

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ ہیکوئیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ ہیکوئیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصوص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 ہیکوئیاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لاقتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کا حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1079	9.3 لاقتناہی تسلسل	

1085	ا ضمیمہ اول	
1087	ب ضمیمہ دوم	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

9.3 لامتناہی تسلسل

سائنس اور ریاضیات میں تفاعل کو عموماً درج ذیل صورت کی لامتناہی کثیر رکنی کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

x کی کسی بھی جائز قیمت کے لئے ہم لامتناہی تعداد کے مستقلوں کا مجموعہ، جس کو لامتناہی تسلسل کہا جاتا ہے، لے کر کثیر رکنی کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ اس حصہ اور اگلے چار حصوں میں ہم لامتناہی تسلسل سے واقف ہونے کی کوشش کرتے ہیں۔

تسلسل اور جزوی مجموعے

ہم پوچھتے ہیں کہ درج ذیل فقرے کا کیا مطلب ہے؟

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

چونکہ ہم لامتناہی مستقلوں کو کبھی بھی جمع نہیں کر سکتے ہیں لہذا ہم پہلی جزو سے شروع کر کے بتدریج ایک ایک جزو ساتھ جمع کر کے جزوی مجموعہ میں کسی نقش کو پہچاننے کی کوشش کرتے ہیں۔ انہیں جدول 9.4 میں دکھایا گیا ہے جن میں یقیناً ایک نقش پایا جاتا ہے۔ جزوی مجموعوں کی ترتیب کا n واں جزو درج ذیل ہے۔

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

چونکہ $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2^n) = 0$ ہے لہذا اس ترتیب کا حد 2 ہے۔ یوں درج ذیل لامتناہی تسلسل کا مجموعہ 2 ہو گا۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

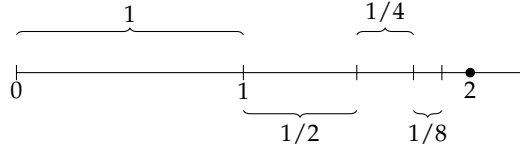
کیا اس تسلسل کے کسی بھی متناہی تعداد کے اجزاء کا مجموعہ 2 ہو گا؟ نہیں۔ کیا ہم لامتناہی تعداد کے مستقل کو ایک ایک کر کے جمع کر سکتے ہیں؟ نہیں۔ اس کے باوجود ہم تسلسل کے حد کی تعریف کو $n \rightarrow \infty$ پر تسلسل کے جزوی مجموعے کا حد لے سکتے ہیں جو مذکورہ بالا تسلسل کے لئے 2 ہو گا (شکل 9.15)۔ ترتیب اور تسلسل کا علم ہمیں متناہی مجموعوں کی قید سے آزاد کرتا ہے۔

تعریف: دیے گئے اعداد کی ترتیب $\{a_n\}$ کی صورت میں درج ذیل صورت کا فقرہ لامتناہی تسلسل²⁴ کہلاتا ہے۔

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

جدول 9.4: تقاض کے جزوی مجموعے۔

جزوی مجموعہ	قیمت
پہلا:	$s_1 = 1$
دوسرا:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$
تیسرا:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
\vdots	
n واں:	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$



شکل 9.15: جیسے جیسے لمبائیاں 1، 1/2، 1/4، 1/8، ... جمع کی جائیں، مجموعہ 2 کے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔

عدد a_n کو اس تسلسل کا n واں جزو²⁵ کہتے ہیں۔ ترتیب $\{s_n\}$ جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\vdots$$

کو اس تسلسل کے جزوی مجموعوں کی ترتیب کہتے ہیں اور s_n کو n واں جزوی مجموعہ کہتے ہیں۔ اگر جزوی مجموعوں کی ترتیب L پر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ تسلسل مرکوز ہے اور اس کا مجموعہ L ہے۔ ایسی صورت میں ہم درج ذیل بھی لکھتے ہیں۔

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$$

اگر تسلسل کے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرکوز نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل منفرج ہے۔

□

تسلسل $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ پر غور کرنے سے پہلے ضروری نہیں کہ ہمیں معلوم ہو کہ آیا یہ تسلسل مرکب یا منفرد ہے۔ بہر حال اس تسلسل کو درج ذیل صورت میں لکھنا مفید ہوتا ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum a_n \quad (\text{مجموعہ } 1 \text{ تا } \infty \text{ ہوگا})$$

ہندسی تسلسل

درج ذیل صورت کے تسلسل کو ہندسی تسلسل²⁶ کہتے ہیں جہاں a اور r مقررہ حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔

$$(9.7) \quad a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

درج ذیل میں نسبت r مثبت ہے

$$a + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

جبکہ درج ذیل میں r منفی ہے۔

$$a - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$$

اگر $r = 1$ ہو تب مساوات 9.7 کا n واں جزوی مجموعہ

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \dots + a(1)^{n-1} = na$$

ہوگا جو $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm \infty$ کی بنا منفرد ہے جہاں علامت، a کی علامت پر منحصر ہوگی۔ اگر $r = -1$ ہو تب تسلسل کے جزوی مجموعے ایک بعد دیگرے a اور 0 ہوں گے لہذا تسلسل منفرد ہوگا۔ اگر $|r| \neq 1$ تب تسلسل کا ارتکاز یا انفرج درج ذیل طریقہ سے جاننا ممکن ہوگا۔

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (r \neq 1)$$

s_n کو r سے ضرب دیں

s_n سے rs_n منفی کریں

تجزی

$r \neq 1$ کی صورت میں s_n کا حل

اگر $|r| < 1$ ہو تب $n \rightarrow \infty$ سے $r^n \rightarrow 0$ (حصہ 9.2) لہذا $s_n = \frac{a}{1-r}$ ہوں گے۔ اس کے برعکس $|r| > 1$ کی صورت میں $|r^n| \rightarrow \infty$ کی بنا تسلسل منفرج ہو گا۔

یوں $|r| < 1$ کی صورت میں ہندی تسلسل $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ عدد $\frac{a}{1-r}$ پر مرکوز ہو گا:

$$(9.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1$$

$|r| > 1$ کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔

مثال 9.17: درج ذیل ہندی تسلسل میں $a = \frac{1}{9}$ اور $r = \frac{1}{3}$ ہیں۔

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1 - (1/3)} = \frac{1}{6}$$

□

مثال 9.18: درج ذیل ہندی تسلسل میں $a = -\frac{5}{4}$ اور $r = -\frac{1}{4}$ ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \dots$$

یہ ہندی تسلسل -1 پر مرکوز ہے۔

$$\frac{a}{1-r} = \frac{-5/4}{1 + (1/4)} = -1$$

□

مثال 9.19: آپ ایک گیند کو افقی سطح پر a میٹر بلندی سے گراتے ہیں۔ یہ گیند h بلندی سے گر کر rh بلندی تک اچھلتا ہے جہاں r مثبت اور 1 سے کم ہے۔ یہ گیند اوپر اور نیچے سفر کرتے ہوئے کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

حل: کل فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \dots}_{2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a \frac{1+r}{1-r}$$

یوں $a = 6 \text{ m}$ اور $r = \frac{2}{3}$ کی صورت میں طے شدہ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$s = 6 \frac{1 + (2/3)}{1 - (2/3)} = 6 \left(\frac{5/3}{1/3} \right) = 30 \text{ m}$$

□

مثال 9.20: دہرائے اعشاری
دہرائے اعشاری $5.23\ 23\ 23\ \dots$ کو دو عدد صحیح کا نسبت لکھیں۔

حل:

$$\begin{aligned} 5.23\ 23\ 23\ \dots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \dots \\ &= 5 + \frac{23}{100} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \dots \right)}_{1/(1-0.01)} \quad a = 1, r = \frac{1}{100} \\ &= 5 + \frac{23}{100} \left(\frac{1}{0.99} \right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \end{aligned}$$

□

دور بینی تسلسل

مرکز بندی تسلسل کے مجموعہ کے کلیہ کی طرح تسلسل کے مجموعوں کے کلیات بہت کم پائے جاتے ہیں لہذا ہمیں تسلسل کے مجموعہ کی اندازاً قیمت پر گزارا کرنا ہو گا۔ البتہ اگلی مثال میں بھی ایسا تسلسل دیا گیا ہے جس کا بالکل ٹھیک مجموعہ تلاش کیا جاسکتا ہے۔

مثال 9.21: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ کا مجموعہ تلاش کریں۔

حل: جزوی مجموعوں کی ترتیب میں ایسا نقش دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں جس سے s_n کا کلیہ اخذ کیا جاسکتا ہو۔ ہم جزوی کسر

$$(9.9) \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

استعمال کر کے جزوی مجموعہ

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

کو

$$(9.10) \quad s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

لکھتے ہیں۔ توسین کھول کر یکساں اجزاء کاٹ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.11) \quad s_n = 1 - \frac{1}{k+1}$$

اب $k \rightarrow \infty$ سے $s_k \rightarrow 1$ حاصل ہو گا۔ یہ تسلسل منفرد ہے اور اس کا مجموعہ 1 ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

□

منفرد تسلسل

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

