

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	4.1
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	4.2
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	4.3
356	4.3.1 پرکھ	4.3.1
368	4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	4.4
391	4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	4.5
418	4.6 بہترین بنانا	4.6
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	4.7
463	4.8 ترکیب نیوٹن	4.8
475	تکمل	5
475	5.1 غیر قطعی مکملات	5.1
487	5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضاتی نمونہ کشی	5.2
503	5.3 مکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	5.3
514	5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	5.4
532	5.5 ریمان مجموعے اور قطعی مکملات	5.5
559	5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	5.6
576	5.7 بنیادی مسئلہ	5.7
597	5.8 قطعی مکمل میں بدل	5.8
603	5.9 اعدادی مکمل	5.9
603	5.10 قاعدہ ڈورنقہ	5.10
623	تکمل کا استعمال	6
623	6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ	6.1
627	6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد	6.1.1
638	6.2 کلیات کاٹ کر حجم کی تلاش	6.2
646	6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا	6.3
661	6.4 نکلی چھلے	6.4
674	6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں	6.5
685	6.6 سطح طواف کا رقبہ	6.6
697	6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت	6.7
709	6.7.1 وسطانی مرکز	6.7.1
714	6.8 کام	6.8
727	ضمیمہ اول	ا
729	ضمیمہ دوم	ب



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## سوالات

متغیر قوت کا کام

سوال 1: اگر مثال 6.32 میں بوکا کا حجم 20 L ہو لیکن اس میں سوراخ بھی بڑا ہوتا کہ اب بھی بوکا کو کنواں سے نکالتے ہوئے بوکا خالی ہو جاتا ہو۔ بوکا اور سی کی کمیت کو شامل نہ کرتے ہوئے ایک بار بوکا نکالنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔

جواب: 1960 J

سوال 2: فرض کریں کہ مثال 6.32 میں بوکا کو اس رفتار سے اوپر کھینچا جاتا ہے کہ آخر میں بوکا میں 4 L پانی ہوتا ہے۔ پانی نکالنے میں کتنا کام درکار ہو گا؟ بوکا اور سی کی کمیت کو شامل نہ کریں اور بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔

سوال 3: ایک کوہ پیما چٹان سے لگی ہوئی 50 m سی کو اوپر کھینچتا ہے۔ سی کی کثافتی وزن  $0.624 \text{ N m}^{-1}$  ہے۔ کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال 4: ریت کو تھیلے میں ڈال کر 6 m بلند چھت تک برقرار رفتار سے کھینچ کر پہنچایا جاتا ہے۔ تھیلے میں سوراخ سے ریت کا اخراج ہوتا ہے جس کو مستقل تصور کیا جاسکتا ہے۔ ابتدائی طور پر تھیلا میں 50 kg ریت ہوتی ہے جو آخر میں آدھی رہ جاتی ہے۔ سی اور تھیلا کی کمیت کو نظر انداز کرتے ہوئے درکار کام معلوم کریں۔

سوال 5: آج کل بالخصوص بلند عمارتوں میں سیڑھیوں کے ساتھ ساتھ دفع<sup>19</sup> بھی پائے جاتے ہیں۔ رفع کو چھت پر رکھے ہوئے موٹر کی طاقت سے چلایا جاتا ہے۔ کئی لڑیوں پر مشتمل سی کی کثافت  $6 \text{ kg m}^{-1}$  ہونے کی صورت میں صرف سی کو زمین سے 60 m بلند عمارت کی چھت تک اٹھانے میں موٹر کتنا کام کرے گی؟

جواب: 1764 J

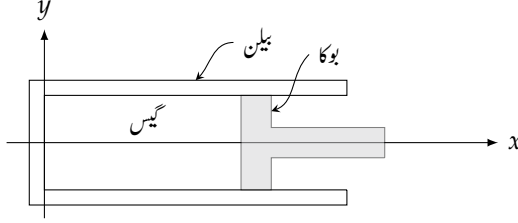
سوال 6: نقطہ  $(x, 0)$  پر پائے جانے والے ذرہ جس کی کمیت  $m$  ہے پر قوت  $F = \frac{k}{x^2}$  عمل کرتی ہے جہاں  $k$  مستقل ہے۔ یہ ذرہ ساکن حال سے شروع ہو کر نقطہ  $b$  سے نقطہ  $a$  پہنچتا ہے جہاں  $0 < a < b$  ہیں۔ اس ذرہ پر کتنا کام ہوا؟

سوال 7: ایک بیلن جس کا رقبہ عمودی تراش  $S$  ہے میں موجود گیس پر میکانی دباؤ ڈالا جاتا ہے (شکل 6.116)۔ اگر گیس کا حجم  $V$  اور اس کا دباؤ  $p$  ہو تب دکھائیں کہ گیس کو  $(p_1, V_1)$  حال سے  $(p_2, V_2)$  حال تک پہنچانے میں درج ذیل کام درکار ہو گا؟

$$W = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p dV$$

(اشارہ: شکل 6.116 کو دیکھ کر بوکا پر قوت کو  $F = pS$  اور چھوٹے حجم کو  $dV = S dx$  لکھا جاسکتا ہے۔)





شکل 6.116: گاڑی کا انجن ایک پیلن جس میں بوکا چلتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ بوکے کی حرکت سے گیس کا حجم اور دباؤ تبدیل ہوتے ہیں (سوال 7)۔

سوال 8: اگر گیس کا ابتدائی حجم  $V_1 = 1500 \text{ cm}^3$ ، ابتدائی دباؤ  $103360 \text{ N m}^{-2}$  اور اختتامی حجم  $200 \text{ cm}^3$  ہو تب سوال 7 کے نکل سے کام دریافت کریں۔ یہاں آپ فرض کریں کہ گیس کا دباؤ ایک حرارت ناگزیر عمل<sup>20</sup> ہے جس میں حراری توانائی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ حرارت ناگزیر عمل کے قانون کے تحت  $pV^{1.4} = c$  ہو گا جہاں  $c$  مستقل ہے۔

اسپرنگ

سوال 9: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی  $2 \text{ m}$  ہے کی لمبائی کو  $5 \text{ m}$  بنانے کے لئے درکار کام  $1800 \text{ J}$  ہے۔ اس اسپرنگ کا مقیاس پلک تلاش کریں۔

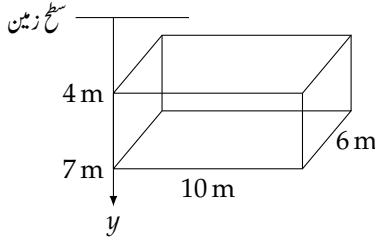
سوال 10: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی  $30 \text{ cm}$  ہے پر  $400 \text{ N}$  قوت لاگو کرتے ہوئے اس کو کھینچ کر  $45 \text{ cm}$  لمبائی تک پھینچا جاتا ہے۔ (i) مقیاس پلک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کی لمبائی کو  $35 \text{ cm}$  کرنے کے لئے کتنی قوت درکار ہو گی؟ (ج) قدرتی لمبائی سے  $600 \text{ N}$  قوت اسپرنگ کی لمبائی کو کتنا زیادہ کرتی ہے؟

سوال 11: ایک ربڑی پٹی کی لمبائی کو  $2 \text{ N}$  کی قوت  $2 \text{ cm}$  بڑھاتی ہے۔ ربڑی پٹی پر قانون ہک کا اطلاق ہوتا ہے۔ ربڑی پٹی کی لمبائی کو  $4 \text{ N}$  کی قوت کتنا بڑھائے گی اور یہ قوت کتنا کام کرے گی؟

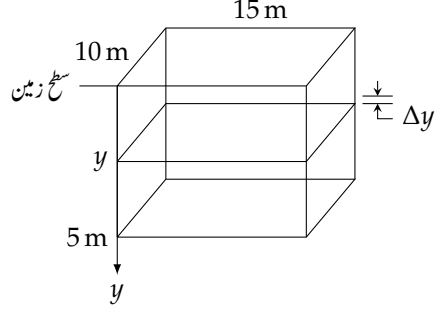
سوال 12: اگر  $90 \text{ N}$  کی قوت اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے  $1 \text{ m}$  زیادہ کرتی ہو تب اسپرنگ کی قدرتی لمبائی سے اس کی لمبائی کو  $5 \text{ m}$  زیادہ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال 13: ریل گاڑی کے ڈبوں پر نسب اسپرنگ ان ڈبوں کو ایک دوسرے سے دور رکھتے ہیں اور ان کی ٹکراؤ کو محفوظ بناتے ہیں۔ ایسا ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی  $20 \text{ cm}$  ہے پر  $100000 \text{ N}$  کی قوت لاگو کرنے سے اسپرنگ کی کم سے کم لمبائی  $12 \text{ cm}$  حاصل ہوتی ہے۔ (i) اسپرنگ کا مقیاس پلک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کو پہلا  $\text{cm}$  دبانے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا۔ اس کو دوسرا سنی میٹر دبانے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

جواب: (i)  $1.25 \times 10^6 \text{ N m}^{-1}$ ، (ب)  $62.5 \text{ J}$ ،  $187.5 \text{ J}$



شکل 6.118: زیر زمین حوض (سوال 16)



شکل 6.117: زیر زمین حوض (سوال 15)

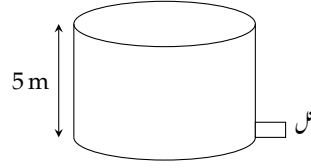
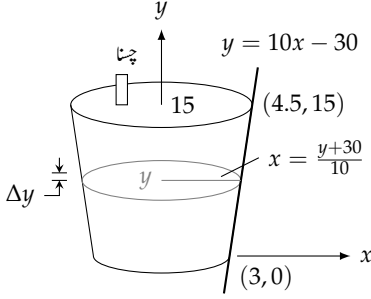
سوال 14: گھریلو استعمال کے ترازو پر 74 kg کا شخص کھڑا ہونے سے ترازو 1.5 mm دبتا ہے۔ فرض کریں کہ یہ ترازو قانون ہک کے تحت کام کرتا ہے۔ ایک شخص، جس کا ترازو پر کھڑا ہونے سے ترازو 3 mm دبتا ہو، کا وزن کتنا ہو گا؟

پانی کی نکاسی  
ثقلی اسراع کی قیمت کو عموماً  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  لیا جاتا ہے۔ حقیقت میں سطح سمندر پر اس کی قیمت قطبین پر  $9.832 \text{ m s}^{-2}$  اور عرضی خط استوا پر  $9.780 \text{ m s}^{-2}$  ہے۔ ان دو قیمتوں میں فرق تقریباً 0.5% ہے۔

سوال 15: بارانی علاقوں میں بارش کے پانی کو زیر زمین حوض میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ زیر زمین حوض جس کو شکل 6.117 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (i) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب)  $0.25 \text{ kW}$  کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) دکھائیں کہ ابتدائی 5 گھنٹوں میں تقریباً آدھا حوض خالی ہو جائے گا۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟  
جواب: (i)  $18.375 \times 10^6 \text{ J}$ ، (ب) 20 گھنٹے اور 25 منٹ۔ (د) 20 گھنٹے اور 22.5 منٹ، 20 گھنٹے اور 29 منٹ۔

سوال 16: زیر زمین حوض جس کو شکل 6.118 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کا کنارہ سطح زمین سے 4 m نیچے ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (i) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب)  $0.25 \text{ kW}$  کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) آدھا حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟ (پورا حوض خالی کرنے کے نصف دورانیہ سے کم وقت درکار ہو گا)۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟

سوال 17: اگر حوض کے کنارے سے 4 m بلند کی بجائے حوض کے کنارے تک پانی کو اٹھایا جائے تب مثال 6.35 میں کتنا کام درکار ہو گا؟  
جواب:  $38484510 \text{ J}$



شکل 6.119: بیلنی حوض (سوال 20)

شکل 6.120: مخروط مقطوع ڈبیا (پیناکش سنٹی میٹروں میں ہے۔)

سوال 18: اگر مثال 6.35 میں حوض آدھا بھرا ہو تب حوض کے کنارے سے 4 m بلندی تک پانی کو پہنچانے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟  
جواب:  $19.95 \times 10^6 \text{ J}$

سوال 19: ایک بیلنی حوض جس کا رداس 4 m اور قد 10 m ہے مٹی کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ مٹی کے تیل کی کثافت  $0.81 \text{ g cm}^{-3}$  ہے۔ تمام تیل کو حوض کے بالائی کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال 20: ایک حوض جس کا قد 5 m ہے سطح زمین پر پڑا ہوا ہے (شکل 6.119)۔ قدرتی پانی سطح زمین سے 7 m نیچے ہے۔ حوض کو اس پانی سے دو طرح بھرا جاسکتا ہے۔ (i) پمپ کے خارجی پائپ کو حوض کے کنارے پر رکھ کر حوض کو بھرا جاسکتا ہے۔ (ب) حوض کے نیچے سر پر موجود تل کے ذریعہ پانی کو حوض تک منتقل کیا جاسکتا ہے۔ دونوں ترائیکب میں کونسا بہتر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 21: ایک مشروب جس کی کثافت  $2 \text{ g cm}^{-3}$  ہے سے مخروط مقطوع ڈبیا بھرا ہوا ہے (6.120)۔ اس ڈبیا کا بالائی رداس 4.5 cm، زیریں رداس 3 cm اور گہرائی 15 cm ہے۔ مشروب کو چسنا کے ذریعہ پیا جاتا ہے جو ڈبیا کی بالائی سطح سے 2.5 cm باہر نکلا ہوا ہے۔ پورا مشروب پینے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

