

احصاء اور تحليلي علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزنقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
862	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	بدلولی تفاعل	7.10
900	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نکتہ بنائی بدل	
986	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1003	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1220	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1230	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274	10.6	قطبی محدود
1286	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301	10.8.1	دائرے
1315	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329	11.1	مستوی میں سمتیات
1345	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353	11.2.1	کرہ
1363	11.3	ضرب نقطہ
1364	11.3.1	حساب
1378	11.4	صلیبی ضرب
1393	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1478	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1499	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530	13.2	حد اور استمرار
1545	13.3	جزوی تفرقات
1562	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579	13.5	زنجیری قاعدہ
1594	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631	13.8.1	نتیجہ
1640	13.9	لیگرینج ضاربین
1657	13.10	کلیہ نیلر

1665	14 تکمل بالکثرت
1665	14.1 دوہرا نکملات
1685	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701	14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712	14.4 کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727	14.5 تعین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756	14.7 نکملات بالکثرت میں بدل

1771	15 سستی میدان میں تکمل
1771	15.1 خطی تکمل
1774	15.1.1 جمع پذیری

1771	جوابات
1853	ا ضمیمہ اول
1855	ب ضمیمہ دوم
1857	ج ضمیمہ تین
1859	د ضمیمہ چار
1861	ه ضمیمہ پانچ
1863	و ضمیمہ چھ
1865	ز ضمیمہ سات
1867	ح ضمیمہ آٹھ
1869	ط ضمیمہ آٹھ
1871	ی نکملات کا مختصر جدول

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 15

سمتی میدان میں تکمل

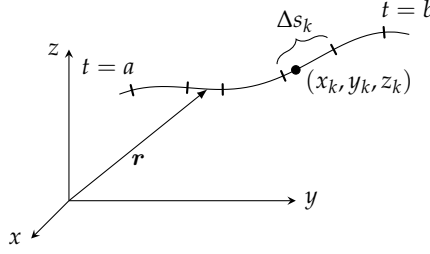
ایکے جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقاطبیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاؤ پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

15.1 خطی تکمل

جب فضا میں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$, $a \leq t \leq b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگا۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ f کا خطی تکمل¹ کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، خطی تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

خطی تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان عملیات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرنی سیال کی شرح بہاؤ کا حساب کرتے ہیں۔

line integral¹



شکل 15.1: منحنی $r = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ کو $t = a$ اور $t = b$ کے بیچ توپوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہے۔

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تقابل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$ ، $a \leq t \leq b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کی، متناہی تعداد کی توپوں میں، خانہ بندی کرتے ہیں (شکل 15.1)۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہوگی۔ ہم ہر قوسچہ پر ایک نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(15.1) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

اگر f استمراری ہو اور g ، h ، اور k کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات 15.1 کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a تا b اس قوسچہ پر f کا مکمل کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس مکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(15.2) \quad \int_C f(x, y, z) ds \quad "C \text{ پر } f \text{ کا مکمل}"$$

ہموار منحنیات پر مکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \leq t \leq b$ پر $r(t)$ ہموار ہو ($\frac{dr}{dt}$ استمراری ہو اور کبھی بھی 0 نہ ہو) تب ہم ds کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $ds = |v(\tau)| d\tau$ لکھا جاسکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t |v(\tau)| d\tau \quad \text{حصہ 12.3 کی مساوات 12.20 میں } t_0 = a$$

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے مکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |v(t)| dt$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

خطی تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تفاعل f کا تکمل لینے کے لئے

ا. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$(15.3) \quad \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |\mathbf{v}(t)| \, dt$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل C کی لمبائی دیگا۔

مثال 15.1: مبدا سے نقطہ $(1, 1, 1)$ تک قطع پر $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ تکمل کریں (شکل 15.2)۔

حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

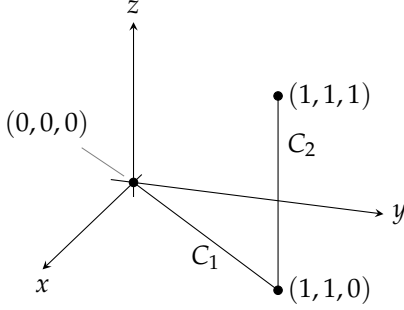
$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی 0 نہیں ہو سکتا ہے لہذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

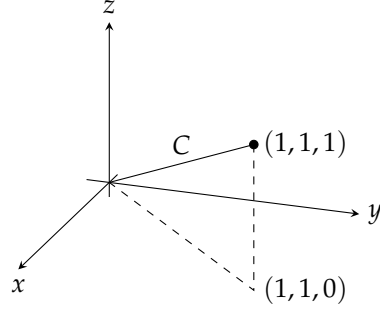
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) \, ds &= \int_0^1 f(t, t, t)(\sqrt{3}) \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3} \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) \, dt = \sqrt{3} [t^2 - t^3]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

مساوات 15.3

□



شکل 15.3: تکمل کی راہ (مثال 15.2)۔



شکل 15.2: تکمل کی راہ (مثال 15.1)۔

15.1.1 جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1, C_2, \dots, C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکرار کا مجموعہ ہو گا:

$$(15.4) \quad \int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds + \dots + \int_{C_n} f \, ds$$

مثال 15.2: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ C_1 اور C_2 پر چل کر پہنچا جاتا ہے (شکل 15.3)۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم C_1 اور C_2 کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) \, ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) \, ds + \int_{C_2} f(x, y, z) \, ds && \text{مساوات 15.4} \\ &= \int_0^1 f(t, t, 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 f(1, 1, t) (1) \, dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0) \sqrt{2} \, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t) (1) \, dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

یہاں مثال 15.1 اور مثال 15.2 کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔ اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ مکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا مکمل لینے کے لئے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ مکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ سوم، مثال 15.1 میں C اور مثال 15.2 میں $C_1 \cup C_2$ پر مکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر مکملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے مکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیت کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

$$\text{کمیت: } M = \iiint_D \delta(x, y, z) dH$$

محدی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x \delta ds, \quad M_{xz} = \int_C y \delta ds, \quad M_{xy} = \int_C z \delta ds$$

مرکز کمیت کے محدود:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) \delta ds & I_y &= \int_C (x^2 + z^2) \delta ds \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \delta ds & I_L &= \int_C r^2 \delta ds \end{aligned}$$

جہاں L لکیر (x, y, z) سے نقطہ $r(x, y, z)$ تک فاصلہ ہے۔

$$\text{لکیر } L \text{ کے لحاظ سے رداس دور: } R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

مثال 15.3: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پایا جاتا ہے (شکل 15.4)۔

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس اسپرنگ کی کثافت مستقل قائل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کیت اور مرکز کیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشکلی کی بنا اس کا مرکز کیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $|v(t)|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} |v(t)| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4 \sin 4t)^2 + (4 \cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M = \int_{\text{پیچدار}} \delta \, ds = \int_0^{2\pi} (1) \sqrt{17} \, dt = 2\pi \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2) \delta \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t) (1) (\sqrt{17}) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{17} \, dt = 2\pi \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi \sqrt{17}}{2\pi \sqrt{17}}} = 1$$

□ دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس نیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔

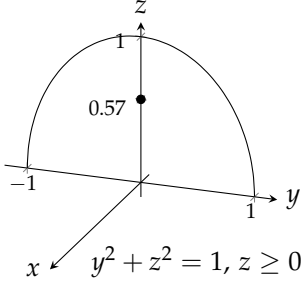
مثال 15.4: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ پر ایک دہلا پتلا محراب پایا جاتا ہے (شکل 15.5)۔ محراب کے نقطہ (x, y, z) پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

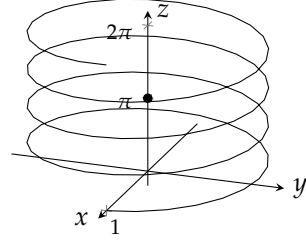
$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

لکھتے ہوئے \bar{z} دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

$$|v(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$



شکل 15.5: محراب کا مرکز کیت (مثال 15.4)۔



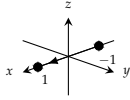
شکل 15.4: اسپرنگ برائے مثال 15.3

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

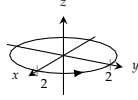
$$\begin{aligned}
 M &= \int_C \delta \, ds = \int_C (2 - z) \, ds = \int_0^\pi (2 - \sin t) \, dt = 2\pi - 2 \\
 M_{xy} &= \int_0^\pi z \delta \, ds = \int_C z(2 - z) \, ds = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t) \, dt \\
 &= \int_0^\pi (2 \sin t - \sin^2 t) \, dt = \frac{8 - \pi}{2} \\
 \bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
 \end{aligned}$$

□

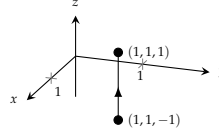
یوں مرکز کیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔



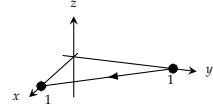
(د)



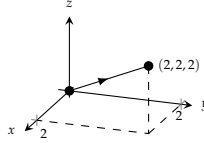
(ج)



(ب)



(ا)



(پ)

سوالات

سمتی مساوات کی تریات

سوال 15.1 تا سوال 15.1 میں دی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل تا شکل میں تلاش کریں۔

سوال 15.1: $r(t) = ti + (1-t)j, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 15.2: $r(t) = i + j + tk, \quad -1 \leq t \leq 1$

سوال 15.3: $r(t) = (2 \cos t)i + (2 \sin t)j, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 15.4: $r(t) = ti, \quad -1 \leq t \leq 1$

سوال 15.5: $r(t) = ti + tj + tk, \quad 0 \leq t \leq 2$

جوابات

