احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

9.2 ترتیب کا حد تلاش کرنے کے مسئلے

حد پر غور کرتے وقت ہر مرتبہ ارتکاز کو تعریف سے ثابت کرنا مشکل کام ہے۔ خوش قسمتی سے تین مسائل اس عمل سے، کم و بیش ہر زیادہ تر، چھٹکارا دیتے ہیں۔ پہلا مسئلہ درج ذیل ہے جو حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 کی ایک قسم ہے۔

مسئلہ 9.2: فرض کریں $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ حقیقی اعداد کے ترتیب ہیں اور A اور B حقیقی اعداد ہیں۔ اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ اور $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ہوں تب درج ذیل قواعد درست ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$$

قاعدہ فرق: $$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$$

قاعدہ ضرب: $$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

قاعدہ ضرب مستقل: $$\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$$ (جہاں k عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ اگر $B \neq 0$ ہو۔

مثال 9.8: ہم مسئلہ 9.2 کے ساتھ گزشتہ حصے کی مثال 9.2 ملا کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) &= 1 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1\\
\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} &= 5 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0\\
\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^6}-7}{1+\frac{3}{n^6}} = \frac{0-7}{1+0} = -7
\end{aligned}$$

□

مسئلہ 9.2 کے تحت منفرج ترتیب $\{a_n\}$ کو ہر غیر صفر عدد سے ضرب دینے سے منفرج ترتیب ہی حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر اس کے برعکس کسی عدد $c \neq 0$ کے لئے $\{ca_n\}$ مرتکز ہو تب مسئلہ 9.2 میں قاعدہ ضرب مستقل میں $k = \frac{1}{c}$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں درج ذیل ترتیب مرتکز ہو گی۔

$$\left\{\frac{1}{c} \cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

یوں $\{ca_n\}$ صرف اس صورت مرتکز ہو گی جب a_n مرتکز ہو۔ اگر $\{a_n\}$ مرتکز نہ ہو تب $\{ca_n\}$ مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔

اگلا مسئلہ حصہ 2.2 میں مسئلہ بیچ (مسئلہ 2.4) کی ترتیب پر قابل لاگو قسم ہے۔

مسئلہ 9.3: ترتیب کے لئے مسئلہ بیچ
فرض کریں $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ اور $\{c_n\}$ حقیقی اعداد کی ترتیبات ہیں۔ اگر کسی اشاریہ N کے بعد تمام n کے لئے

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

ہو اور اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ہو تب $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ ہو گا۔

اگر $|b_n| \leq c_n$ ہو اور $c_n \to 0$ ہو تب چونکہ $-c_n \leq b_n \leq c_n$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 9.3 کے تحت $b_n \to 0$ ہو گا۔ اس حقیقت کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔

مثال 9.9: چونکہ $\frac{1}{n} \to 0$ ہوتا ہے لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

(الف) $$\frac{\cos n}{n} \to 0 \qquad \left(\left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}\right)$$

(ب) $$\frac{1}{2^n} \to 0 \qquad \left(\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}\right)$$

(ج) $$(-1)^n\frac{1}{n} \to 0 \qquad \left(\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\right)$$

□

ایک مسئلہ جو کہتا ہے کہ استمراری تفاعل کی مرتکز ترتیب پر اطلاق سے مرتکز ترتیب ملتی ہے مسئلہ 9.2 اور مسئلہ 9.3 کو وسعت دیتا ہے۔ ہم اس مسئلے کو بغیر ثبوت کے پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.4: استمراری تفاعل مسئلہ برائے ترتیبات
فرض کریں $\{a_n\}$ حقیقی اعداد کی ترتیب ہے۔ اگر $a_n \to L$ ہو اور f ایسا تفاعل ہو جو L پر استمراری اور تمام a_n پر معین ہو تب $f(a_n) \to f(L)$ ہو گا۔

مثال 9.10: دکھائیں کہ $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$ ہو گا۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\frac{n+1}{n} \to 1$ ہے۔ مسئلہ 9.4 میں $f(x) = \sqrt{x}$ اور $L = 1$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$$

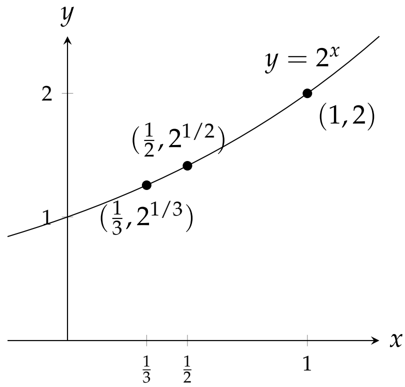
$\square$

فنیات

ترتیب $\{2^{1/n}\}$: کیلکولیٹر میں 2 لکھ کر بار بار جذر لینے سے کیا حاصل ہو گا؟ آپ دیکھیں گے کہ جوابات ایسی ترتیب دیتے ہیں جو 1 کو مرتکز ہے۔ یہ ترتیب درج ذیل ہے۔ کیلکولیٹر استعمال کر کے اس ترتیب کو خود حاصل کریں۔

n	$2^{1/n}$
2	1.414 213 562
4	1.189 207 115
8	1.090 507 733
64	1.010 889 286
256	1.002 711 275
1024	1.000 677 131
16384	1.000 042 307

درج بالا جدول میں کیا ہو رہا ہے؟ ترتیب $\{\frac{1}{n}\}$ عدد 0 کو مرتکز ہے۔ مسئلہ 9.4 میں $a_n = \frac{1}{n}$ ، $f(x) = 2^x$ اور $L = 0$ لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $2^{1/n} = f(\frac{1}{n}) \to f(L) = 2^0 = 1$ ہو گا۔ چونکہ 2 کے یک بعد دیگرے جذر، ترتیب $\{2^{1/n}\}$ کی ذیلی ترتیب $2^{1/2}, 2^{1/4}, 2^{1/8}, \dots$ دیتے ہیں لٰہذا یہ جذر بھی 1 کو مرتکز ہو گا (شکل 9.11)۔



شکل 9.11: جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{1}{n} \to 0$ اور $2^{1/n} \to 2^0$ ہوتے ہیں۔

قاعدہ لھوپیٹال کا استعمال

اگلا مسئلہ ہمیں قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے چند ترتیبات کے حد تلاش کرنے کے قابل بناتا ہے۔

مسئلہ 9.5: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ تمام $x \geq n_0$ کے لئے معین ہے اور $\{a_n\}$ حقیقی اعداد کی ایک ایسی ترتیب ہے کہ تمام $n \geq n_0$ کے لئے $a_n = f(n)$ ہے۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\lim x \to \infty f(x) = L$ ہے۔ تب ہر مثبت عدد ϵ کے لئے ایسا عدد M پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$x > M \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

فرض کریں عدد صحیح N عدد M سے بڑا جبکہ n_0 کے برابر یا اس سے بڑا ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$n > N \quad \implies \quad a_n = f(n)$$
$$|a_n - L| = \left|f(n) - L\right| < \epsilon$$

□

مثال 9.11: دکھائیں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

حل: تفاعل $\frac{\ln x}{x}$ تمام $x \geq 1$ کے لئے معین ہے اور مثبت عدد صحیح کے لئے اس ترتیب سے اتفاق کرتا ہے۔ یوں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ مسئلہ 9.5 کے تحت $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ (اگر موجود ہو) کے ساتھ اتفاق کرے گا۔ قاعدہ لھوپیٹال کی ایک استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

یوں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ہو گا۔ □

قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے ترتیب کا حد تلاش کرتے ہوئے ہم n کو استمراری حقیقی متغیر تصور کر کے اس کو n کے لحاظ سے تفرق کرتے ہیں۔اس طرح ہمیں $\{a_n\}$ کا کلیہ دوبارہ لکھنے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے، جیسا ہمیں مثال 9.11 میں کرنا پڑا۔

مثال 9.12: حد $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$ تلاش کریں۔

حل: قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} = \infty$$

□

عموماً پائے جانے والے حد

جدول 9.2 میں عموماً پائے جانے والے حد دیے گئے ہیں جہاں کلیہ 3 تا 6 میں $n \to \infty$ کرتے ہوئے x مستقل رہتا ہے۔ پہلا حد مثال 9.11 سے ہے۔ اگلے دو حد تلاش کرنے کے لئے لوگارتھم لے کر مسئلہ 9.4 استعمال کریں۔ باقی ثبوت ضمیمہ میں دیے گئے ہیں۔

مثال 9.13: ایک ترتیب کا n واں جزو $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ ہے۔ کیا یہ ترتیب مرتکز ہے؟ اگر ترتیب مرتکز ہو تب اس کا حد تلاش کریں۔

حل: حد کی تلاش نا قابل معلوم قیمت 1^∞ دیتی ہے۔ ہم a_n کا قدرتی لوگارتھم لے کر $\infty \cdot 0$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\ &= n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\end{aligned}$$

جدول 9.2: عموماً پائے جانے والے حد

شمار	حد
1	$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3	$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$
4	$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (\lvert x\rvert < 1)$
5	$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$
6	$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

یوں

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) && \infty\cdot 0\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} && \text{قاعدہ لھوپیٹال}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2
\end{aligned}$$

ہو گا۔ چونکہ $\ln a_n \to 2$ ہے اور $f(x) = e^x$ استمراری ہے لہٰذا مسئلہ 9.4 کے تحت $a_n = e^{\ln a_n} \to e^2$ ہو گا۔ ترتیب $\{a_n\}$ عدد e^2 پر مرتکز ہے۔ □

جذر تلاش کرنے کی ترکیب نیوٹن

درج ذیل مساوات

$$f(x) = 0 \tag{9.3}$$

سے مراد

$$g(x) = f(x) + x = x \tag{9.4}$$

کا حل لیا جا سکتا ہے جہاں دونوں اطراف x جمع کیا گیا ہے۔ اس معمولی تبدیلی کی بنا اس مساوات کو کمپیوٹر پر ترکیب پکا غ[20] سے حل[21] کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔

اگر g کے دائرہ کار میں g کا سعت بھی شامل ہو تب ہم دائرہ کار میں نقطہ x_0 سے شروع کر کے g سے یک بعد دیگرے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad x_3 = g(x_2), \quad ,\cdots \tag{9.5}$$

سادہ پابندیاں، جنہیں جلد پیش کیا جائے گا، لاگو کرتے ہوئے کلیہ توالی $x_{n+1} = g(x_n)$ سے حاصل ترتیب ایک ایسے نقطہ x پر مرتکز ہو گی جس پر $g(x) = x$ ہو گا۔ چونکہ اس نقطہ پر

$$f(x) = g(x) - x = x - x = 0 \tag{9.6}$$

ہو گا لہٰذا یہ نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہو گا۔

وہ نقطہ جس پر $g(x) = x$ ہو g کا مقررہ نقطہ[22] کہلاتا ہے۔ہم مساوات 9.6 سے دیکھتے ہیں کہ g کے مقررہ نقطے f کے جذر ہیں۔

مثال 9.14: ترکیب کی پرکھ

□

[20] Picard's method
[21] فرانسیسی ریاضی دان شاغل مل پکاغ [1856-1941]
[22] fixed point

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم