احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

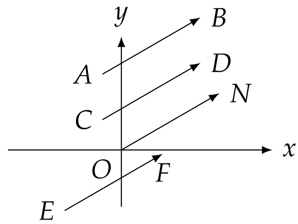
اس حصہ میں سمتیات اور سہ بعدی محددی نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محددی مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محددی خلاء موزوں ہے۔ ہم محددی مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محددی خلاء پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور xy مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

11.1 مستوی میں سمتیات

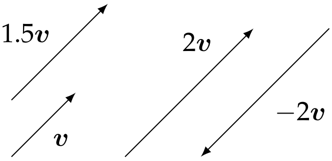
بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاو، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہو گی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہو گا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہو گا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہو گا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر دار لکیروں کو ہم سمت بند خطوط تصور کرتے اور سمتیات کہتے ہیں۔



شکل 11.1: یکساں لمبائی اور یکساں رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 11.2: سمتیہ کے غیر سمتی مضرب۔

تعریف : ایک مستوی میں سمت بند خط کو سمتیہ[1] کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً $\boldsymbol{v}$ ، سے ظاہر کیا جائے گا[2]۔نقطہ A سے نقطہ B تک تیر کو ہم $\overrightarrow{AB}$ لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل 11.1 میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{EF}$$

□

غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل 11.2)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی % 50 بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

[1] vector

[2] قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان $\vec{v}$ یا نصف تیر کا نشان $\overset{\rightharpoonup}{v}$ ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔)

اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب مثبت c کی صورت میں $\boldsymbol{v}$ اور $c\boldsymbol{v}$ کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی c کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی[3] کہلاتے ہیں جبکہ $c\boldsymbol{v}$ کے مضرب کو $\boldsymbol{v}$ کا غیر سمتی مضرب[4] کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ حاصل ہو گا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر $\boldsymbol{v}_1$ کا نمائندہ، مثلاً A سے B تک، ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_1$ کے اختتامی نقطہ (سر) B پر $\boldsymbol{v}_2$ کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل 11.3 میں $\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{BC}$ ہے۔ مجموعہ $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ اب $\boldsymbol{v}_1$ کے دم A سے $\boldsymbol{v}_2$ کے سر C تک سمتیہ ہو گا۔ یوں اگر

$$\boldsymbol{v}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{BC}$$

ہوں تب

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہٰذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع[5] کہتے ہیں (شکل 11.4)۔

اجزاء

دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

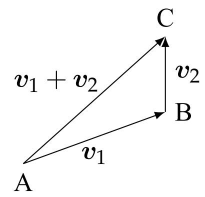
جب بھی ایک سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

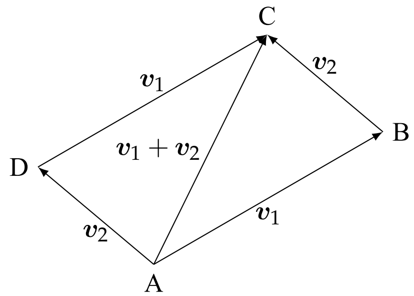
لکھنا ممکن ہو، سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کے اجزاء $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ میں تحلیل کیا گیا ہے۔

---

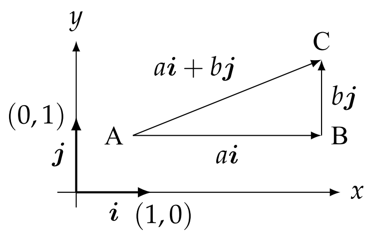
[3] scalar
[4] scalar multiple
[5] parallelogram law



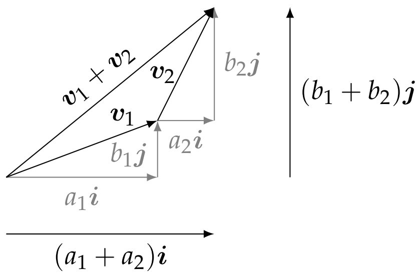
شکل 11.3: سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کا مجموعہ۔



شکل 11.4: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع یکساں لمبائی ہونے کی بنا $ABCD$ متوازی الاضلاع ہو گا۔



شکل 11.5: اساس سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کو استعمال کر کے کسی بھی سمتیہ $\overrightarrow{AC}$ کو لکھا جا سکتا ہے۔



شکل 11.6: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں اساسی[6] سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت x محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(1,0)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{i}$ ہے۔ مثبت y محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(0,1)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{j}$ ہے۔ اب غیر سمتی a کے لئے محور x کے متوازی سمتیہ $a\boldsymbol{i}$ کی لمبائی $|a|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $a>0$ کے لئے دایاں اور $a<0$ کے لئے بایاں ہو گا۔ اس طرح غیر سمتی b کے لئے محور y کے متوازی سمتیہ $b\boldsymbol{j}$ کی لمبائی $|b|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $b>0$ کے لئے اوپر اور $b<0$ کے لئے نیچے ہو گا۔ شکل 11.5 میں سمتیہ $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AC}$ کو اجزاء $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$$

تعریف: اگر $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ ہو تب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء سمتیات $a\boldsymbol{i}$ اور $b\boldsymbol{j}$ ہوں گے۔ اعداد a اور b، اساسی سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

[6]basic

□

تعریف : سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$ai + bj = a'i + b'j \quad \Leftrightarrow \quad a = a', \quad b = b' \tag{11.1}$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب i اور j کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 11.6)۔

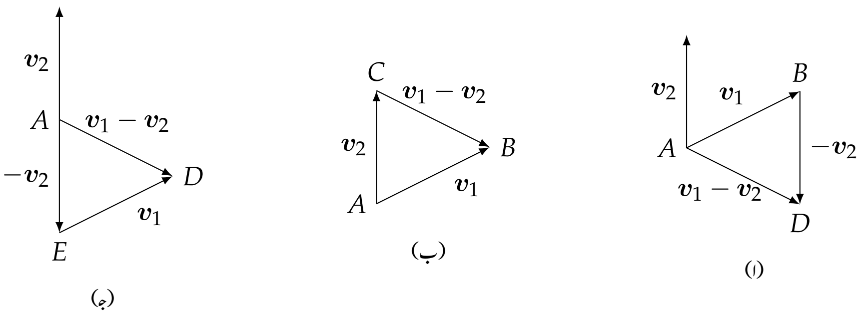
اگر $v_1 = a_1 i + b_1 j$ اور $v_2 = a_2 i + b_2 j$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j$$

مثال 11.2:

$$(2i - 4j) + (5i + 3j) = (2 + 5)i + (-4 + 3)j = 7i - j$$

□



شکل 11.7: سمتیہ $v_1 - v_2$ کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔

تفریق

ایک سمتیہ v کا منفی سمتیہ $v(-1) = -v$ ہو گا۔ اس کی لمبائی v کی لمبائی ہو گی البتہ اس کا رخ v کا مخالف ہو گا۔ سمتیہ v_2 کو سمتیہ v_1 سے منفی کرنے کی خاطر ہم $-v_2$ اور v_1 کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم v_1 کے سر سے $-v_2$ کھینچ کر v_1 کے دم سے $-v_2$ کے سر تک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل 11.7-ا میں دکھایا گیا ہے جہاں

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = v_1 + (-v_2) = v_1 - v_2$$

اس کے علاوہ v_1 اور v_2 کے دم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر v_1 اور v_2 ترسیم کر کے v_2 کے سر سے v_1 کے سر تک سمتیہ $v_1 - v_2$ ہو گا۔ یہ عمل شکل 11.7-ب میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -v_2 + v_1 = v_1 - v_2$$

مزید، $-v_2$ کے سر سے v_1 ترسیم کر کے $v_1 - v_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 11.7-ج)۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

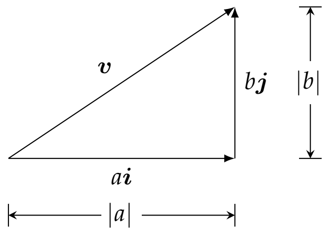
$$v_1 - v_2 = (a_1 - a_2)i + (b_1 - b_2)j \tag{11.2}$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

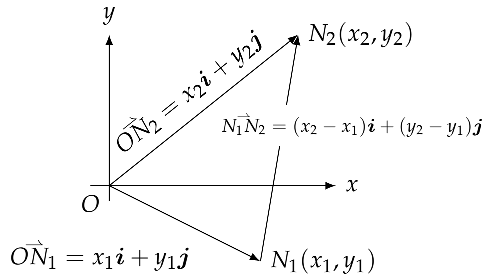
مثال 11.3:

$$(6i + 2j) - (3i - 5j) = (6 - 3)i + (2 - (-5))j = 3i + 7j$$

□



شکل 11.9: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جا سکتی ہے۔



شکل 11.8

ہم نقطہ $N_1(x_1,y_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2,y_2)$ تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $\overrightarrow{ON_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$ کے اجزاء کو $\overrightarrow{ON_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$ کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔

$N_1(x_1,y_1)$ سے $N_2(x_2,y_2)$ تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\overrightarrow{N_1N_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j} \tag{11.3}$$

مثال 11.4: نقطہ $N_1(3,4)$ سے نقطہ $N_2(5,1)$ تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\overrightarrow{N_1N_2}=(5-3)\boldsymbol{i}+(1-4)\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$$

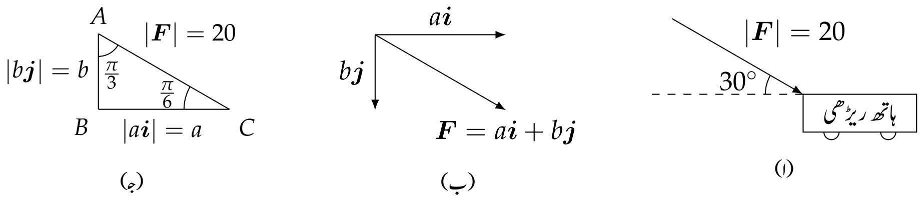
□

مقدار

سمتیہ $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ کی لمبائی[7] یا مقدار[8] $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے (شکل 11.9)۔ سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ میں دو انتصابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j} \qquad |\boldsymbol{v}|=\sqrt{a^2+b^2} \tag{11.4}$$

[7] length
[8] magnitude



شکل 11.10: ہاتھ ریڑھی (مثال 11.5)

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ $30°$ زاویہ پر $20\,\mathrm{N}$ کی قوت $\boldsymbol{F}$ سے ہاتھ ریڑھی کو دھکا لگاتے ہیں (شکل 11.10-ا)۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتصابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتصابی جزو معلوم کریں۔

حل: ہم قوت $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ اور اس کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں (شکل 11.10-ب اور شکل 11.10-ج)۔ اس مثلث سے $a = 10\sqrt{3}$ اور $b = 10$ حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو $10\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ اور انتصابی جزو $-10\boldsymbol{j}$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{F} = 10\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$ ہو گا۔ انتصابی جزو کا رخ نیچے ہے لہٰذا یہ منفی ہے۔ □

غیر سمتی ضرب

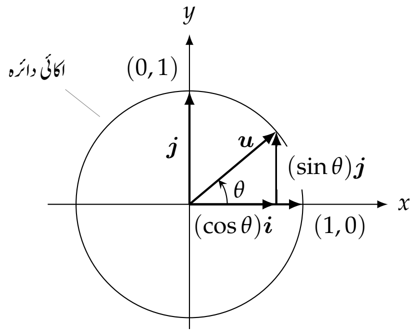
غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$c\boldsymbol{v} = c(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) = (ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j} \tag{11.5}$$

سمتیہ $c\boldsymbol{v}$ کی لمبائی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ضرب $|c|$ ہو گا:

$$\begin{aligned}
|c\boldsymbol{v}| &= \left|(ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j}\right| \\
&= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\
&= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)} \\
&= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\
&= |c||\boldsymbol{v}|
\end{aligned}$$

یوں اگر c غیر سمتی ہو اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب $|c\boldsymbol{v}| = |c||\boldsymbol{v}|$ ہو گا۔



شکل 11.11: مستوی میں ہر اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 11.6: اگر $c = -2$ اور $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}| &= |-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\
|-2\boldsymbol{v}| &= \left|(-2)(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\right| = |6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\
&= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||\boldsymbol{v}|
\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کو ظاہر کرنے کے لئے 0 کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔ صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

$$|a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

اکائی سمتیات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو اکائی سمتیہ[9] کہلائے گا۔ سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اکائی سمتیات ہیں۔

$$|\boldsymbol{i}| = |1\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}| = \sqrt{1^2+0^2} = 1, \quad |\boldsymbol{j}| = |0\boldsymbol{i}+1\boldsymbol{j}| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ جو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل 11.11)۔

$$\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} \tag{11.6}$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی للذا $\boldsymbol{u}$ بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا 2π کرنے سے $\boldsymbol{u}$ کا سر N مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2+y^2=1$ پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

لمبائی اور رخ

اگر $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

$$\left|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\boldsymbol{v}| = 1$$

ہو گا للذا $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\boldsymbol{v}$ کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\tfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$$

یوں اگر $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

ا. $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ کو $\boldsymbol{v}$ کو رخ کہتے ہیں۔

---

[9] unit vector

ب. مساوات $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

حل:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \boldsymbol{v} \text{ کی لمبائی}$$
$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v} \text{ کا رخ}$$
$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}}\underbrace{\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right)}_{\text{رخ}}$$

□

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں $a \neq 0$ کی صورت میں سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کا ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گا (شکل 11.12)۔

کسی نقطہ پر ایک منحنی کو ایک سمتیہ تب مماسی[10] یا عمودی[11] ہو گا جب اس نقطہ پر منحنی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال 11.8: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

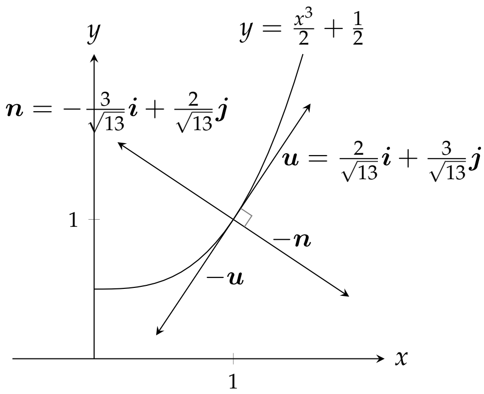
حل: ہم نقطہ $(1,0)$ پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل 11.13)۔

اس نقطہ پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

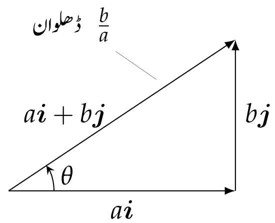
$$y' = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

---

[10] tangent
[11] normal



شکل 11.13: ایک نقطہ پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیہ (مثال 11.8)



شکل 11.12: اگر $a \neq 0$ ہو تب سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کی ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گی۔

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کی ڈھلوان $\frac{3}{2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی 1 ہو ہم $\boldsymbol{v}$ کو

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

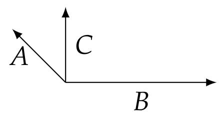
سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کی لمبائی 1 ہے اور یہ $(1, 1)$ پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-\boldsymbol{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

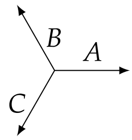
جو مخالف رخ ہے بھی $(1, 1)$ پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جا سکتی ہے۔

نقطہ $(1, 1)$ پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان $\boldsymbol{u}$ کی ڈھلوان کے بالعکس تناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم $\boldsymbol{u}$ کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

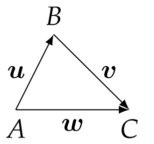
$$\boldsymbol{n} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}, \qquad -\boldsymbol{n} = \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$



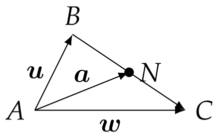
شکل 11.14



شکل 11.15



شکل 11.16



شکل 11.17

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں $(1,1)$ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ □

سوالات

جیومیٹری اور حساب

سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ د. $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$

جوابات: شکل 11.18

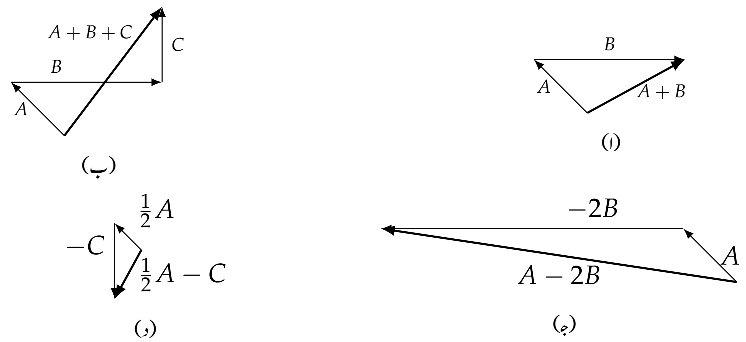
سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل 11.15 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $2\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}$ د. $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$

سوال 3 تا سوال 6 میں $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C}=\sqrt{3}\boldsymbol{i}-\pi\boldsymbol{j}$ لیں۔ نتائج کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 3: $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$
جواب: $4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$

سوال 4: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$



شکل 11.18

سوال 5: $3\boldsymbol{A}-\frac{1}{\pi}\boldsymbol{C}$
جواب: $(6-\frac{\sqrt{3}}{\pi})\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}$

سوال 6: $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+32\boldsymbol{j}$

سوال 7: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں (شکل 11.16)۔

ا. $\boldsymbol{w}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. $\boldsymbol{v}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

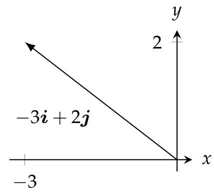
جواب: (ا) $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (ب) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$

سوال 8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے (شکل 11.17)۔ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

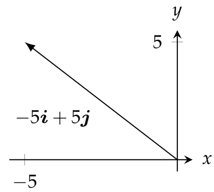
سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیہ کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔ محددی سطح پر مبدا سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

سوال 9: نقاط $N_1(5,7)$ اور $N_2(2,9)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.19

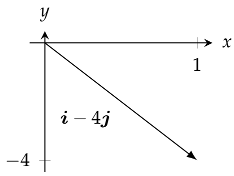
سوال 10: نقاط $N_1(1,2)$ اور $N_2(-3,5)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔



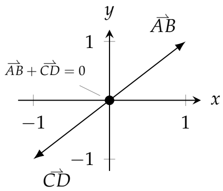
شکل 11.19



شکل 11.20



شکل 11.21



شکل 11.22

سوال 11: نقاط $A(-5,3)$ اور $B(-10,8)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.20

سوال 12: نقاط $A(-7,-8)$ اور $B(6,11)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔

سوال 13: نقاط $N_1(1,3)$ اور $N_2(2,-1)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.21

سوال 14: نقاط $N_3(1,3)$ اور N_4 کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_3N_4}$ تلاش کریں جہاں $N_1(2,-1)$ اور $N_2(-4,3)$ کو ملانے والے قطع کا وسطی نقطہ N_4 ہے۔

سوال 15: نقاط $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ اور $D(-2,2)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیات $\overrightarrow{CD}$ اور $\overrightarrow{AB}$ کا مجموعہ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.22

سوال 16: نقطہ A سے مبدا تک سمتیہ، جہاں $\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ اور $B(-2,5)$ ہیں۔

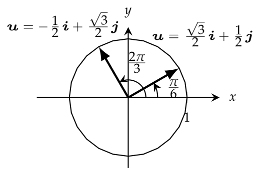
سوال 17: سمتیہ $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $A(2,9)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ B تلاش کریں۔
جواب: $(5,8)$

سوال 18: سمتیہ $\overrightarrow{NQ}=-6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $Q(3,3)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ N تلاش کریں۔

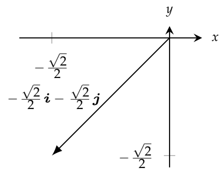
اکائی سمتیات

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

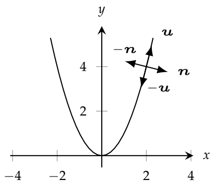
سوال 19: زاویہ $\theta=\frac{\pi}{6}$ اور $\theta=\frac{2\pi}{3}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}=(\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔
جواب: شکل 11.23



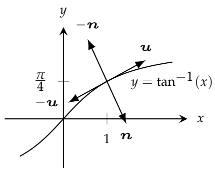
شکل 11.23



شکل 11.24



شکل 11.25



شکل 11.26

سوال 20: زاویہ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ اور $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 21: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔
جواب: شکل 11.24

سوال 22: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال 23 اور سوال 24 میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ اسی رخ تلاش کریں۔

سوال 23: $6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$
جواب: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

سوال 24: $-\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور اکائی سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہو گی۔)

سوال 25: $y = x^2, \quad (2, 4)$
جواب: $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j}, \quad -\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} - \frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j},$
$\boldsymbol{n} = \frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j}, \quad -\boldsymbol{n} = -\frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j}$ شکل 11.25

سوال 26: $x^2 + 2y^2 = 6, \quad (2, 1)$

سوال 27: $y = \tan^{-1} x, \quad (1, \frac{\pi}{4})$
جواب: $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}), \quad -\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}),$
$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}), \quad -\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}),$ شکل 11.26

سوال 28: $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad (0,1)$

سوال 29 تا سوال 32 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

سوال 29: $3x^2+8xy+2y^2-3=0,\quad (1,0)$
جواب: $\boldsymbol{u}=\pm\frac{1}{5}(-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}),\quad \boldsymbol{v}=\pm\frac{1}{5}(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})$

سوال 30: $x^2-6xy+8y^2-2x-1=0,\quad (1,1)$

سوال 31: $y=\int_0^x\sqrt{3+t^4}\,\mathrm{d}t,\quad (0,0)$
جواب: $\boldsymbol{u}=\pm\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}),\quad \boldsymbol{v}=\pm\frac{1}{2}(-\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

سوال 32: $y=\int_e^x\ln(\ln t)\,\mathrm{d}t,\quad (e,0)$

لمبائی اور رخ

سوال 33 اور سوال 34 میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 33: $5\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$
جواب: $13(\frac{5}{13}\boldsymbol{i}+\frac{12}{13}\boldsymbol{j})$

سوال 34: $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$

سوال 35: سمتیہ $3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔
جواب: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j},\quad -\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

سوال 36: سمتیہ $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 2 ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں؟

سوال 37: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+6$ اور $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

سوال 38: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+6$ اور $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ کے رخ ایک دوسرے جیسے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: آپ ایک ریڑھی کو قوت $\boldsymbol{F}$ سے کھینچ رہے ہیں جس کی مقدار $|\boldsymbol{F}|=10\,\mathrm{N}$ ہے۔زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ

30° ہے۔ اس قوت کے x اور y اجزاء تلاش کریں۔
جواب: $5\sqrt{3}\boldsymbol{i}, \quad 5\boldsymbol{j}$

سوال 40: پتنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ 45° زاویہ پر $5\,\mathrm{N}$ قوت سے کھینچتی ہے۔ اس قوت کے افقی اور انتصابی اجزاء تلاش کریں۔

سوال 41: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ ایسے غیر سمتیات α اور β کہ $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C}$ ہو۔
جواب: $\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$

سوال 42: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ لکھیں جہاں $\boldsymbol{A}_1$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کے متوازی اور $\boldsymbol{A}_2$ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کے متوازی ہے۔ (سوال 41 دیکھیں۔)

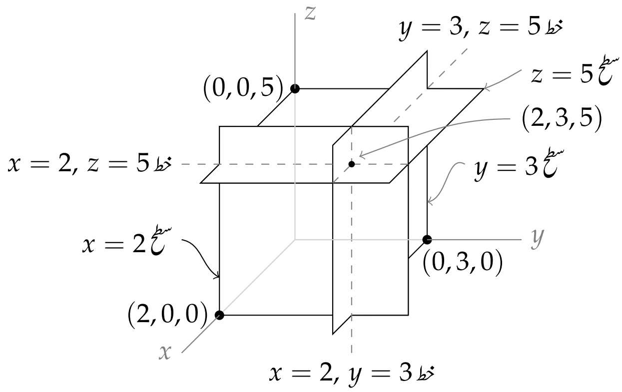
سوال 43: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شمال کی طرف 60° پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لئے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔
جواب: (ا) $(5\cos 60^\circ, 5\sin 60^\circ) = (\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ ،
(ب) $(5\cos 60 + 10\cos 315, 5\sin 60^\circ + 10\sin 315^\circ) = (\frac{5+\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2})$

سوال 44: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، شمال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد یہ مغرب سے 30° زاویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

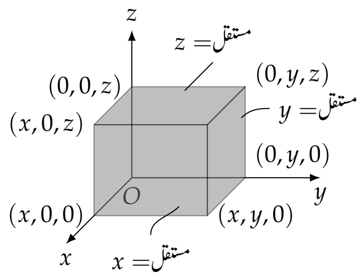
سوال 45: مستوی میں $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہے جو y محور کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی ڈھلوان اور سمتیہ $-\boldsymbol{v}$ کی ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $-\boldsymbol{v} = -a\boldsymbol{i} - b\boldsymbol{j}$ کی ڈھلوان $\frac{(-b)}{(-a)}$ ہے۔ یہی $\boldsymbol{v}$ کی بھی ڈھلوان ہے۔

11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات

ہم اب سہ بعدی کارتیسی محدد بیان کرتے ہیں اور فضا میں اپنا راستہ تلاش کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم فاصلہ کی تعریف جانیں گے، فضا میں سمتیات کے ساتھ کام کرنا (مستوی کے قواعد اب بھی لاگو ہوں گے، پس اب ایک محدد بڑھ جائے گا)، اور نقطوں کے سلسلہ کا مساوات اور عدم مساوات کے ساتھ تعلق سیکھیں گے۔



شکل 11.28: سطح $x=2$ ، $y=3$ اور $z=5$ نقطہ $(2,3,5)$ سے گزرتی تین خط تعین کرتے ہیں۔



شکل 11.27: دایاں ہاتھ کارتیسی نظام۔

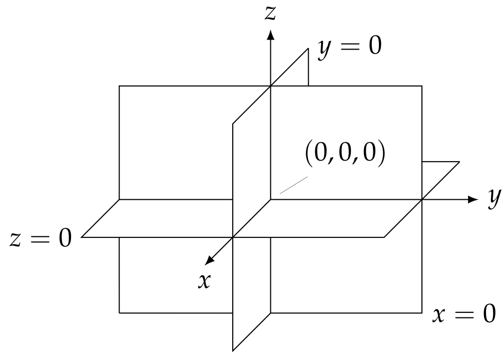
کارتیسی محدد

فضا میں نقطہ کی تلاش کے لئے تین آپس میں عمودی محددی محور استعمال کیے جاتے ہیں۔ شکل 11.27 میں محور Ox ، Oy اور Oz دایاں ہاتھ محددی نظام دیتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کے نظام میں، انگوٹھے کو باقی انگلیوں کے ساتھ زاویہ قائمہ پر رکھتے ہوئے، اگر آپ اپنے دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو مثبت x محور پر رکھ کر انہیں مثبت y محور کی جانب موڑیں تب آپ کا انگوٹھا مثبت z محور پر ہو گا۔

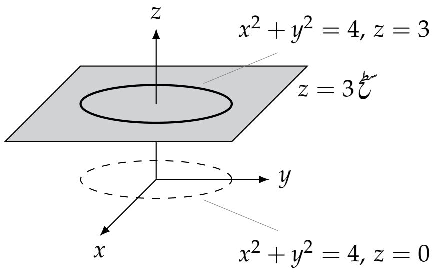
فضا میں نقطہ N سے گزرتی، محوروں کے قائمہ سطحیں ان محور کو اعداد (x,y,z) پر قطع کریں گی۔ یہی اعداد نقطہ N کے کارتیسی محدد ہوں گے۔

محور x پر نقطوں کے y اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محدد کی صورت $(x,0,0)$ ہو گی۔ اسی طرح محور y پر نقطوں کے x اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان نقطوں کے محدد کی صورت $(0,y,0)$ ہو گی۔ محور z پر نقطوں کے x اور y محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محددی کی صورت $(0,0,z)$ ہو گی۔

محور x کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا x محدد وہی ہو گا جس x محدد پر یہ سطح x محور کو قطع کرتا ہے۔ اس سطح پر نقطوں کے y اور z محدد کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح محور y کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک y محدد ہو گا اور محور z کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک z محدد ہو گا۔ ان سطحوں کی مساوات لکھتے ہوئے ہم اس مشترکہ محدد کی قیمت لکھتے ہیں۔ یوں مستوی $x=2$ محور x کو عمودی ہے اور یہ مستوی محور x کو نقطہ $x=2$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $y=3$ محور y کو عمودی ہے اور اس کو نقطہ $y=3$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $z=5$ محور z کو عمودی ہے اور اس محور کو نقطہ $z=5$ پر قطع کرتا ہے۔ شکل 11.28 میں مستوی $x=2$ ، $y=3$ اور $z=5$ دکھائے گئے ہیں۔ ان کا مشترک نقطہ بھی دکھایا گیا ہے جہاں یہ تینوں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔



شکل 11.29: سطح $x=0$ ، $y=0$ اور $z=0$ فضا کو آٹھ ثمن میں تقسیم کرتے ہیں۔



شکل 11.30: بلند دائرہ (مثال 11.10)

مستوی $x=2$ اور $y=3$ ایک دوسرے کو ایک لکیر پر قطع کرتے ہیں (شکل 11.28) جو محور z کے متوازی ہے۔ اس لکیر کو جوڑی مساوات $x=2$ ، $y=3$ ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ (x,y,z) صرف اور صرف اس صورت اس لکیر پر پایا جائے گا جب $x=2$ اور $y=3$ ہوں۔ اسی طرح مستوی $y=3$ اور $z=5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $y=3$ ، $z=5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور x کے متوازی ہو گی۔ مستوی $x=2$ اور $z=5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $x=2$ ، $z=5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور y کے متوازی ہو گی۔

محددی محوروں کے بیچ مستوی xy [12] جس کی معیاری مساوات $z=0$ ؛ مستوی yz جس کی معیاری مساوات $x=0$ ؛ اور مستوی xz جس کی معیاری مساوات $y=0$ ہے پائی جاتی ہیں۔ یہ تینوں مستوی مبدا $(0,0,0)$ پر آپس میں ملتے ہیں (شکل 11.29)۔

تین محددی مستوی[13] $x=0$ ، $y=0$ اور $z=0$ فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں ثُمن[14] کہتے ہیں۔ وہ ثمن جس میں تمام محدد مثبت ہیں پہلا ثمن[15] کہلاتا ہے۔ باقی سات ثمن کو نام دینے کا کوئی روایتی طریقہ نہیں پایا جاتا ہے۔

چونکہ فضا کے کارتیسی محدد ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں لہٰذا ان محدد کو مستطیل محدد[16] بھی کہتے ہیں۔

درج ذیل مثال میں ہم مساواتوں اور عدم مساواتوں کا خلا میں ہم پلہ نقطے تلاش کرتے ہیں۔

[12] xy-plane
[13] coordinate planes
[14] octant
[15] first octant
[16] rectangular coordinates

مثال 11.9:

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$z \geq 0$	xy مستوی میں اور اس سے اوپر نصف فضا میں تمام نقطے۔
$x = -3$	مستوی x کو نقطہ $x = -3$ پر عمودی سطح۔ یہ سطح yz مستوی کے متوازی اور 3 اکائیاں اس کے پیچھے ہے۔
$z = 0,\ x \leq 0,\ y \geq 0$	مستوی xy کا ربع دوم۔
$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$	پہلا ثمن۔
$-1 \leq y \leq 1$	سطح $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔
$y = -2,\ z = 2$	وہ خط جس میں سطح $y = -2$ اور سطح $z = 2$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، یا وہ خط جو نقطہ $(0, -2, 2)$ سے گزرتا ہے اور محور x کے متوازی ہے۔

□

مثال 11.10: کون سے نقاط $N(x, y, z)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؟

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{اور} \quad z = 3$$

حل: یہ نقطے افقی سطح $z = 3$ میں پائے جاتے ہیں اور اس سطح میں یہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ بناتے ہیں۔ ہم ان نقطوں کو "سطح $z = 3$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 4$" یا مختصراً "دائرہ $x^2 + y^2 = 4,\ z = 3$" کہتے ہیں (شکل 11.30)۔ □

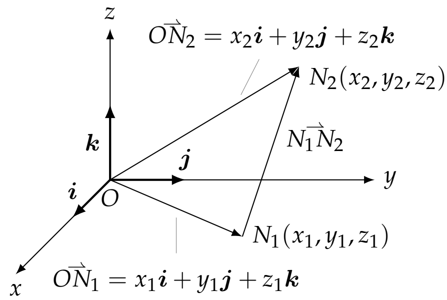
فضا میں سمتیات

سمت بند خطوط کا سلسلہ جو قوت، ہٹاو، اور سمتی رفتار ظاہر کرتے ہوں سمتیات کہلاتے ہیں، جیسے یہ مستوی میں کہلائے جاتے ہیں۔ سمتی مجموعہ، سمتی تفریق اور غیر سمتی ضرب کے وہی قواعد یہاں بھی کارآمد ہوں گے۔

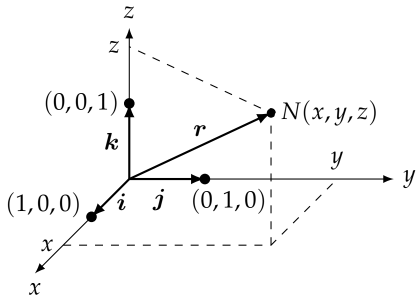
مبدا سے نقاط $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ تک سمت بند خطوط اساسی سمتیات ہیں (شکل 11.31) جنہیں بالترتیب $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مبدا O سے عمومی نقطہ $N(x, y, z)$ تک تعین گر سمتیہ[17] $\boldsymbol{r}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r} = \vec{ON} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{11.7}$$

[17] position vector



شکل 11.32: دو نقطوں کے بیچ سمتیہ۔



شکل 11.31: فضا میں نقطے کا تعین گر سمتیہ۔

تعریف: فضا میں سمتیات کا مجموعہ اور تفریق
کسی بھی سمتیات $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (a_1 - b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 - b_3)\boldsymbol{k}$$

□

دو نقاط کے بیچ سمتیہ

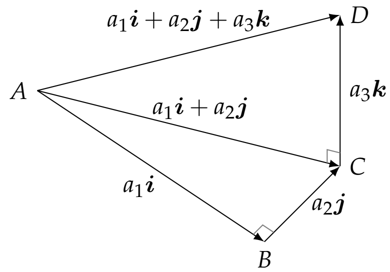
ہم نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ $N_1\vec{N}_2$ کو

$$\begin{aligned} N_1\vec{N}_2 &= O\vec{N}_1 - O\vec{N}_2 \\ &= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جو N_1 اور N_2 کے محدد کی صورت میں ہے (شکل 11.32)۔

یوں نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$N_1\vec{N}_2 = = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \tag{11.8}$$



شکل 11.33: قائمہ مثلث ABC اور ACD پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے $\overrightarrow{AD}$ کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔

مقدار

جیسا ہم جانتے ہیں، سمتیہ کی مقدار اور سمت اس کے اہم خصوصیات ہیں۔ ہم مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے شکل 11.33 میں سمتیہ $a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ کی مقدار (لمبائی) کا کلیہ تلاش کرتے ہیں۔ مثلث ABC سے

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ہو گا لہٰذا مثلث ACD سے

$$|a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ہو گا۔

یوں $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ کی مقدار (لمبائی) درج ذیل ہو گی۔

$$|\boldsymbol{A}| = |a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{11.9}$$

غیر سمتی ضرب

تعریف: اگر c غیر سمتی اور $\boldsymbol{A}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$c\boldsymbol{A} = (ca_1)\boldsymbol{i} + (ca_2)\boldsymbol{j} + (ca_3)\boldsymbol{k}$$

□

مثال 11.11: سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

□

اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3$ کو غیر سمتی c سے ضرب دیں تب، مستوی میں غیر سمتی ضرب کی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا، $c\boldsymbol{A}$ کی لمبائی $|c|$ ضرب $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی ہو گی:

$$\begin{aligned}
c\boldsymbol{A} &= ca_1\boldsymbol{i} + ca_2\boldsymbol{j} + ca_3\boldsymbol{k}\\
|c\boldsymbol{A}| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2} = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + c^2a_3^2}\\
&= |c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |c||\boldsymbol{A}|
\end{aligned} \tag{11.10}$$

مثال 11.12: سمتیہ $\boldsymbol{A}$ مثال 11.11 میں دیا گیا ہے۔ یوں

$$2\boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

کی لمبائی درج ذیل ہو گی:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (6)^2} &= \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}\\
&= \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14} = 2|\boldsymbol{A}|
\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

فضا میں صفر سمتیہ سے مراد سمتیہ $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$ ہے۔ مستوی میں صفر سمتیہ کی طرح فضا میں $\boldsymbol{0}$ کی لمبائی صفر ہو گی اور اس کا کوئی رخ نہیں ہو گا۔

اکائی سمتیات

فضا میں اکائی سمتیہ کی لمبائی 1 ہو گی۔ اساسی سمتیات درج ذیل کی بنا اکائی سمتیات ہیں۔

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{i}| &= |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1\\
|\boldsymbol{j}| &= |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1\\
|\boldsymbol{k}| &= |0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1
\end{aligned}$$

مقدار اور رخ

اگر $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ایک اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ وہی ہو گا جو $\boldsymbol{A}$ کا رخ ہے۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{11.11}$$

مثال 11.13: سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} && \text{مساوات } 11.11\\
&= \sqrt{14} \cdot \frac{\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}} && \text{مثال } 11.11\\
&= \sqrt{14}\Big(\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}\Big) = (\ \boldsymbol{A}\ \text{لمبائی}) \cdot (\ \boldsymbol{A}\ \text{رخ})
\end{aligned}$$

□

مثال 11.14: نقطہ $N_1(1,0,1)$ سے نقطہ $N_2(3,2,0)$ تک سمتیہ کے رخ میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $\overrightarrow{N_1N_2}$ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے $\boldsymbol{u}$ حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{N_1N_2} = (3-1)\boldsymbol{i} + (2-0)\boldsymbol{j} + (0-1)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\\
\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3\\
\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{N_1N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 2aj - \boldsymbol{k}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}
\end{gathered}$$

□

مثال 11.15: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 6 ہو۔

حل: ہم اس سمتیہ کے رخ اکائی سمتیہ کو 6 سے ضرب کر کے جواب حاصل کرتے ہیں:

$$6\,\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{3} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

□

فضا میں فاصلہ

فضا میں نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ، سمتیہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ کی لمبائی $\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|$ ہو گی۔

نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{11.12}$$

مثال 11.16: نقاط $N_1(2, 1, 5)$ اور $N_2(-2, 3, 0)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| &= \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2 + (0-5)^2}\\ &= \sqrt{16 + 4 + 25}\\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

□

11.2.1 کرہ

ہم مساوات 11.12 استعمال کر کے اس کرہ کی مساوات لکھتے ہیں جس کا مرکز $N_0(x_0, y_0, z_0)$ اور رداس a ہو۔ نقطہ $N(x, y, z)$ اس صورت اس کرہ پر پایا جائے گا جب $\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right| = a$ ہو یعنی:

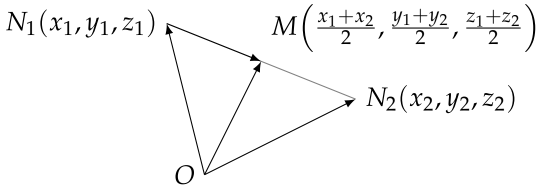
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

ایک کرہ جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) اور رداس a ہو کی معیاری مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \tag{11.13}$$

مثال 11.17: درج ذیل کرہ کا مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$



شکل 11.34: نقاط N_1 اور N_2 کے محدد کی اوسط قطع N_1N_2 کے وسطی نقطہ کے محدد ہوں گے۔

حل: ہم مستوی میں دائرے کا مرکز اور رداس حاصل کرنے کی طرح یہاں بھی x ، y اور z کے مربع مکمل کر کے معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کر کے مرکز اور رداس دریافت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2+3x-4z+1 &= 0 \\
(x^2+3x \quad)+y^2+(z^2-4z \quad) &= -1 \\
\left(x^2+3x+(\tfrac{3}{2})^2\right)+y^2+\left(z^2-4z+(-\tfrac{4}{2})^2\right) &= -1+(\tfrac{3}{2})^2+(-\tfrac{4}{2})^2 \\
(x+\tfrac{3}{2})^2+y^2+(z-2)^2 &= -1+\tfrac{9}{4}+4=\tfrac{21}{4}
\end{aligned}
$$

یہ مساوات 11.13 ہے لہٰذا $x_0=-\frac{3}{2}$ ، $y_0=0$ ، $z_0=2$ اور $a=\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہیں۔ یوں مرکز $(-\frac{3}{2}, 0, 2)$ اور رداس $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہو گا۔ □

مثال 11.18:

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$x^2+y^2+z^2<4$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا اندرون۔
$x^2+y^2+z^2\leq 4$	سطح $x^2+y^2+z^2=4$ اور اس کے اندرون پر مشتمل ٹھوس کرہ یا کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ میں محدود گیند۔
$x^2+y^2+z^2>4$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا بیرون۔
$x^2+y^2+z^2=4$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا نچلا نصف حصہ۔

□

وسطی نقاط

کسی بھی قطع کا وسطی نقطہ اوسط کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

اس کی وجہ درج ذیل ہے (شکل 11.34)۔

$$
\begin{aligned}
\vec{OM} &= \vec{ON}_1 + \frac{1}{2}\vec{N_1N}_2 = \vec{ON}_1 + \frac{1}{2}(\vec{ON}_2 - \vec{ON}_1) \\
&= \frac{1}{2}(\vec{ON}_1 + \vec{ON}_2) \\
&= \frac{x_1+x_2}{2}\boldsymbol{i} + \frac{y_1+y_2}{2}\boldsymbol{j} + \frac{z_1+z_2}{2}\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

مثال 11.19: نقطہ $N_1(3,-2,0)$ اور $N_2(7,4,4,)$ کو ملانے والی قطع کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Big(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\Big) = (5,1,2)$$

□

سوالات

سلسلہ، مساوات اور عدم مساوات

سوال 1 تا سوال 12 میں ان نقطوں کے سلسلہ کی جیومیٹریائی تفصیل بیان کریں جو دی گئی جوڑی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 1: $x = 2, \quad y = 3$
جواب: محور z کے متوازی نقطہ $(2,3,0)$ سے گزرتا ہوا خط۔

سوال 2: $x = -1, \quad z = 0$

سوال 3: $y = 0, \quad z = 0$
جواب: محور x

سوال 4: $x = 1, \quad y = 0$

سوال 5: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$
جواب: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 4$

سوال 6: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -2$

سوال 7: $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$
جواب: مستوی xz میں دائرہ $x^2 + z^2 = 4$

سوال 8: $y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

سوال 9: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$
جواب: مستوی yz میں دائرہ $y^2 + z^2 = 1$

سوال 10: $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad y = -4$

سوال 11: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25, \quad z = 0$
جواب: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 16$

سوال 12: $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

سوال 13 تا سوال 18 میں ان نقاط کے سلسلہ کو جیومیٹریائی بیان کریں جو دی گئی عدم مساوات یا مساوات اور عدم مساوات کی جوڑی کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 13: (ا) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 0$ (ب) $x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad z = 0$
جواب: (ا) مستوی xy کا ربع اول۔ (ب) مستوی xy کا ربع چہارم۔

سوال 14:

ا. $0 \leq x \leq 1$

ب. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$

ج. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$

سوال 15:

ا. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

ب. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

جواب: (ا) رداس 1 کا گیند جس کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ب) مبدا سے 1 اکائی سے زیادہ دور تمام نقاط۔

سوال 16: (ا) $x^2+y^2\le 1,\ z=0$ (ب) $x^2+y^2\le 1,\ z=3$ (ج) $x^2+y^2\le 1,$ جہاں z پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال 17: (ا) $x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$ (ب) $x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0$
جواب: (ا) رداس 1 کا نصف بالائی کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ب) رداس 1 کا نصف بالائی ٹھوس کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 18: (ا) $x=y,\ z=0$ (ب) $x=y,$ جہاں z پر کوئی شور لاگو نہیں ہے۔

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے سلسلہ کو ایک مساوات یا جوڑی مساوات سے ظاہر کریں۔

سوال 19: وہ مستوی جو (ا) نقطہ $(3,0,0)$ پر محور x، (ب) نقطہ $(0,-1,0)$ پر محور y، (ج) نقطہ $(0,0,-2)$ پر محور z کو عمودی ہے۔
جواب: (ا) $x=3$، (ب) $y=-1$، (ج) $z=-2$

سوال 20: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,2)$ پر (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کو عمودی ہے۔

سوال 21: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,1)$ پر (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی ہے۔
جواب: (ا) $z=1$، (ب) $x=3$، (ج) $y=-1$

سوال 22: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,0,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz میں پایا جاتا ہو۔

سوال 23: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,2,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی $y=2$ میں پایا جاتا ہو۔
جواب: (ا) $x^2+(y-2)^2=4,\ z=0$، (ب) $(y-2)^2+z^2=4,\ x=0$،
(ج) $x^2+z^2=4,\ y=2$

سوال 24: وہ دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(-3,4,1)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی سطح میں پایا جاتا ہو۔

سوال 25: نقطہ $(1,3,-1)$ سے گزرتا خط جو (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کے متوازی ہو۔
جواب: (ا) $y=3,\ z=-1$، (ب) $x=1,\ z=-1$، (ج) $x=1,\ y=3$

سوال 26: فضا میں وہ نقطے معلوم کریں جن کا فاصلہ مبدا اور نقطہ $(0,2,0)$ سے یکساں ہو۔

سوال 27: وہ دائرہ معلوم کریں جس میں نقطہ $(1, 1, 3)$ سے گزرتا ہوا ایسا مستوی جو محور z کے عمودی ہو ایک ایسے دائرہ کو جا ملتا ہو جس کا رداس 5 اور مرکز $(0, 0, 0)$ ہو۔
جواب: $x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ z = 3$

سوال 28: فضا میں ان نقطوں کا سلسلہ جن کا فاصلہ $(0, 0, 1)$ سے 2 اور $(0, 0, -1)$ سے 2 ہو۔

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے سلسلہ کی عدم مساوات پیش کریں۔

سوال 29: سطح $z = 0$ اور $z = 1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔
جواب: $0 \leq z \leq 1$

سوال 30: پہلے ثمن میں محددی سطحوں اور سطحوں $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ میں محدود ٹھوس مکعب۔

سوال 31: نصف فضا جو مستوی xy اور اس کے نیچے نقطوں پر مشتمل ہے۔
جواب: $z \leq 0$

سوال 32: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو کا بالائی نصف حصہ۔

سوال 33: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز $(1, 1, 1)$ ہو کا (ا) اندرون، (ب) بیرون۔
جواب: (ا) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 < 1$ ،
(ب) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1$

سوال 34: رداس 1 اور 2 کے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں میں بند خطہ۔ (بند خطہ سے مراد ہے کہ کرہ کی سطحیں بھی اس خطہ میں شامل ہوں گی۔ کروی سطحوں کو شامل نہ کرنے کے لئے ہم آزاد خطے کی اصطلاح استعمال کرتے ہیں۔)

لمبائی اور رخ

سوال 35 تا سوال 44 میں دیے سمتیہ کو اس کی لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 35: $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
جواب: $3(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

سوال 36: $3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

سوال 37: $\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$
جواب: $9(\frac{1}{9}\boldsymbol{i} + \frac{4}{9}\boldsymbol{j} - \frac{8}{9}\boldsymbol{k})$

سوال 38: $9\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$

سوال 39: $5\boldsymbol{k}$
جواب: $5(\boldsymbol{k})$

سوال 40: $-4\boldsymbol{j}$

سوال 41: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
جواب: $1(\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k})$

سوال 42: $\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$

سوال 43: $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k})$

سوال 44: $\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$

سوال 45: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	2	$\boldsymbol{i}$
(ب)	$\sqrt{3}$	$-\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\boldsymbol{j}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(د)	7	$\frac{6}{7}\boldsymbol{i}-\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{3}{7}\boldsymbol{k}$

جواب: (ا) $2\boldsymbol{i}$، (ب) $-\sqrt{3}\boldsymbol{k}$، (ج) $\frac{3}{10}\boldsymbol{j}+\frac{2}{5}\boldsymbol{k}$، (د) $6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

سوال 46: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	7	$-\boldsymbol{j}$
(ب)	$\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}\boldsymbol{i}-\frac{4}{13}\boldsymbol{j}-\frac{12}{13}\boldsymbol{k}$
(د)	$a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$

سوال 47: سمتیہ $\boldsymbol{A}=12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔
جواب: $\frac{7}{13}(12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k})$

سوال 48: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی $\sqrt{5}$ ہو۔

سوال 49: سمتیہ $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 5 ہو۔
جواب: $-\frac{10}{7}\boldsymbol{i}+\frac{15}{7}\boldsymbol{j}-\frac{30}{7}\boldsymbol{k}$

سوال 50: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 3 ہو۔

سمتیات کا تعین بذریعہ نقاط، وسطی نقاط اور فاصلہ

سوال 51 تا سوال 56 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ،

ب. رخ $\overrightarrow{N_1N_2}$،

ج. قطع N_1N_2 کا وسطی نقطہ۔

سوال 51: $N_1(1,1,1),\quad N_2(3,3,0)$
جواب: (ا) 3، (ب) $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$، (ج) $(2,2,\frac{1}{2})$

سوال 52: $N_1(-1,1,5),\quad N_2(2,5,0)$

سوال 53: $N_1(1,4,5),\quad N_2(4,-2,7)$
جواب: (ا) 7، (ب) $\frac{3}{7}\boldsymbol{i}-\frac{6}{7}\boldsymbol{j}+\frac{2}{7}\boldsymbol{k}$، (ج) $(\frac{5}{2},1,6)$

سوال 54: $N_1(3,4,5),\quad N_2(2,3,4)$

سوال 55: $N_1(0,0,0), \quad N_2(2,-2,-2)$
جواب: (ا) $2\sqrt{3}$، (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$، (ج) $(1,-1,-1)$

سوال 56: $N_1(5,3,-2), \quad N_2(0,0,0)$

سوال 57: اگر $\vec{AB} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ اور B نقطہ $(5,1,3)$ ہو تب نقطہ A تلاش کریں۔
جواب: $A(4,-3,5)$

سوال 58: اگر $\vec{AB} = -7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ اور A نقطہ $(-2,-3,6)$ ہو تب نقطہ B تلاش کریں۔

کرہ
سوال 59 تا سوال 62 میں کرہ کے رداس اور مراکز تلاش کریں۔

سوال 59: $(x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$
جواب: $C(-2,0,2), \quad a = 2\sqrt{2}$

سوال 60: $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = \frac{21}{4}$

سوال 61: $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 2$
جواب: $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad a = \sqrt{2}$

سوال 62: $x^2 + (y+\frac{1}{3})^2 + (z-\frac{1}{3})^2 = \frac{29}{9}$

سوال 63 تا سوال 66 میں کرہ کے رداس اور مراکز دیے گئے ہیں۔ ان کرہ کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 63: رداس $\sqrt{14}$، مرکز $(1,2,3)$
جواب: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

سوال 64: رداس 2، مرکز $(0,-1,5)$

سوال 65: رداس $\sqrt{3}$، مرکز $(-2,0,0)$
جواب: $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 3$

سوال 66: رداس 7، مرکز $(0,-7,0)$

سوال 67 تا سوال 70 میں دیے کرہ کے رداس اور مراکز دریافت کریں۔

سوال 67: $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$
جواب: $C(-2,0,2),\quad a=\sqrt{8}$

سوال 68: $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

سوال 69: $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=9$
جواب: $C(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}),\quad a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

سوال 70: $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$

سوال 71: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z تک فاصلہ تلاش کریں۔
جواب: (ا) $\sqrt{y^2+z^2}$، (ب) $\sqrt{x^2+z^2}$، (ج) $\sqrt{x^2+y^2}$

سوال 72: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) سطح xy، (ب) سطح yz، (ج) سطح xz تک فاصلہ تلاش کریں۔

سمتیات اور جیومیٹری

سوال 73: نقاط $A(4,2,0)$، $B(1,3,0)$ اور $C(1,1,3)$ یکساں کثافت کے باریک مثلث کے راس ہیں۔

ا. نقطہ C سے AB کے وسطی نقطہ M تک سمتیہ تلاش کریں۔

ب. نقطہ C سے وسطانیہ CM پر C سے $\frac{2}{3}$ فاصلہ تک سمتیہ تلاش کریں۔

ج. مثلث ABC کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع کے محدد تلاش کریں۔

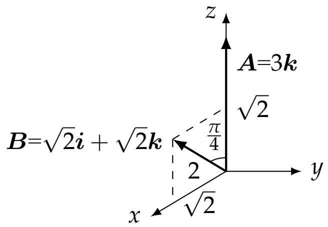
جواب: (ا) $\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$، (ب) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$، (ج) $(2,2,1)$

سوال 74: ایک مثلث جس کے راس $A(1,-1,2)$، $B(2,1,3)$ اور $C(-1,2,-1)$ ہیں کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع تک مبدا سے سمتیہ تلاش کریں۔

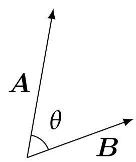
سوال 75: فضا میں چار الاضلاع کے راس A، B، C اور D ہیں۔ یہ چار الاضلاع ضروری نہیں کہ مستوی ہو۔ دکھائیں کہ مخالف اضلاع کے وسطانی نقطوں کو جوڑنے والے قطعات ایک دوسرے کو نصف میں قطع کرتے ہیں۔ (اشارہ: دکھائیں کہ ان قطعات کے وسطی نقاط یکساں ہیں۔)

سوال 76: منتظم n کثیر الاضلاع کے مرکز سے اس کے راس تک سمتیات بنائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ ان سمتیات کا مجموعہ صفر ہو گا۔ (اشارہ: کثیر الاضلاع کو اپنے مرکز کے گرد گھمانے سے اس مجموعہ پر کیا اثر ہو گا؟)

سوال 77: فرض کریں ایک مثلث کے راس A، B اور C ہیں جبکہ مطابقتی مخالف اضلاع کے وسطی نقاط a، b اور c ہیں۔ دکھائیں کہ $\overrightarrow{Aa}+\overrightarrow{Bb}+\overrightarrow{Cc}=0$ ہو گا۔



شکل 11.36: سمتیات برائے مثال 11.20



شکل 11.35: سمتیات A اور B کے بیچ زاویہ۔

11.3 ضرب نقطہ

ہم اب ضرب نقطہ پر غور کرتے ہیں جو سمتیات کو آپس میں ضرب دینے کے دو طریقوں میں سے ایک ہے۔ چونکہ ضرب نقطہ کا نتیجہ غیر سمتی ہوتا ہے لہٰذا ضرب نقطہ کو غیر سمتی ضرب[18] بھی کہتے ہیں۔

ضرب نقطہ

جب دو غیر صفر سمتیات A اور B کے ابتدائی نقاط کو ایک ہی نقطہ پر رکھا جائے تب ان سمتیات کے بیچ زاویہ $0 \le \theta \le \pi$ پایا جاتا ہے۔ یہ زاویہ A اور B کے بیچ زاویہ کہلاتا ہے۔

تعریف: سمتیات A اور B کے غیر سمتی ضرب (ضرب نقطہ) سے مراد درج ذیل عدد ہے

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta \tag{11.14}$$

جہاں θ سمتیات A اور B کے بیچ زاویہ ہے (شکل 11.35)۔

□

الفاظ میں، $A \cdot B$ سے مراد A کی لمبائی ضرب B کی لمبائی ضرب اس زاویہ کا کوسائن جو ان سمتیات کے بیچ پایا جاتا ہے۔

مثال 11.20: سمتیات $A = 3k$ اور $B = \sqrt{2}i + \sqrt{2}k$ کے ضرب نقطہ درج ذیل ہو گا (شکل 11.36)۔

$$A \cdot A = |A||B| \cos \theta = (3)(2) \cos \frac{\pi}{4} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

---

[18] scalar product

$\square$

چونکہ غیر سمتی ضرب کی علامت $\cos\theta$ پر منحصر ہے لہٰذا غیر سمتی ضرب کا نتیجہ زاویہ حادہ کی صورت میں مثبت، زاویہ منفرجہ کی صورت میں منفی (اور زاویہ قائمہ کی صورت میں صفر ہو گا)۔

چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\cos 0 = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\,(1) = |\boldsymbol{A}|^2$$

یعنی

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{11.15}$$

ہو گا۔

11.3.1 حساب

کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کا حساب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء سے حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{B} &= b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = (b_1 - a_1)\boldsymbol{i} + (b_2 - a_2)\boldsymbol{j} + (b_3 - a_3)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

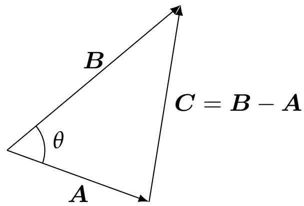
ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں کے لئے قاعدہ کوسائن درج ذیل ہو گا (شکل 11.37)۔

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{C}|^2 &= |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\\
|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta &= \frac{|\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{C}|^2}{2}
\end{aligned}$$

اس مساوات کا بایاں ہاتھ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ہے۔ ہم $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے اجزاء کا مربع لے کر مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت حاصل کرتے ہیں (مساوات 11.9)۔ یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{11.16}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا دو سمتیات کا غیر سمتی ضرب لینے کی خاطر ہم اس کے مطابقتی $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$ اور a اجزاء کو ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔



شکل 11.37: ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ ہوں پر قاعدہ کوسائن کے اطلاق سے مساوات 11.16 حاصل ہو گا۔

مساوات 11.14 کو θ کے لئے حل کر کے ان سمتیات کے بیچ زاویہ حاصل ہو گا۔

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right) \quad \text{سمتیات کے بیچ زاویہ} \tag{11.17}$$

چونکہ الٹ کوسائن کی قیمت $[0,\pi]$ میں پائی جاتی ہے لہذا مساوات 11.17 خود بخود $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ دیتی ہے۔

مثال 11.21: سمتیات $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 11.17 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(1)(6)+(-2)(3)+(-2)(2)=6-6-4=-4\\
|\boldsymbol{A}|&=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3\\
|\boldsymbol{B}|&=\sqrt{(6)^2+(3)^2+(2)^2}=\sqrt{49}=7\\
\theta&=\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right)\\
&=\cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right)\approx 1.76\ \text{ریڈیئن}
\end{aligned}$$

□

قواعد ضرب نقطہ

ہم ضرب نقطہ کی مساوات $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_1b_1+a_2b_2+c_1c_2$ سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{11.18}$$

دوسرے لفظوں میں، ضرب نقطہ قابل تبادل ہے۔ ہم مساوات 11.16 سے یہ بھی دیکھتے ہیں کہ مستقل (یا غیر سمتی) عدد c کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$(c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{B})=c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{11.19}$$

اگر $\boldsymbol{C}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$ کوئی تیسرا سمتیہ ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

اس طرح ضرب نقطہ قانون تقسیم (درج ذیل) کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{11.20}$$

اس کو مساوات 11.18 کے ساتھ ملا کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{11.21}$$

مساوات 11.20 اور مساوات 11.21 ہمیں سمتیات کے مجموعوں کو، الجبرا کے قواعد کے مطابق، آپس میں ضرب دینے کی اجازت دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D} \tag{11.22}$$

عمودی سمتیات

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ تب عمودی[19] ہوں گے جب ان کے بیچ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہو۔ یوں $\cos\frac{\pi}{2}=0$ کی بنا عمودی سمتیات کے لئے $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ غیر صفر سمتیات ہوں اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta=0$ ہو تب $\cos\theta=0$ یعنی $\theta=\cos^{-1}0=\frac{\pi}{2}$ ہو گا۔

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ صرف اور صرف اس صورت عمودی ہوں گے جب $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ ہو۔

مثال 11.22: سمتیات $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ درج ذیل کی بنا عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(3)(0)+(-2)(2)+(1)(4)=0$$

□

تظلیل سمتیہ

سمتیہ $\boldsymbol{B}=\vec{NQ}$ کا غیر صفر سمتیہ $\boldsymbol{A}=\vec{NS}$ پر تظلیل سمتیہ $\vec{NR}$ تعین کرنے کی خاطر Q سے خط NS پر عمود گرایا جاتا ہے۔

[19] orthogonal

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم