

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
875	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نیکونائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246 10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا

1261 10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول

1277 ا ضمیمہ اول

1279 ب ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

مقدار معلوم مساوات سے کارتیسی مساوات کا حصول
سوال 1 تا سوال 24 میں xy مستوی میں ایک ذرہ کی حرکت کی مقدار معلوم مساوات دی گئی ہیں۔ اس ذرے کی راہ کی کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہوئے راہ کو پہچاننے۔ کارتیسی مساوات کو ترسیم کرتے ہوئے اس پر ذرے کی راہ اور رخ دکھائیں۔

سوال 1: $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

سوال 2: $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

سوال 3: $x = \sin(2\pi(1-t)), \quad y = \cos(2\pi(1-t)), \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 4: $x = \cos(\pi-t), \quad y = \sin(\pi-t), \quad 0 \leq t \leq \pi$

سوال 5: $x = 4 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 6: $x = 4 \sin t, \quad y = 2 \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

سوال 7: $x = 4 \cos t, \quad y = 5 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

سوال 8: $x = 4 \sin t, \quad y = 5 \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 9: $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$

سوال 10: $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$

سوال 11: $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$

سوال 12: $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 13: $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 14: $x = \csc t, \quad y = \cot t, \quad 0 < t < \pi$

سوال 15: $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$

سوال 16: $x = 1 - t, \quad y = 1 + t, \quad -\infty < t < \infty$

سوال 17: $x = t, \quad y = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 18: $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال 19: $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -t \leq t \leq 0$

سوال 20: $x = t, \quad y = \sqrt{4 - t^2}, \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال 21: $x = t^2, \quad y = \sqrt{t^4 + 1}, \quad t \geq 0$

سوال 22: $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$

سوال 23: $x = -\cosh t, \quad y = \sinh t, \quad -\infty < t < \infty$

سوال 24: $x = 2 \sinh t, \quad y = 2 \cosh t, \quad -\infty < t < \infty$

مقدار معلوم مساوات کا حصول

سوال 25: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر (i) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

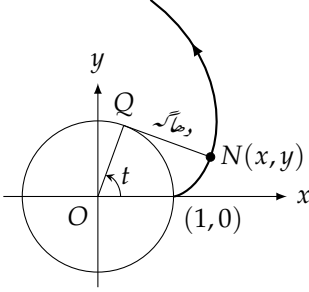
سوال 26: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر (i) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

سوال 27: درج ذیل نصف دائرے کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے (x, y) پر متغی کے مماس کی ڈھلوان $t = \frac{dy}{dx}$ کو مقدار معلوم لیں۔

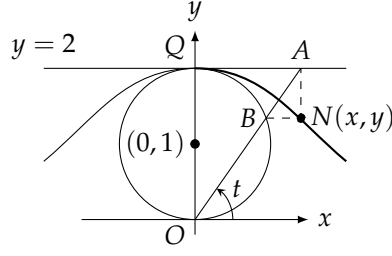
$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0$$

سوال 28: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر نقطہ $(a, 0)$ سے نقطہ (x, y) تک گھڑی کے الٹ رخ فاصلہ s کو مقدار معلوم لیتے ہوئے اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال 29: ایک دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(0, 1)$ ہو کو شکل 10.63 میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی لکیر $y = 2$ بھی دکھائی گئی ہے۔ اس لکیر پر کوئی نقطہ A لیں اور اس کو مہدا O کے ساتھ سیدھی لکیر سے ملائیں۔ خط OA اکائی دائرہ کو نقطہ N پر قطع



شکل 10.64: اکائی دائرے کا در پیچیدہ (سوال 30)



شکل 10.63: ترسیم برائے سوال 29

کرتا ہے۔ نقطہ A کو لکیر $y = 2$ پر چلانے سے نقطہ N جس راہ پر چلتا ہے اس کو مر یا اگنیسی کی چڑیل کہتے ہیں۔ مر یا اگنیسی کی چڑیل کی مقدار معلوم مساوات اور اس کا مقدار معلوم وقفہ تلاش کریں۔ قطع OA اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ t کو مقدار معلوم لیں جہاں t کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے۔ درج ذیل مساوات فرض کرنے سے آپ کو مدد مل سکتی ہے۔

$$x = AQ, \quad y = 2 - AB \sin t, \quad AB \cdot OA = (AQ)^2$$

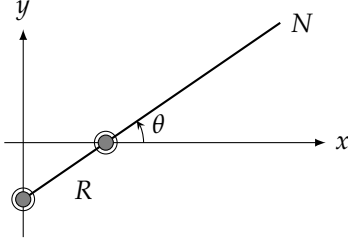
سوال 30: دائرے کا در پیچیدہ
ایک غیر تغیر پذیر دائرہ کے گرد لپٹے گئے دھاگے کو تان کر، دائرے کی مستوی میں رہتے ہوئے، کھولنے سے دھاگے کا سر N جس راہ پر چلتا ہے، اس کو دائرے کا در پیچیدہ²⁹ کہتے ہیں۔ شکل 30 میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور ابتدائی نقطہ $(1, 0)$ ہے۔ کھولا گیا دھاگہ Q پر دائرے کا مماس ہے۔ قطع OQ اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ t ہے۔ نقطہ $N(x, y)$ کے محدود x اور y کو t کی روپ میں لکھ کر در پیچیدہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ در پیچیدہ کی مقدار معلوم کا وقفہ $t \geq 0$ لیں۔

سوال 31: مستوی میں لکیروں کی مقدار معلوم روپ
(الف) دکھائیں کہ درج ذیل ایک ایسی لکیر کو ظاہر کرتی ہیں جو نقطہ (x_0, y_0) اور (x_1, y_1) سے گزرتی ہے (شکل 10.65)۔

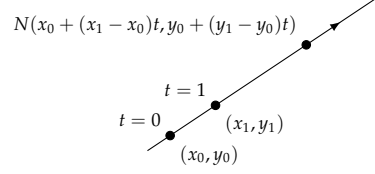
$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \quad -\infty < t < \infty$$

(ب) اسی مقدار معلوم وقفہ کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ (x_1, y_1) اور مبدا سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔ (ج) اسی مقدار معلوم وقفہ کے لئے $(-1, 0)$ اور $(0, 1)$ سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ شکل 10.65 میں تیر کا نشان بڑھتے t کا رخ ظاہر کرتا ہے۔

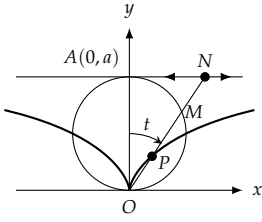
سوال 32: آرشمیدی روک
آرشمیدی روک کو شکل 10.66 میں دکھایا گیا ہے جو ایک مضبوط سلاخ جس کی لمبائی L ہو پر مشتمل ہے۔ محور x اور y کے ساتھ اس کو پیپوں کے ساتھ منسلک کیا گیا ہے۔ اس سلاخ کا آزاد سر N ہے۔ سلاخ اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ θ ہے۔



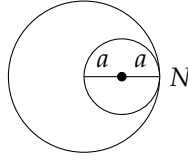
شکل 10.65: آرتھمیڈی روک برائے سوال 32



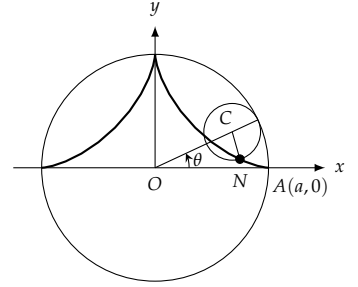
شکل 10.66: مستوی میں سیدھی لکیر (سوال 31)



شکل 10.67: ترسیمات برائے سوال 35



شکل 10.68: تدویر برائے سوال 34



شکل 10.69: ستارہ نما۔ سوال 33

ا. مقدار معلوم θ کی صورت میں N کی راہ کی مساوات تلاش کریں۔

ب. N کی راہ کی کارتیسی مساوات تلاش کر کے اس کی ترسیم کو پہچانیں۔

سوال 33: فلک تدویر
ایک غیر تغیر پذیر دائرے کے محیط کی اندرون پر چلتے ہوئے دائرہ کی محیط پر کسی بھی نقطہ N کی راہ فلک تدویر³⁰ کہلاتی ہے۔ غیر تغیر پذیر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ لیں جبکہ دوسرے دائرے کا رداس b ہے۔ N کا ابتدائی مقام نقطہ $A(a, 0)$ لیں۔ دونوں دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ θ ہے۔ فلک تدویر کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں جہاں مقدار معلوم θ ہے۔ بالخصوص $b = \frac{a}{4}$ کی صورت میں فلک تدویر درج ذیل ستارہ نما³¹ ہوگا (شکل 10.67)۔

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta$$

سوال 34: تدویر پر مزید معلومات

hypocycloid³⁰
stroid³¹

ایک دائرہ جس کا رداس $2a$ ہے کے اندر دوسرا دائرہ جس کا رداس a ہے شکل 10.68 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ دائرے آپس میں ملتے ہیں۔ اندرونی دائرہ بیرونی دائرے کے اندر محیط پر چلتا ہے۔ نقطہ N کے مقام کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 35: نقطہ N لکیر $y = a$ پر چلتا ہے (شکل 10.69)۔ نقطہ P یوں حرکت کرتا ہے کہ $OP = MN$ ہو۔ زاویہ t کو مقدار معلوم لیتے ہوئے نقطہ P کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ لکیر ON اور y محور کے بیچ زاویہ t ہے۔

سوال 36: ایک پہیا جس کا رداس a ہے ایک سیدھی لکیر پر بغیر پھسلے چل رہا ہے۔ پہیے کے مرکز سے b اکائی دور نقطہ N کی راہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ پہیا جتنا زاویہ (θ) گھومتا ہے، اس کو مقدار معلوم لیں۔

مقدار معلوم مساوات سے فاصلے کا حصول

سوال 37: قطع مکانی $x = t, y = t^2, -\infty < t < \infty$ پر $(2, \frac{1}{2})$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔)

سوال 38: ترجیم $x = 2 \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ پر $(\frac{3}{4}, 0)$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔)

کمپیوٹر کا استعمال

درج ذیل مقدار معلوم مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

سوال 39: ترجیم $x = 4 \cos t, y = 2 \sin t$ وقفہ (ا) $0 \leq t \leq 2\pi$ ، (ب) $0 \leq t \leq \pi$ ، (ج) $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

سوال 40: قطع زائد $x = \sec t, y = \tan t$ کا ایک بازو وقفہ (ا) $-1.5 \leq t \leq 1.5$ ، (ب) $-0.5 \leq t \leq 0.5$ ، (ج) $-0.1 \leq t \leq 0.1$

سوال 41: قطع مکانی $x = 2t + 3, y = t^2 - 1$ وقفہ $-2 \leq t \leq 2$

سوال 42: تدویر $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ وقفہ (ا) $0 \leq t \leq 2\pi$ ، (ب) $0 \leq t \leq 4\pi$ ، (ج) $\pi \leq t \leq 3\pi$

سوال 43: ستارہ نما $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ وقفہ (ا) $0 \leq t \leq 2\pi$ ، (ب) $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ، (ج)

سوال 44: ایک خوبصورت منحنی یا مثلثی³²

اگر درج ذیل مساوات کے x اور y میں 2 کی جگہ 2- ہو تب کیا ہوگا؟

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = 2 \sin t - \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

سوال 45: مزید خوبصورت منحنی

اگر درج ذیل مساوات کے x اور y میں 3 کی جگہ 3- ہو تب کیا ہوگا؟

$$x = 3 \cos t + \cos 3t, \quad y = 3 \sin t - \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

سوال 46: گولہ

توپ کے گولے کا مدار درج ذیل ہے۔

$$x = (64 \cos \alpha)t, \quad y = -4.9t^2 + (64 \sin \alpha)t, \quad 0 \leq t \leq 4 \sin \alpha$$

توپ کے مدار کو زاویہ (ا) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، (ب) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ اور (د) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ کے لئے ترسیم کریں۔

سوال 47: تین خوبصورت منحنیات

ا. برتدویر:

$$x = 9 \cos t - \cos 9t, \quad y = 9 \sin t - \sin 9t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ب. فلک تدویر:

$$x = 8 \cos t + 2 \cos 4t, \quad y = 8 \sin t - 2 \sin 4t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ج. زیر تدویر:

$$x = \cos t + 5 \cos 3t, \quad y = 6 \cos t - 5 \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

سوال 48: خوبصورت ترین منحنیات

$$x = 6 \cos t + 5 \cos 3t, \quad y = 6 \sin t - 5 \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{ا.}$$

$$x = 6 \cos 2t + 5 \cos 6t, \quad y = 6 \sin 2t - 5 \sin 6t, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \text{ب.}$$

$$x = 6 \cos t + 5 \cos 3t, \quad y = 6 \sin 2t - 5 \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{ج.}$$

$$x = 6 \cos 2t + 5 \cos 6t, \quad y = 6 \sin 4t - 5 \sin 6t, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad \text{د.}$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

