

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

|     |   |
|-----|---|
| ix  | دیباچہ                                    |
| xi  | میری پہلی کتاب کا دیباچہ                  |
| 1   | 1 ابتدائی معلومات                         |
| 1   | 1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط              |
| 14  | 1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری               |
| 30  | 1.3 تفاعل                                 |
| 52  | 1.4 ترسیم کی منتقلی                       |
| 72  | 1.5 تکنیکی تفاعل                          |
| 93  | 2 حدود اور استمرار                        |
| 93  | 2.1 تبدیلی کی شرح اور حد                  |
| 110 | 2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد                 |
| 123 | 2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف |
| 143 | 2.4 تصور حد کی توسیع                      |
| 163 | 2.5 استمرار                               |
| 181 | 2.6 مماسی خط                              |
| 195 | 3 تفرق                                    |
| 195 | 3.1 تفاعل کا تفرق                         |
| 217 | 3.2 قواعد تفرق                            |
| 236 | 3.3 تبدیلی کی شرح                         |
| 253 | 3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق                  |
| 274 | 3.5 زنجیری قاعدہ                          |
| 291 | 3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما            |
| 308 | 3.7 دیگر شرح تبدیلی                       |

|     |       |  |
|-----|-------|--|
| 323 | 4     | تفرق کا استعمال  |
| 323 | 4.1   | تفاعل کی انتہائی قیمتیں                                  |
| 337 | 4.2   | مسئلہ اوسط قیمت  |
| 353 | 4.3   | مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ              |
| 353 | 4.3.1 | پرکھ   |
| 365 | 4.4   | $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم                             |
| 388 | 4.5   | $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء   |
| 415 | 4.6   | بہترین بنانا   |
| 439 | 4.7   | خط بندی اور تفرقات                                       |
| 460 | 4.8   | ترکیب نیوٹن  |
| 471 | 5     | تکمل   |
| 471 | 5.1   | غیر قطعی تکملات  |
| 483 | 5.2   | تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی |
| 499 | 5.3   | تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق         |
| 511 | 5.4   | اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ                              |
| 527 | 5.5   | ریمان مجموعے اور قطعی تکملات                             |
| 555 | 5.6   | خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ                       |
| 571 | 5.7   | بنیادی مسئلہ   |
| 592 | 5.8   | قطعی تکمل میں بدل  |
| 598 | 5.9   | اعدادی تکمل  |
| 598 | 5.10  | قاعدہ ذوزرقہ   |
| 617 | 6     | تکمل کا استعمال  |
| 617 | 6.1   | منحنیات کے بیچ رقبہ                                      |
| 621 | 6.1.1 | تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد                               |
| 632 | 6.2   | تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش                                |
| 639 | 6.3   | اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا                          |
| 654 | 6.4   | تکلی چھلے  |
| 667 | 6.5   | مستوی منحنیات کی لمبائیاں                                |
| 677 | 6.6   | سطح طواف کا رقبہ   |
| 689 | 6.7   | معیار اثر اور مرکز کمیت                                  |
| 701 | 6.7.1 | وسطانی مرکز  |
| 706 | 6.8   | کام  |
| 720 | 6.9   | فشار سیال اور قوت سیال                                   |
| 730 | 6.10  | بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال                        |
| 743 | 7     | ماورائی تفاعل  |
| 744 | 7.1   | الٹ تفاعل اور ان کے تفرق                                 |

|     |                                    |      |
|-----|------------------------------------|------|
| 762 | قدرتی لوگار تھم                    | 7.2  |
| 779 | قوت نمائی تفاعل                    | 7.3  |
| 794 | $\log_a x$ اور $a^x$               | 7.4  |
| 805 | افزائش اور تنزل                    | 7.5  |
| 819 | قاعدہ لھوپیٹال                     | 7.6  |
| 835 | اضافی شرح نمو                      | 7.7  |
| 840 | 7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش        |      |
| 846 | الٹ نیکونائی تفاعل                 | 7.8  |
| 862 | الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل   | 7.9  |
| 879 | ہذلولی تفاعل                       | 7.10 |
| 900 | یک رتبی تفرقی مساوات               | 7.11 |
| 918 | یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان | 7.12 |

|      |                           |  |
|------|---------------------------|--|
| 929  | 8 مکمل کے طریقے           |  |
| 929  | 8.1 مکمل کے بنیادی کلیات  |  |
| 945  | 8.2 مکمل بالخص            |  |
| 950  | 8.2.1 بار بار استعمال     |  |
| 959  | 8.3 جزوی کسر              |  |
| 974  | 8.4 نیکونائی بدل          |  |
| 985  | 8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر |  |
| 1002 | 8.6 غیر مناسب مکمل        |  |

|      |   |  |
|------|---|--|
| 1029 | 9 لامتناہی تسلسل                                    |  |
| 1029 | 9.1 اعداد کی ترتیب کی حد                            |  |
| 1048 | 9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے                  |  |
| 1064 | 9.3 لامتناہی تسلسل                                  |  |
| 1083 | 9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ        |  |
| 1093 | 9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ          |  |
| 1103 | 9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ |  |
| 1115 | 9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز              |  |
| 1129 | 9.8 طاقی تسلسل                                      |  |
| 1145 | 9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل                           |  |
| 1156 | 9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے           |  |
| 1175 | 9.11 طاقی تسلسل کے استعمال                          |  |

|      |   |  |
|------|---|--|
| 1195 | 10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود |  |
| 1195 | 10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں            |  |
| 1219 | 10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی    |  |

|                |        |  |
|----------------|--------|--|
| 1229 . . . . . | 10.3   | دو درجی مساوات اور گھومنا                  |
| 1243 . . . . . | 10.4   | مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول   |
| 1259 . . . . . | 10.5   | احصاء اور مقدار معلوم منحنیات              |
| 1273 . . . . . | 10.6   | قطبی محدود                                 |
| 1285 . . . . . | 10.7   | قطبی محدود میں ترسیم                       |
| 1299 . . . . . | 10.8   | محروط حصوں کے قطبی مساوات                  |
| 1300 . . . . . | 10.8.1 | دائرے                                      |
| 1314 . . . . . | 10.9   | قطبی محدود میں عمل                         |
| 1327 . . . . . | 11     | سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری         |
| 1327 . . . . . | 11.1   | مستوی میں سمتیات                           |
| 1344 . . . . . | 11.2   | کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات |
| 1351 . . . . . | 11.2.1 | کرہ  |
| 1361 . . . . . | 11.3   | ضرب نقطہ                                   |
| 1362 . . . . . | 11.3.1 | حساب                                       |
| 1376 . . . . . | 11.4   | صلیبی ضرب                                  |
| 1391 . . . . . | 11.5   | فضا میں خطوط اور مستوی                     |
| 1405 . . . . . | 11.6   | تنگی اور مربع سطحیں                        |
| 1424 . . . . . | 11.7   | تنگی اور کروہ محدود                        |
| 1435 . . . . . | 12     | سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت           |
| 1435 . . . . . | 12.1   | سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات          |
| 1458 . . . . . | 12.2   | گولا کی حرکت کی نمونہ کشی                  |
| 1468 . . . . . | 12.3   | لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$       |
| 1476 . . . . . | 12.4   | انحنا، مروڑ اور $TNB$ چھوکت                |
| 1497 . . . . . | 12.5   | فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت      |
| 1513 . . . . . | 13     | کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات         |
| 1513 . . . . . | 13.1   | کثیر متغیرات کے تفاعل                      |
| 1528 . . . . . | 13.2   | حد اور استتار                              |
| 1544 . . . . . | 13.3   | جزوی تفرقات                                |
| 1549 . . . . . |        | جوابات                                     |
| 1551 . . . . . | ا      | ضمیمہ اول                                  |
| 1553 . . . . . | ب      | ضمیمہ دوم                                  |
| 1555 . . . . . | ج      | ضمیمہ تین                                  |
| 1557 . . . . . | د      | ضمیمہ چار                                  |

|      |              |
|------|--------------|
| 1559 | ھ ضمیمہ پانچ |
| 1561 | و ضمیمہ چھ   |
| 1563 | ز ضمیمہ سات  |
| 1565 | ح ضمیمہ آٹھ  |
| 1567 | ط ضمیمہ آٹھ  |





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 13.3 جزوی تفرقات

جب ماسوائے ایک غیر تابع متغیر کے ہم باقی تمام کو برقرار رکھیں اور اس ایک متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا تفرق لیں تو ہمیں "جزوی" تفرق حاصل ہوتا ہے۔ اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ جزوی تفرقات کیسے پائے جاتے ہیں اور واحد متغیر کے تفاعل کے تفرق کے قواعد بروئے کار لاتے ہوئے جزوی تفرقات کی قیمت کے حصول کے بارے میں بتایا جائے گا۔

## تعریفات اور علامتیت

اگر تفاعل  $f(x, y)$  کے دائرہ کار میں  $(x_0, y_0)$  ایک نقطہ ہو تب انتصابی سطح  $y = y_0$  سطح  $z = f(x, y)$  کو منحنی  $z = f(x, y_0)$  میں مس کرے گا۔ یہ منحنی مستوی  $y = y_0$  میں تفاعل  $z = f(x, y_0)$  کی ترسیم ہوگی۔ اس مستوی میں افقی محدود  $x$  ہے؛ انتصابی محدود  $z$  ہے۔

ہم نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کے جزوی تفرق سے مراد نقطہ  $x = x_0$  پر  $f(x, y_0)$  کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

تعریف: نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $x$  کے لحاظ سے  $f(x, y)$  کا جزوی تفرق<sup>32</sup>

$$(13.6) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔ (آپ  $\partial$  کو  $d$  کی ایک قسم تصور کریں۔)

□

نقطہ  $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  پر مستوی  $y = y_0$  میں منحنی  $z = f(x, y_0)$  کی ڈھلوان سے مراد نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کے جزوی تفرق کی قیمت ہے۔ نقطہ  $N$  پر منحنی کا مماسی خط، مستوی  $y = y_0$  میں وہ خط ہے جو  $N$  سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب  $y$  کی قیمت برقرار  $y_0$  رکھی جائے تب  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کی شرح تبدیلی نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر جزوی تفرق  $\frac{\partial f}{\partial x}$  دیتا ہے۔ یہ نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $i$  کے رخ  $f$  کی شرح تبدیلی ہے۔

جزوی تفرق کی علامت اس چیز پر منحصر ہوگی جس پر ہم زور دینا چاہتے ہیں۔ یوں درج ذیل علامت اس وقت استعمال کیے جائیں گے جب ہم نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر زور دینا چاہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

سائنس اور انجینئری میں درج ذیل علامت مقبول ہے جہاں تفاعل کا صریحاً ذکر کیے بغیر نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $x$  کے لحاظ سے  $z$  کا جزوی تفرق لیا گیا ہے۔

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

جہاں جزوی تفرق کو ایک تفاعل تصور کرنا مقصود ہو وہاں درج ذیل علامت استعمال کیے جائیں گے، جہاں  $x$  لے لحاظ سے  $f$  (یا  $z$ ) کے جزوی تفرقات لیے گئے ہیں۔

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $y$  کے لحاظ سے  $f(x, y)$  کے جزوی تفرق کی تعریف،  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کی جزوی تفرق کی تعریف کی طرح ہے۔ ہم  $x$  کو  $x_0$  رکھتے ہوئے  $y_0$  پر  $y$  کے لحاظ سے  $f(x_0, y)$  کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

تعریف: نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $y$  کے لحاظ سے  $f(x, y)$  کا جزوی تفرق<sup>33</sup>

$$(13.7) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right|_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

نقطہ  $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  پر مستوی  $x = x_0$  میں منحنی  $z = f(x_0, y)$  کی ڈھلوان سے مراد نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $y$  کے لحاظ سے  $f$  کے جزوی تفرق کی قیمت ہے۔ نقطہ  $N$  پر منحنی کا مماسی خط، مستوی  $x = x_0$  میں وہ خط ہے جو  $N$  سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب  $x$  کی قیمت برقرار  $x_0$  رکھی جائے تب  $y$  کے لحاظ سے  $f$  کی شرح تبدیلی نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر جزوی تفرق  $\frac{\partial f}{\partial y}$  دیتا ہے۔ یہ نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر  $j$  کے رخ  $f$  کی شرح تبدیلی ہے۔

متغیر  $y$  کے لحاظ سے جزوی تفرق کو  $x$  کے لحاظ سے جزوی تفرق کی طرح لکھا جاتا ہے:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y$$

دھیان رہے کہ نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر اب سطح  $z = f(x, y)$  کے ساتھ دو مماسی خط منسلک ہیں۔ کیا ان مماسی سطح کا تعین کردہ سطح نقطہ  $N$  پر  $z = f(x, y)$  کو مماسی ہو گا؟ جزوی تفرق کے بارے میں مزید معلومات جاننے کے بعد ہم اس سوال کا جواب دے پائیں گے۔

partial derivative<sup>33</sup>

حساب

جیسا ہم مساوات 13.6 سے جانتے ہیں،  $y$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کا سادہ تفرق ہمیں  $\frac{\partial f}{\partial x}$  دیگا۔ اسی طرح مساوات 13.7 کہتی ہے کہ  $x$  کو مستقل رکھتے ہوئے  $y$  کے لحاظ سے  $f$  کا سادہ تفرق ہمیں  $\frac{\partial f}{\partial y}$  دیگا۔

مثال 13.14: نقطہ  $(4, -5)$  پر درج ذیل کے لئے  $\frac{\partial f}{\partial x}$  اور  $\frac{\partial f}{\partial y}$  کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

حل: ہم  $y$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کا تفرق لے کر  $\frac{\partial f}{\partial x}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

نقطہ  $(4, -5)$  پر  $\frac{\partial f}{\partial x}$  کی قیمت  $2(4) + 3(-5) = -7$  ہوگی۔

اسی طرح ہم  $x$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $y$  کے لحاظ سے  $f$  کا تفرق لے کر  $\frac{\partial f}{\partial y}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1$$

□

نقطہ  $(4, -5)$  پر  $\frac{\partial f}{\partial y}$  کی قیمت  $3(4) + 1 = 13$  ہوگی۔

مثال 13.15: متعلق  $f(x, y) = y \sin xy$  کا  $\frac{\partial f}{\partial y}$  معلوم کریں۔

حل: ہم  $x$  کو مستقل تصور جبکہ  $f$  کو  $y$  اور  $\sin xy$  کا حاصل ضرب تصور کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy \end{aligned}$$

□

## فنیات

جزوی تفرق کمپیوٹر آپ کو حساب میں کئی بعد تک مدد فراہم کر سکتا ہے۔ آپ ایک غیر تابع متغیر کے علاوہ تمام متغیرات کی قیمتیں فراہم کر کے واحد متغیر کے لحاظ سے جزوی تفرق معلوم کر کے ترسیم کر سکتے ہیں۔ جزوی تفرق اور سادہ تفرق کے لئے کمپیوٹر کی زبان میں عموماً ایک جیسی اصطلاح استعمال کی جاتی ہے۔ جزوی تفرقات کے حصول میں کمپیوٹر ضرور استعمال کریں۔

مثال 13.16: تفاعل  $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$  کے لئے  $f_x$  تلاش کریں۔

حل: ہم  $f$  کو حاصل تقسیم تصور کر کے  $y$  کو مستقل رکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial x} (2y) - 2y \frac{\partial}{\partial x} (y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2} \end{aligned}$$

□

مثال 13.17: مستوی  $x = 1$  قطع مکانی سطح  $z = x^2 + y^2$  کو قطع مکانی میں قطع کرتا ہے۔ نقطہ  $(1, 2, 5)$  پر اس قطع مکانی کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

حل: مماس کی ڈھلوان نقطہ  $(1, 2)$  پر جزوی تفرق  $\frac{\partial z}{\partial y}$  کی قیمت ہوگی:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) \right|_{(1,2)} = 2y|_{(1,2)} = 2(2) = 4$$

تصدیق کی خاطر ہم قطع مکانی کو واحد متغیر تفاعل  $z = (1)^2 + y^2 = 1 + y^2$  کی مستوی  $x = 1$  میں ترسیم تصور کر کے  $y = 2$  پر اس کی ڈھلوان حاصل کرتے ہیں۔ یہ ڈھلوان جس کو سادہ تفرق سے حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہوگا۔

$$\left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=2} = \left. \frac{d}{dy} (1 + y^2) \right|_{y=2} = 2y|_{y=2} = 4$$

□

سادہ تفرق کی طرح جزوی تفرق کے لئے بھی خفی تفرق کار آمد ہے۔



مثال 13.18: اگر درج ذیل مساوات دو غیر تابع متغیرات  $x$  اور  $y$  کا تفاعل  $z$  دیتی ہو جس کا جزوی تفرق موجود ہو تب  $\frac{\partial z}{\partial x}$  تلاش کریں۔

$$yz - \ln z = x + y$$

حل: ہم  $y$  کو مستقل اور  $z$  کو  $x$  کا تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا  $x$  کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x} \ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0$$

$y$  مستقل

$$\left(y - \frac{1}{z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) = y \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}$$

□

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

## جوابات



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



ضمیمہ ج

ضمیمہ تین





ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چھ



ضمیمہ ز

ضمیمہ سات





ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

