

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
307	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
528	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
556	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
572	5.7	بنیادی مسئلہ
593	5.8	قطعی تکمل میں بدل
599	5.9	اعدادی تکمل
599	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
640	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
655	6.4	تکلی چھلے
668	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
678	6.6	سطح طواف کا رقبہ
690	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
702	6.7.1	وسطانی مرکز
707	6.8	کام
721	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
731	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
745	7	ماورائی تفاعل
746	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

764	قدرتی لوگار تھم	7.2
781	قوت نمائی تفاعل	7.3
796	$\log_a x$ اور a^x	7.4
808	افزائش اور تنزل	7.5
822	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
838	اضافی شرح نمو	7.7
843	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
849	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
865	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
882	بدلولی تفاعل	7.10
903	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
921	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

931	8 مکمل کے طریقے	
931	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
947	8.2 مکمل بالخص	
952	8.2.1 بار بار استعمال	
961	8.3 جزوی کسر	
976	8.4 نکتہ بنائی بدل	
987	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1004	8.6 غیر مناسب مکمل	

1031	9 لامتناہی تسلسل	
1031	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1050	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1066	9.3 لامتناہی تسلسل	
1085	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1095	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1105	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1117	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1131	9.8 طاقی تسلسل	
1147	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1159	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1177	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1197	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1197	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1221	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1231	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1245	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1261	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1275	10.6	قطبی محدود
1287	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1301	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1302	10.8.1	دائرے
1316	10.9	قطبی محدود میں شامل

1329	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329	11.1	مستوی میں سمتیت
1346	11.2	کار تیمی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1353	11.2.1	کرہ
1363	11.3	ضرب نقطہ
1364	11.3.1	حساب
1378	11.4	صلیبی ضرب
1393	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1407	11.6	تکلی اور مربع سطحیں
1426	11.7	تکلی اور کروی محدود

1437	12	سستی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437	12.1	سستی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

1439	جوابات
1441	ا ضمیمہ اول
1443	ب ضمیمہ دوم
1445	ج ضمیمہ تین
1447	د ضمیمہ چار
1449	ه ضمیمہ پانچ
1451	و ضمیمہ چھ
1453	ز ضمیمہ سات
1455	ح ضمیمہ آٹھ
1457	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 12

سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت

سرسرہ جائزہ جب کوئی جسم فضا میں حرکت کرتا ہو، مساوات $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ جو اس جسم کے محدود کو بطور وقت کا تفاعل دیتی ہیں، اس جسم کی راہ اور حرکت کی مقدار معلوم مساوات ہوں گی۔ سمتی علاقیت کی مدد سے ہم انہیں ایک مساوات $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں جو اس جسم کا مقام بطور وقت کا سمتی تفاعل دیتی ہے۔

اس باب میں ہم احصاء استعمال کرتے ہوئے حرکت پذیر اجسام کی راہ، سمتی رفتار اور اسراع پر غور کریں گے۔ ہم گولہ، سیارہ اور مصنوعی سیارہ کی راہ اور حرکت کے عمومی سوالات کے جوابات جان سکتے گے۔ آخر حصہ میں ہم نیوٹن کے قوانین اور تجاذب کی مدد سے سیاروں کی مدار کے قوانین کیپلر دریافت کریں گے۔

12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

فضا میں متحرک ذرہ کی حرکت جاننے کی خاطر ہم مبدا سے اس ذرہ تک سمتی \mathbf{r} لے کر \mathbf{r} میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔ اگر اس ذرہ کے محدود مقام وقت کے ساتھ دو بار قابل تفرق ہوں، تب \mathbf{r} بھی ایسا ہو گا، اور ہم کسی بھی لمحہ پر وقت کے لحاظ سے \mathbf{r} کے تفرق لے کر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور اسراع جان سکتے ہیں۔ اگر ہمیں اس ذرہ کی سمتی سمتی رفتار یا سمتی اسراع بطور وقت کے استمراری تفاعل معلوم ہو اور ہمیں ذرے کی ابتدائی مقام اور سمتی رفتار کے بارے میں معقول معلومات ہو، تب ہم مکمل کی مدد سے، وقت کا تفاعل \mathbf{r} جان سکتے ہیں۔

تعریف

جب وقفہ I کے دوران ایک ذرہ فضا میں حرکت کرتا ہو، ہم اس ذرہ کے محدود جو وقت کے تفاعل ہو گے کی تعریف درج ذیل کرتے ہیں۔

$$(12.1) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I$$

نقاط $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ ، $t \in I$ فضا میں وہ منحنی دیتے ہیں جنہیں ہم اس ذرے کی راہ¹ کہتے ہیں۔ مساوات 12.1 اس منحنی کی مقدار معلوم روپے ہے۔ مبداء سے ذرے کے مقام $N(f(t), g(t), h(t))$ تک لمحہ t پر سمتیہ

$$\mathbf{r}(t) = \vec{ON} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

اس ذرے کا تعین گر سمتیہ² ہے۔ تقابل f ، g اور h تعین گر سمتیہ کے اجزاء ہیں۔ ذرے کی راہ سے مراد وقفہ t کے دوران \mathbf{r} کی پیدا کردہ منحنی ہے۔

مساوات 12.1 سمتیہ \mathbf{r} کی تعریف وقفہ I پر حقیقی متغیر t کی صورت میں دیتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر دائرہ کار، سلسلہ D ، پر سمتیہ تقابل³ یا سمتیہ قیمت تقابل⁴ سے مراد وہ قاعدہ ہو گا جو D کے ہر رکن کو فضا میں ایک سمتیہ منحصر کرتا ہو۔ موجودہ استعمال میں دائرہ کار حقیقی اعداد کے وقفوں پر مشتمل ہوں گے۔ بعد کے ایک باب میں دائرہ کار، مستوی یا فضا میں خطوں پر مشتمل ہوں گے جہاں ہم سمتی تقابل کو سمتی میدان کہیں گے۔

ہم حقیقی قیمت تقابل کو غیر سمتی تقابل⁵ کہتے ہیں تاکہ ان میں اور سمتی تقابل میں فرق کرنا ممکن ہو۔ سمتیہ \mathbf{r} کے اجزاء t کے غیر سمتی تقابل ہیں۔ سمتی تقابل کی تعریف اس کے ارکان تقابل کی صورت میں دیتے وقت ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تقابل کا دائرہ کار ہی ارکان کے دائرہ کار ہیں۔

مثال 12.1: بیچ دار تقابل
تمام حقیقی متغیر t کے لئے سمتی تقابل

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

معین ہے اور \mathbf{r} دائری نکی $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد لپٹ کر چلتا ہے۔ سمتی تقابل \mathbf{r} کے \mathbf{i} اور \mathbf{j} اجزاء جو \mathbf{r} کے سر کے x اور y محدد ہیں دائری نکی کی مساوات

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

کو مطمئن کرتے ہیں لہذا \mathbf{r} اس نکی پر پایا جاتا ہے۔ متغیر t بڑھنے \mathbf{k} جزو بڑھتا ہے جس کی بنا منحنی اوپر بلند ہوگی۔ نکی کے گرد ایک دائرہ $2\pi = t$ پر مکمل ہو گا۔ درج ذیل مساوات بیچ دار تقابل کی مقدار معلوم مساوات ہے، جہاں وقفہ $-\infty \leq t \leq \infty$ ہے۔

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

□

شکل میں دیگر بیچ دار تقابل دیے گئے ہیں۔

حد اور استمرار

path¹
position vector²
vector function³
vector-valued function⁴
scalar functions⁵

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

