

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں مکمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تہی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تکلی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تکلی اور کردی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولا کی حرکت کی نمونہ کشی
1468	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1476	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رچی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں

1617

جوابات

1619

۱ ضمیمہ اول

1621	ب ضمیمہ دوم
1623	ج ضمیمہ تین
1625	د ضمیمہ چار
1627	ه ضمیمہ پانچ
1629	و ضمیمہ چھ
1631	ز ضمیمہ سات
1633	ح ضمیمہ آٹھ
1635	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

نقطہ پر ڈھلوان کا حصول

سوال 1 تا سوال 4 میں دیے نقطہ پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطہ پر ڈھلوان اور اس نقطہ سے گزرتی ہم قد منحني ترسيم کریں۔

$$f(x, y) = y - x, \quad (2, 1) \quad \text{سوال 1:}$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 1) \quad \text{سوال 2:}$$

$$g(x, y) = y - x^2, \quad (-1, 0) \quad \text{سوال 3:}$$

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \quad (\sqrt{2}, 1) \quad \text{سوال 4:}$$

$$\text{سوال 5 تا سوال 8 میں دیے نقطہ پر } \nabla f \text{ تلاش کریں۔}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z \ln x, \quad (1, 1, 1) \quad \text{سوال 5:}$$

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + \tan^{-1} xz, \quad (1, 1, 1) \quad \text{سوال 6:}$$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \ln(xyz), \quad (-1, 2, -2) \quad \text{سوال 7:}$$

$$f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z + (y + 1) \sin^{-1} x, \quad (0, 0, \pi/6) \quad \text{سوال 8:}$$

مستوی xy میں رخ تفرقہ کے تلاشسوال 9 تا سوال 16 میں N_0 پر A کے رخ تفاعل کا رخ تفرقہ دریافت کریں۔

$$f(x, y) = 2xy - 3y^2, \quad N_0(5, 5), \quad A = 4i + 3j \quad \text{سوال 9:}$$

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2, \quad N_0(-1, 1), \quad A = 3i - 4j \quad \text{سوال 10:}$$

$$g(x, y) = x - \frac{y^2}{x} + \sqrt{3} \sec^{-1}(2xy), \quad N_0(1, 1), \quad A = 12i + 5j \quad \text{سوال 11:}$$

$$h(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \sqrt{3} \sin^{-1} \frac{xy}{2}, \quad N_0(1, 1), \quad A = 3i - 2j \quad \text{سوال 12:}$$

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx, \quad N_0(1, -1, 2), \quad A = 3i + 6j - 2k \quad \text{سوال 13:}$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2, \quad N_0(1, 1, 1), \quad A = i + j + k \quad \text{سوال 14:}$$

$$g(x, y, z) = 3e^x \cos yz, \quad N_0(0, 0, 0), \quad A = 2i + j - 2k \quad \text{سوال 15}$$

$$h(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln xz, \quad N_0(1, 0, 1/2), \quad A = i + 2j + 2k \quad \text{سوال 16}$$

تیز بڑھنے اور گھٹنے کے رخ

سوال 17 تا سوال 22 میں نقطہ N_0 پر وہ رخ تلاش کریں جس رخ تفاعل کے بڑھنے اور گھٹنے کی تبدیلی تیز ترین ہو۔ ان رخ تفاعل کے تفرق دریافت کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad N_0(-1, 1) \quad \text{سوال 17}$$

$$f(x, y) = x^2y + e^{xy} \sin y, \quad N_0(1, 0) \quad \text{سوال 18}$$

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} - yz, \quad N_0(4, 1, 1) \quad \text{سوال 19}$$

$$g(x, y, z) = xe^y + z^2, \quad N_0(1, \ln 2, 1/2) \quad \text{سوال 20}$$

$$f(x, y, z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz, \quad N_0(1, 1, 1) \quad \text{سوال 21}$$

$$h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z, \quad N_0(1, 1, 0) \quad \text{سوال 22}$$

تبدیلی کا اندازہ

سوال 23: نقطہ $N(x, y, z)$ کو $N_0(3, 4, 12)$ سے $3i + 6j - 2k$ رخ $ds = 0.1$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہوگی؟

سوال 24: نقطہ $N(x, y, z)$ کو مہدا سے $2i + 2j - 2k$ رخ $ds = 0.1$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $f(x, y, z) = e^x \cos yz$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہوگی؟

سوال 25: نقطہ $N(x, y, z)$ کو $N_0(2, -1, 0)$ سے $N_1(0, 1, 2)$ جانب $ds = 0.2$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $g(x, y, z) = x + x \cos z - y \sin z + y$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہوگی؟

سوال 26: نقطہ $N(x, y, z)$ کو $N_0(-1, -1, -1)$ سے مہدا کے رخ $ds = 0.1$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $h(x, y, z) = \cos(\pi xy) + xz^2$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہوگی؟

سطح کا مماسی اور عمودی خط
سوال 27 تا سوال 34 میں نقطہ N_0 پر دیے گئے سطح کا (i) مماسی مستوی اور (ب) عمودی خط تلاش کریں۔

سوال 27: $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad N_0(1, 1, 1)$

سوال 28: $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \quad N_0(3, 5, -4)$

سوال 29: $2z - x^2 = 0, \quad N_0(2, 0, 2)$

سوال 30: $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7, \quad N_0(1, -1, 3)$

سوال 31: $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad N_0(0, 1, 2)$

سوال 32: $x^2 - xy - y^2 - z = 0, \quad N_0(1, 1, -1)$

سوال 33: $x + y + z = 1, \quad N_0(0, 1, 0)$

سوال 34: $x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4, \quad N_0(2, -3, 18)$

سوال 35 تا سوال 38 میں دیے گئے نقطہ پر سطح کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 35: $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 0, 0)$

سوال 36: $z = e^{-(x^2 + y^2)}, \quad (0, 0, 1)$

سوال 37: $z = \sqrt{y - x}, \quad (1, 2, 1)$

سوال 38: $z = 4x^2 + y^2, \quad (1, 1, 5)$

منحنیات کے مماسی خط
سوال 39 تا سوال 42 میں منحنی $f(c, y) = c$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی دیے گئے نقطہ پر ∇f اور مماسی خط ترسیم کریں۔

سوال 39: $x^2 + y^2 = 4, \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 40: $x^2 - y = 1, \quad (\sqrt{2}, 1)$

سوال 41: $xy = -4, (2, -2)$

سوال 42: $x^2 - xy + y^2 = 7, (-1, 2)$ (یہ مثال 3.50 کی منحنی ہے۔)

سوال 43 تا سوال 48 میں دیے نقطہ پر سطحوں کی متقاطع منحنی کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات

سوال 43: $x + y^2 + 2z = 4, x = 1; (1, 1, 1)$

سوال 44: $xyz = 1, x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6; (1, 1, 1)$

سوال 45: $x^2 + 2y + 2z = 4, y = 1; (1, 1, 1/2)$

سوال 46: $x + y^2 + z = 2, y = 1; (1/2, 1, 1/2)$

سوال 47: $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 11; (1, 1, 3)$

سوال 48: $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 - z = 0; (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$

نظریہ اور مثالیں

سوال 49: نقطہ $N(3, 2)$ پر کس رخ $f(x, y) = xy + y^2$ کا تفرق صفر ہو گا؟

سوال 50: نقطہ $N(1, 1)$ پر کن دو رخ متبادل $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ کے تفرقات صفر ہوں گے؟

سوال 51: کیا $N(1, 2)$ پر ایسا کوئی رخ A ہے جس رخ $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ کا تفرق 14 کے برابر ہو؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 52: کیا کسی رخ A ، نقطہ $N(1, -1, 1)$ پر درجہ حرارت $T(x, y, z) = 2xy - yz$ کی شرح تبدیلی -3°Cm^{-1} ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 53: نقطہ $N_0(1, 2)$ پر $i + j$ رخ $f(x, y)$ کا تفرق $2\sqrt{2}$ اور $-2j$ رخ -3 ہے۔ سمتیہ $-i - 2j$ رخ f کا تفرق کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 54: کسی نقطہ پر $f(x, y, z)$ کے تفرق کی قیمت $A = i + j - k$ رخ زیادہ سے زیادہ ہے۔ اس رخ تفرق کی قیمت $2\sqrt{3}$ ہے۔ (i) اس نقطہ پر ∇f کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) سمتیہ $i + j$ کے رخ اس نقطہ پر f کا تفرق کیا ہو گا؟

سوال 55: دائرہ پر درجہ حرارت کی تبدیلی فرض کریں مستوی xy میں نقطہ (x, y) پر درجہ حرارت $T(x, y) = x \sin 2y$ ہے۔ ایک ذرہ ایک میٹر رداس کے دائرہ پر گھڑی کے رخ 2 ms^{-1} کی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ اس دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔ (i) نقطہ $N(1/2, \sqrt{3}/2)$ پر یہ ذرہ کس شرح حرارت $^\circ\text{C m}^{-1}$ سے گزرتا ہے؟ (ب) نقطہ $N(1/2, \sqrt{3}/2)$ پر یہ ذرہ کس شرح حرارت $^\circ\text{C s}^{-1}$ سے گزرتا ہے؟

سوال 56: دائرہ کے درپچیدہ پر تبدیلی درج ذیل منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ کے رخ تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کا تفرق تلاش کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, t > 0$$

سوال 57: پچچدار منحنی کے ساتھ ساتھ تبدیلی نقطہ $t = -\pi/4, 0, \pi/4$ پر پچچ دار منحنی $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ کے اکائی مماسی سمتیات کے رخ تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کے تفرقات تلاش کریں۔ یہ تفاعل مبدا سے پچچدار منحنی کے نقطہ $N(x, y, z)$ کے فاصلہ کا مرلے دیتا ہے۔ اس منحنی پر چلتے ہوئے تفرق t کے لحاظ سے فاصلے کے مرلے کی شرح تبدیلی دے گا۔

سوال 58: فضا میں درجہ حرارت $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$ ہے۔ ایک متحرک ذرے کا مقام لمحہ t پر $x = 2t^2, y = 3t, z = -t^2$ ہے، جہاں وقت کی اکائی سیکنڈ اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہے۔ (i) نقطہ $N(8, 6, -4)$ پر یہ ذرہ کس شرح تبدیلی $^\circ\text{C m}^{-1}$ سے گزرتا ہے؟ (ب) نقطہ $N(8, 6, -4)$ پر یہ ذرہ کس شرح تبدیلی $^\circ\text{C s}^{-1}$ سے گزرتا ہے؟

سوال 59: دکھائیں کہ مستوی xy میں نقطہ (x_0, y_0) پر سمتیہ $N = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ کے عمودی خط کی مساوات $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ ہو گی۔

سوال 60: عمودی منحنیات اور مماسی منحنیات ایک منحنی اس صورت ایک سطح $f(x, y, z) = c$ کو نقطہ تقاطع پر عمودی ہو گی جب منحنی کا سمتیہ رفتار اس نقطہ پر ∇f کا مستقل مضرب ہو۔ نقطہ تقاطع پر ایک منحنی اس صورت سطح f کی مماسی منحنی ہو گی جب منحنی کا سمتیہ رفتار اس نقطہ پر ∇f کو عمودی ہو۔ (i) دکھائیں کہ منحنی $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} - \frac{1}{4}(t+3)\mathbf{k}$ نقطہ $t = 1$ پر سطح $x^2 + y^2 - z = 3$ کو عمودی ہے۔ (ب) دکھائیں کہ منحنی $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + (2t-1)\mathbf{k}$ نقطہ $t = 1$ پر سطح $x^2 + y^2 - z = 1$ کو مماسی ہے۔

سوال 61: ہم قد منحنیات اور ڈھلوان ایک دوسرے کے عمودی کیوں ہوتے ہیں۔ دوسرا نقطہ نظر۔ فرض کریں t کی تمام قیمتوں کے لئے قابل تفرق منحنی $x = g(t), y = h(t)$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x, y)$ کی قیمت

مستقل c ہو۔ مساوات $f(g(t), h(t)) = c$ کے دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق لے کر دکھائیں کہ ہر نقطہ پر منحني کا مماس اور ∇f آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 62: تقابل $f(x, y)$ کی خط بندی، مماسی مستوی تعین ہوگی۔
دکھائیں کہ نقطہ $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر سطح $z = f(x, y)$ کا مماسی مستوی درج ذیل ہوگا جہاں f قابل تفرق ہے۔

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad \text{یعنی}$$

یوں N_0 پر مماسی مستوی نقطہ N_0 پر f کی خط بندی کی ترسیم ہوگی۔

سوال 63: رخی تفرقات اور غیر سمتی اجزاء
نقطہ N_0 پر اکائی سمتیہ u کے رخ قابل تفرق تقابل $f(x, y, z)$ کے تفرقات کا u کے رخ $(\nabla f)_{N_0}$ کے غیر سمتی اجزاء کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 64: رخی تفرقات اور جزوی تفرقات
فرض کریں کہ $f(x, y, z)$ کے مطلوبہ تفرقات موجود ہیں۔ تفرقات $D_i f$ ، $D_j f$ اور $D_k f$ کا تفرقات f_x ، f_y اور f_z کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 65: الجبرائی قواعد برائے ڈھلوان
مستقل k اور ڈھلوان $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$ اور $\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}i + \frac{\partial g}{\partial y}j + \frac{\partial g}{\partial z}k$ دیے گئے ہیں۔ غیر سمتی مساوات

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(kf) &= k \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial x}(f \mp g) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mp \frac{\partial g}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x}(fg) &= f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}, \end{aligned}$$

وغیرہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قواعد کی تصدیق کریں۔

$$a. \nabla(kf) = k \nabla f \quad \text{جہاں } k \text{ مستقل ہے}$$

$$b. \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$$

$$c. \nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$$

$$d. \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$e. \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$$

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

