

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

7.2	قدرتی لوگار تھم	762
7.3	قوت نمائی تفاعل	779
7.4	$\log_a x$ اور a^x	794
7.5	افزائش اور تنزل	805
7.6	قاعدہ لھوپیٹال	819
7.7	اضافی شرح نمو	835
7.7.1	ترتیبی اور شمائی تلاش	840
7.8	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	846
7.9	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	862
7.10	بدلولی تفاعل	879
7.11	یک رتبی تفرقی مساوات	900
7.12	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	918

8	تکمل کے طریقے	929
8.1	تکمل کے بنیادی کلیات	929
8.2	تکمل بالخص	945
8.2.1	بار بار استعمال	950
8.3	جزوی کسر	959
8.4	نکتہ بنائی بدل	974
8.5	جدول تکمل اور کمپیوٹر	985
8.6	غیر مناسب تکمل	1002

9	لا متناہی تسلسل	1029
9.1	اعداد کی ترتیب کی حد	1029
9.2	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	1048
9.3	لا متناہی تسلسل	1064
9.4	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	1083
9.5	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	1093
9.6	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	1103
9.7	بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	1115
9.8	طاققی تسلسل	1129
9.9	ٹیبلر اور مکملارن تسلسل	1145
9.10	ٹیبلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلل کے اندازے	1156
9.11	طاققی تسلسل کے استعمال	1175

10	مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	1195
10.1	مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	1195
10.2	سک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	1219

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیت
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولا کی حرکت کی نمونہ کشی
1468	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیت T
1476	12.4	انخاء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1519		جوابات
1521	ا	ضمیمہ اول
1523	ب	ضمیمہ دوم
1525	ج	ضمیمہ تین
1527	د	ضمیمہ چار
1529	ه	ضمیمہ پانچ

1531	و ضمیمہ چھ
1533	ز ضمیمہ سات
1535	ح ضمیمہ آٹھ
1537	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 13

کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات

چانزہ

سائنس میں دو یا دو سے زائد غیر تابع متغیرات کے تفاعل ایک متغیر کے تفاعل سے زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں اور ان کی علم احصاء زیادہ عمدہ ہوتی ہے۔ زیادہ متغیرات ایک دوسرے پر زیادہ طریقوں سے اثر انداز ہو سکتے ہیں جس کی بنائ ان کے تفرقات مختلف اور زیادہ دلچسپ صورتیں اختیار کر سکتے ہیں۔ ان کے عملیات زیادہ اقسام کے عملی مسائل میں کام آتے ہیں۔ احتمال، سیالی حرکیات، اور برقیات، وغیرہ، پر غور کے دوران ان سے زائد متغیرات کے تفاعل قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں۔ ان تفاعل کی ریاضیات، سائنس کی عظیم کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل

کئی تفاعل ایک سے زائد متغیرات کے تابع ہوتے ہیں۔ دائری ٹکلی کا حجم، اس کے رداس اور قد سے، تفاعل $H = \pi r^2 h$ دیتا ہے۔ مستوی xy میں نقطہ $N(x, y)$ کے دو محدود سے، قطع مکانی $z = x^2 + y^2$ کا قد تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم ایک سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل متعارف کرتے ہیں اور ان کو ترسیم کرنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

تفاعل اور متغیرات

کثیر غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی تعریف بالکل واحد متغیر کے تفاعل کی طرح کی جاتی ہے۔ ان کے وقفے حقیقی (تین، چار، وغیرہ) اعداد کے مرتب جوڑی کے سلسلے ہوں گے اور ان کی سعت، اس طرح کے حقیقی اعداد کے سلسلے ہوں گے جن کے ساتھ ہم کام کرتے آ رہے ہیں۔

تعریفات: فرض کریں n عدد حقیقی اعداد x_1, x_2, \dots, x_n کا سلسلہ D ہے۔ تب D پر حقیقی قیمت تفاعل f^1 سے مراد وہ قاعدہ ہے جو D کے ہر رکن کو حقیقی عدد

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

مختص کرتا ہو۔ سلسلہ D اس تفاعل کا دائرہ کار² ہو گا۔ تفاعل f کی قیمتوں کا سلسلہ f کی سمت³ ہو گی۔ علامت w تفاعل f کا تابع متغیر⁴ ہو گا اور f کو n غیر تابع متغیرات⁵ x_1 تا x_n کا تفاعل کہتے ہیں۔ ہم ان x کو تفاعل کے داخلی متغیرات⁶ اور w کو تفاعل کا خارجی متغیر⁷ بھی کہتے ہیں۔

□

اگر f دو غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب عموماً ہم ان غیر تابع متغیرات کو x اور y کہتے ہیں اور f کے دائرہ کار کو مستوی xy میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔ اگر f تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب ہم ان متغیرات کو x ، y اور z کہتے ہیں اور تفاعل کے دائرہ کار کو فضا میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ہم وہ حروف استعمال کرتے ہیں جو ہمیں ان چیزوں کی یاد دلا سکیں جن کے لئے یہ متغیرات استعمال کیے گئے ہوں۔ یہ کہنے کی خاطر کہ دائری نگلی کا حجم اس کے رداس r اور قد h کا تفاعل ہو گا، ہم $H = f(r, h)$ لکھ سکتے ہیں۔ بالخصوص ہم $f(r, h)$ کی جگہ وہ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں جو r اور h کی قیمتوں سے H کی قیمت دیتا ہو، یعنی ہم $H = \pi r^2 h$ لکھ سکتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں r اور h غیر تابع متغیرات ہوں گے اور H تابع متغیر ہو گا۔

ہمیشہ کی طرح، ہم تفاعل کی تعریف کلیہ میں غیر تابع متغیرات کی قیمتیں پر کر کے مطابقتی تابع متغیر کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 13.1: نقطہ $(3, 0, 4)$ پر تفاعل $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

real valued function¹
domain²
range³
dependent variable⁴
independent variable⁵
input variable⁶
output variable⁷

وقف

ایک سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کی تعریف میں، ہمیشہ کی طرح، ہم ان مداخل کو شامل نہیں کرتے ہیں جو مخلوط اعداد دیتے ہیں یا جن کی وجہ سے تقسیم صفر کا عمل پیدا ہوتا ہو۔ یوں $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ میں y کی قیمت x^2 کی قیمت سے کم نہیں ہو سکتی ہے اور $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ میں xy کی قیمت صفر نہیں ہو سکتی ہے۔ ان شرائط کو مطمئن کرتے ہوئے، تفاعل کے دائرہ کار سے مراد وہ بڑے سے بڑا سلسلہ ہو گا جس پر تفاعل کا تعریفی قاعدہ حقیقی اعداد پیدا کرتا ہو۔

مثال 13.2: دو متغیرات کے تفاعل

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	پورا مستوی	$[-1, 1]$

□

مثال 13.3: تین متغیرات کے تفاعل

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	پوری فضا	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	نصف فضا $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

□

بالکل حقیقی کلیہ کے وقفوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کی طرح، مستوی کے حصوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے ہو سکتے ہیں۔

تعریفات: مستوی xy میں خط (سلسلہ) R میں نقطہ (x_0, y_0) تب R کا اندرونی نقطہ⁸ ہو گا جب یہ اس قرص کا مرکز ہو جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہو۔ نقطہ (x_0, y_0) تب R کا سرحدی نقطہ⁹ ہو گا جب ہر اس قرص میں، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، R کے بیرونی اور R کے اندرونی نقطے پائے جاتے ہوں۔ (ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ از خود R میں شامل ہو۔)

interior point⁸
boundary point⁹

ایک خطہ کے اندرونی نقطے، بطور ایک سلسلہ، اس خطہ کی اندرونی¹⁰ ہوں گے۔ اس خطہ کے سرحدی نقطے اس کی سرحد¹¹ ہیں۔ ایسا خطہ جو مکمل طور پر اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو کھلا¹² خطہ کہلاتا ہے۔ ایسا خطہ جس میں اس کے تمام سرحدی نقطے شامل ہوں بند¹³ خطہ کہلاتا ہے۔

□

حقیقی اعداد کے وقفوں کی طرح، مستوی میں بعض خطے نا کھلا اور نا ہی بند ہوتے ہیں۔ شکل کے کھلا قرص میں چند، نا کہ تمام، سرحدی نقطے شامل کرنے سے ایسا خطہ حاصل ہو گا جو نا کھلا ہو گا اور نا ہی بند ہو گا۔ اس میں شامل سرحدی نقطے اس کو کھلا وقفہ بننے سے روکتے ہیں جبکہ اس میں نا شامل سرحدی نقطے اس کو بند خطہ بننے سے روکتے ہیں۔

تعریف: مستوی میں مقررہ رداس کے قرص میں پائے جانے والا خطہ محدود¹⁴ ہو گا۔ ایسا خطہ جو محدود نا ہو غیر محدود¹⁵ ہو گا۔

□

مثال 13.4:

مستوی میں محدود سلسلے: خطی قطعات؛ مثلثیں؛ مثلثوں کی اندرون؛ مستطیلیں؛ اقراص۔

مستوی میں غیر محدود سلسلے: خطوط؛ محدود محور؛ لامتناہی وقفہ پر معین تفاعل کی ترسیم؛ ربعات، نصف مستوی؛ مستوی از خود۔

□

مثال 13.5: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار بند اور غیر محدود ہے۔ قطع مکانی $y = x^2$ اس دائرہ کار کی سرحد ہے۔ قطع مکانی سے اوپر نقطے دائرہ کار کی اندرون ہیں۔

□

فضا میں اندرون، سرحد، کھلا، بند، محدود اور غیر محدود کی تعریضیں عین مستوی میں انہیں تعریضوں کی طرح ہیں۔ اضافی بعد کی بنا ہم قرص کی بجائے گیند لیتے ہیں۔ بند گیند¹⁶ میں کرہ کی اندرونی نقطوں کے ساتھ گیند بھی شامل ہو گا۔ کھلا گیند¹⁷ میں گیند کی اندرونی نقطے شامل ہوں گے جبکہ گیند از خود اس میں شامل نہیں ہو گا۔

-
- interior¹⁰
 - boundary¹¹
 - open¹²
 - closed¹³
 - bonded¹⁴
 - unbounded¹⁵
 - closed ball¹⁶
 - open ball¹⁷

تعریفات: فضا میں خطہ D میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) اس صورت D کا اندرونی نقطہ¹⁸ ہو گا جب یہ نقطہ ایسے گیند کا مرکز ہو جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ اگر ہر گیند، جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) ہو، میں شامل نقطوں میں کچھ نقطے D کے اندرونی اور کچھ اس کے بیرونی نقطے ہوں تب یہ نقطہ D کا سرحدی نقطہ¹⁹ ہو گا۔ خطہ D کے اندرونی نقطوں کا سلسلہ D کا اندرون²⁰ ہو گا۔ خطہ D کے سرحدی نقطوں کا سلسلہ D کا سرحد²¹ ہو گا۔

ایک ایسا خطہ جو صرف اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو کھلا²² خطہ کہلائے گا۔ ایک خطہ جس میں خطے کا پورا سرحد شامل ہو بند²³ خطہ کہلائے گا۔

□

مثال 13.6:

فضا میں کھلا سلسلہ کھلا گیند؛ کھلا نصف فضا $z > 0$ ؛ ربع اول (بغیر تحدیدی سطحیں)؛ فضا از خود

فضا میں بند سلسلہ خطوط؛ مستوی؛ بند گیند؛ بند نصف فضا $z \geq 0$ ؛ ربع اول بمع اس کے تحدیدی سطحیں؛ فضا از خود

نا کھلا اور نا بند بند گیند جس میں تحدیدی کرہ کا کچھ حصہ شامل نہ ہو؛ ٹھوس مربع جس میں ایک تحدیدی سطح یا کنارہ یا کونا شامل نہ ہو

□

دو متغیرات کے تفاعل کی ترسیمات اور ہموار منحنیات

interior point¹⁸
 boundary point¹⁹
 interior²⁰
 boundary²¹
 open²²
 closed²³

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

