احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

ارتکاز اور انفراج کی دریافت
سوال 1 تا سوال 36 میں کون سا تسلسل مرتکز اور کون سا تسلسل منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$

سوال 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$

سوال 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

سوال 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$

سوال 5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

سوال 6: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

سوال 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

سوال 8: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

سوال 9: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

سوال 10: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

سوال 11: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

سوال 12: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$

سوال 13: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

سوال 14: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

سوال 15: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2 n}$

سوال 16: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2}$

سوال 17: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

سوال 18: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2 n}$

سوال 19: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

سوال 20: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

سوال 21: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$

سوال 22: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2 2^n}$

سوال 23: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$

سوال 24: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n}$

سوال 25: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

سوال 26: $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$

سوال 27: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

سوال 28: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$

سوال 29: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$

سوال 30: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$

سوال 31: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$

سوال 32: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$

سوال 33: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$

سوال 34: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

سوال 35: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

سوال 36: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 37: تقابل حد پرکھ کا جزو-ب اور جزو-ج ثابت کریں۔

سوال 38: اگر غیر منفی اجزاء کا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب کیا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 39: فرض کریں $n \geq N$ کے لئے $a_n > 0$ اور $b_n > 0$ ہیں جہاں N عدد صحیح ہے۔اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ہو اور $\sum a_n$ مرتکز ہو تب کیا $\sum b_n$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 40: ثابت کریں کہ اگر غیر مثبت اجزاء کا تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہو تب $\sum a_n^2$ بھی مرتکز ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 41: ہم نہیں جانتے ہیں کہ آیا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ مرتکز کہ منفرج ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے اس تسلسل کا رویہ درج ذیل اقدام سے دیکھیں۔

ا. جزوی مجموعات $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2 \sin^2 n}$ کی ترتیب لیں۔ اس ترتیب کا حد کا رویہ $k \to \infty$ کیسا ہے۔کیا آپ کا کمپیوٹر پروگرام اس ترتیب کے حد کا کلیہ تلاش کر سکتا ہے؟

ب. جزوی مجموعات کے ابتدائی 100 نقطے $(k, s-k)$ ترسیم کریں۔ کیا یہ مرتکز نظر آتے ہیں؟ آپ اس کے حد کی اندازاً کتنی قیمت لگائیں گے؟

ج. اب ابتدائی 200 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔اس کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

د. ابتدائی 400 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔ $k = 355$ پر کیا ہوتا ہے؟ عدد $\frac{355}{113}$ کا حساب لگائیں۔ اس حساب کی رو سے $k = 355$ پر جزوی مجموعہ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔ آپ k کی کن قیمتوں پر اسی رویہ کی توقع کرتے ہیں۔

9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ

وہ پرکھ ارتکاز جو دوسرے تسلسل یا تکمل کے ساتھ موازنہ پر منحصر ہو بیرونی پرکھ[30] کہلاتا ہے۔ ایسے پرکھ کار آمد ہوتے ہیں لیکن چند وجوہات کی بنا ہمیں ایسے پرکھ درکار ہیں جو کسی موازنہ پر منحصر نہ ہوں۔ حقیقت میں عین ممکن ہے کہ ہمیں ایسا کوئی تسلسل یا تکمل معلوم نہ ہو جس کے ساتھ موازنہ کرنا ممکن ہو۔ اس کے علاوہ کسی بھی تسلسل کی تمام معلومات اسی کے اجزاء میں پائی جانی چاہیے۔ اسی لئے ہم اپنی توجہ اندرونی پرکھ[31] کی طرف کرتے ہیں۔اندرونی پرکھ صرف دیے گئے تسلسل پر منحصر ہوتا ہے۔

[30] extrinsic test
[31] intrinsic test

تناسبی پرکھ

تناسبی پرکھ ہمارا پہلا اندرونی پرکھ ہے جو تسلسل کے بڑھنے (یا گھٹنے) کی شرح کو نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ سے حاصل کرتا ہے۔ ہندسی تسلسل $\sum ar^n$ کے لئے یہ شرح مستقل ($\frac{ar^{n+1}}{ar^n}=r$) ہے اور تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب اس کے نسبت کی مطلق قیمت 1 سے کم ہو۔ اگر نسبت مستقل نہ ہو تب بھی (اگلی مثال کی طرح) ایسا ہندسی تسلسل معلوم کیا جا سکتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کیا جا سکے۔

مثال 9.35: $a_1=1$ اور تمام n کے لئے $a_{n+1}=\frac{n}{2n+1}a_n$ لیں۔ کیا تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہے؟

حل: ہم تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں:

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{3}a_1=\frac{1}{3},\quad a_3=\frac{2}{5}a_2=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5},\quad a_4=\frac{3}{7}a_3=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}$$

چونکہ $\frac{n}{2n+1}$ کی قیمت $\frac{1}{2}$ سے کم ہے لہٰذا ہر جزو گزشتہ جزو کے $\frac{1}{2}$ سے بھی کم ہو گا۔ یوں اس تسلسل کے اجزاء درج ذیل ہندسی تسلسل کے اجزاء سے کم یا برابر ہوں گے

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$$

اور یہ ہندسی تسلسل 2 پر مرتکز ہے۔ یوں ہمارا تسلسل بھی مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ 2 سے کم ہو گا۔ درج ذیل جدول میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تسلسل اپنے حد $\frac{\pi}{2}$ تک کتنا جلدی پہنچتا ہے۔

n	s_n
5	1.549 206 349
10	1.570 289 085
15	1.570 783 080
20	1.570 795 964
25	1.570 796 317
30	1.570 796 327
35	1.570 796 327

□

تناسبی پرکھ
فرض کریں $\sum a_n$ مثبت اجزاء کا تسلسل ہے اور درج ذیل فرض کریں۔

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\rho$$

تب درج ذیل ہو گا۔

ا. $\rho < 1$ کی صورت میں تسلسل مرتکز ہو گا۔

ب. $\rho > 1$ یا لامتناہی کے برابر ہونے کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. $\rho = 1$ کی صورت میں یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ: تناسبی پرکھ کی ثبوت میں (مثال 9.35 کی طرح) موزوں ہندسی تسلسل کے ساتھ موازنہ کیا جائے گا۔ البتہ تناسبی پرکھ استعمال کرتے ہوئے ایسے کسی موازنہ کی ضرورت نہیں ہو گی۔

ا. $[\rho < 1]$ فرض کریں ρ اور 1 کے بیچ r ایک عدد ہے۔ یوں $\epsilon = r - \rho$ مثبت ہو گا۔ چونکہ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho$$

ہے لہٰذا بڑے n، مثلاً $n \geq N$، کی صورت میں ρ اور $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ کے بیچ فرق ϵ یا اس سے کم ہو گا۔ بالخصوص درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r \qquad \text{جب } n \geq N$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &< ra_N, \\
a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N, \\
a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N, \\
&\vdots \\
a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_n
\end{aligned}$$

ان عدم مساوات سے ظاہر ہے کہ N جزو کے بعد ہمارے تسلسل کے اجزاء صفر تک اس ہندسی تسلسل سے زیادہ تیزی سے پہنچتے ہیں جس میں $r < 1$ ہو۔ بلکہ تسلسل $\sum c_n$ پر غور کریں جہاں $n = 1, 2, \cdots, N$ کے لئے $c_n = a_n$ اور

$$c_{N+1} = ra_N,\ c_{N+2} = r^2 a_N, \cdots, c_{N+m} = r^m a_N, \cdots$$

ہوں۔ اب تمام n کے لئے $a_n \leq c_n$ اور

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

ہے۔ چونکہ $|r| < 1$ ہے لہٰذا ہندسی تسلسل $1 + r + r^2 + \cdots$ مرتکز ہو گا لہٰذا $\sum c_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ چونکہ $a_n \leq c_n$ ہے لہٰذا $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

ب. $[1 < \rho \le \infty]$ کسی اشاریہ M سے آگے

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{اور} \quad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots$$

ہو گا۔ تسلسل کے اجزاء n لامتناہی کرنے سے صفر تک نہیں پہنچتے ہیں لہٰذا n ویں جزو پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. $[\rho = 1]$ درج ذیل دو تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

دکھاتے ہیں کہ $\rho =$ کی صورت میں کسی دوسرے پرکھ کی ضرورت پیش آئے گی۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ کے لئے} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ کے لئے} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

باوجود اس کے کہ دونوں صورتوں میں $\rho = 1$ ہے، پہلا تسلسل منفرج اور دوسرا تسلسل مرتکز ہے۔

□

تناسبی پرکھ عموماً اس صورت موثر ہوتا ہے جب اجزاء میں n پر مبنی فقروں کے عدد ضربیہ یا n طاقت کے فقرے پائے جاتے ہوں۔

مثال 9.36: درج ذیل تسلسل کی ارتکاز پر غور کریں۔

ا. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

حل:

ا. تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2+5\cdot 2^{-n}}{1+5\cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

چونکہ $p = \frac{2}{3}$ ہے جو 1 سے کم ہے لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ اس کا یہ مطلب نہیں کہ تسلسل کا مجموعہ $\frac{2}{3}$ ہے۔ در حقیقت اس کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1-(2/3)} + \frac{5}{1-(1/3)} = \frac{21}{2}$$

ب. اگر $a_n=\frac{(2n)!}{n!n!}$ ہو تب $a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ اور

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}\\&=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=\frac{4n+2}{n+1}\to 4\end{aligned}$$

ہوں گے۔ چونکہ $p=4$ ہے جو 1 سے بڑا ہے لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. اگر $a_n=\frac{4^n n!n!}{(2n)!}$ ہو تب

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n n!n!}\\&=\frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{2(n+1)}{2n+1}\to 1\end{aligned}$$

ہو گا۔ چونکہ حد $p=1$ ہے تناسبی پرکھ ہمیں تسلسل کی ارتکاز یا انفراج کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کر سکتا ہے۔ البتہ چونکہ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+2}{2n+1}$ ہر صورت 1 سے بڑا ہو گا لہٰذا a_{n+1} ہر صورت a_n سے بڑا ہو گا۔ یوں تمام اجزاء $a_1=2$ سے بڑے یا اس کے برابر ہوں گے اور $n\to\infty$ کرنے سے n جزو صفر تک نہیں پہنچتا ہے۔ یوں یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

□

n واں جذر پرکھ

اب تک $\sum a_n$ کے لئے جن پرکھ پر غور کیا گیا ان کی بہترین کارکردگی سادہ کلیات کے a_n میں نظر آتی ہے۔ اب درج ذیل پر غور کریں۔

مثال 9.37: اگر $a_n=\begin{cases}n/2^n & \text{طاق } n\\ 1/2^n & \text{جفت } n\end{cases}$ ہو تب کیا $\sum a_n$ مرتکز ہو گا؟

حل: ہم اس تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{7}{2^7}+\cdots\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{5}{32}+\frac{1}{64}+\frac{7}{128}+\cdots\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ہندسی تسلسل نہیں ہے۔ $n \to \infty$ کرنے سے n واں جزو 0 تک پہنچتا ہے لہٰذا ہم نہیں جانتے کہ یہ تسلسل منفرج ہو گا۔ یہاں تکملی پرکھ ہماری مدد نہیں کر پاتا۔ تناسبی پرکھ درج ذیل دیتا ہے۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{طاق } n \\ \frac{n+1}{2} & \text{جفت } n \end{cases}$$

$n \to \infty$ کرنے سے نسبت کم اور زیادہ ہوتی ہے اور کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

یہاں ہمیں n واں جذر پرکھ کی ضرورت ہے۔ □

n واں جذر پرکھ
فرض کریں تسلسل $\sum a_n$ میں تمام $n \geq N$ کے لئے $a_n \geq 0$ ہیں۔مزید درج ذیل فرض کریں۔

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

تب

ا. $\rho < 1$ کی صورت میں یہ تسلسل مرتکز ہو گا،

ب. $\rho > 1$ اور لامتناہی ρ کی صورت میں یہ تسلسل منفرج ہو گا،

ج. $\rho = 1$ کی صورت میں پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ:

ا. $[\rho < 1]$ ہم ϵ اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ $\rho + \epsilon < 1$ ہو۔ چونکہ $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$ ہے لہٰذا آخر کار ρ اور اجزاء $\sqrt[n]{a_n}$ کے بیچ فاصلہ ϵ سے کم ہو گا۔دوسرے لفظوں میں ایک ایسا اشاریہ $M \geq N$ پایا جاتا ہے جس کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon \qquad (n \geq M)$$

تب درج ذیل بھی درست ہو گا۔

$$a_n < (\rho + \epsilon)^n \qquad (n \geq M)$$

اب ہندسی تسلسل $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$ جس کی نسبت $(\rho + \epsilon) < 1$ ہو مرتکز ہوتا ہے۔یوں موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔یوں درج ذیل مرتکز ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

ب. $[1 < \rho \leq \infty]$ کسی عدد صحیح M سے آگے تمام اشاریہ کے لئے $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ہو گا لہٰذا تمام $n > M$ کے لئے $a_n > 1$ ہو گا۔ اس تسلسل کے اجزاء صفر پر مرکوز نہیں ہیں۔ یوں n ویں جزو پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. $[\rho = 1]$ تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ اور $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ سے ظاہر ہے کہ $\rho = 1$ کے لئے یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہے۔ اگرچہ ان دونوں تسلسل میں $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ ہے، پہلا تسلسل منفرج جبکہ دوسرا تسلسل مرتکز ہے۔

□

مثال 9.38: (مثال 9.37 جاری)

اگر $a_n = \begin{cases} n/2^n & \text{طاق}\ n \\ 1/2^n & \text{جفت}\ n \end{cases}$ ہو تب کیا $\sum a_n$ مرتکز ہو گا؟

حل: ہم n واں جذر پرکھ زیر استعمال لاتے ہیں جو

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} & \text{طاق}\ n \\ \frac{1}{2} & \text{جفت}\ n \end{cases}$$

دیتا ہے لہٰذا

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

ہو گا۔ چونکہ $\sqrt[n]{n} \to 1$ ہے (جدول 9.2) لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ یہ حد 1 سے کم ہے لہٰذا n ویں جذر پرکھ کے تحت دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا۔ □

مثال 9.39: درج ذیل میں کونسا تسلسل مرتکز اور کونسا منفرج ہے؟

ا. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

حل:

ا. چونکہ

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ مرتکز ہو گا۔

ب. چونکہ

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \to \frac{2}{1} > 1$$

ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ منفرج ہو گا۔

□

سوالات

ارتکاز اور انفراج معلوم کرنا
سوال 1 تا سوال 26 میں کون سا تسلسل مرتکز اور کون سا منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (جواب حاصل کرنے کے ایک سے زیادہ طریقے ہو سکتے ہیں۔)

سوال 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

سوال 2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

سوال 3: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

سوال 4: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

سوال 5: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

سوال 6: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

سوال 7: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$

سوال 8: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$

سوال 9: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

سوال 10: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

سوال 11: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$

سوال 12: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{n^n}$

سوال 13: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

سوال 14: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

سوال 15: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

سوال 16: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{2^n}$

سوال 17: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

سوال 18: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}(n^3)$

سوال 19: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

سوال 20: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

سوال 21: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

سوال 22: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

سوال 23: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

سوال 24: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

سوال 25: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$

سوال 26: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

سوال 27 تا سوال 38 میں کون سے تسلسل مرتکز اور کون سے منفرج ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 27: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$

سوال 28: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\tan^{-1} n}{n} a_n$

سوال 29: $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$

سوال 30: $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

سوال 31: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$

سوال 32: $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

سوال 33: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$

سوال 34: $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+\ln n}{n+10} a_n$

سوال 35: $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

سوال 36: $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

سوال 37: $a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$

سوال 38: $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

سوال 39 تا سوال 44 میں مرتکز اور منفرج تسلسل کی نشاندہی کریں۔ وجہ بھی پیش کریں۔

سوال 39: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

سوال 40: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

سوال 41: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$

سوال 42: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

سوال 43: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot . \cdots (2n-1)}{4^n 2^n n!}$

سوال 44: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot . \cdots (2n)](3^n+1)}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: p تسلسل کے ساتھ یا تناسبی پرکھ اور نا ہی n واں جذر پرکھ کارآمد ثابت ہوتا ہے۔ انہیں درج ذیل پر لاگو کر کے دکھائیں کہ دونوں پرکھ اس کی ارتکاز یا انفراج دریافت کرنے سے قاصر ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

سوال 46: دکھائیں کہ تناسبی پرکھ اور n واں جذر پرکھ درج ذیل کی ارتکاز یا انفراج معلوم نہیں کر سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad p \text{ مستقل}$$

سوال 47: فرض کریں $a_n = \begin{cases} n/2^n & n \text{ عدد مفرد} \\ 1/2^n & \text{دیگر صورت} \end{cases}$ ہے۔ کیا $\sum a_n$ مرتکز ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم