احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفر. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

Vii																										,	يباچ	,
ix																						4	یبادٍ	، کا د	ناب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	•
1																							٠	لمومات	، مع	ابتدائی	1	L
1																		خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																										1.2		
32																							Ĺ	تفاعل		1.3		
54																					غلى	انمذ	م کی	ترسيم		1.4		
74																					بل	نفاء	انی اِنی	بنكوني		1.5		
95																								/		حدود ا	2)
95																										2.1		
113															٠.		عد	قواه	کے	ئے ۔	_,	پ کر	لاثر	פנ "		2.2		
126																										2.3		
146																										2.4		
165																							ار	استمر		2.5		
184	١.																					Į	ی ز	مماسح		2.6		
199)																									تفرق	3	Ł
199)																				ت ,	تف	K,	تفاعل		3.1	-	
221																					رں	, زق	ی ہ ِ تفر	عا ر قواعد		3.2		
240																										3.3		
257																										3.4		
277																										3.5		
294																										3.6		
310) .																			ىلى	تبد	ح .	شرر	د گیر		3.7		

عـــنوان

 325 340 340 341 340 341 352 363 364 374 385 386 387 391 44 391 45 46 47 46 47 48 51 52 53 54 55 55 56 57 57 58 58 59 605 605 605 70 7		تفرق کا استعال	4
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 56 57 56 57 57<td></td><td></td><td></td>			
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 56 57 56 57 57<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td>	اوسط قیمت	4.2 متله	
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 56 57 56 57 57<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
 391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر	356	3.1	
418 بیترین بنان 4.6 442 خط بخد کی اور تنو تات 47 خط بخد کی اور تر تات 47 خط بخد کی اور ریانسان نموند کئی 5 477 کسی محلت 5.1 489 کسی محلت 5.2 505 تعلق محلوات، ابتدائی قیت سخلے، اور ریانسانی نموند کئی 5.3 505 تعلی بداریج شرکیب بدل و توقیق کملات 5.4 534 نموسیت و تیب، اور اوسط قیت سخل 551 اعدادی محلد 5.5 561 نموسیت و تیب، اور اوسط قیت سخل 578 بیادی محلد 5.8 605 بیادی محلد 5.9 605 بیادی محلد 6.1 605 بیادی محلد 6.1 605 بیادی محلد 6.1 605 بیادی محلد و توقیق کمی ایس ایسی 6.2 625 بیادی کاب کر تیم کی طاش 6.3 640 محلی ایسی 6.4 640 بیادی کاب کر تیم کی طاش 6.5 640 بیادی کاب کر تیم کی طاش 6.5 650 بیادی محقیات کی لبایای ایسی 6.7 660 بیادی محقیات ایسی	اور y'' کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442 غط بدی کا اور تو تات 465 خیر توشی کلداد 477 4.8 477 5.1 477 5.1 489 5.1 5.2 تقری ساوات، ابتدائی تیب سنت، اور ریافسیاتی موند شی 5.3 5.2 5.5 کلی بدر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بیر بید ترایی بیر بیر بید بیر بید بیر بید بیر بیر بید بیر بیر بید بیر بیر بید بیر			
465 ریب نیوش 4.8 477 کل کا 477 خیر تطبی محملات 5.1 489 خیر تطبی محملات 5.2 5.2 تفری براید ترکیب بدل ر تیجری تامیده کا الت اطارت 5.3 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.7 خیر در اوسط آیت سئل 5.7 580 کس کس 605 کس کس 606 کس کس 607 کس کس 608 کس کس 609 کس کس 600 کس کس 600 کس کس 600 کس کس 600 کس کس			
477 گل قریق الطاق الله 5.1 489 قریق ساوات، ابتدائی آیت سئط، اور ریاضیاتی موند آشی 5.2 505 تغیلی سرایید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.3 516 تغیلی شریعید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.4 54 اندازه بذر اید شای گموید 5.5 561 تغیادی مسئلد 5.6 578 تغیادی مسئلد 5.7 599 تغیادی مسئلد 5.8 605 تغیادی مسئلد 5.9 605 تغیادی مسئل 5.9 605 تغیادی مسئل 6.1 625 تغیادی مسئل 6.1 629 تغیادی وزاند 6.2 640 مینان کارتج کی کات والا سرحد 6.2 648 تغیال کات کر جم کی حال ال سرح الحال المراح و المرح و المراح و المراح و المرح و المرح و المرا			
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت محمید 5.5 551 بخیری محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 561 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 579 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمید 5.9 605 بخیری محمید و نوشی 6.5 625 بخیری محمید و نوشی محمید و نوش	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت محمید 5.5 551 بخیری محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 561 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 579 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمید 5.9 605 بخیری محمید و نوشی 6.5 625 بخیری محمید و نوشی محمید و نوش	477	کیل .	5
489 ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی 505 تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3 516 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.4 534 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.5 551 5.6 562 نصوعیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 5.7 578 نیادی سئلہ 5.8 579 5.8 605 5.8 605 5.9 605 تعدادی محملہ 6.5 605 تعدادی محملہ 6.5 625 تعدادی وزرنقہ 6.1 626 منحنیات کے فتی رتب 627 کمیل کا استعمال 6.1 640 منحنیات والا سرحم 640 کمیل سیل کا الے کر قبم کی سائل 7.5 640 کمیل سیل کی سیل کی سیار آثر اور سرکر کی سیار آثر اور سیل سیل سیار آثر اور سرکر کی سیار آثر اور سرکر کی سیار آثر اور سیل سیار آثر اور سیل سیار آثر اور سیار کی سیار		•	5
505 کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق 5.3 516 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.4 54 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.5 55 ریمان تجویم اور قطعی تحملیت 5.6 56 محمل کا سرا برا اور اصطفی تحمل میں بدل 5.8 605 نظمی تحمل میں بدل 5.9 605 اعدادی تحمل کی اس بدل 6.1 625 اعدادی تحمل کی اس بدل 6.1 625 محمل کا استعمال 6.1 640 مخمل کا سرا ہوتے کلیات والا سرحد 640 محمل کا سرا ہوتے کلیات والا سرحد 648 کمی شیطیات کی لمبائیاں 650 محمل کا سرائی نیائی اس با بیادی تحقیق اور دیگر نمونی استعمال 6.5 660 معیاد اثر اور سرکز کہتے 6.7 711 وصطفی سرکز کہتے 6.8 740 فیادی تحقیق اور دیگر نمونی استعمال 6.9 740 اعراقی ستعمال 6.10	ر با		
516 اندازه بذرایید تثانای مجموعها 534 5.5 5.6 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.7 5.8 5.7 5.9 5.8 5.8 5.8 5.9 5.9 5.0 605 606 605 606			
534 ريمان مجموع اور قطعي تحمالت 5.5 561 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.6 578 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.7 579 5.8 605 5.8 605 5.9 605 6.05 605 6.05 605 6.05 605 6.05 605 6.06 626 6.1 627 6.1 640 معنیات کے قی رقب 640 معنیات کے قبلیت والا مرحد 640 معنیات کے قبلیت والا اور چھلا 648 معنیات کی البائیاں 650 معنیات کی البائیاں 661 معنیات کی البائیاں 662 معنیات کی البائیاں 663 معنیات کی البائیات البائی اور قیت سیال اور قیت البائی البائی البائی البائی البائی البائی البائی البائی البائی			
561 فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل 5.6 578 5.7 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 5.9 605 5.0 5.10 625 605 6.1 626 6.2 6.1 627 6.2 6.2 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 663 6.4 6.5 664 6.5 6.5 665 6.6 6.6 6.6 670 6.2 6.4 687 6.3 6.4 688 6.5 6.6 689 6.6 6.7 710 6.8 6.8 731 6.8 6.9 740 6.10 6.5 755 7 10 6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578 بنیادی سئلد 5.7 5,10 5.8 5.8 5.8 5.8 6.0 5.8 6.0 5.9 5.9 6.0 5.9 6.0 5.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.1 6.2 6.2 6.2 6.1 6.2 6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599 قطع کمل میں برل 5.8 605 5.9 605 5.9 605 5.10 625 5.10 625 6.1 629 6.1 640 7 6.2 6.2 6.3 6.2 6.4 6.3 6.5 6.4 6.6 6.5 6.6 6.9 6.7 6.7 7 6.7 7 6.8 7 6.9 6.0 6.0 6.1 6.9 6.9 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و	^ت کمل میں بدل	5.8 قطعی	
 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 625 تاعدہ ذوزنقہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا 6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 میار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 میار اثر اور مرکز کمیت 6.9 وسطانی مرکز 6.7 میار اثر اور قوت سیال اور قوت سیال 6.10 میادرائی تفاعل 			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اگر رقبہ 6.1.1 640 تدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 640 شکل کا کے تجمہ ترص اور چھلا 6.3 65 اجہام طواف کے تجمہ قرص اور چھلا 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 699 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 711 وسطانی مرکز 6.8 731 وسطانی مرکز 6.8 731 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 740 بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال 7 755 ماورائی نقاعل 7			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اگر رقبہ 6.1.1 640 تدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 640 شکل کا کے تجمہ ترص اور چھلا 6.3 65 اجہام طواف کے تجمہ قرص اور چھلا 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 699 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 711 وسطانی مرکز 6.8 731 وسطانی مرکز 6.8 731 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 740 بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال 7 755 ماورائی نقاعل 7		کا ب	_
629 تدريل ہوتے کليات والا سرحد 640 6.2 640 6.2 6.3 6.3 6.4 6.3 6.5 6.4 6.6 6.5 6.7 6.6 6.8 6.9 6.7 6.7 711 6.8 731 6.8 731 6.0 740 6.10 755 30	0_0		6
640 گیاں کاٹ کر قجم کی طاش 648 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 6.4 676 شوی متحدیات کی لمبائیاں 687 6.6 689 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 67 6.71 711 0.71 68 6.71 716 وسطانی مرکز 6.8 مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال 740 مادرائی نقاعل			
648 اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا 6.3 663 شکلی چھلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 688 7.1 6.8 731 6.8 7 740 مورائی تفاعل 6.10 755 ماورائی تفاعل 7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663 بکی چیلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 711 6.7 7 711 6.8 7 710 6.8 7 731 10 6.0 740 6.10 6.10 755 10 6.10 7) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 687 6.5 688 6.6 699 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 6.7 6.7.1 70 6.8 731 8 740 6.10 755 ماورائی تفاعل	•		
687 شطح طواف کا رقبہ 699 6.7 711 6.7 711 6.7.1 716 9 6.8 731 700 6.10 701 6.10 702 6.10 703 6.10 704 6.10 705 6.10 706 6.10 707 6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.10 نیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.9 نشار سال اور قوت سال 6.10 نیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

ي لوگار تھم	7.2 قدرتي	
نمائی تفاعلٰ	7.3 قوت	
اور x 10g _a x اور x		
ت ش اور تنزل		
ه لمومييال		
ا شرح نمو 	7.7 اضافی	
.7 ُ رتیبی اور ثنائی تلاش	7.1	
تكونياتى تفاعل	7.8 الث	
ت ۔ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9 الث	
) تفاعل	7.10 بذلولي	
ـ تې تفرقی مساوات	7.11 يك ر	
لى اعدادى تركيب؛ ميدان وْ حلوان	7.12 يولر ك	
	6	
	کمل کے طریہ	8
کے بنیادی کلیات	8.1 عمل	
بالحصص	8.2 کمل	
.8 يار بار استعال	2.1	
) کر	8.3	
تى بىلَ	8.4 تكونيا	
ت کمل اور کمپیوٹر	8.5 جدول	
ناسب کمل		
1043	لامتنابى تشلسل	9
کی ترتیب کی حد		
ہ کے حد تلاش کرنے کے مسلے		
ى تىلىل		
نتی اجزاء والے تسلسل کا تھملی پر کھ ۔	9.4 غير م	
نتی اجزاء کے تشکسل کے تقابلی پر کھی	9.5 غير م	
نقی اجزاء کے تسلسل کا تناسی اور جذری پر کھ	9.6 غيرًم	
شكىل، مطلق اور مشروط ار تكاز	9.7 براتاً د	
تلل المال	7.7	
شلىل	9.9 شيراو	
ملکس کا ار تکاز؛ خلل کے اندازے	9.10 ٹیکر ت	
شکسل کے استعال	9.11 طاقتی	
شخنی مقدار معلوم اور قطبی محدو		10
کی جھے اور دو قدری مساواتیں	10.1 مخروط	
1227	ضميمه اول	1
1237	کیمه اون	J

ب ضميمه دوم

ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كي

2011 كتوبر _2011

باب10

مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محد د

جائزه

حرکت پر غور احصاء کی مدد سے کیا جا سکتا ہے۔ اس حصہ میں ہم وقت کے ساتھ ایک ذرے کے بدلتے مقام پر غور کریں گے۔ ہم مخروطی حصوں کی مساوات سے شروع کرتے ہیں چونکہ بالعکس مرلع قوت کی بناسیارے، مصنوعی سیارے، اور دیگر اجسام مخروطی راہ پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک جمم مخروطی راہ پر حرکت کر رہا ہے تب ہم اس کی رفتار اور اس پر عمل کرنے والی قوت دریافت کر سکتے ہیں۔ قطبی محدد سیاروں کی حرکت پر غور کو بہت آسان بناتا ہے لہذا ہم اس نئے محدد میں منحنیات، تفرق اور تکمل پر بھی غور کریں گے۔

10.1 مخروطی حصے اور دوقدری مساواتیں

اں حصہ میں دکھایا جائے گا کہ مخروطی حصوں کو کس طرح محددی سطح پر بطور دو قدری مساوات بیش کیا جاتا ہے۔ دوہرے مخروط کو سطح سے کاٹ کر مخروطی منحنیات پیدا کی جاتی ہیں اور اس کی بنا مخروطی حصہ کی اصطلاح پیدا ہوئی۔

دائره

تعریف: ایک متوی میں رہتے ہوئے اس متوی میں کی مقررہ نقط سے متعقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو دائرہ 1 کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقط کو دائرے کا مرکز 2 کہتے ہیں جبکہ اس متعقل فاصلہ کو رداس 3 کہتے ہیں۔

وائرے کے معیاری مساوات جنہیں حصہ 1.4 میں فاصلہ کی مساوات $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ سے اخذ کیا گیا درج ذیل ہیں۔

$$x^2 + y^2 = a^2$$
 (0,0) روای a اور برکز (x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 (h, k) روای a اور برکز

قطع مكافى

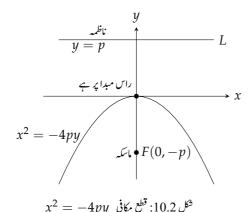
تعریف: ایک سطح میں رہتے ہوئے کی مقررہ سید هی لکیر اور مقررہ نقطہ (جو اس مقررہ سید هی لکیر پر نہیں پایا جاتا ہو) سے مستقل فاصلہ پر پائے جانے والے تمام نقطوں کے سلسلہ کو قطع مکافی ⁴ کہتے ہیں۔مقررہ نقطے کو قطع مکافی کا ⁵ کہتے ہیں جبکہ مقررہ لکیر کو ناظمہ ⁶ کہتے ہیں۔

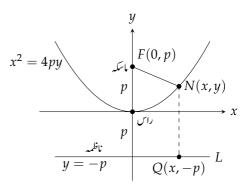
جب ماسکہ کسی محددی محور پر ہو اور ناظمہ اس محددی محور کے متوازی ہو تب قطع مکافی کی مساوات سادہ ترین ہوتی ہے۔مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ماسکہ y محور پر نقطہ f(0,p) پر پایا جاتا ہے اور لکیر y=-p ناظمہ (شکل 10.1) ہے۔ یول شکل 10.1 میں نقطہ N(x,y) مرف اور صوف اس صورت اس قطع مکافی پر پایا جائے گا جب NF=NQ ہو۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$NF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$NQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

circle¹ center² radius³ parabola⁴ focus⁵ directrix⁶





شکل 10.1: قطع مکافی $x^2=4py$ ؛ راس کا فاصل ماسکہ اور ناظمہ سے ایک جیہا ہے۔

کھھا جا سکتا ہے۔ ان مباوات کو ایک دوسرے کے برابر پر کر کے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y = \frac{x^2}{4p} \implies x^2 = 4py$$
 عياري روپ

اس ماوات سے قطع مکانی کی y محور کے لحاظ سے تشاکلی واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ محور y اس قطع مکانی کا محور تشاکلی ہے جس کو عوماً چھوٹا کر کے صرف محور ⁷ پکارا جاتا ہے۔

وہ نقطہ جس پر قطع مکافی اپنے محور کو قطع کرتا ہو راس 8 کہلاتا ہے۔ قطع مکافی $x^2=4py$ کا راس مبدا پر پایا جاتا ہے (شکل 10.1)۔ شبت عدد y کو قطع مکافی کا طول ماسکہ 9 کہتے ہیں۔

اگر قطع مکافی نیجے رخ کھاتا ہو اور اس کا ماسکہ (0,-p) جبکہ ناظمہ لکیر y=p ہو تب مساوات 10.1 درج ذیل روپ اختیار کرے گر شکل (10.2)۔

$$y = -\frac{x^2}{4p} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -4py$$

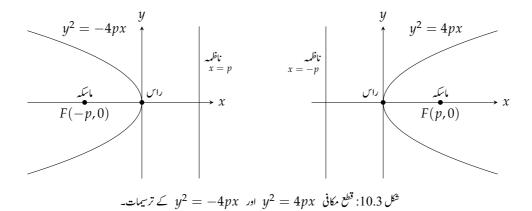
ہم ای طرح کے مساوات ہم دائیں اور بائیں کھلنے والے قطع مکانی کے لئے حاصل کر سکتے ہیں (جدول 10.1 اور شکل 10.3)۔

مثال 10.1: قطع مكافى $y^2=10x$ كا ماسكه اور ناظمه تلاش كريں۔

 $\begin{array}{c} {\rm axis}^7 \\ {\rm vertex}^8 \\ {\rm focal~length}^9 \end{array}$

جدول 10.1: مبدایر راس والے قطع مکانی کے معیاری مساوات (p>0

کھلنے کا رخ	محور	ناظمه	ماسكه	مساوات
اوپر	محور ہا	y = -p	(0, p)	$x^2 = 4py$
ينج	محور y	y = p	(0, -p)	$x^2 = -4py$
وائين	محور 🗴	x = -p	(p, 0)	$y^2 = 4px$
بائتين	محور 🗴	x = p	(-p, 0)	$y^2 = -4px$



 $y^2=4px$ على: ہم معیاری مساوات $y^2=4px$ علی $y^2=4px$

$$4p = 10 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

اس کے بعد ہم حاصل کردہ p کے لئے ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرتے ہیں۔

$$(p,0)=\left(rac{5}{2},0
ight)$$
 ملته $x=-p, \qquad x=-rac{5}{2}$ مائله

جدول 10.1 کے کلیات پر حصہ 1.4 میں دیے گئے منتقلی کے کلیات لاگو کرتے ہوئے دیگر مقامات پر واقع قطع مکافی کے مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

ترخيم

تعریف: ایک مستوی پر رہتے ہوئے، مستوی پر دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو، ان کے سلسلہ کو ترخیم 10 کتب ہیں۔ ان دو مقررہ نقطوں کو ترخیم کے مسلمے کہتے ہیں (شکل 10.4)۔

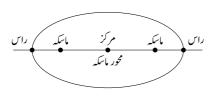
ترخیم کو اس کی تعریف استعال کرتے ہوئے بہت جلد ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ مقررہ نقطوں F_1 اور F_2 پر ڈوری باندھیں۔ ڈوری کو قلم سے کھنچ کر رکھتے ہوئے قلم کو بند دائری حرکت دیں۔ چونکہ ڈوری کی لمبائی مستقل ہے المذا قلم ترخیم کو ترسیم کرے گا (شکل 10.4)۔

 $NF_1 + NF_2$ اور $F_2(c,0)$ ہوں (شکل 10.6) اور فاصلہ $F_1(-c,0)$ کو $F_1(-c,0)$ اگر مانکے N(x,y) ورتی ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

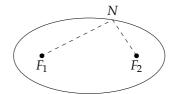
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذری جزو کو دائیں منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذری جزو کو ایک ہاتھ رکھتے ہوئے دوبارہ مربع لیتے ہیں۔ نتیجناً درج ذیل حاصل ہو گا۔

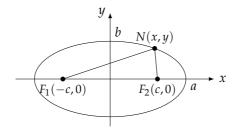
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$



شكل 10.5: ترخيم پر اہم نقطے۔



شکل 10.4: رونوں ماسکوں (F_1 اور F_2) ہے کسی بھی نقط N تک فاصلوں کا مجموعہ (نقطہ دار لکیر) ایک مستقل ہے۔



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 اور اس کی مساوات $NF_1 + NF_2 = 2a$ ہے۔ 10.6 اور اس کی مساوات

چونکہ NF_1+NF_2 کی کمبائی F_1F_2 کی کمبائی سے زیادہ ہے (شکون NF_1F_2 کے لئے شکونی عدم مساوات) للذا عدد 2a عدد a>c کی سے بڑا ہو گا۔ پیل a>c ہو گا للذا مساوات 10.2 میں a>c ایک شبت عدد ہو گا۔

ہم مساوات 10.2 حاصل کرنے کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ جو مساوات 10.2 کو c < a کے لئے مطمئن کرتا ہو $NF_1 + NF_2 = 2a$ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت ترخیم پر پایا جائے گا اگر وہ مساوات 10.2 کو مطمئن کرتا ہو۔

اگر

$$(10.3) b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

ہو تب $a^2-c^2=b^2$ ہو گا اور مساوات 10.2 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مساوات 10.4 کے تحت مبدا اور دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ یہ $x=\pm a$ اور $y=\pm b$ کلیروں میں بند مستطیل کے اندر پایا جاتا ہے۔ یہ محوروں کو نقطہ $(0,\pm b)$ اور $(\pm a,0)$ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$
 ساوات 10.4 سے حاصل کیا گیا

کی قیمت x=0 پر صفر اور y=0 پر لا تتنابی ہے البذا $(\pm a,0)$ اور $(\pm a,0)$ پر مماثل محوروں کو عمودی ہوں گے۔

ترخيم كااكبر اور اصغر محور

ماوات 10.4 کی ترخیم کا اکبر محور 11 نقاط $(\pm 2,0)$ کو جوڑنا والی کلیر ہے جس کی لمبائی 2a ہے۔ اس کے اصغر محور 12 نقاط $(0,\pm b)$ کے گئی کلیر ہے۔ عدد a از خود نصف اکبر محور جبکہ عدد نصف اصغر محور کبلاتے ہیں۔ ماوات c 10.3 ہے عدد c 10.4 ہے عدد c 10.3 ہے عدد c 10.4 ہے عدد c 1

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مرکز تا ماسکہ فاصلہ ہے۔

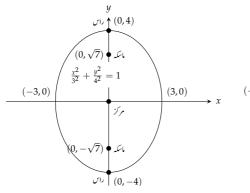
مثال 10.2: افقى اكبر محور درج ذيل ترخيم

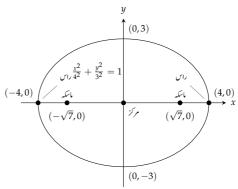
$$(10.5) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

جس كوشكل 10.7 مين وكھايا گيا ہے كے لئے درج ذيل ہوں گے۔

$$a=\sqrt{16}=4$$
 انصف اکبر محور $b=\sqrt{9}=3$ انصف اصغر محور $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ $(\pm c,0)=(\pm 7,0)$ ماسکہ سے مرکز تک مرکز تک مرکز میں مرکز میں مرکز تک مرکز میں مرکز مرکز میں مرکز

major axis¹¹ minor axis¹²





شکل 10.8: اکبر محور عمودی ہے۔ (مثال 10.3)

شكل 10.7: اكبر محور افقى ہے۔ (مثال 10.2)

مثال 10.3: عودی اکبر محور ماکبر محور مثال 10.3: عودی اکبر محور مثال موتا ہے ماوات 10.5 میں ترخیم حاصل ہوتا ہے

$$(10.6) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

جس کو شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

مساوات 10.5 اور مساوات 10.6 کو سیجھنے میں سبھی دشواری پیش نہیں آتی ہے۔ ہم محدد ی محور پر نقطہ قطع معلوم کر کے کمبی محور کو اکبر محور چنتے ہیں۔مرکز ان صور توں میں مبدا پر ہو گا اور ماسکہ اکبر محور پر پائے جائیں گے۔

مبدا پر مرکز والے ترخیم کے معیاری مساوات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$
 مرکز ہے ماسکہ تک فاصلہ
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
 مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ
$$(\pm c, 0)$$
 لیک راس

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$$
 مرکز ہے ماسکہ تک فاصلہ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ماسکہ تک فاصلہ $(0, \pm c)$ ماسکہ تک فاصلہ $(0, \pm c)$ ماسکہ تک فاصلہ رات

دونوں صورتوں میں نصف اکبر محور a اور نصف اصغر محور b ہیں۔

قطع زائد

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے مستوی میں دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا فرق ایک مستقل ہو، ان تمام نقطوں کے سلمہ کو قطع زائد 13 کہتے ہیں۔ یہ دو مقررہ نقطے قطع زائد کے ماسکہ کہلاتے ہیں۔

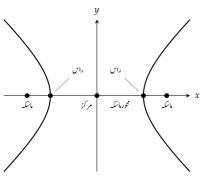
اگر ماسکے (x,y) اور (x,y) اور (x,y) ہوں (شکل 10.9) اور مستقل فرق (x,y) ہوتب نقطہ (x,y) صوف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا جب درج ذیل مطمئن ہو۔

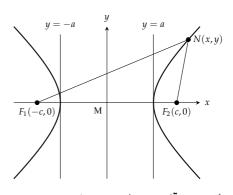
(10.7)
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذر کو دائیں ہاتھ منتقل کر کے دونوں ہاتھ کا مربع لیے کر جذر کو ایک ہاتھ رکھ کر دوبارہ دونوں ہاتھ کا مربع لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

hyperbola¹³





10.9 قطع زائد کے وائیں بازو کے لیے 10.9 قطع زائد کے وائیں بازو کے لیے $NF_1 - NF_2 = 2a$ جبہ بائیں بازو کے لیے $NF_2 - NF_1 = 2a$ ہو گا۔

اب تک ہیہ مساوات بالکل تر خیم کی مساوات کی طرح ہے۔ البتہ اب چو نکہ تکون NF_1F_2 کے دو اضلاع کا فرق 2a ہے جو تیسرے ضلع a^2-c^2 منفی قیت ہے۔ a^2-c^2

ہم مساوات 10.8 کے حصول کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے وکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ N جو 0 < a < c کے لئے اس طرز کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو، مساوات 10.7 کو بھی مطمئن کرے گا۔ یول ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا اگر اس کے محدد مساوات 10.8 کو مطمئن کرتے ہوں۔

b ک شبت جذر کو b سے ظاہر کریں،

$$(10.9) b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

تب $a^2-c^2=-b^2$ ہو گا اور مساوات 10.8 درج ذیل روپ اختیار کرے گا۔

$$(10.10) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1$$

قطع زائد کی مساوات 10.10 اور تر خیم کی مساوات 10.4 میں فرق منفی علامت کا اور درج ذیل نئے تعلق کا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2$$
 ماوات 10.9 سے حاصل کیا گیا

تر خیم کی طرح قطع زائد بھی مبدا اور محددی محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ سی محور کو نقطہ (±a,0) پر قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b^2x}{a^2y}$$
 ساوات 10.10 سے حاصل کیا گیا

ہے للذا یہاں مماس عمودی ہوں گے۔

تعریف: قطع زائد کے ماسکوں کے ﷺ کییر کو محمور ماسکہ 14 کہتے ہیں جس کے وسطی نقطہ کو قطع مکافی کا مرکز ¹⁵ کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر محور ماسکہ 1⁶ کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر محور ماسکہ اور قطع مکافی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں، انہیں راس ¹⁶ کہتے ہیں (شکل 10.10)۔

قطع زائد کے متقارب؛ ترسیم کا عمل

قطع زائد

$$(10.11) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

کے دو متقارب¹⁷ درج ذیل کیریں ہیں۔

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

متقارب کی مدد سے ہم قطع زائد کو جلدی ترسیم کر پاتے ہیں۔ متقارب کی مساوات حاصل کرنے کا آسان ترین طریقہ مساوات 10.11 میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 یر کر کے 1 کے حل کرنا ہے:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{av}} \implies \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{0 av}} \implies \underbrace{y = \pm \frac{b}{a}x}_{\text{vol}}$$

focal $axis^{14}$

center¹⁵

vertices¹⁶

 ${\rm asymptotes}^{17}$

مرکز پر مبدا والح قطع زائد کی معیاری مساواتیں

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 ي يا يك بي الميك بي $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ يا ماسك كا فاصل مركز ند ماسك كا فاصل مي فاصل مي فاصل مي فاصل مي في ماسك يا مي في ماسك يا مي في مي في

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
 ي الميك بي الميك ي ا

دھیان رہے کہ پہلی صورت میں متقارب کی مساوات میں $\frac{b}{a}$ اور دوسری صورت میں متقارب کی مساوات میں میں متقارب کی متعارب کی مساوات میں متقارب کی متعارب کی دور متعارب کی متعارب کے متعارب کی متعارب کرد متعارب کی متعارب کر

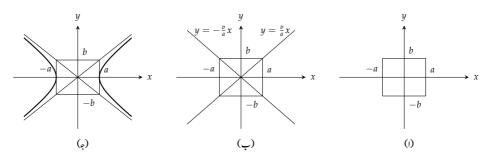
قطع زائد ترسیم کرنے کا عمل

-(10.11 قطع ذائد $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ترسيم كرنے كے لئے درج زيل اقدام كريں (شكل 10.11)۔

ا. نقاط $(\pm a,0)$ اور $\pm b$ کو ترسیم کرتے ہوئے اس مستطیل کو مکمل کریں جن کے اضلاع میں یہ نقطے پانے جاتے ہوں۔

ب. متطیل کے وتر کو بڑھا کر متقارب ترسیم کریں۔

ج. منتطیل اور متقارب کو راہ بر لیتے ہوئے قطع زائد ترسیم کریں۔



شکل 10.11: متقارب کی مدد سے قطع زائد کی ترسیم۔

مثال 10.4: تحور x پرمائے درج ذیل قطع زائد کی مساوات ہے (شکل 10.12)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

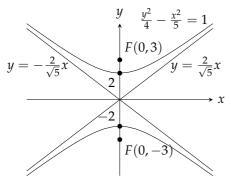
جس میں $a^2=4$ اور $b^2=5$ بین (مساوات 10.10)۔ بین ورج ذیل ہوں گے۔

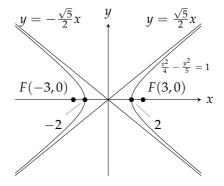
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$$
 مرکزے ماسکہ تک فاصلہ $(\pm c,0)=(\pm 3,0)$ کی اسکہ تک فاصلہ $(\pm a,0)=(\pm 2,0)$ متقارب $y=\pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$

مثال 10.5: درج ذیل قطع زائد کو مثال 10.4 کے قطع زائد میں x اور y کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر حاصل کیا گیا ہے۔

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

اس قطع زائد کے راس عمودی محور پر بائے جائیں گے (شکل 10.13)۔ اب بھی $a^2=4$ اور $b^2=5$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو





شكل 10.13: قطع زائد (مثال 10.5)

شكل 10.12: قطع زائد (مثال 10.4)

_15

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$$
 مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ $(0,\pm c)=(0,\pm 3)$ کے $(0,\pm a)=(0,\pm 2)$ مرکز سے ماسکہ $y=\pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$

عکسی خواص

قطع مکانی کا اہم ترین استعال بطور شعاع اور ریڈیو امواج کا عاکس ہے۔ قطع مکانی کے ماسکہ سے خارج شعاع، قطع مکانی کے محور کے متوازی معکس ہوتا ہے۔ یہ خاصت ہاتھ بن اور گاڑیوں کی اگلی بتیوں میں بروئے کار لایا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ خرد امواج نشر کرنے کے لئے بھی قطع مکانی دینٹینا استعال کیا جاتا ہے جو نقط منبع سے خارج بر قاطیبی امواج کو ایک محدود شعاع کی صورت میں خارج کرتا ہے۔ اس کے برعکس قطع مکانی عاکس کے محور کے متوازی آمد بر قاطیبی امواج عاکس کے ماسکہ پر مرکوز کیے جاتے ہیں۔اس خاصیت کی بنا ٹیلی وژن کا وُش اینٹینا یاریڈیو مور مین کمزور اشارات کو اکٹھ کر کے زیادہ طاقتور اشارہ عاصل کرتا ہے۔ ای طرح سورج کی روشن کو ایک نقطہ پر مرکز کیا جا سکتا ہے۔

ایک ترخیم کو اس کے محور کے گرد گھا کر سطح طواف پیدا کیا جا سکتا ہے جو تر خیصی مسطح ¹⁸ کہلاتا ہے۔اس کی اندرونی سطح پر چاندی کی تہہ لگا کر آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔ ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر منعکس ہو گا۔ ترخیمی سطح اس طرح آواز کو بھی ایک ماسکہ سے دوسرے

ellipsoid¹⁸

ماسکہ منتقل کرتا ہے۔ اس خاصیت کو استعال کرتے ہوئے کمرہ سر گو ثنی بنایا جا سکتا ہے جس میں ایک ماسکہ پر مبیٹھا شخص دوسرے ماسکہ پر مبیٹھے شخص کے ساتھ سر گوشی ہے باتیں کر سکتا ہے۔ کمرہ سر گوشی میں موجود باتی لوگ ان کی باتیں سننے سے قاصر ہوں گے۔ ہوائی جہازوں کی کارکرد گی پر ہوائی سرنگ میں غور کیا جاتا ہے۔ جہاز کے شور پر غور کرتے ہوئے نقطہ غور کو ترخیمی سطح کے ایک ماسکہ پر رکھا جاتا ہے جبکہ مائکروفون کو اس کی دوسرے ماسکہ پر رکھا جاتا ہے۔ دیگر نقطوں سے پیدا شور کے اثر کو یوں بہت کم کرنا ممکن ہوتا ہے۔

قطع زائد آئینہ کے ایک ماسکہ پر آمد شعاع کو آئینہ دوسرے ماسکہ پر بھیجا ہے۔ قطع مکافی سطح، ترخیمی سطح اور قطع مکافی سطحوں کے خواص کو استعال کرتے ہوئے حدید دور بین تبار کے حاتے ہیں۔

سوالات

ترسیم کی پہچان

سوال ا تا سوال 4 میں دی گئی قطع مکافی کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$x^2 = 2y$$
, $x^2 = -6y$, $y^2 = 8x$, $y^2 = -4x$

اس کے بعد قطع مکافی کے ماسکہ اور ناظمہ در مافت کریں۔

سوال 1: شكل 10.14-ا

x = -2 اور ناظمہ F(2,0) ، ماسکہ اور ناظمہ جواب:

سوال 2: شكل 10.14-ب

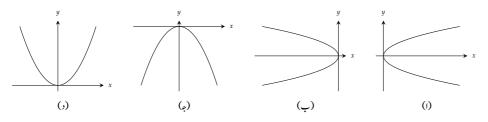
يوال 3: شكل 10.14-خ $y=rac{3}{2}$ اور ناظمہ $F(0,-rac{3}{2})$ اور ناظمہ $x^2=-6y$

سوال 4: شكل 10.14-د

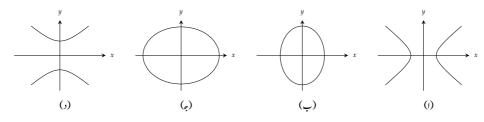
سوال 5 تا سوال 8 میں دیے گئے مخروط کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$
, $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

دیے گئے مخروط کا ماسکہ اور راس تلاش کریں۔ اگر قطع زائد دیا گیا ہو تب اس کے متقارب بھی دریافت کریں۔



شكل 10.14: ترسيم برائے سوال 1 تا سوال 4



شكل 10.15: ترسيمات برائے سوال 5 تا سوال 8

 $y=\pmrac{3}{2}$ اور متقارب $V(\pm 2,0)$ اور متقارب $V(\pm 2,0)$

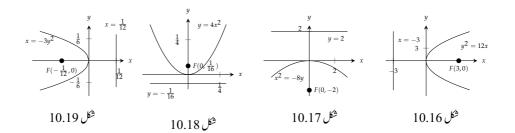
سوال 6: ترسيم شكل 10.15-بين ديا گياہے۔

 $V(\pm\sqrt{2},0)$ موال 7: ترسیم شکل 10.15 میں دیا گیا ہے۔ $V(\pm\sqrt{2},0)$ مراس $F(\pm1,0)$ مراس $V(\pm\sqrt{2},0)$ مراس

سوال 8: ترسيم شكل 10.15-د مين ديا گيا ہے۔

قطع مکافی سوال 9 تا سوال 16 میں دیے گئے قطع مکافی کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرنے کے بعد اس کو ترسیم کریں۔ ماسکہ اور ناظمہ کو بھی ترسیم میں شامل کریں۔

 $y^2 = 12x$:9 حوال 9: مثل 10.16



$$x^2 = 6y : 10$$

$$x^2 = -8y$$
 :11 حوال 11.17 عواب: شکل 10.17

$$y^2 = -2x \quad :12$$

$$y = 4x^2$$
 :13 سوال
جواب: شکل 10.18

$$y = -8x^2$$
 :14 سوال

$$x = -3y^2$$
 :15 سوال
جواب: شکل 10.19

$$x = 2y^2$$
 :16 سوال

ترخيم

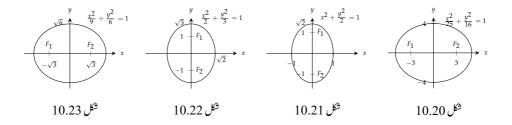
سوال 1'7 تا سوال 24 میں دیے گئے تر خیم کی مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر ترسیم کریں۔ ترسیم پر ماسکے د کھائیں۔

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$
 :17 عوال 17: فتكل 10.20

$$7x^2 + 16y^2 = 112$$
 :18 سوال

$$2x^2 + y^2 = 2$$
 :19 حوال 10.21 عواب: شکل

$$2x^2 + y^2 = 4$$
 :20 عوال



$$3x^2 + 2y^2 = 6$$
 :21 عوال 21
جواب: شکل 10.22

$$9x^2 + 10y^2 = 90 \quad :22$$

$$6x^2 + 9y^2 = 54$$
 :23 عوال :3
جواب: شکل 10.23

$$169x^2 + 25y^2 = 4225 \quad :24$$

سوال 25 اور سوال 26 میں xy مستوی میں پائے جانے والے ترخیم کے ماسکہ اور راس دیے گئے ہیں۔ ترخیم کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ ترخیم کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

$$(\pm 2,0)$$
 حوال $(\pm \sqrt{2},0)$ اور رائ $(\pm \sqrt{2},0)$ عوال : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ اور رائ

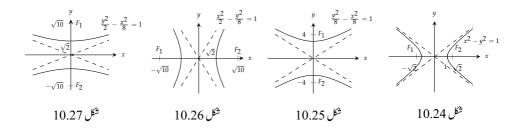
$$(0,\pm 5)$$
 اور رائ $(0,\pm 4)$ عوال 26: ماسکے

قطع زائد

سوال 27 تا سوال 34 میں قطع زائد کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ مساوات کو معیاری روپ میں لکھیں اور قطع زائد کا متقارب دریافت کریں۔ قطع زائد کا خاکہ تھینچ کر متقارب اور ماسکہ بھی د کھائیں۔

$$x^2-y^2=1$$
 عوال 27: $y=\pm x$ اور شکل 10.24 جواب: متقارب $y=\pm x$ اور شکل

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \quad :28$$



$$y^2-x^2=8$$
 يوال 29: $y=\pm x$ اور شکل 10.25 جواب: متقارب $y=\pm x$ اور شکل

$$y^2 - x^2 = 4$$
 :30 سوال

$$8x^2-2y^2=16$$
 عوال 31: موال 31: $y=\pm 2x$ عواب: متقارب $y=\pm 2x$

$$y^2 - 3x^2 = 3 \quad :32$$

$$8y^2-2x^2=16$$
 عوال 333 عواب: متقارب $y=\pm rac{x}{2}$ اور شکل 10.27

$$64x^2 - 36y^2 = 2304$$
 :34 34

سوال 35 تا سوال 38 میں xy مستوی پر پائے جانے والے قطع زائد کے ماسکہ، راس اور متقارب کی معلومات دی گئی ہے۔ قطع زائد کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ قطع زائد کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

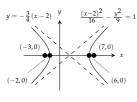
$$y=\pm x$$
 بوال 35: ما میکی $(0,\pm\sqrt{2})$ اور متقارب 35: $y^2-x^2=1$ جواب:

$$y=\pm rac{1}{\sqrt{3}} x$$
 بوال 36: اور متقارب ($\pm 2,0$) اور متقارب

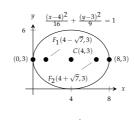
$$y=\pm rac{4}{3} x$$
 بوال 37: رائ $(\pm 3,0)$ اور متقارب $rac{x^2}{9}-rac{y^2}{16}=1$ جواب:

$$y=\pm rac{1}{2} x$$
 بوال 38: راس $(0,\pm 2)$ اور متقارب

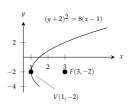
مخروطي حصونكا انتقال



شكل 10.30



شكل 10.29



شكل 10.28

روال 39: قطع مکانی $y^2 = 8(x-1)$ کو 2 اکائیاں نیچے اور 1 اکائی دائیں منتقل کر کے قطع مکافی $y^2 = 8x$ کو $y^2 = 8x$ کیا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکافی کے راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

10.28 ناظمه x=-1 ناظمه (3,-2) ناظمه (1,-2) ناظمه المان (2,-2) ماسکه المان (2,-2) ناظمه المان (2,-2) ناطمه المان (2,-2) ناطم (2,

 $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ و کائیاں دائیں اور 3 کائیاں اور 4 کائیاں اور 4 کر 3 کے 1 کے 1 کی اسکے، راس اور مرکز تر سیم کرتے ہوئے نئے ترقیم کا خاکہ بنائیں۔

10.29 اور (0,3) ، مرکز (4,3) ؛ (4,3) ، راس (8,3) اور (8,3) ، مرکز (4,3) ؛ (4)

 $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ رود کا کائیاں باکس اور 2 کا کائیاں باکس اور 2 کا کائیاں کے ترخیم 1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ راس اور مرکز تر سیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا کائیاں باتا ہے۔ (الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز تر سیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 43: قطع زائد $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ اکائیاں دائیں دائیں دائیں دائیں دائیں دائیں ہوئے ہوئے ہوئے ہوئے ہوئے نظع زائد کا مرکز، ما سکے، راس اور متقارب ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

(-2,0) اور (6,0) اور (-3,0) اور (7,0) اور (2,0) اور (2,0) اور (2,0) اور (2,0) برای (2,0) اور (2,0) برای افتال اور (2,0) برای افتال اور (2,0) برای اور اور (2,0) برای اور (2

سوال 44: قطع زائد $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ پیدا کیا جاتا ہوئے قطع زائد $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$ پیدا کیا جاتا ہوں شقار ہوئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نیا مرکز، ماسکے اور متقارب ترسیم کر کے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال 45 تا سوال 48 میں قطع مکافی کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع مکافی کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ معلوم کریں۔

$$x=-3$$
 عوال 45: $y^2=4x$ عوال 25: $y^2=4x$ عوال 25: $y=-3$ اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں بینچے۔ $y=-3$ ، ناظمہ $y=-3$

روال 46:
$$y^2 = -12x$$
 اکائیاں وائیں اور 3 اکائیاں اوپہ $y^2 = -12x$

$$x^2 = 6y$$
 اکائیاں باتیں اور 2 اکائیاں نیجے۔ 3 مائیاں باتھیں اور 2 سوال

سوال 49 تا سوال 52 میں ترخیم کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے ترخیم کی مساوات تلاش کر کے نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز معلوم کریں۔

حوال 49:
$$V(-2,-1)$$
 ، $V(-2,\pm 3-1)$ ، $V(-2,\pm 3-1)$

حوال 50:
$$4$$
 اکائیاں اوپر 3 مائیں ور کمیں اور 4 اکائیاں اوپر۔

$$C(2,3)$$
 ، $V(\pm\sqrt{3}+2,3)$ ، $F(1,3)$ اور S اکائیاں اوپ $C(2,3)$ ، $O(2,3)$ ، $O(2,3)$

-وال 52:
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$
 اکائیاں ہائیں اور 5 اکائیاں $\frac{x^2}{25}$

سوال 53 تا سوال 56 میں قطع زائد کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع زائد کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب معلوم کریں۔

حوال 53 عوال
$$V(0,2)$$
 واکيل اور اوپر 2 اکاکيال اور اوپر 2 اکاکيال اور اوپر 2 اکاکيال $V(0,2)$ ، $V(0,2)$ ،

$$-$$
 اکاکی اور $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ اکاکی اور اور $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ اکاکی اور اکاکی اور اکاکی اور اکاکی اک

$$-$$
 برال 55: $y^2-x^2=1$ (کانی اور پنج $y^2-x^2=1$ (کانی اور پنج $y^2-x^2=1$ (کانی اور پنج $y^2-x^2=1$ (کانی اور $y^2-x^2=1$ (کانی اور کانی اور $y^2-x^2=1$ (کانی اور کانی اور کانی

-وال 36:
$$1 = \frac{y^2}{3} - x^2 = 1$$
 اکائی اور اوپر 3 اکائیاں۔

سوال 57 تا سوال 68 میں دیے گئے مخروط حصول کا (جیبا مناسب ہو) مرکز، ماسکے، راس، متقارب اور رداس دریافت کریں۔

$$x^2 + 4x + y^2 = 12$$
 :57 عوال $a = 4 \cdot C(-2, 0)$:32

$$2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 144$$
 :58

$$x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$$
 :59 عوال $F(-1,0)$ ، $V(-1,1)$

$$y^2 - 4y - 8x - 12 = 0 \quad :60$$

$$x^2+5y^2+4x=1$$
 ور $V(\sqrt{5}-2,0)$ ، $F(-4,0)$ ، $V(-\sqrt{5}-2,0)$ ، $V(-\sqrt{5}-2,0)$ ، $V(-\sqrt{5}-2,0)$ ور $V(-\sqrt{5}-2,0)$

$$9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$$
 :62 362

$$x^2+2y^2-2x-4y=-1$$
 :63 ومال $V(\sqrt{2}+1,1)$ ، $F(0,1)$ ، $F(0,1)$ ، $C(1,1)$ ، $\frac{(x-1)^2}{5}+(y-1)^2=1$ ، ومال $V(-\sqrt{2}+1,1)$

$$4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$$
 :64

$$x^2-y^2-2x+4y=4$$
 ور $F(1-\sqrt{2},2)$ ور $F(1+\sqrt{2},2)$ ور $F(1+\sqrt{2},2)$

$$x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6 \quad :66$$

$$2x^2 - y^2 + 6y = 3 \quad :67$$

$$V(0,\sqrt{6}+3)$$
 ، $F(0,0)$ ، $F(0,6)$ ، $C(0,3)$ ، $\frac{(y-3)^2}{6}-\frac{x^2}{3}=1$ ، ور $V(0,\sqrt{6}+3)$ ، $V(0,\sqrt{6}+3)$ ، $V(0,\sqrt{6}+3)$ ، متقارب $y=\sqrt{2}x+3$ ، ورود $y=\sqrt{2}x+3$

$$y^2 - 4x^2 + 16x = 24$$
 :68 سوال

عدم مساوات

سوال 69 تا سوال 74 میں ایک خطہ کو مطمئن کرنے والی عدم مساوات یا عدم مساوات کی جوڑی دی گئی ہے۔ xy مستوی میں اس خطہ کو ترسیم کریں۔

$$9x^2 + 16y^2 \le 144$$
 :69 $y = 16y^2 \le 144$

$$x^2 + y^2 \ge 1$$
 اور $4x^2 + y^2 \le 4$:70 سوال

$$x^2 + 4y^2 \ge 4$$
 let $4x^2 + 9y^2 \le 36$:71 yellow

$$(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \le 0$$
 :72 سوال

$$4y^2 - x^2 \ge 4$$
 :73 وال

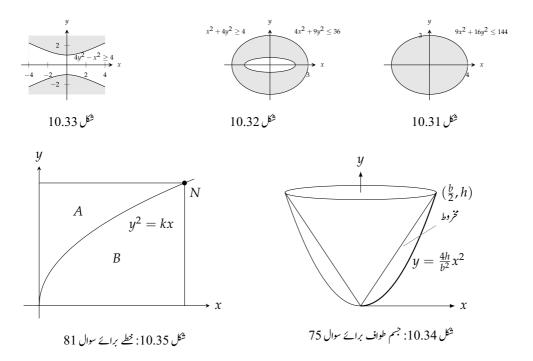
$$4y^2-x^2\geq 4$$
 وال 73 عوال ترتيم مشكل 10.33 مين وي گئي ہے۔

$$\left|x^2-y^2\right|\leq 1$$
 :74 سوال

نظریہ اور مثالیں

سوال 75: قطع مکانی ٹھوس جسم کے جم کا کلیہ آرشمیدس

قطع مکافی $x = \frac{4h}{12}x^2$ اور لکیر y = h میں گیرے ہوئے خطے کو y محور کے گرد گھما کر جہم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس جسم کا حجم مطابقتی مخروط کے حجم کا $\frac{3}{2}$ گنّا ہو گا (شکل 10.34)۔



سوال 76: معلق پل کی رسیاں قطع مکافی کی صورت میں لگئی ہوتی ہیں۔ ایک معلق پل کی کمیت m کلو گرام فی میٹر ہے۔ اس پل کو رسیوں سے لٹکا یا گیا ہے۔ اگر مبدا پر رسی کا افقی تناو H ہو تب رسی کی منحنی درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہے جہاں $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{H}x$$

اں تفر تی مساوات کو حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ رسی کی منحنی کی مساوات ایک قطع مکافی ہے۔ x=0 پر y=0 ابتدائی معلومات ہے۔

سوال 78: فقاط (2,3) ، (3,2) ، (2,3) اور (-4,3) ی ساوات دریافت کریں۔

وال 79: ایک دائرہ جس کا مرکز (-2,1) پر ہے نقطہ (1,3) ہے گزرتا ہے۔ کیا نقطہ (1.1,2.8) اس دائرے پر ، اس کے المر یا اس کے باہر پایا جاتا ہے؟

جواب: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$ نقطہ دائرے کے اندر ہے۔

موال 80: جہاں دائرہ $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ ممان معلوم کریں۔

سوال 82: x=-p پر کسی بھی نقطہ سے منحنی $y^2=4px$ پر دو ممای، آپس میں عمودی ہوں گے۔ x=-p

سوال 83: ترخیم $x^2+4y^2=4$ میں محصور زیادہ سے زیادہ رقبے کے متعظیل کے اصناع معلوم کریں۔متعظیل کے اصناع محددی محود کی متوازی ہیں۔ جواب: لمبائی $2\sqrt{2}$ ، چوڑائی $\sqrt{2}$ ، رقبہ $\sqrt{2}$

سوال 84: ترخیم 36 $y^2+4y^2=36$ کو (الف) x^2 کور، (ب) محور کے گرد گھماکر جمم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا جم معلوم کریں۔

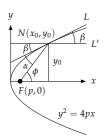
موال 85: ربلع اول میں x محمور، کلیر x=4 اور قطع زائد x=4 ورکے گرد کریے۔ گھا کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا تجم علاقش کریں۔ جواب: x=4

 $y=\pm 3$ سوال 86: ایک خطہ کا بایاں سرحد محور y ، دایاں سرحد قطع زائد $y^2=y^2=1$ جبکہ اس کا نجلا اور بالائی سرحد لکیر y وایاں سرحد کلیر ایس اس خطہ کو y محور کے گرد گھا کر جمع طواف بیدا کیا جاتا ہے۔ اس جمع کا قجم تلاش کریں۔

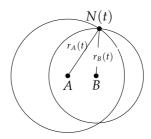
حوال 87: نحور x کے بالائی اور ترخیم $\frac{x^2}{16} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$ کے ینچے تخطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ $(0, \frac{16}{3\pi})$ جواب:

 $y=\sqrt{x^2+1}$, $0\leq x\leq \sqrt{2}$ کے بالائی شاخ $y^2-x^2=1$ کو $y=\sqrt{x^2+1}$ کو گھما کر گھما کر گھواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 89: پانی کی سطح کو پہلے A اور بعد میں B پر چھو کر شکل 10.36 میں دکھائے گئے امواج پیدا کئے گئے۔ جیسے جیسے یہ امواج پیل ہوتا ہے۔ ایس ان کا نقطہ قطع ایک مختی بناتا ہے جو قطع زائد کی طرح معلوم ہوتا ہے۔ کیا ایسا حقیقتاً ہو گا؟ یہ جاننے کے گئے ہم A اور B پر مرکز دائروں کو امواج کا نمونہ لے سکتے ہیں۔



شكل 10.37: قطع مكافى مين انعكاس (سوال 90)



شکل 10.36: امواج برائے سوال 89

لحہ t پر نقط N مرکز A ہے $r_A(t)$ اور B ہے $r_B(t)$ فاصلہ پر ہوگا۔ چونکہ دائروں کے رداس ایک مستقل رقبار (مون کی رقبار) ہے بڑھتے ہیں لہٰذا N اس قطع زائد پر پایا ہے r_A-r_B ایک مستقل ہوگا لہٰذا N اس قطع زائد پر پایا جائے گا جس کے ماسکہ A اور A ہیں۔

سوال 90: قطع مکانی کے خواص انعکا سول 10.3 کو شکل 10.37 میں دکھایا گیا ہے۔ نقط N پر کبیر L اس قطع مکافی کا قطع مکافی کا ممان ہے۔ نقط N پر کبیر N اس قطع مکافی کا ممان ہے۔ قطع مکافی کا ماسکہ E ہوگاہ ہیں کہ E ہوگاہ ہیں مہان ہوگاہ ہی خور E ہوگاہ ہیں کہ E ہوگا۔ اس کہ خواری میں انعکا سے بعد E کا ہم مکان ہوگا۔ بیہ دکھانے کی خاطر ہم دکھاتے ہیں کہ E ہوگا۔ اس مساوات کی تصدیق درج ذیل اقدام کے ذریعہ کریں۔

ا. د کھائیں کہ
$$\beta = \frac{2p}{y_0}$$
 ہو گا۔

ب. وکھائیں کہ
$$\phi = \frac{y_0}{x_0 - p}$$
 ہو گا۔

ج. درج ذیل مماثل

$$\tan \alpha = \frac{\tan \phi - \tan \beta}{1 + \tan \phi \tan \beta}$$

 $\tan \beta = \tan \alpha$ استمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\alpha = \tan \alpha$ ہو گا۔ چونکہ α اور β دونوں زاویہ حادہ بین لہذا $\alpha = \pm \alpha$ استمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\beta = \alpha$

ضمیمها ضمیمه اول

ضمیمه بروم