احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 12

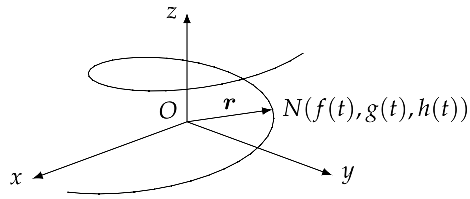
سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت

سر سری جائزہ جب کوئی جسم فضا میں حرکت کرتا ہو، مساوات $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ جو اس جسم کے محدد کو بطور وقت کا تفاعل دیتی ہیں، اس جسم کی راہ اور حرکت کی مقدار معلوم مساوات ہوں گی۔ سمتیہ علامتیت کی مدد سے ہم انہیں ایک مساوات $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں جو اس جسم کا مقام بطور وقت کا سمتی تفاعل دیتی ہے۔

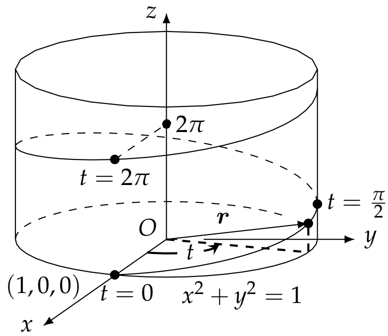
اس باب میں ہم احصاء استعمال کرتے ہوئے حرکت پذیر اجسام کی راہ، سمتی رفتار اور اسراع پر غور کریں گے۔ ہم گولا، سیارہ اور مصنوعی سیارہ کی راہ اور حرکت کے عمومی سوالات کے جوابات جان سکے گے۔ آخر حصہ میں ہم نیوٹن کے قوانین اور تجاذب کی مدد سے سیاروں کی مدار کے قوانین کیپلر دریافت کریں گے۔

12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

فضا میں متحرک ذرہ کی حرکت جاننے کی خاطر ہم مبدا سے اس ذرہ تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ لے کر $\boldsymbol{r}$ میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں (شکل 12.1)۔ اگر اس ذرہ کے محدد مقام وقت کے ساتھ دو بار قابل تفرق ہوں، تب $\boldsymbol{r}$ بھی ایسا ہو گا، اور ہم کسی بھی لمحہ پر وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کے تفرق لے کر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور اسراع جان سکتے ہیں۔ اگر ہمیں اس ذرہ کی سمتیہ سمتی رفتار یا سمتیہ اسراع بطور وقت کے استمراری تفاعل معلوم ہو اور ہمیں ذرے کی ابتدائی مقام اور سمتیہ رفتار کے بارے میں معقول معلومات ہو، تب ہم تکمل کی مدد سے، وقت کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ جان سکتے ہیں۔



شکل 12.1: فضا میں متحرک ذرہ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{ON}$ متغیر t کا تفاعل ہو گا۔



شکل 12.2: پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کا بالائی نصف حصہ

تعریف

جب وقفہ I کے دوران ایک ذرہ فضا میں حرکت کرتا ہو، ہم اس ذرہ کے محدد جو وقت کے تفاعل ہو گے کی تعریف درج ذیل کرتے ہیں۔

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \tag{12.1}$$

نقاط $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)),\ t \in I$ فضا میں وہ **منحنی** دیتے ہیں جنہیں ہم اس ذرے کی راہ[1] کہتے ہیں۔ مساوات 12.1 اس منحنی کی **مقدار معلوم روپ** ہے۔ مبدا سے ذرے کے **مقام** $N(f(t), g(t), h(t))$ تک لمحہ t پر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{ON} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

اس ذرے کا **تعین گر سمتیہ**[2] ہے۔ تفاعل f ، g اور h تعین گر سمتیہ کے **اجزاء** ہیں۔ ذرے کی راہ سے مراد وقفہ t کے دوران $\boldsymbol{r}$ کی پیدا کردہ منحنی ہے۔

مساوات 12.1 سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی تعریف وقفہ I پر حقیقی متغیر t کی صورت میں دیتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر دائرہ کار، سلسلہ D ، پر **سمتی تفاعل**[3] یا **سمتی قیمت تفاعل**[4] سے مراد وہ قاعدہ ہو گا جو D کے ہر رکن کو فضا میں ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ موجودہ استعمال میں دائرہ کار حقیقی اعداد کے وقفوں پر مشتمل ہوں گے۔ بعد کے ایک باب میں دائرہ کار، مستوی یا فضا میں خطوں پر مشتمل ہوں گے جہاں ہم سمتی تفاعل کو سمتی میدان کہیں گے۔

[1] path
[2] position vector
[3] vector function
[4] vector-valued function

ہم حقیقی قیمت تفاعل کو **غیر سمتی تفاعل**[5] کہتے ہیں تا کہ ان میں اور سمتی تفاعل میں فرق کرنا ممکن ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے اجزاء t کے غیر سمتی تفاعل ہیں۔ سمتی تفاعل کی تعریف اس کے ارکان تفاعل کی صورت میں دیتے وقت ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل کا دائرہ کار ہی ارکان کے دائرہ کار ہیں۔

مثال 12.1: پیچ دار تفاعل
تمام حقیقی متغیر t کے لئے سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

معین ہے اور $\boldsymbol{r}$ دائری نلکی $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد لپٹ کر چلتا ہے (شکل 12.2)۔ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اجزاء جو $\boldsymbol{r}$ کے سر کے x اور y محدد ہیں دائری نلکی کی مساوات

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{r}$ اس نلکی پر پایا جاتا ہے۔ متغیر t بڑھنے $\boldsymbol{k}$ جزو بڑھتا ہے جس کی بنا منحنی اوپر بلند ہو گی۔ نلکی کے گرد ایک دائرہ $t = 2\pi$ پر مکمل ہو گا۔ درج ذیل مساوات پیچ دار تفاعل کی مقدار معلوم مساوات ہے، جہاں وقفہ $-\infty \le t \le \infty$ ہے۔

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

□

حد اور استمرار

ہم سمتی قیمت تفاعل کے حد کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کے حد کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{r} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل اور $\boldsymbol{L}$ ایک سمتیہ ہے۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایک ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام t کے لئے

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \implies \quad \left|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{L}\right| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جب t کی قیمت t_0 کے قریب تر ہو تب $\boldsymbol{r}$ کا **حد**[6] $\boldsymbol{L}$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$$

□

---

[5] scalar functions
[6] limit

اگر $\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{i} + L_2\boldsymbol{j} + L_3\boldsymbol{k}$ ہو تب $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$ ٹھیک اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t\to t_0} h(t) = L_3$$

درج ذیل مساوات سمتی تفاعل کا حد تلاش کرنے کی عملی ترکیب دیتی ہے۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \Big(\lim_{t\to t_0} f(t)\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to t_0} g(t)\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to t_0} h(t)\Big)\boldsymbol{k} \tag{12.2}$$

مثال 12.2: اگر $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} &= \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\Big)\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

ہم سمتی تفاعل کی استمرار کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کی استمرار کی تعریف کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: اگر $\boldsymbol{r}(t)$ کے دائرہ کار میں نقطہ t_0 پر $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$ ہو تب $\boldsymbol{r}(t)$ اس **نقطہ پر استمراری**[7] ہو گا۔ اگر اپنے پورے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب یہ تفاعل **استمراری**[8] ہو گا۔

□

چونکہ حد کو اجزاء کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی تفاعل کو استمرار کے لئے پرکھنے کی خاطر ہم اس کے اجزاء پر نظر ڈالتے ہیں۔

ایک نقطہ پر ارکان کے استمرار کا پرکھ

نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت استمراری ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h استمراری ہوں۔

مثال 12.3: (ا) درج ذیل تفاعل اس لئے استمراری ہے کہ $\cos t$ ، $\sin t$ اور t استمراری ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

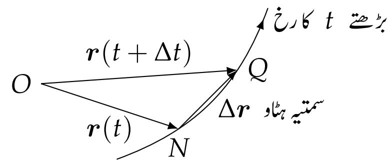
(ب) درج ذیل تفاعل ہر عدد صحیح پر عدم استمراری ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \lfloor t \rfloor\,\boldsymbol{k}$$

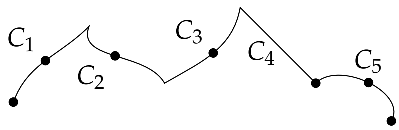
□

---

[7] continuous at a point
[8] continuous



شکل 12.3: لمحات t اور $t+\Delta t$ کے بیچ ایک ذرے کا ہٹاو $\overrightarrow{NQ}=\Delta \boldsymbol{r}$ ہو گا۔ نیا سمتی مجموعہ $\boldsymbol{r}(t)+\Delta \boldsymbol{r}$، ذرے کا نیا مقام $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ دے گا۔



شکل 12.4: پانچ ہموار منحنیات کو ساتھ ساتھ جوڑ کر ٹکڑوں میں ہموار منحنی حاصل کی گئی ہے۔

تفرقات اور حرکت

فرض کریں فضا میں ایک متحرک ذرہ جو ایک منحنی پر چل رہا ہو کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f، g اور h متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ایسی صورت میں لمحات t اور $t+\Delta t$ پر اس ذرے کے مقام میں فرق

$$\Delta \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

ہو گا جس کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 12.3)۔

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\\
&= [f(t+\Delta t)\boldsymbol{i}+g(t+\Delta t)\boldsymbol{j}+h(t+\Delta t)\boldsymbol{k}]-[f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}]\\
&= [f(t+\Delta t)-f(t)]\boldsymbol{i}+[g(t+\Delta t)-g(t)]\boldsymbol{j}+[h(t+\Delta t)-h(t)]\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

اب اگر Δt صفر کے قریب ہونے کی کوشش کرے تب تین اقدام بیکوقت ہوتے نظر آئیں گے۔اول، منحنی پر چلتے ہوئے Q نقطہ N تک پہنچے گا۔ دوسرا، سیکنٹ خط NQ نقطہ N پر منحنی کے تحدیدی مماسی مقام پر پہنچے گا۔ تیسرا، حاصل تقسیم $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ درج ذیل حد تک پہنچے گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} &= \Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{i}+\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{j}\\
&\quad+\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{k}\\
&= \Big[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{i}+\Big[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{j}+\Big[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

یوں ماضی کے تجربات ہمیں درج ذیل تعریف تک پہنچاتے ہیں۔

تعریف: نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب t_0 پر f، g اور h قابل تفرق ہوں۔ اس طرح اگر $\boldsymbol{r}$ اپنے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو گا۔ کسی بھی نقطہ t پر جہاں $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو، اس کا تفرق درج ذیل سمتیہ ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

اگر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری اور کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہ ہو، یعنی جب f ، g اور h کے استمراری پہلے تفرق پائے جاتے ہوں اور جو بیکوقت 0 نہ ہوں، تب جس منحنی پر $\boldsymbol{r}$ چلتا ہو وہ **ہموار**[9] ہو گی۔

□

سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ جب $\mathbf{0}$ سے مختلف ہو، یہ منحنی کا مماسی سمتیہ ہو گا۔ نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ پر ایک منحنی کے **مماسی خط** سے مراد وہ خط ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہو اور جو t_0 پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے متوازی ہو۔ ہم ہموار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \neq \mathbf{0}$ کی شرط رکھ کر اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ ہر نقطہ پر منحنی کا مماس استمراری طور پر مڑے گا۔ ایک ہموار منحنی پر سخت موڑ نہیں پایا جاتا ہے اور نا ہی اس پر کوئی کنگرہ پایا جاتا ہے۔

ایک منحنی جو متناہی تعداد کی ہموار منحنیات (بغیر خالی فاصلہ چھوڑے، ساتھ ساتھ) ملا کر حاصل کی گئی ہو **ٹکڑوں میں ہموار**[10] کہلاتی ہے (شکل 12.4)۔

شکل 12.4 پر ایک بار دوبارہ نظر ڈالیں۔ ہم نے اس شکل کو مثبت Δt کے لئے بنایا لہٰذا $\Delta\boldsymbol{r}$ آگے چلنے کی طرف اشارہ کرے گا۔ سمتیہ $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ (جسے دکھایا نہیں گیا ہے اور) جس کا وہی رخ ہے جو $\Delta\boldsymbol{r}$ کا ہے بھی آگے کی رخ اشارہ کرے گا۔ اگر Δt منفی ہوتا تب $\Delta\boldsymbol{r}$ چلنے کے مخالف رخ اشارہ کرے گا البتہ حاصل تقسیم $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جو $\Delta\boldsymbol{r}$ کا منفی غیر سمتی مضرب ہے اب بھی چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ ہم نے دیکھا کہ $\Delta\boldsymbol{r}$ جس رخ بھی اشارہ کرتا ہو، $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرتا ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جب $\mathbf{0}$ نہ ہو، بھی ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ اس طرح ایک ذرہ کی سمتی رفتار کو ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ چلنے کی رخ دیتا ہے اور اس کی شرح، وقت کے لحاظ سے مقام کی تبدیلی دیتا ہے۔ ایک ہموار منحنی کے لئے سمتی رفتار کبھی بھی صفر نہیں ہو گا؛ یہ ذرہ نا کبھی رکتا ہے اور نا ہی یہ واپسی اختیار کرتا ہے۔

تعریف: اگر فضا میں ہموار منحنی پر چلتے ہوئے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

اس ذرے کی **سمتی رفتار**[11] ہو گی جو اس منحنی کو مماسی ہو گی۔ کسی بھی لمحہ t پر، $\boldsymbol{v}$ کا رخ **چلنے کا رخ** ہو گا، $\boldsymbol{v}$ کی مقدار اس ذرے کی رفتار ہو گی، اور تفرق $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ ، جب پایا جاتا ہو، اس ذرے کی **اسراع**[12] ہو گی۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

ا. مقام کا تفرق، سمتی رفتار ہو گا: $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

ب. سمتی رفتار کی مقدار، ذرے کی رفتار ہو گی: رفتار $= |\boldsymbol{v}|$

smooth[9]
piecewise smooth[10]
velocity[11]
acceleration[12]

ج. سمتی رفتار کا تفرق، اسراع ہو گا: $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

د. لمحہ t پر چلنے کا رخ سمتیہ $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ دیگا۔

□

ہم متحرک ذرے کی سمتی رفتار کو اس کی رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{سمتی رفتار} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right) = (\text{رفتار})(\text{رخ})$$

مثال 12.4: لمحہ t پر ایک متحرک جسم کا مقام سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$$

دیتا ہے۔ اس جسم کی رفتار اور رخ لمحہ $t = 2$ پر معلوم کریں۔ کس لمحہ پر (اگر کبھی ایسا ہو بھی) اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع آپس میں عمودی ہوں گے؟

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(3\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

لمحہ $t = 2$ پر اس جسم کی رفتار اور رخ درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\text{رفتار} && \left|\boldsymbol{v}(2)\right| = \sqrt{(-3\sin 2)^2 + (-3\cos 2)^2 + (4)^2} = 5\\
&\text{رخ} && \frac{\boldsymbol{v}(2)}{\left|\boldsymbol{v}(2)\right|} = -\Big(\frac{3}{5}\sin 2\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{3}{5}\cos 2\Big)\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

جس لمحہ پر $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں اس لمحہ پر $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 4t = 0$$

سے $t = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لمحہ پر سمتی رفتار اور اسراع ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔ □

قواعد تفرقات

چونکہ سمتی تفاعل کے تفرقات جزو در جزو حاصل کرنا ممکن ہے لہٰذا سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی نوعیت غیر سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی طرح ہو گی۔

سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد

قاعدہ مستقل تفاعل: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ جہاں $\boldsymbol{C}$ ایک مستقل سمتیہ ہے۔

اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں اور f متغیر t کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

قاعدہ غیر سمتی مضرب: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\boldsymbol{u})=c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ جہاں c مستقل عدد ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u})=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}+f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

قاعدہ مجموعہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ فرق: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب نقطہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب صلیبی: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ زنجیر: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ جہاں $\boldsymbol{r}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور t متغیر s کا قابل تفرق تفرق ہے۔

صلیبی ضرب میں سمتیات کی ترتیب نہایت اہم ہے۔یوں اگر بائیں ہاتھ $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ آئے، تب دائیں ہاتھ بھی $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ ہو گا۔ایسا نہ کرنے سے قیمت کی علامت تبدیل ہو گی۔

ہم قاعدہ ضرب اور زنجیری قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ باقی ثبوت آپ کو مشق میں پیش کرنے ہوں گے۔

ثبوت : قاعدہ ضرب نقطہ
درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=u_1(t)\boldsymbol{i}+u_2(t)\boldsymbol{j}+u_3(t)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{v}&=v_1(t)\boldsymbol{i}+v_2(t)\boldsymbol{j}+v_3(t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)\\ &= \underbrace{u_1'v_1+u_2'v_2+u_3'v_3}_{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}}+\underbrace{u_1v_1'+u_2v_2'+u_3v_3'}_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}\end{aligned}$$

□

ثبوت : قاعدہ ضرب صلیبی
ہم غیر سمتی تفاعل کے قاعدہ ضرب کی طرح اس کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کی رو سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)}{h}$$

ہو گا۔ ہم شمار کنندہ کے ساتھ $\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)$ جمع اور منفی کرتے ہیں تا کہ درج بالا کو ایسی حاصل تقسیمات کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جن میں $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے تفرقات پائے جاتے ہوں۔یوں درج ذیل ہو گا۔

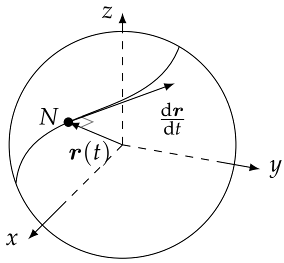
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{h}\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\Big[\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\Big]\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to 0}\boldsymbol{v}(t+h)+\lim_{h\to 0}\boldsymbol{u}(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\end{aligned}$$

آخری لکیر پر دونوں مساوات اس لئے ٹھیک ہیں کہ دو سمتیات کے سمتی ضرب کا حد، ان کے حدوں کا سمتی ضرب ہوتا ہے۔ چونکہ t پر $\boldsymbol{v}$ قابل تفرق لہٰذا استمراری ہے، اس لئے جیسے جیسے h کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے ویسے ویسے $\boldsymbol{v}(t+h)$ کی قیمت $\boldsymbol{v}(t)$ تک پہنچتی ہے۔ ان دو حاصل تقسیم کی قیمتیں t پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ تک پہنچتی ہیں۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

□

ثبوت : زنجیری قاعدہ
فرض کریں $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے اور t از خود کسی متغیر s کا قابل



شکل 12.5: اگر ایک ذرہ ایک کرہ پر یوں حرکت کرتا ہو کہ اس کی مقام $\boldsymbol{r}$ وقت کا قابل تفرق تفاعل ہو، تب $\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=0$ ہو گا۔

تفرق غیر سمتی تفاعل ہے۔ تب f ، g اور h متغیر s کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور حقیقی قیمت تفاعل کے زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\
&= \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

□

مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل

ایک کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر جو جسم حرکت کرتا ہو، اس جسم کے تعین گر سمتیہ کی لمبائی اس کرہ کے رداس جتنی ہو گی (شکل 12.5)۔اس کا سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ، جو حرکت کی راہ کو مماسی ہو گا، اس کرہ کو مماسی ہو گا، لہٰذا $\boldsymbol{r}$ کو قائمہ ہو گا۔ مستقل لمبائی والے قابل تفرق سمتی تفاعل کے لئے ہر بار ایسا ہی ہو گا۔ ایسا سمتیہ اور اس کا پہلا تفرق ایک دوسرے کو عمودی ہوں گے۔ لمبائی مستقل ہونے کی بدولت، سمتیہ میں تبدیلی درحقیقت سمتیہ کے رخ میں تبدیلی ہو گی اور رخ کی یہ تبدیلی سمتی تفاعل کے ساتھ زاویہ قائمہ پر ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہو اور اس کی لمبائی اٹل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{12.3}$$

□

یہ دیکھنے کی خاطر کہ مساوات 12.3 کیوں درست ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $|\boldsymbol{u}|$ ایک مستقل قیمت ہے۔ یوں $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{u}|^2$ ایک مستقل ہو گا اور ہم اس مساوات کی دونوں اطراف کا تفرق لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{مستقل}) = 0\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= 0 && \text{قاعدہ ضرب نقطہ میں } \boldsymbol{v}=\boldsymbol{u} \text{ لیتے ہوئے}\\
2\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= 0 && \text{ضرب نقطہ قابل تبادل ہے}\\
\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= 0
\end{aligned}$$

مثال 12.5: دکھائیں کہ درج ذیل سمتیہ کی لمبائی مستقل ہے اور اس سمتیہ کا تفرق اور $\boldsymbol{u}$ آپس میں عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{u}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}$$

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(t) &= (\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{k}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}\\
\left|\boldsymbol{u}(t)\right| &= \sqrt{(\sin t)^2+(\cos t)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{+3}=2\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j}\\
\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \sin t\cos t-\sin t\cos t=0
\end{aligned}$$

□

سمتی تفاعل کے تکملات

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}$ ہو تب قابل تفرق سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}(t)$، وقفہ I پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا الٹ تفرق ہو گا۔ اگر I پر $\boldsymbol{r}$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب، ایک وقت میں ایک جزو کے ساتھ کام کرتے ہوئے، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرق کی صورت $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}$ ہو گی جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہو گا۔ وقفہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرقات کا سلسلہ I پر $\boldsymbol{r}$ کا **غیر قطعی تکمل**[13] ہو گا۔

[13] indefinite integral

تعریف: متغیر t کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کا غیر قطعی تکمل، $\boldsymbol{r}$ کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ ہو گا، جس کو $\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\boldsymbol{r}$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C} \qquad \text{مستقل سمتیہ ہے } \boldsymbol{C}$$

□

غیر قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے۔

مثال 12.6:

$$\begin{aligned}
\int ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k} \\
&= (\sin t + C_1)\boldsymbol{i} + (t + C_2)\boldsymbol{j} - (t^2 + C_3)\boldsymbol{k} \\
&= (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} - C_3\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

غیر سمتی تفاعل کے تکمل کی طرح یہاں بھی، درمیانے دو قدم کے بغیر، آپ بائیں ہاتھ سے سیدھا نتیجہ لکھ سکتے ہیں۔ □

سمتی تفاعل کے قطعی تکمل کی تعریف اس کے اجزاء کی صورت میں کی جاتی ہے۔

تعریف: اگر وقفہ $[a,b]$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کے اجزاء قابل تفرق ہوں تب اس وقفہ پر $\boldsymbol{r}$ بھی قابل تفرق ہو گا اور a تا b سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کا قطعی تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}$$

□

قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے۔

مثال 12.7:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_0^\pi \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int_0^\pi 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k} \\
&= \Big[\sin t\Big]_0^\pi \boldsymbol{i} + \Big[t\Big]_0^\pi \boldsymbol{j} - \Big[t^2\Big]_0^\pi \\
&= [0-0]\boldsymbol{i} + [\pi - 0]\boldsymbol{j} - [\pi^2 - 0^2]\boldsymbol{k} \\
&= \pi\boldsymbol{j} - \pi^2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

□

مثال 12.8: ذرے کے ابتدائی مقام اور ابتدائی سمتی رفتار سے اس کے مقام کا حصول
فضا میں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا سمتی رفتار

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

ہے۔اگر لمحہ $t=0$ پر اس ذرے کا مقام $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$ ہو تب لمحہ t پر اس کا مقام کیا ہو گا؟

حل: ہمیں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرنا ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0)=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے تکمل کا مستقل $\boldsymbol{C}$ معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(\sin 0)\boldsymbol{i}+(\cos 0)\boldsymbol{j}+(0)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}&=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k} &\qquad \boldsymbol{r}(0)=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j}+\boldsymbol{C}&=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{C}&=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

وقت t کے لحاظ سے ذرے کا مقام درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t)=(\sin t+2)\boldsymbol{i}+(\cos t-1)\boldsymbol{j}+(t+1)\boldsymbol{k}$$

حاصل نتیجہ کو پرکھنے کی خاطر ہم اس سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}&=(\cos t+0)\boldsymbol{i}+(-\sin t-0)\boldsymbol{j}+(1+0)\boldsymbol{k}\\ &=(\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(0)&=(\sin 0+2)\boldsymbol{i}+(\cos 0-1)\boldsymbol{j}+(0+1)\boldsymbol{k}\\ &=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

مستوی xy میں حرکت

سوال 1 تا سوال 4 میں مستوی xy میں لمحہ t پر ایک ذرے کا مقام $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی راہ کی ترسیم کے x اور y محدد کی مساواتیں تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع سمتیات دریافت کریں۔

سوال 1: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j}, \quad t = 1$

سوال 2: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2+1)\boldsymbol{i} + (2t-1)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{1}{2}$

سوال 3: $\boldsymbol{r}(t) = e^t\boldsymbol{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\boldsymbol{j}, \quad t = \ln 3$

سوال 4: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (3\sin 2t)\boldsymbol{j}, \quad t = 0$

سوال 5 تا سوال 8 میں مستوی xy میں مختلف منحنیات پر حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ دیا گیا ہے۔ دیے گئے لمحات پر اس ذرے کے سمتی رفتار اور اسراع کے سمتیات دریافت کریں۔ ان سمتیات کو منحنی پر ترسیم کریں۔

سوال 5: دائرہ $x^2+y^2=1$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

سوال 6: دائرہ $x^2+y^2=16$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (4\cos\frac{t}{2})\boldsymbol{i} + (4\sin\frac{t}{2})\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال 7: تدویر $x = t-\sin t,\ y = 1-\cos t$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (t-\sin t)\boldsymbol{i} + (1-\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال 8: قطع مکافی $y = x^2+1$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t^2+1)\boldsymbol{j},\ t = -1, 0, 1$

فضا میں سمتی رفتار اور اسراع

سوال 9 تا سوال 14 میں لمحہ t پر ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔ دئے گئے لمحہ پر اس کی رفتار اور رخ کی قیمت تلاش کریں۔ اس لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار کو رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال 9: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 10: $\boldsymbol{r}(t) = (1+t)\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{3}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 11: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

سوال 12: $\boldsymbol{r}(t) = (\sec t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + \frac{4}{3}t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

سوال 13: $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln(t+1))\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 14: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t})\boldsymbol{i} + (2\cos 3t)\boldsymbol{j} + (2\sin 3t)\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 15 تا سوال 18 میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی سمتی رفتار اور اسراع کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال 15: $\boldsymbol{r}(t) = (3t+1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3}t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$

سوال 16: $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}t)\boldsymbol{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2)\boldsymbol{j}$

سوال 17: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2+1))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}$

سوال 18: $\boldsymbol{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\boldsymbol{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}t\boldsymbol{k}$

سوال 19 اور سوال 20 میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ دیے گئے وقفہ میں وہ لمحہ یا لمحات تلاش کریں جن پر سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع سمتیہ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

سوال 19: $\boldsymbol{r}(t) = (t-\sin t)\boldsymbol{i} + (1-\cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 20: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (\cos t)\boldsymbol{k}, \quad t \ge 0$

سمتی قیمت تفاعل کا تکمل

سوال 21 تا سوال 26 میں تکمل حاصل کریں۔

سوال 21: $\int_0^1 [t^3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

سوال 22: $\int_1^2 \left[(6-6t)\boldsymbol{i} + 3\sqrt{t}\boldsymbol{j} + \frac{4}{t^2}\boldsymbol{k}\right] \mathrm{d}t$

سوال 23: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\boldsymbol{i} + (1+\cos t)\boldsymbol{j} + (\sec^2 t)\boldsymbol{k}] \,\mathrm{d}t$

سوال 24: $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + (2\sin t \cos t)\boldsymbol{k}] \,\mathrm{d}t$

سوال 25: $\int_1^4 [\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{5-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2t}\boldsymbol{k}] \,\mathrm{d}t$

سوال 26: $\int_0^1 [\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\boldsymbol{k}] \,\mathrm{d}t$

سمتی تفاعل کے ابتدائی قیمت مسائل

سوال 27 تا سوال 32 میں t کے سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے ابتدائی قیمت مسائل دیے گئے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 27:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -t\boldsymbol{i} - t\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 28:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (180t)\boldsymbol{i} + (180t - 16t^2)\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 29:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{t+1}\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 30:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (t^3+4t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 31:

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -32\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرائط}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 8\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$$

سوال 32:

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 10\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرائط}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \boldsymbol{0}$$

ہموار منحنیات کے مماسی خط

ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کا $t = t_0$ پر مماسی خط نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ سے گزرتا ہے اور، t_0 پر اس منحنی کے سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}(t_0)$ ، کا متوازی ہوتا ہے (متن میں بتایا گیا)۔ سوال 33 تا سوال 36 میں $t = t_0$ پر دیے گئے منحنی کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال 33: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (t^2 - \cos t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 0$

سوال 34: $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t)\boldsymbol{i} + (2\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 4\pi$

سوال 35: $\boldsymbol{r}(t) = (a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 2\pi$

سوال 36: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (\sin 2t)\boldsymbol{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

دائری راہ پر حرکت

سوال 37: اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر ایک ذرہ کے حرکت کو (ا) تا (د) میں دی گئی مساوات ظاہر کرتی ہیں۔اگرچہ (ا) تا (د) میں ذرے کا راہ ایک ہے، ان راہ پر اس کا حرکی رویہ مختلف ہے۔ ہر راہ پر درج ذیل کے جوابات دیں۔

1. کیا ذرے کی رفتار مستقل ہے؟ اگر ایسا ہو، تب اس کی رفتار کتنی ہے؟

2. کیا ذرے کا سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع آپس میں ہر جگہ عمودی ہیں؟

3. کیا یہ ذرہ اکائی دائرے پر گھڑی کے رخ یا اس کے مخالف رخ گھومتا ہے؟

4. کیا ذرہ نقطہ $(1,0)$ سے ابتدا کرتا ہے؟

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(2t)\boldsymbol{i} + \sin(2t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\boldsymbol{i} + \sin(t - \pi/2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

د. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ھ. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t^2)\boldsymbol{i} + \sin(t^2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

سوال 38: دکھائیں کہ درج ذیل ابتدائی قیمت سمتی قیمت تفاعل، مستوی $x + y - 2z = 2$ میں رداس 1 کے دائرہ پر حرکت کو ظاہر کرتا ہے جہاں دائرے کا مرکز $(2,2,1)$ ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \cos t(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}) + \sin t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k})$$

خط مستقیم پر حرکت

سوال 39: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1,2,3)$ پر واقع ہے۔ یہ خط مستقیم پر حرکت کرتا ہوا نقطہ $(4,1,4)$ پہنچتا ہے۔ اس کا رفتار $(1,2,3)$ پر 2 اور اس کی اسراع مستقل $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ دریافت کریں۔

سوال 40: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1,-1,2)$ پر پایا جاتا ہے اور اس کا رفتار 2 ہے۔ یہ نقطہ $(3,0,3)$ کی طرف یکساں اسراع $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ سے بڑھتا ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 41: ایک ذرہ قطع مکافی $y^2 = 2x$ کے بالائی حصہ پر بائیں سے دائیں رخ، 5 اکائیاں فی سیکنڈ کے مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے۔اس ذرہ کی سمتی رفتار اس لمحہ پر تلاش کریں جب یہ نقطہ $(2, 2)$ سے گزرتا ہے۔

سوال 42: ایک ذرہ مستوی xy میں ایک تدویر پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔(اشارہ: پہلے $|\boldsymbol{v}|^2$ اور $|\boldsymbol{a}|^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں اور بعد میں جذر لیں۔)

سوال 43: ایک ذرہ مستوی yz میں ترخیم $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{j} + (2\sin t)\boldsymbol{k}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (بالائی سوال میں اشارہ دیکھیں۔)

سوال 44: مصنوعی سیارہ کا دائری مدار

ایک مصنوعی سیارہ جس کی کمیت m ہے ایک جسم جس کی کمیت M ہے کے گرد دائری مدار پر مستقل رفتار v سے طواف کرتا ہے۔دائری مدار کا رداس r_0 ہے۔ اس مصنوعی سیارہ کے مدار کا دوری عرصہ T (ایک چکر کے لئے درکار وقت) درج ذیل اقدام کے ذریعہ تلاش کریں۔

ا. کمیت M کے جسم کو مبدا پر اور لمحہ $t = 0$ پر مصنوعی سیارہ کو محور x پر رکھیں۔حرکت کو گھڑی کے رخ تصور کریں (شکل دیکھیں)۔لمحہ t پر سیارہ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ دکھائیں کہ $\theta = \frac{vt}{r_0}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (r_0 \cos \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{i} + (r_0 \sin \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{j}$$

ب. سیارے کی اسراع معلوم کریں۔

ج. نیوٹن کے قانون تجاذب کے تحت سیارہ پر قوت درج ذیل ہو گی جہاں G تجاذب کا عالمگیر مستقل ہے۔

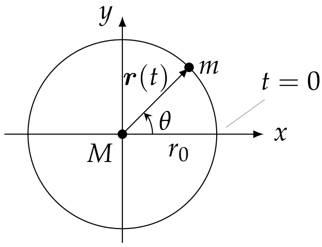
$$\boldsymbol{F} = \Big(-\frac{GMm}{r_0^2}\Big)\frac{\boldsymbol{r}}{r_0}$$

نیوٹن کے دوسرے قانون سے $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ہو گا جس سے $v^2 = \frac{GM}{r_0}$ حاصل کریں۔

د. دکھائیں کہ T مساوات $vT = 2\pi r_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ھ. جزو-ج اور جزو-د سے درج ذیل حاصل کریں جو دوری عرصہ کا مربع ہے۔

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0^3$$



سوال 45: فرض کریں $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$ ہو تب $|\boldsymbol{v}|$ ایک مستقل ہو گا۔

سوال 46: غیر سمتی سہ ضرب کا تفرق

ا. دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \tag{12.4}$$

ب. دکھائیں مساوات 12.4 درج ذیل کا معادل ہے۔

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} & \frac{du_2}{dt} & \frac{du_3}{dt} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{dw_1}{dt} & \frac{dw_2}{dt} & \frac{dw_3}{dt} \end{vmatrix} \tag{12.5}$$

مساوات 12.5 کہتی ہے 3 ضرب 3 قابل تفرق مقطع کا تفرق ان تین مقطع کا مجموعہ ہو گا جو ایک وقت میں ایک صف کا تفرق لے کر حاصل کیے گئے ہوں۔اس نتیجہ کو بلند رتبی مقطع تک وسعت دی جا سکتی ہے۔

سوال 47: فرض کریں $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f ، g اور h قابل تین رتبی تفرق ہوں۔ مساوات 12.4 یا مساوات 12.5 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right) = \boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right) \tag{12.6}$$

(اشارہ: بائیں ہاتھ تفرق لے کر ان سمتیات کی نشاندہی کریں جن کے حاصل ضرب صفر ہو۔)

سوال 48: قاعدہ مستقل تفاعل
دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ایک ایسا سمتی تفاعل ہو جس کی قیمت مستقل $\boldsymbol{C}$ ہو تب $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

سوال 49: قواعد غیر سمتی ضرب

ا. دکھائیں اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c کوئی حقیقی عدد ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}(c\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

ب. ثابت کریں کہ اگر t کا $\boldsymbol{u}$ قابل تفرق تفاعل ہو اور t کا f قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

سوال 50: قواعد مجموعہ اور فرق
ثابت کریں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

سوال 51: ایک نقطہ پر استمرار کا پرکھ اجزاء
دکھائیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ جس کو قاعدہ $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ بیان کرتا ہو نقطہ t_0 پر تب استمراری ہو گا جب f ، g اور h اس نقطہ پر استمراری ہوں۔

سوال 52: سمتی تفاعل کا صلیبی ضرب کے حد
فرض کریں $\boldsymbol{r}_1(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{r}_2(t) = g_1(t)\boldsymbol{i} + g_2(t)\boldsymbol{j} + g_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{A}$ اور $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{B}$ ہیں۔ صلیبی ضرب کا کلیہ مقطع اور غیر سمتی تفاعل کے لئے قاعدہ حد حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

سوال 53: قابل تفرق سمتی تفاعل استمراری ہوتے ہیں۔
دکھائیں کہ اگر $t = t_0$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ قابل تفرق ہو تب t_0 پر یہ استمراری بھی ہو گا۔

سوال 54: قابل تکمل سمتی تفاعل کے درج ذیل خواص کی تصدیق کریں۔

ا. قاعدہ مستقل غیر سمتی مضرب:

$$\int_a^b k\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad k \text{ کوئی مستقل ہے}$$

نفی کا قاعدہ $k = -1$ لے کر حاصل ہو گا:

$$\int_a^b (-\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$$

ب. قواعد مجموعہ اور فرق:

$$\int_a^b (\boldsymbol{r}_1(t) \mp \boldsymbol{r}_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{r}_1(t)\,\mathrm{d}t \mp \int_a^b \boldsymbol{r}_2(t)\,\mathrm{d}t$$

ج. قاعدہ مستقل سمتیہ مضرب:

$$\int_a^b \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{C} \text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

اور

$$\int_a^b \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{C} \text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

سوال 55: غیر سمتی اور سمتی تفاعل کے حاصل ضرب
فرض کریں وقفہ $a \le t \le b$ پر غیر سمتی تفاعل $u(t)$ اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ معین ہیں۔

ا. دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ تب استمراری ہو گا جب $[a,b]$ پر u اور $\boldsymbol{r}$ استمراری ہوں۔

ب. اگر غیر سمتی تفاعل u اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ دونوں $[a,b]$ پر قابل تفرق ہوں تب دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو گا اور مزید درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{r}) = u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

سوال 56: سمتی تفاعل کے الٹ تفرقات

ا. غیر سمتی تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 2 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر وقفہ I پر دو سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}_1(t)$ اور $\boldsymbol{R}_2(t)$ کے تفرقات متماثل ہوں تب پورے I پر ان تفاعل میں صرف ایک مستقل سمتی قیمت کا فرق ہو گا۔

ب. جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر I پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}(t)$ ہو تب I پر $\boldsymbol{r}$ کا ہر الٹ تفرق $\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{C}$ کے برابر ہو گا جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہو گا۔

سوال 57: احصاء کا بنیادی مسئلہ
احصاء کا بنیادی مسئلہ برائے حقیقی متغیر کا غیر سمتی تفاعل، حقیقی متغیر کے سمتی تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہو گا۔یہ ثابت کرنے کی خاطر غیر سمتی تفاعل کے لئے اس مسئلہ کو استعمال کر کے پہلے دکھائیں کہ اگر $a \le t \le b$ پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب $[a,b]$ پر ہر نقطہ t کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{r}(t)$$

اس کے بعد سوال 56 کے جزو-ب کا نتیجہ استعمال کر کے دکھائیں کہ اگر $[a,b]$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا $\boldsymbol{R}$ کوئی الٹ تفرق ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

کمپیوٹر کا استعمال

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال 58 تا سوال 61 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی فضائی راہ کی منحنی ترسیم کریں۔

ب. سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے اجزاء تلاش کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ t_0 پر سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کر کے نقطہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ پر مماسی خط کی مساوات تلاش کریں۔

د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور خط مماس ترسیم کریں۔

سوال 58: $r(t) = (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 6\pi,\ t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال 59: $r(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}, \quad -2 \le t \le 3,\ t_0 = 1$

سوال 60: $r(t) = (\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\ln(1+t))\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 61: $r(t) = (\ln(t^2+2))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} 3t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}, \quad -3 \le t \le 5,\ t_0 = 3$

سوال 62 اور سوال 63 میں آپ a اور b کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے پیچ دار منحنی

$$r(t) = (\cos at)\boldsymbol{i} + (\sin at)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$$

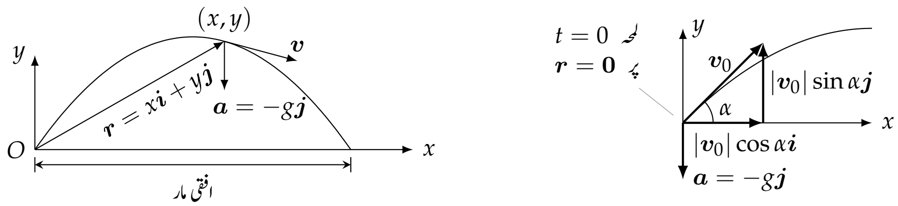
کے رویہ پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر کو استعمال کریں۔

سوال 62: وقفہ $0 \le t \le 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $b = 1$ اور $a = 1, 2, 4, 6$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ a کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

سوال 63: وقفہ $0 \le t \le 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $a = 1$ اور $b = 1/4, 1/2, 2, 4$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ b کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

12.2 گولا کی حرکت کی نمونہ کشی

ایک گولا چلانے سے پہلے ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا وہ حدف کو مار سکے گا (کیا حدف تک پہنچے گا)؟ یہ گولا کس بلندی تک پہنچے گا (کیا یہ پہاڑی کو پار کر پائے گا)؟ اور یہ حدف پر کتنی دیر میں پہنچے گا (نتائج کب حاصل ہوں گے)؟ یہ تمام معلومات گولے کی ابتدائی سمتیہ رفتار سے نیوٹن کے دوسرے قانون کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔



(ب) کچھ دیر بعد لمحہ t پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

(ا) لمحہ $t=0$ پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

شکل 12.6: گولا کی مثالی پرواز۔

گولا کی حرکت کی مقدار معلوم مثالی مساوات

حرکت گولا کی مثالی مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ ایک ذرہ کی مانند مستوی میں حرکت کرتا ہے اور اس پر صرف مستقل قوت کشش سیدھا نیچے رخ عمل کرتی ہے۔ حقیقت میں یہ مفروضے درست نہیں ہیں۔ زمین گھومنے کی بنا گولے کے نیچے زمین حرکت میں ہوتی ہے، ہوائی رگڑ جو گولے کی رفتار اور بلندی پر منحصر ہے گولا پر عمل کرتی ہے، اور قوت کشش ایک مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت گولا کی بلندی پر منحصر ہے۔اگرچہ ان تمام کے اثرات کو بھی دیکھنا ہو گا، ہم یہاں انہیں نظر انداز کرتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ لمحہ $t=0$ پر ابتدائی سمتیہ رفتار v_0 کے ساتھ مبدا سے گولا ربع اول میں مارا جاتا ہے (شکل 12.6)۔ اگر افقی زمین کے ساتھ v_0 کا زاویہ α ہو تب

$$v_0 = (|v_0|\cos\alpha)i + (|v_0|\sin\alpha)j \tag{12.7}$$

ہو گا۔اس میں $|v_0|$ کو سادہ علامت v_0 سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_0 = (v_0\cos\alpha)i + (v_0\sin\alpha)j \tag{12.8}$$

گولا کا ابتدائی مقام درج ذیل ہے۔

$$r_0 = 0i + 0j = 0 \tag{12.9}$$

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے حرکت کے تحت کمیت ضرب اسراع یعنی $m\frac{d^2 r}{dt^2}$ عامل قوت کے برابر ہو گا جہاں لمحہ t پر گولے کا تعین گر سمتیہ $r(t)$ ہے۔اگر صرف قوت کشش $-mgj$ عمل کرتی ہو تب

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -gj \quad \text{یا} \quad m\frac{d^2 r}{dt^2} = -mgj \tag{12.10}$$

ہو گا۔ ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے متغیر t کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0,\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{پر} \quad t = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

پہلا تکمل

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(gt)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0$$

دیگا۔ دوسرا تکمل

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$$

دیگا۔ ہم مساوات 12.8 اور مساوات 12.9 سے $\boldsymbol{v}_0$ اور $\boldsymbol{r}_0$ کی قیمتیں پر کر کے

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \underbrace{(v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)t\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{v}_0 t} + \boldsymbol{0}$$

یعنی

$$\boldsymbol{r} = (v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + \Big((v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\Big)\boldsymbol{j} \tag{12.11}$$

حاصل کرتے ہیں۔

مساوات 12.11 گولے کی مثالی حرکت کی سمتی مساوات ہے۔ زاویہ α گولا **چلانے کا زاویہ** ہے جبکہ v_0 اس کی **ابتدائی رفتار** ہے۔

مساوات 12.11 درج ذیل دو غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے۔

$$x = (v_0\cos\alpha)t, \quad y = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{12.12}$$

انہیں گولا کی مثالی پرواز کی مقدار معلوم مساوات کہتے ہیں۔ اگر وقت کو سیکنڈوں میں اور فاصلہ کو میٹروں میں ناپا جائے تب $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا اور مساوات 12.12 میں x اور y میٹر میں ہوں گے۔

مثال 12.9: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے $60°$ کے زاویہ پر داغا جاتا ہے۔ یہ گولا 10 سیکنڈ بعد کہاں ہو گا؟

حل: ہم $v_0 = 500$ ، $\alpha = 60$ ، $g = 9.8$ لیتے ہوئے مساوات 12.12 استعمال کر کے لمحہ $t = 10$ پر گولے کا مقام معلوم کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\alpha)t = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 2500\,\mathrm{m}\\
y &= (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\\
&= 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10)^2\\
&= 2500\sqrt{3} - 490\\
&\approx 3840\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

گولا چلانے کے دس سیکنڈ بعد 3840 میٹر کی بلندی پر حدف کی طرف 2500 میٹر دور ہو گا۔ □

بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار

ہم مساوات 12.12 سے مثالی گولا کی پرواز کے بارے میں عموماً سوالات کے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

گولا اپنی بلند ترین مقام پر اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی رفتار کا انتصابی حصہ صفر ہو:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt = 0$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلند تر}} = (v_0 \sin\alpha)\Big(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big) - \frac{1}{2}g\Big(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \tag{12.13}$$

افقی میدان میں داغے گئے گولا کی پرواز کا دورانیہ جاننے کی خاطر ہم مساوات 12.12 میں $y = 0$ پر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0\\
t\Big(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\Big) &= 0\\
t = 0, \quad t &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (12.14)
\end{aligned}
$$

چونکہ $t = 0$ وہ لمحہ ہے جب گولا داغا گیا لہٰذا $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ وہ لمحہ ہو گا جب گولا واپس زمین پر گرتا ہے۔

گولے کی مار R جاننے کی خاطر ہم مبدا سے گولا گرنے کے مقام تک فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ ہم $t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$ پر x تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x &= (v_0\cos\alpha)t\\
R &= (v_0\cos\alpha)\Big(\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\Big)\\
&= \frac{v_0^2}{g}(2\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (12.15)
\end{aligned}$$

زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $\sin 2\alpha = 1$ یعنی $\alpha = 45^\circ$ پر حاصل ہو گا۔

مثال 12.10: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر چلایا جاتا ہے۔ گولا کی زیادہ سے زیادہ بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار تلاش کریں (مثال 12.9)۔

حل:

$$\begin{aligned}
y_{\text{بلند تر}} &= \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g} && \text{زیادہ سے زیادہ بلندی (مساوات 12.13)}\\
&= \frac{(500\sin 60^\circ)^2}{2(9.8)} \approx 9566\,\mathrm{m}\\
t &= \frac{2v_0\sin\alpha}{g} && \text{دورانیہ پرواز (مساوات 12.14)}\\
&= \frac{2(500)\sin 60^\circ}{9.8}\approx 88\,\mathrm{s}\\
R &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha && \text{فاصلہ مار (مساوات 12.15)}\\
&= \frac{(500)^2\sin 120^\circ}{9.8}\approx 22\,092\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

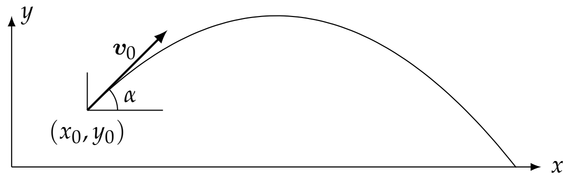
□

گولا کی مثالی پرواز قطع مکافی ہو گی

ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثالی پرواز، قطع مکافی راہ اپناتی ہے۔ مساوات 12.12 کی ایک جزو سے $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$ حاصل کر کے دوسرے جزو میں پر کرتے ہوئے

$$y = -\Big(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\Big)x^2 + (\tan\alpha)x$$

حاصل ہوتا ہے جس کی روپ $y = ax^2+bx$ ہے جو ایک قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل 12.7: نقطہ (x_0, y_0) سے ابتدائی سمتی رفتار v_0 کے ساتھ مارے گئے گولا کی راہ۔

نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانا

مبدا کی بجائے نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانے سے مساوات 12.12 کی جگہ درج ذیل مساوات حاصل ہوں گی (شکل 12.7)۔

$$x = x_0 + (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{12.16}$$

مثال 12.11: ایک نشانہ باز $2\,\text{m}$ بلندی سے $30\,\text{m}$ دور درخت پر $20\,\text{m}$ بلندی پر لگائی گئی نشانی کو تیر کا نشانہ بناتا ہے۔ تیر نشانہ پر عین اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ ہو۔ (ا) ابتدائی رفتار v_0 اور زاویہ α کی صورت میں زیادہ سے زیادہ بلندی $y_{\text{بلندتر}}$ لکھیں۔ (ب) اگر $y_{\text{بلندتر}} = 20\,\text{m}$ ہو تب جزو-ا کے نتیجہ سے $v_0 \sin\alpha$ معلوم کریں۔ (ج) تیر $30\,\text{m}$ افقی فاصلہ طے کر کے درخت تک پہنچتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $v_0 \cos\alpha$ کی قیمت معلوم کریں۔ (د) تیر کا ابتدائی زاویہ تلاش کریں۔

حل: (ا) ہم نشانہ باز کو مبدا پر تصور کرتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $x_0 = 0$ اور $y_0 = 2$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && \text{مساوات 12.16} \\ &= 2 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && y_0 = 2 \end{aligned}$$

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ سے وہ لمحہ t تلاش کرتے ہیں جب تیر زیادہ سے زیادہ بلندی پر ہو گا:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلندتر}} = 2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

(ب) ہم مساوات 12.16 میں $g = 9.8$ اور $y_{\text{بلندتر}} = 20$ پر کر کے جزو-ا سے

$$20 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2(9.8)}$$

یعنی

$$v_0 \sin\alpha = \sqrt{(18)(19.6)}$$

(ج) ہم جزو-ا میں حاصل زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت t اور افقی فاصلہ $x = 30\,\mathrm{m}$ مساوات 12.16 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= x_0(\cos\alpha)t && \text{مساوات } 12.16 \\ 30 &= 0 + (v_0\cos\alpha)t && x = 30,\ x_0 = 0 \\ &= (v_0\cos\alpha)\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right) && t = (v_0\sin\alpha)/g \end{aligned}$$

اس مساوات کو $v_0 \cos\alpha$ کے حل کر کے اس میں جزو-ب کا نتیجہ پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0\cos\alpha = \frac{30g}{v_0\sin\alpha}$$

(د) ہم جزو-ب اور جزو-ج سے

$$\tan\alpha = \frac{(18)(19.6)}{(30)(9.8)} \approx 0.876$$

یعنی

$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.876) = 50.2^\circ$$

حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

درج ذیل سوالات میں گولا کی حرکت کو مثالی تصور کیا جائے۔ تمام زاویات افقی میدان سے ناپے جائیں گے۔ جہاں اس کے برعکس ذکر نہ کیا گیا ہو، گولا کو مبدا سے افقی میدان میں چلایا جاتا ہے۔

سوال 1: ایک گولا 60° زاویہ پر $840\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ یہ حدف کے رخ کتنی دیر میں $21\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرے گا؟

سوال 2: ایک توپ کی زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $24.5\,\mathrm{km}$ ہے۔ اس کے نالی میں گولے کی رفتار معلوم کریں۔

سوال 3: ایک گولا 45° زاویہ پر $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ (ا) اس کا فاصلہ مار کتنا ہو گا؟ (ب) افقی رخ $5\,\mathrm{km}$ فاصلہ پر گولا کتنا بلند ہو گا؟ (ج) یہ گولا کتنی بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 4: ایک گیند $10\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے $30°$ زاویہ اور $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکی جاتی ہے۔ یہ گیند کب اور کتنے فاصلہ پر زمین کو مس کرے گی؟

سوال 5: ایک کھلاڑی $7\,\mathrm{kg}$ کا گولا $2\,\mathrm{m}$ بلندی سے $45°$ زاویہ پر $13.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پھینکتا ہے۔ یہ گیند کتنی دیر بعد اور کتنے فاصلہ پر زمین پر گرے گی؟

سوال 6: اگر سوال 5 میں گیند $40°$ پر پھینکی جاتی تب یہ نسبتاً زیادہ دور گرتی۔ فاصلہ میں اضافہ کتنا ہو گا؟

سوال 7: ایک گیند کو $45°$ زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔یہ $10\,\mathrm{m}$ فاصلہ پر گرتا ہے۔ اس کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔ کن دو زاویات پر پھینکنے سے اس گیند کا فاصلہ مار $6\,\mathrm{m}$ ہو گا؟

سوال 8: ٹیلی ویژن کے ٹیوب میں ایک الیکٹران $5 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے $40\,\mathrm{cm}$ دور ٹیلی ویژن کے شیشہ کے رخ افقی سمت خارج ہوتا ہے۔ یہ الیکٹران شیشہ پر لگنے سے پہلے کتنا نیچے گرتا ہے؟

سوال 9: تجربہ گاہ میں گالف گیند کو پرکھنے کے دوران 100 داب[14] کی گیند کو $160\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار پر چلتے ہوئے لاٹھ سے مار کر $9°$ زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند $227\,\mathrm{m}$ دور گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

سوال 10: ایک تماش گاہ میں ایک مسخرہ کو انسانی توپ سے $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ توقع کی جاتی ہے کہ یہ $60\,\mathrm{m}$ دور نرم گدی پر جا گرے گا۔ یہ تماش گاہ ایک بڑے کمرہ میں منعقد ہوتا ہے جس کی چھت $23\,\mathrm{m}$ بلند ہے۔ کیا مسخرہ کو یوں داغا جا سکتا ہے کہ یہ چھت کو نہ لگے؟ اگر ایسا ممکن ہو تب توپ کا زاویہ کتنا ہونا چاہیے؟

سوال 11: ایک گالف گیند زمین سے $30°$ پر $35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے روانہ ہوتا ہے۔ کیا یہ $45\,\mathrm{m}$ میٹر دور $15.2\,\mathrm{m}$ اونچے درخت کو پار کر پائے گا؟

سوال 12: ایک گیند کو $15\,\mathrm{m}$ کی گہرائی سے $45°$ پر $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے اچھال کر میدان میں پھینکا جاتا ہے۔یہ گیند کتنا افقی فاصلہ طے کر کے زمین پر گرے گا؟

سوال 13: ایک گیند کو $2.5\,\mathrm{m}$ اونچائی سے $40°$ زاویہ سے نیچے میدان میں پھینکا جاتے ہے۔ یہ ٹھیک $65\,\mathrm{m}$ دور جا گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

[14] 100 compression

سوال 14: کرکٹ کا کھلاڑی گیند کو $50\,\mathrm{cm}$ اونچائی سے $30°$ زاویہ پر مارتا ہے۔ یہ گیند $90\,\mathrm{m}$ دور $12\,\mathrm{m}$ اونچی دیوار کو پار کرتی ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال 15: دکھائیں کہ زاویہ α اور زاویہ $90-\alpha$ پر داغے گئے گولوں کا فاصلہ مار ایک دوسرے کے برابر ہے۔ (اگر ہوائی رگڑ کو شامل کیا جائے تب ایسا نہیں ہو گا۔)

سوال 16: ایک گولا کی ابتدائی رفتار $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اس کا نشانہ $16\,\mathrm{km}$ دور ایک مورچا ہے۔ گولے کی ابتدائی دو ایسے زاویات تلاش کریں جن پر یہ نشانہ کو مار پائے گا۔

سوال 17: دکھائیں کہ ابتدائی زاویہ تبدیل کیے بغیر ایک گولا کی ابتدائی رفتار دگنی کرنے سے اس کا فاصلہ مار 4 گنّا ہو گا۔ گولے کی زیادہ سے زیادہ اونچائی اور فاصلہ مار دگنی کرنے کے لئے اس کی ابتدائی رفتار کتنے فی صد بڑھانی ہو گی؟

سوال 18: دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت کے نصف وقت میں گولا اس اونچائی کے $\frac{3}{4}$ تک پہنچ پاتا ہے۔

سوال 19: ابتدائی قیمت مسئلہ

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} &= -g\boldsymbol{j} && \text{تفرقی مساوات}\\
\boldsymbol{r} &= x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} && \text{ابتدائی معلومات}\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (v_0\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)\boldsymbol{j} \quad t=0
\end{aligned}
$$

کو مستوی میں سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے لئے حل کرتے ہوئے مساوات 12.16 حاصل کریں۔

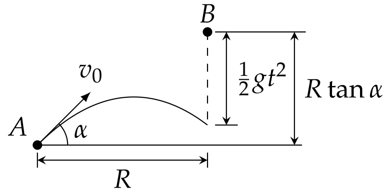
سوال 20: ابتدائی زاویہ $\alpha = 50.2°$ لیتے ہوئے مثال 12.11 میں تیر کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال 21: مثال 12.11 میں تیر کب نشانہ سے $2\,\mathrm{m}$ کے افقی فاصلہ پر ہو گا؟ اس لمحہ یہ کتنا بلند ہو گا؟

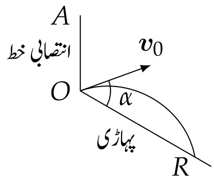
سوال 22: ایک گیند کو $5\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ یہ کتنی دیر بعد زمین پر گرے گا؟

سوال 23: گیند A کو α زاویہ پر v_0 ابتدائی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ اسی لمحہ R افقی فاصلہ دور $R\tan\alpha$ اونچائی سے گیند B کو گرنے دیا جاتا ہے (شکل 12.8)۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں گیند کسی بھی v_0 کے لئے ایک دوسرے کو ٹکراتے ہیں۔ کیا یہ اتفاق ہے یا ایسا ہونا لازم ہے؟ جواب پیش کریں۔

سوال 24: ایک گیند کو پہاڑی سے نیچے پھینکا جاتا ہے (شکل 12.9)۔ (ا) دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی سمتی رفتار، زاویہ AOR کو نصف میں قطع کرتا ہو۔ (ب) اگر گیند کو پہاڑی پر اوپر پھینکا جائے تب زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی زاویہ کیا ہونا چاہیے؟



شکل 12.8: دو گیند (سوال 23)



شکل 12.9: پہاڑی سے گیند پھینکا جاتا ہے (سوال 24)

سوال 25: مبدا سے لمحہ $t = 0$ پر $\boldsymbol{v}_0$ سمتی رفتار سے ایک مثالی گولا کو داغا جاتا ہے۔ قوت کشش کی بنا اس گولا کی نیچے رخ اسراع $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{k}$ ہو گی۔ لمحہ پر گولے کی سمتی رفتار اور مقام تلاش کریں۔

سوال 26: رفتار کی راست متناسب ہوائی مزاحمت
ایک گولا جس کی کمیت m اور ابتدائی رفتار $\boldsymbol{v}_0$ کو رفتار کی راست متناسب ہوائی مزاحمت کا سامنا ہے۔ گولے پر کل قوت $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{j} - k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

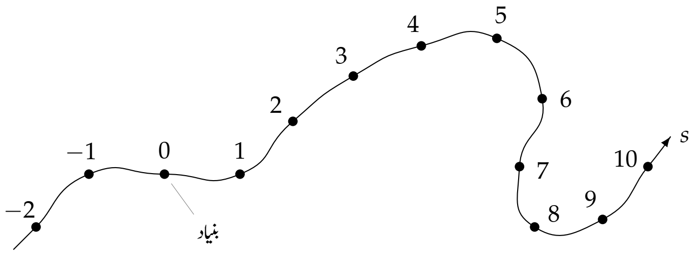
دکھائیں کہ اس کا پہلا تکمل درج ذیل دے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 - gt\boldsymbol{j}$$

اس مساوات کو حل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{(k/m)t}$ سے ضرب دیں۔ بایاں ہاتھ اب ایک تفاعل کا تفرق ہو گا لہٰذا دونوں اطراف قابل تکمل ہوں گے۔اب دوسرا تکمل لیں۔تفاعل $e^{(k/m)t}$ کو اس تفرقی مساوات کا جزو تکمل کہتے ہیں۔

سوال 27: ایک گولا کو زمین سے α زاویہ پر v_0 رفتار سے داغا جاتا ہے۔ زاویہ α کو متغیر اور v_0 کو مستقل تصور کریں۔ ہر $\alpha, 0 \le \alpha \le \pi/2$ کے لئے ہمیں قطع مکافی راہ ملی ہے۔ دکھائیں کہ مستوی میں زیادہ سے زیادہ اونچائی کے تمام نقطے درج ذیل ترخیم پر پائے جاتے ہیں جہاں $x \ge 0$ ہے۔

$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$



شکل 12.10: ہموار منحنی پر بنیادی نقطہ سے فاصلہ کو پیمانہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

قابل تفرق منحنیات جن کا پہلا اور دوسرا استمراری تفرق پایا جاتا ہو خلاء میں حرکت کو ظاہر کرنے کے لئے اہم ہیں۔ ان پر تفصیلاً غور کیا گیا ہے۔اس حصہ میں اور اگلے حصہ میں ہم ان کے چند ایسے خدوخال پر غور کریں گے جن کہ بنا ایسے منحنیات کی اہم ہیں۔

منحنی پر لمبائی قوس

ہموار فضائی منحنیات کی ایک خاص خاصیت یہ ہے کہ ان کی لمبائی قابل ناپ ہوتی ہے۔ یوں ہم منحنی پر کسی نقطہ کو بنیاد تصور کرتے ہوئے، بنیاد سے کسی بھی نقطہ N تک منحنی پر فاصلہ s ، سے نقطہ N کی نشاندہی کر سکتے ہیں (شکل 12.10)۔یہ محددی مستوی پر مبدا سے نقطہ کا فاصلہ دینے کے مترادف ہے۔ متحرک جسم کی سمتی رفتار اور اسراع پر غور کے لئے وقت ایک فطری متغیر ہے جبکہ s منحنی کی صورت پر غور کرنے کے لئے ایک فطری متغیر ہے۔ فضا میں حرکت پر غور کے دوران ان دونوں متغیرات کی ضرورت پیش آتی ہے۔

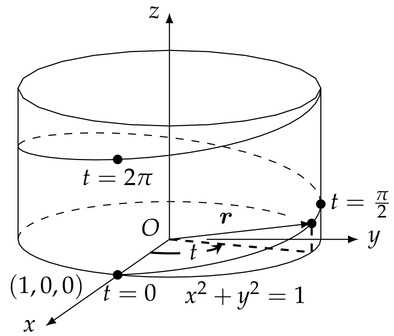
فضا میں ہموار منحنی پر فاصلہ ناپنے کی خاطر ہم مستوی میں منحنی کے کلیہ میں جزو z شامل کرتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ جس پر $t = a$ تا $t = b$ صرف ایک بار چلا جاتا ہو، کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

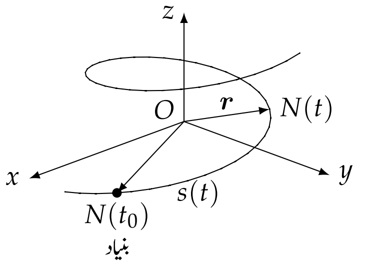
$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{12.17}$$

□

مستوی منحنیات کی طرح، ہم فضا میں منحنی کی لمبائی معلوم کرتے ہوئے منحنی کی کوئی بھی مقدار معلوم مساوات، جو دیے گئے شرائط کو پورا کرتے ہوں، استعمال کر سکتے ہیں۔ اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔



شکل 12.11: پیچ دار منحنی برائے مثال 12.12



شکل 12.12: منحنی پر بنیاد $N(t_0)$ سے کسی نقطہ $N(t)$ تک فاصلہ $s(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau$ ہو گا۔

مساوات 12.17 میں جذر، سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ ہے۔ یوں لمبائی قوس کا کلیہ مختصراً

$$L=\int_a^b|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t \tag{12.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 12.12: درج ذیل پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$$

حل: پیچ دار منحنی $t=0$ سے $t=2\pi$ تک ایک چکر مکمل کرتی ہے (شکل 12.11)۔اس حصہ کی لمبائی

$$\begin{aligned}L&=\int_a^b|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(1)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=2\pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

ہو گی جو مستوی xy میں اس دائرہ کے لمبائی کا $\sqrt{2}$ گنّا ہے جس پر پیچ دار منحنی کھڑی ہے۔ □

اگر ہم ہموار منحنی C، جس کی مقدار معلوم مساوات کا متغیر t ہو، پر نقطہ N_0 کو بنیادی نقطہ تصور کریں تب t کی ہر قیمت C پر ایک نقطہ $N(t)=(x(t),y(t),z(t))$ اور **سمت بند فاصلہ**

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \tag{12.19}$$

دے گی جو N_0 سے C پر چلتے ہوئے ناپا جائے گا (شکل 12.12)۔ اگر $t > t_0$ ہو تب $N(t_0)$ سے $N(t)$ تک فاصلہ $s(t)$ ہو گا۔ اگر $t < t_0$ ہو تب $s(t)$، فاصلہ کے نفی کا برابر ہو گا۔ کی ہر ایک قیمت پر ایک نقطہ تعین کرتی ہے لہٰذا یوں s کے لحاظ سے C کی مقدار معلوم روپ حاصل ہوتی ہے۔ ہم کو منحنی کا **مقدار معلوم لمبائی قوس** کہتے ہیں جس کی قیمت بڑھتے t کے رخ بڑھتی ہے۔

بنیاد $N(t_0)$ لیتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \tag{12.20}$$

مثال 12.13: اگر $t_0 = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

پر t_0 سے t تک چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau && \text{مساوات } 12.20 \\ &= \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{d}\tau && \text{مساوات } 12.12 \text{ کی قیمتیں} \\ &= \sqrt{2}t \end{aligned}$$

یوں $s(2\pi) = 2\pi\sqrt{2}$ ، $s(-2\pi) = -2\pi\sqrt{2}$ ، وغیرہ، ہوں گے۔ □

مثال 12.14: ایک لکیر پر لمبائی
دکھائیں اگر $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیہ ہو، تب لکیر

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + (y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + (z_0 + tu_3)\boldsymbol{k}$$

پر، نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ جہاں $t = 0$ ہو گا، سے سمت بند لمبائی از خود t کے برابر ہو گی۔

حل:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_0 + tu_3)\boldsymbol{k} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t |\boldsymbol{u}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t 1\,\mathrm{d}\tau = t$$

□

ہموار منحنی پر رفتار

چونکہ مساوات 12.20 میں جذر کے اندر تفرقات استمراری (ہموار منحنی) ہیں احصاء کے بنیادی مسئلہ کے تحت s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\boldsymbol{v}(t)\right| \tag{12.21}$$

جیسا ہم توقع کریں گے، کسی بھی راہ پر ایک ذرے کی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی مقدار ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ اگرچہ s تعین کرنے میں بنیادی نقطہ $N(t_0)$ کا کردار پایا جاتا ہے، $N(t_0)$ کا مساوات 12.21 میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ پر چلتے ہوئے جس رفتار سے ایک ذرہ فاصلہ طے کرتا ہے، اس کا بنیادی نقطہ کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

ساتھ ہی اس بات کو ذہن نشین کریں کہ چونکہ تعریف کی رو سے ہموار منحنی کے لئے $|\boldsymbol{v}|$ غیر صفر ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہو گا۔ ہم ایک بار دوبارہ دیکھتے ہیں کہ s متغیر t کا بڑھتا تفاعل ہے۔

اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

چونکہ زیر بحث منحنیات کے لئے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہے لہٰذا s ایک ایک مطابقت رکھتا ہے اور اس کا الٹ پایا جائے گا جو t کو بطور s کا قابل تفرق تفاعل دے گا (حصہ 7.1)۔ اس الٹ کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.22}$$

یوں $\boldsymbol{r}$ متغیر s کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کے تفرق کو زنجیری قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

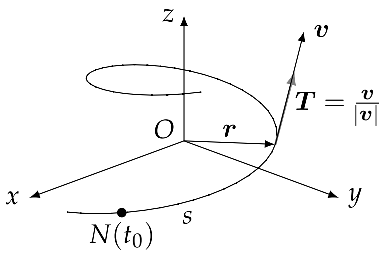
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{v}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.23}$$

مساوات 12.23 کہتی ہے کہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\boldsymbol{v}$ کے رخ ہے۔ ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ کو $\boldsymbol{r}$ کی منحنی راہ کا اکائی مماسی سمتیہ کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{T}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 12.13)۔

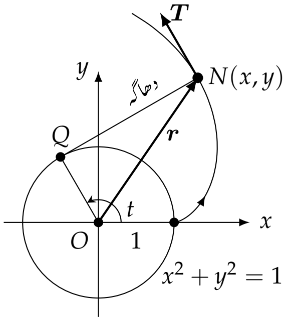
تعریف: قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا اکائی مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.24}$$

□



شکل 12.13: ہم $\boldsymbol{v}$ کو $|\boldsymbol{v}|$ سے تقسیم کر کے مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔



شکل 12.14: دائرہ پر لپٹے دھاگہ کو کھولتے ہوئے اس کا سر جس راہ پر چلتا ہو، وہ اس دائرے کا در پیچیدہ کہلاتا ہے۔ یہاں اکائی دائرہ مستوی xy میں ہے۔

جہاں بھی $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو وہاں اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ بھی t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، فضا میں اجسام کی حرکت پر غور میں مستعمل، متحرک **حوالہ چھوکٹے**[15]، کے تین اکائی سمتیات میں سے ایک اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔

مثال 12.15: درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

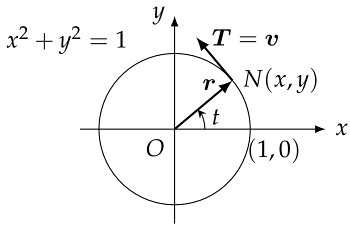
□

مثال 12.16: دائرہ کا در پیچیدہ (شکل 12.14)
درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} \qquad t > 0$$

---

[15] reference frame



شکل 12.15: حرکت $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}$ برائے مثال 12.17

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(-\sin t+\sin t+t\cos t)\boldsymbol{i}+(\cos t-\cos t+t\sin t)\boldsymbol{j}\\
&=(t\cos t)\boldsymbol{i}+(t\sin t)\boldsymbol{j}\\
|\boldsymbol{v}|&=\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}=\sqrt{t^2}=t \qquad \text{ہے } |t|=t \text{ کی بنا } t>0\\
\boldsymbol{T}&=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{\boldsymbol{v}}{t}=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

□

مثال 12.17: اکائی دائرہ

$$\boldsymbol{v}=(-\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}$$

کے گرد گھڑی کے مخالف رخ حرکت

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}$$

کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{v}$ ہے (شکل 12.15)۔ □

سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔ وقفہ پر منحنی کی لمبائی بھی دریافت کریں۔

سوال 1: $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(2\sin t)\boldsymbol{j}+\sqrt{5}t\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le\pi$

سوال 2: $\boldsymbol{r}(t)=(6\sin 2t)\boldsymbol{i}+(6\cos 2t)\boldsymbol{j}+5t\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le\pi$

سوال 3: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 8$

سوال 4: $\boldsymbol{r}(t) = (2+t)\boldsymbol{i} - (t+1)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 3$

سوال 5: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{j} + (\sin^3 t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

سوال 6: $\boldsymbol{r}(t) = 6t^3\boldsymbol{i} - 2t^3\boldsymbol{j} - 3t^3\boldsymbol{k}, \quad 1 \le t \le 2$

سوال 7: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال 8: $\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\boldsymbol{i} + (t\cos t - \sin t)\boldsymbol{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$

سوال 9: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 26π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (5\sin t)\boldsymbol{i} + (5\cos t)\boldsymbol{j} + 12t\boldsymbol{k}$$

سوال 10: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے مخالف رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 13π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (12\sin t)\boldsymbol{i} - (12\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$$

سوال 11 تا سوال 14 میں $t = 0$ سے دور کسی نقطہ پر مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$s = \int_0^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \qquad \text{مساوات } 12.19$$

اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 11: $\boldsymbol{r}(t) = (4\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

سوال 12: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

سوال 13: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad -\ln 4 \le t \le 0$

سوال 14: $\boldsymbol{r}(t) = (1+2t)\boldsymbol{i} + (1+3t)\boldsymbol{j} + (6-6t)\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 0$

سوال 15: نقطہ $(0,0,1)$ سے $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t)\boldsymbol{i} + (\sqrt{2}t)\boldsymbol{j} + (1-t^2)\boldsymbol{k}$$

سوال 16: ہم نے مثال 12.12 میں پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی $2\pi\sqrt{2}$ تلاش کی۔ ایک مربع جس کا ضلع 2π ہو کے وتر کی لمبائی بھی یہی ہو گی۔ دکھائیں کہ جس نلکی پر پیچ دار منحنی کا ایک چکر لپٹا گیا ہے، اس کو انتصابی کاٹ کر سیدھا کرنے سے یہی مربع حاصل ہو گا۔

سوال 17:

ا. دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (1 - \cos t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ ایک ترخیم ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}$ قائمہ دائری نلکی اور ایک مستوی کا مطقاطع ہے۔ ان قائمہ دائری نلکی اور مستوی کی مساواتیں تلاش کریں۔

ب. نلکی پر ترخیم کا خاکہ کھینچیں اور اس پر نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر اکائی مماسی سمتیات بنائیں۔

ج. دکھائیں کہ سمتیہ اسراع ہر صورت مستوی کو متوازی ہو گا (مستوی کے عمودی سمتیہ کو قائمہ ہو گا)۔ یوں اگر آپ اسراع کو ترخیم کے ساتھ جڑا دکھائیں تب یہ ترخیم کے مستوی میں پایا جائے گا۔ نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر سمتیات اسراع کو خاکہ میں شامل کریں۔

د. ترخیم کی لمبائی کا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کرنے کی کوشش نہ کریں چونکہ یہ ایک غیر بنیادی تکمل ہے۔

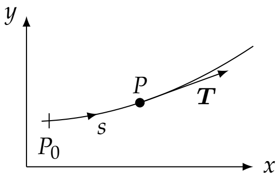
ھ. اعدادی ترکیبات سے ترخیم کی لمبائی دو اعشاریہ درست معلوم کریں۔

سوال 18: لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے۔
یہ دکھانے کی خاطر کہ لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے، ہم پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی درج ذیل (مختلف) مقدار معلوم مساواتیں استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

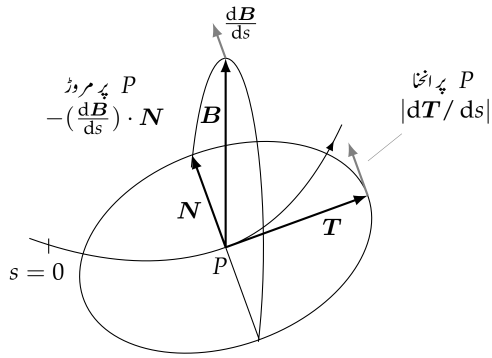
ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 4t)\boldsymbol{i} + (\sin 4t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t/2))\boldsymbol{i} + (\sin(t/2))\boldsymbol{j} + (t/2)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}, \quad -2\pi \le t \le 0$



شکل 12.17: بڑھتی لمبائی قوس کے رخ چلتے ہوئے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہے۔نقطہ P پر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ کی قیمت کو P پر منحنی کی انحنا کہتے ہیں۔



شکل 12.16: ہر متحرک جسم کے ساتھ ایک TNB چھوکٹ سفر کرتا ہے جو اس کی راہ کا کردار بیان کرتا ہے۔

12.4 انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ

اس حصہ میں ہم تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات پر مبنی ایسا چھوکٹ متعارف کرتے ہیں جو فضا میں منحنی پر جسم کے ساتھ ساتھ چلتا ہو (شکل 12.16)۔ اس چھوکٹ کے تین سمتیات ہیں۔ پہلا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔ دوسرا $\boldsymbol{N}$ ہے جو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ اکائی سمتیہ ہے۔ تیسرا اکائی سمتیہ $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے۔ یہ سمتیات اور ان کے تفرقات اگر معلوم ہوں، فضا میں سواری کی سمت بندی اور اس کی راہ میں موڑ اور بل کے بارے میں مفید معلومات مہیا کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}\right|$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ کتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہے؛ اسی لئے اس کو سواری کی راہ کی **انحنا**[16] کہتے ہیں۔ عدد $-(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s)\cdot\boldsymbol{N}$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ مستوی حرکت سے کتنی باہر مڑتی ہے یا بل کھاتی ہے؛ اس کو سواری کی راہ کی **مروڑ**[17] کہتے ہیں۔ دوبارہ شکل 12.16 پر نظر ڈالیں۔ اگر قوسی راہ پر ایک ریل گاڑی، P، اوپر چڑھ رہی ہو تب فی اکائی فاصلہ اس کی سر بتی جتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہو، یہ اس کی انحنا ہو گی۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی سے ریل گاڑی کا انجن جس شرح سے باہر نکلتا ہو، یہ اس کی مروڑ ہو گی۔

مستوی منحنی کی انحنا

جیسے جیسے ایک ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے، منحنی کے مڑنے سے $\boldsymbol{T}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ بھی مڑتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{T}$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی اور راہ پر چلتے ہوئے صرف اس کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔ منحنی پر چلتے ہوئے اکائی فاصلہ پر $\boldsymbol{T}$ کی شرح تبدیلی کو انحنا کہتے ہیں (شکل 12.17)۔ انحنا کو روایتی طور پر یونانی حرف κ (کاپا) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

---

[16] curvature
[17] torsion

تعریف : ایک ہموار منحنی جس کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہو، کا تفاعل انحنا درج ذیل ہو گا۔

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

□

اگر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ بڑی قیمت ہو تب نقطہ P سے گزرتے ہوئے ذرہ بہت تیزی سے مڑے گا اور P پر انحنا زیادہ ہو گی۔ اگر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ صفر کے قریب ہو تب $\boldsymbol{T}$ کا رخ آہستہ تبدیل ہو گا اور P پر انحنا کم ہو گی۔ اس تعریف کو پرکھتے ہوئے ہم درج ذیل دو مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ سیدھے خط اور دائروں کی انحنا مستقل ہو گی۔

مثال 12.18: سیدھے لکیر کی انحنا صفر ہو گی
سیدھے لکیر پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لٰہذا اس کے اجزاء مستقل ہوں گے۔ یوں $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s| = |\boldsymbol{0}| = 0$ ہو گا (شکل 12.18)۔ □

مثال 12.19: رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی
ہم دائرہ کی مقدار معلوم مساوات

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

میں $\theta = \frac{s}{a}$ پر کر کے اس کی لمبائی قوس s کے لحاظ سے مقدار معلوم روپ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.19)۔

$$\boldsymbol{r} = (a\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (a\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

یوں

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

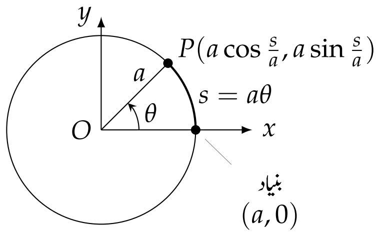
اور

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = (-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} - (\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

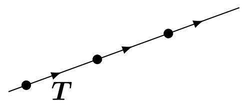
ہوں گے۔ اس طرح کسی بھی کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \qquad a > 0 \text{ کی بنا } |a| = a \text{ ہو گا}\end{aligned}$$

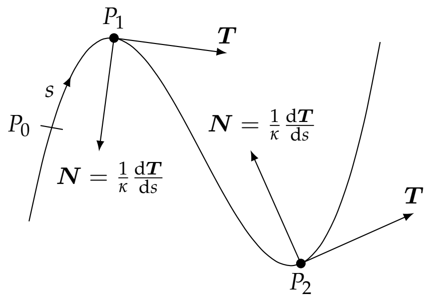
□



شکل 12.19: دائرہ برائے مثال 12.19



شکل 12.18: سیدھے لکیر پر $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کی انحنا $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ صفر ہو گی۔



شکل 12.20: منحنی کا عمودی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ ہر وقت اس رخ ہوتا ہے جس رخ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ ہے۔

صدر اکائی عمودی سمتیہ

چونکہ $\boldsymbol{T}$ کی لمبائی اکائی ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ اور $\boldsymbol{T}$ آپس میں عمودی ہوں گے (حصہ 12.1)۔ یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کو لمبائی κ سے تقسیم کرنے سے ایسا اکائی سمتیہ حاصل ہو گا جو $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا (شکل 12.20)۔

تعریف: جس نقطہ پر $\kappa \neq 0$ ہو وہاں مستوی میں منحنی کا صدر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$$

□

موڑ پر سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ اس جانب ہو گا جس جانب منحنی مڑتی ہو۔ یوں اگر بڑھتے فاصلہ کے رخ منہ کرتے ہوئے، اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے رخ مڑے تب سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ دائیں ہو گا اور اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے مخالف رخ مڑتی ہو تب اس کا رخ بائیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں صدر عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ منحنی کے مقعر رخ ہو گا (شکل 12.20)۔ جس نقطہ پر $\kappa = 0$ ہو، وہاں کے بارے میں سوالات میں غور کیا گیا ہے۔

تعریف کی رو سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کی لمبائی قوس، مثبت $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کے لئے ہو گی لہٰذا $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ درج ذیل دے گا۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|}\\
&= \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s)}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t||\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s|}\\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}
\end{aligned}
\tag{12.25}
$$

اس طرح ہم κ اور s حاصل کیے بغیر $\boldsymbol{N}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 12.20: درج ذیل دائری حرکت کے لئے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j}$$

حل: ہم پہلے $\boldsymbol{T}$ دریافت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -(2\sin 2t)\boldsymbol{i} + (2\cos 2t)\boldsymbol{j},\\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2,\\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\\
&= -(\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\cos 2t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

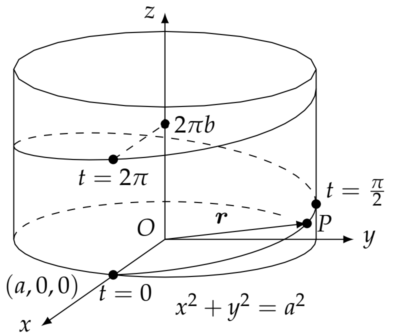
یوں

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= -(2\cos 2t)\boldsymbol{i} - (2\sin 2t)\boldsymbol{j},\\
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| &= \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2
\end{aligned}
$$

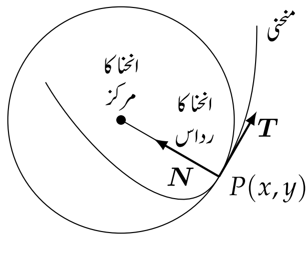
اور درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}\\
&= -(\cos 2t)\boldsymbol{i} - (\sin 2t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

□



شکل 12.22: ثبت a ، b کے لئے $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}$



شکل 12.21: نقطہ $P(x, y)$ پر دائرہ انحنا منحنی کے اندرونی رخ ہو گا۔

انحنا کا دائرہ اور انحنا کا رداس

مستوی منحنی پر نقطہ P جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، **دائرہ انحنا**[18] سے مراد اس مستوی میں وہ دائرہ ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

ا. نقطہ P پر یہ منحنی کا مماسی ہو (منحنی کا مماسی خط ہی اس کا مماسی خط ہے)؛

ب. نقطہ P پر اس کی انحنا اور منحنی کی انحنا ایک دوسرے کے برابر ہوں؛

ج. یہ منحنی کے اندرونی یعنی مقعر رخ پایا جائے (شکل 12.21)۔

نقطہ P پر منحنی کے **رداس انحنا**[19] سے مراد اس نقطہ پر دائرہ انحنا کا رداس ہے، جو مثال 12.19 کے مطابق درج ذیل ہو گا۔

$$\text{رداس انحنا} = \rho = \frac{1}{\kappa} \tag{12.26}$$

رداس انحنا جاننے کے لئے ہم κ معلوم کر کے اس کا بالعکس تناسب لیتے ہیں۔ نقطہ P پر **مرکز انحنا**[20] سے مراد یہاں کے دائرہ انحنا کا مرکز ہو گا۔

circle of curvature[18]
radius of curvature[19]
center of curvature[20]

فضائی منحنیات کی انحنا اور عمودی سمتیات

مستوی منحنیات کی طرح فضا میں ہموار منحنی کے لئے مقدار معلوم لمبائی قوس s ، مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ دیتا ہے۔ ہم اب بھی انحنا سے مراد

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \tag{12.27}$$

لیتے ہیں۔ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا اور ہم صدر اکائی عمودی سمتیہ سے مراد درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \tag{12.28}$$

مثال 12.21: درج ذیل پیچ دار منحنی کی انحنا دریافت کریں (شکل 12.22)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$$

حل: ہم سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}\\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}\\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}]
\end{aligned}$$

اب زنجیری قاعدہ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} && \text{زنجیری قاعدہ}\\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} && \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}| \implies \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\
&= \frac{a}{a^2+b^2}[-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}]
\end{aligned}$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|\\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\left|-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}\right|\\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{12.29}$$

ہم مساوات 12.29 سے دیکھتے ہیں کہ مستقل a کے لئے b بڑھانے سے انحنا کم ہوتی ہے۔ مستقل b کے لئے a کم کرنے سے بھی انحنا آخر کار انحنا کم کرتی ہے۔ ایک اسپرنگ کھینچنے سے سیدھا ہوتا ہے۔

اگر $b = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی ایک دائرہ ہو گا جس کا رداس a اور انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی۔ اگر $a = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی، محور z پر سیدھا خط ہو گا اور اس کی انحنا 0 ہو گی۔ □

مثال 12.22: گزشتہ مثال میں منحنی کے لئے $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

حل:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}] \qquad \text{مثال 12.21}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \qquad \text{مساوات 12.28}\\
&= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}]\\
&= -(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

□

مروڑ اور سہ عمودی سمتیہ

فضا میں منحنی کا **سہ عمودی سمتیہ**[21] $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے جو $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ دونوں کو عمودی ہو گا (شکل 12.23)۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر دایاں ہاتھ، متحرک، سمتی چھوکٹ دیتے ہیں جو فضا میں سواری کی حرکت پر غور میں مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

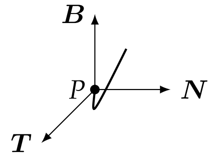
سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کا رویہ کیسا ہو گا؟ حاصل صلیبی ضرب کے قاعدہ تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}$$

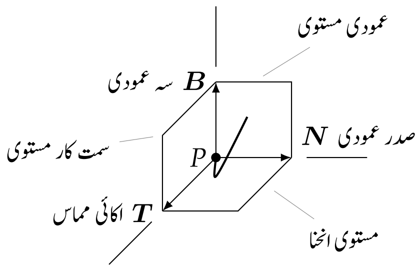
حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} \tag{12.30}$$

[21] binormal vector



شکل 12.23: سمتیات T ، N اور B (اسی ترتیب میں) فضا میں آپس میں عمودی اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چھوکٹ دیتے ہیں۔



شکل 12.24: سمتیات T ، N ، B کے پیدا تین مستوی کے نام۔

چونکہ حاصل صلیبی ضرب دونوں اجزاء کو عمودی ہوتا ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا۔

چونکہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ (جس کی لمبائی مستقل ہے) کو بھی عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{T}$ کے مستوی کو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ عمودی ہو گا۔دوسرے لفظوں میں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کے متوازی ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا مستقل مضرب ہو گا۔اس حقیقت کو علامتی طور پر

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{N}$$

لکھا جاتا ہے جہاں منفی کی علامت روایتی ہے۔ غیر سمتی τ ، منحنی پر مروڑ کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N} = -\tau\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N} = -\tau(1) = -\tau$$

کی بنا درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}$$

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے۔تب ہموار منحنی کا تفاعل **مروڑ**[22] درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}$$

□

انحنا κ کے برعکس جو کبھی منفی نہیں ہو سکتا ہے، مروڑ τ مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

منحنیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر تین مستوی دیتے ہیں (شکل 12.24)۔ منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر عمودی مستوی کی مڑنے کی شرح کو انحنا $\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$ تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر $\boldsymbol{T}$ کے لحاظ سے سطح منحنی انحنا کی مڑنے کی شرح کو مروڑ $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ منحنی میں بل کی پیمائش اس منحنی کی مروڑ ہو گی۔

[22] torsion

اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء

قوت کشش، بریک یا انجن کی طاقت کی بنا کسی جسم کی اسراع کے مماسی جزو میں ہم عموماً دلچسپی رکھتے ہیں جو اس قوت کی بنا پیدا ہوتی ہے۔ہم زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے لئے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھ کر دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big(\kappa\boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2\boldsymbol{N}
\end{aligned}$$

اس کو

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{T} \tag{12.31}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اسراع کا غیر سمتی مماسی جزو a_T اور غیر سمتی عمودی جزو a_N درج ذیل ہوں گے۔

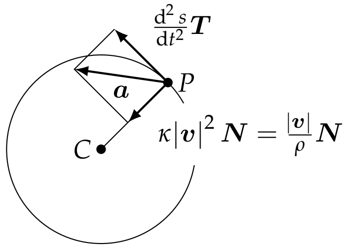
$$a_T = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|\,, \qquad a_N = \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2 = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \tag{12.32}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 12.31 میں $\boldsymbol{B}$ نہیں پایا جاتا ہے۔ایک راہ جس پر ایک جسم چل رہا ہو جتنا بھی گھومتا ہو، اس پر اسراع ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کی عمودی پائی جائے گی۔یہ مساوات ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ کتنی اسراع حرکت کے مماسی رخ $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ اور کتنی اسراع حرکت کے عمودی رخ $\kappa(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2$ ہو گی (شکل 12.25)۔

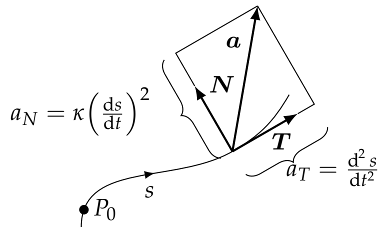
ہم مساوات 12.32 سے کیا معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ تعریف کی رو سے، اسراع $\boldsymbol{a}$ سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی تبدیلی کی شرح ہو گی اور حرکت کے دوران سمتی رفتار کا رخ اور اس کی مقدار (لمبائی) تبدیل ہو گی۔ اسراع کا مماسی جزو a_T سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی کی شرح تبدیلی دیتا ہے (یعنی رفتار میں تبدیلی)۔ عمودی جزو a_N ہمیں $\boldsymbol{v}$ کے رخ کی تبدیلی کی شرح دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ a_N انحنا ضرب رفتار کا مربع ہو گا۔اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ جب گاڑی تیز رفتار (زیادہ $|\boldsymbol{v}|$) سے چلتے ہوئے زیادہ جلدی مڑے (بڑی κ) تب ہمیں کیوں سیدھا بیٹھنے میں مشکل پیش آتی ہے۔ گاڑی کی رفتار دگنی کرنے سے آپ اسی انحنا کے لئے چار گنّا زیادہ عمودی اسراع محسوس کریں گے (شکل 12.26)۔

اگر ایک جسم مستقل رفتار سے چل رہی ہو تب $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ صفر ہو گا اور تمام اسراع $\boldsymbol{N}$ کے رخ، دائرے کے مرکز کے رخ ہو گا۔اگر ایک جسم کی رفتار بڑھ یا گھٹ رہی ہو تب $\boldsymbol{a}$ کا غیر صفر مماسی جزو ہو گا۔



شکل 12.26: ایک جسم جس کی رفتار ایک دائری راہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتے ہوئے بڑھ رہی ہو کے اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ دائرہ کا رداس ρ ہے۔



شکل 12.25: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ اسراع $\boldsymbol{a}$ ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کے عمودی پایا جاتا ہے۔

اسراع کا عمودی جزو a_N معلوم کرنے کی خاطر ہم عموماً کلیہ $a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$ استعمال کرتے ہیں جو a_N کے لئے مساوات $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_T^2 + a_N^2$ حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم بغیر κ معلوم کیے، a_N معلوم کر سکتے ہیں۔

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \tag{12.33}$$

مثال 12.23: درج ذیل حرکت کے لئے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ حاصل کئے بغیر اسراع $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

یہ راہ شکل 12.27 میں دکھائے دائرہ کا در پیچیدہ ہے۔

حل: ہم پہلے مساوات 12.32 سے a_T حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} \qquad \text{مثال } 12.16$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \qquad t > 0$$

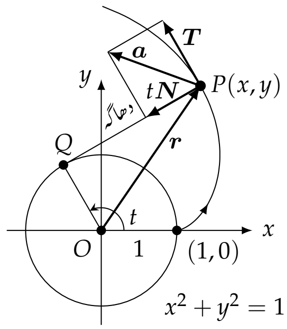
$$a_T = \frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1 \qquad \text{مساوات } 12.32$$

اب مساوات 12.33 استعمال کرتے ہوئے a_N حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = (\cos t - t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t + t\cos t)\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = t^2 + 1 \qquad \text{کچھ الجبرا کے بعد}$$

$$\begin{aligned} a_N &= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \\ &= \sqrt{(t^2+1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t \end{aligned}$$



شکل 12.27: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء (مثال 12.23)

اس کے بعد ہم مساوات 12.31 سے $\boldsymbol{a}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N} = (1)\boldsymbol{T} + (t)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} + t\boldsymbol{N}$$

□

انحنا اور مروڑ کے کلیات

ہم اب ہموار منحنیات کے انحنا اور مروڑ تلاش کرنے کے چند کلیات پیش کرتے ہیں جو استعمال میں آسان ثابت ہوتے ہیں۔ مساوات 12.31 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a} &= \Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}\Big)\times\Big[\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T}+\kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2\boldsymbol{N}\Big] && \text{مساوات 12.24 سے } \boldsymbol{v}=\tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}\\
&= \Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\Big)(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T})+\kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^3(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N})\\
&= \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^3\boldsymbol{B} && \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0},\, \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

یوں

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}| = \kappa\Big|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|^3|\boldsymbol{B}| = \kappa|\boldsymbol{v}|^3 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}| \text{ اور } |\boldsymbol{B}|=1$$

ہو گا جس کو κ کے لئے حل کر کے درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

انحنا کا سمتی کلیہ

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3} \tag{12.34}$$

مساوات 12.34 ہمیں منحنی پر چلتے ہوئے سمتی رفتار جہاں $\boldsymbol{v}$ غیر صفر ہو اور اسراع کی کسی بھی روپ سے انحنا، جو منحنی کی جیومیٹریائی خاصیت ہے، دیتی ہے ۔ ذرہ رک کر اس حیرت کن حقیقت پر غور کریں۔ منحنی پر حرکت کے کسی بھی کلیہ سے، چاہے حرکت کتنا بھی متغیر کیوں نہ ہو (جب تک $\boldsymbol{v}$ صفر نہ ہو)، ہم منحنی کی طبعی خاصیت دریافت کر سکتے ہیں جس کا ظاہری طور پر منحنی پر چلنے سے کوئی تعلق نہیں ہے۔

مروڑ کا ایک مقبول کلیہ جو اعلیٰ نصاب میں حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہے جہاں ایک نقطہ، t کے لحاظ سے ایک تفرق کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ اور $\dddot{x} = \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}$ ہوں گے۔

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|^2} \qquad \text{جہاں } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \text{ ہو} \tag{12.35}$$

یہ کلیہ $\boldsymbol{r}$ کے تفاعل اجزاء $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ سے مروڑ دیتا ہے۔ مقطع کا پہلا صف $\boldsymbol{v}$ سے، دوسرا صف $\boldsymbol{a}$ سے اور تیسرا صف $\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال 12.24: درج ذیل پیچ دار کا κ اور τ مساوات 12.34 اور مساوات 12.35 سے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\, a^2 + b^2 \neq 0$$

حل: ہم انحنا کو مساوات 12.34 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}, \\
\boldsymbol{a} &= -(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}, \\
\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= (ab\sin t)\boldsymbol{i} - (ab\cos t)\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}, \\
\kappa &= \frac{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{12.36}$$

مساوات 12.36 اور مساوات 12.29 جہاں ہم نے انحنا کو اس کی تعریف سے حاصل کیا، ایک جیسا نتیجہ دیتی ہیں۔

مروڑ کے لئے مساوات 12.35 استعمال کرنے سے پہلے ہم مقطع کے اندراج تلاش کرتے ہیں۔ ہم $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ جانتے ہیں لہٰذا

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = (a\sin t)\boldsymbol{i} - (a\cos t)\boldsymbol{j}$$

ہو گا۔یوں مروڑ درج ذیل ہو گا۔

مساوات 12.36 کی قیمتیں

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\left|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{(a\sqrt{a^2+b^2})^2} \\ &= \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2+b^2)} \\ &= \frac{b}{a^2+b^2}\end{aligned} \tag{12.37}$$

□

ہم مساوات 12.37 سے دیکھتے ہیں کہ دائری نلکی پر پیچ دار راہ کا مروڑ مستقل ہو گا۔درحقیقت فضا میں تمام منحنیات میں پیچ دار منحنی کی نشانی اس کی مستقل انحنا اور مستقل مروڑ ہیں۔

ڈی این اے[23] زندگی کا بنیادی سالمہ ہے۔ یہ دو پیچ دار حصوں پر مشتمل ہوتی ہے جو ایک دوسرے کے گرد لپٹے ہوتے ہیں۔ لپٹی صورت کی بنا سالمہ بہت کم جگہ لیتی ہے اور خرابی کی صورت میں (مستقل انحنا اور مروڑ کی بنا) خراب حصہ کو سالماتی قینچی سے کاٹا جا سکتا ہے۔سالماتی قینچی استعمال کرتے ہوئے سائنس دان امید رکھتے ہیں کہ وہ انسانیت کو ہر قسم کی بیماری سے نجات دے پائیں گے۔

فضا میں منحنیات کے کلیات

[23] DNA

اکائی مماسی سمتیہ	$\boldsymbol{T}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert}$
صدر اکائی عمودی سمتیہ	$\boldsymbol{N}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t\rvert}$
سہ عمودی سمتیہ	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$
انحنا	$\kappa=\left\lvert\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right\rvert=\dfrac{\lvert\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\rvert}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert^3}$
مروڑ	$\tau=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}=\dfrac{\begin{vmatrix}\dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\ \ddot{x}&\ddot{y}&\ddot{z}\\ \dddot{x}&\dddot{y}&\dddot{z}\end{vmatrix}}{\lvert\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\rvert^2}$
اسراع	$\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$
اسراع کا مماسی جزو	$a_T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lvert\boldsymbol{v}\rvert$
اسراع کا عمودی جزو	$a_N=\kappa\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2=\sqrt{\lvert\boldsymbol{a}\rvert-a_T^2}$

سوالات

مستوی منحنیات

سوال 1 تا سوال 4 میں مستوی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور κ تلاش کریں۔

سوال 1: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+(\ln\cos t)\boldsymbol{j},\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

سوال 2: $\boldsymbol{r}(t)=(\ln\sec t)\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j},\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

سوال 3: $\boldsymbol{r}(t)=(2t+3)\boldsymbol{i}+(5-t^2)\boldsymbol{j}$

سوال 4: $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j},\quad t>0$

سوال 5 اور سوال 6 میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ معلوم کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 5: $\boldsymbol{r}(t)=(2t+3)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}$

سوال 6: $\boldsymbol{r}(t)=\ln(t^2+1)\boldsymbol{i}+(t-2\tan^{-1}t)\boldsymbol{j}$

سوال 7: مستوی xy میں تفاعل کی ترسیم کی انحنا کا کلیہ۔

ا. مستوی xy میں ترسیم $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = x, y = f(x)$ ہے اور سمتی کلیہ $r(t) = xi + f(x)j$ ہو گا۔ اگر f دو بار قابل تفرق ہو تب اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\kappa(x) = \frac{\left|f''(x)\right|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

ب. جزو-ا میں κ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے $y = \ln(\cos x), \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کی انحنا تلاش کریں۔اپنے جواب کا سوال 1 کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. دکھائیں کہ نقطہ تصریف پر انحنا صفر ہو گی۔

سوال 8: مستوی میں مقدار معلوم روپ میں دی گئی منحنی کی انحنا کا کلیہ

ا. دکھائیں کہ دو بار قابل تفرق تفاعل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ پر مبنی ہموار منحنی $r(t) = f(t)i + g(t)j$ کی انحنا درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\kappa = \frac{\left|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}\right|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنیات کے انحنا تلاش کریں۔

ب. $r(t) = ti + (\ln \sin t)j, \quad 0 < t < \pi$

ج. $r(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]i + (\ln \cosh t)j$

سوال 9: مستوی منحنیات کے عمود

ا. دکھائیں کہ نقطہ $(f(t), g(t))$ پر منحنی $r(t) = f(t)i + g(t)j$ کے عمودی سمتیات $n(t) = -g'(t)i + f'(t)j$ اور $-n(t) = g'(t)i - f'(t)j$ ہیں۔ کسی مخصوص مستوی کا N تلاش کرنے کی خاطر ہم n اور $-n$ میں جو مقعر رخ ہو کو منتخب کر کے اس سے اکائی سمتیہ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.20)۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا N تلاش کریں۔

ب. $r(t) = ti + e^{2t}j$

ج. $r(t) = \sqrt{4 - t^2}i + tj, \quad -2 \le t \le 2$

سوال 10:

ا. منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{t^3}{3}\boldsymbol{j}$ کا $\boldsymbol{N}$ وقفہ $t < 0$ اور وقفہ $t > 0$ پر سوال 9 کے کلیہ سے حاصل کریں۔

ب. جزو-ا میں منحنی کے لئے

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}, \quad t \neq 0$$

حاصل کریں۔ کیا $t = 0$ پر $\boldsymbol{N}$ موجود ہے؟ اس منحنی کو ترسیم کریں اور منفی سے مثبت جانب گزرتے ہوئے $\boldsymbol{N}$ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

فضائی منحنیات

سوال 11 تا سوال 18 میں فضائی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ اور τ دریافت کریں۔

سوال 11: $\boldsymbol{r}(t) = (3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

سوال 12: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

سوال 13: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

سوال 14: $\boldsymbol{r}(t) = (6\sin 2t)\boldsymbol{i} + (6\cos 2t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$

سوال 15: $\boldsymbol{r}(t) = \frac{t^3}{3}\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{j}, \quad t > 0$

سوال 16: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 17: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (a\cosh\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \quad a > 0$

سوال 18: $\boldsymbol{r}(t) = (\cosh t)\boldsymbol{i} - (\sinh t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$

سوال 19 اور سوال 20 میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 19: $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$

سوال 20: $\boldsymbol{r}(t) = (1+3t)\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} - 3t\boldsymbol{k}$

سوال 21 اور سوال 24 میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر، دیے گئے t پر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 21: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 22: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 23: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t + \frac{t^3}{3})\boldsymbol{j} + (t - \frac{t^3}{3})\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 24: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}e^t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 25 اور سوال 26 میں دیے گئے $\boldsymbol{r}$ پر $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ معلوم کریں۔اس کے بعد در پیچیدہ مستوی، عمودی مستوی اور سمت کار مستوی کی مساوات اس t پر حاصل کریں۔

سوال 25: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال 26: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

طبعی استعمال

سوال 27: آپ کی گاڑی کا رفتار پیما برقرار $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھا رہا ہے۔ کیا آپ کی اسراع ممکن ہے؟ جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 28: کیا مستقل رفتار سے چلتے ہوئے ذرہ کی اسراع کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 29: ایک ذرہ کی اسراع ہر لمحہ اس کی سمتی رفتار کے عمودی ہے۔ اس کی رفتار کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 30: ایک جسم جس کی کمیت m ہے قطع مکافی $y = x^2$ پر مستقل رفتار $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتا ہے۔ نقطہ $(0,0)$ اور نقطہ $(\sqrt{2},2)$ پر اسراع کی بدولت اس پر کتنی قوت ہو گی؟ اپنا جواب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کی روپ میں لکھیں۔ (نیوٹن کا کلیہ $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ذہن میں رکھیں۔)

سوال 31: ایک منحنی پر کسی جسم کو مستقل رفتار سے حرکت دینے کے لئے درکار قوت، قوانین نیوٹن کے تحت، حرکت کی انحنا کی مستقل مضرب ہو گی۔ حساب سے دکھائیں کہ یہ فقرہ کیوں درست ہے۔

سوال 32: دکھائیں اگر ایک ذرے کی اسراع کا عمودی جزو صفر ہو تب یہ متحرک ذرہ سیدھا حرکت کرے گا۔

انحنا پر مزید سوالات

سوال 33: دکھائیں کہ قطع مکافی $y = ax^2,\ a \neq 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا راس کی راس پر ہو گی جبکہ کسی بھی نقطہ پر کم سے کم انحنا نہیں ہو گی۔ (چونکہ منحنی کو فضا میں ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے یا گھمانے سے انحنا تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہ حقیقت کسی بھی قطع مکافی کے لئے درست ہو گا۔)

سوال 34: دکھائیں کہ ترخیم $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a > b > 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا اس کی محور اکبر پر اور کم سے کم انحنا اس کی محور اصغر پر ہو گی۔(گزشتہ سوال کی طرح یہ حقیقت بھی ہر ترخیم کے لئے درست ہو گا۔)

سوال 35: پیچ دار منحنی کی زیادہ سے زیادہ انحنا

ہم نے مثال 12.21 میں دیکھا کہ پیچ دار $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k},\ (a, b \geq 0)$ کی انحنا $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$ ہو گی۔کسی بھی b کے لئے زیادہ سے زیادہ انحنا کتنی ہو گی؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 36: اگر آپ کو $|a_N|$ اور $|\boldsymbol{v}|$ معلوم ہوں تب کلیہ $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2$ سے انحنا حاصل کی جا سکتی ہے۔اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کی انحنا اور رداس انحنا دریافت کریں۔(a_N اور $|\boldsymbol{v}|$ کی قیمتیں مثال 12.23 سے لیں۔)

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

سوال 37: دکھائیں کہ درج ذیل خط کے لئے κ اور τ صفر ہوں گے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + At)\boldsymbol{i} + (y_0 + Bt)\boldsymbol{j} + (z_0 + Ct)\boldsymbol{k}$$

سوال 38: مکمل انحنا

ہم ایک منحنی پر $s = s_0$ سے $s = s_1 > s_0$ تک حصہ کی مکمل انحنا حاصل کرنے کی خاطر s_0 تا s_1 انحنا κ کا تکمل لیتے ہیں۔ اگر منحنی کا متغیر s کی بجائے t ہو تب مکمل انحنا درج ذیل ہو گی، جہاں s_0 اور s_1 کے مطابقتی قیمتیں t_0 اور t_1 ہیں۔

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \kappa|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t$$

وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ پر پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ کی مکمل انحنا معلوم کریں۔

سوال 39: گزشتہ سوال جاری

درج ذیل منحنیات کی مکمل انحنا دریافت کریں۔

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j},\ a \le t \le b\ (a > 0)$ (انحنا معلوم کرنے کا آسان طریقہ سوال 36 میں پیش کیا گیا ہے۔ مثال 12.23 کی قیمتیں استعمال کریں۔)

ب. $y = x^2, \quad -\infty < x < \infty =$

سوال 40:

ا. نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 1)$ پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔ (یہ مستوی xy میں $y = \sin x$ کی مقدار معلوم روپ ہے۔)

ب. نقطہ $(0, -2)$ جہاں $t = 1$ ہے پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln t)\boldsymbol{i} - (t + \frac{1}{t})\boldsymbol{j},\ e^{-2} \le t \le e^2$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 41: مستوی منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ جو کافی قابل تفرق ہو کی مروڑ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 42: پیچ دار کی مروڑ
ہم نے مثال 12.24 میں دیکھا کہ پیچ دار

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \ge 0$$

کی انحنا $\frac{b}{a^2+b^2}$ ہے۔ کسی مستقل a کے لئے τ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 43: صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔
صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔ یہ اس حقیقت کی ایک مخصوص صورت ہے کہ ایک ذرہ جس کی سمتی رفتار کسی مقررہ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کی عمودی ہو، ایسی مستوی میں حرکت کرتا ہے جو C کو عمودی ہو گا، اور یہ حقیقت از خود درج ذیل مسئلہ کا حل ہے۔

فرض کریں وقفہ $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ دو بار قابل تفرق ہو، اور $t = a$ پر $\boldsymbol{r} = 0$ ہو اور $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ ہو تب $[a, b]$ میں تمام t پر $h(t) = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کو حل کریں۔ (اشارہ: اسراع $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ سے شروع کریں اور ابتدائی معلومات الٹ رخ لاگو کریں۔)

سوال 44: ایک کلیہ جو $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{v}$ سے τ حاصل کرتا ہے
اگر ہم تعریف $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}$ سے شروع کر کے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کو زنجیری قاعدہ سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

لکھیں تب ہمیں درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{N}\Big)$$

یہ کلیہ استعمال میں، اخذ کرنے میں اور بیان کرنے میں مساوات 12.35 سے زیادہ آسان ہے۔ اس میں قباحت یہ ہے کہ کمپیوٹر کے بغیر اسے استعمال کرنے میں بہت زیادہ کام کرنا ہو گا۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے مثال 12.24 میں پیچ دار کی مروڑ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال مروڑ کا کلیہ

$$\kappa(x) = \frac{\left|f''(x)\right|}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}$$

جسے ہم نے سوال 7 میں اخذ کیا، دو بار قابل تفرق مستوی منحنی $y = f(x)$ کی انحنا κ کو x کا تفاعل دیتا ہے۔ سوال 45 تا سوال 48 میں دی گئی منحنیات کا تفاعل انحنا تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر $\kappa(x)$ اور $f(x)$ کو ترسیم کریں۔ آپ چند دلچسپ حقائق دیکھیں گے۔

سوال 45: $y = x^2, \quad -2 \le x \le 2$

سوال 46: $y = \frac{x^4}{4}, \quad -2 \le x \le 2$

سوال 47: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

سوال 48: $y = e^x, \quad -1 \le x \le 2$

دائرہ انحنا
سوال 49 تا سوال 56 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے مستوی منحنی میں نقطہ P پر، جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، دائرہ انحنا پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دی گئی مستوی منحنی کی صورت دیکھنے کی خاطر دیے گئے وقفہ پر منحنی ترسیم کریں۔

ب. دیے گئے نقطہ t_0 پر منحنی کی انحنا κ کی قیمت سوال 7 یا سوال 8 میں دیے کلیہ سے معلوم کریں۔ اگر منحنی بطور تفاعل $y = f(x)$ دی گئی ہو تب اس کی مقدار معلوم روپ $x = t, \; y = f(t)$ استعمال کریں۔

ج. نقطہ t_0 پر اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ t_0 پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا گھڑی کے رخ یا گھڑی کے مخالف رخ گھومنا، $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء کی علامتیں تعین کرتا ہے (سوال 9)۔

د. اگر مبدا سے دائرہ انحنا کے مرکز (a, b) تک سمتیہ $\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ہو تب مرکز $\boldsymbol{C}$ درج ذیل سمتی مساوات سے معلوم کریں۔

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{N}(t_0)$$

منحنی پر نقطہ $P(x_0, y_0)$ تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ دیتا ہے۔

ہ. دائرہ انحنا کی خفی مساوات $(y-b)^2 + (x-a)^2 = \frac{1}{\kappa^2}$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد منحنی اور دائرہ انحنا کو اکٹھے ترسیم کریں۔ (قابل دید ترسیمات حاصل کرنے کی خاطر افقی اور انتصابی پیمائش برابر رکھتے ہوئے، آپ کو مختلف وقفوں پر ترسیم کرنا پڑ سکتا ہے۔)

سوال 49: $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (5\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 50: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 51: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t^3 - 3t)\boldsymbol{j}, \quad -4 \le t \le 4, \quad t_0 = \frac{3}{5}$

سوال 52: $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\boldsymbol{i} + \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \quad -2 \le t \le 5, \quad t_0 = 1$

سوال 53: $\boldsymbol{r}(t) = (2t - \sin t)\boldsymbol{i} + (2 - 2\cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi, \quad t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال 54: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t}\cos t)\boldsymbol{i} + (e^{-t}\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 6\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 55: $y = x^2 - x, \quad -2 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال 56: $y = x(1-x)^{2/5}, \quad -1 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹے

سوال 57 تا سوال 60 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ t پر چار اعشاریہ درستگی تک $\boldsymbol{v}$ ، $\boldsymbol{a}$ ، رفتار، $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ ، τ اور اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء تلاش کریں۔

سوال 57: $\quad \boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = \sqrt{3}$

سوال 58: $\quad \boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t = \ln 2$

سوال 59: $\quad \boldsymbol{r}(t) = (t-\sin t)\boldsymbol{i} + (1-\cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{-t}\boldsymbol{k}, \quad t = -3\pi$

سوال 60: $\quad \boldsymbol{r}(t) = (3t-t^2)\boldsymbol{i} + (3t^2)\boldsymbol{j} + (3t+t^3)\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

12.5 فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت

اس حصہ میں ہم قوانین نیوٹن اور قوت کشش کی مدد سے سیاروں کی حرکت کے قوانین کیپلر اخذ کریں گے اور زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر بحث کریں گے۔ قوانین نیوٹن سے قوانین کیپلر کا حصول احصاء کی اہم کامیابی ہے۔اس میں وہ سب کچھ درکار ہو گا جو ہم نے اب تک پڑھا ہے جیسا فضا میں سمتیات کا الجبرا اور جیومیٹری، سمتی تفاعل کا احصاء، تفرقی مساوات کے حل، ابتدائی قیمت مسائل اور ترخیمی حصوں کی قطبی محددی تشریح۔

قطبی اور نلکی محدد میں حرکت کی سمتی مساواتیں

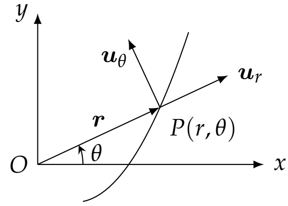
ہم یہاں قطبی محدد کو r ، θ اور نلکی محدد کو r ، θ ، z لکھیں گے۔ ایک ذرہ قطبی محددی مستوی میں حرکت کرتا ہو، ہم اس کے مقام، سمتی رفتار اور اسراع کو متحرک اکائی سمتیات

$$\boldsymbol{u}_r = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} \tag{12.38}$$

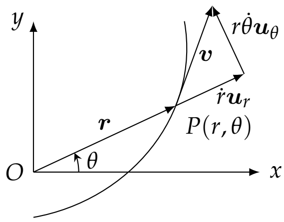
کی روپ میں لکھتے ہیں (شکل 12.28)۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کا رخ سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کے رخ ہے لہٰذا $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ ہو گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_\theta$ بڑھتے θ کے رخ یعنی سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کو عمودی ہے۔

مساوات 12.38 سے ہمیں درج ذیل ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} &= -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}_\theta\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} &= -(\cos\theta)\boldsymbol{i} - (\sin\theta)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r\end{aligned} \tag{12.39}$$



شکل 12.28: نقطہ P کا قطبی محدد r سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی مقدار ہو گی۔یوں $\boldsymbol{u}_r$ ، جو $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ ہے $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ ہو گا۔



شکل 12.29: قطبی محدد میں سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$ ہو گا۔

ہم وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{u}_r$ اور $\boldsymbol{u}_\theta$ کی تبدیلی دیکھنے کی خاطر ان کا تفرق t کے لحاظ سے زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r \tag{12.40}$$

یوں سمتی رفتار (شکل 12.29)

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{u}_r) = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\boldsymbol{u}}_r = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta \tag{12.41}$$

اور اسراع درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{u}}_\theta) \tag{12.42}$$

جب $\dot{\boldsymbol{u}}_r$ اور $\dot{\boldsymbol{u}}_\theta$ کے حصول کے لئے مساوات 12.40 استعمال کیا جائے اور اجزاء کو علیحدہ کیے جائیں تب اسراع کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta \tag{12.43}$$

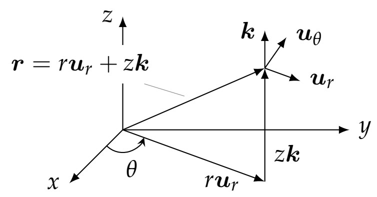
ہم مساوات $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ کے دائیں ہاتھ جزو $z\boldsymbol{k}$ جمع کر کے ان مساواتوں کو وسعت دے کر فضا میں حرکت کے لئے قابل استعمال بنا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{u}_r + z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{12.44}$$

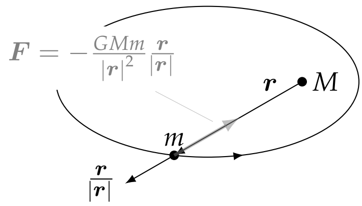
دھیان رہے کہ $z \neq 0$ کی صورت میں $|\boldsymbol{r}| = r$ ہو گا۔

سمتیات $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{k}$ دایاں ہاتھ چھوکٹ دیتے ہیں جس میں درج ذیل ہوں گے (شکل 12.30)۔

$$\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{u}_\theta \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u}_\theta \tag{12.45}$$



شکل 12.30: نلکی محدد میں تعین گر سمتیہ اور بنیادی اکائی سمتیات



شکل 12.31: قوت کشش دونوں کمیتوں کے بیچ سیدھے خط پر ہو گا۔

سیارے مستوی میں حرکت کرتے ہیں

نیوٹن کا قانون تجاذب کہتا ہے کہ اگر سورج کی کمیت M ، سیارہ کی کمیت m اور سورج کے کمیتی مرکز سے سیارہ کے کمیتی مرکز تک رداس سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب سیارہ اور سورج کے بیچ قوت کشش $\boldsymbol{F}$ درج ذیل ہو گا (شکل 12.31) جہاں G (عالمگیر) **تجاذبی مستقل**[24] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{12.46}$$

اگر قوت کی اکائی نیوٹن، کمیت کی اکائی کلو گرام اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہو تب $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہو گا۔ نیوٹن کے دوسرے قانون $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ کو مساوات 12.46 کے ساتھ ملا کر

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \end{aligned} \tag{12.47}$$

حاصل ہو گا۔ سیارہ ہر لمحہ سورج کی جانب اسراع پذیر ہے۔

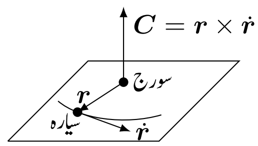
مساوات 12.47 کہتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ کا غیر سمتی مضرب $\ddot{\boldsymbol{r}}$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \tag{12.48}$$

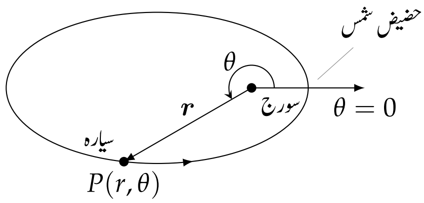
ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ہ $\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ از خود $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کا تفرق ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{12.49}$$

[24] gravitational constant



شکل 12.32: سورج کے گرد سیارہ اس مستوی میں حرکت کرتا ہے جو $C = r \times \dot{r}$ کو عمودی ہو اور سورج کے کمیتی مرکز سے گزرتا ہے۔



شکل 12.33: حرکت سیارہ کا محددی نظام۔اوپر سے دیکھتے ہوئے حرکت، $\dot{\theta} > 0$ کی بنا، گھڑی کے مخالف رخ ہے۔

یوں مساوات 12.48 درج ذیل کا معادل ہے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0} \tag{12.50}$$

جس کا تکمل

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C} \tag{12.51}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{C}$ مستقل سمتیہ ہے۔

ہمیں مساوات 12.51 بتاتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ اور $\dot{\boldsymbol{r}}$ ہر لمحہ ایک ایسے مستوی میں ہوں گے جو $\boldsymbol{C}$ کو عمودی ہو گا۔یوں سورج کے مرکز سے گزرتی مستوی میں سیارے حرکت کرتے ہیں (شکل 12.32)۔

محدد اور ابتدائی معلومات

ہم نلکی محدد کے مرکز کو سورج کے کمیتی مرکز پر رکھتے ہیں اور سیارے کی حرکت کو قطبی محددی سطح لیتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{r}$ سیارے کا تعین گر سمتیہ ہو گا۔یوں $r = |\boldsymbol{r}|$ اور $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{u}_r$ ہوں گے۔ہم $\boldsymbol{C}$ کو محور z پر رکھتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{C}$ کا رخ $\boldsymbol{k}$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کے ساتھ وہی دائیں ہاتھ کا تعلق ہو گا جو اس کے ساتھ $\boldsymbol{C}$ کا ہے اور مثبت z محور سے دیکھتے ہوئے سیارہ گھڑی کے مخالف رخ گھومے گا۔اس طرح t بڑھنے سے θ بڑھے گا لہٰذا تمام t کے لئے $\dot{\theta} > 0$ ہو گا۔ہم اس لمحہ کو ابتدائی لمحہ منتخب کرتے ہیں جب سیارہ سورج کے قریب ترین ہو اور نلکی محدد کو (اگر ضرورت ہو) محور z کے گرد یوں گھماتے ہیں کہ ابتدائی لمحہ پر $\boldsymbol{r}$ اور ابتدائی شعاع ہم مکان ہوں۔یوں ابتدائی شعاع سیارے کے **حضیض شمس**[25] سے گزرے گا (شکل 12.33)۔

اگر ہم وقت کی پیمائش یوں کریں کہ حضیض شمسی پر $t = 0$ ہو تب سیارے کی حرکت کی ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

ا. لمحہ $t = 0$ پر $r = r_0$ ہو گا جو کم سے کم رداس ہے،

---

[25] perihelion

ب. لمحہ $t=0$ پر (r کی قیمت کم سے کم ہونے کی بنا) $\dot{r}=0$ ہو گا،

ج. لمحہ $t=0$ پر $\theta=0$ ہو گا،

د. لمحہ $t=0$ پر $|\boldsymbol{v}|=v_0$ ہو گا۔
مزید

$$
\begin{aligned}
v_0 &= |\boldsymbol{v}|_{t=0} \\
&= \left|\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && \text{مساوات 12.41} \\
&= \left|r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && t=0 \text{ پر } \dot{r}=0 \\
&= (\left|r\dot{\theta}\right||\boldsymbol{u}_\theta|)_{t=0} \\
&= \left|r\dot{\theta}\right|_{t=0} && |\boldsymbol{u}_\theta|=1 \\
&= (r\dot{\theta})_{t=0} && r \text{ اور } \dot{\theta} \text{ دونوں مثبت ہیں}
\end{aligned}
$$

کی بنا ہم درج ذیل بھی جانتے ہیں۔

ھ. لمحہ $t=0$ پر $r\dot{\theta}=v_0$ ہو گا۔

کیپلر کا پہلا قانون (قانون مخروط حصہ)

کیپلر کا پہلا قانون کہتا ہے کہ سیارے کی حرکت مخروطی ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج پایا جاتا ہے۔ اس مخروط کی سنک

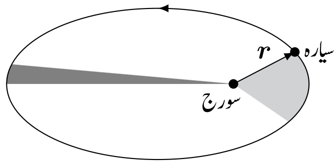
$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{12.52}$$

اور قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{12.53}$$

کیپلر کا دوسرا قانون (قانون یکساں رقبہ)

کیپلر کا دوسرا قانون کہتا ہے کہ سورج سے سیارہ تک رداسی سمتیہ (جو ہمارے نمونہ میں $\boldsymbol{r}$ ہو گا) مساوی اوقات میں مساوی علاقوں کو واضح کرتا ہے (شکل 12.34)۔ اس قانون کو اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات 12.41 استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.51 میں دی گئی حاصل صلیبی



شکل 12.34: سورج اور سیارہ کے بیچ سیدھی لکیر مساوی اوقات میں مساوی رقبوں کو واضح کرتی ہے۔

ضرب $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \\
&= r\boldsymbol{u}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta) && \text{مساوات 12.41} \\
&= r\dot{r}\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_r)}_{\boldsymbol{0}} + r(r\dot{\theta})\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta)}_{\boldsymbol{k}} \\
&= r(r\dot{\theta})\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{12.54}
$$

لمحہ $t = 0$ پر اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\boldsymbol{C} = [r(r\dot{\theta})]_{t=0}\boldsymbol{k} = r_0 v_0 \boldsymbol{k} \tag{12.55}
$$

مساوات 12.54 میں $\boldsymbol{C}$ کی یہ قیمت پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
r_0 v_0 \boldsymbol{k} = r^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} \quad \text{یعنی} \quad r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \tag{12.56}
$$

قطبی محدد میں تفرقی رقبہ درج ذیل لکھا جاتا ہے (حصہ 10.9)۔

$$
\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta
$$

یوں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r_0 v_0 \tag{12.57}
$$

جو کپلر کا دوسرا قانون ہے۔

زمین کے لئے r_0 تقریباً $1.5 \times 10^8\,\mathrm{km}$ ، v_0 تقریباً $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ تقریباً $2.25 \times 10^9\,\mathrm{km^2\,s^{-1}}$ ہو گا۔یوں آپ کے دل کی ہر ایک دھڑکن میں زمین اپنے مدار میں $30\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتی ہے اور سورج سے زمین تک رداسی خط $2.25 \times 10^9\,\mathrm{km^2}$ رقبہ واضح کرتا ہے۔

کپلر کے پہلے قانون کا ثبوت

یہ دکھانے کی خاطر کہ سورج کے گرد سیارے کا مدار مخروطی ہوتا ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج واقع ہوتا ہے، ہمیں r کو متغیر θ کا تفاعل لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر ہمیں ایک لمبا حساب کرنا ہو گا۔

ہم وقتی طور پر $\dot{\theta}$ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات 12.43 اور مساوات 12.47 میں $\boldsymbol{u}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ کے عددی سر ایک دوسرے کے برابر پر لکھ کر درج ذیل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{12.58}$$

اس میں ہم مساوات 12.56 سے $\dot{\theta}$ کی جگہ $\frac{r_0 v_0}{r^2}$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{12.59}$$

حاصل کرتے ہیں۔ہم متغیرات تبدیل کرتے ہوئے اس سے درجہ اول کی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔یوں زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$p = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

لکھ کر مساوات 12.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{12.60}$$

دونوں اطراف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$p^2 = (\dot{r})^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1 \tag{12.61}$$

لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $r = r_0$ اور $\dot{r} = 0$ سے C_1 کی قیمت تعین ہو گی۔

$$C_1 = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}$$

اس طرح مساوات 12.61 کو ترتیب دینے کے بعد درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\dot{r}^2 = v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{12.62}$$

مساوات 12.58 سے مساوات 12.62 حاصل کرنے میں ہم نے r کی دو درجی تفرقی مساوات سے r کی ایک درجی تفرقی مساوات حاصل کی۔ ہمیں اب θ کی روپ میں r کو لکھنا باقی ہے لہٰذا ہم θ کو دوبارہ مساوات میں لاتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 12.62 کے دونوں اطراف کو مساوات $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$ (مساوات 12.56) کے مطابقتی اطراف سے تقسیم کر کے حقیقت $\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{r^4}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2}\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big) \tag{12.63}$$

$$= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big) \qquad h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \tag{12.64}$$

اس کی مزید سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$u = \frac{1}{r}, \quad u_0 = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}, \quad \Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 = \frac{1}{r^4}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 = u_0^2 - u^2 + 2hu - 2hu_0 = (u_0 - h)^2 - (u - h)^2 \tag{12.65}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \mp\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2} \tag{12.66}$$

ہمیں کس علامت کا انتخاب کرنا ہو گا؟ ہم جانتے ہیں کہ $\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$ مثبت ہے۔ساتھ ہی $t = 0$ پر r کم سے کم قیمت سے شروع ہوتا ہے لہٰذا یہ یکدم گھٹ نہیں سکتا ہے، اور ابتدائی مثبت لمحات میں $\dot{r} \geq 0$ ہو گا لہٰذا

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \leq 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \geq 0$$

ہو گا۔مساوات 12.66 میں منفی علامت درست ہو گی۔ یہ جاننے کے بعد ہم مساوات 12.66 کو ترتیب دے کر θ کے لحاظ سے دونوں اطراف اک تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{gathered} \frac{-1}{\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1 \\ \cos^{-1}\Big(\frac{u - h}{u_0 - h}\Big) = \theta + C_2 \end{gathered} \tag{12.67}$$

چونکہ $\theta = 0$ پر $u = u_0$ ہو گا اور $\cos^{-1}(1) = 0$ ہوتا ہے لہٰذا C_2 صفر ہو گا۔یوں

$$\frac{u - h}{u_0 - h} = \cos\theta \tag{12.68}$$

اور

$$\frac{1}{r} = u = h + (u_0 - h)\cos\theta \tag{12.69}$$

ہو گا جس کو چند الجبرائی اقدام کے بعد

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{12.70}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{12.71}$$

ہوں گے۔ مساوات 12.70 اور مساوات 12.71 مل کر کہتے ہیں کہ سیارے کی راہ مخروطی ہو گی جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہو گا اور جس کی سنک $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ ہو گی۔ یہ قانون کپلر اول کی جدید مساوات ہے۔

کپلر کا تیسرا قانون (قانون وقت اور فاصلہ)

ایک سیارہ جتنے وقت T میں اپنے سورج کے گرد ایک چکر کاٹتا ہے، اس کو سیارہ کا **دوری عرصہ**[26] کہتے ہیں۔ کپلر کا تیسرا قانون کہتا ہے کہ T اور سیارے کے مدار کے نصف محور اکبر a کے بیچ درج ذیل تعلق پایا جاتا ہے۔

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{12.72}$$

چونکہ کسی بھی شمسی نظام کے اندر اس مساوات کا دایاں ہاتھ ایک مستقل ہو گا لہٰذا اس نظام میں تمام سیاروں کے لئے T^2 اور a^3 کا تناسب یکساں ہو گا۔

کپلر کا تیسرا قانون ہمیں ہمارے نظام شمسی کی جسامت کی معلومات حاصل کرنے کا موقع دیتا ہے۔ ہم ہر ایک سیارے کے نصف محور اکبر کو فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔زمین کے نصف محور اکبر کی لمبائی فلکیاتی اکائی کہلاتی ہے۔ہم کسی بھی لمحہ تمام سیاروں کے بیچ فاصلوں کو بھی فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔ اب آخری کام، ان تمام فاصلوں میں کسی ایک کی لمبائی، کلومیٹروں میں معلوم کرنا رہ گیا ہے۔زہرہ سے ٹکرانے کے بعد ریڈار کی واپس پلٹی موجوں سے ہم زمین اور زہرہ کے بیچ فاصلہ ناپ سکتے ہیں۔ اس قسم کے تجربات سے ہم اب جانتے ہیں کہ ایک فلکیاتی اکائی 149 597 870 km کے برابر ہے۔

[26] orbital period

ہم سیارے کے ترخیمی مدار میں گھیرے گئے رقبہ کے دو مختلف کلیات کو ملا کر کیپلر کا تیسرا قانون اخذ کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ} &= \pi ab && \text{کلیہ 1}\\
\text{رقبہ} &= \int_0^T \mathrm{d}S && \text{کلیہ 2}\\
&= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 \,\mathrm{d}t && \text{مساوات 12.57}\\
&= \frac{1}{2} T r_0 v_0
\end{aligned}$$

ان دو مساوات کو ایک دوسرے کے مساوی رکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1-e^2} \qquad \text{ترخیم کے لئے } b = a\sqrt{1-e^2} \text{ ہوتا ہے} \tag{12.73}$$

ہمیں اب a اور e کو r_0 ، v_0 ، G اور M کی روپ میں لکھنا ہے۔ مساوات 12.71 ہمیں e دیتی ہے جبکہ مساوات 12.70 میں θ کو π کے برابر پر کرنے سے

$$r_{\text{بلندتر}} = r_0 \frac{1+e}{1-e}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$2a = r_0 + r_{\text{بلندتر}} = \frac{2r_0}{1-e} = \frac{2r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2} \tag{12.74}$$

مساوات 12.73 کے دونوں اطراف کا مربع لے کر اس میں مساوات 12.71 اور مساوات 12.74 کے نتائج پر کرنے سے کیپلر کا تیسرا قانون حاصل ہو گا (سوال 14)۔

مدار

اگرچہ کیپلر نے یہ قوانین تجرباتی طور پر دریافت کیے، قوانین نیوٹن سے قوانین کیپلر کے حصول کے بعد ہم جانتے ہیں کہ یہ قوانین ہر اس جسم پر لاگو ہوں گے جس پر بالعکس مربع قانون کے تحت قوت لاگو ہو۔ یہ سورج کے گرد ہالی دم دار ستارہ اور آئکارس سیارچہ کی مدار اور زمین کے گرد چاند کے مدار پر لاگو ہوں گے۔ اسی طرح یہ چاند کے گرد اپالو 8 کے خلائی جہاز کے مدار پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔ ایٹم کے مرکزہ پر مارے گئے بار بردار ذرات قوانین کیپلر کو مطمئن کرتے ہوئے قطع زائد راہوں پر فشاں ہوتے ہیں۔

جدول 12.1 میں نظام شمسی کے سیاروں کے مدار کی معلومات دی گئی ہے۔ مصنوعی سیاروں کے حاصل مواد سے ہم سمندروں میں پانی کی سطح میں فرق جان سکے اور بحر الکاہل میں دور ترین جزیروں کا درست مقام معلوم کر سکے۔ اس مواد سے ہمیں یہ بھی معلوم ہوا کہ سورج اور چاند کی قوت کشش زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر اثر انداز ہوں گے اور شمسی اخراج اتنا دباو پیدا کرتا ہے کہ مدار کی شکل تبدیل ہو جائے۔

جدول 12.2 اور جدول 12.3 میں مزید مواد پیش کیا گیا ہے۔

جدول 12.1: شمسی سیاروں کے a ، e اور T کی قیمتیں۔

سیارہ	نصف محور $a^{\dagger}$	سنک e	دوری عرصہ T
عطارہ	57.95	0.2056	87.967 دن
زہرہ	108.11	0.0068	224.701 دن
زمین	149.57	0.0167	365.256 دن
مریخ	227.84	0.0934	1.8808 سال
مشتری	778.14	0.0484	11.8613 سال
زحل	1427.0	0.0543	29.4568 سال
یورانس	2870.3	0.0460	84.0081 سال
نیپچون	4499.9	0.0082	164.784 سال
پلوٹو	5909	0.2481	248.35 سال
	$\dagger$ ملین کلومیٹر (10^6 km)		

جدول 12.2: زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کی معلومات

نام	پرواز	خلائی زندگی	کمیت	دوری عرصہ ††	حضیض †	اوج †	نصف محور اکبر †	سنک
سپٹنک 1	اکتوبر 1957	57.6 دن	83.6	96.2	215	939	6955	0.052
ونگارڈ 1	مارچ 1958	300 سال	1.47	138.5	649	4340	8872	0.208
سنکام 3	اگست 1964	$> 10^6$ سال	39	1436.2	35718	35903	42189	0.002
سکائے لیب 4	نومبر 1973	84.06 دن	13980	93.11	422	437	6808	0.001
ٹائرس 11	اکتوبر 1978	500 سال	734	102.12	850	866	7236	0.001
گوس 4	ستمبر 1980	$> 10^6$ سال	627	1436.2	35776	35800	42166	0.0003
انٹل سیٹ 5	دسمبر 1980	$> 10^6$ سال	1928	1417.67	35143	35707	41803	0.007
$\dagger$ کلو میٹر								
$\dagger\dagger$ منٹ								

جدول 12.3: اعدادی مواد

تجاذبی مستقل	$6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
کمیت شمس	$1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
کمیت زمین	$5.975 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
استوائی رداس زمین	6378.533 km
قطبی رداس زمین	6356.912 km
زمین کا ہم دوری عرصہ	1436.1 منٹ
زمین کا سورج کے گرد دوری عرصہ	365.256 دن (ایک سال)

سوالات

سوال 1: سکائی لیب 4 کا نصف محور اکبر $a = 6808\,\text{km}$ ہے۔ کیپلر کے تیسرے قانون میں زمین کی کمیت کو M لیتے ہوئے دوری عرصہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔اس کا حساب لگائیں۔ جدول 12.2 میں دی گئی قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 2: حضیض شمسی پر سورج سے زمین کا فاصلہ تقریباً $149\,577\,000\,\text{km}$ ہوتا ہے اور سورج کے گرد زمین کے مدار کی سنک 0.0167 ہے۔ حضیض شمس پر زمین کی رفتار v_0 تلاش کریں (مساوات 12.52 استعمال کریں)۔

سوال 3: روس نے جولائی 1965 میں پروٹان 1، مصنوعی سیارہ مدار میں چھوڑا جس کی کمیت (چھوڑتے وقت) $12\,200\,\text{kg}$ ، بلندی حضیض $183\,\text{km}$ ، بلندی اوج $589\,\text{km}$ اور دوری عرصہ 92.25 منٹ تھا۔ زمین کی کمیت اور تجاذبی مستقل کی قیمتیں استعمال کر کے مساوات 12.72 سے نصف محور اکبر a تلاش کریں۔اس کا موازنہ اس عدد سے کریں جو حضیض اور اوج کے مجموعہ کے ساتھ زمین کا قطر جمع کرنے سے حاصل ہو گا۔

سوال 4: (ا) وائکنگ 1 مصنوعی سیارہ، جس کا دوری عرصہ 1639 منٹ تھا، نے اگست 1975 تا جون 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ مریخ کی کمیت $6.418 \times 10^{23}\,\text{kg}$ لیتے ہوئے وائکنگ 1 کا نصف محور اکبر تلاش کریں۔ (ب) مریخ کی سطح سے وائکنگ 1 کا کم سے کم فاصلہ $1499\,\text{km}$ اور زیادہ سے زیادہ فاصلہ $35\,800\,\text{km}$ تھا۔ ان حقائق اور جزو-ا میں حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مریخ کے اوسط قطر کی اندازاً قیمت معلوم کریں۔

سوال 5: وائکنگ 2 مصنوعی سیارہ نے ستمبر 1975 تا اگست 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ اس کے نصف محور اکبر $22\,030\,\text{km}$ تھا۔ اس کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

سوال 6: ہم عصر مدار
زمین کی استوائی مستوی میں کئی مصنوعی سیاروں کے مدار تقریباً دائری ہے اور ان کا دوری عرصہ عین ایک دن کے برابر ہے۔ یوں یہ بلندی پر رہتے ہوئے سطح زمین کے اوپر ساکن نظر آتے ہیں۔ ایسے مدار کو **ہم عصر مدار**[27] کہتے ہیں۔

ا. ہم عصر مصنوعی سیارے کا نصف محور اکبر تقریباً کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. زمین کی سطح سے ہم عصر مدار کتنی بلندی پر ہو گا؟

ج. جدول 12.2 میں دیے گئے مصنوعی سیاروں میں کس کا مدار تقریباً ہم عصر ہے؟

---

[27] geosynchronous orbit, geostationary orbit

سوال 7: مریخ کی کمیت $6.418 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$ ہے جبکہ مریخ کا ایک دن 1477.4 منٹ ہے۔ مریخ کے گرد مدار میں ایک مصنوعی سیارہ جس کا دوری عرصہ مریخی دن کے برابر ہو، سطح مریخ سے کتنی بلندی پر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 8: زمین کے گرد چاند کا دوری عرصہ $2.360\,55 \times 10^{6}$ سیکنڈ ہے۔ چاند کتنا دور ہے؟

سوال 9: زمین کے گرد ایک مصنوعی سیارہ دائری مدار میں حرکت کرتا ہے۔ مصنوعی سیارے کی رفتار کو مدار کے رداس کا تفاعل لکھیں۔

سوال 10: نظام شمسی میں سیاروں کا $\frac{T^2}{a^3}$ کتنا ہو گا؟ زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے لئے کتنا ہو گا؟ چاند کے گرد مصنوعی سیاروں کے لئے یہ کتنا ہو گا؟ (چاند کی کمیت $7.354 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$ ہے۔)

بغیر کیلکولیٹر استعمال کئے قلم و کاغذ سے حل کریں

سوال 11: مساوات 12.52 میں v_0 کی کس قیمت کے لئے مساوات 12.53 کا مدار دائری ہو گا؟ ترخیمی ہو گا؟ قطع مکافی ہو گا؟ قطع زائد ہو گا؟

سوال 12: دکھائیں کہ دائری مدار میں سیارہ یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ (اشارہ: یہ قوانین کپلر کی بدولت ہو گا۔)

سوال 13: فرض کریں ایک مستوی میں متحرک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے اور یہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی شرح سے رقبہ واضح کرتا ہے۔ محدد متعارف کئے بغیر اور مطلوبہ تفرقات کی موجودگی تصور کرتے ہوئے، بڑھوتری اور حد پر مبنی درج ذیل مساوات کی جیومیٹریائی جواز پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|$$

سوال 14: کپلر کے تیسرے قانون کا اشتقاق پورا کریں (مساوات 12.73 کے بعد حصہ۔)

سوال 15: کسی ستارہ کے گرد دو سیارے دائری مدار میں طواف کرتے ہیں۔ سیارہ A ستارے کے قریب ہے جبکہ سیارہ B ستارہ سے زیادہ فاصلہ پر ہے۔ فرض کریں لمحہ t پر ان کے مقام بالترتیب

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_A(t) &= 2\cos(2\pi t)\boldsymbol{i} + 2\sin(2\pi t)\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{r}_B(t) &= 3\cos(\pi t)\boldsymbol{i} + 3\sin(\pi t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

ہیں جہاں ستارہ کا مقام مبدا ہے اور فاصلوں کو فلکیاتی اکائیوں میں ناپا گیا ہے۔ (دھیان رہے کہ سیارہ A کی رفتار سیارہ B سے زیادہ ہے۔)

سیارہ A پر رہائش پذیر لوگوں کا خیال ہے کہ ان کا سیارہ، ان کے شمسی نظام کا مرکز ہے۔

ا. سیارہ A کو نئی محددی نظام کا مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کے مقام کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ اپنا جواب $\cos(\pi t)$ اور $\sin(\pi t)$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. سیارہ A کو مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کی راہ ترسیم کریں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان لوگوں کو سیاروں کی حرکت سمجھنے میں کتنی دشواری ہو گی۔ کیپلر سے پہلے یہی حال ہمارا تھا۔

سوال 16: کیپلر نے دریافت کیا کہ سورج کے گرد زمین ترخیمی راہ پر طواف کرتی ہے اور سورج اس کے ایک ماسکہ پر پایا جاتا ہے۔ سورج کے مرکز سے زمین کے مرکز تک لمحہ t پر تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ زمین کے جنوبی قطب سے شمالی قطب تک سمتیہ $\boldsymbol{w}$ لیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{w}$ مستقل ہے اور ترخیم کے مستوی کو عمودی نہیں ہے (زمین کا محور جھکا ہے)۔ سمتیات $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{r}(t)$ کے روپ میں (ا) حضیض شمسی، (ب) اوج شمسی، (ج) اعتدالین (جب دن اور رات ایک دوسرے کے برابر ہوں)، (د) لمبا ترین دن (گرم ترین دن)، (ہ) چھوٹا ترین دن (سرد ترین دن) کے ریاضی معنی پیش کریں۔

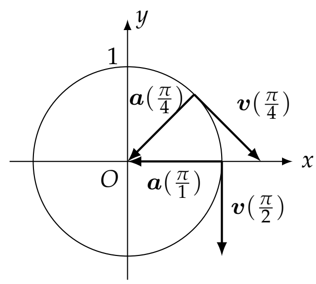
جوابات

حصہ 12.1 صفحہ 1447

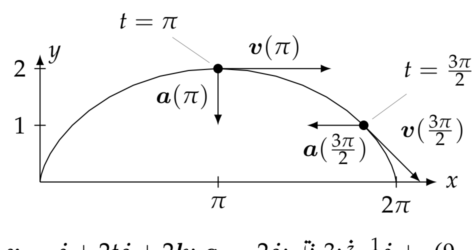
1) $y = x^2 - 2x,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$

3) $y = \frac{2}{9}x^2,\ \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$

5) $t = \frac{\pi}{4} : \boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j};\ t = \frac{\pi}{2} : \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i}$



7) $t = \pi : \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{j};\ t = \frac{3\pi}{2} : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i}$



9) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j};$ رفتار $3;$ رخ $\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}; \boldsymbol{v}(\boldsymbol{1}) = 3(\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

11) $\boldsymbol{v} = (-2\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a} = (-2\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j};$ رفتار $2\sqrt{5};$ رخ $\frac{-1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}; \boldsymbol{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}[-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}]$

13) $\boldsymbol{v} = (\frac{2}{t+1})\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}; \boldsymbol{a} = \frac{-2}{(t+1)^2}\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k};$ رفتار $\sqrt{6};$ رخ $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}(1) = \sqrt{6}(\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k})$

15) $\frac{\pi}{2}$

17) $\frac{\pi}{2}$

19) $t = 0,\ \pi,\ 2\pi$

21) $\frac{1}{4}\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + \frac{3}{2}\boldsymbol{k}$

23) $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

25) $(\ln 4)\boldsymbol{i} + (\ln 4)\boldsymbol{j} + (\ln 2)\boldsymbol{k}$

27) $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{-t^2}{2} + 1)\boldsymbol{i} + (\frac{-t^2}{2} + 2)\boldsymbol{j} + (\frac{-t^2}{2} + 3)\boldsymbol{k}$

29) $\boldsymbol{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\boldsymbol{i} + (-e^{-t} + 1)\boldsymbol{j} + (\ln(t+1) + 1)\boldsymbol{k}$

31) $\boldsymbol{r}(t) = 8t\boldsymbol{i} + 8t\boldsymbol{j} + (-16t^2 + 100)\boldsymbol{k}$

33) $x = t,\ y = -1,\ z = 1 + t$

35) $x = at,\ y = a,\ z = 2\pi b + bt$

37) ا) (1) مستقل رفتار 1 ؛ (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں
ب) (1) مستقل رفتار 2 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں
ج) (1) مستقل رفتار 1 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) یہ $(1,0)$ کی بجائے $(0,-1)$ سے ابتدا کرتا ہے

د) (1) مستقل رفتار 1 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے رخ (4) جی ہاں

ہ) (1) متغیر رفتار (2) نہیں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں

39) $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1)\boldsymbol{i} - (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2)\boldsymbol{j} + (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3)\boldsymbol{k} = (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}})(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$

41) $\boldsymbol{v}(t) = 2\sqrt{5}\boldsymbol{i} + \sqrt{5}\boldsymbol{j}$

43) زیادہ سے زیادہ $|\boldsymbol{v}| = 3$، کم سے کم $|\boldsymbol{v}| = 2$، زیادہ سے زیادہ $|\boldsymbol{a}| = 3$، کم سے کم $|\boldsymbol{a}| = 2$

حصہ 12.2 صفحہ 1464

1) $50\,\mathrm{s}$

3) ا) $72.2\,\mathrm{s}$، (ب)؛ $25\,510\,\mathrm{m}$ (ج)؛ $4020\,\mathrm{m}$ $6378\,\mathrm{m}$

5) $t \approx 2.1257\,\mathrm{s}, \quad x \approx 20.14\,\mathrm{m}$

7) $v_0 = 9.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \alpha = 18.4^\circ, \alpha = 71.6^\circ$

9) $174\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

11) گیند درخت کے پتوں کو چھوتا ہوا اسے پار کر پائے گا۔

13) $24.87\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

17) $141\,\%$

21) 1.789 سیکنڈ، $19.92\,\mathrm{m}$

25) $\boldsymbol{v}(t) = -gt\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0, \ \boldsymbol{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0 t$

حصہ 12.3 صفحہ 1473

1) $\boldsymbol{T} = (-\frac{2}{3}\sin t)\boldsymbol{i} + (\frac{2}{3}\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{k}, \quad 3\pi$

3) $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{k}, \quad \frac{52}{3}$

5) $\boldsymbol{T} = -\cos t\boldsymbol{j} + \sin t\boldsymbol{k}, \quad \frac{3}{2}$

7) $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - t\sin t}{t+1})\boldsymbol{i} + (\frac{\sin t + t\cos t}{t+1})\boldsymbol{j} + (\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1})\boldsymbol{k}, \quad \frac{\pi^2}{2} + \pi$

9) $(0, 5, 24\pi)$

11) $s(t) = 5t, \quad L = \frac{5\pi}{2}$

13) $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, \quad L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

15) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

17) ا) نلکی $x^2 + y^2 = 1$ اور مستوی $x + z = 1$

ب) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

ج) $L \approx 7.64$

حصہ 12.4 صفحہ 1489

1) $\boldsymbol{T} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j}, \ \kappa = \cos t$

3) $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \ \kappa = \frac{1}{2(\sqrt{1+t^2})^3}$

5) $\boldsymbol{a} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{T} + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{N}$

7) ب) $\cos x$

9) ب) $\boldsymbol{N} = \frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{j}$ ، (ج) $\boldsymbol{N} = -\frac{1}{2}(\sqrt{4 - t^2}\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j})$

11) $\boldsymbol{T} = \frac{3\cos t}{5}\boldsymbol{i} - \frac{3\sin t}{5}\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{B} = (\frac{4}{5}\cos t)\boldsymbol{i} - (\frac{4}{5}\sin t)\boldsymbol{j} - \frac{3}{5}\boldsymbol{k}, \ \kappa = \frac{3}{25}, \ \tau = -\frac{4}{25}$

13) $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{N} = (\frac{-\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}, \ \kappa = \frac{1}{e^t\sqrt{2}}, \ \tau = 0$

15) $\boldsymbol{T} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t\boldsymbol{j}}{\sqrt{t^2+1}}, \ \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{k}, \ \kappa = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}, \ \tau = 0$

17) $\boldsymbol{T} = (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{N} = (-\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}, \ \kappa = \frac{1}{a}\operatorname{sech}^2\frac{t}{a}, \ \tau = 0$

19) $\boldsymbol{a} = |a|\,\boldsymbol{N}$

21) ا) $\boldsymbol{a}(1) = \frac{4}{3}\boldsymbol{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{N}$

23) $\boldsymbol{a}(0) = 2\boldsymbol{N}$

25) $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{T}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{N}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{B}(\frac{\pi}{4}) = \boldsymbol{k};$ مستوی دائرہ انحنا $z = -1$ ہے؛ عمودی مستوی $-x + y = 0$ ہے؛ سمت کار مستوی $x + y = \sqrt{2}$ ہے۔

27) جی ہاں۔ اگر گاڑی مڑتی سڑک $(\kappa \neq 0)$ پر چل رہی ہو تب $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \neq 0$ اور $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

31) $|\boldsymbol{F}| = \kappa(m(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2)$

35) $\frac{1}{2b}$

39) (ا) $b-a$ ، (ب) π

45) $\kappa(x)=\frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$

47) $\kappa(x)=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

57) $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: -1.8701 ، 0.7089 ، 1.0000 ؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: -1.6960 ، -2.0307 ، 0 ؛ رفتار 2.2361 ؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: -0.8364 ، 0.3170 ، 0.4472 ؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.4143 ، -0.8998 ، -0.1369 ؛ $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.3590 ، -0.2998 ، 0.8839 ؛ انحنا 0.5060 ؛ مروڑ 0.2813 ؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.7746 ؛ اسراع کا عمودی جزو 2.5298 ؛

59) $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: 2.0000 ، 0 ، 0.1629 ؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: 0 ، -1.0000 ، 0.0086 ؛ رفتار 2.0066 ؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: 0.9967 ، 0 ، 0.0812 ؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.0007 ، -1.0000 ، 0.0086 ؛ $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.0812 ، -0.0086 ، -0.9967 ؛ انحنا 0.2484 ؛ مروڑ -0.0411 ؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.0007 ؛ اسراع کا عمودی جزو 1.0000 ؛

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ