# احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

# عنوان

# دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

# باب 15

# سمتی میدان میں تکمل

**ایک جائزہ** اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقناطیسیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاو پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

## 15.1 خطی تکمل

جب فضا میں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے $f$ کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگا۔ نقطہ $a$ سے $b$ تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ $f$ کا **خطی تکمل**[1] کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، خطی تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

خطی تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان تکملات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاو کا حساب کرتے ہیں۔

[1] line integral

## تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تفاعل $f(x,y,z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k},\ a\le t\le b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کو متناہی تعداد کے ذیلی قوسین میں ٹکڑے کرتے ہیں۔ ایک علامتی ذیلی قوس کی لمبائی $\Delta s_k$ ہو گی۔ ہم ہر ذیلی قوس پر ایک نقطہ $(x_k,y_k,z_k)$ منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k \tag{15.1}$$

اگر $f$ استمراری ہو اور $g$ ، $h$ ، اور $k$ کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے $n$ بڑھایا جائے، $\Delta s_k$ صفر تک پہنچے گی اور مساوات 15.1 کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو $a$ **تا** $b$ **اس قوس پر** $f$ **کا تکمل** کہتے ہیں۔ قوس کو $C$ سے ظاہر کرتے ہوئے اس تکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{"}C \text{ پر } f \text{ کا تکمل"} \tag{15.2}$$

## ہموار منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a\le t\le b$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ ہموار ہو ( $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہو اور کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہ ہو) تب ہم $\mathrm{d}s$ کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $\mathrm{d}s=\left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$s(t)=\int_a^t\left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \qquad t_0=a \text{ میں 12.20 کی مساوات 12.3 حصہ}$$

اعلٰی احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے $C$ پر $f$ کے تکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

## خطی تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی $C$ پر استمراری تفاعل $f$ کا تکمل لینے کے لئے

ا۔ $C$ کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k},\quad a\le t\le b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\big|\boldsymbol{v}(t)\big|\,\mathrm{d}t \tag{15.3}$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f=1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل $C$ کی لمبائی دیگا۔

مثال 15.1: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک قطع پر $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ کا تکمل کریں۔

حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $\big|\boldsymbol{v}(t)\big|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں $C$ پر $f$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s&=\int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t &&\text{مساوات 15.3}\\&=\int_0^1(t-3t^2+t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t\\&=\sqrt{3}\int_0^1(2t-3t^2)\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\Big[t^2-t^3\Big]_0^1=0\end{aligned}$$

□

### 15.1.1 جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات $C_1$، $C_2$، $\cdots$، $C_n$ کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی $C$ حاصل کی جائے تب $C$ پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکملات کا مجموعہ ہو گا:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s=\int_{C_1} f\,\mathrm{d}s+\int_{C_2} f\,\mathrm{d}s+\cdots+\int_{C_n} f\,\mathrm{d}s \tag{15.4}$$

مثال 15.2: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ $C_1$ اور $C_2$ ]پر چل کر پہنچا جاتا ہے۔ یوں $C$ ان کا اشتراک $C_1\cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ کے تکمل کی قیمت $C_1\cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم $C_1$ اور $C_2$ کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1
\end{aligned}$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_{C_1\cup C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t-3t^2+0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-3+t)(1)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\Big[\frac{t^2}{2} - t^3\Big]_0^1 + \Big[\frac{t^2}{2} - 2t\Big]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{15.4}$$

□

یہاں مثال 15.1 اور مثال 15.2 کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء $f$ میں پر کرتے ہی $t$ کے لحاظ سے ایک سادہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر $f$ کا تکمل لینے کے لئے $C_1$ اور $C_2$ پر $f$ کے علیحدہ علیحدہ تکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔سوم، مثال 15.1 میں $C$ اور مثال 15.2 میں $C_1 \cup C_2$ پر تکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے تکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

## کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیتی کثافت $\delta(x,y,z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

کمیت: $M = \iiint\limits_D \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}H$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\delta\,\mathrm{d}s$$

مرکز کمیت کے محدد:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}s \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}s$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s \qquad I_L = \int_C r^2 \delta \, \mathrm{d}s$$

جہاں لکیر $L$ سے نقطہ $(x, y, z)$ تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

لکیر $L$ کے لحاظ سے رداس دور: $\quad R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

مثال 15.3: ایک اسپرنیگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پڑا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس اسپرنگ کی کثافت مستقل تفاعل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کمیت اور مرکز کمیت اور محور $z$ کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکلی کی بنا اس کا مرکز کمیت محور $z$ پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $|\boldsymbol{v}(t)|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}(t)| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
&= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}
\end{aligned}$$

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\text{پیچدار}} \delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17} \, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)(\sqrt{17}) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{17} \, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}} = 1
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ محور $z$ کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔ □

مثال 15.4: مستوی $yz$ میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے۔ محراب کے نقطہ $(x, y, z)$ پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز میت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی $yz$ میں پایا جاتا ہے اور محور $z$ کے لحاظ سے اس کی کمیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلام روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k}, \; 0 \leq t \leq \pi$$

لکھتے ہوئے $\bar{z}$ دریافت کرتے ہیں۔اس مقدار معلوم روپ کے لئے

$$\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_C \delta \,\mathrm{d}s = \int_C (2 - z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (2 - \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi - 2 \\
M_{xy} &= \int_0^C z\delta \,\mathrm{d}s = \int_C z(2 - z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (2\sin t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{8 - \pi}{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
\end{aligned}$$

یوں مرکز کمیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔ □

# جوابات

ضمیمہ ا

# ضمیمہ اول

# ضمیمہ ب

# ضمیمہ دوم

# ضمیمہ ج

# ضمیمہ تین

# ضمیمہ د

# ضمیمہ چار

# ضمیمہ ھ

# ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

## ضمیمہ ز

# ضمیمہ سات

# ضمیمہ ح

# ضمیمہ آٹھ

# ضمیمہ ط

# ضمیمہ آٹھ