احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 3

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

3.1 تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کی ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

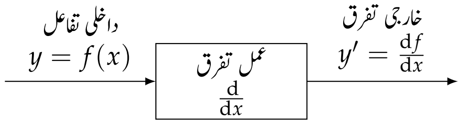
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔اس حصے میں f کی دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کی ڈھلوان پر بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا **تفرق**[1] درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

[1] derivative



شکل 3.1: تفرق کے عمل کی ڈبہ صورت

f' کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x پر f کا **تفرق** پایا جاتا ہے یا کہ x پر f **قابل تفرق**[2] ہے۔

علامتیت

تفاعل $y = f(x)$ کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل 3.1)۔

$D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔

$\dot{y}$ نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو "x کے لحاظ سے y کو تفرق" پڑھتے ہیں۔اسی طرح $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ کو "x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

---

[2]differentiable

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال 2.40 اور مثال 2.41 میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال 2.40 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx + b) = m$$

اور مثال 2.41 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{3.1}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کے حاصل کے اقدام

1. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

2. درج ذیل تفریقی حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

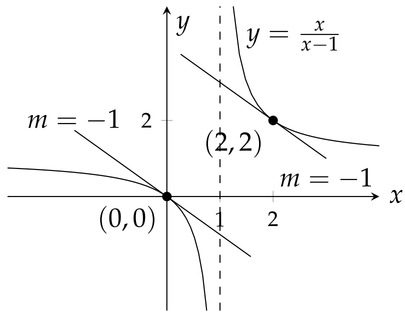
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال 3.1:

ا. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟



شکل 3.2: $x=0$ اور $x=2$ پر $y'=-1$ ہو گا (مثال 3.1)۔

حل: (ا) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: یہاں $f(x)=\frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h)=\frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h} \\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}
\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-)}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب) $y=f(x)$ کی ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہو گی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2}=-1$$

اس مساوات $(x-1)^2=1$ کے مترادف ہے لہٰذا $x=2$ اور $x=0$ درکار نتائج ہیں (شکل 3.2)۔ □

مثال 3.2:

1. $x>0$ کے لئے $y=\sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

2. $x=4$ پر تفاعل $y=\sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (ا) **پہلا قدم:**

$$f(x)=\sqrt{x},\quad f(x+h)=\sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}&=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} && \text{سے ضرب دیتے ہیں } \tfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل 3.3 دیکھیں۔

(ب) $x=4$ پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4}=\frac{1}{4}$$

نقطہ $(4,2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4,2)$ پر f کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y=2+\frac{1}{4}(x-4)=\frac{1}{4}x+1$$

□

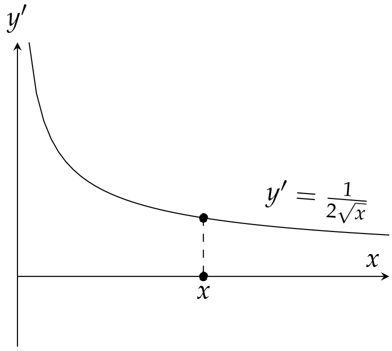
نقطہ $x=a$ پر تفاعل $y=f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

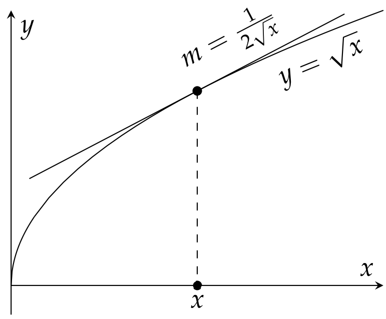
کے علاوہ

$$y'\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

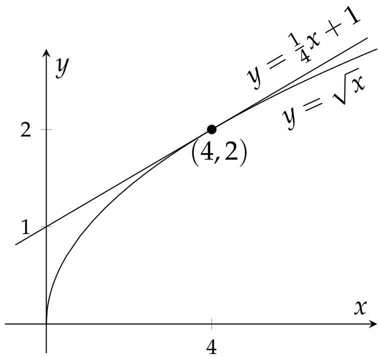
سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں $|_{x=a}$ علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو $x=a$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔



(ب) $x > 0$ کے لئے $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

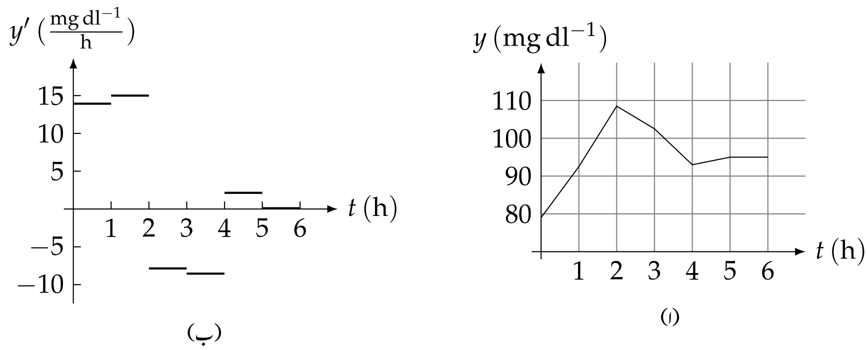


(ا) تفاعل $y = \sqrt{x}$



(ج) تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور نقطہ $(4, 2)$ پر اس کا مماس $y = \frac{1}{4}x + 1$

شکل 3.3: اشکال برائے مثال 3.2۔نقطہ $x = 0$ پر تفاعل معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔



شکل 3.4: (ا) قبل پرواز پرکھ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پرکھ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

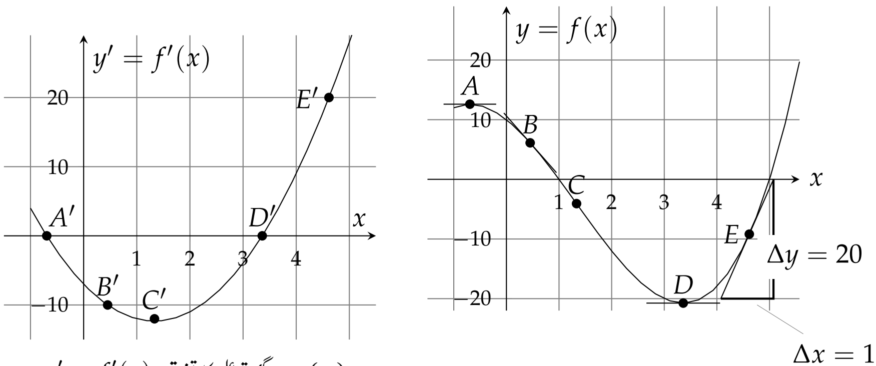
تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباو بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تا کہ ہمیں f کی صورت نظر آئے۔مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان f' سے ہم عموماً f' کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

مثال 3.3: **دوا**
23 اپریل 1988 کو 31 کلو گرام وزنی، ڈیڈلس[3] نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریتی[4] سے جزیرہ سانٹورینی[5] تک اڑا کر 115.11 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔یہ جہاز امریکی یونیورسٹی[6] کے طلبہ نے تیار کیا۔اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل 3.4-ا میں دکھایا گیا ہے۔موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جا سکتا ہے۔تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل 3.4-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر $79\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ سے بڑھ کر $83\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ ہو جاتا ہے۔یوں تبدیلی $\Delta y = 93 - 79 = 14\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ ہے جس کو $\Delta x = 1\,\mathrm{h}$ سے تقسیم کرتے ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}}{\mathrm{h}}$$

---

[3] Daedalus
[4] Crete
[5] Santorini
[6] MIT



(ب) دیے گئے تفاعل کا تفرق $y' = f'(x)$

(ا) دیا گیا تفاعل $y = f(x)$

شکل 3.5: اشکال برائے مثال 3.5

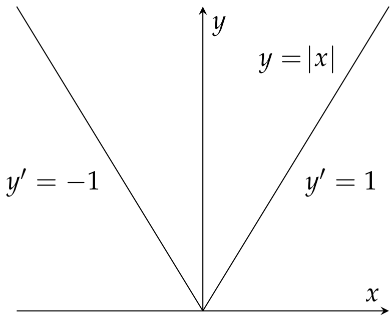
حاصل ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \cdots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ان نقطوں پر تفرقی سیڑھی تفاعل غیر معین ہے۔ □

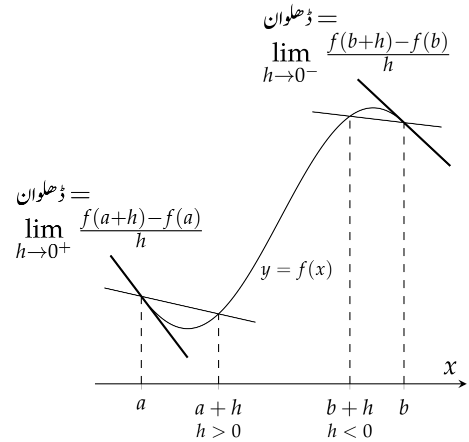
جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.4: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 3.5-ا میں دکھایا گیا ہے۔اس کے تفرق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل: شکل 3.5-ا کے ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔شکل-ا کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔ A سے D تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل 3.5-ب کے مطابقتی نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔نقطہ E پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جا سکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔آپ شکل-ا میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو -10 ہو گا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔شکل-ا میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔ □



شکل 3.7: چونکہ مبدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال 3.5)۔



شکل 3.6: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لا متناہی) پر تفاعل $y=f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a,b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل 3.6)۔

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{پر دائیں ہاتھ تفرق } a$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad \text{پر بائیں ہاتھ تفرق } b$$

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ 2.5 کی بنا کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال 3.5: تفاعل $y=|x|$ وقفہ $(-\infty,0)$ اور $(0,\infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x=0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مبدا کے دائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1\cdot x)=1, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b)=m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot x) = -1$$

ہے (شکل 3.7)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h>0 \text{ تب } |h|=h \text{ ہو گا}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

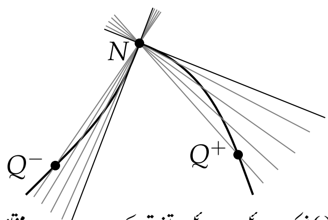
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h<0 \text{ تب } |h|=-h \text{ ہو گا}\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1\end{aligned}$$

□

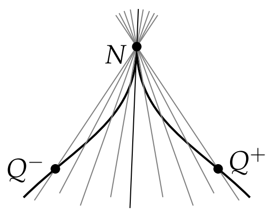
کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہو گا۔ اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

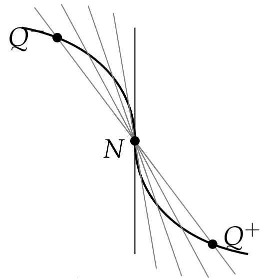
1. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل 3.8-ا)۔
2. راس، جہاں NQ کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ب)۔
3. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کی ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ج)۔
4. عدم استمرار (شکل 3.8-د اور شکل 3.8-ہ)۔



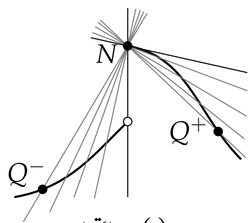
(ا) نوک پر بائیں اور دائیں تفرق ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔



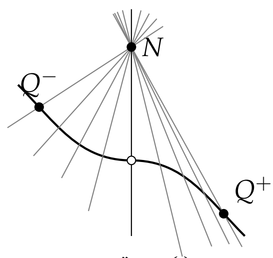
(ب) راس پر ایک طرف سے ڈھلوان ∞ جبکہ دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے۔



(ج) نقطہ N پر مماس انتصابی ہے۔



(د) عدم استمرار



(ہ) عدم استمرار

شکل 3.8: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل نا قابل تفرق ہو گا۔

قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہو گا۔

مسئلہ 3.1: اگر $x = c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x = c$ پر f استمراری ہو گا۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہیں۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\
&= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h
\end{aligned}$$

اب $h \to 0$ لیں۔ مسئلہ 2.1 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x = c$ پر f کا یک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x = c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دائیں) سے استمراری ہو گا۔

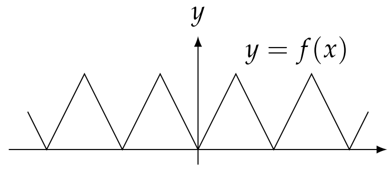
انتباہ مسئلہ 3.1 کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال 3.5 میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y = |x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل 3.9) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

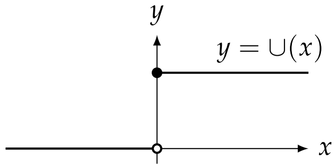
کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائنسٹراس[7] نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

[7] [1815-1897]



شکل 3.9: دندان ترسیم استمراری لیکن لا متناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔



شکل 3.10: اکائی سیڑھی تفاعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے لہٰذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔

یہ کلیہ f کو بڑھتی تعدد کے کوسائن تفاعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔بل کو بل دینے سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کا مماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفاعل جن کا کسی بھی نقطے پر مماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری[8] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفاعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفاعل کسی دوسرے کا تفرقی تفاعل ہو۔درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.2: اگر جس وقفے پر f قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ a اور b پائے جاتے ہیں تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے بیچ ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ 3.2 (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفاعل اس صورت تک کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل 3.10)۔ ایک تفاعل کب کسی دوسرے تفاعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبنٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ان کے جواب کو ہم باب میں دیکھیں گے۔

[8] chaos theory

سوالات

تفرق تفاعل اور قیمتوں کی تلاش

سوال 1 تا سوال 6 میں تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = 4 - x^2; \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$

سوال 2: $F(x) = (x-1)^2 + 1; \quad F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال 3: $g(t) = \frac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$

سوال 4: $k(z) = \frac{1-z}{2z}; \quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال 5: $p(\theta) = \sqrt{3\theta}; \quad p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$

سوال 6: $r(s) = \sqrt{2s+1}; \quad r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال 7 تا سوال 12 میں دیا گیا تفرق حاصل کریں۔

سوال 7: $y = 2x^3; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

سوال 8: $r = \frac{s^3}{2} + 1; \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$

سوال 9: $s = \frac{t}{2t+1}; \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

سوال 10: $v = t - \frac{1}{t}; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

سوال 11: $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$

سوال 12: $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$

ڈھلوان اور مماسی خطوط

سوال 13 تا سوال 16 میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 13: $f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad x = -3$

سوال 14: $k(x) = \frac{1}{2+x}; \quad x = 2$

سوال 15: $s = t^3 - t^2; \quad t = -1$

سوال 16: $y = (x+1)^3; \quad x = -2$

سوال 17 تا سوال 18 میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 17: $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}; \quad (x, y) = (6, 4)$

سوال 18: $g(z) = 1 + \sqrt{4-z}; \quad (z, w) = (3, 2)$

سوال 19 تا سوال 22 میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19: $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1}; \quad s = 1 - 3t^2$

سوال 20: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sqrt{3}}; \quad y = 1 - \frac{1}{x}$

سوال 21: $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}; \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

سوال 22: $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=4}; \quad w = z + \sqrt{z}$

تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ

تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل 3.11 میں سیکنٹ کی ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال 23 تا سوال 26 میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

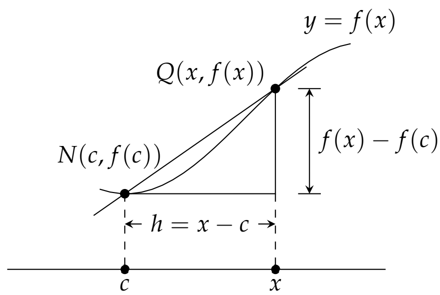
سوال 23: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad c = -1$

سوال 24: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad c = 2$

سوال 25: $g(t) = \frac{t}{t-1}, \quad c = 3$

سوال 26: $k(s) = 1 + \sqrt{s}, \quad c = 9$

ترسیمات



شکل 3.11: حصول تفرق کا متبادل کلیہ

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم