

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	نکونائی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
164	استمرار	2.5
175	ضمیمہ دوم	۱

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جاسکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔ حقیقی اعداد¹ وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$-\frac{3}{4} = -0.75000 \dots$$

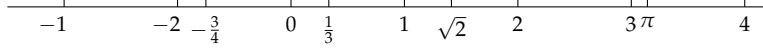
$$\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو کثیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس کثیر کو حقیقی خط² کہتے ہیں۔

real numbers¹
real line²



\mathbb{R} کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں: الجبرائی خواص، خواص درجہ، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جاسکتے ہیں۔ آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

$$1. a + c < b + c \iff a < b$$

$$2. a - c < b - c \iff a < b$$

$$3. ac < bc \iff a < b \text{ اور } c > 0$$

$$4. -b < -a \iff a < b \text{ اور } c < 0 \iff bc < ac$$

$$5. \frac{1}{a} > 0 \iff a > 0$$

$$6. \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \iff a < b \text{ اگر } a \text{ اور } b \text{ دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب}$$

درج بالا میں $a < b \iff a + c < b + c$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہوگی۔ دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دار و مدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔ کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ درجہ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

\mathbb{R} کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی سلسلوں³ کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. قدرتی اعداد⁴، یعنی 1، 2، 3، 4، ...

2. عدد صحیح، یعنی 0، ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، ...

3. ناطق اعداد⁵، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔ اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{200}{13}, 57 = \frac{57}{1}$$

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔
(الف) مختتم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000 \dots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909 \dots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور خواص درجہ رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔ یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں غیر ناطق اعداد⁶ کہلاتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نامختتم اور نامی دہراتی صورت ملتی ہے۔ ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

sets³
natural numbers⁴
rational numbers⁵
irrational numbers⁶

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو اعداد کے درمیان تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں وقفہ⁷ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔ اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہذا -1 اور 1 کے درمیان تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریکی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔ خطی قطع متناہی وقفہ⁸ جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط لامتناہی وقفہ⁹ کہلاتے ہیں۔

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ بند¹⁰ کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ نصف کھلا¹¹ کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ کھلا¹² کہلاتا ہے۔ وقفے کے سروں کو سرحدی نقطے¹³ بھی کہتے ہیں۔ یہ وقفہ کی سرحد¹⁴ ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو اندرونی نقطے¹⁵ کہتے ہیں۔ تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی اندرون¹⁶ کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسموں کو جدول 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔

عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

مثال 1.1:

$$\frac{2}{x-1} \geq 4 \quad (3) \quad -\frac{x}{3} < x-1 \quad (2) \quad 2x-4 < x+1 \quad (1)$$

حل:

- interval⁷
- finite interval⁸
- infinite interval⁹
- closed¹⁰
- half-open¹¹
- open¹²
- boundary points¹³
- boundary¹⁴
- interior points¹⁵
- interior¹⁶

جدول 1.1: وقفوں کی تسمیہ

ترسیم	سلسلہ	علامت	متنابی
	$\{x a < x < b\}$	(a, b)	
	$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
	$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
	$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
	$\{x x > a\}$	(a, ∞)	لا متنابی
	$\{x x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
	$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	
	$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
	\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	

(1)

$$2x - 4 < x + 1$$

$$2x < x + 5$$

$$x < 5$$

دونوں ہاتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ سے x منفی کریں

حل سلسلہ وقفہ $(-\infty, 5)$ ہے۔

(2)

$$-\frac{x}{3} < x - 1$$

$$-x < 3x - 3$$

$$0 < 4x - 3$$

$$3 < 4x$$

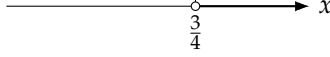
$$\frac{3}{4} < x$$

دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ x جمع کریں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں



وقفہ $(\frac{3}{4}, \infty)$ حل سلسلہ ہے۔

(3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بائیں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بائیں ہاتھ غیر متعین ہے۔ عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

$$2 \geq 4x - 4$$

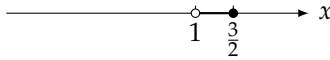
$$6 \geq 4x$$

$$\frac{3}{2} \geq x$$

دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$ ہے۔

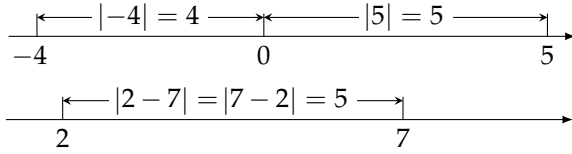
□

مطلق قیمت

عدد x کی مطلق قیمت¹⁷ جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $|0.88| = 0.88$, $|0| = 0$, $|-13| = -(-13) = 13$, $|-|a|| = |a|$ □



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq 0$ ہوگی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہوگا۔ چونکہ a کی غیر منفی جذر کو \sqrt{a} سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جاسکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

آپ $\sqrt{a^2} = |a|$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہوگا۔

جیومیٹریکی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$|x - y| \text{ } x \text{ اور } y \text{ کے بیچ فاصلہ}$$

ہوگا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$1. \quad |-a| = |a| \quad \text{کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔}$$

$$2. \quad |ab| = |a||b| \quad \text{حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہوگا۔}$$

$$3. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہوگا۔}$$

$$4. \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہوگی۔ اس کو تکنیکی عدم مساوات کہتے ہیں۔}$$

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a + b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہوگی۔ اس کے علاوہ ہر صورت $|a + b| = |a| + |b|$ ہوگا۔

مثال 1.3:

$$|-2 + 6| = |4| = 4 < |-2| + |6| = 8$$

$$|2 + 6| = |8| = |2| + |6|$$

$$|-2 - 6| = |-8| = 8 = |-2| + |-6|$$

□

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x - 1| = 11$ کو حل کریں۔
 حل: اس مساوات کے تحت $2x - 1 = \pm 11$ ہو سکتا ہے لہذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 = 11 & 2x - 1 = -11 \\ 2x = 12 & 2x = -10 \\ x = 6 & x = -5 \end{array}$$

□

یوں $|2x - 1| = 11$ کا درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

$$(1.1) \quad |a| < D \iff -D < a < D$$

$$(1.2) \quad |a| \leq D \iff -D \leq a \leq D$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x - 3| < 7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔
 حل:

$$|x - 3| < 7$$

$$-7 < x - 3 < 7$$

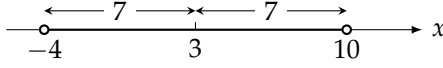
$$-7 + 3 < x < 7 + 3$$

$$-4 < x < 10$$

مساوات 1.1

دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔



□

مثال 1.6: عدم مساوات $\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1$ کو حل کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} \left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1 &\iff -1 < 3 - \frac{2}{x} < 1 && \text{مساوات 1.1} \\ -4 < -\frac{2}{x} < -2 &&& \text{3 منفی کریں} \\ 2 > \frac{1}{x} > 1 &&& -\frac{1}{2} \text{ سے ضرب دیں} \\ \frac{1}{2} < x < 1 &&& \text{معکوس لیں} \end{aligned}$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔ آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔ اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب معکوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہو گی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔ حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2}, 1)$ ہے۔ □

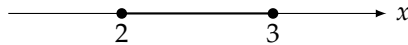
مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

$$(الف) \quad |2x - 5| \leq 1 \qquad (ب) \quad |2x - 5| \geq 1$$

حل: (الف)

$$\begin{aligned} |2x - 5| &\leq 1 \\ -1 &\leq 2x - 5 \leq 1 && \text{مساوات 1.2} \\ 4 &\leq 2x \leq 6 && \text{جمع 5} \\ 2 &\leq x \leq 3 && \text{تقسیم 2} \end{aligned}$$

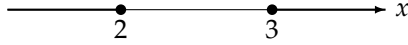
حل سلسلہ بند وقفہ $[2, 3]$ ہے۔



(ب)

$$\begin{array}{l|l}
 |2x - 5| \geq 1 & \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 2x - 5 \geq 1 \\
 2x \geq 6 \\
 x \geq 3
 \end{array} & \begin{array}{l}
 -(2x - 5) \geq 1 \\
 2x - 5 \leq -1 \\
 2x \leq 4 \\
 x \leq 2
 \end{array}
 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ہے۔



□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی اشتراک¹⁸ کی علامت \cup استعمال کی گئی ہے۔ دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ اسی طرح ہم تقاطع¹⁹ کی علامت \cap بھی استعمال کرتے ہیں۔ دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ مثال کے طور پر $[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3)$ ہو گا۔

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔ اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔
جواب: $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}$

سوال 2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔ دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

¹⁸ union
¹⁹ intersection

$$\begin{array}{lll}
 \text{ا} & 0 < x < 4 & \text{د} & \frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \\
 \text{ب} & 0 < x - 2 < 4 & \text{ه} & 1 < \frac{6}{x} < 3 \\
 \text{ج} & 1 < \frac{x}{2} < 3 & \text{و} & |x - 4| < 2 \\
 \text{ح} & -6 < -x < -2 & \text{ز} & -6 < -x < 2
 \end{array}$$

سوال 4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

$$\begin{array}{lll}
 \text{ا} & 4 < y < 6 & \text{د} & y < 6 \\
 \text{ب} & -6 < y < -4 & \text{ه} & 0 < y - 4 < 2 \\
 \text{ج} & y > 4 & \text{و} & 2 < \frac{y}{2} < 3 \\
 \text{ح} & |y - 5| < 1 & \text{ز} & \frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}
 \end{array}$$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترتیم کریں۔

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 5:} & -2x > 4 \\
 \text{جواب:} & x < -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 9:} & 2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6} \\
 \text{جواب:} & x \leq -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 6:} & 8 - 3x \geq 5 \\
 \text{سوال 10:} & \frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 7:} & 5x - 3 \leq 7 - 3x \\
 \text{جواب:} & x \leq \frac{5}{4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 11:} & \frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6) \\
 \text{جواب:} & x < -\frac{6}{7}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 8:} & 3(2 - x) > 2(3 + x) \\
 \text{سوال 12:} & -\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}
 \end{array}$$

مطلق قیمت

سوال 13 تا سوال 18 میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال 16: $|1 - t| = 1$

سوال 13: $|y| = 3$
جواب: ∓ 3

سوال 17: $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$
جواب: $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

سوال 14: $|y - 3| = 7$

سوال 18: $|\frac{s}{2} - 1| = 1$

سوال 15: $|2t + 5| = 4$
جواب: $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$

سوال 19 تا سوال 34 میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ کو ترتیم کریں

سوال 19: $|x| < 2$
جواب: $-2 < x < 2$

سوال 20: $|x| \leq 2$

سوال 21: $|t - 1| \leq 3$
جواب: $-2 \leq t \leq 4$

سوال 22: $|t + 2| < 1$

سوال 23: $|3y - 7| < 4$
جواب: $1 < y < \frac{11}{3}$

سوال 24: $|2y + 5| < 1$

سوال 25: $|\frac{z}{5} - 1| \leq 1$
جواب: $0 \leq z \leq 10$

سوال 26: $|\frac{3}{2}z - 1| \leq 2$

سوال 27: $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$
 جواب: $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

سوال 28: $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$

سوال 29: $|2s| \geq 4$
 جواب: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

سوال 30: $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

سوال 31: $|1 - x| > 1$
 جواب: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

سوال 32: $|2 - 3x| > 5$

سوال 33: $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$
 جواب: $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

سوال 34: $\left|\frac{3}{5}r - 1\right| > \frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات

سوال 35 تا سوال 42 میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترتیب کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2} = |a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 35: $x^2 < 2$
 جواب: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 36: $4 \leq x^2$

سوال 37: $4 < x^2 < 9$
 جواب: $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 38: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 39: $(x - 1)^2 < 4$
 جواب: $(-1, 3)$

سوال 40: $(x + 3)^2 < 2$

سوال 41: $x^2 - x < 0$

جواب: $(0, 1)$

سوال 42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $-a = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔

جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 44: مساوات $|x - 1| = 1 - x$ کو حل کریں۔

سوال 45: نیکنونی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a + b| = (a + b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے نیکنونی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

سوال 46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ کو ترسیم کریں۔

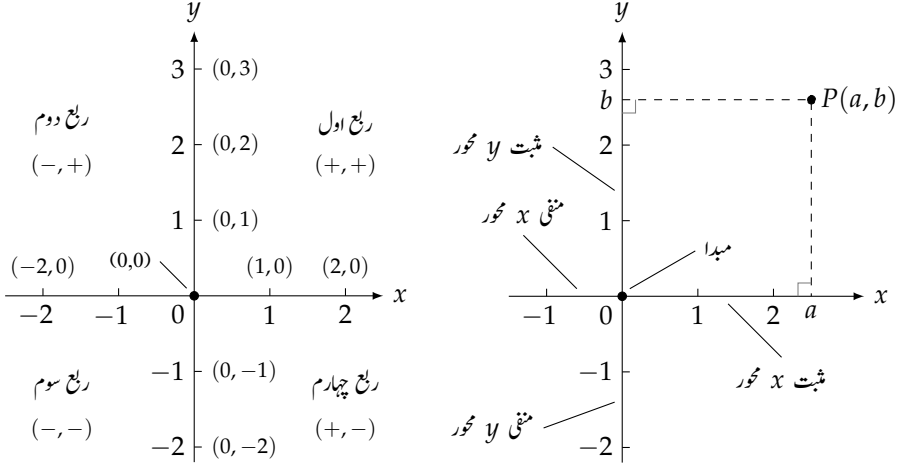
سوال 49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تجلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔

جواب: $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 50: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تجلیلی طور پر ثابت کریں۔



شکل 1.2: کارتیسی محدود

1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدود اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدود

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ ان خطوط کو مستوی میں محدود محاور²⁰ کہتے ہیں۔ افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔ انصافی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محدود نظام کا مبدأ²¹ کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جاسکتے ہیں۔ اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x محدود²² a ہو گا۔ اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y محدود²³

²⁰ coordinate axis

²¹ origin

²² x-coordinate

²³ y-coordinate

b ہو گا۔ مرتب جوڑی (a, b) کو نقطہ کی محدودی جوڑی²⁴ کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محدودی جوڑی کا y محدود 0 ہو گا جبکہ y محور پر ہر محدودی جوڑی کا x محدود 0 ہو گا۔ محدودی نظام کا مبدا نقطہ $(0, 0)$ ہے۔

محور x کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدا کے دائیں جانب مثبت x محور²⁵ اور مبدا کے بائیں جانب منفی x محور²⁶ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدا y محور کو بھی مثبت y محور اور منفی y محور میں تقسیم کرتا ہے۔ محدودی نظام کو چار ربعات²⁷ میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پہلا

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سٹی میٹر کا فاصلہ ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سٹی میٹر کا فاصلہ 25 ms^{-1} کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمانوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی تناسب پہلو²⁸ ایک جیسے رکھتے ہیں لہذا دونوں محور پر پیمائشی فیتہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

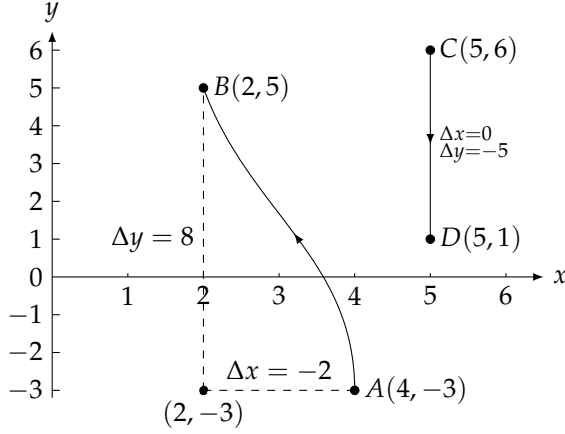
ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدودی میں کل تبدیلی کو بڑھوتری²⁹ کہتے ہیں۔ اختتامی محدودی سے ابتدائی محدودی منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

مثال 1.8: نقطہ $A(4, -3)$ سے نقطہ $B(2, 5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

coordinate pair²⁴
positive x-axis²⁵
negative x-axis²⁶
quadrants²⁷
aspect ratio²⁸
increments²⁹



شکل 1.3: محدودی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہوگی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5, 6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5, 1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔
حل: $\Delta x = 5 - 5 = 0$, $\Delta y = 1 - 6 = -5$

□

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہوگا (شکل 1.4)۔

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

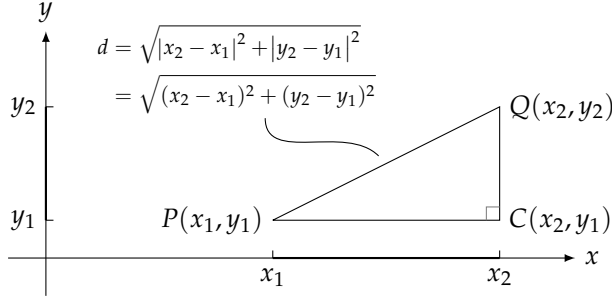
مثال 1.10: (الف) $P(-1, 2)$ اور $Q(3, 4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

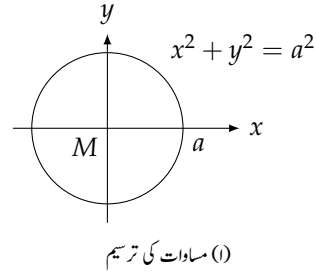
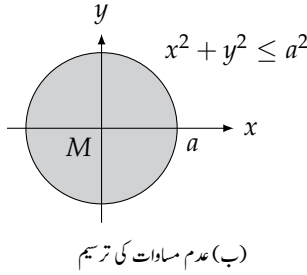
(ب) مہدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)



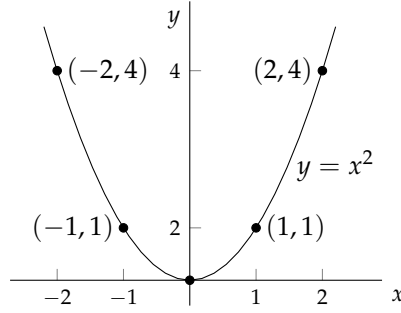
شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)

ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو
(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصلہ $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔ یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔
(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصلہ $\leq a$ ہے۔ یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہوگی (شکل 1.5)۔
□

اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو اکائی دائرہ³⁰ کہتے ہیں۔



شکل 1.6: قطع مکانی (مثال 1.12)

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(2, 4)$ اور $(-2, 4)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدود اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو قطع مکانی³¹ کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکساں سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

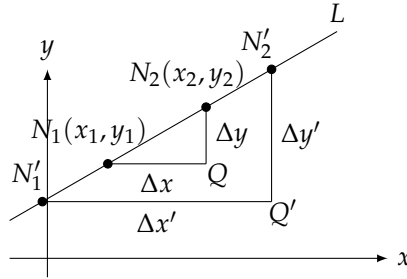
کی قیمت ایک جیسی ہوگی (شکل 1.7)۔

تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی ڈھلوان³² کہلاتی ہے۔

parabola³¹
slope³²



شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N'_1Q'N'_2$ متماثلہ مثلثات ہیں لہذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔ مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔ انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لہذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا³³۔ یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں L_1 کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1 - (-1)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔ اسی طرح L_2 کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

□

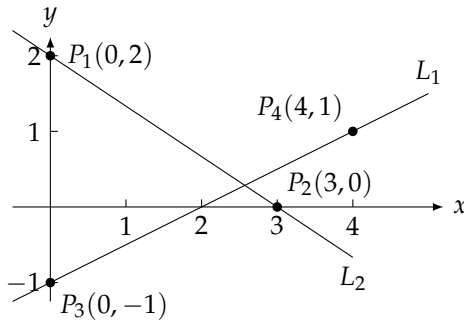
ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ ہے۔ یوں دائیں رخ چلتے ہوئے

خط کی چڑھائی یا اترائی کو زاویہ میلان³⁴ سے بھی ناپا جاتا ہے۔ x محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔ افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔ اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہی ϕ سے ظاہر کیا جائے تب $0 \leq \phi \leq 180^\circ$ ہو گا۔

خط کی ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

$$m = \tan \phi$$

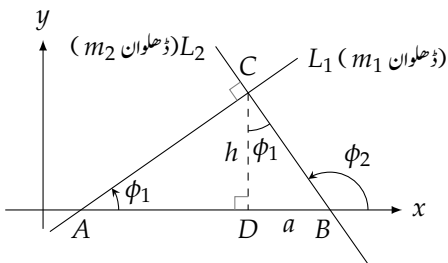
³³ چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔
³⁴ angle of inclination



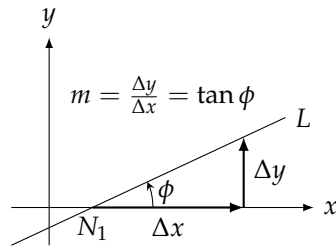
شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)



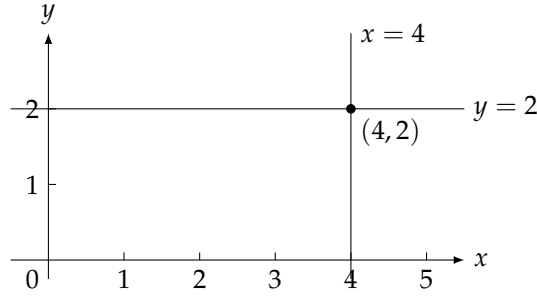
شکل 1.9: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے



شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق



شکل 1.10: غیر انتظامی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجینٹ ہوتا ہے



شکل 1.12: افقی اور انتہائی خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

متوازی اور قائمہ خطوط

متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔ اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا یہ متوازی ہوں گے۔

اگر غیر انتہائی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1 m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔ یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan \phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan \phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔ یوں $m_1 m_2 = (\frac{a}{h})(-\frac{h}{a}) = -1$ ہو گا۔

خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ x محور کے نقطہ a سے گزرتے انتہائی خط پر ہر نقطے کی x محدود a ہو گی۔ یوں اس انتہائی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔ اسی طرح y محور کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔

مثال 1.14: نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتے افقی اور انتہائی خطوط کے مساوات بالترتیب $y = 2$ اور $x = 4$ ہوں گی (شکل 1.12)۔ □

اگر ہمیں غیر اختصائی سیدھے خط L کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر $N(x, y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = y_1 + m(x - x_1)$$

لکھا جاسکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

تعریف: نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان m ہو کی مساوات $y = y_1 + m(x - x_1)$ ہو گی جس کو خط کی نقطہ۔ ڈھلوان مساوات³⁵ ہے۔

مثال 1.15: نقطہ $(3, 2)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔
حل:

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \implies y = -\frac{2}{3}x + 4$$

□

مثال 1.16: نقطہ $(-2, -1)$ اور $(3, 4)$ سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔
حل: اس خط کی ڈھلوان

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

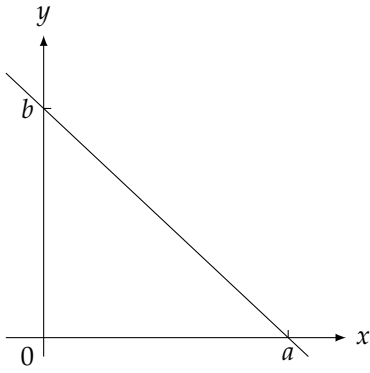
ہے۔ ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

$$\text{نقطہ } (x_1, y_1) = (-2, -1) \text{ لیتے ہیں} \quad \text{نقطہ } (x_1, y_1) = (3, 4) \text{ لیتے ہیں}$$

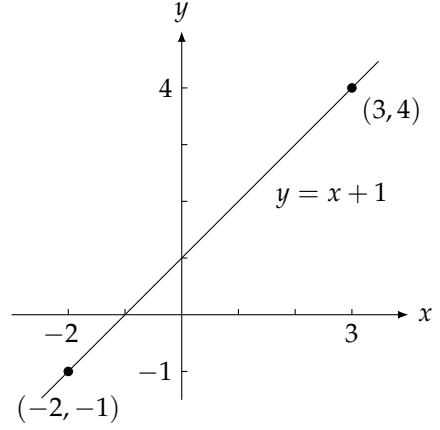
$$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2)) \quad y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$$

$$y = -1 + x + 2 \quad y = 4 + x - 3$$

$$y = x + 1 \quad y = x + 1$$



شکل 1.14: غیر انتظامی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات



شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال)

(1.16)

□

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔

غیر انتظامی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y قطع³⁶ کہتے ہیں۔ اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر x محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا x قطع³⁷ کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

غیر انتظامی خط جو y محور کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

ہو گی۔

تعریف: درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

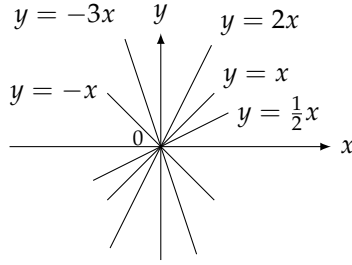
کو خط کی ڈھلوان-قطع مساوات³⁸ کہتے ہیں۔ اس خط کی ڈھلوان m ہے اور یہ y محور کو b پر قطع کرتا ہے۔

point-slope equation³⁵

y-intercept³⁶

x-intercept³⁷

slope-intercept equation³⁸



شکل 1.15: مبداء سے گزرتا خط کی مساوات $y = mx$ ہے جہاں m خط کی ڈھلوان ہے

مثال 1.17: خط $y = 3x - 7$ کی ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ y محور کو -7 پر قطع کرتا ہے۔

درج ذیل مساوات کو عمومی خطی مساوات³⁹ کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \quad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1.18: خط $8x + 5y = 20$ کی y قطع تلاش کریں۔
حل: ہم مساوات کو ڈھلوان-قطع روپ میں لکھ کر y قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

یوں خط کی ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور y قطع 4 ہے۔

مثال 1.19: مبداء سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔

چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہو گا لہذا ان کی مساوات $y = mx$ ہو گی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔ اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بنا سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں خطی مساوات⁴⁰ کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباؤ V اور برقی رو I کا تعلق $V = IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔ اس مساوات کی ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔ □

سوالات

بڑھوتری اور کثوتی

سوال 1 تا سوال 4 میں ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1: $A(-3, 2), B(-1, -2)$
جواب: $2\sqrt{5}, -4, 2$

سوال 2: $A(-1, -2), B(-3, 2)$

سوال 3: $A(-3.2, -2), B(-8.1, -2)$
جواب: $-4.9, 0, 4.9$

سوال 4: $A(\sqrt{2}, 4), B(0, 1.5)$

سوال 5 تا سوال 8 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 5: $x^2 + y^2 = 1$
جواب: اکائی دائرہ

سوال 6: $x^2 + y^2 = 2$

سوال 7: $x^2 + y^2 \leq 3$ رداس $\sqrt{3}$ کا دائرہ اور اس کی اندرون۔ دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 8: $x^2 + y^2 = 0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

سوال 9 تا سوال 12 دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کی قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 9: $A(-1, 2), B(-2, -1)$
جواب: $m_{\perp} = -\frac{1}{3}$

سوال 10: $A(-2, 1), B(2, -2)$

سوال 11: $A(2, 3), B(-1, 3)$
جواب: \perp غیر معین ہے۔

سوال 12: $A(-2, 0), B(-2, -2)$

سوال 13 تا سوال 16 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتا (الف) انصافی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 13: $(-1, \frac{4}{3})$
جواب: (الف) $x = -1$ (ب) $y = \frac{4}{3}$

سوال 14: $(\sqrt{2}, -1.3)$

سوال 15: $(0, -\sqrt{2})$
جواب: (الف) $x = 0$ (ب) $y = -\sqrt{2}$

سوال 16: $(-\pi, 0)$

سوال 17 تا سوال 30 میں خط کی مساوات تلاش کریں۔ خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 17: نقطہ $(-1, 1)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان -1 ہو۔
جواب: $y = -x$

سوال 18: نقطہ $(2, -3)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔

سوال 19: نقطہ $(3, 4)$ اور $(-2, 5)$ سے گزرتا خط۔
جواب: $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$

سوال 20: نقطہ $(-8, 0)$ اور $(-1, 3)$ سے گزرتا خط۔

سوال 21: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔
جواب: $y = -\frac{5}{4}x + 6$

سوال 22: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع -3 ہے۔

سوال 23: نقطہ $(-12, -9)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان 0 ہو۔
جواب: $y = -9$

سوال 24: نقطہ $(\frac{1}{3}, 2)$ سے گزرتا خط جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔

سوال 25: جس کا x قطع -1 اور y قطع 4 ہو۔
جواب: $y = 4x + 4$

سوال 26: جس کا x قطع 2 اور y قطع -6 ہو۔

سوال 27: جو نقطہ $(5, -1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x + 5y = 15$ کے متوازی ہو۔
جواب: $y = -\frac{2}{5}x + 1$

سوال 28: جو نقطہ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔

سوال 29: نقطہ $4, 10$ سے گزرتا اور خط $6x - 3y = 13$ کا قائلہ ہو۔
جواب: $y = -\frac{x}{2} + 12$

سوال 30: نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتا اور خط $8x - 13y = 13$ کا قائلہ ہو۔

خط کا x اور y قطع تلاش کریں۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترتیم کریں۔ (سوال 31 تا سوال 34)

سوال 31: $3x + 4y = 12$ ، $4 = x$ قطع ، $3 = y$ قطع
جواب:

سوال 32: $x + 2y = -4$

سوال 33: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$ ، $\sqrt{3} = x$ قطع ، $-\sqrt{2} = y$ قطع
جواب:

سوال 34: $1.5x - y = -3$

سوال 35: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Bx - Ay = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔
جواب: جی ہاں۔ خطوط قائمہ ہیں چونکہ ان کی ڈھلوان $-\frac{A}{B}$ اور $\frac{B}{A}$ ایک دوسرے کے منفی معکوس ہیں۔

سوال 36: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Ax + By = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال 37: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(-2, 3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ ، $\Delta y = -6$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔
جواب: $(3, -3)$

سوال 38: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(6, 0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = -6$ ، $\Delta y = 0$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 39: ایک ذرہ $A(x, y)$ سے $B(3, -3)$ منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ اور $\Delta y = 6$ ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔
جواب: $(-2, -9)$

سوال 40: ایک ذرہ $A(1, 0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1, 0)$ کو واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محدود میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال 41: پانی میں دباؤ پانی میں d گہرائی پر غوطہ خور p دباؤ محسوس کرے گا جہاں $p = kd + 1$ ہے جہاں k مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر

دباؤ کیا ہوگا؟

جواب: 5.97 کرہ ہوائی دباؤ

سوال 42: انعکاس شعاع رُبع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع x محور سے منعکس ہوتی ہے۔ زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔ انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 43: سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔ اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔ کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟
جواب: جی ہاں۔ $C = F = -40^\circ$

نظریہ اور مثالیں

سوال 44: ایک مثلث کے راس $A(1, 2)$ ، $B(5, 5)$ اور $C(4, -2)$ پر پائے جاتے ہیں۔ مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 45: ایک مثلث کے راس $A(0, 0)$ ، $B(1, \sqrt{3})$ اور $C(2, 0)$ ہیں۔ دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

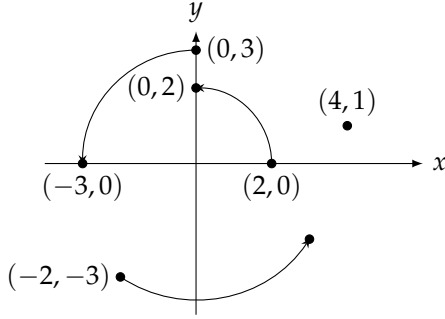
سوال 46: دکھائیں کہ $A(2, -1)$ ، $B(1, 3)$ اور $C(-3, 2)$ پیکور کی راسیں ہیں۔ چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 47: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1, 1)$ ، $(2, 0)$ اور $(2, 3)$ ہیں۔ تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔
جواب: $(-1, 4)$ ، $(-1, -2)$ ، $(5, 2)$

سوال 48: مہدا کے گرد گھڑی مخالف 90° گھمانے سے نقطہ $(2, 0)$ اور $(0, 3)$ بالترتیب $(0, 2)$ اور $(-3, 0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔ درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

(ا) $(4, 1)$ (ب) $(-2, -3)$ (ج) $(2, -5)$
(د) $(x, 0)$ (ه) $(0, y)$ (و) (x, y)
ن کونسا نقطہ $(10, 3)$ پر منتقل ہوگا؟

سوال 49: k کی کس قیمت کے لئے خط $2x + ky = 3$ اور خط $4x + y = 1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟
جواب: $k = -8$ ، $k = \frac{1}{2}$



شکل 1.16: گھڑی مخالف 90° گھومنا (سوال 48)

سوال 50: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1, 2)$ اور خط $x + 2y = 3$ اور $2x - 3y = -1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 51: دکھائیں کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع کا وسط $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ہو گا۔

سوال 52: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0, y_0)$ سے خط $L: Ax + By = C$ تک فاصل درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

• L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔

• خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔

• N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصل تلاش کریں۔

(ج) $N(a, b), L: x = -1$

(ا) $N(2, 1), L: y = x + 2$

(د) $N(x_0, y_0), L: Ax + By = C$

(ب) $N(4, 6), L: 4x + 3y = 12$

1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ایلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔ زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔ اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دارومدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔ چونکہ y کی قیمت مکمل طور پر x تعین کرتا ہے لہذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔ یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ $A = \pi r^2$ ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا رقبہ A تفاعل ہے۔ مساوات $A = \pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لئے A کی یکتا قیمت تلاش کی جاسکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا دائرہ کار⁴¹ کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا سعت⁴² کہتے ہیں۔ چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0, \infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔ اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ ہم

$$y = f(x) \quad (y \text{ برابر ہے } x \text{ کا } f)$$

لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y ، متغیر x کا تفاعل ہے۔ یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت x غیر تابع متغیر⁴³ ہے اور خارجی قیمت y تابع متغیر⁴⁴ ہیں۔ x کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہوگی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہوگی۔

تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔



شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت

شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کا سعت R کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔ اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

2. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f ، ناکہ $f(x)$ ، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

domain⁴¹range⁴²independent variable⁴³dependent variable⁴⁴

قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً حقیقی متغیرات⁴⁵ کے حقیقی قیمت تفاعل⁴⁶ پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3 m رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t - 1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0، 2، $x + 2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔
حل:

$$F(0) = 2(0 - 1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$F(2) = 2(2 - 1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$F(x + 2) = 2(x + 2 - 1) + 3 = 2x + 5$$

$$F(F(2)) = F(5) = 2(5 - 1) + 3 = 11$$

□

⁴⁵real variables
⁴⁶real valued function

روایت دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔ اس کو تفاعل کا قدرتی دائرہ کار⁴⁷ کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔ اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم " $y = x^2, x \geq 2$ " لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔ تفاعل $y = x^2$ کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کا سعت $[4, \infty)$ ہو گا جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

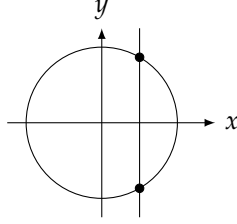
تفاعل	دائرہ کار (x)	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لئے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔ اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔ دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا مساوائے $x = 0$ ، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لئے حقیقی y دیتا ہے۔ تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔ اس کا سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لئے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔ یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا۔ □



شکل 1.19: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط ہے۔

تفاعل کی ترسیم

تفاعل f کی تقسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدود تفاعل f کی داخلی، خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔ تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر x کے لئے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔ چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔ اگر تفاعل f کی دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تفاعل کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

مثال 1.24: وقفہ $[-2, 2]$ پر تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم کریں۔
حل: پہلا قدم: پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

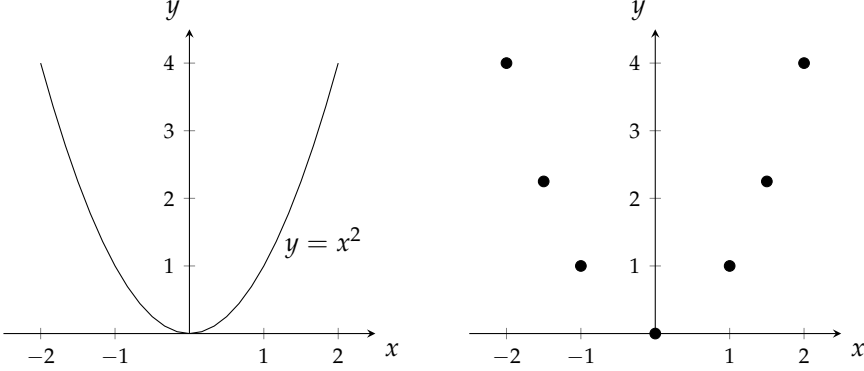
x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو xy مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔

□

تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچیں۔ منحنی پر سرخی لکھیں۔

احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔



شکل 1.20: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال 1.24)

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل $f + g$ ، $f - g$ اور $f \cdot g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

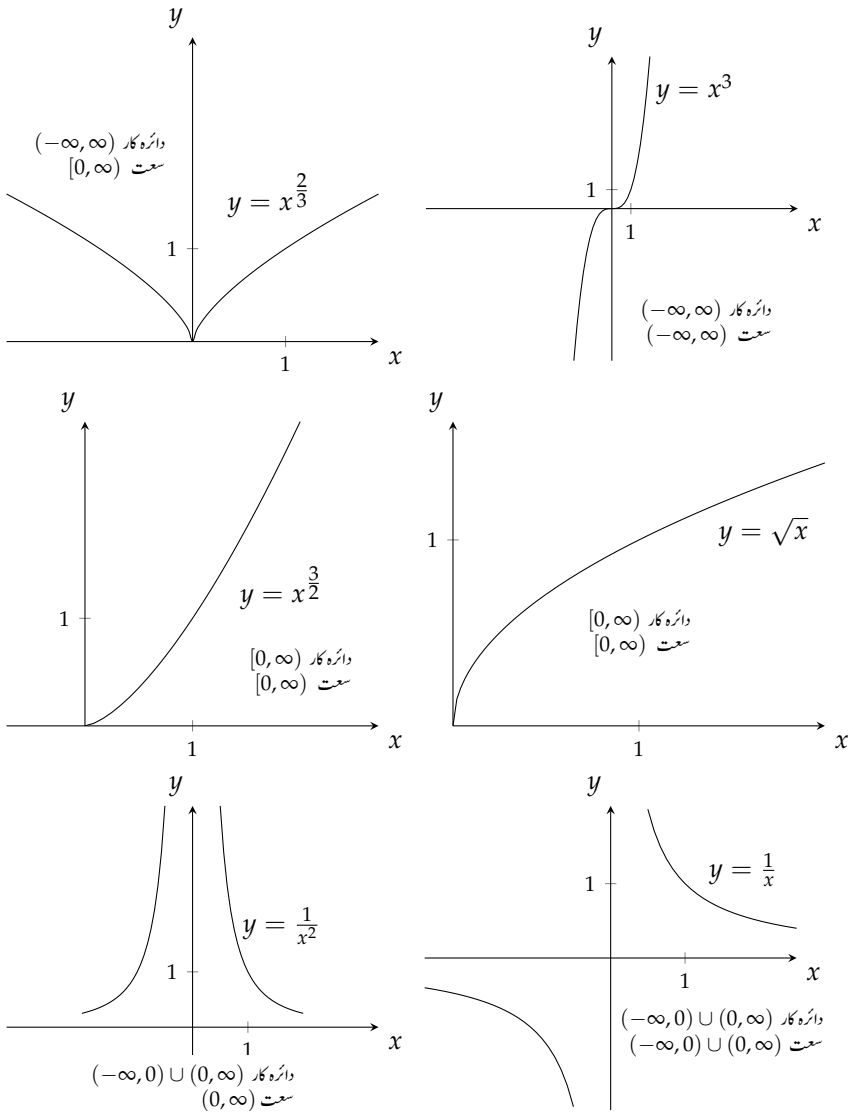
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

f اور g کی دائرہ کار کے اشتراک $D(f) \cap D(g)$ جہاں $g(x) \neq 0$ ہو ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہوگی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$



شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$3g$	$3g(x) = 3\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1)$ (ماسوائے 1)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1]$ (ماسوائے 0)

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جاسکتا ہے جس کو مرکب تفاعل $f \circ g$ ⁴⁸ کہتے ہیں۔

تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f \circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f \circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

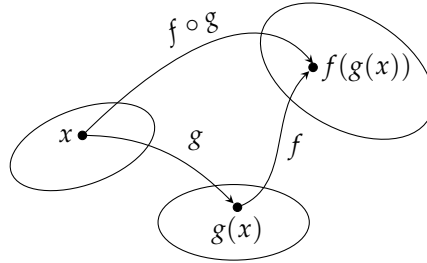
تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جاسکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔ $f \circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

معین $f \circ g$ حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $g \circ f$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f \circ g$ اور $g \circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = x + 1$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

composite function⁴⁸



شکل 1.22: مرکب تفاعل

ا. $(f \circ g)(x)$ ب. $(g \circ f)(x)$ ج. $(f \circ f)(x)$ د. $(g \circ g)(x)$

حل:

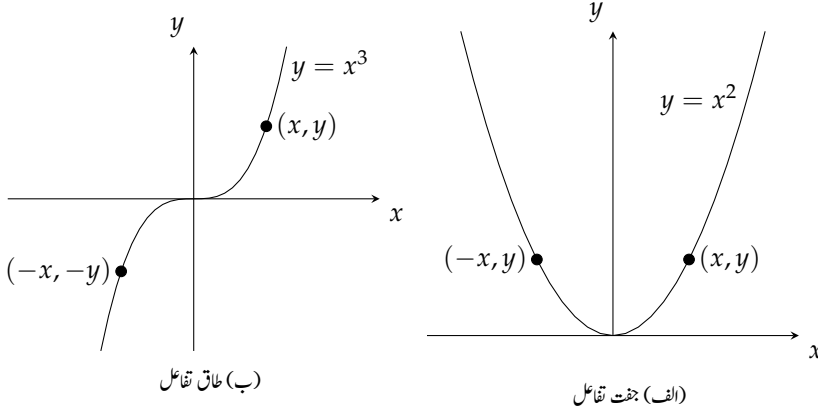
مرکب	دائرہ کار
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$	$(-\infty, \infty)$

یہ جاننے کے لئے کہ $f \circ g$ کا دائرہ کار کیوں $[-1, \infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x) = x+1$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $x+1 \geq 0$ یعنی $x \geq -1$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ جفت⁴⁹ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ہے۔

چونکہ $f(-x) = f(x)$ ہے لہذا نقطہ (x, y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یوں جفت تفاعل کی ترسیم y محور کے لحاظ سے تشاکل ہوگی (شکل 1.23-الف)۔ y محور کے ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جاسکتی ہے۔



شکل 1.23: جفت اور طاق تفعل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفعل $y = f(x)$ طاق⁵⁰ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

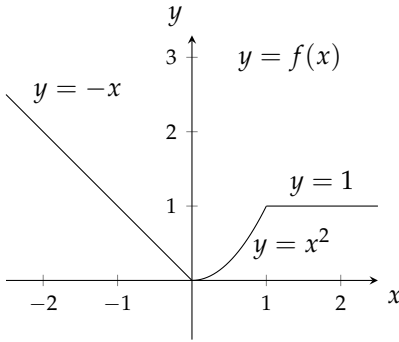
طاق تفعل کی ترسیم مبداء کے لحاظ سے متشاکل ہوگی (شکل 1.23-ب)۔ چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یہاں بھی y محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جاسکتی ہے۔

ٹکڑوں میں معین تفعل

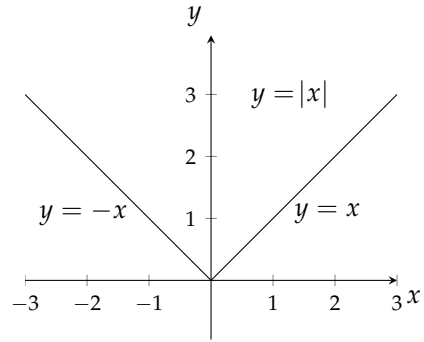
بعض اوقات ایک تفعل دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات استعمال کرتا ہے۔ اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفعل ہے (شکل 1.24)۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔



شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27



شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل

ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو بڑا ترین عدد صحیح تفاعل⁵¹ یا عدد صحیح زمین تفاعل⁵² کہلاتا جس کو $\lfloor x \rfloor$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \lfloor 2.4 \rfloor &= 2, & \lfloor 1.9 \rfloor &= 1, & \lfloor 0 \rfloor &= 0, & \lfloor -1.2 \rfloor &= -2 \\ \lfloor 2 \rfloor &= 2, & \lfloor 0.2 \rfloor &= 0, & \lfloor -0.3 \rfloor &= -1, & \lfloor -2 \rfloor &= -2 \end{aligned}$$

□

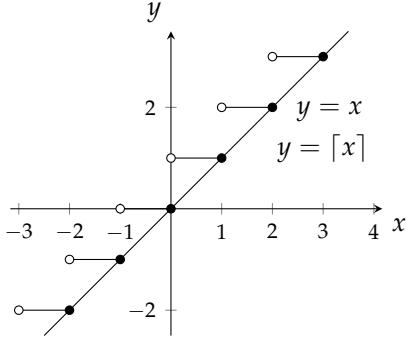
مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو کم ترین عدد صحیح تفاعل⁵³ یا عدد صحیح چھت تفاعل⁵⁴ کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ اس کی مثال ٹیکسی کا کرایا

⁵¹ greatest integer function

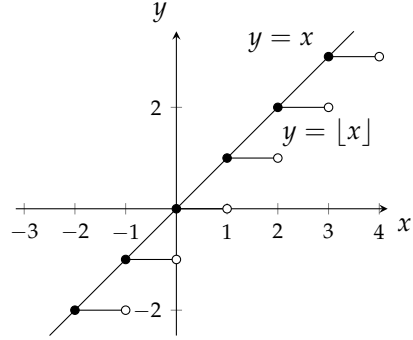
⁵² integer floor function

⁵³ least integer function

⁵⁴ integer ceiling function



شکل 1.27: عدد صحیح چھت تقابل (مثال 1.29)



شکل 1.26: عدد صحیح زمین تقابل (مثال 1.28)

ہے جو فی کلو میٹر واجب الادا ہوتا ہے۔ اضافی نامکمل کلو میٹر کی صورت میں مکمل کلو میٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔ یوں 17.2 کلو میٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلو میٹر کا کرایا واجب الادا ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} [3.2] &= 4, & [2.9] &= 3, & [0] &= 0, & [2] &= 2, \\ [-5] &= -5, & [-5.6] &= -5, & [-0.9] &= 0, & [-7.2] &= -7 \end{aligned}$$

□

سوالات

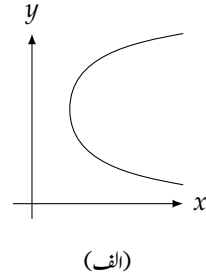
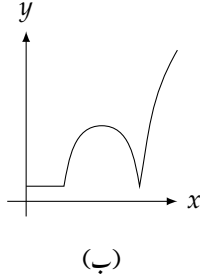
سوال 1 تا سوال 6 میں تقابل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = 1 + x^2$
جواب: دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ، سعت $[1, \infty)$

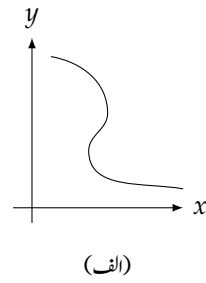
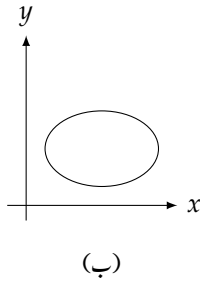
سوال 2: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

سوال 3: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
جواب: دائرہ کار $(0, \infty)$ ، سعت $(0, \infty)$

سوال 4: $F(t) = \frac{1}{1 + \sqrt{t}}$



شکل 1.28: اشکال برائے سوال 7



شکل 1.29: اشکال برائے سوال 8

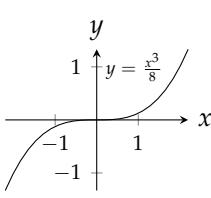
سوال 5: $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$
جواب: دائرہ کار $[-2, 2]$ ، سمت $[0, 2]$

سوال 6: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

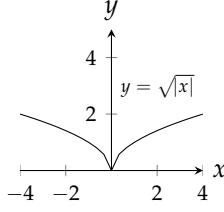
سوال 7: شکل 1.28 میں کون سی ترسیم x کے تقاضے کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تقاضے کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) چونکہ چند x پر y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا x کا تقاضے نہیں ہے۔
(ب) چونکہ ہر x پر y کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہذا x کا تقاضے ہے۔

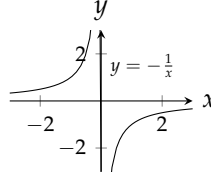
سوال 8: شکل 1.29 میں کون سی ترسیم x کے تقاضے کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تقاضے کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔



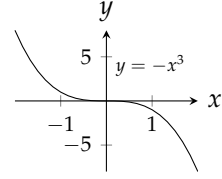
شکل 1.33



شکل 1.32



شکل 1.31



شکل 1.30

تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

سوال 9: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی x کا تفاعل لکھیں۔

جواب: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $p = 3x$

سوال 10: چکور کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں چکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔ اب چکور کے رقبہ کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال 11: مکعب کی ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتری لمبائی d کی صورت میں لکھیں۔ مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو d کا تفاعل لکھیں۔

$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $A = 2d^2$, $V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

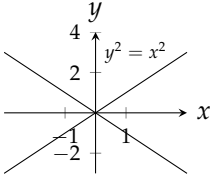
سوال 12: ربع اول میں نقطہ N تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔ N کے محدود کو مبدا سے N تک خط کی ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

تفاعل اور ترسیم

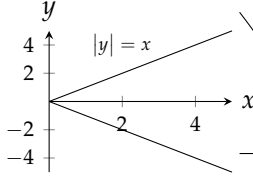
سوال 13 تا سوال 24 میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ ان میں کوئی تشاکل پائی جاتی ہے (اگر پائی جاتی ہو تب)۔ اشکال 1.21 میں دی ترسیم کا سہارا لیا جاسکتا ہے۔

سوال 13: $y = -x^3$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.30

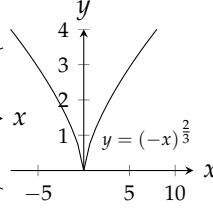
سوال 14: $y = -\frac{1}{x^2}$



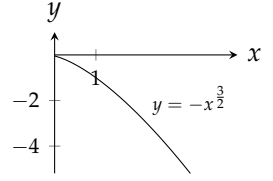
شکل 1.37



شکل 1.36



شکل 1.35



شکل 1.34

سوال 15: $y = -\frac{1}{x}$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.31

سوال 16: $y = \frac{1}{|x|}$

سوال 17: $y = \sqrt{|x|}$
جواب: محدود کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.32

سوال 18: $y = \sqrt{-x}$

سوال 19: $y = \frac{x^3}{8}$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.33

سوال 20: $y = -4\sqrt{x}$

سوال 21: $y = -x^{3/2}$
جواب: کوئی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 1.34

سوال 22: $y = (-x)^{3/2}$

سوال 23: $y = (-x)^{2/3}$
جواب: محور کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.35

سوال 24: $y = -x^{2/3}$

سوال 25: (الف) $|y| = x$ اور (ب) $y^2 = x^2$ ترسیم کریں۔ یہ مساوات x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) x کی ہر مثبت قیمت کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.36
(ب) ہر $x \neq 0$ کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.37

سوال 26: (الف) $|x| + |y| = 1$ اور (ب) $|x + y| = 1$ ترسیم کریں۔ یہ x کے تقابل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ وجہ پیش کریں۔

جفت اور طاق تفاعل

سوال 27 تا سوال 38 میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ جفت ہیں؟

سوال 27: $f(x) = 3$
جواب: جفت

سوال 28: $f(x) = x^{-5}$

سوال 29: $f(x) = x^2 + 1$
جواب: جفت

سوال 30: $f(x) = x^2 + x$

سوال 31: $g(x) = x^3 + x$
جواب: طاق

سوال 32: $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

سوال 33: $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
جواب: جفت

سوال 34: $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

سوال 35: $h(t) = \frac{1}{t - 1}$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 36: $h(t) = |t^3|$

سوال 37: $h(t) = 2t + 1$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 38: $h(t) = 2|t| + 1$

مجموعے، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم
سوال 39 تا 40 میں f ، g ، $f + g$ اور $f \cdot g$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 39: $f(x) = x$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$
جوابات: $D_f : -\infty < x < \infty$ ، $D_g : x \geq 1$ ، $R_f : -\infty < y < \infty$ ، $R_g : y \geq 0$ ،
 $D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g$ ، $R_{f+g} : y \geq 1$ ، $R_{f \cdot g} : y \geq 0$

سوال 40: $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 41 تا سوال 42 میں f ، g ، $\frac{f}{g}$ اور $\frac{g}{f}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 41: $f(x) = 2$ ، $g(x) = x^2 + 1$
جواب: $D_f : -\infty < x < \infty$ ، $D_g : -\infty < x < \infty$ ، $R_f : y = 2$ ، $R_g : y \geq 1$ ،
 $D_{\frac{f}{g}} : -\infty < x < \infty$ ، $R_{\frac{f}{g}} : 0 < y \leq 2$ ، $D_{\frac{g}{f}} : -\infty < x < \infty$ ، $R_{\frac{g}{f}} : y \geq \frac{1}{2}$

سوال 42: $f(x) = 1$ ، $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تفاعل کے مرکب

سوال 43: اگر $f(x) = x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $f(g(0))$ ج. $f(g(x))$ ہ. $f(f(-5))$ ز. $f(f(x))$
ب. $g(f(0))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

جواب:

2. ا. $x^2 + 2$ ج. 5 د. $g + 10$ ز.
 22 ب. $x^2 + 10x + 22$ د. -2 و. $x^4 - 6x^2 + 6$ ح.

سوال 44: اگر $f(x) = x - 1$ اور $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

- ا. $f(g(\frac{1}{2}))$ ج. $f(g(x))$ د. $f(f(2))$ و. $f(f(x))$ ز.
 ب. $g(f(\frac{1}{2}))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

سوال 45: اگر $u(x) = 4x - 5$ ، $v(x) = x^2$ اور $f(x) = \frac{1}{x}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

- ا. $u(v(f(x)))$ ج. $v(u(f(x)))$ د. $f(u(v(x)))$ و.
 ب. $u(f(v(x)))$ د. $v(f(u(x)))$ و. $f(v(u(x)))$

جواب:

- ا. $\frac{4}{x^2} - 5$ ج. $(\frac{4}{x} - 5)^2$ د. $\frac{1}{4x^2 - 5}$ و.
 ب. $\frac{4}{x^2} - 5$ د. $(\frac{1}{4x-5})^2$ و. $\frac{1}{(4x-5)^2}$

سوال 46: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{x}{4}$ اور $h(x) = 4x - 8$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

- ا. $h(g(f(x)))$ ج. $g(h(f(x)))$ د. $f(g(h(x)))$ و.
 ب. $h(f(g(x)))$ د. $g(f(h(x)))$ و. $f(h(g(x)))$

سوال 47 اور سوال 47 میں $f(x) = x - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $h(x) = x^3$ اور $j(x) = 2x$ لیں۔ سوال کے ہر جزو کو تفاعل کا مرکب لکھیں۔ مرکب میں f ، g ، h اور j میں سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل ہو سکتے ہیں۔

سوال 47:

$$y = \sqrt{(x-3)^3} \text{ ا.}$$

$$y = x^{\frac{1}{4}} \text{ ب.}$$

$$y = \sqrt{x} - 3 \text{ ج.}$$

$$y = (2x-6)^3 \text{ د.}$$

$$y = 4x \text{ ه.}$$

$$y = 2\sqrt{x} \text{ و.}$$

جواب:

$$g(h(f(x))) \text{ ا.}$$

$$g(g(x)) \text{ ب.}$$

$$f(g(x)) \text{ ج.}$$

$$h(j(f(x))) \text{ د.}$$

$$j(j(x)) \text{ ه.}$$

$$j(g(x)) \text{ و.}$$

سوال 48:

$$y = 2\sqrt{x-3} \text{ ا.}$$

$$y = x^9 \text{ ب.}$$

$$y = 2x - 3 \text{ ج.}$$

$$y = \sqrt{x^3 - 3} \text{ د.}$$

$$y = x - 6 \text{ ه.}$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} \text{ و.}$$

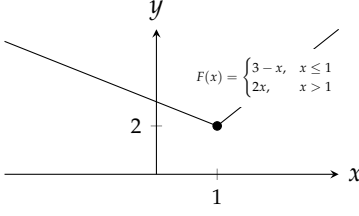
سوال 49: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	\sqrt{x}	
(ب)	$x + 2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ه)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	
(و)	$\frac{1}{x}$		x

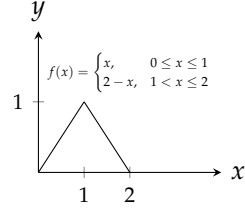
جواب:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	\sqrt{x}	$\sqrt{x-7}$
(ب)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(ج)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(ه)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
(و)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

سوال 50: کوئی عدد x لیں۔ اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔ نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔ نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔ جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟



شکل 1.39



شکل 1.38

ٹکڑوں میں معین تفاعل

سوال 51 تا سوال 54 میں تفاعل ترسیم کریں۔

سوال 51:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جواب: شکل 1.38

سوال 52:

$$g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

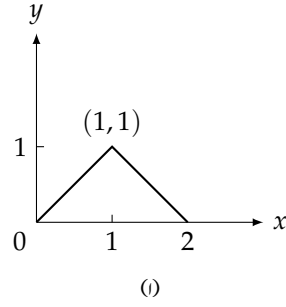
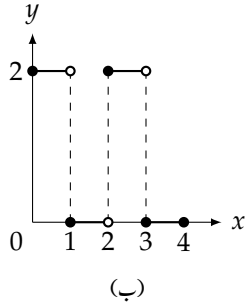
سوال 53:

$$F(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

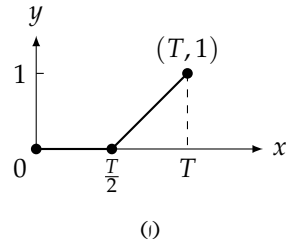
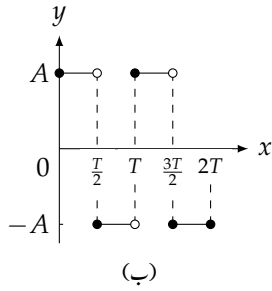
جواب: شکل 1.39

سوال 54:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$$



شکل 1.40: اشکال برائے سوال 55



شکل 1.41: اشکال برائے سوال 56

سوال 55: شکل 1.40 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

$$y = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 2 \leq x < 3 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

جواب: (الف)

سوال 56: شکل 1.41 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چہت اور زمین تفاعل

سوال 57: x کی کن قیمتوں کے لئے $[x] = 0$ (الف) ہوگا؟ $[x] = 0$ (ب) ہوگا؟
جواب: الف $0 \leq x < 1$ (ب) $-1 < x \leq 0$

سوال 58: کون سے عدد صحیح x مساوات $[x] = [x]$ کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال 59: کیا تمام x کے لئے $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 60: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔ $f(x)$ کو x کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل

سوال 61: فرض کریں کہ f جفت تفاعل اور g طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط \mathbb{R} پر معین ہیں۔ درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

- | | | |
|------------------|----------------|----------------|
| ا. fg | د. $f^2 = ff$ | ز. $g \circ f$ |
| ب. $\frac{f}{g}$ | ه. $g^2 = gg$ | ح. $f \circ f$ |
| ج. $\frac{g}{f}$ | و. $f \circ g$ | ط. $g \circ g$ |

جواب:

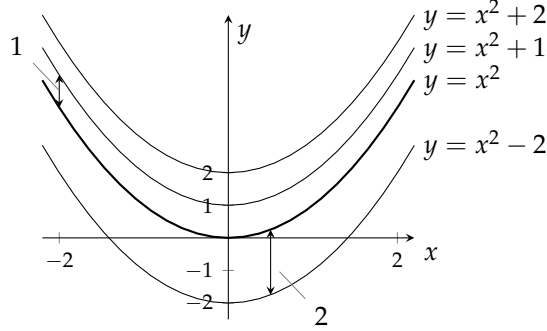
- | | | |
|--------|--------|--------|
| ا. طاق | د. جفت | ز. جفت |
| ب. طاق | ه. جفت | ح. جفت |
| ج. طاق | و. جفت | ط. طاق |

سوال 62: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

ترسیم

سوال 63: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = \sqrt{1-x}$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم کو بھی ترسیم کریں۔

سوال 64: فرض کریں کہ $f(x) = x - 7$ اور $g(x) = x^2$ ہیں۔ f اور g کے ساتھ $f \circ g$ اور $g \circ f$ کو بھی ترسیم کریں۔



شکل 1.42: تقابل $f(x) = x^2$ کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال 1.30 اور مثال 1.31)۔

1.4 ترسیم کی منتقلی

اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ ایسا کرنے سے نئی مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔ اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کا ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتا ہے۔ ہم دائرہ اور قطع مکانی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر دیگر منحنيات پر بھی قابل لاگو ہے۔

ترسیم کو کیسے منتقل کیا جاتا ہے

تقابل $y = f(x)$ کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ $y = f(x)$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔

مثال 1.30: کلیہ $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے $y = x^2 + 1$ حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل 1.42)۔

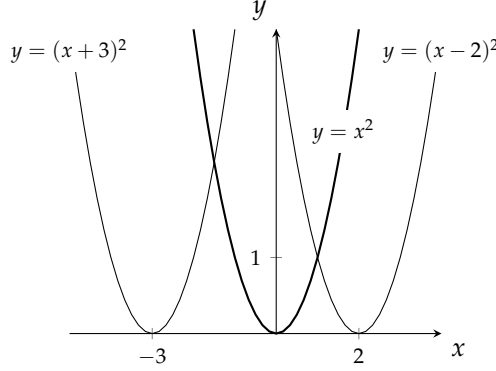
□

مثال 1.31: مساوات $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = x^2 - 2$ ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل 1.42)۔

□

مثال 1.32: $y = x^2$ میں x کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل 1.43)۔

□



شکل 1.43: $y = x^2$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر x کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔ دائیں منتقلی کی خاطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال 1.32 اور مثال 1.33)

$y = f(x)$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لئے x کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال 1.33: $y = x^2$ میں x کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = (x-2)^2$ حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل 1.43)۔

□

منتقلی کے کلیات

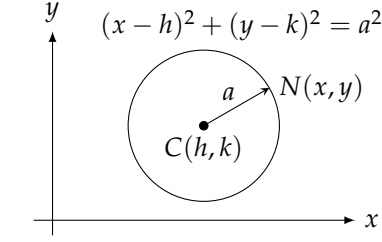
$$y = f(x) + k \quad \text{اُتصابی منتقلی}$$

$k > 0$ کی صورت میں ترسیم k اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ $k < 0$ کی صورت میں ترسیم $|k|$ اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

$$y = f(x - h) \quad \text{افقی منتقلی}$$

$h > 0$ کی صورت میں ترسیم h اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ $h < 0$ کی صورت میں ترسیم $|h|$ اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

مثال 1.34: $y = (x-2)^2 + 3$ تعامل $y = x^2$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ □



شکل 1.44: مستوی میں h, k کے گرد رداس a کا دائرہ

مساوات دائرہ

ایک مقررہ نقطہ سے یکساں فاصلے پر نقطوں کا سلسلہ دائرہ کہلاتا ہے۔ مقررہ نقطہ کو دائرے کا مرکز⁵⁵ کہتے ہیں جبکہ مرکز سے دائرے تک فاصلے کو دائرے کی رداس⁵⁶ کہتے ہیں (شکل 1.44)۔ ہم نے مثال 1.11 میں دیکھا کہ مبدا کے گرد رداس a کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ہے۔ مرکز کو (h, k) منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ حاصل ہوتی ہے۔

رداس a کا دائرہ جس کا مرکز (h, k) ہو کی معیاری مساوات

$$(1.3) \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

مثال 1.35: دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔ نئی مساوات $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ہو گی۔ اس کا مرکز $(-2, 3)$ ہو گا۔ □

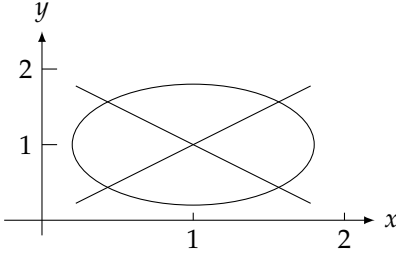
مثال 1.36: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز 3, 4 پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

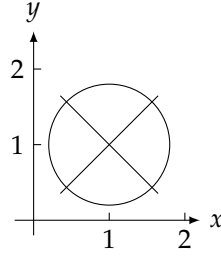
□

مثال 1.37: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$



(ب) غیر چکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے



(i) چکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے

شکل 1.45: چکور اور غیر چکور نقش

حل: اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رد اس $a = \sqrt{3}$ اور مرکز $(h, k) = (1, -5)$ لکھے جاسکتے ہیں۔ □

کمپیوٹر چکور نقش

چکور نقش سے مراد ایسا نقش ہے جس میں افقی اور انحصائی محدود کی پیمائش ایک جیسی ہو۔ چکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔ غیر چکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔ چکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شبیہ نہیں ہے۔ بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام x اور y محدود کی پیمائش غیر یکساں کرتے ہیں۔ یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔ عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جاسکتا ہے کہ وہ چکور ترسیم ہی دکھائے۔ شکل 1.45 میں چکور اور غیر چکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائری کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 1.38: درج ذیل دائرہ کا رد اس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

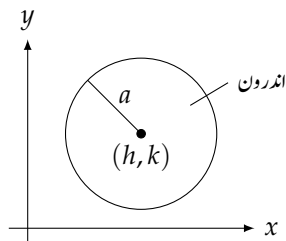
$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 3$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 3$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 = 4^2$$

□

یوں رد اس $a = 4$ اور مرکز $(h, k) = (-2, 3)$ ہیں۔



شکل 1.46: دائرے کی اندرون

اندرون اور بیرون

دائرہ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا (h, k) سے فاصلہ a اکائیوں سے کم ہو۔ یہ نقطے درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

اس خطہ کو دائرے کی اندرون⁵⁷ کہتے ہیں (شکل 1.46)۔

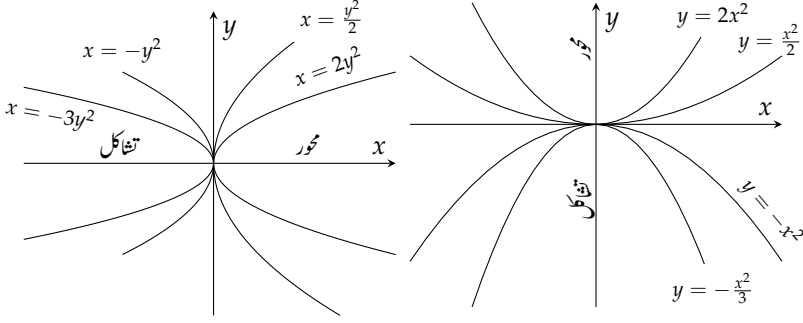
دائرے کی بیرون⁵⁸ ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا (h, k) سے فاصلہ a اکائیوں سے زیادہ ہو۔ ایسے نقطے درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2$$

مثال 1.39:

خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کی اندرون	$x^2 + y^2 < 1$
اکائی دائرہ اور اس کی اندرون	$x^2 + y^2 \leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2 + y^2 > 1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2 + y^2 \geq 1$

□

شکل 1.48: قطع مکانی $x = ay^2$ شکل 1.47: قطع مکانی $y = ax^2$

قطع مکانی ترسیم

مسادوت $y = 3x^2$ یا $y = -5x^2$ جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y = ax^2$$

کی ترسیم کو قطع مکانی⁵⁹ کہتے ہیں جس کی محور⁶⁰ تفاضل y محور ہے۔ اس قطع مکانی کی راس⁶¹ (جہاں قطع مکانی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبداء پر پائی جاتی ہے۔ مثبت a ($a > 0$) کی صورت میں یہ قطع مکانی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی a ($a < 0$) کی صورت میں یہ قطع مکانی نیچے کو کھلتا ہے۔ $|a|$ کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکانی اتنا تنگ ہو گا (شکل 1.47)۔

کلیہ $y = ax^2$ میں x اور y کو آپس میں اول بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$x = ay^2$$

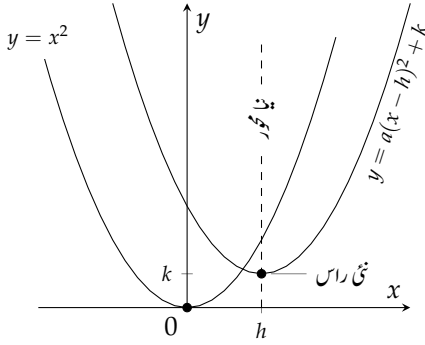
اس قطع مکانی کی ترسیم کا محور، x محور ہو گا اور اس کی راس مبداء پر پائی جائے گی (شکل 1.48)۔

مثال 1.40: کلیہ $x = y^2$ ہمیں x بطور y کا تفاضل دیتا ہے لیکن یہ ہمیں y بطور x کا تفاضل نہیں دیتا ہے۔ y کے لئے حل کرتے ہوئے $y = \pm\sqrt{x}$ حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت x کے لئے y کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تفاضل کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

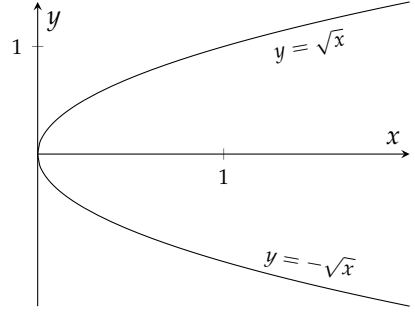
ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تفاضل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ تصور کیا جاسکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت x کے لئے یہ کلیات y کی ایک قیمت دیتے ہیں۔ $y = \sqrt{x}$ کی ترسیم قطع مکانی کا بالائی حصہ اور $y = -\sqrt{x}$ قطع مکانی کا نچلا حصہ دیتے ہیں (شکل 1.49)۔

□

⁵⁹ parabola
⁶⁰ axis
⁶¹ vertex



شکل 1.50: قطع مکانی $y = ax^2$, $a > 0$ کو h اکائیاں دائیں اور k اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے



شکل 1.49: تقابل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کی ترسیم مبداء پر ملتے ہیں اور مساوات $x = y^2$ کی ترسیم دیتے ہیں (مثال 1.40)

دو درجی مساوات $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

قطع مکانی $y = ax^2$ کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$(1.4) \quad y = a(x-h)^2$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$(1.5) \quad y - k = a(x-h)^2$$

لکھتے ہیں۔ دونوں منتقلی سے قطع مکانی کی راس (h, k) کو منتقل ہوتی ہے جبکہ اس کا محور $x = k$ ہوگا (شکل 1.50)۔

مساوات 1.5 کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(1.6) \quad y = ax^2 + bx + c$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت $y = ax^2$ کی ترسیم ہوگی جس کو کہیں اور منتقل کیا گیا ہے۔ کیوں؟ اس لئے کہ جس طرح مساوات 1.5 سے مساوات 1.6 حاصل کی گئی اسی طرح واپس مساوات 1.6 سے مساوات 1.5 بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ منحنی $y = ax^2 + bx + c$ اور $y = ax^2$ کی صورت اور سمت بندی ایک جیسی ہیں۔

قطع مکانی $y = ax^2 + bx + c$ کا محور خط $x = -\frac{b}{2a}$ ہوگا۔ اس کا قطع y حاصل کرنے کی خاطر $x = 0$ پر کیا جائے گا۔

منحنی $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ کی ترسیم $y = ax^2 + bx + c$ مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم قطع مکانی ہے جو $a > 0$ کی صورت میں اوپر رخ اور $a < 0$ کی صورت میں نیچے رخ کھلتا ہے۔ اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$(1.7) \quad x = -\frac{b}{2a}$$

اس کی راس اس نقطے پر ہوگی جہاں قطع مکانی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔ راس کا $x = -\frac{b}{2a}$ محدود ہوگا جس کو قطع مکانی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدود حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1.41: ترسیم قطع مکانی

مساوات $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ترسیم کریں۔

حل: پہلا قدم: مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

دوسرا قدم: چونکہ $a < 0$ ہے لہذا قطع مکانی نیچے کھلا ہے۔

تیسرا قدم: قطع مکانی کی محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔ اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

یوں راس کا x محدود -1 ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدود حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

اس طرح راس $(-1, \frac{9}{2})$ ہوگی۔

چوتھا قدم: قطع x (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

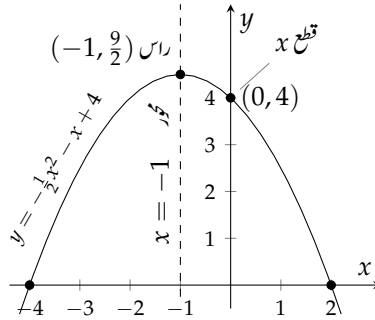
$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \quad \text{قطع مکانی کی مساوات میں } y = 0 \text{ پر کریں}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (x-2)(x+4) = 0 \quad \text{دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں}$$

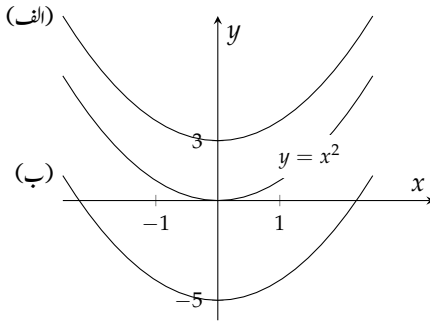
$$x = 2, \quad x = -4$$

پانچواں قدم: $y = ax^2$ کا خاکہ بناتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کر کے منتقلی کے بعد کے xy محور کھینچیں (شکل 1.51)۔

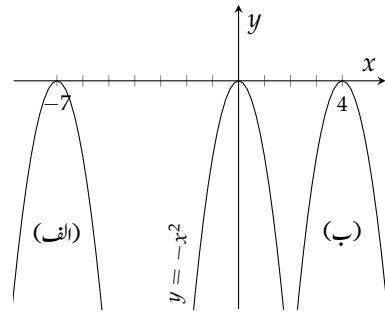
□



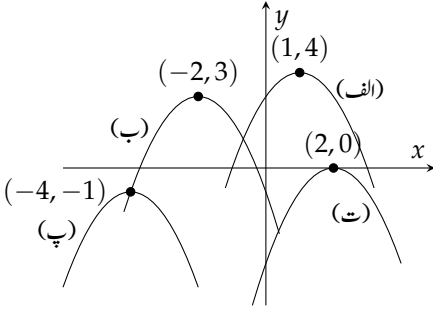
شکل 1.51: ترسیم قطع مگانی (مثال 1.41)



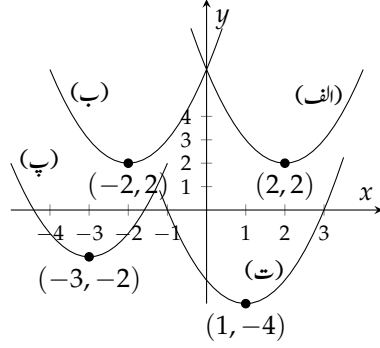
شکل 1.53: اشکال برائے سوال 2



شکل 1.52: اشکال برائے سوال 1



شکل 1.55: اشکال برائے سوال 4



شکل 1.54: اشکال برائے سوال 3

سوالات

ترسیم کی منتقلی

سوال 1: شکل 1.52 میں $y = -x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

جواب: (الف) $y = -(x+7)^2$ (ب) $y = -(x-4)^2$

سوال 2: شکل 1.53 میں $y = x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

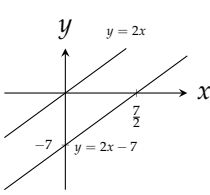
سوال 3: شکل 1.54 میں دکھائے گئے ترسیم کی مساوات درج ذیل میں سے منتخب کریں۔

$$y = (x-1)^2 - 4, \quad y = (x-2)^2 + 2, \quad y = (x+2)^2 + 2, \quad y = (x+3)^2 - 2$$

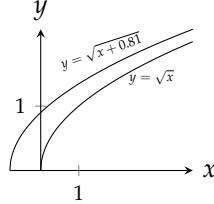
جواب: (الف) $y = (x-2)^2 + 2$ (ب) $y = (x+2)^2 + 2$ (پ) $y = (x+3)^2 - 2$ (ت) $y = (x-1)^2 - 4$

سوال 4: شکل 1.55 میں $y = -x^2$ کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔ چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔

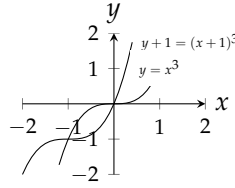
سوال 5: 16 میں ترسیم منتقل کریں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساوات حاصل کریں۔ اصل اور منتقل شدہ ترسیم کھینچیں۔



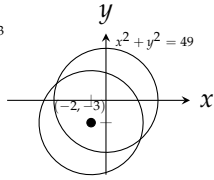
شکل 1.59



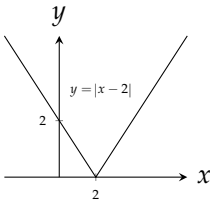
شکل 1.58



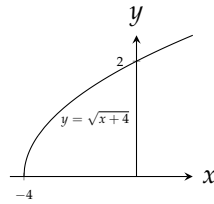
شکل 1.57



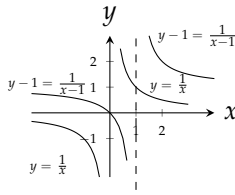
شکل 1.56



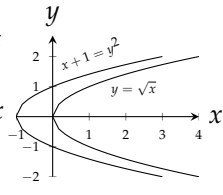
شکل 1.63



شکل 1.62



شکل 1.61



شکل 1.60

سوال 5: $x^2 + y^2 = 49$ کو نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

جواب: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$ ، شکل 1.56

سوال 6: $x^2 + y^2 = 25$ کو 3 اوپر، 4 بائیں منتقل کریں۔

سوال 7: $y = x^3$ کو 1 نیچے، 1 بائیں منتقل کریں۔

جواب: $y + 1 = (x + 1)^3$ ، شکل 1.57

سوال 8: $y = x^{2/3}$ کو 1 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال 9: $y = \sqrt{x}$ کو 0.81 بائیں منتقل کریں۔

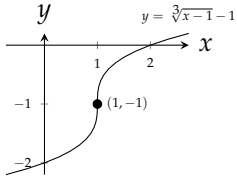
جواب: $y = \sqrt{x + 0.81}$ ، شکل 1.58

سوال 10: $y = -\sqrt{x}$ کو 3 دائیں منتقل کریں۔

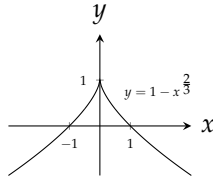
سوال 11: $y = 2x - 7$ کو 7 اوپر منتقل کریں۔

جواب: $y = 2x$ ، شکل 1.59

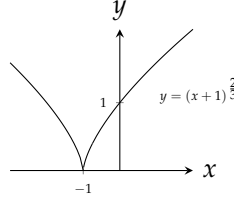
سوال 12: $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$ کو 5 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔



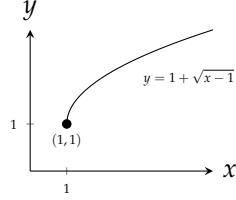
شکل 1.67



شکل 1.66



شکل 1.65



شکل 1.64

سوال 13: $y = x^2$ کو 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $x + 1 = y^2$ ، شکل 1.60

سوال 14: $x = -3y^2$ کو 2 اوپر، 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 15: $y = \frac{1}{x}$ کو 1 اوپر، 1 دائیں منتقل کریں۔
جواب: $y - 1 = \frac{1}{x-1}$ ، شکل 1.61

سوال 16: $y = \frac{1}{x^2}$ کو 1 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

سوال 17 تا سوال 36 میں تقابل ترسیم کریں۔ صفحہ 38 پر شکل 1.21 میں دی گئی ترسیم کا سہارا لیں۔

سوال 17: $y = \sqrt{x+4}$
جواب: شکل 1.62

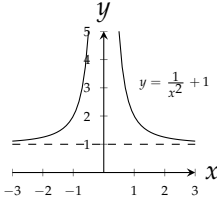
سوال 18: $y = \sqrt{9-x}$

سوال 19: $y = |x-2|$
جواب: شکل 1.63

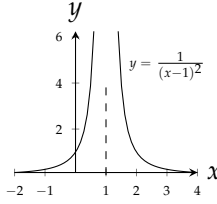
سوال 20: $y = |1-x| - 1$

سوال 21: $y = 1 + \sqrt{x-1}$
جواب: شکل 1.64

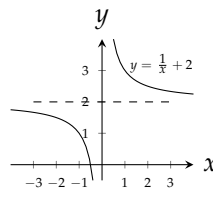
سوال 22: $y = 1 - \sqrt{x}$



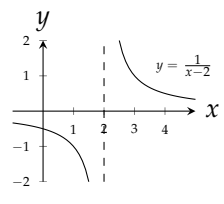
شکل 1.71



شکل 1.70



شکل 1.69



شکل 1.68

سوال 23: $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.65

سوال 24: $y = (x - 8)^{\frac{2}{3}}$

سوال 25: $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.66

سوال 26: $y + 4 = x^{\frac{2}{3}}$

سوال 27: $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$
جواب: شکل 1.67

سوال 28: $y = (x + 2)^{\frac{3}{2}} + 1$

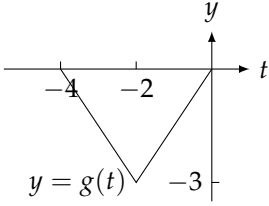
سوال 29: $y = \frac{1}{x-2}$
جواب: شکل 1.68

سوال 30: $y = \frac{1}{x} - 2$

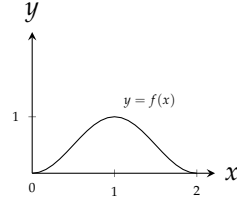
سوال 31: $y = \frac{1}{x} + 2$
جواب: شکل 1.69

سوال 32: $y = \frac{1}{x+2}$

سوال 33: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$
جواب: شکل 1.70



شکل 1.73: تقابل برائے سوال 38



شکل 1.72: تقابل برائے سوال 37

سوال 34: $y = \frac{1}{x^2} - 1$

سوال 35: $y = \frac{1}{x^2} + 1$

جواب: شکل 1.71

سوال 36: $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

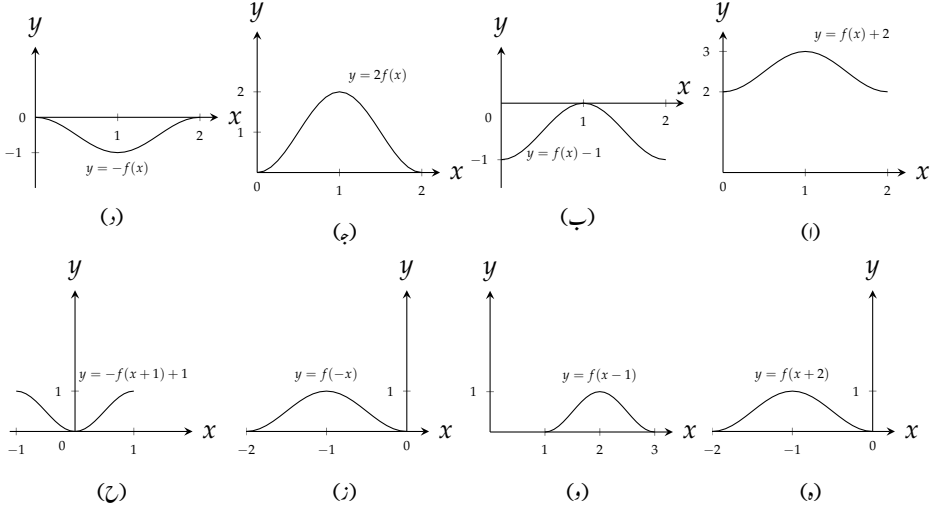
سوال 37: شکل 1.72 میں دکھائے گئے تقابل $f(x)$ کا دائرہ کار $[0, 2]$ اور سعت $[0, 1]$ ہے۔ درج ذیل تقابل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تقابل کا خاکہ بنائیں۔

ا. $f(x) + 2$ ج. $2f(x)$ د. $f(x + 2)$ ز. $f(-x)$
 ب. $f(x) - 1$ د. $-f(x)$ و. $f(x - 1)$ ح. $-f(x + 1) + 1$

جوابات: اشکال کے لئے شکل 1.74 دیکھیں۔ جبکہ دائرہ کار اور سعت درج ذیل ہیں۔

ا. $D : [0, 2], R : [2, 3]$ د. $D : [0, 2], R : [-1, 0]$ ز. $D : [-2, 0], R : [0, 1]$
 ب. $D : [0, 2], R : [-1, 0]$ و. $D : [-2, 0], R : [0, 1]$
 ج. $D : [0, 2], R = [0, 2]$ د. $D : [1, 3], R : [0, 1]$ ح. $D : [-1, 1], R : [0, 1]$

سوال 38: شکل 1.73 میں دکھائے گئے تقابل $g(t)$ کا دائرہ کار $[-4, 0]$ اور سعت $[-3, 0]$ ہے۔ درج ذیل تقابل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تقابل کا خاکہ بنائیں۔



شکل 1.74: اشکال برائے سوال 37 کے جوابات

- ا. $g(-t)$ ب. $g(t) + 3$ ج. $g(-t + 2)$ د. $g(1 - t)$
- ب. $-g(t)$ ج. $1 - g(t)$ د. $g(t - 2)$ ز. $-g(t - 4)$

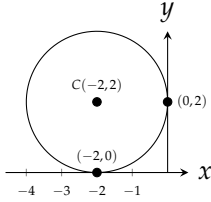
دائرے

سوال 39 تا سوال 44 میں دائرے کا رداس a اور مرکز $C(h, k)$ دیا گیا ہے۔ دائرے کی مساوات لکھیں۔ دائرہ اور دائرے کی مرکز کا xy مستوی میں خاکہ کھینچیں۔ دائرے کا قطع x اور قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کی نشاندہی کریں اور اس کے محدود لکھیں۔

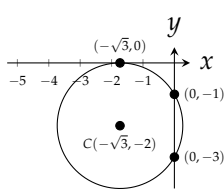
سوال 39: $C(0, 2), a = 2$ جواب: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ، شکل 1.75

سوال 40: $C(-3, 0), a = 3$

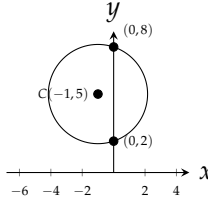
سوال 41: $C(-1, 5), a = \sqrt{10}$ جواب: $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$ ، شکل 1.76



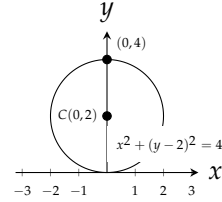
شکل 1.78



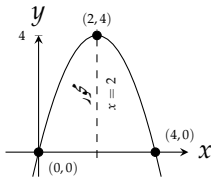
شکل 1.77



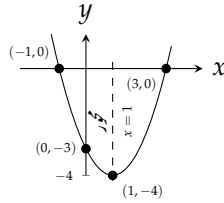
شکل 1.76



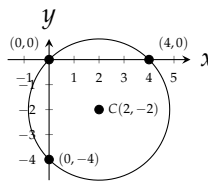
شکل 1.75



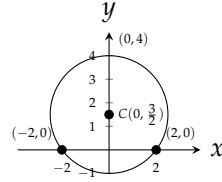
شکل 1.82



شکل 1.81



شکل 1.80



شکل 1.79

سوال 42: $C(1, 1)$, $a = \sqrt{2}$

سوال 43: $C(-\sqrt{3}, -2)$, $a = 2$
جواب: $(x + \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 4$ ، شکل 1.77

سوال 44: $C(3, \frac{1}{2})$, $a = 5$

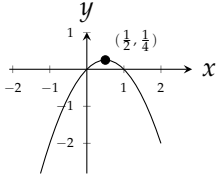
سوال 45 تا سوال 50 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔ دائرے کا مرکز اور قطع x ، قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کے محدود دکھائیں۔

سوال 45: $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
جواب: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ ، شکل 1.78

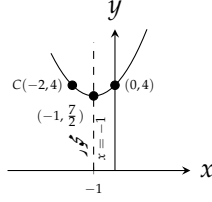
سوال 46: $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

سوال 47: $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$
جواب: $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$ ، شکل 1.79

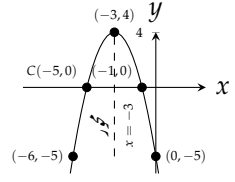
سوال 48: $x^2 + y^2 - 4x - \frac{9}{4} = 0$



شکل 1.85



شکل 1.84



شکل 1.83

سوال 49: $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$
 شکل 1.80، $(x - 2)^2(y + 2)^2 = 8$

سوال 50: $x^2 + y^2 + 2x = 3$

قطع مکانی

سوال 51 تا سوال 58 میں دیے گئے قطع مکانی ترسیم کریں۔ راس، محور اور قطع x ، قطع y بھی ظاہر کریں۔

سوال 51: $y = x^2 - 2x - 3$
 شکل 1.81، $y = x^2 - 2x - 3$

سوال 52: $y = x^2 + 4x + 3$

سوال 53: $y = -x^2 + 4x$
 جواب: شکل 1.82، $y = -x^2 + 4x$

سوال 54: $y = -x^2 + 4x - 5$

سوال 55: $y = -x^2 - 6x - 5$
 جواب: شکل 1.83

سوال 56: $y = 2x^2 - x + 3$

سوال 57: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
 جواب: شکل 1.84

سوال 58: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

سوال 59: قطع مکانی $y = x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔
جواب: شکل 1.85

سوال 60: قطع مکانی $y = 3 - 2x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $g(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

عدم مساوات

سوال 61 تا سوال 68 میں دیے گئے عدم مساوات اور عدم مساوات کی جوڑیوں پر تبصرہ کریں۔

سوال 61: $x^2 + y^2 > 7$
جواب: رداس $\sqrt{7}$ کے دائرے کی بیرون-دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 62: $x^2 + y^2 < 5$

سوال 63: $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$
جواب: $(1, 0)$ پر مرکز اور رداس 2 دائرے پر اور اس کے اندر۔

سوال 64: $x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$

سوال 65: $x^2 + y^2 > 1$, $x^2 + y^2 < 4$
جواب: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ جھلی۔ (وہ نقطے جن کا مبدا سے فاصلہ 1 اور 2 کے بیچ ہے۔)

سوال 66: $x^2 + y^2 \leq 4$, $(x + 2)^2 + y^2 \leq 4$

سوال 67: $x^2 + y^2 + 6y < 0$, $y > -3$
جواب: خط $y = -3$ کی بالائی جانب رداس 3 کے دائرہ کی اندرون-دائرے کا مرکز $(0, -3)$ ہے۔

سوال 68: $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$, $x > 2$

سوال 69: ایسا عدم مساوات لکھیں جو رداس $\sqrt{6}$ کے دائرہ جس کا مرکز $(-2, 1)$ ہو کے اندر نقطوں کو ظاہر کرتی ہو۔
جواب: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$

سوال 70: رداس 4 اور مرکز $(-4, 2)$ والے دائرے کے باہر نقطوں کے لئے عدم مساوات لکھیں۔

سوال 71: رداس 2 اور مرکز $(0, 0)$ دائرے پر یا اس کے اندر، اور نقطہ $(1, 0)$ سے گزرتا انتخابی خط پر یا اس کے دائیں جانب نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔
جواب: $x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 1$

سوال 72: رداس 2 اور مرکز $(0, 0)$ والے دائرے کے باہر اور ایسے دائرہ، جس کا مرکز $(1, 3)$ ہو اور جو مہدا سے گزرتا ہو، کے اندر نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

منتقلی خطوط

سوال 73: خط $y = mx$ جو مہدا سے گزرتا ہے کو افقی اور انتخابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں (جس کو نقطہ-ڈھلوان مساوات کہتے ہیں)۔
جواب: $y = y_0 + m(x - x_0)$

سوال 74: خط $y = mx$ کو انتخابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ $(0, b)$ سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں۔

خطوط، دائرے اور قطع مکافی کا ایک دوسرے کو قطع ہونا

سوال 75 تا سوال 82 میں دیے دو مساوات ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

سوال 75: $y = 2x, x^2 + y^2 = 1$
جواب: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

سوال 76: $x + y = 1, (x - 1)^2 + y^2 = 1$

سوال 77: $y - x = 1, y = x^2$
جواب: $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}), (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$

سوال 78: $x + y = 0, \quad y = -(x - 1)^2$

سوال 79: $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$
جواب: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

سوال 80: $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = (x - 1)^2$

سوال 81: $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$
جواب: $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

سوال 82: $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 1$

سوال 83 تا سوال 86 میں مساوات $y = f(ax)$ میں مستقل a کی تبدیلی کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر ہم $y = f(ax)$ کو کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کرتے ہیں۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = 2, 3, \dots, 10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ a کی (ثابت) قیمت بڑھانے کے اثرات پر تبصرہ کریں۔

ب. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = -2, -3, \dots, -10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ اب ترسیم پر اثرات کیا ہیں؟

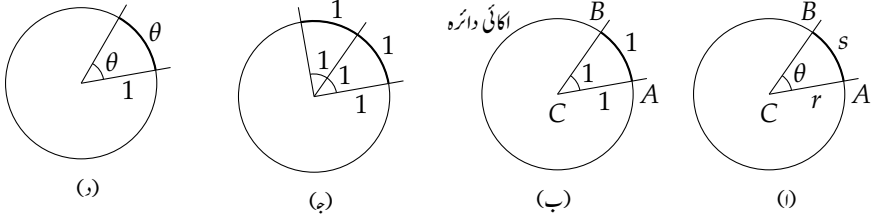
ج. $y = f(x)$ اور $y = f(ax)$ کو $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ کے لئے ترسیم کریں۔ ترسیم پر $|a| < 1$ کا کیا اثر پایا جاتا ہے؟

سوال 83: $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}, \quad [-10, 10]$

سوال 84: $f(x) = \frac{2x(x-1)}{x^2+1}, \quad [-3, -2]$

سوال 85: $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}, \quad [-2, -2]$

سوال 86: $f(x) = \frac{x^4-4x^3+10}{x^2+4}, \quad [-1, 4]$



شکل 1.86: ریڈین کی تعریف

1.5 ٹکونیاتی تفاعل

اس حصہ میں ریڈین، ٹکونی تفاعل، دوریت اور بنیادی ٹکونی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

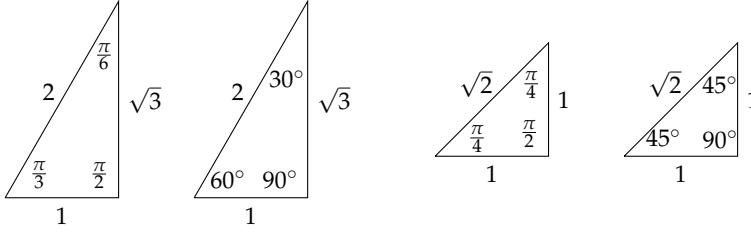
ریڈین

چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات کی صورت میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے جہاں 180° کو π ریڈین کہتے ہیں۔ ریڈین کی استعمال سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

شکل 1.86-1 میں رداس r کا دائرہ دکھایا گیا ہے جس کے مرکز C سے دو شعاعیں نکل رہی ہیں جو مرکز پر وسطی زاویہ θ بناتی ہیں۔ یہ شعاعیں دائرے کو A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ قوس AB کی لمبائی s ہے۔ اگر دائرے کا رداس 1 ہو تب ہم اس دائرے کو اکائی دائرہ⁶² کہتے ہیں۔ اکائی دائرے پر اکائی لمبائی کا قوس جتنا زاویہ بناتی ہے اس کو ایک ریڈین زاویہ کہتے ہیں (یہی ایک ریڈین کی تعریف ہے)۔ شکل 1.86-2 میں ایک ریڈین کی اس تعریف کی وضاحت کی گئی ہے۔ شکل 1.86-3 میں اکائی لمبائی کے دو قوس ساتھ ساتھ رکھے گئے ہیں جو ایک ایک ریڈین کا وسطی زاویہ بناتے ہیں۔ یوں کل قوس کی لمبائی 2 ہے اور کل زاویہ 2 ریڈین ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اکائی دائرے پر وسطی زاویہ کی ریڈین میں ناپ قوس کی لمبائی کے برابر ہوگی۔ شکل 1.86-4 میں اس حقیقت کو دکھایا گیا ہے۔

زاویہ ACB کی ریڈین ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس AB کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط 2π ہے اور ایک مکمل چکر 360° ہے لہذا درج ذیل تعلق لکھا جاسکتا ہے۔

$$180^\circ = \pi \text{ ریڈین}$$



شکل 1.87: اشکال برائے مثال 1.42

مثال 1.42: درجہ سے ریڈیئن میں زاویے کی تبدیلی

45° کو ریڈیئن میں لکھیں اور $\frac{\pi}{6}$ کو درجہ میں لکھیں۔

حل: شکل 1.87 دیکھیں۔

$$45^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈیئن}$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

□

ریڈیئن اور درجہ

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.02 \text{ ریڈیئن}$$

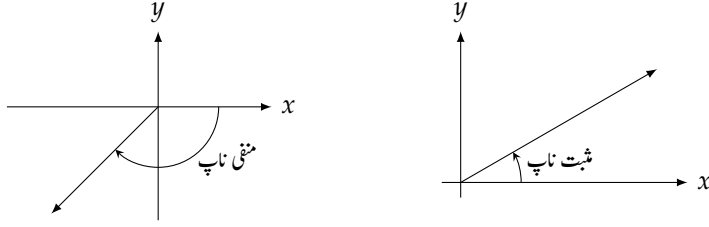
$$1 \text{ ریڈیئن} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$$

دھیان رہے کہ زاویے کی پیمائش درجات میں ہونے کو ° کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ریڈیئن کو بغیر علامت لکھا جاتا ہے۔ یوں 45° سے مراد پیمائش درجہ ہو گا جبکہ $\theta = 3$ سے مراد تین ریڈیئن ہو گا۔

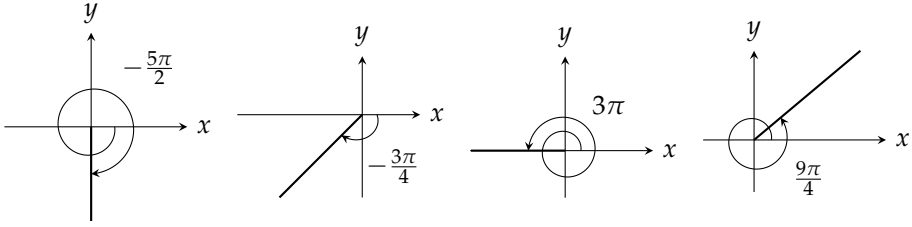
xy مستوی میں شعاع کا راس مبدأ پر اور شعاع کا ابتدائی مقام مثبت x محور پر ہونے کی صورت میں زاویہ کے مقام کو معیاری مقام⁶³ کہتے ہیں۔ مثبت x محور سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ زاویہ کی ناپ مثبت اور گھڑی کی سوئی کی رخ ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل 1.88)۔ یوں مثبت x محور کا زاویہ 0 ریڈیئن اور منفی x محور کا زاویہ π ریڈیئن ہو گا۔

گھڑی مخالف چکر بیان کرتے ہوئے زاویے کی ناپ 2π یعنی 360° سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ اسی طرح گھڑی کی رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ کچھ بھی ممکن ہے (شکل 1.89)۔

⁶³ standard position

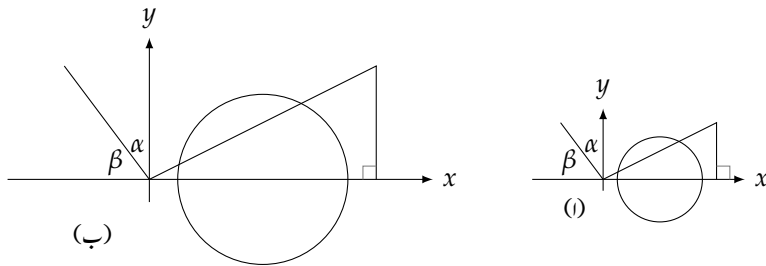


شکل 1.88: زاویے کی ناپ

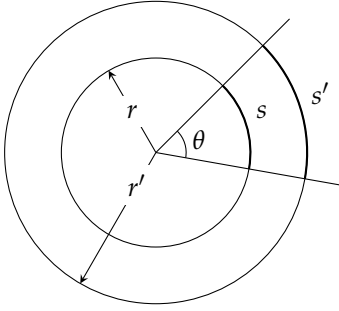


شکل 1.89: مثبت اور منفی ریڈیئن

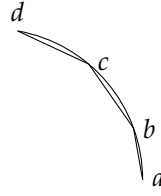
شکل 1.90-1 میں چند اشکال کو چکدر xy مستوی پر دکھایا گیا ہے۔ اس xy مستوی کو کھینچ کر x رخ اور y رخ کی لمبائیاں k گنا کرنے سے شکل 1.90-2 حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ جسامت k گنا کر دی گئی ہے۔ یوں اگر بائیں شکل کے ٹکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہوں تب اس کی وتر کی لمبائی $\sqrt{a^2 + b^2}$ ہوگی۔ دائیں شکل میں ٹکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب ka اور kb ہوں گی لہذا اس کا وتر $\sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = k\sqrt{a^2 + b^2}$ ہوگا۔ آپ نے دیکھا کہ دائیں مستوی پر نا صرف افقی اور انتصابی خط بلکہ ترجھے خط کی لمبائی بھی k گنا ہو گئی ہے۔ چونکہ ہر ترجھے خط کو کسی ٹکون کا وتر تصور کیا جاسکتا ہے لہذا دائیں مستوی پر (ہر افقی اور ہر انتصابی خط کے ساتھ ساتھ) ہر ترجھے خط کی لمبائی k گنا ہوگی۔ کیا جسامت k گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی k گنا ہوگی؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جس کا ثبوت اب پیش کرتے ہیں۔



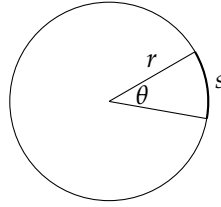
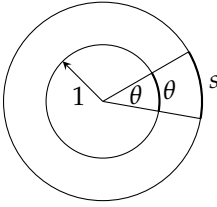
شکل 1.90: شکل بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر اثر نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 1.92: محیط دائرہ



شکل 1.91: قوس کی لمبائی



شکل 1.93: قوس، رداس اور زاویے کا تعلق۔

شکل 1.91 میں قوس کی لمبائی جاننے کی خاطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی لی جاسکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ اب اگر اس قوس کی جسامت کو k گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی k گنا ہوگی لہذا ان کی مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی k گنا ہوگی۔ (ثبوت مکمل ہوا۔)

شکل 1.93-1 میں رداس r کے دائرے پر قوس s اور وسطی زاویہ θ دکھائے گئے ہیں۔ اس دائرے کے مرکز پر ہم 1 رداس کا دائرہ بناتے ہیں (شکل 1.93-2)؛ اگر دیے گئے دائرے کا رداس اکائی سے کم ہو تب یہ دائرہ اکائی دائرے کے اندر نظر آئے گا۔ (جیسا شکل 1.93-2 میں دکھایا گیا ہے) ریڈیئن کی تعریف کی رو سے اکائی دائرے پر قوس اور زاویہ آپس میں برابر ہوں گے۔ شکل 1.93-2 میں دونوں دائروں پر قوس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{s}{\theta}$ اور دائروں کے رداس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{r}{1}$ ایک جیسا ہوں گے، یعنی $\frac{s}{\theta} = \frac{r}{1}$ جس سے درج ذیل اہم ترین کلیہ ملتا ہے۔

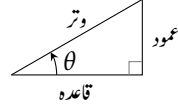
قوس، رداس اور زاویے کا تعلق

$$s = r\theta$$

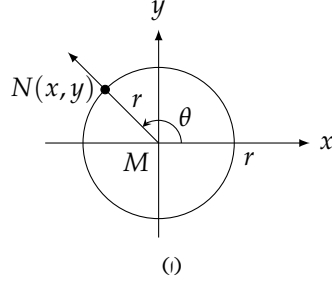
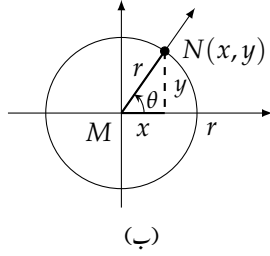
زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں

یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔ جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔ یوں اگر ہم زاویہ $\frac{\pi}{6}$ کی بات کریں تب اس سے مراد $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن کا زاویہ ہو گا نا کہ $\frac{\pi}{6}$ درجے کا زاویہ۔

$\sin \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$	کوسائنٹ	$\csc = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$
$\cos \theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$	سیکینٹ	$\sec = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$
$\tan \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$	کوٹینجینٹ	$\cot = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$



شکل 1.94: قائمہ مثلث اور ٹیکنونیاتی تفاعل



شکل 1.95: ٹیکنونیاتی تفاعل

مثال 1.43: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر 2π لمبائی کا قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بناتا ہے۔
(ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو $\frac{3\pi}{4}$ وسطی زاویہ بناتا ہو۔
حل:

$$s = r\theta = 8\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\pi \quad (\text{ب}) \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

□

چھ بنیادی ٹیکنونیاتی تفاعل

آپ زاویہ حادہ کے ٹیکنونیاتی تفاعل سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل 1.94)۔ ہم انہیں تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرد اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس r کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب ان ٹیکنونیاتی تفاعل کو نقطہ $N(x, y)$ کے محدود کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتا ہوا شعاع دائرے کو $N(x, y)$ پر قطع کرتا ہے۔

شکل 1.95-ا کو دیکھتے ہوئے ان تفاعل کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

چھ ٹکونیاتی تفاعل

$$\begin{array}{ll}
\text{سائن} & \sin \theta = \frac{y}{r} \\
\text{کوسائن} & \cos \theta = \frac{x}{r} \\
\text{ٹینجینٹ} & \tan \theta = \frac{y}{x}
\end{array}
\quad
\begin{array}{ll}
\text{کوسیکنٹ} & \csc \theta = \frac{r}{y} \\
\text{سییکنٹ} & \sec \theta = \frac{r}{x} \\
\text{کوتینجینٹ} & \cot \theta = \frac{x}{y}
\end{array}$$

آپ شکل 1.95-ب سے دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ حادثہ کی صورت میں ٹکونیاتی تفاعل کی توسیعی تعریف اور قائمہ زاویہ ٹکونی تعریف ایک جیسے ہیں۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $x = 0$ کی صورت میں $\tan \theta$ اور $\sec \theta$ غیر معین ہیں (چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے)۔ یوں یہ $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ کے لئے غیر معین ہیں۔ اسی طرح $y = 0$ یعنی $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ کے لئے $\csc \theta$ اور $\cot \theta$ غیر معین ہیں۔

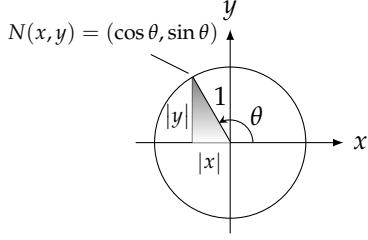
اسی طرح درج ذیل تعریف بھی لکھے جاسکتے ہیں۔

ٹکونیاتی تفاعل کے باہمی تعلقات

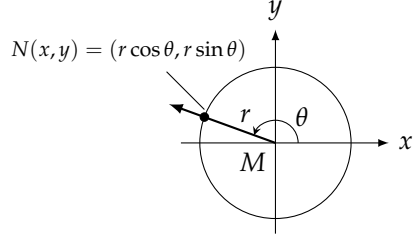
$$\begin{array}{ll}
\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \\
\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} & \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}
\end{array}$$

مستوی میں نقطہ $N(x, y)$ کو مہداسے فاصلہ r اور زاویہ θ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے (شکل 1.96)۔ چونکہ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ اور $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ہیں لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$



شکل 1.97: زاویہ θ کے لئے زاویہ حادہ نکون



شکل 1.96: مستوی میں کارتیسی محدد کا r اور θ میں اظہار۔

تکوینیاتی تفاعل کی قیمتیں

شکل 1.95 کے دائرے میں $r = 1$ ہونے کی صورت میں $\sin \theta$ اور $\cos \theta$ کی تعارفی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y$$

یوں ہم سائن اور کوسائن کی قیمتوں کو بالترتیب نقطہ $N(x, y)$ کی x اور y محدد سے پڑھ سکتے ہیں۔ نقطہ N سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ نکون سے بھی انہیں حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 1.97)۔ ہم x اور y کی قیمتیں نکون کی اطراف سے ناپتے ہیں۔ x اور y کی علامتیں اس ربع سے تعین کی جاتی ہیں جس میں نکون پایا جاتا ہو۔

مثال 1.44: $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: زاویے کو معیاری مقام پر اکائی دائرے میں بنائیں۔ حوالہ نکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.98)۔
دوسرا قدم: جہاں اکائی دائرے کو شعاع قطع کرتی ہے اس نقطے کے محدد دریافت کریں:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = x \text{ کا محدد } N = -\frac{1}{2}$$

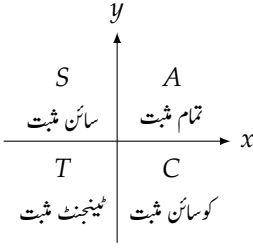
$$\sin \frac{2\pi}{3} = y \text{ کا محدد } N = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

□

تکوینیاتی تفاعل کی قیمتوں کی علامت جاننے کے لئے شکل 1.99 میں دکھایا گیا CAST کا قاعدہ یاد رکھیں۔

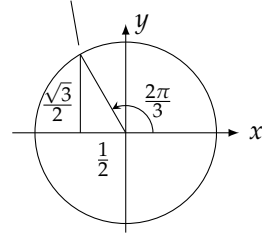
مثال 1.45: $-\frac{\pi}{4}$ ریڈین کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: معیاری مقام پر اکائی دائرے میں زاویہ کھینچ کر حوالہ نکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.100)۔

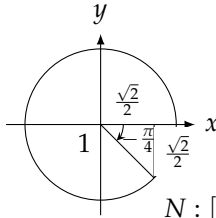


شکل 1.99: قاعدہ CAST

$$\left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



شکل 1.98: ٹکونیاتی تناسب کی قیمتیں (مثال 1.44)



$$N : \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

شکل 1.100: شکل برائے مثال 1.45

دوسرا قدم: نقطہ N کے محدد تلاش کریں۔

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = x \text{ کا محدد } N = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y \text{ کا محدد } N = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

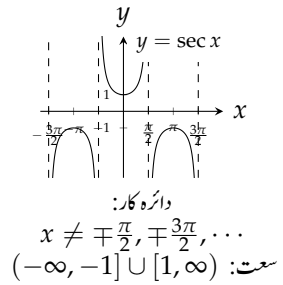
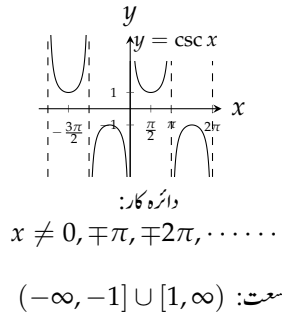
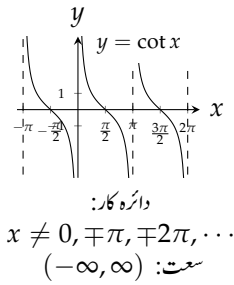
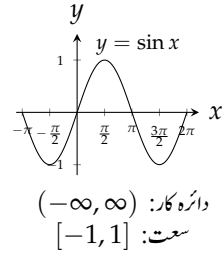
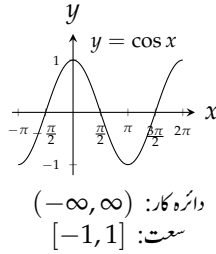
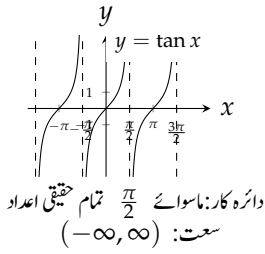
□

درج بالا دو مثالوں کی طرح حل کرتے ہوئے جدول میں دیے قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔

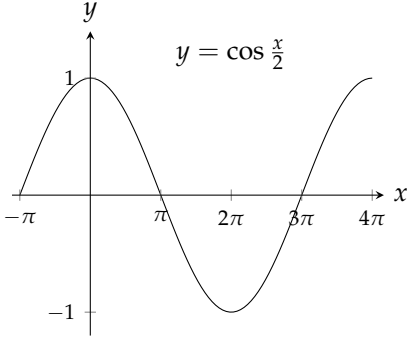
ترسیم

ٹکونیاتی تناسب کو کارٹیسی محدد میں ترسیم کرتے ہوئے ہم عموماً غیر تابع متغیر θ کو x سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 1.101)۔

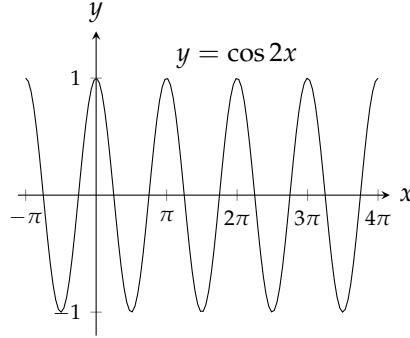
درجہ ریڈین	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°
	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin \theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0



شکل 1.101: چھ بنیادی ٹریگونیٹریک فنکشنز کے گراف۔ ان فنکشنز کی دوریت صاف ظاہر ہے۔



(ب)



(i)

شکل 1.102: $\cos 2x$ کا دوری عرصہ کم ہے جبکہ $\cos \frac{x}{2}$ کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

دوریت

معیاری مقام پر زاویہ x اور زاویہ $x + 2\pi$ ہم مکان ہوں گے۔ یوں ان دونوں زاویوں کے تکنیاتی تفاعل کی قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔ مثال کے طور پر $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ہو گا۔ ایسے تفاعل جن کی قیمت مقررہ وقفوں سے دہرائی ہو دوری⁶⁴ کہلاتا ہے۔

تعریف: اگر کسی مثبت عدد p کے لئے تمام x پر $f(x + p) = f(x)$ ہو تب تفاعل $f(x)$ دوری کہلاتا ہے۔ p کی ایسی کم سے کم قیمت کو $f(x)$ کا دوری عرصہ⁶⁵ کہتے ہیں۔

ہم شکل 1.101 سے دیکھ سکتے ہیں کہ ٹینیجنٹ اور کوٹینیجنٹ تفاعل کا دوری عرصہ $p = \pi$ ہے جبکہ باقی چار تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔

شکل 1.102 میں $y = \cos 2x$ اور $y = \cos \frac{x}{2}$ ترسیم کیے گئے ہیں۔ تکنیاتی تفاعل میں x کو 1 سے بڑی عدد سے ضرب کرنے سے تفاعل تیز ہو جاتا ہے (اس کی تعدد بڑھ جاتی ہے اور اس کا دوری عرصہ کم ہو جاتا ہے) جبکہ 1 سے کم عدد سے x کو ضرب کرنے سے تفاعل آہستہ ہو جاتا ہے جس سے اس کا دوری عرصہ بڑھ جاتا ہے۔

دوری تفاعل کی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ سائنس میں عموماً طبعی نظام جن پر ہم غور کرتے ہیں کا رویہ دوری ہوتا ہے۔ دل کی دھڑکن، دماغی لہریں اور گھریلو استعمال کی 220 وولٹ کی بجلی دوری ہیں۔ اسی طرح خرد امواج تندور میں برقیاتی میدان جو خوراک کو گرم کرتی ہیں دوری

periodic⁶⁴
period⁶⁵

ہوتی ہیں۔ موسمی کاروبار میں سرمایہ کی آمد و رفت اور گھومنے والی مشین کا رویہ بھی دوری ہوتا ہے۔ ہمارے پاس پختہ شواہد موجود ہیں جن کے تحت دنیا پر برفانی عہد تقریباً 90 000 تا 100 000 سال کے وقفہ سے دہراتا ہے۔

اگر اتنے زیادہ چیزیں دوری ہیں تب ہم صرف تکنیکی تفاعل پر کیوں غور کرنا چاہتے ہیں؟ اس کا جواب اعلیٰ احصاء کا ایک حیرت کن مسئلہ دیتا ہے جس کے تحت ہر دوری تفاعل، جسے ہم ریاضی نمونہ میں استعمال کرنا چاہیں گے، کو ہم سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں۔ یوں سائن اور کوسائن تفاعل کا احصاء جانتے ہوئے ہم کسی بھی دوری تفاعل کا ریاضی نمونہ اخذ کر سکیں گے۔

جفت بالمقابل طاق

شکل 1.101 سے ظاہر ہے کہ کوسائن اور سینکسٹ تفاعل جفت ہیں جبکہ باقی چار تفاعل طاق ہیں:

جفت	طاق
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

مماثل

اکائی دائرے پر نقطہ $N(\cos \theta, \sin \theta)$ سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ ٹکون پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے درج ذیل ملتا ہے (شکل 1.103)۔

$$(1.8) \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

یہ مساوات θ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اور غالباً یہ اہم ترین تکنیکی مماثل ہے۔

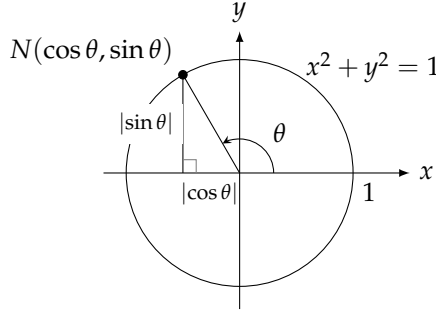
مساوات 1.8 کے دونوں ہاتھ کو ایک بار $\cos^2 \theta$ اور ایک بار $\sin^2 \theta$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

آپ درج ذیل مماثل سے بخوبی واقف ہوں گے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned} \quad \text{مجموعہ زاویہ کلیات}$$



شکل 1.103: عمومی زاویہ θ کے لئے حوالہ ٹرگون۔

اس کتاب میں تمام درکار مماثل کو مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.9 A اور B کی ہر قیمت کے لئے درست ہیں۔ $\cos(A - B)$ اور $\sin(A - B)$ کے لئے بھی اسی طرح کے کلیات پائے جاتے ہیں (سوال 35 اور سوال 36)۔

مجموعہ زاویہ کلیات میں A اور B دونوں کے لئے θ پر کرنے سے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \text{دوہرا زاویہ کلیات}$$

درج ذیل کلیات

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

کو آپس میں جمع کرنے سے $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$ اور تفریق کرنے سے $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ حاصل ہوتا ہے جن سے دوہرا زاویے کے درج ذیل مزید دو کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (1.11)$$

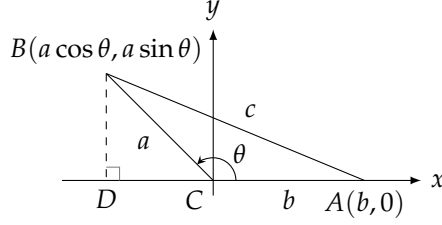
$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (1.12)$$

درج بالا میں θ کی جگہ $\frac{\theta}{2}$ لکھنے سے نصف زاویہ کلیات⁶⁶ حاصل ہوتے ہیں۔

قاعدہ کوسائن

اگر ٹرگون ABC کے اضلاع a ، b اور c ہوں اور c کے سامنے زاویہ θ ہو تب درج ذیل ہوگا (شکل 1.104)۔

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad (1.13)$$



شکل 1.104: قاعدہ کوسائن

اس مساوات کو قاعدہ کوسائن⁶⁷ کہتے ہیں۔

اس کلیہ کو حاصل کرنے کی خاطر تینوں کو کارتیسی محدود پر یوں بنائیں کہ اس کا ایک راس مبدا پر اور ایک ضلع x محور پر ہو (شکل 1.104)۔ اس B سے x محور پر قائمہ گرہیں۔ یوں حاصل قائمہ مثلث ABD پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق کرتے ہیں جہاں A سے D تک فاصلہ $b - a \cos \theta$ لکھا جائے گا (مثلاً $b = 3$ اور $a \cos \theta = -2$ کی صورت میں $AD = 3 - (-2) = 5$ ہو گا اور $a \cos \theta = 1$ کی صورت میں $AD = 3 - 1 = 2$ ہو گا)۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b^2 - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ کا سہارا لیا گیا ہے۔

قاعدہ کوسائن مسئلہ فیثاغورث کو عمومی بناتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی صورت میں $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ کی بنا قاعدہ کوسائن سے $c^2 = a^2 + b^2$ یعنی مسئلہ فیثاغورث حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

ریڈیئن، درجہ اور دائری قوس

سوال 1: رداس 10 cm کے دائرے پر کتنی لمبائی کا قوس (الف) $\frac{4\pi}{5}$ ریڈیئن (ب) 110° کا وسطی زاویہ بنائے گا؟
جواب: (الف) 8π سٹی میٹر (ب) 0.19 میٹر

half angle formulae⁶⁶
law of cosines⁶⁷

سوال 2: رداس 8 کے دائرے پر 10π لمبائی کا قوس، مرکز پر کتنا وسطی زاویہ بناتا ہے؟ جواب درجات اور ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 3: کیلکولیٹر 80° کا وسطی زاویہ بنانے کی خاطر آپ 30 cm قطر کے قرص پر مرکز سے دو خط کھینچنا چاہتے ہیں۔ محیط پر قرص کی لمبائی 1 mm درستی تک تلاش کریں۔
جواب: 20.9 cm

سوال 4: کیلکولیٹر ایک میٹر قطر کے پہیہ کو ہموار زمین پر 30 cm چلایا جاتا ہے۔ پہیہ کتنا زاویہ گھوما ہوگا؟ جواب (الف) ریڈیئن کے دو سوال حصہ اور (ب) درجہ کے ایک حصہ درستی تک تلاش کریں۔

تکنیاتی تفاعل کی قدر پیمانی

سوال 5: درج ذیل بایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	θ	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$\sin \theta$						$\sin \theta$					
$\cos \theta$						$\cos \theta$					
$\tan \theta$						$\tan \theta$					
$\cot \theta$						$\cot \theta$					
$\sec \theta$						$\sec \theta$					
$\csc \theta$						$\csc \theta$					

سوال 6: درج بالا دایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

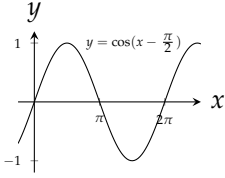
سوال 7 تا سوال 12 میں $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ میں سے ایک دیا گیا ہے۔ باقی دو تفاعل کو دیے گئے وقفے کے اندر تلاش کریں۔

سوال 7: دائرہ کار: $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $\sin x = \frac{3}{5}$ ،
جواب: $\cos x = -\frac{4}{5}$ ، $\tan x = -\frac{3}{4}$

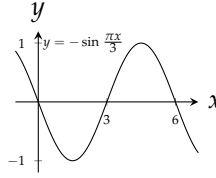
سوال 8: دائرہ کار: $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، $\tan x = 2$ ،

سوال 9: دائرہ کار: $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ ، $\cos x = \frac{1}{3}$ ،
جواب: $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ ، $\tan x = -\sqrt{8}$

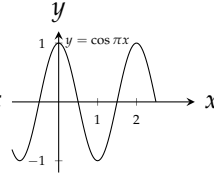
سوال 10: دائرہ کار: $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $\cos x = -\frac{5}{13}$ ،



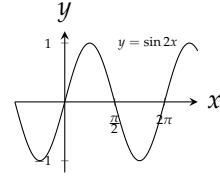
شکل 1.108



شکل 1.107



شکل 1.106



شکل 1.105

سوال 11: دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، $\tan x = \frac{1}{2}$ ،
جواب: $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 12: دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، $\sin x = -\frac{1}{2}$

تکونیاتی تفاعل کی ترسیم
سوال 13 تا سوال 22 میں دیا گیا تفاعل ترسیم کریں۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ تلاش کریں۔

سوال 13: $\sin 2x$
جواب: دوری عرصہ π ہے۔ شکل 1.105

سوال 14: $\sin \frac{x}{2}$

سوال 15: $\cos \pi x$
جواب: دائرہ کار: 2، شکل 1.106

سوال 16: $\cos \frac{\pi x}{2}$

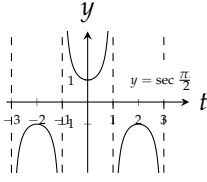
سوال 17: $-\sin \frac{\pi x}{3}$
جواب: دائرہ کار: 6، شکل 1.107

سوال 18: $-\cos 2\pi x$

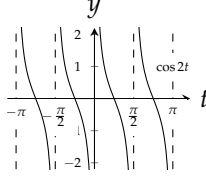
سوال 19: $\cos(x - \frac{\pi}{2})$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.108

سوال 20: $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

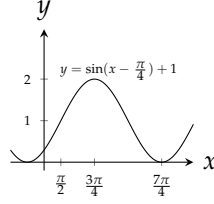
سوال 21: $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.109



شکل 1.111



شکل 1.110



شکل 1.109

سوال 22: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے تقاضا کو ts مستوی میں ترسیم کریں جہاں افقی محور t ہو۔ ہر تقاضا کا دوری عرصہ اور تشاکل تلاش کریں۔

سوال 23: $s = \cot 2t$ جواب: دائرہ کار: $\frac{\pi}{2}$ ، شکل 1.110

سوال 24: $s = -\tan \pi t$

سوال 25: $s = \sec \frac{\pi t}{2}$ جواب: دائرہ کار: 4، شکل 1.111

سوال 26: $s = \csc \frac{t}{2}$

سوال 27: کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے
(الف) $y = \sec x$ اور $y = \cos x$ کو $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\sec x$ کے رویہ پر $\cos x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔
(ب) $y = \csc x$ اور $y = \sin x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\csc x$ کے رویہ پر $\sin x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

سوال 28: $-7 \leq x \leq 7$ کے لئے $y = \tan x$ اور $y = \cot x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\tan x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے $\cot x$ پر تبصرہ کریں۔

سوال 29: $y = \sin x$ اور $y = \lfloor \sin x \rfloor$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lfloor \sin x \rfloor$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 30: $y = \sin x$ اور $y = \lceil \sin x \rceil$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lceil \sin x \rceil$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

اضافی تکنیکی مماثل

مجموعہ زاویہ کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال 31 تا سوال 36 میں دیے گئے مماثل حاصل کریں۔

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \quad \text{سوال 31}$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \text{سوال 32}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \text{سوال 33}$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x \quad \text{سوال 34}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \text{سوال 35}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \text{سوال 36}$$

سوال 37: اگر سوال 35 میں $B = A$ پر کیا جائے تب کیا حاصل ہوگا؟ کیا آپ حاصل کردہ مماثل کو پہلے سے جانتے ہیں؟

سوال 38: مجموعہ زاویہ کلیات میں $B = 2\pi$ لینے سے کیا حاصل ہوگا؟ کیا آپ نتائج سے مطمئن ہیں؟

مجموعہ زاویہ کلیات کا استعمال

سوال 39 تا سوال 42 میں دی گئی مقدار کو $\sin x$ اور $\cos x$ کی صورت میں لکھیں۔

$$\cos(\pi + x) \quad \text{سوال 39}$$

جواب: $-\cos x$

$$\sin(2\pi - x) \quad \text{سوال 40}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \quad \text{سوال 41}$$

جواب: $-\cos x$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) \quad \text{سوال 42}$$

سوال 43: $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\sin \frac{7\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

سوال 44: $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\cos \frac{11\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 45: $\cos \frac{\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

سوال 46: $\sin \frac{5\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

دوہرا زاویہ کلیات کا استعمال
سوال 47 تا سوال 50 میں تقابل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 47: $\cos^2 \frac{\pi}{8}$
جواب: $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

سوال 48: $\cos^2 \frac{\pi}{12}$

سوال 49: $\sin^2 \frac{\pi}{12}$
جواب: $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

سوال 50: $\sin^2 \frac{\pi}{8}$

نظریہ اور مثالیں

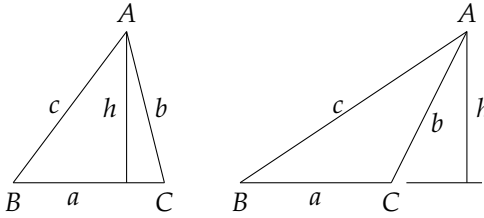
سوال 51: ٹینجینٹ مجموعہ زاویہ کا کلیہ $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ہے۔ اس کلیہ کو اخذ کریں۔

سوال 52: $\tan(A-B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

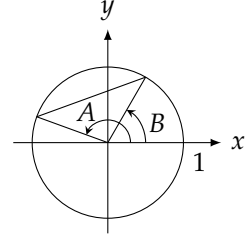
سوال 53: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A-B)$ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 54: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 کی طرز کے شکل پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A+B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔ یہ شکل کیسا ہو گا۔

سوال 55: سیکلویٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 60^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔
جواب: $c = \sqrt{7} \approx 2.646$



شکل 1.113: اشکال برائے سوال 57



شکل 1.112: اشکال برائے سوال 53

سوال 56: کیلو لیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 40^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 57: قاعدہ سائن قاعدہ سائن کہتا ہے کہ اگر مثلث کے زاویے A ، B ، C کے سامنے اضلاع بالترتیب a ، b ، c ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

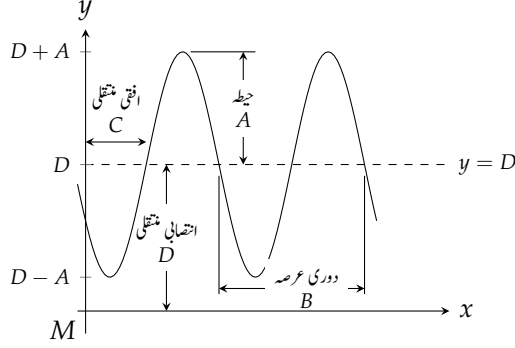
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اشکال 1.113 اور مماثل $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ استعمال کرتے ہوئے اس قاعدہ کو اخذ کریں۔

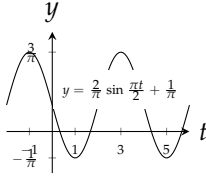
سوال 58: کیلو لیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 60^\circ$ ہیں۔ $\sin B$ کو قاعدہ سائن سے حاصل کریں۔

سوال 59: کیلو لیٹر ایک مثلث کا ضلع $c = 2$ اور زاویے $A = \frac{\pi}{4}$ اور $B = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔ زاویہ A کا مخالف ضلع a اور تلاش کریں۔
جواب: $a = 1.464$

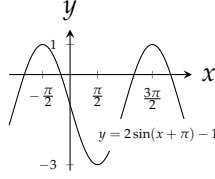
سوال 60: تخمین $\sin x \approx x$ کی چھوٹی قیمتوں کے لئے $\sin x \approx x$ ہوتا ہے جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ اس کی وجہ تیسرے باب میں بتائی جائے گی۔ $|x| < 0.1$ کے لئے تخمینی خلل 5000 میں 1 حصہ سے کم ہو گا۔
(الف) کمپیوٹر پر $y = \sin x$ اور $y = x$ کو مبداء کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ مبداء کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(ب) کمپیوٹر پر $y = \sin x$ اور $y = x$ کو مبداء کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ درجات میں ہے۔ مبداء کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(پ) کیلو لیٹر استعمال کرتے ہوئے $x = 0.1$ کے لئے $\sin x$ حاصل کریں۔ اگر آپ کا کیلو لیٹر ریڈیئن استعمال کر رہا ہو تب جواب تقریباً 0.1 ہی ہو گا۔ اگر کیلو لیٹر درجات استعمال کر رہا ہو تب جواب مختلف ہو گا۔



شکل 1.114: عمومی سائن تفاعل



شکل 1.116



شکل 1.115

عمومی سائن ترسیم

شکل 1.114 میں درج ذیل تفاعل کی ترسیم یعنی عمومی سائن ترسیم دکھائی گئی ہے جہاں $|A|$ حیظہ، $|B|$ دوری عرصہ، C افقی منتقلی اور D انتصابی منتقلی ہے۔ سوال 61 تا سوال 64 میں عمومی سائن تفاعل کے A ، B ، C اور D تلاش کریں۔ تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

سوال 61: $y = 2 \sin(x + \pi) - 1$

جواب: $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$ ؛ شکل 1.115

سوال 62: $y = \frac{1}{2} \sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

سوال 63: $y = -\frac{2}{\pi} \sin\left(-\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{1}{\pi}$

جواب: $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$ ؛ شکل 1.116

سوال 64: $y = \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

سوال 65 تا سوال 65 میں عمومی سائن تفاعل $f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$ پر ترسیم کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ ترسیم کے لئے کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال 65: دوری عرصہ $A = 3, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر تفاعل ترسیم کریں۔ دوری عرصہ بڑھانے سے تفاعل کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ (ب) B کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہوگا؟ $B = -3$ اور $B = -2\pi$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں۔

سوال 66: افقی منتقلی $A = 3, B = 6, D = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $C = 0, 1, 2$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ C کی بڑھتے مثبت قیمت کا ترسیم پر کیا اثر ہوگا؟ (ب) C کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہوگی۔ (پ) صفر افقی منتقلی کے لئے C کی کم تر مثبت قیمت کیا ہوگی؟ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 67: انتہائی منتقلی $A = 3, B = 6, C = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $D = 0, 1, 3$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ D کی بڑھتی مثبت قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہوگا؟ (ب) D کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہوگی؟

سوال 68: جیٹ $B = 6, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) A کی مثبت بڑھتی قیمتوں کا ترسیم پر کیا اثر ہوگا؟ $f(x)$ کو $A = 1, 5, 9$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔ (ب) A کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہوگی؟

باب 2

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکنیکیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں باضابطہ وضع کرتے ہیں۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔ کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔ دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔ تفاعل کی تفرق، جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 2.1: ایک پتھر 100 m اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے دارانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہوگی؟
حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔ یوں پہلی t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(الف) \quad پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2-0} = 9.8 \text{ m s}^{-1} \text{ ہوگی۔}$$

$$(ب) \quad پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(1)^2}{2-1} = 14.7 \text{ m s}^{-1} \text{ ہوگی۔}$$

□

مثال 2.2: پتھر کی رفتار $t = 1 \text{ s}$ اور $t = 2 \text{ s}$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم وقتی وقفہ $[t_0, t_0 + h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

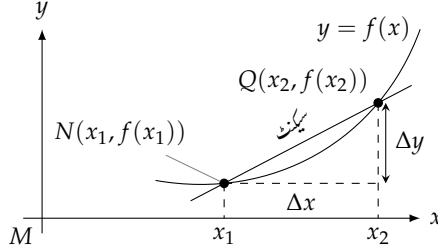
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا درج بالا کلیہ میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے "لحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں $t_0 = 1$ اور $t_0 = 2$ کے لئے $h = 0.1, 0.01, \dots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

h	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ کے لئے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار 9.8 m s^{-1} کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ پر پتھر کی رفتار 9.8 m s^{-1} ہوگی۔ اسی طرح $t_0 = 2$ پر پتھر کی رفتار 19.6 m s^{-1} نظر آئے گی۔

□



شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

اوسط شرح تبدیلی اور سیکنٹ خطوط

x کے لحاظ سے متعلق $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1, x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1, x_2]$ پر $y = f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔ جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گرتے ہوئے خط کو ترسیم کا سیکنٹ¹ کہتے ہیں۔ یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

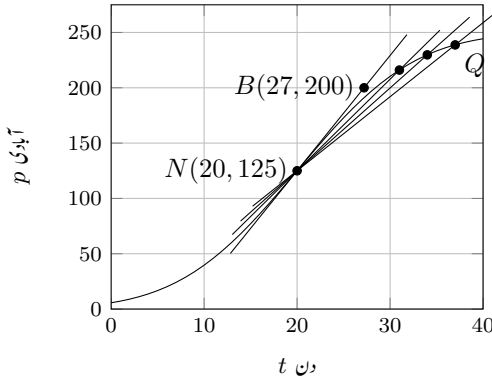
مثال 2.3: نمو آبادی کی اوسط شرح

ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔ تعداد بالمقابل دونوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

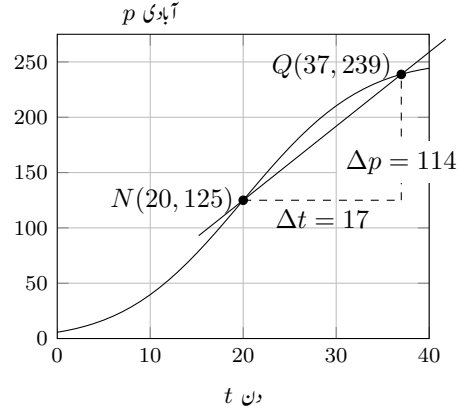
حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔ یوں $239 - 125 = 114$ تبدیل رونما ہوئی۔ یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7 \text{ (دیکھیاں فی دن)}$$

¹ secant



شکل 2.3: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی



شکل 2.2: مکھی کی نمو آبادی

□

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔

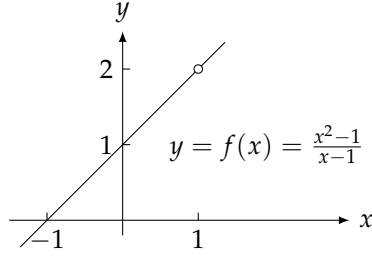
درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔ اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

مثال 2.4: مثال 2.3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟
حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
(37, 239)	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
(35, 230)	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
(32, 216)	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
(27, 200)	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو چھوتا ہے۔ اس خط کو دیے گئے منحنی کا مماس² کہتے ہیں۔ اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 کھیاں فی دن ہو گی۔

□



شکل 2.4: شکل برائے مثال 2.5

لحہ $t = 1$ اور لحہ $t = 2$ پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو لحاقی شرح تبدیلی³ کہتے ہیں۔ جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لحاقی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔ درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔ لحاقی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔ اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم حد⁴ کہتے ہیں۔

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 2.5: تفاعل $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ نقطہ $x = 1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟
حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا مساوی $x = 1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے f تعین کرتا ہے۔ کسی بھی $x \neq 1$ کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$$

یوں خط $y = x + 1$ جس سے نقطہ $x = 1$ یعنی $(1, 2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔ اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

$x (\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 تک پہنچنے سے $f(x)$ کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا x ایک تک پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

□

x کی قیمت x_0 تک پہنچنے کو $x \rightarrow x_0$ لکھا جاتا ہے۔

تعریف: حد کی غیر رسمی تعریف

فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ پر تقابل $f(x)$ معین ہے جبکہ عین نقطہ x_0 پر $f(x)$ غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لئے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 تک پہنچنے سے f کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

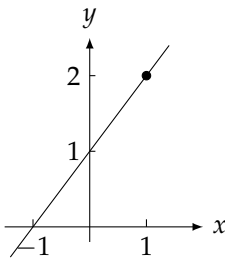
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراہ پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد $10 \mu\text{m}$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف جلد پیش کریں گے۔

مثال 2.6: $x \rightarrow x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجودیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں f کا $x \rightarrow 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تقابل g کا $x \rightarrow 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تقابل h کا $x \rightarrow 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں

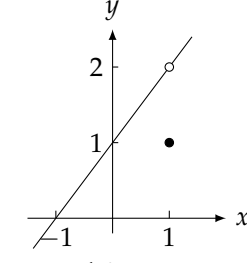
□

یعنی $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$



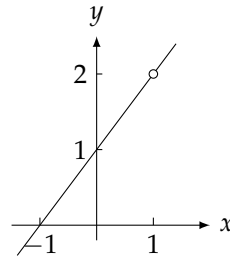
$$h(x) = x + 1$$

(ج)



$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(ب)



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

(ا)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 \quad \text{شکل 2.5}$$

بعض اوقات $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کی مثال تفاعل $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور ٹکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہو۔

مثال 2.7:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 13} (4) = 4 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7 \quad \text{د.}$$

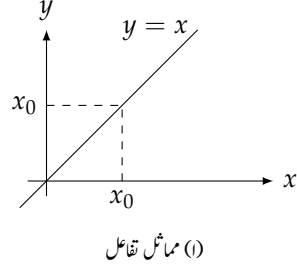
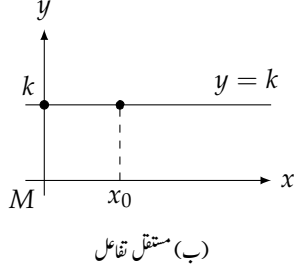
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3} \quad \text{ه.}$$

□

مثال 2.8:

ا. اگر f مماثل تفاعل $f(x) = x$ ہو تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہوگا (شکل 2.6-ل)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$



شکل 2.6: اشکال برائے مثال 2.7

ب. اگر f مستقل تفاعل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

□

مثال 2.9: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔
درج ذیل تفاعل کا $x \rightarrow 0$ پر رویہ کیسا ہو گا؟

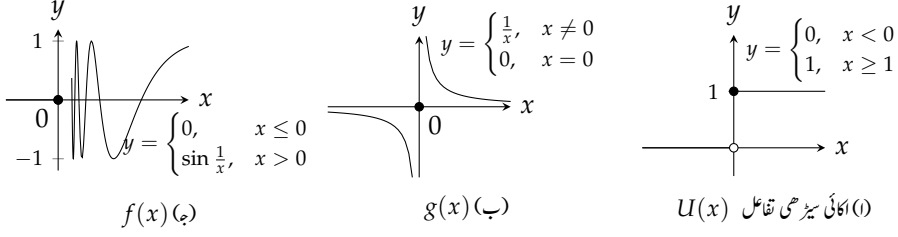
$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ا.}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{ب.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{ج.}$$

حل:

ا. اکائی میٹر ہی تفاعل $U(x)$ کا $x \rightarrow 0$ پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تفاعل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لئے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لئے U کی قیمت 1 ہے۔ یوں 0 کے قریب پہنچنے سے U کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔



شکل 2.7: اشکال برائے مثال 2.9

ب. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔ اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

□

سوالات 2.1

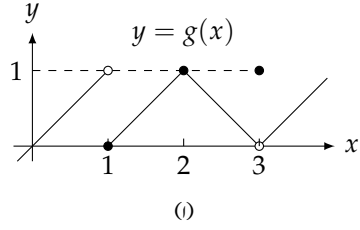
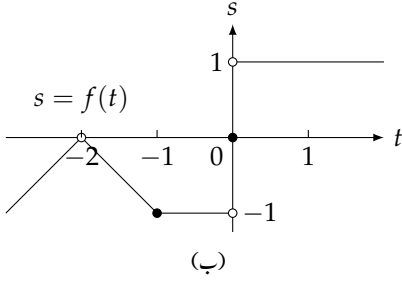
ترسیم سے حد

سوال 1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

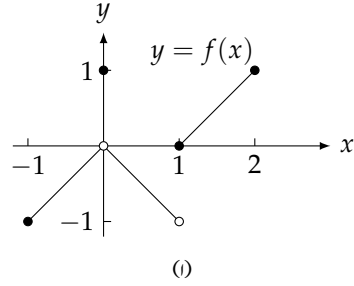
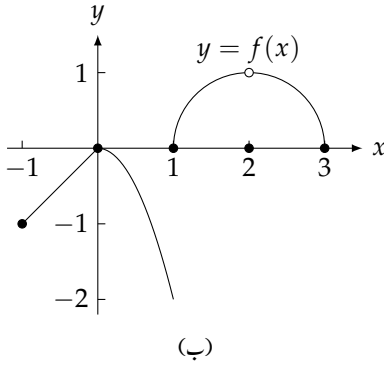
ا. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ب. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ج. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

جواب: (ا) موجود نہیں ہے۔ جیسے جیسے x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 0 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ یوں x کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہونے سے L کی یکتا قیمت کے نزدیک تر $g(x)$ نہیں پہنچتا ہے۔ (ب) 1 (ج) 0

سوال 2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔



شکل 2.8: اشکال برائے سوال 1 اور سوال 2



شکل 2.9: اشکال برائے سوال 3 اور سوال 4

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} f(t) \quad \text{ب۔}$$

$$\lim_{t \rightarrow -2} f(t) \quad \text{ا۔}$$

سوال 3: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ا) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{د۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے} \quad \text{ا۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ وقفہ } (-1, 1) \quad \text{د۔}$$

میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{د۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{ب۔}$$

جواب: (i) درست (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ه) غلط (و) درست

سوال 4: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

- ا. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود نہیں ہے ج. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نہیں ہے د. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وقفہ $(1, 3)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔
 ب. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔ د. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وقفہ $(-1, 1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

وجودیت اور حد

سوال 5 اور سوال 6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$
 جواب: جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ جب x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ یوں x کا 1 کے نزدیک تر ہونے سے $\frac{x}{|x|}$ کسی یکتا قیمت کے نزدیک تر نہیں ہوتی ہے۔

سوال 6: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

- سوال 7: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 8: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1, 1]$ میں تمام x کے لئے معین ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 9: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟ اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

- سوال 10: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ لازماً موجود ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ لازماً ہوگا؟ کیا ہم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $x = -3.1, -3.01, -3.001, \dots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلو لیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس نقاط $x = -2.9, -2.99, \dots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہوگا؟

ب. تقابل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \rightarrow -3$ کے لئے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

جواب: (i)

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -6 \text{ (ج)}$$

سوال 12: $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینہ قیمتوں $x = 1.4, 1.41, 1.414, \dots$ پر تقابل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0 = \sqrt{2}$ کے قریب تقابل ترسیم کریں۔ $x \rightarrow \sqrt{2}$ کے لئے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 13: $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $x = -5.9, -5.99, -5.999, \dots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس $x = -6.1, -6.01, -6.001, \dots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہوگا؟

ب. G کو $x_0 = 6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x \rightarrow -6$ کے لئے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔ $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	-0.126582	-0.1251564	-0.1250156	-0.1250015	-0.1250001	-0.1250000

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	-0.123456	-0.124843	-0.124984	-0.124998	-0.124999	-0.124999

$$\lim_{x \rightarrow -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0.125 \text{ (ج)}$$

$$\text{سوال 14: } h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \text{ لیں۔}$$

ا. نقاط $x = 2.9, 2.99, 2.999, \dots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کے برعکس $x = 3.1, 3.01, 3.001, \dots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہوگا؟

ب. $x_0 = 3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x \rightarrow 3$ کے لئے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔ $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

$$\text{سوال 15: } f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1} \text{ لیں۔}$$

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے $x \rightarrow -1$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

(i): جواب:

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	-0.99999	-0.999999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ (ج)}$$

$$\text{سوال 16: } F(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{2 - |x|} \text{ لیں۔}$$

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -2$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ ترسیم سے $x \rightarrow -2$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

$$\text{ج. } \lim_{x \rightarrow -2} F(x) \text{ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔}$$

$$\text{سوال 17: } g(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ لیں۔}$$

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

(i): جواب:

θ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

θ	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = 1 \text{ (ج)}$$

$$\text{سوال 18: } G(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} \text{ لیں۔}$$

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $t_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim_{t \rightarrow 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $x \rightarrow 1$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب: (i)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$f(x)$	0.348678	0.366032	0.367695	0.367861	0.367877	0.367879
x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	0.385543	0.369711	0.368063	0.367897	0.367881	0.367878

(ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \approx 0.36788$

سوال 20: $f(x) = \frac{3^x - 1}{x}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $x \rightarrow 0$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 21 تا سوال 28 میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو متغیر x پر کرتے ہوئے متغیر کی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$

جواب: 4

سوال 22: $\lim_{x \rightarrow 0} 2x$

سوال 23: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x - 1)$
جواب: 0

سوال 24: $\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال 25: $\lim_{x \rightarrow -1} 3x(2x - 1)$
جواب: 9

سوال 26: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 27: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 28: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے وقفہ پر تقابل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

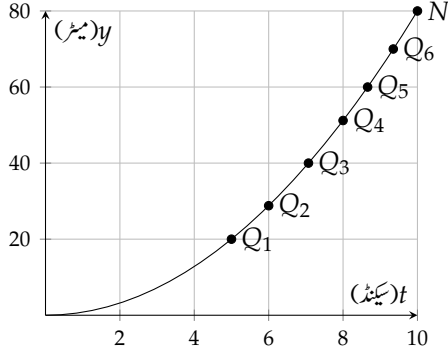
سوال 29: $f(x) = x^3 + 1$ (الف) $[2, 3]$ ، (ب) $[-1, 1]$
جواب: (i) 19 (ب) 1

سوال 30: $g(x) = x^2$ (الف) $[-1, 1]$ ، (ب) $[-2, 0]$

سوال 31: $h(t) = \cos t$ (الف) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ، (ب) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$
جواب: (i) $-\frac{4}{\pi}$ (ب) $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

سوال 32: $g(t) = 2 + \cos t$ (الف) $[0, \pi]$ ، (ب) $[-\pi, \pi]$

سوال 33: $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ ؛ $[0, 2]$
جواب: 1



شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم

سوال 34: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

سوال 35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ NQ_1 ، NQ_2 ، NQ_6 کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10$ s پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔ (الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے 1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

جواب: (ب) 5600000 سالانہ (پ) 4200000 سالانہ

سوال 37: تفاعل $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x = 2$ ، $\frac{11}{10}$ ، $\frac{101}{100}$ ، $\frac{1001}{1000}$ اور $x = 1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔ (الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $x \neq 1$ کے لئے وقفہ $[1, x]$ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔ (ب) $x = 1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔ اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 38: $g(x) = \sqrt{x}$ کے لئے $x \geq 0$ لیں۔

ا. وقفہ $[1, 2]$ ، $[1, 1.5]$ اور $[1, 1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ کے لئے x کے لحاظ سے وقفہ $[1, 1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x = 1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h \rightarrow 0$ کے لئے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا) $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$, 0.449489, 0.414213 (ب)

$\frac{1+h}{\sqrt{1+h}}$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.0000005	1.00000005
	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(ج) 0.5 (د) 0.5

سوال 39: $t \neq 0$ کے لئے $f(t) = \frac{1}{t}$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t = 2$ تا $t = 3$ اور (ب) وقفہ $t = 2$ تا $t = T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T = 2.1$ ، $T = 2.01$ ، $T = 2.001$ ، $T = 2.0001$ ، $T = 2.000001$ اور $T = 2.0000001$ کے لئے وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t = 2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \rightarrow 2$ کے لئے تلاش کریں۔ ($T = 2$ پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال 40 تا 45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔ (الف) نقطہ x_0 کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر تفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 40: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

2.2. حد تلاش کرنے کے قواعد

سوال 41: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$

سوال 42: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

سوال 43: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

سوال 44: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

سوال 45: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3 - 3 \cos x}$

2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔ پہلے تین مسئلے مثال 2.8 کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔ چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 2.1: حد کے خواص
اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ اور $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ہوں، جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = kL$ (k مستقل عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $M \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ہو گا بشرطیکہ $L^{\frac{m}{n}}$ حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا مجموعہ ہو گا۔
2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا فرق ہو گا۔
3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا حاصل ضرب ہو گا۔
4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہو گا۔
5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا حاصل تقسیم ہو گا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔
6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہو گا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ 1 میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 2.10: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$ تلاش کریں۔

حل: مثال 2.8 کے نتائج $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ اور $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 2.1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow c} x^2 = (\lim_{x \rightarrow c} x)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c \cdot c = c^2 \quad \text{ا. حاصل ضرب یا طاقت}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5 = c^2 + 5 \quad \text{ب. مجموعہ اور (i)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} 4x^2 = 4 \lim_{x \rightarrow c} x^2 = 4c^2 \quad \text{ج. ضرب مستقل اور (i)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3 = 4c^2 - 3 \quad \text{د. فرق اور (ج)}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} x^3 = (\lim_{x \rightarrow c} x^2)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c^2 \cdot c = c^3 \quad \text{ه. حاصل ضرب اور (i) یا طاقت}$$

مجموعہ، (ج) اور (د) $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x - 3) = \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = c^3 + 4c^2 - 3$.

حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)} = \frac{c^3 + 4c^2 - 3}{c^2 + 5}$.

□

مثال 2.11: $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$ تلاش کریں۔
حل:

مثال 2.10: $n = \frac{1}{2}$ اور n کے ساتھ قاعدہ طاقت $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{4(-2)^2 - 3} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$

□

مسئلہ 2.1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x \rightarrow c$ کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں۔ ناطق تفاعل کا حد $x \rightarrow c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2.2: کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا
اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

مسئلہ 2.3: غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا

فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c) \neq 0$ ہے تب درج ذیل ہوگا۔

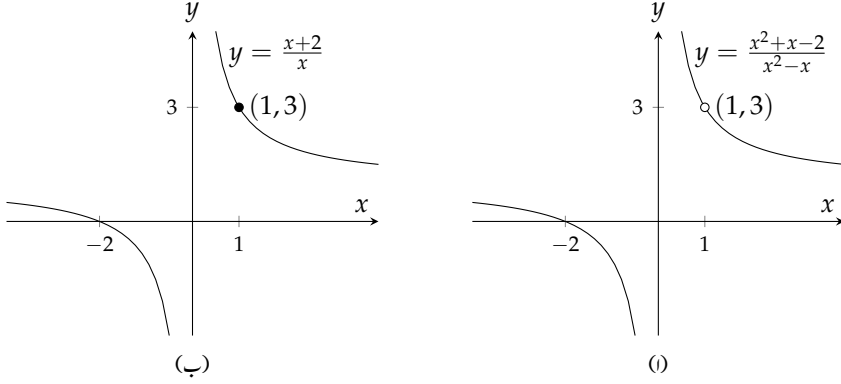
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 2.12:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

□

یہ ایک ہی قدم میں مثال 2.10 کا حل ہے۔



شکل 2.11: ماسوائے نقطہ $(1, 3)$ کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے استقاط

مسئلہ 2.3: ناطق تقاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تقاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔ صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹنے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پر کرنے سے حد حاصل کیا جاسکتا ہے۔ درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x = 1$ پر صفر ہیں۔ یوں $(x - 1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جاسکتا ہے۔

مثال 2.13: یکساں جزو کی منسوخی

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} \text{ تلاش کریں۔}$$

حل: ہم $x = 1$ پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہو گا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے۔ البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}$$

اب $x \neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$

شکل 2.11 میں $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$ اور $y = \frac{x + 2}{x}$ کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔ یہ ترسیم صرف نقطہ $(1, 3)$ پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ البتہ اس نقطہ پر دونوں تقاعل کا حد ایک جیسا ہے۔ □

مثال 2.14: ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \text{ تلاش کریں۔}$$

حل: ہم $h = 0$ پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نم اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔ البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔ نسب نما میں جذروں کے سچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے

جس کو ہم کاٹتے ہیں

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

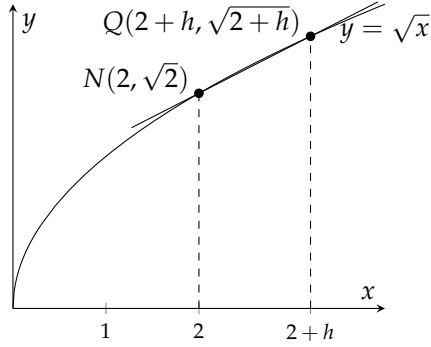
نسب نما اب $h = 0$ پر صفر نہیں ہے

دھیان رہے کہ تفاعل $\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$ درحقیقت تفاعل $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2, \sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h, \sqrt{2+h})$ کے سچ سیکٹ کی ڈھلوان ہے اور $h \rightarrow 0$ کرنے سے مراد $Q \rightarrow N$ ہے۔ نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ ہم نے دیکھا کہ اس سیکٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □

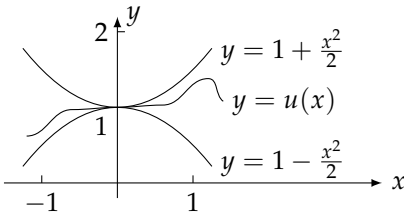
مسئلہ سچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔ اس کو مسئلہ بیچ⁶ اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل f سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل g اور تفاعل h کی قیمتوں کے سچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تفاعل کے سچ پھنسنے ہوئے تفاعل کی قیمت L ہوگی (شکل 2.13)۔ اس کا ثبوت ضمیمہ 1 میں دیا گیا ہے۔

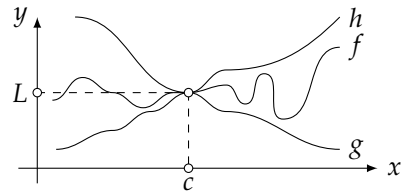
⁵ conjugate expression
⁶ sandwich theorem



شکل 2.12: $Q \rightarrow N$ کرنے سے سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے



شکل 2.14: شکل برائے مثال 2.15



شکل 2.13: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔

مسئلہ 2.4: مسئلہ بیچ

فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو، میں (مکمل ہے کہ) مساوی $x = c$ پر تمام x کے لئے

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ہے۔ مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

ہے۔ تب $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ہو گا۔

مثال 2.15: اگر تمام $x \neq 0$ کے لئے $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ تلاش کریں۔

حل: چونکہ

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2}) = 1$$

□

ہیں لہذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل 2.14)۔

مثال 2.16: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ ہو گا۔

حل: چونکہ $|f(x)| \leq f(x) \leq -|f(x)|$ ہے، اور $-|f(x)|$ اور $|f(x)|$ کا حد 0 ہے لہذا مسئلہ بیچ کے تحت $f(x)$ کا حد بھی 0 ہو گا۔

□

سوالات 2.2

حد کا حساب

سوال 1 تا سوال 16 میں حد تلاش کریں۔

سوال 1: $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$

جواب: -9

سوال 2: $\lim_{x \rightarrow 12} (10 - 3x)$

سوال 3: $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$
جواب: 4

سوال 4: $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

سوال 5: $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$
جواب: -8

سوال 6: $\lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}} 3s(2s - 1)$

سوال 7: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+6}$
جواب: $\frac{5}{8}$

سوال 8: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4}{x-7}$

سوال 9: $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5-y}$
جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 10: $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 11: $\lim_{x \rightarrow -1} 3(2x - 1)^2$
جواب: 27

سوال 12: $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^{1984}$

سوال 13: $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{\frac{4}{3}}$
جواب: 16

سوال 14: $\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{\frac{1}{3}}$

سوال 15: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$
جواب: $\frac{3}{2}$

2.2. حد تلاش کرنے کے قواعد

سوال 16: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال 17 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 17: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$
جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 18: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال 19: $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$
جواب: -7

سوال 20: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال 21: $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 22: $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال 23: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 24: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال 25: $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$
جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 26: $\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال 27: $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 28: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$

سوال 29: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ جواب: 4

سوال 30: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

قواعد حد کا استعمال

سوال 31: فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)} \\ &= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1 + 7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

جواب: (ا) قاعدہ حاصل تقسیم (ب) فرق اور قاعدہ طاقت (پ) مجموعہ اور ضرب مستقل قاعدہ

سوال 32: فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 5$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (p(x)(4 - r(x)))} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 5h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} (4 - r(x)))} && \text{(ب)} \\ &= \frac{\sqrt{5 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} 4 - \lim_{x \rightarrow 1} r(x))} && \text{(پ)} \\ &= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4 - 2)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

سوال 33: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$ اور $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + 3g(x)) \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} 2f(x)g(x) \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)} \quad \text{د.}$$

$$\text{جواب: (ا) } -10 \quad \text{(ب) } -20 \quad \text{(ج) } -1 \quad \text{(د) } \frac{5}{7}$$

سوال 34: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ اور $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^2 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x f(x) \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x)-1} \quad \text{د.}$$

سوال 35: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$ اور $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow b} (f(x) + g(x)) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow b} 4g(x) \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{د.}$$

$$\text{جواب: (ا) } 4 \quad \text{(ب) } -21 \quad \text{(ج) } -12 \quad \text{(د) } -\frac{7}{3}$$

سوال 36: $\lim_{x \rightarrow -2} p(x) = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} r(x) = 0$ اور $\lim_{x \rightarrow -2} s(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2} (p(x) + r(x) + s(x)) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4p(x) + 5r(x)}{s(x)} \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x) \quad \text{ب.}$$

اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لمباتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنیاد احصاء میں عموماً درپیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سوال 37 تا سوال 42 میں اس حد کو دیے گئے x پر تقابل $f(x)$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 37: $f(x) = x^2$, $x = 1$
جواب: 2

سوال 38: $f(x) = x^2$, $x = -2$

سوال 39: $f(x) = 3x - 4$, $x = 2$
جواب: 3

سوال 40: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = -2$

سوال 41: $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 7$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

سوال 42: $f(x) = \sqrt{3x + 1}$, $x = 0$

مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 43: اگر $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے $\sqrt{5 - x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - 2x}$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sqrt{5}$

سوال 44: اگر تمام x کے لئے $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال 45: (الف) یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$$

(ب) $-2 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ ، $y = \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$ اور $y = 1$ ترسیم کریں۔ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔
جواب: (ا) حد 1 ہے۔

سوال 46: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لئے مطمئن ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(ب) $-2 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$ ، $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ اور $y = \frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ ان ترسیم کا رویہ $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے کیسا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر $[-1, 1]$ میں x کے لئے $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ اور $x < -1$ اور $x > 1$ کے لئے $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 48: فرض کریں کہ تمام $x \neq 2$ کے لئے $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -5$ ہے۔ کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا $f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہات پیش کریں۔

سوال 49: اگر $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: 7

سوال 50: اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال 51: (الف) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
(ب) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$ ہو تب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: (ا) 5 (ب) 5

سوال 52: اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گے؟

سوال 53: (الف) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 54: (الف) $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ تلاش کریں۔
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبراً سے حاصل کریں۔

2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہوگی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دارومدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مسٹری انجن کی سلنڈر کا قطر $50 \mu\text{m}$ درستگی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

مثال 2.17: خطی تفاعل قابو کرنا
تفاعل $y = 2x - 1$ کے خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟
حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لئے $|y - 7| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $|y - 7|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $|2x - 8| < 2$ کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

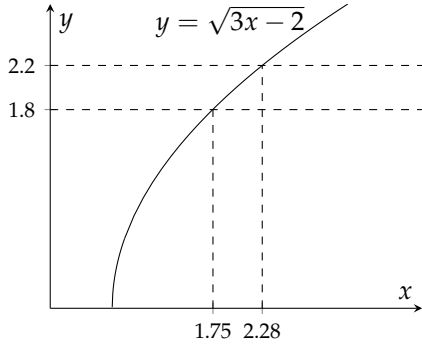
$$|2x - 8| < 2$$

$$-2 < 2x - 8 < 2$$

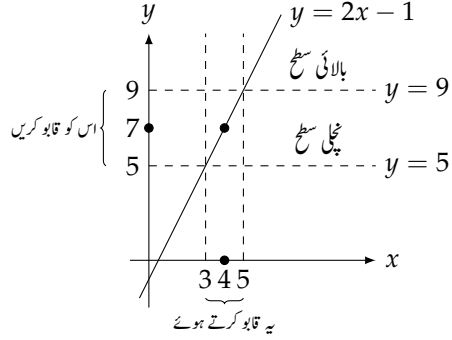
$$6 < 2x < 10$$

$$3 < x < 5$$

$$-1 < x - 4 < 1$$



شکل 2.16: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔



شکل 2.15: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 2.17)

x کو $x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □

ٹیکنالوجی

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جاسکتے ہیں۔ درکار تقابل کی ترسیم پر بالائی اور پچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی لکیروں سے ظاہر کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفہ میں تقابل کا رویہ دیکھا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ کے ترسیم پر y محور کے مطلوبہ وقفہ (1.8, 2.2) پر غور کریں۔ یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل 2.16)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ (1.98, 2.02) اور (1.9998, 2.0002) پر بھی تقابل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2.18: 6 cm اندرونی قطر کے ایک لٹریٹ پیالے پر 1 mm وقفہ پر افقی لکیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔
پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ ایک لٹر (1000 cm^3) پانی ناپنے کی خاطر h کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل 1% سے کم ہونا چاہیے۔
حل: ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \leq 10$$

یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہوگی۔

$$\begin{aligned} |36\pi h - 1000| &\leq 10 \\ -10 &\leq 36\pi h - 1000 \leq 10 \\ 990 &\leq 36\pi h \leq 1010 \\ \frac{990}{36\pi} &\leq h \leq \frac{1010}{36\pi} \\ 8.8 &\leq h \leq 8.9 \end{aligned}$$

یوں 1% درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1 \text{ cm}$ یعنی 1 mm ہے۔ پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر اتنی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مانع مانچنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ □

حد کی باضابطہ تعریف

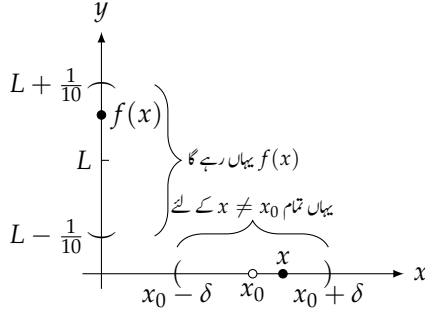
مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \rightarrow x_0$ کرنے سے $f(x)$ کا حد L حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہو گی (شکل 2.17)۔ البتہ اتنا جاننا کافی نہیں ہے چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھرائی ہو۔

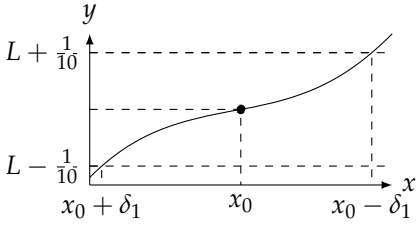
ہمیں سے کہا جاسکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100,000}$ ہے۔ ہر مرتبہ ہم x_0 کے ارد گرد ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جاسکتا ہے۔ البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جاسکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھر تھرائٹ کا شکار ہوتے ہوئے L تک نہ پہنچتی ہو۔

شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔ شکی انسان قابل قبول چھوٹ ϵ چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔

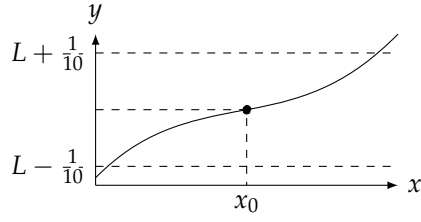
اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لئے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔



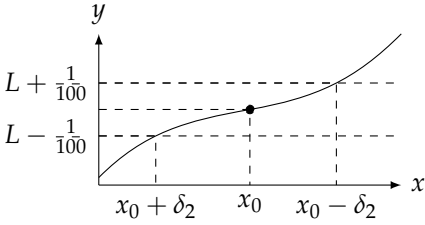
شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم



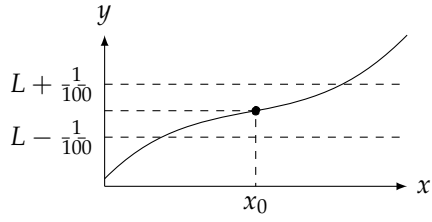
(ب) پہلے جواب: $|x - x_0| < \delta_1$ رکھیں



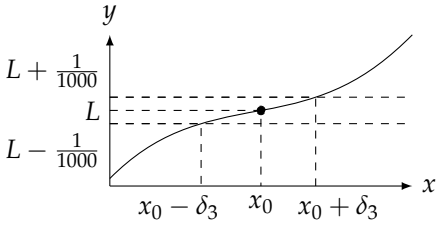
(i) پہلا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں



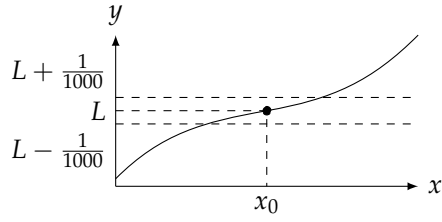
(د) دوسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_2$ رکھیں



(ج) دوسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں

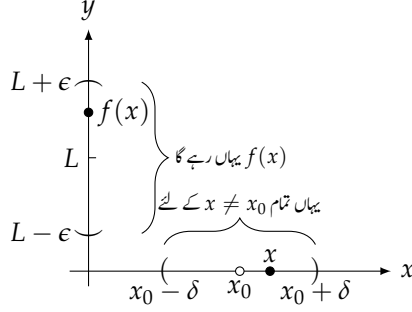


(گ) تیسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_3$ رکھیں



(ه) تیسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں

شکل 2.18: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ



شکل 2.19: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی قریب ہوگی۔

تعریف: حد کی باضابطہ تعریف

فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں $f(x)$ معین ہے جبکہ نقطہ x_0 پر عین ممکن ہے کہ $f(x)$ معین نہ ہو۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ آپ خراہ کی مشین پر قطر L کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔ اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج نہیں دیتی ہے لہذا آپ کو $f(x)$ قطر یعنی $L - \epsilon$ اور $L + \epsilon$ کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہوگا۔ دھرا کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لئے x کو قابو میں رکھنا ضروری ہوگا لہذا x کو $x - \delta$ اور $x + \delta$ کے بیچ رکھنا ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ ϵ کم کی جائے، آپ کو ویسے ویسے δ کو درست کرنا ہوگا۔

تعریف کو پرکھنے کی مثالیں

حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی ہے البتہ اس سے حد کی درستگی کی تصدیق کی جاسکتی ہے۔ درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔ حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 2.19: دکھائیں کہ $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ ہے۔

حل: حد کی تعریف میں $x_0 = 1$ ، $f(x) = 5x - 3$ اور $L = 2$ لیں۔ کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہمیں موزوں $\delta > 0$ تلاش کرنا ہو گا تاکہ اگر $x \neq 1$ ہو اور $x_0 = 1$ سے x کا فاصلہ δ سے کم ہو یعنی اگر

$$0 < |x - a| < \delta$$

تو $L = 2$ سے $f(x)$ کا فاصلہ ϵ سے کم ہو گا یعنی:

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

ہم ϵ کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے δ تلاش کرتے ہیں۔

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$

$$5|x - 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$$

یوں ہم $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ لے سکتے ہیں (شکل 2.20)۔ اب اگر $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ اور $0 < |x - 1| < \delta$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

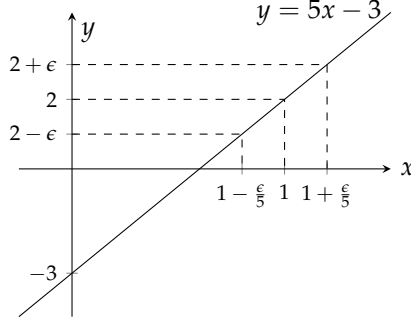
اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ ہے۔

$\delta = \frac{\epsilon}{5}$ وہ واحد قیمت نہیں ہے جس کے لئے $0 < |x - 1| < \delta$ سے مراد $|5x - 5| < \epsilon$ لیا جاسکتا ہے۔ δ کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لئے بھی $0 < |x - 1| < \delta$ سے مراد $|5x - 5| < \epsilon$ لیا جاسکتا ہے۔ حد کی تعریف بہترین δ کی بات نہیں کرتی ہے بلکہ δ کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو کی بات کرتی ہے۔ □

مثال 2.20: دو اہم حد

تصدیق کریں: (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ (ب) $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ جہاں k مستقل ہے۔
حل: (i) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا $\delta > 0$ تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ سے مراد } |x - x_0| < \epsilon \text{ ہو۔}$$



شکل 2.20: مثال $f(x) = 5x - 3$ کے لئے $0 < |x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$ کی صورت میں $|f(x) - 2| < \epsilon$ ہوگا (مثال 2.19)۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ δ کی قیمت ϵ کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل 2.21)۔ یوں ثابت ہو کہ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ہے۔
(ب) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا δ تلاش کرنا ہے کہ ہر x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ سے مراد } |k - k| < \epsilon \text{ ہو۔}$$

چونکہ $k - k = 0$ ہے لہذا کسی بھی مثبت عدد کو δ لیا جاسکتا ہے (شکل 2.21)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ ہے۔
□

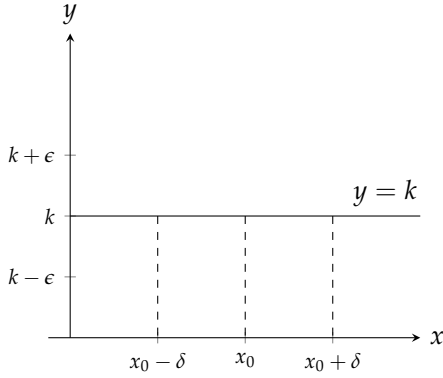
دیے گئے ϵ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

مثال 2.19 اور مثال 2.20 میں x_0 کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر $|f(x) - L|$ کی قیمت ϵ سے کم تھی x_0 کے لحاظ سے تشابہی تھا۔ یوں ہم δ کو وقفہ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشابہ نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا ہے، ہم x_0 سے وقفے کے قریبی سر تک فاصلے کو δ لے سکتے ہیں۔

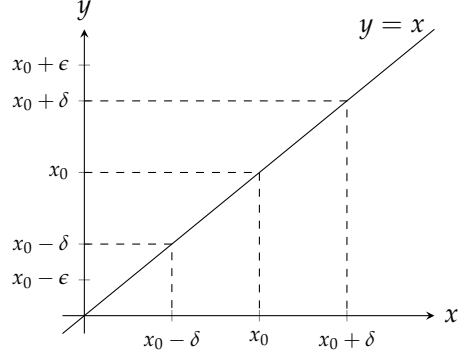
مثال 2.21: حد $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = 2$ کے لئے $\epsilon = 1$ کے لحاظ سے $\delta > 0$ تلاش کریں۔ یعنی ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $0 < |x - 5| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت \implies کو پڑھیں "سے مراد")۔

$$0 < |x - 5| < \delta \implies |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$

حل: اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں عدم مساوات $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ (a, b) تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد



(ب) تقابل $f(x) = k$ کے لئے کسی بھی مثبت δ کی صورت میں $|f(x) - k| < \epsilon$ ہو گا۔



(1) $0 < |x - x_0| < \delta$ کی صورت میں $f(x) = x$ کے لئے جب بھی $\delta \leq \epsilon$ ہو تب $|f(x) - x_0| < \epsilon$ ہو گا۔

شکل 2.21: اشکال برائے مثال 2.20

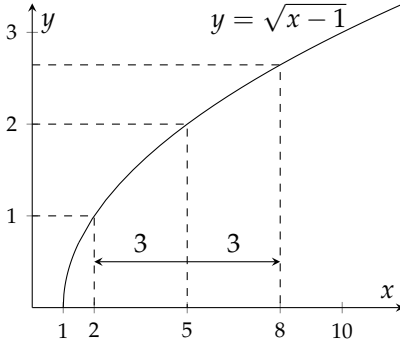
$\delta > 0$ حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کا وسط نقطہ x_0 ہو اور یہ وقفہ (a, b) کے اندر پایا جاتا ہو۔ پہلا قدم: عدم مساوات $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں کہ اس وقفے پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

$$\begin{aligned} |\sqrt{x-1}-2| &< 1 \\ -1 &< \sqrt{x-1}-2 < 1 \\ 1 &< \sqrt{x-1} < 3 \\ 1 &< x-1 < 9 \\ 2 &< x < 10 \end{aligned}$$

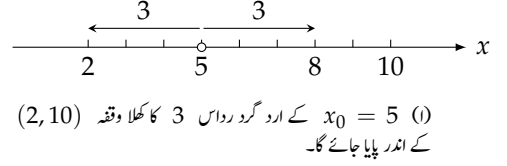
عدم مساوات کھلے وقفہ $(2, 10)$ پر تمام نقطوں کے لئے مطمئن ہوتی ہے لہذا یہ اس وقفے پر تمام $x \neq 5$ کے لئے بھی مطمئن ہو گی۔ دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کو وقفہ $(2, 10)$ میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ $(2, 10)$ کے قریبی سر کا فاصلہ 3 ہے۔ اس طرح $\delta = 3$ یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے $0 < |x - 5| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x وقفہ $(2, 10)$ میں پائے جائیں گے جس سے $|\sqrt{x-1}-2| < 1$ خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 5| < 3 \implies |\sqrt{x-1}-2| < 1$$

□



(ب) تقابل اور وقفہ



(i) $x_0 = 5$ کے ارد گرد رداس 3 کا کھلا وقفہ $(2, 10)$ کے اندر پایا جائے گا۔

شکل 2.22: اشکال برائے مثال 2.21

دیے گئے f ، L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

ایسا $\delta > 0$ کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

کو دو قدموں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

پہلا قدم: عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ (a, b) حاصل کریں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو کھلا وقفہ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، جس کا وسط x_0 ہے، کو (a, b) کے اندر رکھے۔ اس δ وقفہ میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوگی۔

مثال 2.22: ثابت کریں کہ درج ذیل تقابل کے لئے $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

حل: ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ $0 < |x - 2| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

پہلا قدم: عدم مساوات $|f(x) - 4| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 2$ کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اب $x \neq x_0 = 2$ کے لئے $f(x) = x^2$ ہے لہذا عدم مساوات کی صورت $|x^2 - 4| < \epsilon$ ہوگی۔

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \epsilon \\ -\epsilon &< x^2 - 4 < \epsilon \\ 4 - \epsilon &< x^2 < 4 + \epsilon \\ \sqrt{4 - \epsilon} &< |x| < \sqrt{4 + \epsilon} \\ \sqrt{4 - \epsilon} &< x < \sqrt{4 + \epsilon} \end{aligned} \quad \text{فرض کریں کہ } \epsilon < 4$$

کھلا وقفہ $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ میں تمام $x \neq 2$ کے لئے عدم مساوات $|f(x) - 4| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ $(2 - \delta, 2 + \delta)$ کو $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ کے اندر رکھتا ہو۔ نقطہ $x_0 = 2$ سے کھلا وقفہ $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ کے قریبی سر کا فاصلہ δ ہوگا۔ یوں $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ اور $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$ میں سے کم قیمت δ کے برابر ہوگی۔ δ کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لئے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

□

درج بالا مثال میں ہم نے $\epsilon < 4$ کیوں فرض کیا؟ اس لئے کہ تمام x کے لئے ایسا δ کہ $0 < |x - 2| < \delta$ سے مراد $|f(x) - 4| < \epsilon < 4$ ہو میں ہم نے δ کی وہ قیمت دریافت کی جو ϵ کے کسی بھی بڑی قیمت کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسئلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے ہیں۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسئلوں (بالخصوص حصہ 2.2 کے مسئلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کیے جاتے ہیں۔ انہیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال 2.23: قاعدہ مجموعہ

اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ اور $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

حل: فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم ایسا مثبت عدد δ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ $0 < |x - c| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned} \quad \text{تکوئی عدم مساوات}$$

چونکہ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ موجود ہے لہذا ایسا عدد $\delta_1 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ موجود ہے لہذا ایسا عدد $\delta_2 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ δ_1 اور δ_2 میں سے چھوٹی قیمت δ کے برابر ہے۔ اب اگر $0 < |x - c| < \delta$ ہو تب

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x - c| < \delta_1$$

ہوں گے، اور $|x - c| < \delta_2$ اور $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔ اس طرح

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□ ہو گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$ ہے۔

سوالات 2.3

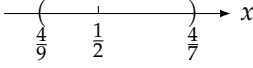
نقطہ x_0 پر وقفے کا وسط لانا

سوال 1 تا سوال 6 میں x محور پر وقفہ (a, b) ترتیب کریں جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے۔ اس کے بعد ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $|x - x_0| < \delta$ سے مراد $a < x < b$ ہو۔

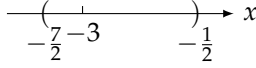
سوال 1: $a = 1, b = 7, x_0 = 5$

جواب: $\delta = 2$ شکل 2.23

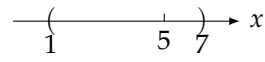
سوال 2: $a = 1, b = 7, x_0 = 2$



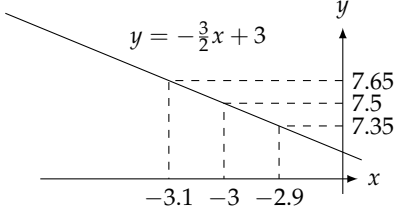
شکل 2.23



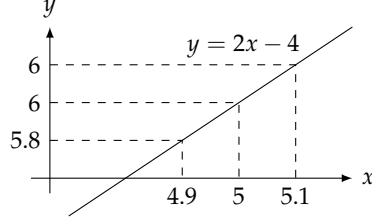
شکل 2.24



شکل 2.25



شکل 2.26: ترسیم برائے سوال 8



شکل 2.27: ترسیم برائے سوال 7

سوال 3: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -3$
جواب: $\delta = \frac{1}{2}$ شکل 2.24

سوال 4: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 5: $a = \frac{4}{9}, b = \frac{4}{7}, x_0 = \frac{1}{2}$
جواب: $\delta = \frac{1}{18}$ شکل 2.25

سوال 6: $a = 2.7591, b = 3.2391, x_0 = 3$

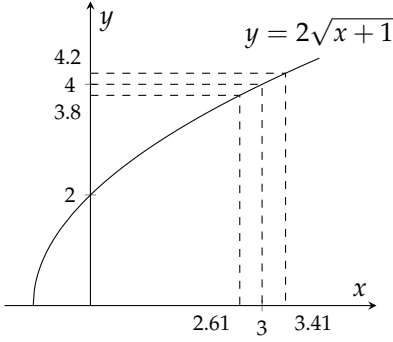
δ کا حصول بذریعہ ترسیم

سوال 7 تا سوال 14 میں ترسیم سے ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

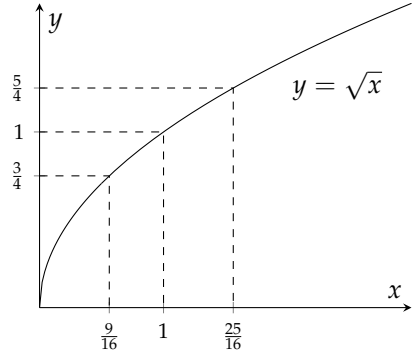
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies 0 < |f(x) - L| < \epsilon$$

سوال 7: $f(x) = 2x - 4, x_0 = 5, L = 6, \epsilon = 0.2$
جواب: $\delta = 0.1$ شکل 2.26

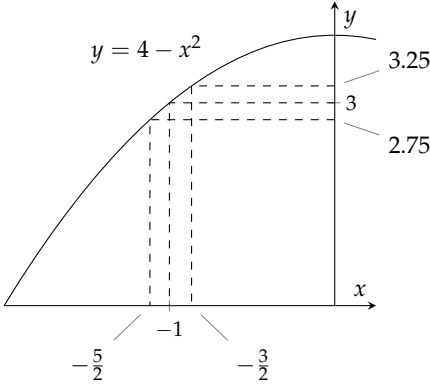
سوال 8: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3, x_0 = -3, L = 7.5, \epsilon = 0.15$ شکل 2.27



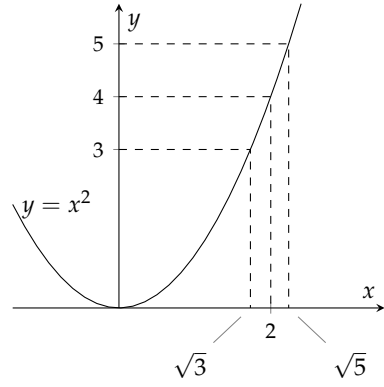
شکل 2.29: ترسیم برائے سوال 10



شکل 2.28: ترسیم برائے سوال 9



شکل 2.31: ترسیم برائے سوال 12



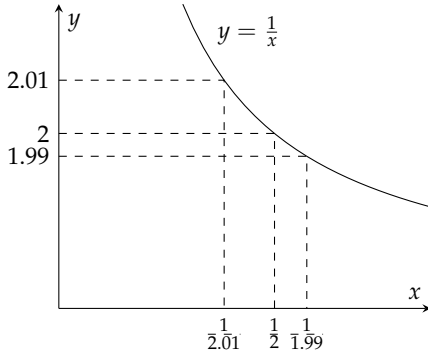
شکل 2.30: ترسیم برائے سوال 11

سوال 9: $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $L = 1$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ شکل 2.28
جواب: $\delta = \frac{7}{16}$

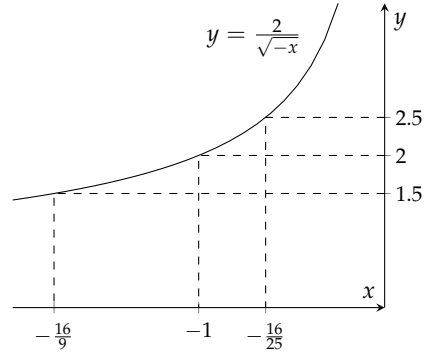
سوال 10: $f(x) = 2\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$, $L = 4$, $\epsilon = 0.2$ شکل 2.29

سوال 11: $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $L = 4$, $\epsilon = 1$ شکل 2.30
جواب: $\delta = \sqrt{5} - 2$

سوال 12: $f(x) = 4 - x^2$, $x_0 = -1$, $L = 3$, $\epsilon = 0.25$ شکل 2.31



شکل 2.33: ترسیم برائے سوال 14



شکل 2.32: ترسیم برائے سوال 13

سوال 13: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}$, $x_0 = -1$, $L = 2$, $\epsilon = 0.5$ شکل 2.32
جواب: $\delta = 0.36$

سوال 14: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $L = 2$, $\epsilon = 0.01$ شکل 2.33

δ کا الجبرائی حصول

سوال 15 تا سوال 30 میں $f(x)$ اور اعداد L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ دیے گئے ہیں۔ ہر سوال میں x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کریں جس پر عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد $\delta > 0$ کی ایسی قیمت تلاش کریں کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے ہر x کے لئے عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

سوال 15: $f(x) = x + 1$, $L = 5$, $x_0 = 4$, $\epsilon = 0.01$
جواب: $\delta = 0.01$, $(3.99, 4.01)$

سوال 16: $f(x) = 2x - 2$, $L = -6$, $x_0 = -2$, $\epsilon = 0.02$

سوال 17: $f(x) = \sqrt{x+1}$, $L = 1$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0.1$
جواب: $\delta = 0.19$, $(-0.19, 0.21)$

سوال 18: $f(x) = \sqrt{x}$, $L = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $\epsilon = 0.1$

سوال 19: $f(x) = \sqrt{19-x}$, $L = 3$, $x_0 = 10$, $\epsilon = 1$
جواب: $\delta = 5$, $(3, 15)$

سوال 20: $f(x) = \sqrt{x-7}$, $L = 4$, $x_0 = 23$, $\epsilon = 1$

سوال 21: $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, x_0 = 4, \epsilon = 0.05$
 جواب: $\delta = \frac{2}{3}, \left(\frac{10}{3}, 5\right)$

سوال 22: $f(x) = x^2, L = 3, x_0 = \sqrt{3}, \epsilon = 0.1$

سوال 23: $f(x) = x^2, L = 4, x_0 = -2, \epsilon = 0.5$
 جواب: $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12, (-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$

سوال 24: $f(x) = \frac{1}{x}, L = -1, x_0 = -1, \epsilon = 0.1$

سوال 25: $f(x) = x^2 - 5, L = 11, x_0 = 4, \epsilon = 1$
 جواب: $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12, (\sqrt{15}, \sqrt{17})$

سوال 26: $f(x) = \frac{120}{x}, L = 5, x_0 = 24, \epsilon = 1$

سوال 27: $f(x) = mx, m > 0, L = 2m, x_0 = 2, \epsilon = 0.03$
 جواب: $\delta = \frac{0.03}{m}, \left(2 - \frac{0.03}{m}, 2 + \frac{0.03}{m}\right)$

سوال 28: $f(x) = mx, m > 0, L = 3m, x_0 = 3, \epsilon = c > 0$

سوال 29: $f(x) = mx + b, m > 0, L = \frac{m}{2} + b, x_0 = \frac{1}{2}, \epsilon = c > 0$
 جواب: $\delta = \frac{c}{m}, \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{1}{2} + \frac{c}{m}\right)$

سوال 30: $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, x_0 = 1, \epsilon = 0.05$

با ضابطہ حد پر مزید سوالات

سوال 31 تا 36 میں تفاعل $f(x)$ ، نقطہ x_0 اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد ایسا عدد $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

سوال 31: $f(x) = 3 - 2x, x_0 = 3, \epsilon = 0.02$
 جواب: $\delta = 0.01, L = -3$

سوال 32: $f(x) = -3x - 2, x_0 = -1, \epsilon = 0.03$

سوال 33: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x_0 = 2, \epsilon = 0.05$
 جواب: $\delta = 0.05, L = 4$

$$f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+5}, x_0 = -5, \epsilon = 0.05 \quad \text{سوال 34}$$

$$f(x) = \sqrt{1-5x}, x_0 = -3, \epsilon = 0.5 \quad \text{سوال 35}$$

جواب: $\delta = 0.75, L = 4$

$$f(x) = \frac{4}{x}, x_0 = 2, \epsilon = 0.4 \quad \text{سوال 36}$$

سوال 37 تا سوال 50 میں دیا گیا فقرہ حد ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} (9 - x) = 5 \quad \text{سوال 37}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2 \quad \text{سوال 38}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x - 5} = 2 \quad \text{سوال 39}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 - x} = 2 \quad \text{سوال 40}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{کے لئے} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{سوال 41}$$

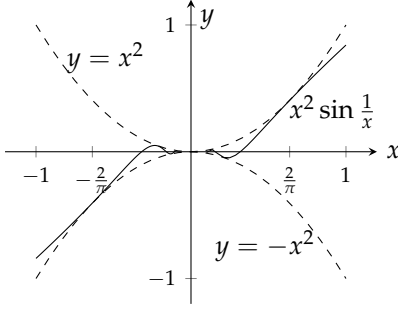
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4 \quad \text{کے لئے} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases} \quad \text{سوال 42}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \quad \text{سوال 43}$$

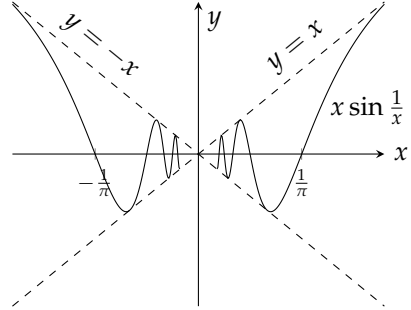
$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \quad \text{سوال 44}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6 \quad \text{سوال 45}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{سوال 46}$$



شکل 2.35: ترسیم برائے سوال 50



شکل 2.34: ترسیم برائے سوال 49

سوال 47: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ کے لئے $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

سوال 48: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ کے لئے $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

سوال 49: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ شکل 2.34

سوال 50: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ شکل 2.35

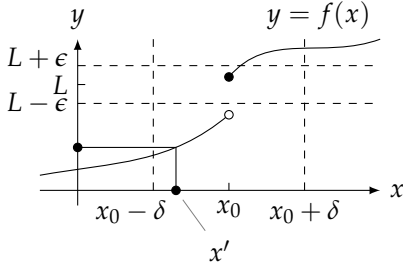
نظریہ اور مثالیں

سوال 51: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

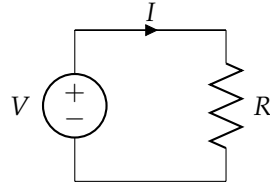
سوال 52: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = k$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 53: یہ کہنا کہ "جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت L کے قریب ہوتی جاتی ہے" سے یہ اخذ نہیں کیا جاسکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال 54: یہ کہنا کہ "کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $|f(x) - L| < \epsilon$ " سے یہ مراد نہیں لیا جاسکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔



شکل 2.37



شکل 2.36: قانون اوہم (سوال 56)

سوال 55: انجن کی سلنڈر کی رگڑائی
انجن سلنڈر کا رقبہ عمودی تراش 58 cm^2 حاصل کرنے کے لئے رگڑائی کرنے سے پہلے آپ جاننا چاہیں گے کہ سلنڈر کے رقبہ میں خلل کو $\pm 0.06 \text{ cm}^2$ درستی کے اندر رکھنے کے لئے درکار 8.593 cm قطر میں چھوٹ کتنی ہے۔ یہ جاننے کی خاطر آپ $A = \frac{\pi d^2}{4}$ لکھ کر $|A - 58| \leq 0.06$ کو حل کرتے ہوئے قطر d تلاش کرتے ہو۔ قطر کا کیا وقفہ حاصل ہو گا؟
جواب: $[8.589, 8.598]$

سوال 56: اوہم کا قانون کہتا ہے کہ $V = IR$ ہو گا جہاں V برقی دباؤ، I برقی رو اور R برقی مزاحمت ہیں جن کی اکائیاں بالترتیب ولٹ V ، ایمپیر A اور اوہم Ω ہیں (شکل 2.36)۔ آپ کے ادارے کو کہا گیا ہے کہ وہ برقی مزاحمت فراہم کرے۔ برقی دباؤ 220 V ہوگی جبکہ برقی رو $10 \text{ mA} \pm 0.1 \text{ mA}$ ہونی ضروری ہے۔ مطلوبہ برقی رو 10 mA میں چھوٹ 0.1 mA ہے۔ درکار برقی مزاحمت کا وقفہ کیا ہو گا؟

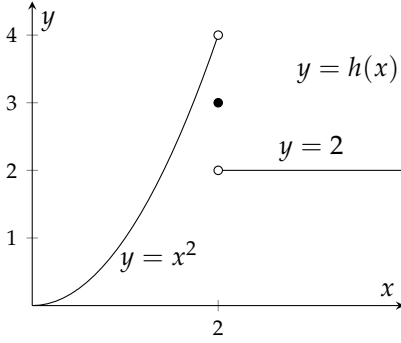
کب $x \rightarrow x_0$ کرنے سے عدد L متفاعل $f(x)$ کا حد نہیں ہوگا؟
یہ ثابت کرنے کی خاطر آپ کو ایسا $\epsilon > 0$ تلاش کرنا ہو گا جس کے لئے ایسا کوئی $\delta > 0$ نہیں پایا جاتا ہو کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر ہم اس ϵ کے لئے ثابت کریں گے کہ ہر $\delta > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ اور $|f(x) - L| \geq \epsilon$ ہوں (مثلاً شکل 2.37 میں نقطہ $x = x'$)۔

سوال 57: فرض کریں $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ہے جس کو شکل 2.38 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) $\epsilon = \frac{1}{2}$

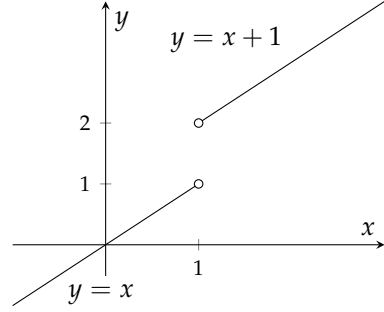
لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدم مساوات $0 < |x - 1| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے کوئی بھی $\delta > 0$ عدم مساوات $|f(x) - 2| < \frac{1}{2}$ کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ یعنی ہر δ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $0 < |x - 1| < \delta$ اور $|f(x) - 2| \geq \frac{1}{2}$ ہوتے ہیں۔ یوں $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 2$ ہو گا۔

(ب) دکھائیں $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1$

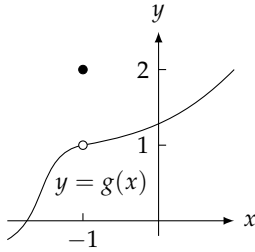
(پ) دکھائیں $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1.5$



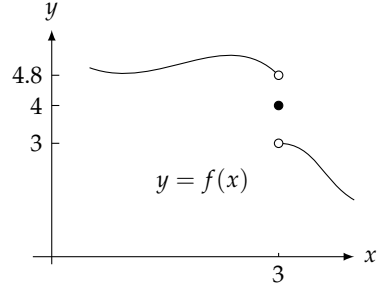
شکل 2.39: تقابل کا ترسیم برائے سوال 58



شکل 2.38: تقابل کا ترسیم برائے سوال 57



شکل 2.41: ترسیم برائے سوال 60



شکل 2.40: ترسیم برائے سوال 59

سوال 58: تقابل (شکل 2.39) کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 3$

(پ) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 2$

سوال 59: تقابل کی ترسیم شکل 2.40 اس کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 4.2$

(پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 3$

سوال 60: دکھائیں کہ شکل 2.41 کی ترسیم کے لئے $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \neq 2$ ہے۔ کیا ایسا نظر آتا ہے جیسے حد $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ موجود ہے؟ اگر حد موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر حد نہیں پایا جاتا تو اس کی وجہ پیش کریں۔

حد بذریعہ ترسیم - کمپیوٹر کا استعمال

سوال 61 تا 66 میں آپ نے ترسیم کے ذریعہ δ تلاش کرنا ہو گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔
(الف) تفاعل $y = f(x)$ کو نقطہ x_0 کے قریب ترسیم کریں۔

(ب) ترسیم کو دیکھ کر حد کا اندازہ لگائیں۔ حد کو حساب کے ذریعہ تلاش کرتے ہوئے اپنے اندازے کی تصدیق کریں۔

(پ) $\epsilon = 0.2$ لیتے ہوئے تحدیدی خطوط $y_1 = L - \epsilon$ اور $y_2 = L + \epsilon$ کھینچیں۔ ساتھ ہی x_0 کے قریب تفاعل f ترسیم کریں۔

(ت) درج بالا جزو (پ) سے ایسے $\delta > 0$ کا اندازہ لگائیں کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتے ہوں۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

اپنا اندازہ پرکھنے کی خاطر f ، y_1 اور y_2 کو وقفہ $0 < |x - x_0| < \delta$ پر ترسیم کریں۔ اگر تفاعل کی کوئی قیمت وقفہ $[L - \epsilon, L + \epsilon]$ کے باہر پائی جاتی ہو تب منتخب کردہ δ بہت بڑا تھا لہذا δ کی چھوٹی قیمت لیتے ہوئے دوبارہ کوشش کریں۔
(ث) جزو (پ) اور (ت) کو $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ کے لئے دہرائیں۔

سوال 61: $f(x) = \frac{x^4 - 81}{x - 3}, x_0 = 3$

سوال 62: $f(x) = \frac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, x_0 = 0$

سوال 63: $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}, x_0 = 0$

سوال 64: $f(x) = \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}, x_0 = 0$

سوال 65: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, x_0 = 1$

سوال 66: $f(x) = \frac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, x_0 = 1$

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. ایک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب بائیں ہاتھ حد⁷ حاصل ہو گا۔ اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب دائیں ہاتھ حد⁸ حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

ایک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔ اسی لئے عام حد کو بعض اوقات دو طرفہ حد⁹ بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر ایک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔ اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

تعریف: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف

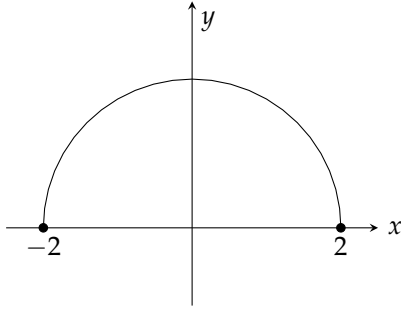
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) ، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

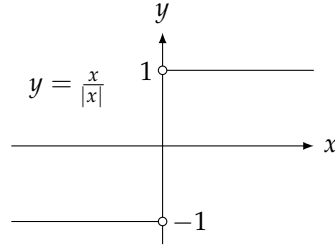
فرض کریں کہ وقفہ (c, a) ، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

left-handed limit⁷
right-handed limit⁸
two-sided limit⁹



شکل 2.43: تقابل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔

شکل 2.42 میں تقابل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$$

$x \rightarrow a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x \rightarrow a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تقابل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا دائرہ کار $[-2, 2]$ ہے۔ تقابل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

نقطہ $x = -2$ پر تقابل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = 2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x = -2$ اور $x = 2$ پر تقابل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ □

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تقابل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تقابل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تقابل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ پیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: ایک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$ پر: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔
($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$ پر: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔ (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$ پر: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ
 $f(2) = 2$ ہے۔

$x = 3$ پر: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

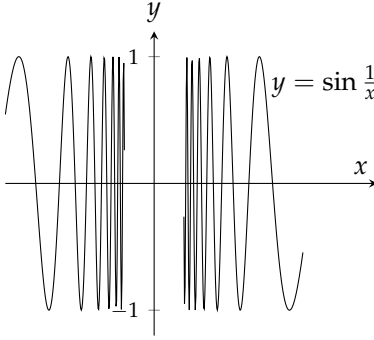
$x = 4$ پر: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔ (نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ $[0, 4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ \square

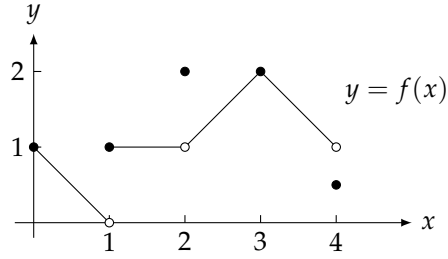
اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا ایک طرفہ حد موجود تھا۔ درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نہ بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin \frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔

حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا پر $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ ایسا کوئی کتنا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔ یوں $x = 0$ پر $\sin \frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نہ کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ \square



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

لا متناہی حد

آئیں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے $x \rightarrow 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔ یوں $x \rightarrow 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

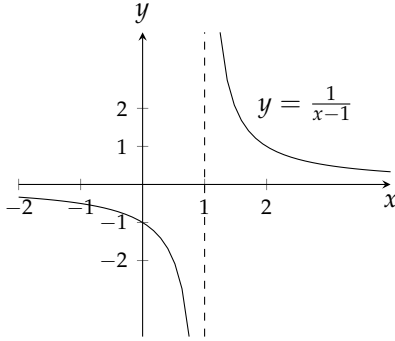
یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

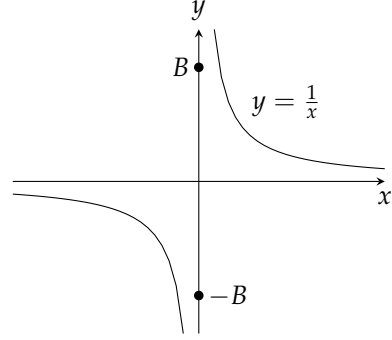
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: ایک طرفہ حد
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27



شکل 2.46: تقابل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔

حل: ترسیمی حل: تقابل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x-1$ اور اس کے بالکل متناسب پر غور کریں۔ $x \rightarrow 1^+$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$ ملتے ہیں۔ $x \rightarrow 1^-$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$ ملتے ہیں۔ □

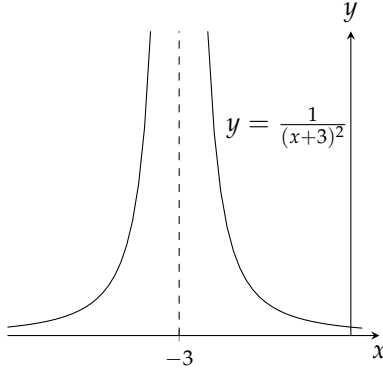
مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد (i) $x=0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x=-3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔
حل: (i) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

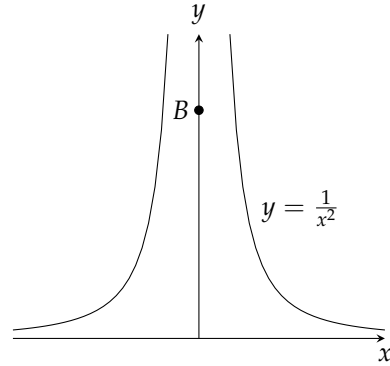
(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.49: $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.48: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \rightarrow 0$ کرنے سے تقابل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔ اس کے برعکس تقابل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔ صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: نااطق تقابل کے نسب نما کے صفر کے قریب تقابل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \quad (ب)$$

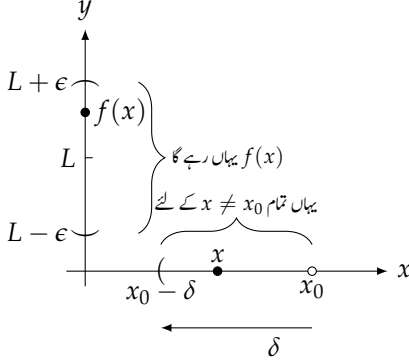
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \quad (د)$$

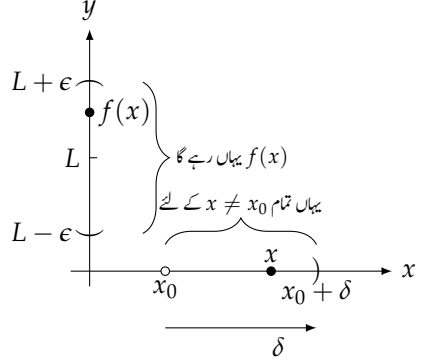
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \quad (و)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \quad (ه)$$

جزو (i) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔ جزو (ه) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جاسکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$(2.1) \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

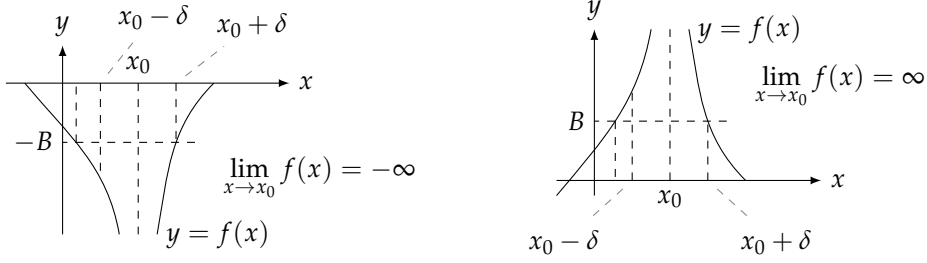
بائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$(2.2) \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$



شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(2.3) \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(2.4) \quad -\delta < x - x_0 < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$(2.5) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہوگا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبداسے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔ اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لامتناہی حد

(i) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

ایک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔ اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فکروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{ه.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{و.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad \text{ز.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{ح.}$$

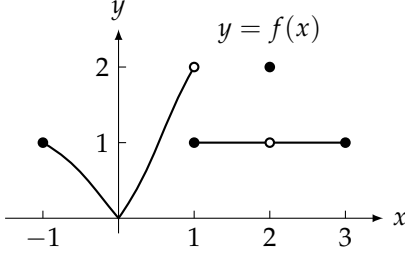
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{ط.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے۔} \quad \text{ث.}$$

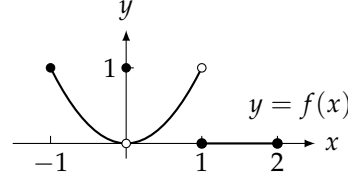
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \quad \text{ی.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{ک.}$$

سوال 2: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تفاعل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔



شکل 2.54: تقابل برائے سوال 2



شکل 2.53: تقابل برائے سوال 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{ن.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ا.}$$

ج. کھلے وقفہ $(-1, 1)$ میں ہر c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \quad \text{ج.}$$

ط. کھلے وقفہ $(1, 3)$ میں ہر c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \quad \text{ی.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{ه.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{یا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{و.}$$

سوال 3: درج ذیل تقابل کو شکل 3 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

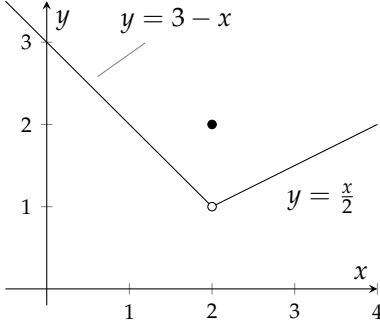
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔

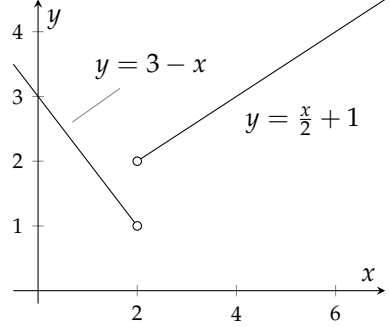
ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود ہے۔ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.56: تقابل برائے سوال 4



شکل 2.55: تقابل برائے سوال 3

سوال 4: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

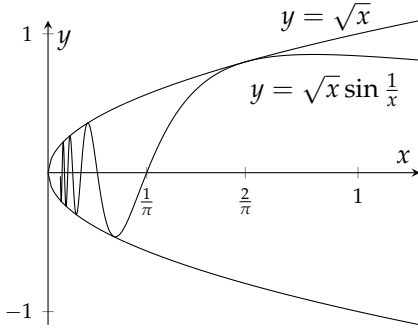
د. کیا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5: درج ذیل تقابل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

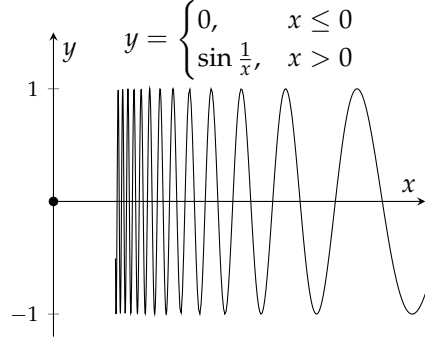
$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 6



شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 5

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 8:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9 اور سوال 10 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases} \quad \text{سوال 9:}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \text{ یا } 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \quad \text{سوال 10:}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 11 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \quad \text{سوال 11:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \quad \text{سوال 12:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{2x+5}{x^2+x} \right) \quad \text{سوال 13:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\frac{x+6}{x} \right) \left(\frac{3-x}{7} \right) \quad \text{سوال 14:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} \quad \text{سوال 15:}$$

سوال 16: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$

سوال 17: (i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$

سوال 18: (i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 19: (i) $\lim_{\theta \rightarrow 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta \rightarrow 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$

سوال 20: (i) $\lim_{t \rightarrow 4^+} (t - |t|)$ (ب) $\lim_{t \rightarrow 4^-} (t - |t|)$

لامتناہی حد: سوال 21 تا سوال 32 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x}$

سوال 22: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 23: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$

سوال 24: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 25: $\lim_{x \rightarrow -8^+} \frac{2x}{x+8}$

سوال 26: $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 27: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

سوال 28: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 29: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

سوال 30: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

سوال 31: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^{2/5}}$

سوال 32: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 33 تا سوال 36 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x$

سوال 34: $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 35: $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (1 + \csc \theta)$

سوال 36: $\lim_{\theta \rightarrow 0} (2 - \cot \theta)$

مزید حساب: سوال 37 تا سوال 42 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 37: $\lim_{x^2 \rightarrow 4} \frac{1}{x^2 - 4}$

ا. $x \rightarrow 2^+$ ب. $x \rightarrow 2^-$ ج. $x \rightarrow -2^+$ د. $x \rightarrow -2^-$

سوال 38: $\lim_{x^2 \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$

ا. $x \rightarrow 1^+$ ب. $x \rightarrow 1^-$ ج. $x \rightarrow -1^+$ د. $x \rightarrow -1^-$

سوال 39: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right)$

ا. $x \rightarrow 0^+$ ب. $x \rightarrow 0^-$ ج. $x \rightarrow \sqrt[3]{2}$ د. $x \rightarrow -1$

سوال 40: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

$$ا. \quad x \rightarrow -2^+ \quad ب. \quad x \rightarrow -2^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 41:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 2^+ \quad ج. \quad x \rightarrow 2^- \quad د. \quad x \rightarrow 2$$

$$\text{سوال 42:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$$

$$ا. \quad x \rightarrow 2^+ \quad ب. \quad x \rightarrow -2^+ \quad ج. \quad x \rightarrow 0^- \quad د. \quad x \rightarrow 1^+$$

سوال 43 تا سوال 46 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

$$\text{سوال 43:} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (2 - \frac{3}{t^{1/3}})$$

$$ا. \quad t \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad t \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 44:} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$$

$$ا. \quad t \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad t \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 45:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\text{سوال 46:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

یک طرفہ حد کی با ضابطہ تعریف

سوال 51: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5 + \delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟

سوال 52: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4 - \delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 53 اور سوال 54 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \quad \text{سوال 53}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1 \quad \text{سوال 54}$$

سوال 55: (ا) $\lim_{x \rightarrow 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x \rightarrow 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

$$\text{سوال 56: فرض کریں کہ } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ ہے۔ (ا) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ اور (ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے فقروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{سوال 57}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \quad \text{سوال 58}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty \quad \text{سوال 59}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty \quad \text{سوال 60}$$

یک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لامتناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطلق عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} = \infty$$

سوال 61: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ب.}$$

یک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 62 تا سوال 67 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{سوال 62}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{سوال 63}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{سوال 64}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{سوال 65}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \quad \text{سوال 66}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty \quad \text{سوال 67}$$

2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے ناکہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اسنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاہد ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مائیکیل میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی درحقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے ناکہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔ استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

عملاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔ یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی اندرونی نقطے¹⁰ (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، بائیں سر نقطے¹¹ اور دائیں سر نقطے¹²۔

تعریف: اندرونی نقطہ پر استمرار

اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ $c = x$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر f استمراری ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

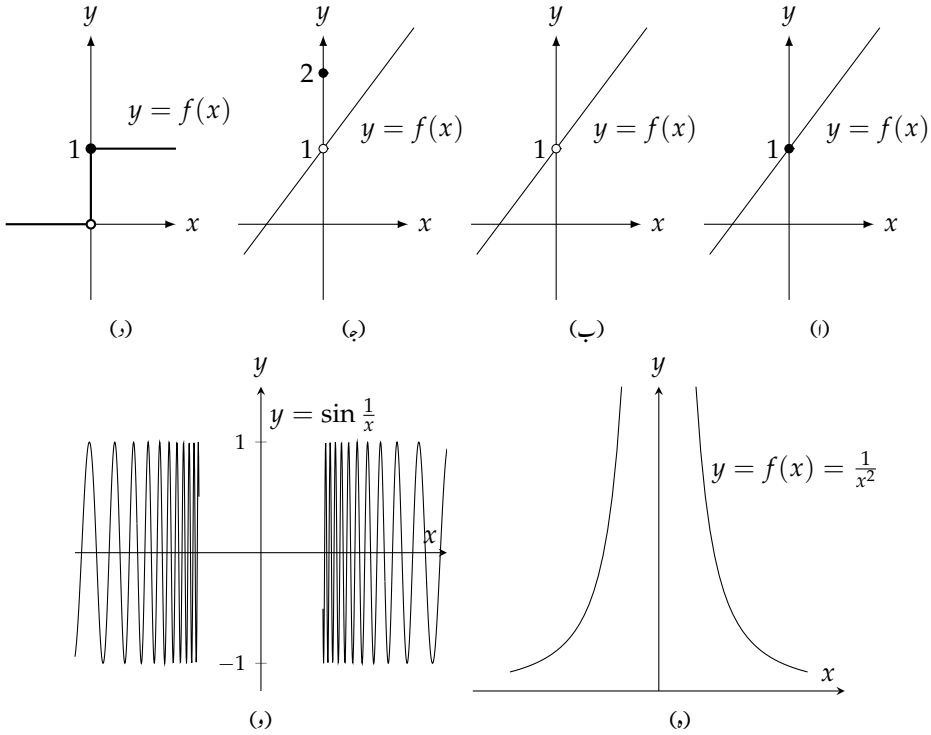
شکل 2.59 میں $x = 0$ پر (0) استمراری ہے۔ اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کی بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔ انہیں قابل ہٹاؤ¹³ عدم استمرار کہتے ہیں۔ ان دونوں میں $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر پر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جاسکتا ہے۔

¹⁰ interior points

¹¹ left endpoints

¹² right endpoints

¹³ removable



شکل 2.59: $x = 0$ پر تقابل (i) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (د) غیر استمراری ہیں۔

شکل 2.59 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تفویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں لہذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جاسکتی ہے۔ (د) میں چھلانگ عدم استمرار¹⁴ پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (ه) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا لا متناہی عدم استمرار¹⁵ پایا جاتا ہے۔ ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لئے غیر استمراری ہے کہ $x \rightarrow 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں ارتعاشی عدم استمرار¹⁶ پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔ کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔ عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

تعریف: بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔ اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔

عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل دائیں استمراری¹⁷ ہو گا۔ اسی طرح تفاعل f اس صورت بائیں استمراری¹⁸ ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔ یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.60)۔

مثال 2.30: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل 2.61)۔

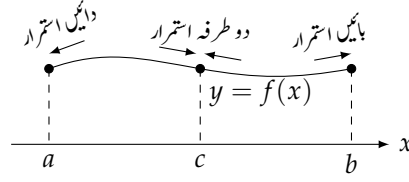
¹⁴ jump discontinuity

¹⁵ infinite discontinuity

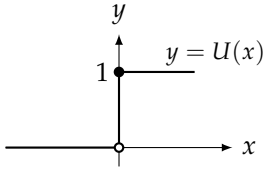
¹⁶ oscillating discontinuity

¹⁷ right-continuous

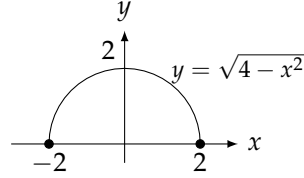
¹⁸ left-continuous



شکل 2.60: نقطہ a ، b اور c پر استمرار



شکل 2.62: یہ تفاعل مہدا پر دائیں استمراری ہے



شکل 2.61: پورے دائرہ کار کے پر نقطہ پر استمراری

□

مثال 2.31: شکل 2.62 میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ بائیں استمراری ہے اور نا ہی استمراری ہے۔

□

ہم نقطے پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

پرکھ استمرار

نقطہ $x = c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

1. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)

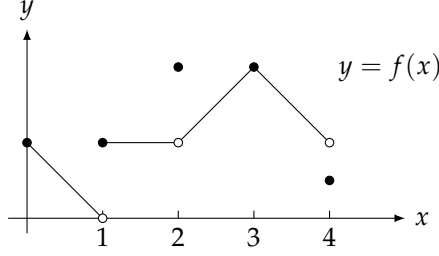
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے ($x \rightarrow c$ پر f کا حد پایا جاتا ہے)

3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

ایک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.63 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔ نقطہ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔



شکل 2.63: تقابل f بند وقفہ $[0, 4]$ پر معین ہے۔ یہ تقابل $x = 1, 2, 4$ پر غیر استتاری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استتاری ہے۔

ا. $x = 0$ پر f استتاری ہے چونکہ

$$1. f(0) \text{ موجود ہے } (f(0) = 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ (تقابل کی قیمت اور حد برابر ہیں)}$$

ب. چونکہ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غیر موجود ہے لہذا $x = 1$ پر f غیر استتاری ہے۔ پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استتاری ہے چونکہ

$$1. f(1) \text{ موجود ہے } (f(1) = 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ (نقطہ } x = 1 \text{ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ (دائیں ہاتھ حد اور تقابل کی قیمتیں برابر ہیں۔)}$$

ج. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ کی بنا $x = 2$ پر f غیر استتاری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

د. $x = 3$ پر f استتاری ہے چونکہ

$$1. f(3) \text{ موجود ہے } (f(3) = 2)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \text{ (نقطہ } x = 2 \text{ پر حد موجود ہے۔)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{ (تقابل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)}$$

ہ. چونکہ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$ ہے لہذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استتاری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار

اگر نقطہ $x = c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x = c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

$$1. f + g \text{ اور } f - g$$

$$2. fg$$

$$3. kf, \text{ جہاں } k \text{ کوئی عدد ہے}$$

$$4. \frac{f}{g} \text{ (بشرطیکہ } g(c) \neq 0 \text{ ہو)}$$

$$5. (f(x))^{m/n} \text{ (بشرطیکہ } (f(x))^{m/n} \text{ اس وقت پر معین ہو جس پر } c \text{ پایا جاتا ہے، اور } m \text{ اور } n \text{ عدد صحیح ہیں۔)}$$

درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار

حقیقی خط کے ہر نقطہ پر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال 2.33: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = x^4 + 20$ اور $g(x) = 5x(x - 2)$ استمراری ہیں۔ تفاعل

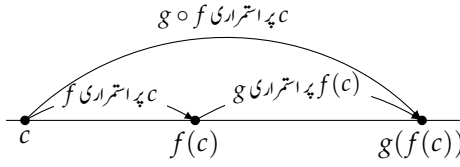
$$r(x) = \frac{x^2 + 20}{5x(x - 2)}$$

□

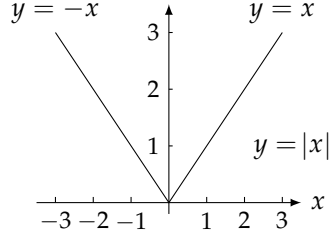
ماسوائے $x = 0$ اور $x = 2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔

مثال 2.34: $f(x) = |x|$ کی استمرار

x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = |x|$ استمراری ہے (شکل 2.64)۔ $x > 0$ کے لئے $f(x) = x$ ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔ اسی



شکل 2.65: مرکب تفاعل کی استمرار۔



شکل 2.64: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔

طرح $x < 0$ کے لئے $f(x) = -x$ ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔ آخر میں مباد پر $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$ ہے۔ □

مثال 2.35: تکنیکی تفاعل کی استمرار
اگلے باب میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استمراری ہے لہذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

□

مسئلہ 2.8: مرکبات کی استمرار
اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استمراری ہوں تب c پر $g \circ f$ استمراری ہو گا (شکل 2.65)۔
مرکب کی استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

- | | |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| (ا) $y = \sqrt{x}$ | مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت) |
| (ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ | مسئلہ 2.7 اور 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب) |
| (ج) $y = \frac{x \cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$ | مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی) |
| (د) $y = \left \frac{x - 2}{x^2 - 2} \right $ | مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حقیقی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب) |

□

نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔ اگر $f(c)$ غیر معین ہو لیکن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل F نقطہ $x = c$ پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو f کی نقطہ $x = c$ تک استمراری توسیع¹⁹ کہتے ہیں۔ ناطق تفاعل f کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا $x = 2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

حل: اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x \neq 2$ پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل $x \neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x = 2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

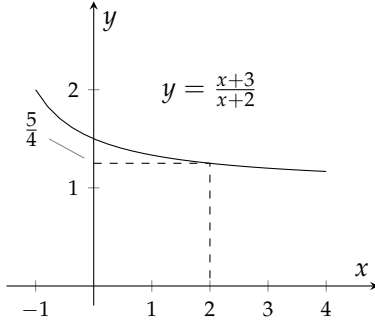
یوں f کی نقطہ $x = 2$ تک توسیع تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

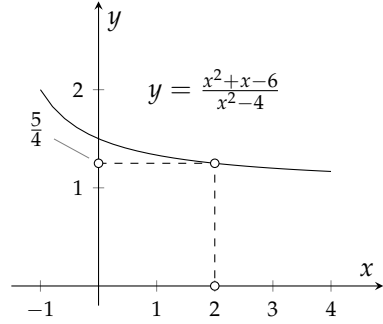
تفاعل f کی ترسیم شکل 2.66 میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی ترسیم ہے مگر اس میں $(2, \frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

□



(ب)



(i)

شکل 2.66: $f(x)$ تقابل اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تقابل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ ایسا تقابل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تقابل کی قیمت برابر ہوں تب f وقفہ پر استمراری²⁰ کہلائے گا۔ جو تقابل I پر استمراری ہو یہ تقابل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔ کثیر رکنی اور ناظم تقابل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تقابل

شکل 2.67 میں وقفوں پر استمراری تقابل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔

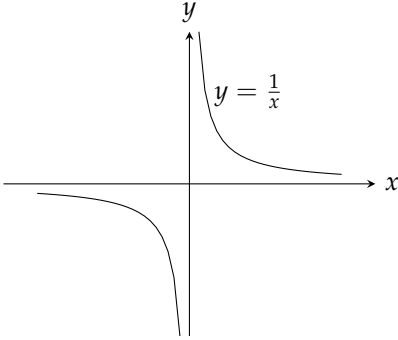
□

وقفوں پر استمراری تقابل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ ان میں ایک متوسط قیمت خاصیت²¹ ہے۔ اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تقابل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تقابل متوسط قیمت خاصیت رکھتا ہے۔

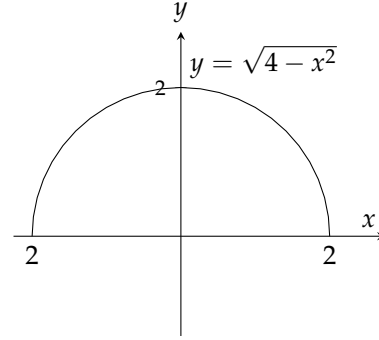
مسئلہ 2.9: مسئلہ متوسط قیمت

فرض کریں کہ تقابل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ تب اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا کہ $f(c) = y_0$ ہو (شکل 2.68)۔

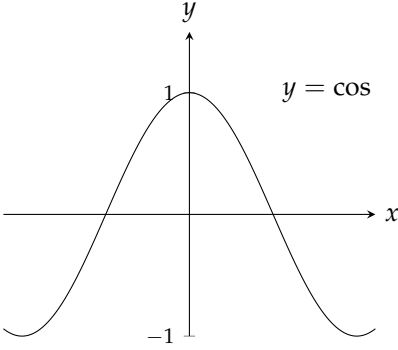
continuous on interval²⁰
intermediate value property²¹



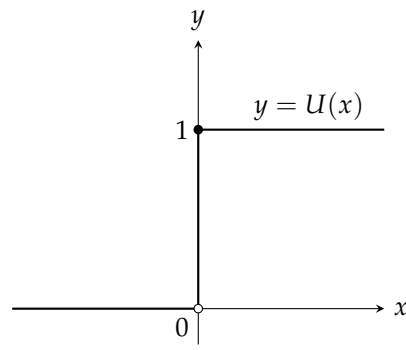
(ب) $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر استمراری



(د) $[-2, 2]$ پر استمراری

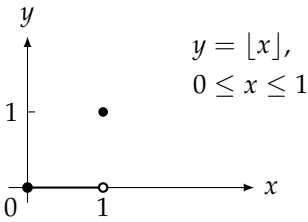


(د) $(-\infty, \infty)$ پر استمراری

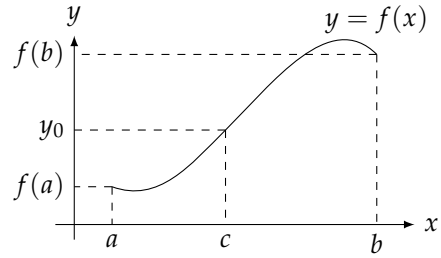


(ج) $(-\infty, 0)$ اور $[0, \infty)$ پر استمراری

شکل 2.67: وقفوں پر استمراری تفاعل (مثال 2.38)



شکل 2.69: $y = [x], 0 \leq x \leq 1$ تفاعل کوئی بھی قیمت $f(1) = 1$ اور $f(0) = 0$ کے لئے قبول نہیں کرتا ہے۔



شکل 2.68: وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے لئے ہر قیمت رکھتا ہے

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کی استتار ضروری ہے۔ اگر I میں صرف ایک نقطے پر بھی f غیر استتاری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔ اس کی ایک مثال شکل 2.69 میں دی گئی ہے۔

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ I پر استتاری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔ اس میں عددی صحیح زمین تفاعل $[x]$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نا ہی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

