

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ نیکو نیاتی تفاعل	7.8
875	7.9 الٹ نیکو نیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	
892	7.10 بذلولی تفاعل	
913	7.11 یک رتبی تفرقی مساوات	
931	7.12 پولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکو نیاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لاقتنائی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کا حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لاقتنائی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتی تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقتی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل	

1163	ا ضمیمہ اول	
1165	ب ضمیمہ دوم	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

ارتکاز کے وقفے
سوال 1 تا سوال 32 میں (الف) تسلسل کا رداس اور وقفہ ارتکاز تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے تسلسل (ب) مطلق مرتکز (ج) مشروط مرتکز ہے؟

سوال 1: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

سوال 2: $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

سوال 3: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

سوال 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

سوال 5: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

سوال 6: $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

سوال 7: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

سوال 8: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$

سوال 9: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

سوال 10: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

سوال 11: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!} \quad \text{سوال 12:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} \quad \text{سوال 13:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!} \quad \text{سوال 14:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}} \quad \text{سوال 15:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}} \quad \text{سوال 16:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n} \quad \text{سوال 17:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)} \quad \text{سوال 18:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n} \quad \text{سوال 19:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n \quad \text{سوال 20:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n \quad \text{سوال 21:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x) x^n \quad \text{سوال 22:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \quad \text{سوال 23:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n \quad \text{سوال 24:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n} \quad \text{سوال 25:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n+1)(x-1)^n \quad \text{سوال 26:}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2} \quad \text{سوال 27: آپ سوال 39 کی مدد لے سکتے ہیں۔}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n} \quad \text{سوال 28: آپ سوال 38 کی مدد لے سکتے ہیں۔}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}} \quad \text{سوال 29:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2} \quad \text{سوال 30:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{سوال 31:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n} \quad \text{سوال 32:}$$

سوال 33 تا سوال 38 میں تسلسل کی اریٹھ کا وقفہ تلاش کریں اور اس وقفہ میں تسلسل کے مجموعہ کو x کا تفاعل لکھیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n} \quad \text{سوال 33:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n} \quad \text{سوال 34:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 \right)^n \quad \text{سوال 35:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n \quad \text{سوال 36:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3} \right)^n \quad \text{سوال 37:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2} \right)^n \quad \text{سوال 38:}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: درج ذیل تسلسل x کی کن قیمتوں کے لئے مرکوز ہے؟

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \cdots$$

اس کا مجموعہ کتنا ہے؟ اس تسلسل کا جزو در جزو تفرق لینے سے کونسا تسلسل حاصل ہوتا ہے؟ یہ نیا تسلسل x کی کن قیمتوں کے لئے مرکوز ہو گا؟ اس کا مجموعہ کیا ہے؟

سوال 40: اگر آپ سوال 39 کا تسلسل جزو در جزو مکمل کریں تب کونسا تسلسل حاصل ہو گا؟ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ نیا تسلسل مرکوز ہو گا؟ اس مجموعے کا دوسرا نام کیا ہے؟

سوال 41: درج ذیل تسلسل تمام x کے لئے $\sin x$ پر مرکوز ہے۔

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

ا. $\cos x$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء دریافت کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا۔

ب. $\sin x$ کے تسلسل میں x کی جگہ $2x$ پر کرنے ایسا تسلسل حاصل کریں جو تمام x کے لئے $\sin 2x$ پر مرکوز ہو۔

ج. ضرب تسلسل اور جزو-الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے $2 \sin x \cos x$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء حاصل کریں۔ جزو-ب کے نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 42: درج ذیل تسلسل تمام x کے لئے e^x پر مرکوز ہے۔

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

ا. $\frac{d}{dx} e^x$ کا تسلسل دریافت کریں۔ کیا آپ کو e^x کا تسلسل دوبارہ حاصل ہوتا ہے؟ وجہ پیش کریں۔

ب. $\int e^x dx$ کا تسلسل دریافت کریں۔ کیا آپ کو e^x کا تسلسل دوبارہ حاصل ہوتا ہے؟ وجہ پیش کریں۔

ج. e^x کے تسلسل میں x کی جگہ $-x$ پر کر کے e^{-x} کا تسلسل حاصل کریں۔ اب e^x کے تسلسل کو e^{-x} کے تسلسل کے ساتھ ضرب کر کے $e^x \dots e^{-x}$ کے تسلسل کے ابتدائی کچھ اجزاء تلاش کریں۔

سوال 43: درج ذیل تسلسل $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کے لئے $\tan x$ پر مرکب ہے۔

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

ا. $\ln|\sec x|$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرکب ہو گا؟

ب. $\sec^2 x$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرکب ہو گا؟

ج. اگلے سوال میں $\sec x$ کے تسلسل کا مربع تلاش کرتے ہوئے جزو-ب کے نتیجے کی تصدیق کریں۔

سوال 44: درج ذیل تسلسل $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کے لئے $\sec x$ پر مرکب ہے۔

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$$

ا. $\ln|\sec x + \tan x|$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرکب ہو گا؟

ب. $\sec x \tan x$ کے تسلسل کے ابتدائی چار اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرکب ہو گا؟

ج. گزشتہ سوال میں $\tan x$ کے تسلسل کو $\sec x$ کے تسلسل کے ساتھ ضرب کرتے ہوئے جزو-ب کے نتیجے کی تصدیق کریں۔

سوال 45: مرکب طاقتی تسلسل کی پیمائش

ا. دکھائیں کہ کھلے وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لئے مرکب اور ایک دوسرے کے برابر تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ اور $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ کی صورت میں تمام n کے لئے $a_n = b_n$ ہو گا۔ (اشارہ: فرض کریں $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ہے۔ جزو در جزو تفرق لے کر ثابت کریں کہ a_n اور b_n دونوں $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ کے برابر ہیں۔)

ب. دکھائیں کہ کھلے وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لئے $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ کی صورت میں تمام n کے لئے $a_n = 0$ ہو گا۔

سوال 46: تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ کا مجموعہ تلاش کرنے کی خاطر $\frac{1}{1-x}$ کو ہندسی تسلسل کی صورت میں لکھ کر دونوں اطراف کا x کے ساتھ تفرق لیں، دونوں اطراف کو x سے ضرب دے کر دونوں اطراف کا تفرق لیں اور آخر کار دونوں اطراف کو x سے ضرب کریں۔ اب $x = \frac{1}{2}$ پر کریں۔ کیا حاصل ہوتا ہے؟

سوال 47: آخری نقطوں پر ارتکاز

ایک مثال سے دکھائیں کہ ایک طاقتی تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے آخری سروں پر اس تسلسل کا ارتکاز مشروط یا مطلق ہو سکتا ہے۔

سوال 48: ایسے طاقتی تسلسل بنائیں جن کے وقفہ ارتکاز درج ذیل ہوں۔

ج. $(1, 5)$ ب. $(-2, 0)$ ا. $(-3, 3)$

9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ وہ تفاعل جو لامتناہی گنتا قابل تفرق ہوں طاقی تسلسل پیدا کرتے ہیں جنہیں ٹیلر تسلسل کہتے ہیں۔ عموماً ایسے تسلسل، پیدا کار تفاعل کے کارآمد تخمینہ کثیر رکنیاں پیش کرتے ہیں۔

تسلسلی اظہار

ہم جانتے ہیں کہ اپنے وقفہ ارتکاز کے اندر طاقی تسلسل کا مجموعہ استمراری تفاعل ہوتا ہے جس کے تفرقات ہر درجے کے پائے جاتے ہیں۔ لیکن کیا ہم یہی کچھ دوسری رخ بھی کہہ سکتے ہیں؟ یعنی کیا ایسا تفاعل $f(x)$ جس کے وقفہ I ہر درجہ کے تفرقات پائے جاتے ہوں کو I میں طاقی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو گا؟ اگر ایسا ممکن ہو، تب اس تسلسل کے عددی سر کیا ہوں گے؟

ہم $f(x)$ کو مثبت رداس ارتکاز کے طاقت تسلسل کا مجموعہ

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

تصور کر کے اس آخری سوال کا جواب با آسانی دے سکتے ہیں۔ وقفہ I میں بار بار جزو در جزو تفرق لینے سے

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ یوں تمام n کے لئے n گنتا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{پایا جاتا ہے } (x-a) \text{ میں جزو ضربی}$$

چونکہ یہ تمام مساوات $x = a$ پر کارآمد ہیں لہذا

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1 \\ f''(a) &= 1 \cdot 2a_2 \\ f'''(a) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 \end{aligned}$$

یا عمومی طور پر

$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ وقفہ I پر f کو مرکز کسی بھی طاقی تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ کے عددی سروں کا ایک حیرت کن نقش پیش کرتا ہے۔ اگر ایسا تسلسل پایا جاتا ہو (جو ہم اب تک نہیں جانتے کہ پایا جاتا ہے) تب ایسا تسلسل صرف ایک ہو سکتا ہے جس کے n عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

اگر f کا تسلسلی روپ پایا جاتا ہو تب یہ تسلسل لازماً درج ذیل ہو گا۔

(9.29)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

لیکن کیا وقفہ I ، جس کا مرکز $x = a$ ہو، پر لائقنا ہی گنا قابل تفرق اختیاری تفاعل f سے شروع کر کے مساوات 9.29 کا تسلسل پیدا کر کے I کی اندرون میں ہر x پر $f(x)$ کو مرکوز تسلسل حاصل ہو گا؟ جیسا ہم دیکھیں گے بعض تفاعل کے لئے ایسا ہو گا اور بعض کے لئے ایسا نہیں ہو گا۔

ٹیلر اور مکلارن تسلسل

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

