

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	تفاعل کی انتہائی قیمتیں	4.1
340	مسئلہ اوسط قیمت	4.2
356	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	4.3
356	4.3.1 پرکھ	
368	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	4.4
391	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	4.5
418	بہترین بنانا	4.6
442	خط بندی اور تفرقات	4.7
463	ترکیب نیوٹن	4.8
475	تکمل	5
475	غیر قطعی تکملات	5.1
487	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	5.2
503	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	5.3
514	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	5.4
532	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات	5.5
559	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	5.6
576	بنیادی مسئلہ	5.7
597	قطعی تکمل میں بدل	5.8
603	اعدادی تکمل	5.9
603	قاعدہ ڈورنقہ	5.10
623	تکمل کا استعمال	6
623	منحنيات کے بیچ رقبہ	6.1
627	6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد	
637	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش	6.2
643	ضمیمہ اول	ا
645	ضمیمہ دوم	ب



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 6

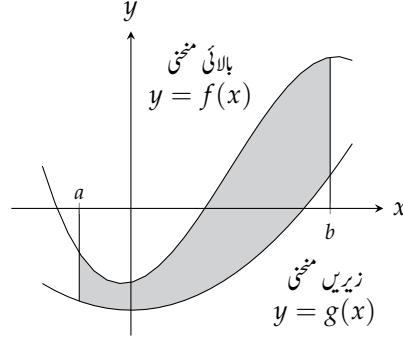
### تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے بیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبہ، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین پانی کی نکاسی کے لئے درکار کام، سیلاب دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدود۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریماں مجموعوں کے حد یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدود کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکمل کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جاسکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کی طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

#### 6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ

محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطہ کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔



شکل 6.1: منحنیات  $y = f(x)$ ،  $y = g(x)$  اور لکیر  $x = a$ ،  $x = b$  کے بیچ خط۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کا حد

فرض کریں ایک خط کی بالائی سرحد منحنی  $y = f(x)$  اور زیریں سرحد منحنی  $y = g(x)$  ہیں جبکہ اس کا پایاں اور دایاں سرحد بالترتیب خط  $x = a$  اور  $x = b$  ہیں (شکل 6.1)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری  $f$  اور  $g$  کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو مکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

مکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ  $[a, b]$  پر خانہ بندی  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  کے تحت خطہ کو  $n$  انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.2) جہاں  $k$  ویں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل 6.3)۔

$$\Delta S_k = \text{چوڑائی} \times \text{قد} = [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k$$

اس کے بعد ہم خطے کے رقبہ کو تخمیناً  $n$  مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

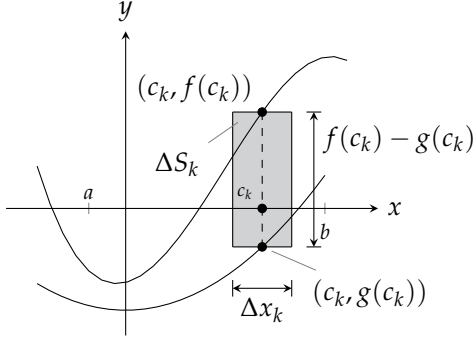
$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \quad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ  $f$  اور  $g$  استمراری ہیں لہذا  $\|P\| \rightarrow 0$  کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$  ہو گا:

$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

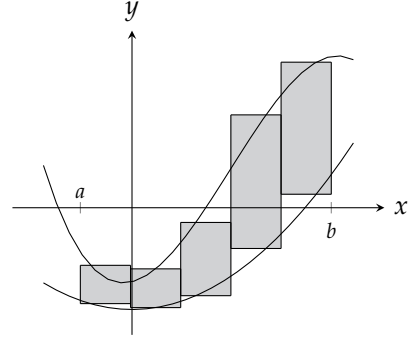
تعریف: اگر پورے  $[a, b]$  پر  $f$  اور  $g$  استمراری ہوں اور  $f(x) \geq g(x)$  ہو تب  $a$  تا  $b$  منحنیات  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے بیچ رقبہ  $a$  تا  $b$  مکمل  $[f - g]$  کا مکمل ہو گا:

$$(6.1) \quad S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



شکل 6.3:  $k$  ویں مستطیل کا قد  $f(c_k) - g(c_k)$  اور اس کی چوڑائی  $\Delta x_k$  لہذا اس کا رقبہ  $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$  ہو گا۔

□



شکل 6.2: ہم خطہ کو تجزیہاً  $x$  محور کے عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔

مساوات 6.1 کو استعمال کرنے کے لئے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

دو منحنيات کے بیچ رقبے کی تلاش

1. منحنيات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔ اس سے معلوم ہو گا کہ کوئی منحنی بالائی  $f$  اور کوئی زیریں  $g$  ہے۔ اس سے مکمل کے حد تعین کرنے میں بھی مدد ملتی ہے۔

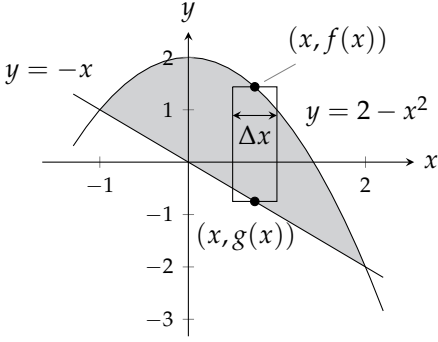
2. مکمل کے حد تلاش کریں۔

3. مکمل  $f(x) - g(x)$  کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

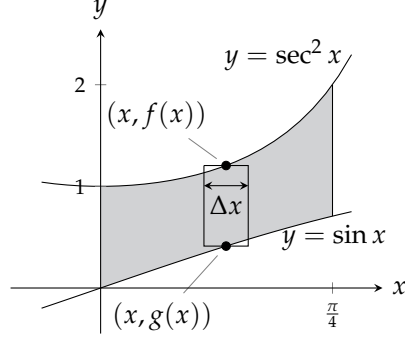
4. مکمل  $[f(x) - g(x)]$  کا مکمل  $a$  تا  $b$  حاصل کریں۔ قطعی مکمل سے حاصل عدد رقبہ ہو گا۔

مثال 6.1: منحنيات  $y = \sec^2 x$  اور  $y = \sin x$  کے تقارب  $0$  تا  $\frac{\pi}{4}$  رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم منحنيات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.4)۔ بالائی قوس  $f(x) = \sec^2 x$  کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس  $g(x) = \sin x$  کی منحنی ہے۔  
دوسرا قدم: مکمل کے حد  $a = 0$  اور  $b = \frac{\pi}{4}$  دیے گئے ہیں۔



شکل 6.5: خطہ برائے مثال 6.2



شکل 6.4: خطہ برائے مثال 6.1

تیسرا قدم:  $f(x) - g(x) = \sec^2 x - \sin x$   
چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x) dx = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

### باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ پایا جاتا ہو تب نقاط تقاطع سے مکمل کے حد حاصل ہوں گے۔

مثال 6.2: قطع مکانی  $y = 2 - x^2$  اور لکیر  $y = -x$  کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل 6.5)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم  $f(x) = 2 - x^2$  اور  $g(x) = -x$  لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے  $x$  محدود مکمل کے حد ہوں گے۔  
دوسرا قدم: مکمل کے حد جاننے کے لئے ہم  $y = 2 - x^2$  اور  $y = -x$  کو ایک ساتھ  $x$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 \\ x &= -1, \quad x = 2 \end{aligned}$$

$f(x)$  اور  $g(x)$  کو برابر پر کریں  
ایک جانب منتقلی  
تجزی  
حل

خطہ  $x = -1$  اور  $x = 2$  کے بیچ پایا جاتا ہے۔  
 تیسرا قدم:  $f(x) - g(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 + x - x^2$   
 چوتھا قدم:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[ 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left( 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) - \left( -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

□

فنیات دو ترسیمات کا تقاطع  
 مکمل کے حصول میں بعض اوقات مکمل کے حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یا تو ایک تفاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کا نقاط تقاطع۔

مساوات  $f(x) = g(x)$  حل کرنے کے لئے ہم  $y = f(x)$  اور  $y = g(x)$  کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات  $f(x) - g(x) = 0$  کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل 6.6)۔

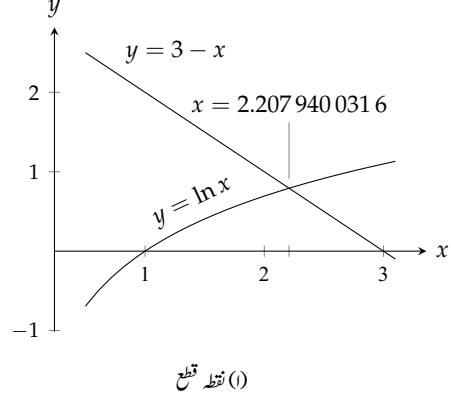
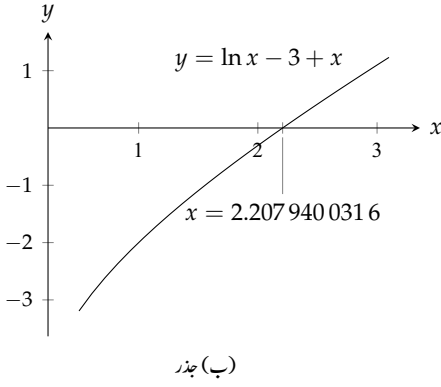
$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = 3 - x$$

### 6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی خطے پر علیحدہ علیحدہ مساوات 6.1 کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال 6.3: ربع اول میں  $y = \sqrt{x}$  کے نیچے اور  $y = x - 2$  کے اوپر رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ترسیم (شکل 6.7) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد  $f(x) = \sqrt{x}$  ہے جبکہ  $0 \leq x \leq 2$  پر اس کی پچھلی سرحد  $g(x) = 0$  اور  $2 \leq x \leq 4$  پر پچھلی سرحد  $g(x) = x - 2$  ہے (نقطہ  $x = 2$  پر  $g(x)$  کے دونوں کلیات ایک جیسے ہیں)۔ ہم  $x = 2$  پر خطہ کو دو ذیلی حصوں  $A$  اور  $B$  میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لئے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔



شکل 6.6: تفاعل  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے حل کی تلاش۔

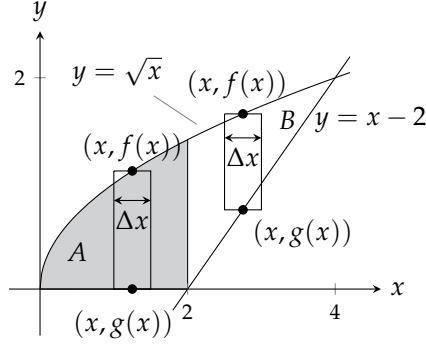
دوسرا قدم: خطہ  $A$  میں مکمل کے حد  $a = 0$  اور  $b = 2$  ہیں۔ خطہ  $B$  کا پایاں حد  $a = 2$  ہے۔ اس کے دایاں حد جاننے کے لئے ہم مساوات  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = x - 2$  کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= x - 2 \\ x &= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 \\ x &= 1, \quad x = 4\end{aligned}$$

$f(x)$  اور  $g(x)$  کے برابر پر کریں  
مرلع لیں  
ایک جانب منتقلی  
تجزی  
حل

صرف  $x = 4$  مساوات  $\sqrt{x} = x - 2$  کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مربع لینے کی وجہ سے حل  $x = 1$  پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں دایاں حد  $b = 4$  ہے۔  
تیسرا قدم:

$$\begin{aligned}f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2, & 2 \leq x \leq 4\end{aligned}$$



شکل 6.7: خطہ برائے مثال 6.3

چوتھا قدم: ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx \\
 &= \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 \\
 &= \frac{2}{3} (2)^{3/2} - 0 + \left( \frac{2}{3} (4)^{3/2} - 8 + 8 \right) - \left( \frac{2}{3} (2)^{3/2} - 2 + 4 \right) \\
 &= \frac{2}{3} (8) - 2 = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

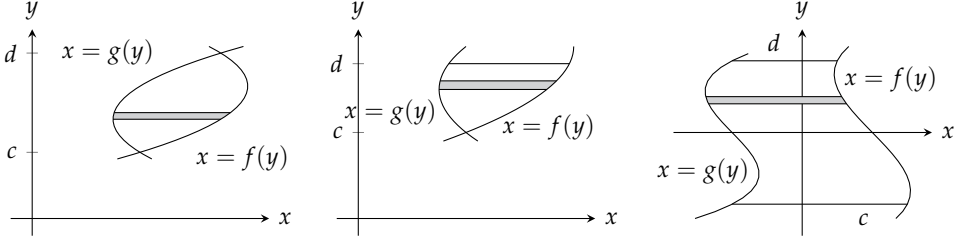
□

تکمل بلحاظ  $y$

اگر سرحد کی مساواتیں  $y$  کی تفاعل ہوں تب تعیناتی مستطیل کو انتضائی کی بجائے افقی بنایا جاتا ہے اور بنیادی کلیہ میں  $x$  کی جگہ  $y$  پایا جائے گا (شکل 6.8):

$$(6.2) \quad S = \int_c^d [f(y) - g(y)] \, dy$$

مثال 6.4: درج بالا مثال 6.3 کو اس بار مساوات 6.2 کی مدد سے حل کریں۔



شکل 6.8: ان اشکال میں دایاں سرحد  $f$  اور بایاں سرحد  $g$  ہو گا لہذا  $f(y) - g(y)$  غیر منفی ہو گا۔

حل: پہلا قدم: ہم خطہ ترسیم کر کے نمائندہ افقی مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.8)۔ خطے کا دایاں سرحد لکیر  $x = y + 2$  ہے لہذا  $f(y) = y + 2$  ہو گا۔ خطے کا بایاں سرحد  $x = y^2$  ہے لہذا  $g(y) = y^2$  ہو گا۔  
دوسرا قدم: تکمل کا زیریں حد  $y = 0$  ہے۔ تکمل کا بالائی حد جاننے کے لئے ہم  $x = y + 2$  اور  $x = y^2$  کو  $y$  کے لئے حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} f & \text{ کو } g \text{ کے برابر پر کرتے ہیں} \\ y + 2 &= y^2 \\ y^2 - y - 2 &= 0 \quad \text{ایک ہاتھ منتقل} \\ (y + 1)(y - 2) &= 0 \quad \text{تجزی} \\ \text{حل } y &= -1, \quad y = 2 \end{aligned}$$

تکمل کا بالائی حد  $y = 2$  ہے (چونکہ  $y = -1$  افقی محور سے نیچے تقاطع کا نقطہ قطع دیتا ہے)۔  
تیسرا قدم:

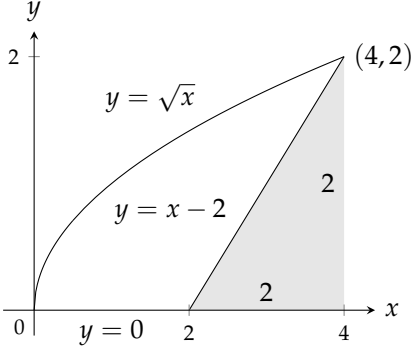
$$f(y) - g(y) = y + 2 - y^2 = 2 + y - y^2$$

چوتھا قدم:

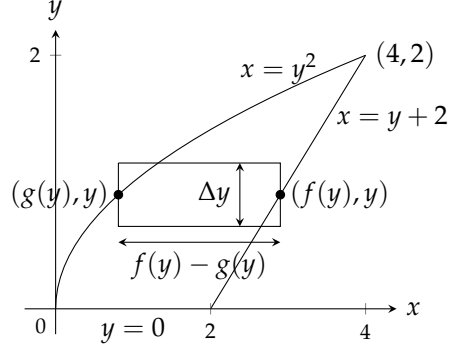
$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f(y) - g(y)] dy = \int_0^2 [2 + y - y^2] dy \\ &= \left[ 2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

یہ وہی جواب ہے جو مثال 6.3 میں حاصل کی گیا۔ مثال 6.3 میں دو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش آئی جبکہ یہاں ایک ہی تکمل سے رقبہ معلوم کرنا ممکن تھا۔  
□





شکل 6.10: بالائی منحنی کے نیچے خط سے تینوں منفی کرنے سے رقبہ حاصل ہو گا۔



شکل 6.9: خط برائے مثال 6.4

تکمل کے ساتھ جیومیٹریائی کلیات کا استعمال

تکمل اور جیومیٹریائی کلیات کو ملا کر رقبہ نسبتاً زیادہ جلد حاصل ہوتا ہے۔

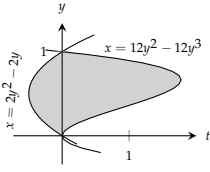
مثال 6.5: مزید ایک بار مثال 6.3 میں دیے گئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم  $0 \leq x \leq 4$  محور  $x$  اور  $y = \sqrt{x}$  کے بیچ رقبہ سے قاعدہ 2 اور قد 2 کے تینوں کا رقبہ منفی کرتے ہوئے درکار خطے کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

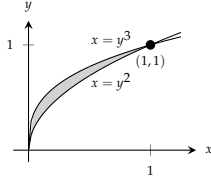
$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \sqrt{x} \, dx - \frac{1}{2}(2)(2) \\ &= \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^4 - 2 \\ &= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

□

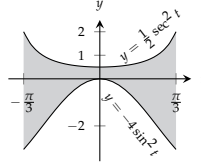
گزشتہ تین مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ دو منحنیات کے بیچ رقبہ بعض اوقات  $x$  کی بجائے  $y$  کے ساتھ تکمل لے کر نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بعض اوقات تکمل اور جیومیٹری کے کلیات کو ملا کر جلد جواب حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکمل لکھنے سے پہلے مسئلے پر غور کرنا بہتر ہو گا۔



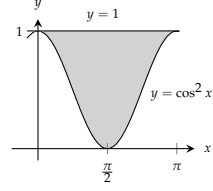
شکل 6.14



شکل 6.13



شکل 6.12



شکل 6.11

## سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 1: سایہ دار خطہ شکل 6.11 جہاں سرحد  $y = \cos^2 x$  اور  $y = 1$  ہیں۔

سوال 2: سایہ دار خطہ شکل 6.12 جہاں سرحد  $y = \frac{1}{2} \sec^2 t$ ،  $y = -4 \sin^2 t$ ،  $y = -\frac{\pi}{3}$  اور  $y = \frac{\pi}{3}$  ہیں۔

سوال 3: سایہ دار خطہ شکل 6.13 جہاں سرحد  $x = y^3$  اور  $x = y^2$  ہیں۔

سوال 4: سایہ دار خطہ شکل 6.14 جہاں سرحد  $x = 12y^2 - 12y^3$  اور  $x = 2y^2 - 2y$  ہیں۔

سوال 5: سایہ دار خطہ شکل 6.15 جہاں سرحد  $y = 2x^2$  اور  $y = x^4 - 2x^2$  ہیں۔

سوال 6: سایہ دار خطہ شکل 6.16 جہاں سرحد  $y = x^2$ ،  $y = -2x^4$ ،  $x = -1$  اور  $x = 1$  ہیں۔

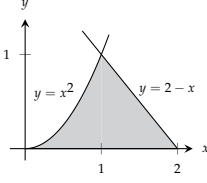
سوال 7: سایہ دار خطہ شکل 6.17 جہاں سرحد  $y = 1$ ،  $y = x$  اور  $y = \frac{x^2}{4}$  ہیں۔

سوال 8: سایہ دار خطہ شکل 6.18 جہاں سرحد  $y = x^2$ ،  $y = 2 - x$  اور  $y = 0$  ہیں۔

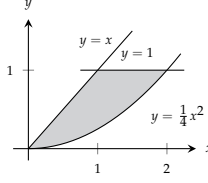
سوال 9 تا سوال 12 میں کل سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 9: سایہ دار رقبہ شکل 6.19 جہاں سرحد  $y = x^2 - 4$ ،  $y = -x^2 - 2x$  اور  $x = -3$  ہیں۔

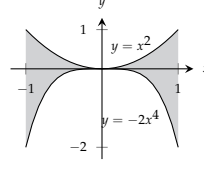
سوال 10: سایہ دار رقبہ شکل 6.20 جہاں سرحد  $y = -x^2 + 3x$  اور  $y = 2x^3 - x^2 - 5x$  ہیں۔



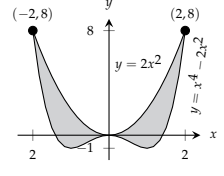
شکل 6.18



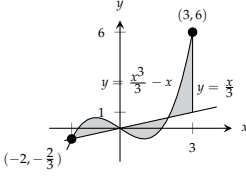
شکل 6.17



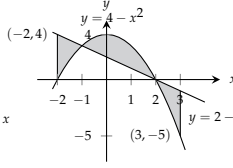
شکل 6.16



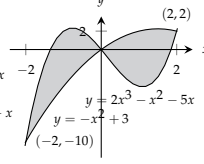
شکل 6.15



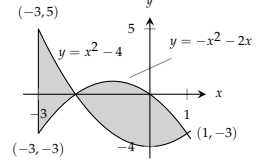
شکل 6.22



شکل 6.21



شکل 6.20



شکل 6.19

سوال 11: سایہ دار رقبہ شکل 6.21 جہاں سرحد  $y = 4 - x^2$ ،  $y = 2 - x$ ، اور  $x = 3$  ہیں۔

سوال 12: سایہ دار رقبہ شکل 6.22 جہاں سرحد  $y = \frac{x^3}{3} - x$ ،  $y = \frac{x}{3}$ ، اور  $x = 3$  ہیں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں محیط خطے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 13:  $y = x^2 - 2$ ،  $y = 2$

سوال 14:  $y = 2x - x^2$ ،  $y = -3$

سوال 15:  $y = x^4$ ،  $y = 8x$

سوال 16:  $y = x^2 - 2x$ ،  $y = x$

سوال 17:  $y = x^2$ ،  $y = -x^2 + 4x$

سوال 18:  $y = 7 - 2x^2$ ،  $y = x^2 + 4$

سوال 19:  $y = x^4 - 4x^2 + 4$ ،  $y = x^2$

سوال 20:  $y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0, \quad y = 0$

سوال 21:  $y = \sqrt{|x|}, \quad 5y = x + 6$  کتنے نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں؟

سوال 22:  $y = |x^2 - 4|, \quad y = \frac{x^2}{2} + 4$

سوال 23 تا سوال 30 میں دی گئی منحنیات اور کلیروں کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 23:  $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$

سوال 24:  $x = y^2, \quad x = y + 2$

سوال 25:  $y^2 - 4x = 4, \quad 4x - y = 16$

سوال 26:  $x - y^2 = 0, \quad x + 2y^2 = 3$

سوال 27:  $x + y^2 = 0, \quad x + 3y^2 = 2$

سوال 28:  $x - y^{2/3} = 0, \quad x + y^4 = 2$

سوال 29:  $x = y^2 - 1, \quad x = |y| \sqrt{1 - y^2}$

سوال 30:  $x = y^3 - y^2, \quad x = 2y$

سوال 31 تا سوال 34 میں محیط رقبہ تلاش کریں۔ رقبے کی سرحدی منحنیات اور کلیریں دی گئی ہیں۔

سوال 31:  $4x^2 + y = 4, \quad x^4 - y = 1$

سوال 32:  $x^3 - y = 0, \quad 3x^2 - y = 4$

سوال 33:  $x + 4y^2 = 4, \quad x + y^4 = 1, \quad x \geq 0$

سوال 34:  $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 0$

سوال 35 تا سوال 42 میں محیط رقبے کی سرحدی منحنيات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ رقبہ معلوم کریں۔

سوال 35:  $y = 2 \sin x$ ,  $y = \sin 2x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$

سوال 36:  $y = 8 \cos x$ ,  $y = \sec^2 x$ ,  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

سوال 37:  $y = \cos(\frac{\pi x}{2})$ ,  $y = 1 - x^2$

سوال 38:  $y = \sin(\frac{\pi x}{2})$ ,  $y = x$

سوال 39:  $y = \sec^2 x$ ,  $y = \tan^2 x$ ,  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$

سوال 40:  $x = \tan^2 y$ ,  $x = -\tan^2 y$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

سوال 41:  $x = 3 \sin y \sqrt{\cos y}$ ,  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

سوال 42:  $y = \sec^2(\frac{\pi x}{3})$ ,  $y = x^{1/3}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

سوال 43: ہوائی جہاز کے پتے کی طرح کا خط  $x - y^3 = 0$  اور  $x - y = 0$  گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 44: پتھا نما خط  $x - y^{1/3} = 0$  اور  $x - y^{1/5} = 0$  کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

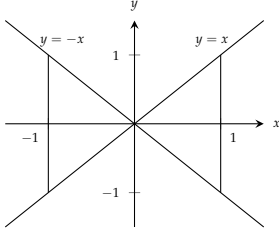
سوال 45: ربع اول میں لکیر  $y = x$ ، لکیر  $x = 2$ ، منحنی  $y = \frac{1}{x^2}$  اور  $x$  محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 46: ربع اول میں بائیں جانب  $y$  محور اور دائیں جانب منحنيات  $y = \sin x$  اور  $y = \cos x$  تکون نما خطہ گھیرتے ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

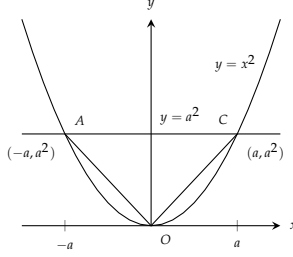
سوال 47: بالائی جانب لکیر  $y = 4$  اور نیچے سے قطع مکانی  $y = x^2$  میں محیط رقبہ کو افقی خط  $y = c$  دو برابر ذیلی خطوں میں تقسیم کرتا ہے۔

ا. خطے کا خاکہ کھینچیں اور اس پر افقی لکیر  $y = c$  اندازاً درست مقام پر بنائیں۔ قطع مکانی اور افقی لکیر جن نقطوں پر متقاطع ہیں، ان نقطوں کو  $c$  کی روپ میں دریافت کر کے خاکے پر دکھائیں۔

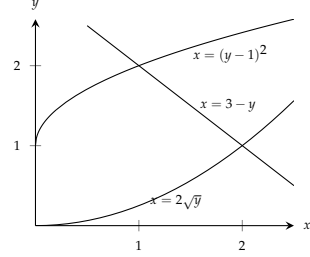
ب.  $y$  کے لحاظ سے مکمل لے کر  $c$  کی قیمت معلوم کریں۔ (مکمل کے حد میں  $c$  پایا جائے گا۔)



شکل 6.25: خطہ برائے سوال 53



شکل 6.24: خطہ برائے سوال 51



شکل 6.23: خطہ برائے سوال 50

ج.  $x$  کے لحاظ سے مکمل لے کر  $c$  کی قیمت معلوم کریں۔ (اس بار بھی مکمل کے حد میں  $c$  پایا جائے گا۔)

سوال 48: منحنی  $y = 3 - x^2$  اور لکیر  $y = -1$  کے قعہ رقبہ  $x$  کے لحاظ سے، (ب)  $y$  کے لحاظ سے مکمل لے کر معلوم کریں۔

سوال 49: ربع اول میں بائیں جانب  $y$  محور، نیچے لکیر  $y = \frac{x}{4}$ ، بالائی بائیں منحنی  $y = 1 + \sqrt{x}$  اور بالائی دائیں منحنی  $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$  ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں۔

سوال 50: ربع اول میں بائیں جانب  $y$  محور، نیچے لکیر  $x = 2\sqrt{y}$ ، بالائی بائیں منحنی  $x = (y-1)^2$  اور بالائی دائیں منحنی  $x = 3 - y$  ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں (شکل 6.23)۔

سوال 51: قطعہ مکانی  $y = x^2$  میں محصور ٹکون  $AOB$  شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ ٹکون کا بالائی ضلع لکیر  $y = a^2$  ہے۔ ٹکون اور قطعہ مکانی کے رقبوں کی نسبت کی حد  $a \rightarrow 0$  کر کے تلاش کریں۔

سوال 52: مثبت استمراری تفاعل  $f$  اور  $a \leq x \leq b$  پر  $x$  محور کے قعہ رقبہ 4 ہے۔ منحنی  $y = f(x)$  اور  $y = 2f(x)$  کے قعہ رقبہ  $x = a$  تا  $x = b$  رقبہ تلاش کریں۔

سوال 53: درج ذیل میں سے کونسا مکمل شکل 6.25 میں دکھایا گیا رقبہ دیتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$ا. \int_{-1}^1 (x - (-x)) dx = \int_{-1}^1 2x dx$$

$$ب. \int_{-1}^1 (-x - (x)) dx = \int_{-1}^1 -2x dx$$

سوال 54: کیا استمراری تقاطع  $y = f(x)$  اور  $y = g(x)$  اور انتضابی لکیروں  $x = a$  اور  $x = b$  جہاں  $a < b$  ہے کے بیچ رقبہ درج ذیل دیتا ہے؟ درست، کبھی کبھار درست یا کبھی نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

کمپیوٹر کا استعمال  
سوال 55 تا 58 میں مستوی میں منحنیات کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ جہاں منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کرنا دشوار ہو وہاں کمپیوٹر کا سہارا لیتے ہوئے درج ذیل اقدام سرانجام دیں۔

ا. منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے خطہ کی عمومی صورت دیکھیں اور نقاط تقاطع کی تعداد جانیں۔

ب. نقاط تقاطع کو اعدادی تراکیب سے تلاش کریں۔

ج. یک بعد دیگرے جوڑی نقاط تقاطع کے بیچ  $|f(x) - g(x)|$  کا عمل حل کریں۔

د. جزو-ج میں مکمل کی حاصل قیمتوں کا مجموعہ لیں۔

سوال 55:  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$ ,  $g(x) = x - 1$

سوال 56:  $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10$ ,  $g(x) = 8 - 12x$

سوال 57:  $f(x) = x + \sin(2x)$ ,  $g(x) = x^3$

سوال 58:  $f(x) = x^2 \cos x$ ,  $g(x) = x^3 - x$

## 6.2 ٹکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش

قوسی سرحد کے خطوط کے رقبہ عمودی تراش سے بیلی حجم معلوم کرنے کے لئے رقبہ عمودی تراش کو بیلین کے قد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرز کے بیلین حجم سے دیگر اشکال کے خطوط کا حجم تلاش کیا جاسکتا ہے۔

## نکلیاں

فرض کریں ہم شکل میں دکھائے گئے ٹھوس جسم کا حجم دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ بند وقفہ  $[a, b]$  کے ہر نقطہ  $x$  پر جسم کا عمودی تراش خطہ  $R(x)$  ہے جس کا رقبہ  $S(x)$  ہے۔ یوں  $S$  متغیر  $x$  کا حقیقی قیمت تفاعل ہو گا جو  $x$  کا استمراری تفاعل بھی ہو گا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے جسم کے حجم کی تعریف پیش کی جاسکتی ہے جس کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

ہم  $x$  محور کے لحاظ سے وقفہ  $[a, b]$  کی خانہ بندی کر کے جسم کو خانہ بند نقطوں پر  $x$  محور کے عمودی، سطحوں سے مولیٰ کی طرح چٹا ٹکڑے کرتے ہوئے جسم کی نکلیاں بناتے ہیں۔ یوں نقطہ  $x_{k-1}$  اور  $x_k$  پر سطحوں کے چٹے  $k$  ویں ٹکڑے کا حجم تقریباً اس ٹیلن جتنا ہو گا جو ان سطحوں کے چٹے پایا جاتا ہے اور جس کا عمودی تراش خطہ  $R(x_k)$  ہے۔ اس ٹیلن کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H_k &= \text{قد} \times \text{رقبہ قاعدہ} \\ &= S(x_k) \times (x_k \text{ اور } x_{k-1} \text{ کے چٹے فاصلہ}) \\ &= S(x_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

اس طرح تمام چھوٹے ٹیلنوں کے حجم کا مجموعہ تخمیناً ٹھوس جسم کے حجم کے برابر ہو گا:

$$\sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x_k$$

یہ وقفہ  $[a, b]$  پر تفاعل  $S(x)$  کا رییمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے  $[a, b]$  کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچے ویسے ویسے یہ مجموعے اصل حجم کی بہتر سے بہتر عکاسی کریں گے۔ یوں ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف ان مجموعوں کا تحدیدی مکمل ہو گا۔

تعریف: ایسا ٹھوس جسم جس کا رقبہ عمودی تراش  $S(x)$  قابل مکمل تفاعل ہو، کا  $x = a$  سے  $x = b$  تک حجم  $\int_a^b S(x) dx$  ہے۔

$$(6.3) \quad H = \int_a^b S(x) dx$$

□

مساوات 6.3 استعمال کرنے کے لئے درج ذیل تین اقدام کرنے ہوں گے۔

ٹھوس جسم کی ٹکیوں سے حجم کی تلاش

1. ٹھوس جسم اور اس کے نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ کھینچیں۔



2. رقبہ عمودی تراش  $S(x)$  کا کلیہ اخذ کریں۔

3. مکمل کا زیریں اور بالائی حد تلاش کریں۔

4. حجم معلوم کرنے کی خاطر  $S(x)$  کا مکمل حل کریں۔

مثال 6.6: ایک اہرام کا قد  $3\text{ m}$  اور اس کے چکور بنیاد کا ضلع  $3\text{ m}$  ہے۔ اہرام کی چوٹی سے  $x$  میٹر نیچے اہرام کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا جس کا ضلع  $x$  میٹر ہو گا۔ اس اہرام کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم اہرام کی چوٹی کو مبدا پر رکھ کر اہرام کو  $x$  محور پر لیٹا ہوا بنا کر نمائندہ رقبہ عمودی تراش بناتے ہیں۔  
دوسرا قدم: کلیہ برائے  $S(x)$ ۔ چونکہ چکور رقبہ عمودی تراش کا ضلع  $x$  میٹر ہے لہذا اس کا رقبہ عمودی تراش  $S(x) = x^2$  ہو گا۔  
تیسرا قدم: مکمل کے حد۔ چکور  $x = 0$  تا  $x = 3$  پائے جاتے ہیں لہذا  $a = 0$  اور  $b = 3$  ہوں گے۔  
چوتھا قدم: حجم۔

$$H = \int_a^b S(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 9$$

□

یوں اہرام کا حجم  $9\text{ m}^3$  ہو گا۔

مثال 6.7: رداس 3 کے بیلن کو دو مستوی سے کاٹ کر قوسی بچر بنایا جاتا ہے۔ ایک مستوی بیلن کے محور کا عمودی ہے جبکہ دوسرا مستوی پہلے مستوی کو بیلن کے وسط پر  $45^\circ$  سے قطع کرتا ہے۔ بچر کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم بچر اور نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ بناتے ہیں۔ عمودی تراش  $x$  محور کے عمودی ہے۔  
دوسرا قدم: کلیہ برائے  $S(x)$ ۔ نقطہ  $x$  پر مستطیل عمودی تراش کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = (\text{چوڑائی})(\text{قد}) = (x)(2\sqrt{9-x^2}) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

تیسرا قدم: مکمل کے حد۔ مستطیل  $x = 0$  تا  $x = 3$  پائے جاتے ہیں۔  
چوتھا قدم: حجم۔ درج ذیل میں  $u = 9 - x^2$  لہذا  $du = -2x dx$  لے کر مکمل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b S(x) dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx \\ &= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} \Big|_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

□

مثال 6.8: مسئلہ کو الٹے<sup>1</sup> محور  $x$  پر پڑے ہوئے ایسے دو اجسام جن کا ہر  $x$  پر رقبہ عمودی تراش ایک دوسرے جیسا ہو گا جسم بھی ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ یہ حقیقت مساوات 6.3 سے صاف ظاہر ہے چونکہ دونوں اجسام کا رقبہ عمودی تراش متقابل  $S(x)$  ایک دوسرے جیسا ہے۔

□

### سوالات

رقبہ عمودی تراش  
سوال 1 اور سوال 2 میں  $x$  محور کے عمودی ٹھوس جسم کے رقبہ عمودی تراش  $S(x)$  کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 1: ایک ٹھوس جسم  $x = -1$  اور  $x = 1$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔  $x$  محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش نصف دائرہ  $y = -\sqrt{1-x^2}$  اور نصف دائرہ  $y = \sqrt{1-x^2}$  کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر  $xy$  مستوی میں ہیں۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے  $xy$  مستوی میں ہیں۔

ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر  $xy$  مستوی میں ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے  $\sqrt{2}$  گنا ہوتی ہے۔

د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے  $xy$  مستوی میں ہیں۔

سوال 2: ایک ٹھوس جسم  $x = 0$  اور  $x = 4$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔  $x$  محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش، قطع مکانی  $y = -\sqrt{x}$  اور قطع مکانی  $y = \sqrt{x}$  کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر  $xy$  مستوی میں ہیں۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے  $xy$  مستوی میں ہیں۔

ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر  $xy$  مستوی میں ہیں۔

د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے  $xy$  مستوی میں ہیں۔

<sup>1</sup> اطالوی ریاضی دان بنیادینور کو الٹے [1598-1647]

ٹکسوں سے حجم کی تلاش

سوال 3 تا سوال 12 میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 3: ایک ٹھوس جسم  $x = 0$  اور  $x = 4$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش کی صورت چکور ہے جو  $x$  محور کے عمودی ہیں اور جن کے وتر قطع مکانی  $y = -\sqrt{x}$  سے قطع مکانی  $y = \sqrt{x}$  تک ہیں۔

سوال 4: ایک ٹھوس جسم  $x = -1$  اور  $x = 1$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش  $x$  محور کے عمودی ہیں جن کے قطر دائری اقراص ہیں جو قطع مکانی  $y = x^2$  سے قطع مکانی  $y = 2 - x^2$  تک ہیں۔

سوال 5: ایک ٹھوس جسم  $x = -1$  اور  $x = 1$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش  $x$  محور کے عمودی ہیں جن کے قاعدہ کے کنارے نصف دائرہ  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  سے نصف دائرہ  $y = \sqrt{1 - x^2}$  تک ہیں۔

سوال 6: ایک ٹھوس جسم  $x = -1$  اور  $x = 1$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش  $x$  محور کے عمودی ہیں جن کے وتر نصف دائرہ  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  سے نصف دائرہ  $y = \sqrt{1 - x^2}$  تک ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے  $\sqrt{2}$  گنا ہوتی ہے۔

سوال 7: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ منحنی  $y = 2\sqrt{\sin x}$  اور  $x$  محور پر وقفہ  $[0, \pi]$  کے بیچ پایا جاتا ہے۔  $x$  محور کے عمودی عمودی تراش درج ذیل ہیں۔

ا. مساوی الاضلاع مثلث جن کے قاعدے  $x$  محور سے منحنی تک ہیں۔

ب. انتصابی چکور جن کے قاعدے  $x$  محور سے منحنی تک ہیں۔

سوال 8: ایک ٹھوس جسم  $x = -\frac{\pi}{3}$  اور  $x = \frac{\pi}{3}$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش  $x$  محور کے عمودی ہیں جن کی خواص درج ذیل ہیں۔

ا. دائری اقراص جن کے قطر  $y = \tan x$  سے  $y = \sec x$  تک ہیں۔

ب. انتصابی چکور جن کے قاعدے  $y = \tan x$  سے  $y = \sec x$  تک ہیں۔

سوال 9: ایک ٹھوس جسم  $y = 0$  اور  $y = 2$  پر  $y$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے دائری عمودی تراش  $y$  محور کے عمودی ہیں جن کے قطر  $y$  محور سے قطع مکانی  $x = \sqrt{5}y^2$  تک ہیں۔

سوال 10: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ قرص  $x^2 + y^2 \leq 1$  ہے۔ عمودی تراش  $y = -1$  اور  $y = 1$  کے بیچ  $y$  محور کے عمودی ہیں جو مساوی الساقین مثلث ہیں جن کا ایک ضلع قرص میں پایا جاتا ہے۔

مسئلہ کوالتیرے

سوال 11: بلدار ٹھوس جسم

ایک چکور جس کا ضلع  $s$  ہے کلیر  $L$  کے عمودی مستوی میں پایا جاتا ہے۔ چکور کا ایک راس  $L$  پر پایا جاتا ہے۔ یہ چکور  $L$  پر  $h$  فاصلہ طے کرتے ہوئے ایک چکر کاٹ کر بیچ نما جسم دیتا ہے جس کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا۔

ا. اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

ب. اگر چکور ایک کی بجائے دو بار چکر کاغذاتب حجم کتنا ہوتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12: ایک ٹھوس جسم  $x = 01$  اور  $x = 12$  پر  $x$  محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش  $x$  محور کے عمودی ہیں جن کے قطر لکیر  $y = \frac{x}{2}$  سے لکیر  $y = x$  تک ہیں۔ اس جسم کا حجم کیوں اس قائمہ مخروط جتنا ہو گا جس کا قد 12 اور جس کے قاعدہ کا رداس 3 ہو؟

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

