \frac{d\theta}{dt} = r_k \omega$$

سے حرکت کرے گا۔ اس ٹکڑے کی حرکی توانائی تخمیناً

$$(14.15) \quad \frac{1}{2} \Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \Delta m_k (r_k \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

polar moment⁸
Perpendicular Axis Theorem⁹

ہوگی۔ دھرا کی حرکی توانائی تخمیناً

$$(14.16) \quad \sum \frac{1}{2} \omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

ہوگی۔ دھرا کو زیادہ سے زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے اس مجموعہ کی قیمت ایک حد تک پہنچتی ہے جسے عمل

$$(14.17) \quad \text{دھرا کی حرکی توانائی} = \int \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$$

لکھا جاسکتا ہے۔ جزو

$$(14.18) \quad I = \int r^2 dm$$

درحقیقت گھومنے کے محور کے لحاظ سے دھرے کا جمودی معیار اثر ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(14.19) \quad \text{دھرا کی حرکی توانائی} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

ایک دھرا، جس کا جمودی معیار اثر I ہو، کو ω زاویاتی سمتی رفتار تک پہنچانے کے لئے $\frac{1}{2} I \omega^2$ حرکی توانائی درکار ہوگی اور اس رفتار پر چلتے ہوئے دھرا کو روکنے کے لئے ہمیں دھرا سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہوگی۔ کیت m کی گاڑی کو سمتی رفتار v تک پہنچانے کے لئے اس کو $\frac{1}{2} m v^2$ حرکی توانائی درکار ہوگی اور اس کو روکنے کے لئے اس گاڑی سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہوگی۔ دھرے کا جمودی معیار اثر گاڑی کی کیت کا مماثل ہے۔ گاڑی کی رفتار تیز یا کم کرنے کو گاڑی کی کیت مشکل بناتی ہے۔ اسی طرح دھرے کی زاویاتی رفتار تیز یا کم کرنے کو دھرے کا جمودی معیار اثر مشکل بناتا ہے۔ جمودی معیار اثر کیت کے علاوہ کیت کی تقسیم پر بھی منحصر ہوتا ہے۔

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

