

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
278	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
311	دیگر شرح تبدیلی	3.7

327	4	تفرق کا استعمال
327	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک درجی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
364	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
371	۱	ضمیمہ دوم

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018ء



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 4

### تفرق کا استعمال

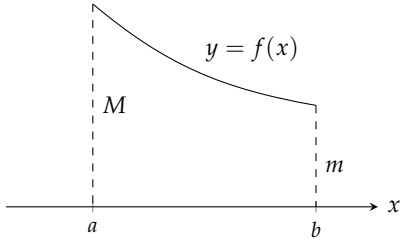
اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ ہم تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی کرتے ہیں اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کی صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔ مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ مکمل احصاء کی راہ ہموار کرتا ہے۔

#### 4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں

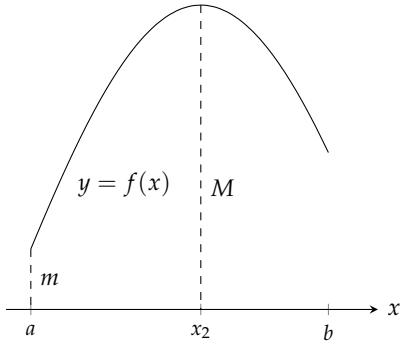
اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

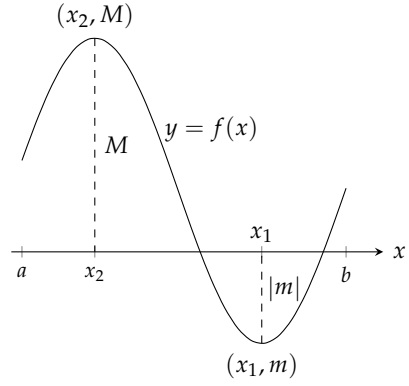
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کا اس دائرہ کار پر مطلق بلند تر قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت ہو گا جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں ان انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ مکمل احصاء کی نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔



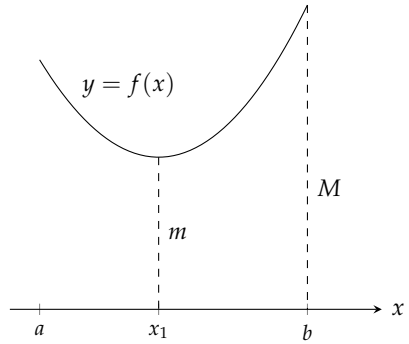
(ب) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم آخری نقطوں پر ہے۔



(د) زیادہ سے زیادہ اندرونی نقطہ جبکہ کم سے کم آخری نقطہ پر ہے۔

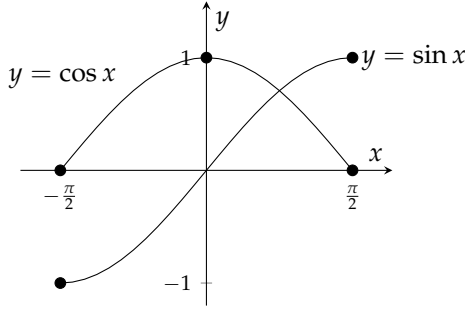


(ل) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔



(ج) کم سے کم اندرونی نقطہ جبکہ زیادہ سے زیادہ آخری نقطہ ہے۔

شکل 4.1: زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔



شکل 4.2: ترسیم برائے مثال 4.1

**مسئلہ 4.1:** استمراری تفاعل کا مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ  
بند دائرہ کار  $I$  کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل  $f$  کا  $I$  پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت  $M$  اور مطلق کم سے کم قیمت  $m$  پایا جائے گا۔ یعنی  $I$  میں ایسا  $x_1$  اور  $x_2$  پایا جائے گا کہ  $f(x_1) = m$  اور  $f(x_2) = M$  ہوں اور  $I$  میں تمام  $x$  کے لئے  $m \leq f(x) \leq M$  ہو (شکل 4.1)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

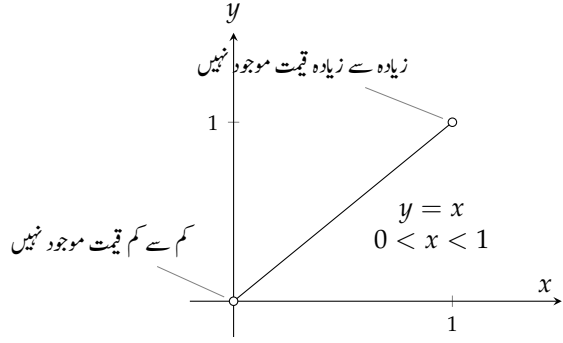
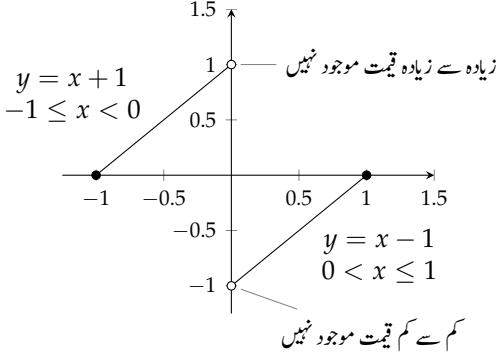
**مثال 4.1:** وقفہ  $[-\pi/2, \pi/2]$  پر تفاعل  $f(x) = \cos x$  ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور دو بار کم سے کم قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔ اسی وقفے پر تفاعل  $g(x) = \sin x$  ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور ایک بار کم سے کم قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل 4.2)۔ □

جیسا شکل 4.3 اور شکل 4.4 واضح کرتے ہیں مسئلہ 4.1 میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.4 میں تفاعل

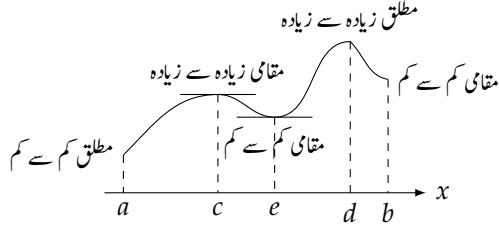
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

دکھایا گیا ہے جو وقفہ  $[-1, 1]$  پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ  $x = 0$  پر، جس کی بنا تفاعل کا نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی اس کی کوئی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔



شکل 4.4: واحد ایک نقطہ عدم استمرار کی بنا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں غیر یقینی ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.3: کھلا وقفہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں ہے۔



شکل 4.5: مقامی اور مطلق انتہا۔

مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

شکل 4.5 میں تقابل کے پانچ انتہا نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اس تقابل کا کم سے کم نقطہ  $a$  پر ہے اگرچہ  $e$  پر بھی  $x$  کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے  $f$  کی قیمت کم ہے۔ نقطہ  $c$  پر تقابل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے جبکہ  $d$  پر اس کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔

تعریف: مطلق انتہائی قیمتیں

فرض کریں تقابل  $f$  کا دائرہ کار  $D$  ہے۔ نقطہ  $c$  پر تقابل  $f$  کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تب پائی جائے گی جب  $D$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \leq f(c)$$

اور  $D$  میں  $c$  پر تب  $f$  کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جائے گی جب  $D$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \geq f(c)$$

□

مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم کو مطلق انتہا<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ انہیں عالمگیر<sup>2</sup> انتہا بھی کہتے ہیں۔

ایک جیسے قاعدہ کے تفاعل کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

مثال 4.2:

مطلق انتہا	دائرہ کار $D$	قاعدہ تفاعل
مطلق زیادہ سے زیادہ نہیں ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے	$(-\infty, \infty)$	(i) $y = x^2$
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے	$[0, 2]$	(ب) $y = x^2$
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت موجود نہیں ہے	$(0, 2]$	(ج) $y = x^2$
کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے	$(0, 2)$	(د) $y = x^2$

□

شکل 4.6 دیکھیں۔

تعریف: مقامی انتہا قیمت

تفاعل  $f$  کا کھلے دائرہ کار  $D$  میں اندرونی نقطہ  $c$  پر اس صورت مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جب  $D$  میں کسی بھی کھلا وقفہ جس میں  $c$  پایا جاتا ہو میں تمام  $x$  کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ  $c$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

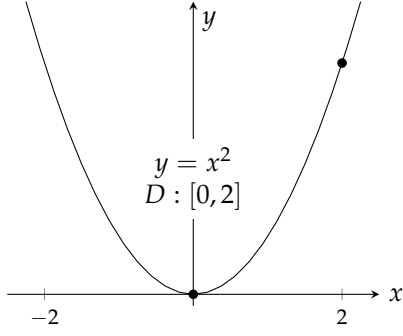
$$f(x) \geq f(c)$$

□

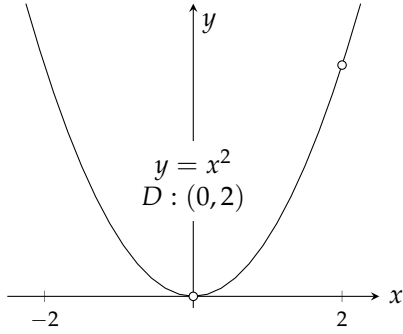
ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفہ کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔ یوں آخری سر  $c$  پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلا وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل 4.5 میں تفاعل  $f$  کا  $c$  اور  $d$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ  $a$ ،  $e$  اور  $b$  پر اس کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہیں۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت بھی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اپنی پڑوس میں بھی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ یوں تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتوں کی جدول میں مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی کم سے کم قیمتوں کی جدول میں مطلق کم سے کم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

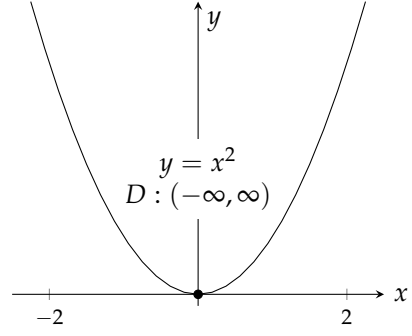
extrema<sup>1</sup>  
global<sup>2</sup>



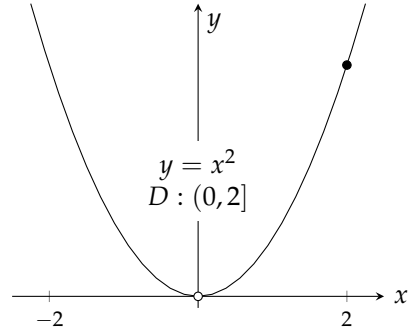
(ب) مطلق کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہیں



(د) نا مطلق زیادہ سے زیادہ اور نا مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(i) مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے

شکل 4.6: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال 4.2)۔

## انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھتا ہے تفاعل کے انتہا کی حصول کے لئے صرف چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہوگی۔

مسئلہ 4.2: یک درجی مسئلہ برائے مقامی انتہا فرض کریں تفاعل  $f$  کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ  $c$  پر  $f$  کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو اور  $c$  پر  $f'$  معین ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر  $f'(c)$  کی قیمت صفر ہوگی ہم دکھاتے ہیں کہ  $f'(c)$  مثبت نہیں ہو سکتا ہے اور کہ  $f'(c)$  منفی نہیں ہو سکتا ہے۔ صفر وہ واحد عدد ہے جو نا مثبت اور نا منفی ہے لہذا  $f'(c)$  صفر ہوگا۔

فرض کریں کہ  $c$  پر  $f$  کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.7)۔ یوں  $c$  کے قریبی پڑوس میں تمام  $x$  پر  $f(x) - f(c) \leq 0$  ہوگا۔ چونکہ  $c$  اندرونی نقطہ ہے لہذا  $f'(c)$  کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ  $x = c$  پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور  $f'(c)$  کے برابر ہیں۔ ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔ چونکہ  $c$  کے دائیں جانب  $x - c > 0$  اور  $f(x) \leq f(c)$  ہیں لہذا

$$(4.1) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ہوگا۔ اسی طرح  $c$  کے بائیں جانب  $x - c < 0$  اور  $f(x) \leq f(c)$  ہیں لہذا

$$(4.2) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

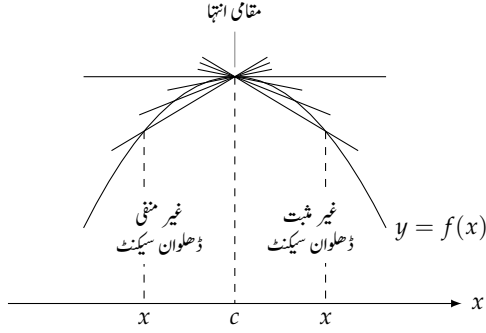
ہوگا۔ مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کو ملا کر  $f'(c) = 0$  ملتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔ مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے  $f(x) \geq f(c)$  استعمال کرنا ہوگا جس سے مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب  $f'(c) = 0$  ہوگا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔





شکل 4.7: اندرونی نقطہ پر مقامی انتہا پر ڈھلوان صفر ہو گی (مسئلہ 4.2)۔

1. اندرونی نقطہ جہاں  $f' = 0$  ہو۔

2. اندرونی نقطہ جہاں  $f'$  غیر معین ہو۔

3.  $f$  کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل  $f$  کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں  $f'$  غیر معین یا صفر ہو کو نقطہ فاصل<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

□

#### خلاصہ

تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کی دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں۔

عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ 4.1 ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔ اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جاسکتا ہے کہ آیا نقطہ پر زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.3: دائرہ کار  $[-2, 1]$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔  
 حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا واحد نقطہ فاصل  $f'(x) = 2x = 0$  یعنی  $x = 0$  پر ہوگا۔ ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل  $x = 0$  اور آخری نقطوں  $x = -2$  اور  $x = 1$  پر دیکھنی ہوں گی۔

$f(0) = 0$	نقطہ فاصل پر قیمت
$f(-2) = 4$	آخری نقطہ پر قیمت
$f(1) = 1$	آخری نقطہ پر قیمت

تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 ہے جو نقطہ  $x = -2$  پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ  $x = 0$  پر پائی جاتی ہے۔ □

سوال 1: دائرہ کار  $[-2, 1]$  پر تفاعل  $g(t) = 8t - t^4$  کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔  
 حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہوگا جہاں  $g'(t) = 0$  ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\ t^3 &= 2 \\ t &= 2^{1/3} \end{aligned}$$

ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں ہے۔ یوں تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی: (شکل 4.8)

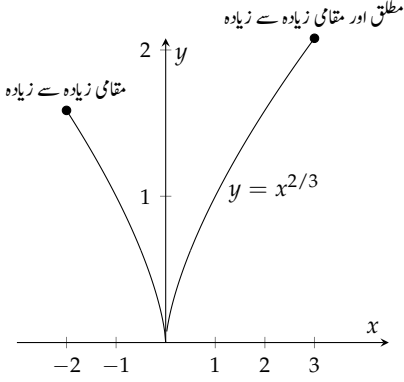
$g(-2) = -32$	مطلق کم سے کم قیمت
$g(1) = 7$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت

سوال 2: تفاعل  $h(x) = x^{2/3}$  کی  $[-2, -3]$  پر مطلق انتہائی تلاش کریں۔  
 حل: یک درجی تفرق

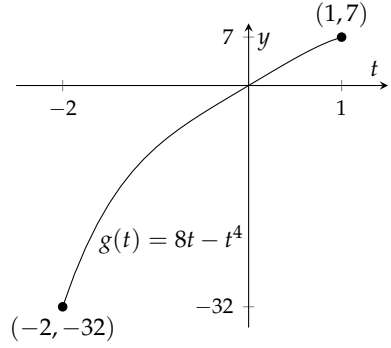
$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا ہے البتہ  $x = 0$  پر یہ غیر معین ہے۔ اس نقطہ پر اور آخری نقطوں  $x = -2$  اور  $x = 3$  پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

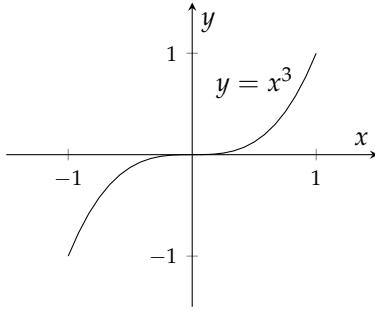
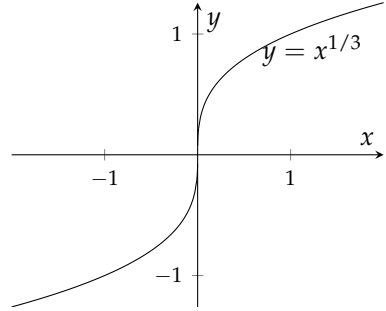
$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\ h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3} \end{aligned}$$



شکل 4.9: ترسیم برائے مثال 2



شکل 4.8: ترسیم برائے مثال 1

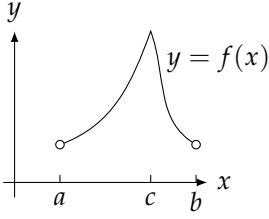
شکل 4.11:  $x = 0$  پر  $y = x^3$  کا کوئی انتہا نہیں پایا جاتا ہے اگرچہ اس نقطے پر  $y' = 3x^2 = 0$  ہے۔شکل 4.10: نقطہ فاصل  $x = 0$  پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت  $9^{1/3}$  ہے جو نقطہ  $x = 3$  پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ  $x = 0$  پر پائی جاتی ہے (شکل 4.9)۔

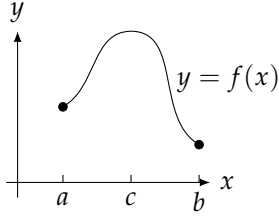
اگرچہ تفاعل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں، ضروری نہیں ہے کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطہ پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل 4.10 اور شکل 4.11 اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

### سوالات

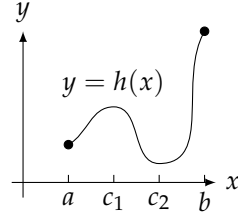
ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول



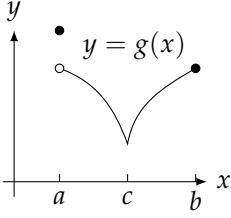
(ا)



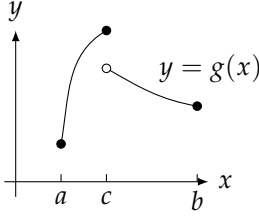
(ب)



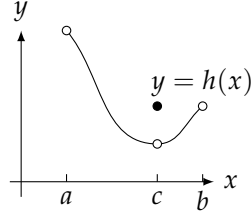
(ج)



(د)



(ه)



(و)

شکل 4.12: اشکال برائے سوال 3 تا سوال 8

کیا سوال 3 تا سوال 8 میں  $[a, b]$  کے بچے تفاعل کے مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ سمجھائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ 4.1 میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 3: شکل 4.12-ا

سوال 4: شکل 4.12-ب

سوال 5: شکل 4.12-ج

سوال 6: شکل 4.12-د

سوال 7: شکل 4.12-ه

سوال 8: شکل 4.12-و

بند وقفہ پر مطلق انتہا

سوال 9 تا سوال 24 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 9:  $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

سوال 10:  $f(x) = -x - 4, \quad -4 \leq x \leq 1$

سوال 11:  $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 2$

سوال 12:  $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

سوال 13:  $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \leq x \leq 2$

سوال 14:  $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$

سوال 15:  $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 16:  $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال 17:  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1$

سوال 18:  $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \leq x \leq 0$

سوال 19:  $f(\theta) = \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

سوال 20:  $f(x) = \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

سوال 21:  $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

سوال 22:  $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

سوال 23:  $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \leq t \leq 3$

سوال 24:  $f(t) = |t - 5|, \quad -4 \leq t \leq 7$

سوال 25 تا سوال 28 میں تفاعل کی مطلق کم سے کم اور مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال 25:  $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 26:  $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 27:  $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \leq \theta \leq 1$

سوال 28:  $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \leq \theta \leq 8$

#### دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال 29 تا سوال 29 میں دی گئے دائرہ کار پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال 29:

$$k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < \infty \quad .$$

$$f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x \leq 2 \quad .$$

$$g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < 2 \quad .$$

$$l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty \quad .$$

$$h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2 \quad .$$

سوال 30:

$$k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \leq 1 \quad .$$

$$f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad .$$

$$g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \leq 1 \quad .$$

$$l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0 \quad .$$

$$h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1 \quad .$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 31: اگرچہ  $x = 0$  پر  $f(x) = |x|$  ناقابل تفرق ہے نقطہ  $x = 0$  پر  $f$  کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ کیا یہ مسئلہ 4.2 کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ  $c$  ہو تب مسئلہ 4.2 کیوں ناقابل استعمال ہوگا؟

سوال 33: اگر جفت تفاعل  $f(x)$  کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت  $x = c$  پر پائی جاتی ہو تب  $x = -c$  پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 34: اگر طاق تفاعل  $g(x)$  کی مقامی کم سے کم قیمت  $x = c$  پر پائی جاتی ہو تب کیا  $x = -c$  پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل  $f(x)$  کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونا کی صورت میں کیا ہوگا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 36: وقفہ  $[0, 1]$  پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا  $x = 0$  پر ناکوئی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 37 تا سوال 42 میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں  $f' = 0$  ہو۔ بعض اوقات  $f'$  ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں  $f'$  غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ه. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں اور جن نقطوں پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں تلاش کریں۔

$$\text{سوال 37: } f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad \left[-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}\right]$$

$$\text{سوال 38: } f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad \left[-\frac{3}{4}, 3\right]$$

$$\text{سوال 39: } f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$$

$$\text{سوال 40: } f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad \left[-1, \frac{10}{3}\right]$$

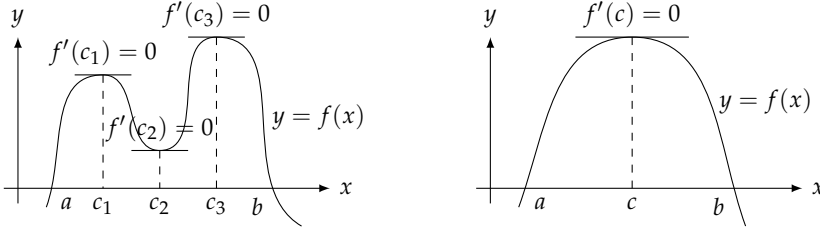
$$\text{سوال 41: } f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$$

$$\text{سوال 42: } f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$$

## 4.2 مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لحہ  $t = 0$ ) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی  $t$  سیکنڈوں میں  $s = 4.9t^2$  m کا فاصلہ طے کرے گا۔ اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لحہ  $t$  پر اس جسم کی سمتی رفتار  $v = \frac{ds}{dt} = 9.8 \text{ m s}^{-1}$  اور اسراع  $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  ہو گی۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کی اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاؤ تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ نتیجہ صریح کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 4.13: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل  $x$  محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

### مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل  $f(x)$  محور  $x$  کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب  $f(x)$  کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مثل رول (1652 – 1719) کا 300 سال پرانا مسئلہ رول ہمیں یقین دہانی کرتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

### مسئلہ 4.3: مسئلہ رول<sup>4</sup>

فرض کریں بند وقفہ  $[a, b]$  کے ہر نقطہ پر تفاعل  $y = f(x)$  استمراری ہے اور وقفہ کی اندرون  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

$$f(a) = f(b) = 0$$

تب  $(a, b)$  میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ  $c$  ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل 4.13)۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: چونکہ  $f$  استمراری ہے لہذا  $[a, b]$  پر  $f$  کے مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

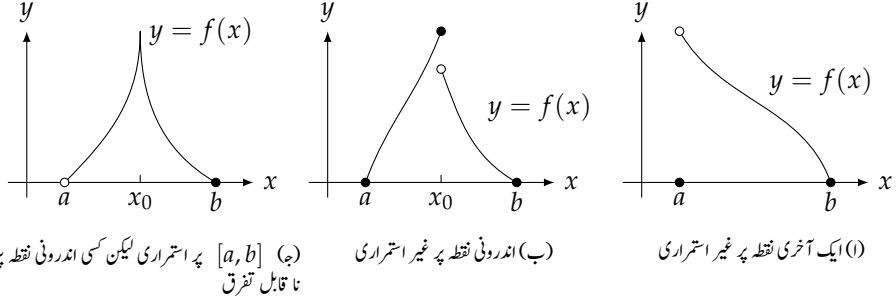
1. ان اندرونی نقطوں پر جہاں  $f'$  ہو۔

2. ان اندرونی نقطوں پر جہاں  $f'$  غیر معین ہو۔

3. تفاعل کے دائرہ کار کی آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں  $a$  اور  $b$  ہیں۔

<sup>4</sup>Rolle's theorem





شکل 4.14: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر  $f$  کا تفرق پایا جاتا ہے۔ یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ  $c$  پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ 4.2 کے تحت  $f'(c) = 0$  ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت دونوں  $a$  یا  $b$  پر پائے جاتے ہوں تب  $f$  مستقل ہو گا۔ یوں  $f' = 0$  ہو گا لہذا وقفے کے کسی بھی نقطہ کو  $c$  لیا جاسکتا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

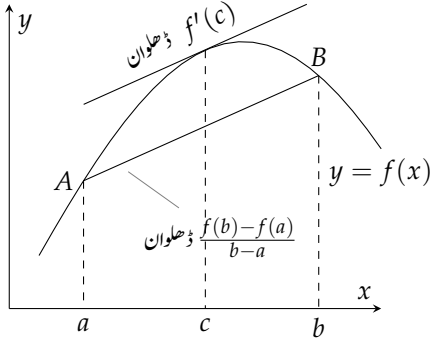
مسئلہ 4.3 میں دیے شرائط لازمی ہیں۔ اگر صرف ایک نقطہ پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترمیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل 4.14)۔

مثال 4.4: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ  $[-3, 3]$  کے ہر نقطہ پر استمراری ہے اور  $(-3, 3)$  کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے۔

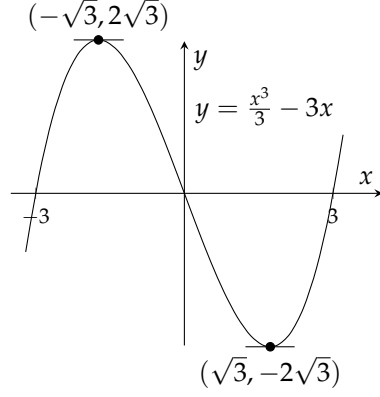
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

چونکہ  $f(-3) = f(3) = 0$  ہے لہذا مسئلہ رول کے تحت  $a = -3$  اور  $b = 3$  کھلا وقفہ کے بیچ کم سے کم ایک نقطہ پر  $f' = 0$  ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں  $f'(x) = x^2 - 3$  دو نقطوں  $x = \sqrt{3}$  اور  $x = -\sqrt{3}$  پر صفر کے برابر ہے (شکل 4.15)۔

□



شکل 4.16: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ  $A$  اور  $B$  کے بیچ کہیں پر تقاطع کا مماس قطع  $AB$  کے متوازی ہو گا۔



شکل 4.15: ترسیم برائے مثال 4.4

### مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترجمانی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل 4.16)۔ قطع  $AB$  کے متوازی نقطہ  $A$  اور  $B$  کے بیچ کہیں پر تقاطع کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کی ڈھلوان قطع کی ڈھلوان کے برابر ہوگی۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ اوسط قیمت فرض کریں بند وقفہ  $[a, b]$  کے ہر نقطہ پر  $y = f(x)$  استمراری ہے اور اس کی اندرون  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر  $f$  قابل تفرق ہے تب  $(a, b)$  میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

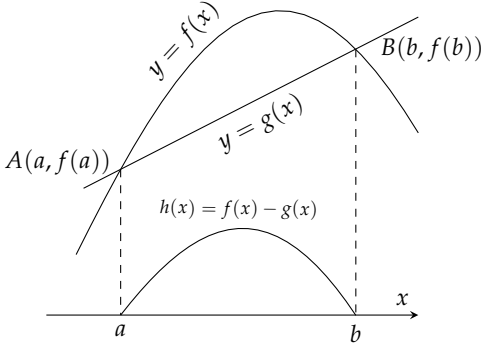
$$(4.3) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ثبوت: ہم  $f$  کی ترسیم پر دو نقطوں  $A(a, f(a))$  اور  $B(b, f(b))$  کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل 4.17)۔ یہ لکیر درج ذیل تقاطع کی ترسیم ہوگی۔

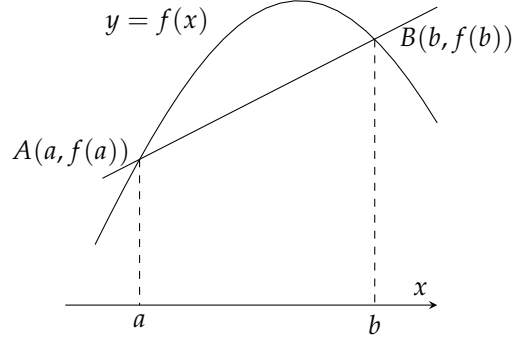
$$(4.4) \quad g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (\text{نقطہ ڈھلوان صورت})$$

نقطہ  $x$  پر  $f$  اور  $g$  کے بیچ انتصابی فاصلہ

$$(4.5) \quad \begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$



(ب)  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے بیچ افقی فاصلہ  $h(x)$  ہے۔



(i) وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  اور قطع  $AB$  کے ترسیم۔

شکل 4.17: مسئلہ اوسط قیمت۔

ہو گا۔ شکل 4.17-ب میں  $f$ ،  $g$  اور  $h$  دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل  $h$  وقفہ  $[a, b]$  پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل  $h$  وقفہ  $[a, b]$  پر استمراری اور  $(a, b)$  پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفہ پر  $f$  اور  $g$  استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ  $f$  اور  $g$  دونوں نقطہ  $A$  اور  $B$  سے گزرتے ہیں لہذا  $h(a) = h(b) = 0$  ہے۔ یوں  $(a, b)$  میں کسی نقطہ  $c$  پر  $h'(c) = 0$  ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات 4.3 میں درکار ہے۔

مساوات 4.3 کی تصدیق کی خاطر ہم  $x$  کے لحاظ سے مساوات 4.5 کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں  $x = c$  پر کرتے ہیں۔

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{تفرق})$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x = c)$$

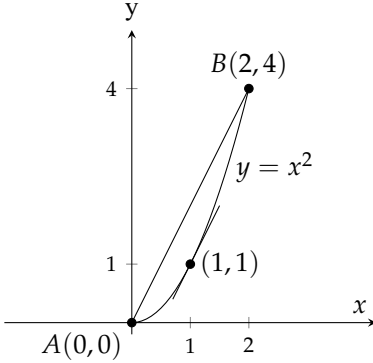
$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (h'(c) = 0)$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

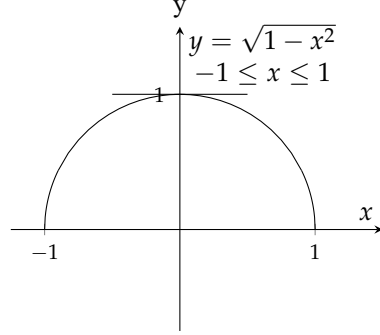
یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ  $a$  یا  $b$  پر  $f$  کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں ہے البتہ ان نقطوں پر  $f$  کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل 4.18)۔ ہم عموماً  $c$  کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ،  $c$  موجود ہے۔ اگلی مثال کی طرح



شکل 4.19: نقطہ  $c = 1$  پر مماس قطع  $AB$  کے متوازی ہے (مثال 4.5)



شکل 4.18: اگرچہ  $y = \sqrt{1-x^2}$  نقطہ  $-1$  اور  $1$  پر ناقابل تفرق ہے یہ  $[-1, 1]$  پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔

بعض اوقات ہم  $c$  کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذ و نادر ہو گا۔

مثال 4.5: وقفہ  $0 \leq x \leq 2$  پر تعامل  $f(x) = x^2$  استمراری ہے اور  $0 < x < 2$  پر یہ قابل تفرق ہے (شکل 4.19)۔ چونکہ  $f(0) = 0$  اور  $f(2) = 4$  ہیں لہذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ  $c$  پر تفرق  $f'(x) = 2x$  کی قیمت لازماً  $\frac{4-0}{2-0} = 2$  ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم  $2x = 2$  کو حل کرتے ہوئے  $x = c = 1$  حاصل کر پاتے ہیں۔ □

### طبیعی تشریح

اگر ہم  $[a, b]$  پر  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  کو  $f$  کی اوسط تبدیلی اور  $f'(c)$  کو لمحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لمحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال 4.6: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ ان 8 سیکنڈوں کے لئے گاڑی کی اوسط رفتار  $\frac{120}{8} = 15 \text{ m s}^{-1}$  ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی لمحہ رفتار پچاس ٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔ □

## نتائج صریح اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا نتیجہ صریح اس کا جواب دیتا ہے۔

نتیجہ صریح 4.1: صفر تفرق کے تفاعل مستقل ہوں گے  
اگر وقفہ  $I$  کے ہر نقطہ پر  $f'(x) = 0$  ہو تب  $I$  میں تمام  $x$  پر  $f(x) = C$  ہو گا جہاں  $C$  مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ  $I$  پر تفاعل  $f$  کی قیمت مستقل ہو تب  $I$  پر  $f$  قابل تفرق ہو گا اور  $I$  میں تمام  $x$  پر  $f'(x) = 0$  ہو گا۔ نتیجہ صریح اس کا الٹ پیش کرتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ  $I$  پر  $f$  کی قیمت مستقل ہے۔ ہم  $I$  میں ہر دو نقطوں  $x_1$  اور  $x_2$  پر  $f(x_1) = f(x_2)$  دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں  $x_1$  اور  $x_2$  وقفہ  $I$  میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بائیں سے دائیں جانب ہے لہذا  $x_1 < x_2$  ہو گا۔ یوں  $[x_1, x_2]$  پر  $f$  مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ کہ ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔ یوں  $x_1$  اور  $x_2$  کے بیچ کسی نقطہ  $c$  پر

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

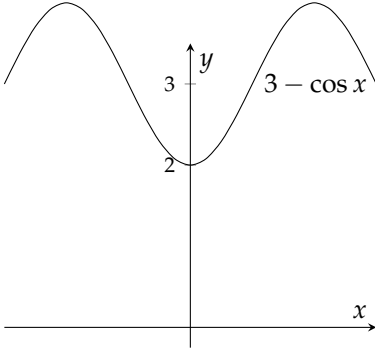
ہو گا۔ چونکہ پورے  $I$  پر  $f' = 0$  ہے لہذا اس مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

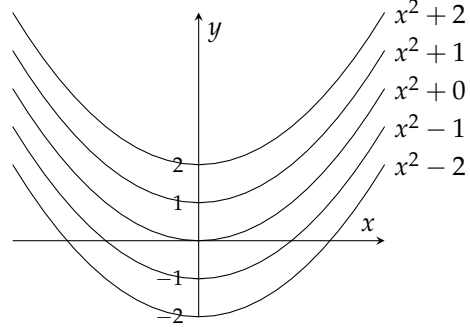
□

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا ہم اسراع سے پیچھے کی طرف چلتے ہوئے رفتار اور ہٹاؤ تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ کا جواب اگلا نتیجہ صریح پیش کرتا ہے۔

نتیجہ صریح 4.2: ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا  
اگر وقفہ  $I$  کے ہر نقطہ پر  $f'(x) = g'(x)$  ہو تب ایسا مستقل  $C$  موجود ہو گا کہ  $I$  میں تمام  $x$  پر  $f(x) = g(x) + C$  ہو۔



شکل 4.21: ترسیم برائے مثال 4.7



شکل 4.20: نتیجہ صریح 4.2 کہتا ہے کہ ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں صرف انتظامی فرق پایا جاتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح:  $I$  میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق  $h = f - g$  کا تفرق

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

ہو گا۔ یوں نتیجہ صریح 4.1 کے تحت  $I$  پر  $h(x) = C$  ہو گا۔ یوں  $f(x) - g(x) = C$  یا  $f(x) = g(x) + C$  ہو گا۔

□

نتیجہ صریح 4.2 کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا مستقل فرق ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ  $(-\infty, \infty)$  پر  $f(x) = x^2$  کا تفرق  $2x$  ہے۔ ایسا دوسرا تفاعل جس کا  $(-\infty, \infty)$  پر تفرق  $2x$  ہو کا کلیہ لازماً  $x^2 + C$  ہو گا (شکل 4.20)۔

مثال 4.7: ایسا تفاعل  $f(x)$  تلاش کریں جس کا تفرق  $\sin x$  ہو اور جو نقطہ  $(0, 2)$  سے گزرتا ہو۔  
حل: چونکہ  $g(x) = -\cos x$  کا تفرق بھی  $\sin x$  ہے لہذا  $f(x) = -\cos x + C$  ہو گا۔ دیا گیا نقطہ اس میں پر کرتے ہوئے مستقل  $C$  حاصل کرتے ہیں۔

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2 \implies C = 3$$

□

یوں درکار تفاعل  $f(x) = -\cos x + 3$  ہے (شکل 4.21)۔

اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاؤ کا حصول

سطح زمین کے قریب جہاں  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاؤ تلاش کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار  $v$  ایسا تفاعل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ  $g(t) = 9.8t$  کا تفرق 9.8 ہے لہذا نتیجہ صریح 4.2 کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

ہو گا جہاں  $C$  مستقل ہے۔ لہ  $t = 0$  پر جسم ساکن ہو گا لہذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \implies C = 0$$

ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تفاعل  $v(t) = 9.8t$  ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ  $h(t) = 4.9t^2$  کا تفرق  $9.8t$  ہے لہذا نتیجہ صریح 4.2 کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

ہو گا جہاں  $C$  مستقل ہے۔ چونکہ لہ  $t = 0$  پر ہٹاؤ صفر ہے لہذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \implies C = 0$$

یعنی  $s(t) = 4.9t^2$  ہو گا۔

کسی تفاعل کی شرح تبدیلی سے تفاعل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

بڑھتا تفاعل اور گھٹتا تفاعل

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا نتیجہ صریح جو اس کا جواب دیتا ہے کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تفاعل کا تفرق مثبت اور گھٹے ہوئے تفاعل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف: فرض کریں وقفہ  $I$  پر تفاعل  $f$  معین ہے اور اس وقفہ پر  $x_1$  اور  $x_2$  کوئی بھی دو نقطے ہیں۔

1. اگر  $x_1 < x_2$  کی صورت میں  $f(x_1) < f(x_2)$  ہو تب  $I$  پر  $f$  بڑھتا تفاعل کہلاتا ہے۔

2. اگر  $x_1 < x_2$  کی صورت میں  $f(x_1) > f(x_2)$  ہو تب  $I$  پر  $f$  گھٹتا<sup>6</sup> قائل کہلاتا ہے۔

□

نتیجہ صریح 4.3: بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کا پہلا تفرقی پرکھ  
فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  استمراری اور  $(a, b)$  پر  $f$  قابل تفرق ہے۔

• اگر  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر  $f' > 0$  ہو تب  $[a, b]$  پر  $f$  بڑھتا ہے۔

• اگر  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر  $f' < 0$  ہو تب  $[a, b]$  پر  $f$  گھٹتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح: فرض کریں  $[a, b]$  میں  $x_1$  اور  $x_2$  کوئی دو نقطے ہیں جہاں  $x_1 < x_2$  ہے۔ وقفہ  $[x_1, x_2]$  پر مسئلہ اوسط قیمت تفاعل  $f$  کے لئے کہتا ہے کہ

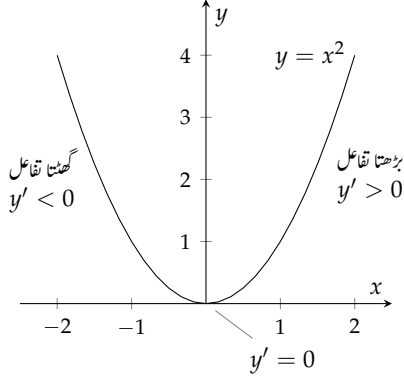
$$(4.6) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

ہو گا جہاں  $x_1$  اور  $x_2$  کے بیچ  $c$  ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ  $x_2 - x_1$  مثبت قیمت ہے لہذا مساوات 4.6 کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہو گی جو  $f'(c)$  کی ہے۔ یوں  $(a, b)$  پر مثبت  $f'(c)$  کی صورت میں  $f(x_2) > f(x_1)$  ہو گا جبکہ  $(a, b)$  پر منفی  $f'(c)$  کی صورت میں  $f(x_2) < f(x_1)$  ہو گا۔

□

مثال 4.8: وقفہ  $(-\infty, 0)$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کا تفرق  $f'(x) = 2x < 0$  ہے لہذا اس وقفے پر  $f$  گھٹنے گا۔  
وقفہ  $(0, \infty)$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کا تفرق  $f'(x) = 2x > 0$  ہے لہذا اس وقفے پر  $f$  بڑھے گا (شکل 4.22)۔ □





شکل 4.22: ترسیم برائے مثال 4.8

## سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں  $c$  کی تلاش  
سوال 1 تا سوال 4 میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لئے  $c$  کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

سوال 1:  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ,  $[0, 1]$

سوال 2:  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $[0, 1]$

سوال 3:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $[\frac{1}{2}, 2]$

سوال 4:  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $[1, 3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال

سوال 5 تا سوال 8 میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5:  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $[-1, 8]$

سوال 6:  $f(x) = x^{4/5}, [0, 1]$

سوال 7:  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, [0, 1]$

سوال 8:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

سوال 9: درج ذیل تفاعل  $x = 0$  اور  $x = 1$  پر صفر کے برابر ہے اور  $(0, 1)$  پر قابل تفرق ہے لیکن  $(a, b)$  پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ  $(0, 1)$  پر کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10: وقفہ  $[0, 2]$  پر  $a$ ،  $m$  اور  $b$  کی کون سی قیمتوں کے لئے درج ذیل تفاعل مسئلہ اوسط قیمت کی قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال 11:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کے ایک درجی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

1.  $y = x^2 - 4$

2.  $y = x^2 + 8x + 15$

3.  $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

4.  $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

ب. مسئلہ رول کی مدد سے ثابت کریں کہ  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  کے ہر دو صفر کے بیچ  $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$  کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 12: فرض کریں کہ وقفہ  $[a, b]$  میں  $f''''$  استمراری ہے اور اس وقفہ پر  $f$  کے تین صفر پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس وقفہ پر  $f''$  کا کم سے کم ایک صفر پایا جائے گا۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال 13: دکھائیں کہ اگر پورے  $[a, b]$  پر  $f'' > 0$  ہو تب  $[a, b]$  میں  $f'$  کا زیادہ سے زیادہ ایک صفر پایا جائے گا۔ اگر  $[a, b]$  پر  $f'' < 0$  ہو تب کیا ہوگا؟

سوال 14: دکھائیں کہ کبھی کبھی رکنی کے صفروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ممکن ہے۔

### نظریہ اور مثالیں

سوال 15: دکھائیں کہ دو گھنٹوں کی صفر میں کسی لمحہ پر گاڑی کا رفتار پتیا ضرور دو گھنٹوں کی اوسط رفتار دکھائے گا۔

سوال 16: تبدیلی درجہ حرارت برف سے حرارت پتیا کو نکال کر اچلتے ہوئے پانی میں رکھنے سے اس کا درجہ حرارت  $14^\circ\text{C}$  سینکڑوں میں  $-19^\circ\text{C}$  سے بڑھ کر  $100^\circ\text{C}$  ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ اس دوران درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح کسی لمحے پر  $8.5^\circ\text{C s}^{-1}$  ضرور ہو گی۔

سوال 17: فرض کریں کہ وقفہ  $[0, 1]$  پر قابل تفرق تفاعل  $f$  کا تفرق کبھی صفر نہیں ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ  $f(0) \neq f(1)$  ہوگا۔

سوال 18: دکھائیں کہ  $a$  اور  $b$  کی کسی بھی قیمتوں کے لئے  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$  ہوگا۔

سوال 19: فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  قابل تفرق ہے اور  $f(b) < f(a)$  ہے۔ کیا  $[a, b]$  پر  $f'$  کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوگا؟

سوال 20: فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  اور  $g$  قابل تفرق ہیں اور  $f(a) = g(a)$  اور  $f(b) = g(b)$  ہیں۔ دکھائیں کہ  $a$  اور  $b$  کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں  $f$  اور  $g$  کی تریسمات کے تماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال 21: فرض کریں  $x$  کی ہر قیمت کے لئے  $f$  قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ  $f(1) = 1$  ہے اور  $(-\infty, 1)$  پر  $f' < 0$  ہے اور  $(1, \infty)$  پر  $f' > 0$  ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام  $x$  پر  $f(x) \geq 1$  ہوگا۔

ب. کیا  $f'(1) = 0$  لازماً ہوگا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 22: فرض کریں  $f(x) = px^2 + qx + r$  بند وقفہ  $[a, b]$  پر معین ہے۔ دکھائیں کہ  $(a, b)$  میں ٹھیک ایک نقطہ  $c$  پر  $f$  مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجے پر پورا اترتا ہے۔

سوال 23: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \sin x \sin(x+2) - \sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 24: اگر دو تفاعل  $f(x)$  اور  $g(x)$  کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک جیسی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک جیسے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 25:

ا. دکھائیں کہ تفاعل  $g(x) = \frac{1}{x}$  اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھٹتا ہے۔

ب. اگر جزو (i) کا نتیجہ درست ہو تب  $g(1) = 1$  کس طرح  $g(-1) = -1$  سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال 26: فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  میں تفاعل  $f$  معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر  $f$  پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$f' \text{ سے زیادہ سے زیادہ } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f' \text{ سے کم سے کم}$$

جہاں کم سے کم  $f'$  اور زیادہ سے زیادہ  $f'$  سے مراد  $[a, b]$  پر بالترتیب  $f'$  کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

سوال 27: اگر  $0 \leq x \leq 0.1$  پر  $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$  ہو اور  $f(0) = 1$  ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے  $f(0.1)$  کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 28: اگر  $0 \leq x \leq 0.1$  پر  $f'(x) = 1/(1 - x^4)$  ہو اور  $f(0) = 2$  ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے  $f(0.1)$  کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 29: ہندسی اوسط۔ دو مثبت اعداد  $a$  اور  $b$  کی ہندسی اوسط<sup>7</sup> سے مراد عدد  $\sqrt{ab}$  ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجے میں مثبت اعداد کے وقفہ  $[a, b]$  پر تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x}$  کے لئے  $c$  کی قیمت  $\sqrt{ab}$  ہے۔

سوال 30: حسابی اوسط۔ دو اعداد  $a$  اور  $b$  کی حسابی اوسط<sup>8</sup>  $\frac{a+b}{2}$  ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت میں وقفہ  $[a, b]$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کے لئے  $c$  کی قیمت  $\frac{a+b}{2}$  ہوگی۔

<sup>7</sup> geometric mean  
<sup>8</sup> arithmetic mean

## تفریق سے تفاعل کا حصول

سوال 31: فرض کریں  $f(-1) = 3$  اور تمام  $x$  کے لئے  $f'(x) = 0$  ہے۔ کیا تمام  $x$  کے لئے  $f(x) = 3$  ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: فرض کریں  $f(0) = 5$  اور تمام  $x$  کے لئے  $f'(x) = 2$  ہیں۔ کیا تمام  $x$  کے لئے  $f(x) = 2x + 5$  ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: فرض کریں تمام  $x$  کے لئے  $f'(0) = 2x$  ہے۔ درج ذیل صورتوں میں  $f(2)$  تلاش کریں۔

ا.  $f(0) = 0$       ب.  $f(1) = 0$       ج.  $f(-2) = 3$

سوال 34: جن تفاعل کا تفریق مستقل ہو ان کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35 تا سوال 40 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفریق دیا گیا ہے۔

سوال 35: (ا)  $y' = x$ ، (ب)  $y' = x^2$ ، (ج)  $y' = x^3$

سوال 36: (ا)  $y' = 2x$ ، (ب)  $y' = 2x - 1$ ، (ج)  $y' = 3x^2 + 2x - 1$

سوال 37: (ا)  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ، (ب)  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ ، (ج)  $y' = 5 + \frac{1}{x^2}$

سوال 38: (ا)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ب)  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، (ج)  $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

سوال 39: (ا)  $y' = \sin 2t$ ، (ب)  $y' = \cos \frac{t}{2}$ ، (ج)  $y' = \sin 2t + \cos \frac{t}{2}$

سوال 40: (ا)  $y' = \sec^2 \theta$ ، (ب)  $y' = \sqrt{\theta}$ ، (ج)  $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2 \theta$

سوال 41 تا سوال 44 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفریق دیا گیا ہے اور جو دیے گئے نقطہ سے گزرتا ہے۔

سوال 41:  $f'(x) = 2x - 1$ ،  $N(0, 0)$

سوال 42:  $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$ ،  $N(-1, 1)$

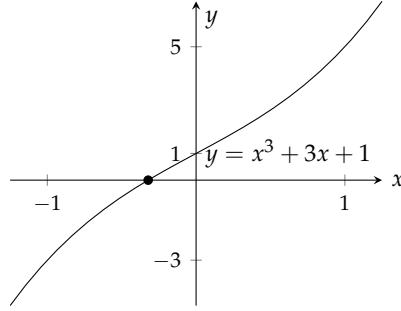
سوال 43:  $r'(\theta) = 8 - \csc^2 \theta$ ،  $N(\frac{\pi}{4}, 0)$

سوال 44:  $r'(t) = \sec t \tan t - 1$ ،  $N(0, 0)$

## صفروں کی گنتی

مساوات  $f(x) = 0$  کو اعدادی طریقہ سے حل کرنے سے پہلے ہم عموماً مطلوبہ وقفہ پر مساوات کی متوقع صفروں کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔ بعض اوقات نتیجہ صریح 4.3 کی مدد سے ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

درج ذیل فرض کریں۔



شکل 4.23: کثیر رکنی  $y = x^3 + 3x + 1$  کا واحد صفر دکھایا گیا ہے۔

1.  $[a, b]$  پر  $f$  استمراری اور  $(a, b)$  پر قابل تفرق ہے۔

2.  $f(a)$  اور  $f(b)$  کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں۔

3. پورے  $(a, b)$  پر  $f' > 0$  اور یا پورے  $(a, b)$  پر  $f' < 0$  ہے۔

تب  $a$  اور  $b$  کے بیچ  $f$  کا ٹھیک ایک صفر پایا جائے گا۔ چونکہ یہ پورے  $[a, b]$  پر بڑھ رہا ہے اور یا پورے  $[a, b]$  پر گھٹ رہا ہے لہذا یہ  $x$  محور کو ایک ہی بار قطع کر سکتا ہے۔ اس کے باوجود مسئلہ 2.9 کے تحت اس کا کم سے کم ایک صفر ہو گا۔ مثال کے طور پر  $[-1, 1]$  پر  $f(x) = x^3 + 3x + 1$  قابل تفرق ہے،  $f(-1) = -3$  اور  $f(1) = 5$  کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں، اور تمام  $x$  کے لئے  $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$  ہے لہذا  $[-1, 1]$  پر  $f$  کا ٹھیک ایک صفر پایا جاتا ہے (شکل 4.23)۔

سوال 45: 52 مسائل میں دکھائیں کہ دیے گئے وقفہ پر تفاعل کا صرف ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 45:  $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

سوال 46:  $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

سوال 47:  $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

سوال 48:  $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3, \quad (-1, 1)$

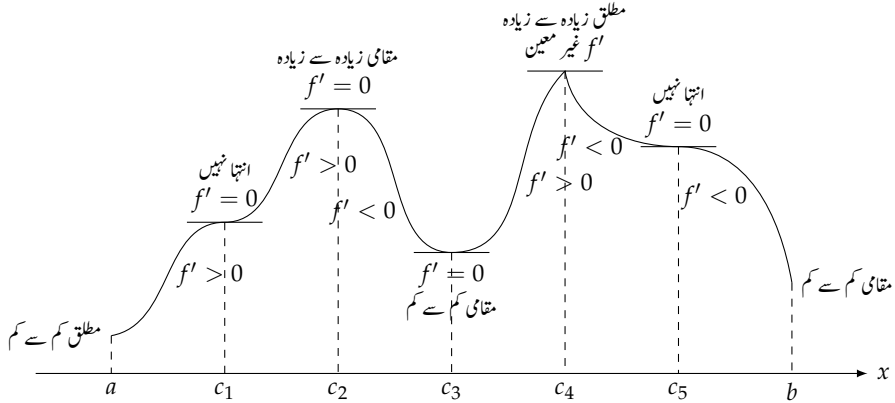
سوال 49:  $r(\theta) = \theta + \sin^2(\frac{\theta}{3}) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 50:  $r(\theta) = 2\theta - \cos^2 \theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 51:  $r(\theta) = \sec \theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

سوال 52:  $r(\theta) = \tan \theta - \cot \theta - \theta, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

کمپیوٹر کا استعمال  
سوال 53:



شکل 4.24: بعض نقطہ فاصل پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے اور بعض پر نہیں۔

۱. ایسا کثیر رکنی  $f(x)$  تفکیک دیں جس کے صفر  $x = -2, -1, 0, 1, 2$  پر پائے جاتے ہوں۔

ب.  $f(x)$  اور  $f'(x)$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ آپ کو کیا خوبی نظر آتی ہے۔

ج. کیا  $g(x) = \sin x$  اور اس کا تفرق  $g'(x)$  بھی ایسی خوبی رکھتے ہیں؟

### 4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک درجی تفرقی پرکھ

اس حصہ میں مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کے لئے تفاعل کے نقطہ فاصل کو پرکھنا دکھایا جائے گا۔

## 4.3.1

جیسا شکل 4.24 میں دکھایا گیا ہے تقابل  $f$  کے بعض نقطہ فاصل پر تقابل کی مقامی انتہا پائی جائے گی اور بعض پر نہیں۔ یہ راز نقطہ کے بالکل قریب  $f'$  کی علامت میں پوشیدہ ہے۔ جیسا کہ  $x$  بائیں سے دائیں رخ بڑھتا ہے  $f$  کی قیمت وہاں بڑھتی ہے جہاں  $f' > 0$  ہو اور  $f$  کی قیمت وہاں گھٹتی ہے جہاں  $f' < 0$  ہو۔

آپ (شکل 4.24 سے) دیکھ سکتے ہیں کہ مقامی کم سے کم نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں  $f' < 0$  جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں  $f' > 0$  ہو گا۔ (آخری نقطہ کی صورت میں نقطہ کے صرف ایک طرف پر  $f'$  کی قیمت دیکھی جاسکتی ہے۔) یوں مقامی کم سے کم نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے)۔ اسی طرح مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں  $f' > 0$  جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں  $f' < 0$  ہو گا۔ یوں اس نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے)۔

اس مشاہدہ سے مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کا پرکھ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: مقامی انتہائی قیمت کا ایک درجی تفرقی پرکھ  
درج ذیل پرکھ استمراری تفاعل  $f(x)$  کے لئے ہیں۔

نقطہ فاصل  $c$  پر:

1. اگر  $c$  پر  $f'$  کی علامت مثبت سے تبدیل ہو کر منفی ہو جائے ( $x < c$  پر  $f' > 0$  اور  $x > c$  پر  $f' < 0$ ) تب  $c$  پر  $f$  کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی (شکل 4.25)۔

2. اگر  $c$  پر  $f'$  کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہو جائے ( $x < c$  پر  $f' < 0$  اور  $x > c$  پر  $f' > 0$ ) تب  $c$  پر  $f$  کی مقامی کم سے کم قیمت ہو گی (شکل 4.26)۔

3. اگر  $c$  پر  $f'$  کی علامت تبدیل نہ ہو ( $c$  کے دونوں اطراف  $f'$  کی علامت ایک جیسی ہے) تب  $c$  پر  $f$  کی کوئی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 4.27)۔

بائیں آخری نقطہ  $a$  پر:

اگر  $x > a$  پر  $f' < 0$  ( $f' > 0$ ) ہو تب  $a$  پر  $f$  کا مقامی زیادہ سے زیادہ (مقامی کم سے کم) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.28-ا، ب)۔

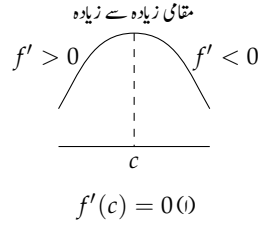
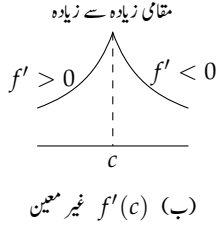
دائیں آخری نقطہ  $b$  پر:

اگر  $x < b$  پر  $f' < 0$  ( $f' > 0$ ) ہو تب  $b$  پر  $f$  کا مقامی کم سے کم (مقامی زیادہ سے زیادہ) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.28-ج، د)۔

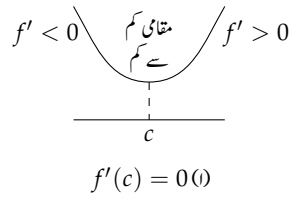
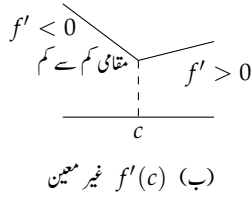
مثال 4.9: درج ذیل تفاعل کے نقطہ فاصل تلاش کریں۔

$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

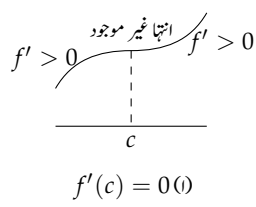
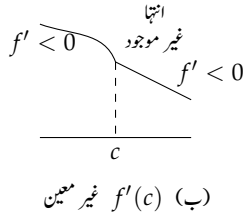




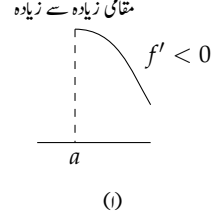
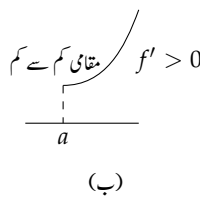
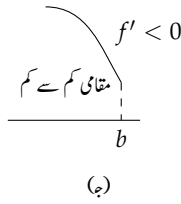
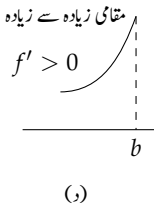
شکل 4.25: پرکھ برائے مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت۔



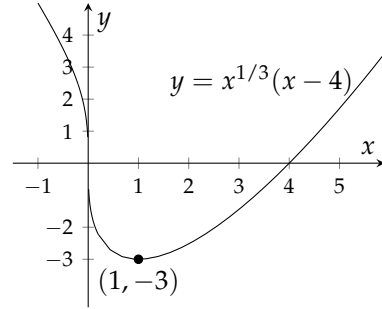
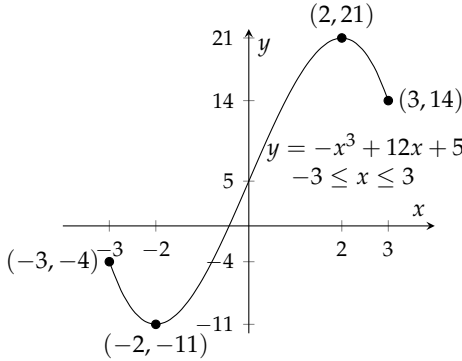
شکل 4.26: پرکھ برائے مقامی کم سے کم قیمت۔



شکل 4.27: پرکھ برائے عدم موجودگی انتہائی قیمت۔



شکل 4.28: پرکھ برائے بائیں اور دائیں نقطوں پر نقطہ انتہا۔



شکل 4.29: ترسیم برائے مثال 4.9

شکل 4.30: ترسیم برائے مثال 4.10

ان وقفوں کی نشاندہی کریں جس پر  $f$  بڑھتا ہے اور جس پر  $f$  گھٹتا ہے۔ تقابل کے مقامی اور مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔  
حل: تقابل تمام حقیقی اعداد کے لئے معین اور استمراری ہے۔ ایک درجی تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

ہے جو  $x = 1$  پر صفر اور  $x = 0$  پر غیر معین ہے۔  $f$  کے دائرہ کار میں کوئی آخری نقطہ نہیں پایا جاتا ہے لہذا نقطہ فاصل  $x = 0$  اور  $x = 1$  وہ نقطے ہیں جہاں تقابل کے انتہائی قیمتیں ممکن ہیں۔

یہ نقطے فاصل  $x$  محور کو ان حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جس پر  $f'$  یا مثبت اور یا منفی ہے۔ نقطہ فاصل کے دونوں اطراف  $f$  کی علامتوں کو دیکھ کر ہم فیصلہ انتہائی نقطہ کی نوعیت جان سکتے ہیں۔ وقفہ  $(-\infty, 0)$  پر  $f$  گھٹتا ہے، وقفہ  $(0, 1)$  پر گھٹتا ہے اور وقفہ  $(1, \infty)$  پر بڑھتا ہے۔ مسئلہ 4.5 کے تحت  $x = 0$  (جہاں  $f'$  کی علامت تبدیل نہیں ہوتی) پر کوئی انتہائی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جبکہ  $x = 1$  (جہاں  $f'$  کی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے) پر مقامی کم سے کم نقطہ پایا جائے گا۔

مقامی کم سے کم قیمت  $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$  جو تقابل کی مطلق کم سے کم قیمت بھی ہے (شکل 4.29)۔ □

مثال 4.10: درج ذیل کے لئے وہ وقفہ تلاش کریں جہاں  $f$  گھٹتا ہو اور جہاں  $f$  بڑھتا ہو۔

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \quad -3 \leq x \leq 3$$

تفاعل کے انتہائی قیمتیں کیا ہیں اور کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟  
حل: تفاعل اپنے دائرہ کار  $[-3, 3]$  پر استمراری ہے (شکل 4.30)۔ اس کا ایک درجی تفریق

$$g'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x+2)(x-2)$$

وقفہ  $[-3, 3]$  کے تمام نقطوں پر معین ہے، اور اس کی قیمت نقطہ  $x = -2$  اور  $x = 2$  پر صفر ہے۔ نقطے فاصلہ دائرہ کار کو ان خطوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں  $g'$  کی قیمت منفی یا مثبت ہو۔ ہم  $g'$  کی علامتوں کو دیکھ کر مسئلہ 4.5 کی مدد سے تفاعل کا تجزیہ کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $x = -3$  اور  $x = 2$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتیں پائی جاتی ہیں جبکہ  $x = -2$  اور  $x = 3$  پر مقامی کم سے کم قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ ان نقطوں پر تفاعل  $g(x) = -x^3 + 12x + 5$  کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$g(-3) = -4, \quad g(2) = 21 \quad \text{مقامی زیادہ سے زیادہ}$$

$$g(-2) = -11, \quad g(3) = 14 \quad \text{مقامی کم سے کم}$$

چونکہ بند وقفہ پر تفاعل معین ہے لہذا  $g(-2)$  مطلق کم سے کم اور  $g(2)$  مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں ہیں۔ □

## سوالات

**f کی مدد سے f کا تجزیہ**  
سوال 1 تا سوال 8 میں تفاعل کا تفریق دیا گیا ہے۔ درج ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

ا.  $f$  کے نقطہ فاصلہ کیا ہیں؟

ب.  $f$  کس وقفے پر بڑھتا اور کس وقفے پر گھٹتا ہے؟

ج. کن نقطوں پر تفاعل کا مقامی کم سے کم قیمت یا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟

$$\text{سوال 1: } f'(x) = x(x-1)$$

$$\text{سوال 2: } f'(x) = (x-1)(x+2)$$

$$\text{سوال 3: } f'(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$\text{سوال 4: } f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$$

$$\text{سوال 5: } f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

4.3. معتمی انتہائی قیمتوں کا ایک درجہ تفریق پر کھ

سوال 6:  $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$

سوال 7:  $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$

سوال 8:  $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

دیے گئے تفاعل کی انتہا  
سوال 9 تا سوال 28 میں درج ذیل کریں۔

ا. وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل بڑھتا ہو اور وہ جن پر تفاعل گھٹتا ہو۔

ب. تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتوں کی نشاندہی کریں اور جن نقطوں پر ایسا ہو ان کی بھی نشاندہی کریں۔

ج. ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں (اگر ایسا ہو)؟

سوال 9:  $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

سوال 10:  $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

سوال 11:  $h(x) = -x^3 + 2x^2$

سوال 12:  $h(x) = 2x^3 - 18x$

سوال 13:  $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

سوال 14:  $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

سوال 15:  $f(r) = 3r^3 + 16r$

سوال 16:  $h(r) = (r + 7)^3$

سوال 17:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

سوال 18:  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

سوال 19:  $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$

سوال 20:  $K(t) = 15t^3 - t^5$

$$\text{سوال 21: } g(x) = x\sqrt{8-x^2}$$

$$\text{سوال 22: } g(x) = x^2\sqrt{5-x}$$

$$\text{سوال 23: } f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$$

$$\text{سوال 24: } f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$$

$$\text{سوال 25: } f(x) = x^{1/3}(x+8)$$

$$\text{سوال 26: } g(x) = x^{2/3}(x+5)$$

$$\text{سوال 27: } h(x) = x^{1/3}(x^2-4)$$

$$\text{سوال 28: } k(x) = x^{2/3}(x^2-4)$$

**نصف کھلے وقفوں پر تفاعل کی انتہا**  
سوال 29 تا سوال 36 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ میں تفاعل کے مقامی انتہا تلاش کریں۔ ان نقطوں کی بھی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. کون سے انتہا مطلق ہیں (اگر ہوں)۔

ج. کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔

$$\text{سوال 29: } f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$$

$$\text{سوال 30: } f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$$

$$\text{سوال 31: } g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$$

$$\text{سوال 32: } g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$$

$$\text{سوال 33: } f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$$

$$\text{سوال 34: } f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$$

$$\text{سوال 35: } h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\text{سوال 36: } k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$$

**کمپیوٹر کا استعمال**  
سوال 37 تا سوال 40 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے وقفے پر مقامی انتہا تلاش کریں اور اس نقطہ کی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. تقابل اور تقابل کے تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے  $f$  پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{سوال 37}$$

$$f(x) = -2 \cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{سوال 38}$$

$$f(x) = \csc^2 x - 2 \cot x, \quad 0 < x < \pi \quad \text{سوال 39}$$

$$f(x) = \sec^2 x - 2 \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 40}$$

نظریہ اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال 41 اور سوال 42 میں دیے گئے  $\theta$  پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے۔ اس انتہا کی قسم دریافت کریں۔

$$h(\theta) = 3 \cos \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \theta = 0, 2\pi \quad \text{سوال 41}$$

$$h(\theta) = 5 \sin \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta = 0, \pi \quad \text{سوال 42}$$

سوال 43: قابل تفرق تقابل  $y = f(x)$  نقطہ  $(1, 1)$  سے گزرتا ہے اور  $f'(1) = 0$  ہے۔ درج ذیل پر پورا اترتا ہوا اس تقابل کا خاکہ کھینچیں۔

ا.  $x < 1$  کے لئے  $f'(x) > 0$  ہے اور  $x > 1$  کے لئے  $f'(x) < 0$  ہے۔

ب.  $x < 1$  کے لئے  $f'(x) < 0$  ہے اور  $x > 1$  کے لئے  $f'(x) > 0$  ہے۔

ج.  $x \neq 1$  کے لئے  $f'(x) > 0$  ہے۔

د.  $x \neq 1$  کے لئے  $f'(x) < 0$  ہے۔

سوال 44: قابل تفرق تقابل  $y = f(x)$  جو درج ذیل پر پورا اترتا ہے کا خاکہ بنائیں۔

ا.  $(1, 1)$  پر مقامی کم سے کم اور  $(3, 3)$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

ب.  $(1, 1)$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور  $(3, 3)$  پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

ج.  $(1, 1)$  اور  $(3, 3)$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

د.  $(1, 1)$  اور  $(3, 3)$  پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

سوال 45: درج ذیل استمراری تفاعل  $y = g(x)$  کا خاکہ بنائیں۔

ا.  $g(2) = 2$  ہے،  $x < 2$  کے لئے  $0 < g' < 1$  ہے،  $x \rightarrow 2^-$  کے لئے  $g'(x) \rightarrow 1^-$ ،  $x > 2$  کے لئے  $-1 < g' < 0$  ہے اور  $x \rightarrow 2^+$  کے لئے  $g'(x) \rightarrow -1^+$  ہے۔

ب.  $g(2) = 2$  ہے،  $x < 2$  کے لئے  $g' < 0$  ہے،  $x \rightarrow 2^-$  کے لئے  $g' \rightarrow -\infty$  ہے،  $x > 2$  کے لئے  $g' > 0$  ہے اور  $x \rightarrow 2^+$  کے لئے  $g'(x) \rightarrow \infty$  ہے۔

سوال 46: درج ذیل استمراری تفاعل  $y = h(x)$  کا خاکہ بنائیں۔

ا.  $h(0) = 0$  ہے، تمام  $x$  کے لئے  $-2 \leq h(x) \leq 2$ ،  $x \rightarrow 0^-$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow \infty$  ہے اور  $x \rightarrow 0^+$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow -\infty$  ہے۔

ب.  $h(0) = 0$  ہے، تمام  $x$  کے لئے  $-2 \leq h(x) \leq 0$ ،  $x \rightarrow 0^-$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow \infty$  ہے اور  $x \rightarrow 0^+$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow -\infty$  ہے۔

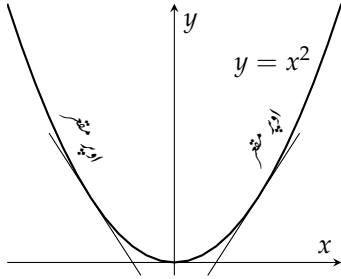
سوال 47: جب  $x$  بائیں سے دائیں جانب نقطہ  $c = 2$  سے گزرے تب  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے یا نیچے گرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جہاں  $a \neq 0$  ہے، بڑھتا ہے اور گھٹتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

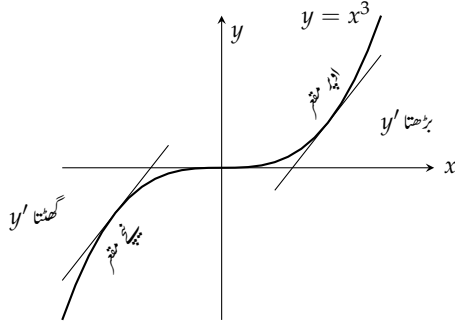
#### 4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم

ہم نے حصہ 4.1 میں تفاعل کی انتہائی قیمتوں کی تلاش میں ایک درجی تفریق کا کردار دیکھا۔ تفاعل کے انتہائی نقطے صرف نقطہ فاصل اور تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ نقطہ فاصل پر نقطہ انتہا کی موجودگی لازمی نہیں ہے۔ ہم نے حصہ 4.2 میں یہ بھی دیکھا کہ قابل تفریق تفاعل کی تقریباً تمام معلومات اس کی تفریق میں سمیٹی گئی ہے۔ مکمل تفاعل کے حصول کے لئے ہمیں صرف کسی ایک نقطہ پر تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔ اگر تفاعل کا تفریق  $2x$  ہے اور تفاعل مبدا سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً  $x^2$  ہو گا۔ اگر تفاعل کا تفریق  $2x$  ہو اور تفاعل نقطہ  $(0, 4)$  سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً  $x^2 + 4$  ہو گا۔

ہم نے حصہ 4.3 میں نقطہ فاصل پر تفاعل کے رویہ جانتے ہوئے اس کی تفریق سے مزید معلومات حاصل کرنا سیکھا جس کے بعد ہم یہ جان سکے کہ آیا نقطہ فاصل پر حقیقتاً انتہا موجود ہے یا تفاعل مسلسل گھٹتا یا مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم جانتے ہیں کہ تفاعل  $y = f(x)$  کی ترسیم کس طرح مڑتی یا واپس پلٹتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ معلومات  $y'$  کے اندر ضرور پائی جائے گی۔ دو مرتبہ قابل تفریق تفاعل کی صورت میں  $y'$  اور اس کا تفریق  $y''$  مل کر تفاعل کی ترسیم کی صورت کے بارے میں معلومات فراہم کرتے ہیں۔ اگلے باب میں انہیں استعمال کرتے ہوئے تفریقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل کے حل کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا۔



شکل 4.32: ترسیم برائے مثال 4.11

شکل 4.31:  $(-\infty, 0)$  پر منحنی دائیں جھکتی ہے جبکہ  $(0, \infty)$  پر مبداء بائیں مڑتی ہے۔

مقعر

$x$  بڑھنے سے تفاعل  $y = x^3$  کا ترسیم اوپر اٹھتا ہے لیکن  $(-\infty, 0)$  اور  $(0, \infty)$  پر اس کے حصے مختلف طریقہ سے مڑتے ہیں (شکل 4.31)۔ اگر ہم منحنی پر بائیں سے مبداء کی طرف گامزن ہوں تب منحنی ہماری دائیں ہاتھ کی طرف جھکتی ہے اور اپنے مماس سے نیچے رہتی ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم منحنی پر دائیں جانب مبداء سے دور چلیں تب منحنی ہماری بائیں ہاتھ جھکتی ہے اور اپنے مماس کے بالائی طرف رہتی ہے۔

اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ ربع سوم میں بائیں سے مبداء کی طرف چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان گھٹتی ہے جبکہ ربع اول میں مبداء سے دائیں جانب چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان بڑھتی ہے۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل  $y = f(x)$  کی ترسیم اس وقفہ پر اوپر مقعر<sup>9</sup> ہوگی جہاں  $y'$  بڑھتا ہو اور اس وقفہ پر نیچے مقعر<sup>10</sup> ہوگی جہاں  $y'$  گھٹتا ہو۔

□

اگر  $y = f(x)$  کا دو درجی تفرق موجود ہو تب ہم مسئلہ اوسط قیمت کا نتیجہ صریح 4.3 استعمال کرتے ہوئے اخذ کر سکتے ہیں کہ  $y'' > 0$  کی صورت میں  $y'$  کی قیمت بڑھے گی اور  $y'' < 0$  کی صورت میں  $y'$  کی قیمت گٹے گی۔

مقعر کا دو درجی تفرق پرکھ

فرض کریں وقفہ  $I$  پر  $y = f(x)$  دو مرتبہ قابل تفرق ہے۔

concave up<sup>9</sup>  
concave down<sup>10</sup>



ا. اگر  $I$  پر  $y'' > 0$  ہو تب  $I$  پر  $f$  کی ترسیم اوپر مقعر ہوگی۔

ب. اگر  $I$  پر  $y'' < 0$  ہو تب  $I$  پر  $f$  کی ترسیم نیچے مقعر ہوگی۔

مثال 4.11:

ا.  $(-\infty, 0)$  پر قاع  $y = x^3$  کا دودرجی تفرق  $y'' = 6x < 0$  ہے لہذا اس کی ترسیم نیچے مقعر ہوگی جبکہ  $(0, \infty)$  پر  $y'' = 6x > 0$  ہے لہذا یہاں ترسیم اوپر مقعر ہوگی (شکل 4.31)۔

ب. چونکہ قطع مکافی  $y = x^2$  کا دودرجی تفرق  $y'' = 2 > 0$  ہے لہذا یہ ہر جگہ اوپر مقعر ہوگا (شکل 4.32)۔

□

### نقطہ تصریف

ایک لکیر پر جسم کی حرکت کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اس کا مقام بالمقابل وقت ترسیم کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہم وہ لمحہ تلاش کر سکتے ہیں جہاں جسم کی اسراع، جو دودرجی تفرق ہے، کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔ ترسیم پر یہ وہ نقطہ ہوگا جہاں مقعر تبدیل ہوتا ہے۔

تعریف: وہ نقطہ جہاں تقاع کا مماس پایا جاتا ہو اور جہاں مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہو **نقطہ تصریف**<sup>11</sup> کہلاتا ہے۔

□

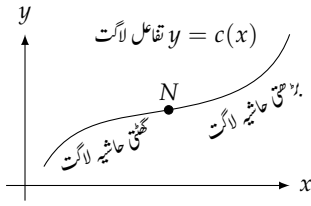
یوں نقطہ تصریف کی ایک طرف  $y''$  مثبت اور دوسری طرف منفی ہوگا۔ عین نقطہ تصریف پر  $y''$  کی قیمت یا (تفرق کی متوسط قیمت خاصیت کی بنا) صفر ہوگی اور یا  $y''$  غیر معین ہوگا۔

دو مرتبہ قابل تفرق تقاع کی ترسیم کے نقطہ تصریف پر  $y'' = 0$  ہوگا۔

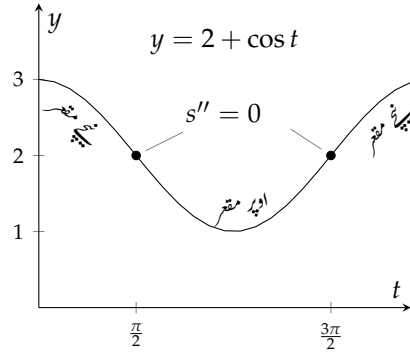
مثال 4.12: سادہ ہارمونی حرکت

تقاع  $y = 2 \cos t$  کی ترسیم نقطہ  $t = \pi/2, 3\pi/2, \dots$  پر مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہے جہاں اسراع  $s'' = -\cos t$  صفر ہے (شکل 4.33)۔

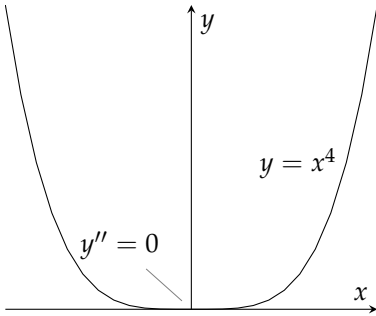
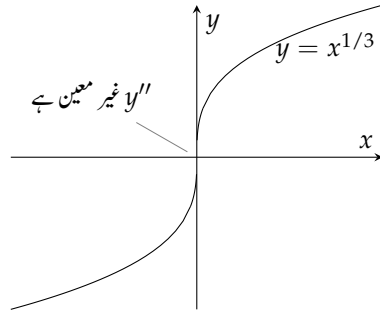
□



شکل 4.34: ترسیم برائے مثال 4.13



شکل 4.33: ترسیم برائے مثال 4.12

شکل 4.36: اگرچہ مہد پر  $y'' = 0$  ہے یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا ہے (مثال 4.15)شکل 4.35: نقطہ تصریف پر  $y''$  غیر معین ہے (مثال 4.14)

مثال 4.13: نقطہ تصریف کا معاشیات میں بھی اہمیت ہے۔ فرض کریں کہ کسی چیز کی  $x$  اکائیاں پیدا کرنے پر  $y = c(x)$  لاگت آتی ہے۔ جہاں حاشیہ لاگت پیداوار گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے یہ نقطہ تصریف  $N$  ہوگا (شکل 4.34)۔

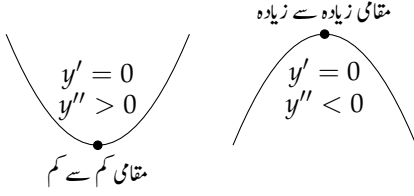
□

مثال 4.14: ایسا نقطہ تصریف جہاں  $y''$  غیر موجود ہے۔

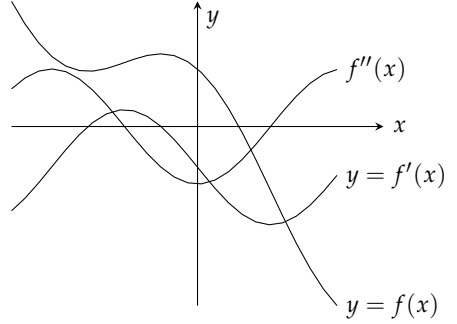
تقابل  $y = x^{1/3}$  کا نقطہ تصریف  $x = 0$  پر ہے لیکن یہاں  $y''$  غیر معین (لا متناہی) ہے (شکل 4.35)۔

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}(x^{1/3}) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^{-2/3}) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

□



شکل 4.38: دو درجی تفریق پر کھ برائے مقامی انتہا



شکل 4.37: تقابل  $y = f(x) = 2 \cos x - \sqrt{2}x$  اور اس کے یک درجی اور دو درجی تفریق۔

مثال 4.15:  $y'' = 0$  ہے لیکن نقطہ تعریف نہیں ہے  
تقابل  $y = x^4$  کا  $x = 0$  پر  $y'' = 12x^2 = 0$  پایا جاتا ہے لیکن یہاں  $y''$  کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہذا یہاں نقطہ تعریف نہیں پایا جاتا ہے۔

□

فنیات تقابل اور تقابل کے تفریق کا ترسیم

کبھی کبھار تقابل کی ترسیم سے نقطہ تعریف کی نشاندہی کرنا مشکل ہوتا ہے۔  $f(x) = 2 \cos x - \sqrt{2}x$  کی  $-4 \leq x \leq 3$  پر ترسیم کرتے ہوئے کوشش کر کے دیکھیں۔ اس کے ساتھ  $f'$  کی ترسیم شامل کرنے سے نقطہ تعریف کی پہچان میں کچھ بہتری آتی ہے۔  $f$  کے ساتھ  $f''$  ترسیم کرنے سے نقطہ تعریف پہچانے کا بہترین ثبوت ملتا ہے (شکل 4.37)۔ نقطہ تعریف پر  $f''$  کی علامت تبدیل ہوتی ہے یعنی  $f''$  محور  $x$  کو قطع کرتا ہے۔  $f$ ،  $f'$  اور  $f''$  تینوں کو ایک ساتھ ترسیم کرنا دلچسپ مشغلہ ہے۔

مقامی انتہائی قیمت کا دو درجی تفریق پر کھ

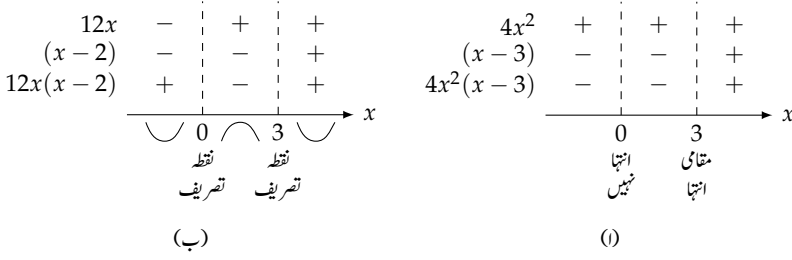
مقامی انتہا کا مقام تعین کرنے کی خاطر  $y'$  کی علامت کی تبدیلی کی بجائے درج ذیل پر کھ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مقامی انتہا کا دو درجی تفریق پر کھ

• اگر  $f'(c) = 0$  اور  $f''(c) < 0$  ہوں تب  $x = c$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی (شکل 4.38)۔

• اگر  $f'(c) = 0$  اور  $f''(c) > 0$  ہوں تب  $x = c$  پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی (شکل 4.38)۔

مذکورہ بالا پر کھ میں ہمیں صرف  $x = c$  پر  $y''$  درکار ہے تاکہ  $c$  پر کسی وقفہ پر۔ یوں پر کھ کا استعمال نہایت آسان ہے۔  $y'' = 0$  یا غیر معین  $y''$  کی صورت میں پر کھ ہمیں مدد نہیں کر پاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں یک درجی تفریق پر کھ استعمال کرنی ہوگی۔



شکل 4.39: اشکال برائے مثال 4.16

 $y'$  اور  $y''$  کے ترسیم ایک ساتھ

ہم نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل ترسیم کرتے ہیں۔

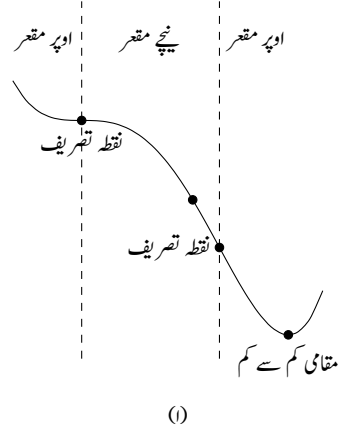
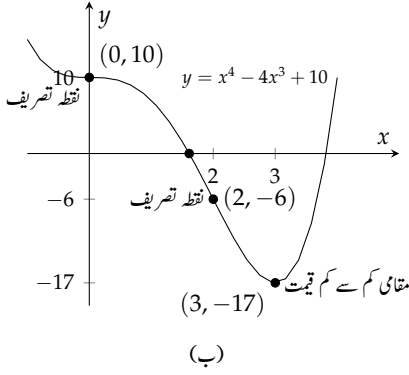
مثال 4.16: قلم و کاغذ سے تفاعل کا ترسیم  
تفاعل  $y = x^4 - 4x^3 + 10$  ترسیم کریں۔  
حل: پہلا قدم: ہم  $y'$  اور  $y''$  ڈھونڈتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^4 - 4x^3 + 10 \\ y' &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) && \text{نقطہ فاصل } x=0 \text{ اور } x=3 \text{ ہیں} \\ y'' &= 12x^2 - 24x = 12x(x-2) && \text{مکمل نقطہ تعریف } x=0 \text{ اور } x=2 \text{ ہیں} \end{aligned}$$

دوسرا قدم: اتر اور چڑھاؤ دیکھنے کے لئے  $y'$  کی علامتوں کو دیکھ کر  $y$  کا رویہ جانتے ہیں۔  $y' = 4x^2(x-3)$  میں  $x=0$  سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے  $y'$  کی علامت منفی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے بھی منفی علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں نقطہ  $x=0$  پر  $y'$  کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے لہذا یہاں کوئی مقامی انتہا نہیں پایا جاتا ہے۔  $y' = 4x^2(x-3)$  میں  $x=3$  سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے  $y'$  کی منفی علامت جبکہ اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے مثبت علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں  $x=3$  پر  $y'$  کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہوتی ہے۔ یوں  $x=3$  پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.39-ا)۔

تیسرا قدم: نقطہ  $x=0$  اور  $x=2$  پر  $y''$  کی علامت تبدیل ہوتی ہے لہذا یہ دونوں نقطہ تعریف ہیں (شکل 4.39-ب)۔

چوتھا قدم: دوسرے اور تیسرے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے ہر وقفہ پر تفاعل کا عمومی خاکہ کھینچیں۔ ان خاکوں کو اکٹھا کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.40-ا)۔



شکل 4.40: اشکال برائے مثال 4.16

پانچواں قدم: (اگر موزوں ہو تب) ترسیم پر وہ نقطے ظاہر کریں جہاں یہ  $x$  اور  $y$  محور کو قطع کرتی ہے۔ اسی طرح وہ نقطے جہاں  $y'$  اور  $y''$  صفر ہیں کی نشاندہی کریں۔ مقامی انتہائی نقطے اور نقطہ تفریق کی نشاندہی کریں۔ چوتھے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.40-ب)۔

□

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

