احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

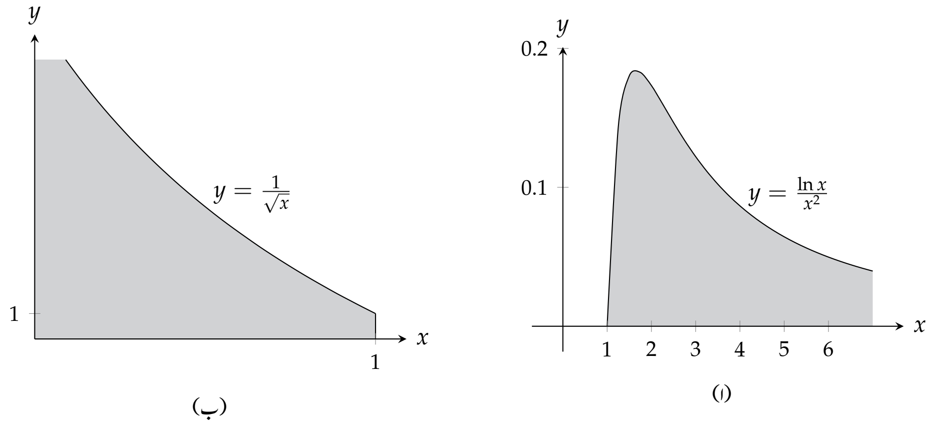
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



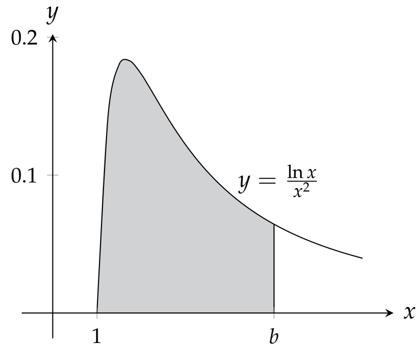
شکل 8.16: کیا ان منحنیات کے نیچے رقبے متناہی ہیں؟

8.6 غیر مناسب تکمل

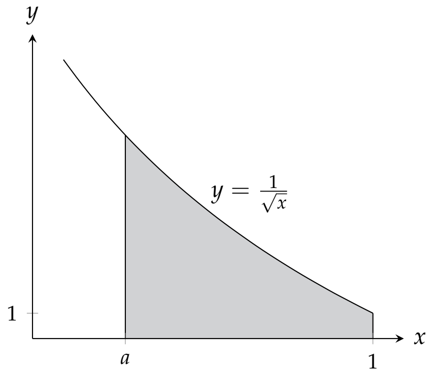
اب تک قطعی تکمل پر ہم دو شرائط لاگو کرتے آ رہے ہیں۔ پہلی شرط میں تکمل کا دائرہ کار a تا b کا متناہی ہونا لازمی تھا۔ دوسری شرط میں متکمل کا سعت متناہی ہونا ضروری تھا۔ حقیقت میں ہمیں عموماً ایسی صورت سے واسطہ پڑتا ہے جہاں ان میں سے ایک شرط یا دونوں شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں۔ زیر منحنی $y = \frac{\ln x}{x^2}$ وقفہ $x = 1$ تا $x = \infty$ رقبہ، لامتناہی دائرہ کار کی مثال ہے (شکل 8.16-الف)۔ اسی طرح زیر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ وقفہ $x = 0$ تا $x = 1$ رقبہ، لامتناہی سعت کی مثال ہے (شکل 8.16-ب)۔ ہم دونوں مثالوں پر ایک ہی طرح غور کرتے ہیں۔ ہم پوچھتے ہیں کہ دائرہ کار ذرہ کم کرنے سے تکمل کتنا ہو گا اور اس کے بعد دائرہ کار کو لامتناہی تک پہنچاتے ہوئے تکمل کا حد تلاش کرتے ہیں۔ اسی طرح ہم متکمل کو متناہی رکھتے ہوئے تکمل دریافت کر کے متکمل کو لامتناہی تک پہنچاتے ہوئے تکمل کا حد تلاش کرتے ہیں۔

مثال 8.38: کیا $x = 1$ تا $x = \infty$ منحنی $y = \frac{\ln x}{x^2}$ کے نیچے رقبہ متناہی ہے؟ ایسا ہونے کی صورت میں اس کی قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم $x = 1$ تا $x = b$ اس منحنی کے نیچے رقبہ تلاش کر کے $b \to \infty$ کی صورت میں رقبے کی حد تلاش کرتے ہیں۔ اگر



شکل 8.17: زیر منحنی رقبہ (مثال 8.38)



شکل 8.18: زیر منحنی رقبہ (مثال 8.39)

حد متناہی ہو، ہم اس کو لامتناہی منحنی کے نیچے رقبہ تصور کرتے ہیں (شکل 8.17)۔ آئیں $x = 1$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \Big[(\ln x)\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big]_1^b - \int_1^b \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln b}{b} - \Big[\frac{1}{x}\Big]_1^b \\ &= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\end{aligned}$$

بالائی حد $b \to \infty$ کرتے ہوئے رقبے کی حد تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\Big] &= -\Big[\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\Big] - 0 + 1 \\ &= -\Big[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\Big] + 1 = 0 + 1 = 1 \qquad \text{قاعدہ لھوپیٹال}\end{aligned}$$

یوں تکملی اظہار میں $x = 1$ تا $x = \infty$ زیر منحنی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

□

مثال 8.39: کیا $x = 0$ تا $x = 1$ زیر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ رقبہ متناہی ہے؟ اگر ایسا ہو تب رقبہ کتنا ہو گا؟

حل: ہم $x = a$ تا $x = 1$ رقبہ تلاش کر کے $a \to 0^+$ کی صورت میں رقبے کی حد پر نظر ڈالتے ہیں۔ اگر یہ حد متناہی ہو تب ہم اس کو 0 تا 1 زیر منحنی رقبہ مانتے ہیں (شکل 8.18)۔

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

اب $a \to 0^+$ کرتے ہوئے رقبے کا حد تلاش کرتے ہیں۔

$$\lim_{a\to 0^+}(2 - 2\sqrt{a}) = 2 - 0 = 2$$

یوں تکملی اظہار میں 0 تا 1 زیر منحنی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$$

□

غیر مناسب تکمل

مثال 8.38 اور مثال 8.39 میں تکمل غیر مناسب ہیں۔

تعریف: وہ تکمل جن کے حد لامتناہی ہوں اور وہ تکمل جن کے متکمل وقفہ تکمل کے کسی نقطہ پر لامتناہی قیمت رکھتا ہو غیر مناسب تکمل کہلاتے ہیں۔ اگر تکمل کا حد موجود ہو تب اس حد کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ا. اگر وقفہ $[a, \infty)$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.24}$$

ب. اگر وقفہ $(-\infty, b]$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.25}$$

ج. اگر وقفہ $(a, b]$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.26}$$

د. اگر وقفہ $[a, b)$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.27}$$

اگر تکمل کا حد متناہی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ غیر مناسب تکمل مرتکز ہے اور تکمل کے حد کو اس غیر مناسب تکمل کی قیمت تصور کرتے ہیں۔ اگر تکمل کا حد غیر موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ غیر مناسب تکمل منفرج ہے۔

□

تعریف کی پہلی شق مثال 8.38 میں نظر آتی ہے:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{بالائی حد لا متناہی ہے}$$

تعریف کی تیسری شق مثال 8.39 میں نظر آتی ہے:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2 \qquad \text{تکمل کے زیریں حد پر متکمل لامتناہی ہے}$$

مذکورہ بالا دونوں صورتوں میں تکمل کا حد متناہی ہے۔ اگلی مثال میں تکمل منفرج ہے۔

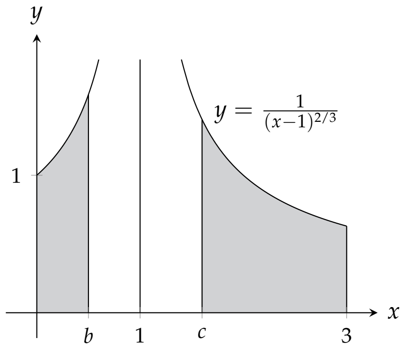
مثال 8.40: منفرج غیر مناسب تکمل
درج ذیل تکمل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

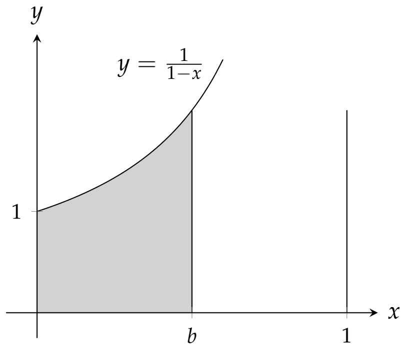
حل: وقفہ $[0, 1)$ پر متکمل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ استمراری ہے لیکن $a \to 1^-$ کرنے سے یہ لامتناہی ہوتا ہے (شکل 8.19)۔ ہم تکمل کی قیمت حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to 1^-}\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b\\ &= \lim_{b\to 1^-}[-\ln(1-b)+0] = \infty\end{aligned}$$

تکمل کا حد لامتناہی ہے لٰہذا یہ منفرج تکمل ہے۔ □



شکل 8.20: اندرون نقطہ پر لامتناہی متکمل (مثال 8.41)



شکل 8.19: غیر مناسب منفرج تکمل (مثال 8.40)

مذکورہ بالا تعریف کو وسعت دیتے ہوئے ان تکمل جن کے زیریں اور بالائی حدود دونوں لامتناہی ہوں پر لاگو کیا جاتا ہے۔ ہم ان پر اسی حصے میں بعد میں غور کریں گے۔ وقفہ تکمل کے اندر نقطہ d پر لامتناہی متکمل کی صورت پر بھی یہ تعریف لاگو کی جاتی ہے۔ ہم ایسے تکمل کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے a تا b تکمل کو a تا d تکمل اور d تا b تکمل کا مجموعہ لیتے ہیں۔

تعریف: اگر وقفہ $[a,b]$ کے اندرون کسی نقطہ d پر متکمل f کی قیمت لامتناہی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.28}$$

اگر a تا d اور d تا b تکمل مرتکز ہوں تب a تا b تکمل مرتکز ہو گا ورنہ a تا b تکمل منفرج ہو گا۔

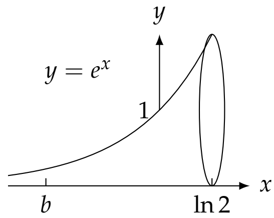
□

مثال 8.41: اندرونی نقطہ پر لامتناہی
درج ذیل تکمل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$$

حل: متکمل $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ نقطہ $x = 1$ پر لامتناہی ہے جبکہ وقفہ $[0,1)$ اور $(1,3]$ پر یہ استمراری ہے (شکل 8.20)۔ وقفہ $[0,3]$ پر تکمل کی مرکوزیت وقفہ 0 تا 1 اور وقفہ 1 تا 3 پر تکمل کی مرکوزیت پر منحصر ہے۔ وقفہ $[0,1]$ پر

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}\\ &= \lim_{b\to 1^-}[3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}] = 3\end{aligned}$$



شکل 8.21: ٹھوس بگل کا حجم (مثال 8.42)

اور وقفہ $[1,3]$ پر

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{c\to 1^+} [3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

ہو گا۔ دونوں حد متناہی ہیں لہٰذا وقفہ 0 تا 3 تفاعل f کا تکمل مرتکز ہو گا اور اس کی قیمت $3 + 3\sqrt[3]{2}$ ہو گی۔ □

مثال 8.42: محور x کے عمودی ایک بگل کا رقبہ عمودی تراش دائری قرص ہیں جن کے قطر وقفہ $-\infty < x \leq \ln 2$ پر محور x سے منحنی $y = e^x$ تک ہیں (شکل 8.21)۔ اس بگل کا حجم تلاش کریں۔

حل: ایک علامتی رقبہ عمودی تراش کا رقبہ

$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}$$

ہو گا۔ ہم $b \to -\infty$ کرتے ہوئے b تا $\ln 2$ تک حجم کی حد کو بگل کا حجم مانتے ہیں۔ ہم حصہ 6.2 کی طرح ٹکیاں کاٹ کر حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}H &= \int_b^{\ln 2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}e^{2x}\bigg|_b^{\ln 2} \\ &= \frac{\pi}{8}(e^{\ln 4} - e^{2b}) = \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b})\end{aligned}$$

اب $b \to -\infty$ کرنے سے $e^{2b} \to 0$ لہٰذا $H \to \frac{\pi}{8}(4-0) = \frac{\pi}{2}$ ہوتا ہے۔ یوں بگل کا حجم $\frac{\pi}{2}$ ہو گا۔ □

مثال 8.43: تکمل $\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \Big(\frac{2}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x && \text{جزوی کسر} \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big[2\ln(x-1)-\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x\Big]_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big[\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\tan^{-1}x\Big]_2^b && \text{لوگارتھمی اجزاء یکجا} \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big[\ln\frac{(b-1)^2}{b^2+1}-\tan^{-1}b\Big]-\ln\Big(\frac{1}{5}\Big)+\tan^{-1}2 \\
&= 0-\frac{\pi}{2}+\ln 5+\tan^{-1}2\approx 1.1458
\end{aligned}
$$

□

آپ نے دیکھا کہ $b\to\infty$ کر کے حد کی تلاش سے پہلے ہم نے لوگارتھمی اجزاء کو یکجا کیا۔ اگر ہم ایسا نہ کرتے تب ہمیں درج ذیل نا قابل معلوم مقدار ملتی۔

$$\lim_{b\to\infty}\left[(2\ln(b-1))-\ln(b^2+1)\right]=\infty-\infty$$

$-\infty$ سے ∞ تک تکمل

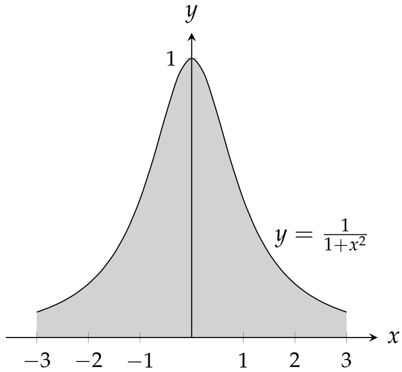
روشنی، بجلی اور صدا پر غور کرنے سے ایسے تکمل حاصل ہوتے ہیں جن کے دونوں حد لا متناہی ہوتے ہیں۔ اگلا تعریف ان کی مرکوزیت پر ہے۔

تعریف: اگر وقفہ $(-\infty,\infty)$ پر f استمراری ہو اور اگر $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہے اور اس کی قیمت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.29}$$

مانتے ہیں۔ اگر دائیں ہاتھ ایک بھی تکمل منفرج ہو تب $-\infty$ سے ∞ تک f کا تکمل منفرج ہو گا۔

□



شکل 8.22: دونوں اطراف لامتناہی منحنی کے نیچے رقبہ متناہی ہے۔

ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ مساوات 8.29 میں a کی قیمت اہمیت نہیں رکھتی ہے۔ ہم a کی کوئی بھی موزوں قیمت لے کر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی مرکوزیت دریافت کر سکتے ہیں۔

تفاعل f کا $-\infty$ سے ∞ تک تکمل $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ سے مختلف ہو سکتا ہے، جو $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی عدم مرکوزیت کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

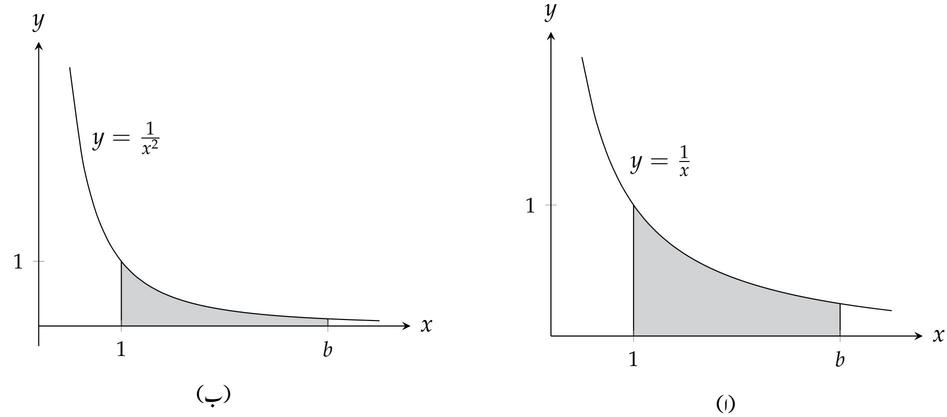
مثال 8.44:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} && \text{مساوات 8.29 میں } a=0\\
&= \lim_{b\to-\infty}[\tan^{-1}x]_b^0+\lim_{c\to\infty}[\tan^{-1}x]_0^c\\
&= \lim_{b\to-\infty}[\tan^{-1}0-\tan^{-1}b]+\lim_{c\to\infty}[\tan^{-1}c-\tan^{-1}0]\\
&= 0-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)+\frac{\pi}{2}-0=\pi
\end{aligned}$$

ہم محور x اور منحنی $y=\frac{1}{1+x^2}$ کے نیچے لامتناہی خطے کے رقبہ کو تکمل کی قیمت مانتے ہیں (شکل 8.22)۔ □

تکمل $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

تکمل $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ کی مرکوزیت p پر منحصر ہے۔ اگلی مثال میں $p=1$ اور $p=2$ کے لئے اس حقیقت کو دیکھتے ہیں۔



شکل 8.23: ایک منحنی کے نیچے رقبہ لا متناہی اور دوسرے کے نیچے متناہی ہے (مثال 8.45)۔

مثال 8.45: درج ذیل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad \text{اور} \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

حل: وقفہ $[1, \infty)$ پر دونوں تفاعل استمراری ہیں اور $x \to \infty$ کرنے سے دونوں کے ترسیم محور x کے قریب آتے ہیں (شکل 8.23) لہٰذا کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں منحنیات کے نیچے رقبے متناہی ہوں گے؟ پہلے تکمل کی صورت میں

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

ہے لہٰذا تکمل منفرج ہو گا۔دوسری تکمل کی صورت میں

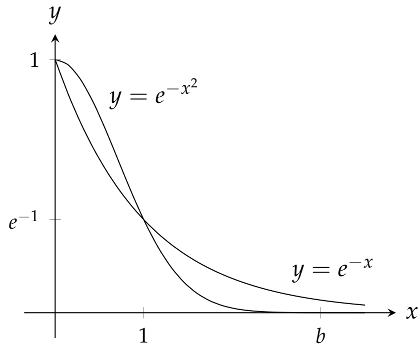
$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \Big(-\frac{1}{b} + 1 \Big) = 1$$

ہے لہٰذا تکمل مرتکز ہے اور اس کی قیمت 1 ہے۔ □

عموماً $p > 1$ کی صورت میں $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ مرتکز اور $p \leq 1$ کی صورت میں منفرج ہو گا۔

ارتکاز اور انفراج کے پرکھ

جب کسی غیر مناسب تکمل کی قیمت بلا واسطہ قابل حل نہ ہو (جیسا عموماً ہو گا) تب ہم دو اقدام طریقہ استعمال کرتے ہوئے پہلے ارتکاز ثابت کرتے ہیں اور اس کے بعد اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت دریافت کرتے ہیں۔ ارتکاز کے بنیادی پرکھ دو ہیں: تقابلی پرکھ اور تقابل حد پرکھ ہیں۔



شکل 8.24: وقفہ $x > 1$ پر ترسیم e^{-x^2} ترسیم e^{-x} کے نیچے ہے۔

مثال 8.46: تکمل $\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے ارتکاز پر غور کریں۔

حل: تعریف کی رو سے

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ چونکہ یہ تکمل غیر بنیادی ہے لہٰذا اس کو ہم بلا واسطہ حل نہیں کر سکتے ہیں۔ البتہ ہم دکھا سکتے ہیں کہ $b \to \infty$ کرتے ہوئے اس کا حد متناہی ہے۔ہم جانتے ہیں کہ $\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ متغیر b کا بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا $b \to \infty$ کرنے سے یا یہ لامتناہی ہو گا اور یا $b \to \infty$ کرنے سے اس کا حد متناہی ہو گا۔ اب ہر $x \geq 1$ کے لئے $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ہے (شکل 8.24) لہٰذا

$$\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.36788$$

ہو گا اور یوں تکمل لامتناہی نہیں ہے۔یوں

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

کسی مخصوص قیمت کو مرتکز ہو گا۔ ہم اس تکمل کی قیمت نہیں جانتے ہیں البتہ اتنا ضرور جانتے ہیں کہ تکمل کی قیمت 0.37 سے کم ہے۔ □

تفاعل e^-x^2 اور e^{-x} کا پرکھ مثال 8.46 میں کیا گیا جو درج ذیل کی ایک مخصوص صورت ہے۔

مسئلہ 8.1: تقابلی پرکھ
فرض کریں وقفہ $[a, \infty)$ پر f اور g استمراری ہیں اور تمام $x \geq a$ پر $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ہے۔تب درج ذیل ہوں گے۔

ا. اگر $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو تب $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔

ب. اگر $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ منفرج ہو تب $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ منفرج ہو گا۔

مثال 8.47: (ا) چونکہ $[1,\infty)$ پر $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ اور $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ مرتکز ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔

(ب) چونکہ $[1,\infty)$ پر $\frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} \ge \frac{1}{x}$ اور $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ منفرج ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-0.1}}$ منفرج ہو گا۔ □

مسئلہ 8.2: تقابل حد پرکھ
اگر $[a,\infty)$ پر مثبت تفاعل f اور g استمراری ہوں اور اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad\qquad (0 < L < \infty)$$

ہو تب $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں یا مرتکز ہوں گے اور یا دونوں منفرج ہوں گے۔

حصہ 7.7 کی زبان میں مسئلہ 8.2 کہتا ہے کہ اگر $x \to \infty$ پر دو تفاعل ایک ہی شرح سے بڑھتے ہوں تب a سے ∞ تک ان دونوں کے تکمل کا رویہ ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ ان دو تکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔

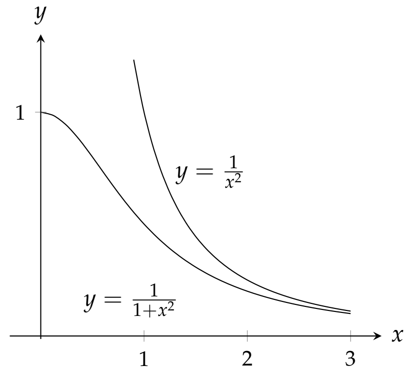
مثال 8.48: درج ذیل کا آپس میں تقابل حد پرکھ کی مدد سے موازنہ کریں۔

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

حل: ہم $f(x) = \frac{1}{x^2}$ اور $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ لیتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0+1 = 1\end{aligned}$$

متناہی مثبت حد ہے (شکل 8.25)۔ اب چونکہ $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ مرتکز ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ بھی مرتکز ہو گا۔



شکل 8.25: تفاعل برائے مثال 8.48

دونوں تکمل کی قیمتیں البتہ مختلف ہیں۔

مثال 8.45

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

□

مثال 8.49: چونکہ $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$ مرتکز ہے اور

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1/e^x}{3/(e^x+5)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{3e^x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3}+0 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

مثبت متناہی حد ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔ جہاں تک غیر متناسب تکمل کی ارتکاز کی بات ہے $\frac{3}{e^x+5}$ اور $\frac{1}{e^x}$ کا رویہ ایک دوسرے جیسا ہے۔ □

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم