

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

| | | |
|-----|-------------------------------|-----|
| 1 | ابتدائی معلومات | 1 |
| 1 | حقیقی اعداد اور حقیقی خط | 1.1 |
| 15 | محدود، خطوط اور بڑھوتری | 1.2 |
| 32 | تفاعل | 1.3 |
| 54 | ترسیم کی منتقلی | 1.4 |
| 74 | تکوینیاتی تفاعل | 1.5 |
| 95 | حدود اور استمرار | 2 |
| 95 | تبدیلی کی شرح اور حد | 2.1 |
| 113 | حد تلاش کرنے کے قواعد | 2.2 |
| 126 | مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف | 2.3 |
| 146 | تصور حد کی توسیع | 2.4 |
| 165 | استمرار | 2.5 |
| 184 | مماسی خط | 2.6 |
| 199 | تفرق | 3 |
| 199 | تفاعل کا تفرق | 3.1 |
| 221 | قواعد تفرق | 3.2 |
| 240 | تبدیلی کی شرح | 3.3 |
| 257 | تکوینیاتی تفاعل کا تفرق | 3.4 |
| 277 | زنجیری قاعدہ | 3.5 |
| 294 | خفی تفرق اور ناطق قوت نما | 3.6 |
| 310 | دیگر شرح تبدیلی | 3.7 |

| | | |
|-----|--|---|
| 325 | تفرق کا استعمال | 4 |
| 325 | 4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں | |
| 340 | 4.2 مسئلہ اوسط قیمت | |
| 356 | 4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ | |
| 356 | 4.3.1 پرکھ | |
| 368 | 4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم | |
| 391 | 4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء | |
| 418 | 4.6 بہترین بنانا | |
| 442 | 4.7 خط بندی اور تفرقات | |
| 463 | 4.8 ترکیب نیوٹن | |
| 475 | 5 تکمل | |
| 475 | 5.1 غیر قطعی کمالات | |
| 487 | 5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی | |
| 503 | 5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق | |
| 514 | 5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ | |
| 531 | 5.5 ریمان مجموعے اور قطعی کمالات | |
| 555 | ا ضمیمہ اول | |
| 557 | ب ضمیمہ دوم | |

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

بغیر ریمان مکمل والے تفاعل

غیر استمراری تفاعل، ماسوائے چند، ناقابل مکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا $[0, 1]$ پر کوئی ریمان مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ناطق} \\ 0, & \text{غیر ناطق} \end{cases}$$

وقفہ $[0, 1]$ کے کسی بھی خانہ بندی P کے لئے بالائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

$$H = \sum k_H \Delta x_k = \sum 1 \cdot \Delta x_k = \sum \Delta x_k = 1,$$

$$L = \sum k_L \Delta x_k = \sum 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

وقفہ $[0, 1]$ پر f کے مکمل کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ $\|P\| \rightarrow 0$ سے H اور L کی ایک جیسی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} L = 0, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} H = 1$$

یوں $[0, 1]$ پر f کا مکمل نہیں پایا جاتا ہے۔ مستقل مضرب kf کا بھی مکمل نہیں پایا جاتا ہے ماسوائے جب k صفر ہو۔

اصطلاحات

علامت $\int_a^b f(x) dx$ کے ساتھ بہت ساری اصطلاح وابستہ ہے۔ یوں \int کو علامت تکمیل کہتے ہیں، a مکمل کا زیریں حد جبکہ b مکمل کا بالائی حد ہے، f متکمل ہے، x مکمل کا متغیر ہے، جبکہ $\int_a^b f(x) dx$ سے مراد a تا b تفاعل f کا تکمیل ہے۔ مکمل حل کرنے سے مراد مکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔

کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی مکمل کی قیمت تفاعل پر منحصر ہوتی ہے ناکہ غیر تابع متغیر کی علامت پر۔ یوں مکمل میں غیر تابع متغیر کو x کی بجائے u یا t سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x) dx \text{ کی بجائے } \int_a^b f(u) du \text{ یا } \int_a^b f(t) dt \text{ لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں مکمل سے مراد ریمان مجموعہ ہے لہذا غیر تابع متغیر کا مکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا اور تینوں مکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ اسی لیے مکمل کے متغیر کو نقلی متغیر²⁹ کہتے ہیں۔

مثال 5.31: درج ذیل ریمان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو مکمل کی صورت میں لکھیں جہاں P وقفہ $[-1, 3]$ کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k$$

حل: نقطہ c_k پر تقابل $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ $[-1, 3]$ کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں -1 تا 3 تقابل f کا مکمل درکار ہے:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (3c_k^2 - 2c_k + 5) \Delta x_k = \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx$$

□

مستقل تقابل

ہمیں مسئلہ 5.1 قطعی مکمل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں ایک دوسرا مسئلہ زیر استعمال ہو گا۔ مستقل تقابل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ $[a, b]$ پر f ایک مستقل تقابل $f(x) = c$ ہو تب c_k کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k && f(c_k) \text{ ہر نقطہ پر } c \text{ کے برابر ہے} \\ &= c \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب} \\ &= c(b-a) && \sum_{k=1}^n \Delta x_k \text{ وقفہ } [a, b] \text{ کی لمبائی } b-a \text{ ہے} \end{aligned}$$

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت $c(b-a)$ کے برابر ہے لہذا مکمل کی قیمت بھی یہی ہوگی۔ یوں درج ذیل درست ہو گا۔

وقفہ $[a, b]$ جس پر تقابل $f(x)$ کی قیمت مستقل c ہے کا مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$$

مثال 5.32:

$$\int_{-1}^4 3 \, dx = 3(4 - (-1)) = (3)(5) = 15 \quad \text{ا.}$$

$$\int_{-1}^4 (-3) \, dx = -3(4 - (-1)) = (-3)(5) = -15 \quad \text{ب.}$$

□

غیر منفی تفاعل کے ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال 5.22 میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ $[0, 3]$ پر گولا کی تفاعل رفتار

$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے ریمان مجموعے تھے۔ شکل 5.34 میں t محور اور تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس ذوزنقہ رقبہ کا قد 3، زیریں قاعدہ 160 اور بالائی قاعدہ 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہے، اتنا اصل رقبہ پر مستطیل بہتر بیٹھتے ہیں۔ ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$\text{رقبہ} = \text{قد} \cdot \frac{\text{زیریں قاعدہ} + \text{بالائی قاعدہ}}{2} = 3 \cdot \frac{130.6 + 160}{2} = 435.9$$

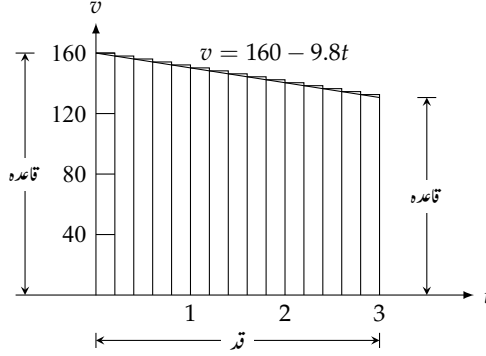
آپ کو یاد ہو گا کہ مثال 5.22 میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ ہم مکمل کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں:

$$\int_0^3 (160 - 9.8t) \, dt = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$

ہم مکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں x محور اور استمراری غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ رقبہ کا کلیہ معلوم ہو تب ہم مکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے مکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x) \geq 0$ استمراری ہے۔ تفاعل f کے ترسیم اور x محور کے بیچ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$



شکل 5.34: وقفہ $[0, 3]$ پر سمتی رفتار تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے ریمان رقبہ کے لئے مستطیل۔

□

ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لئے پیش کیا۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لئے بھی کارآمد ہوگا؟ اس کا جواب ہے، "جی ہاں"، البتہ یہ ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

مثال 5.33: رقبہ استعمال کرتے ہوئے مکمل کی قیمت کا تلاش
درج ذیل مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_a^b x \, dx, \quad 0 < a < b$$

حل: ہم خط $a < x < b$ کے لئے $y = x$ ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل 5.35)۔ مکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش کرتے ہیں۔

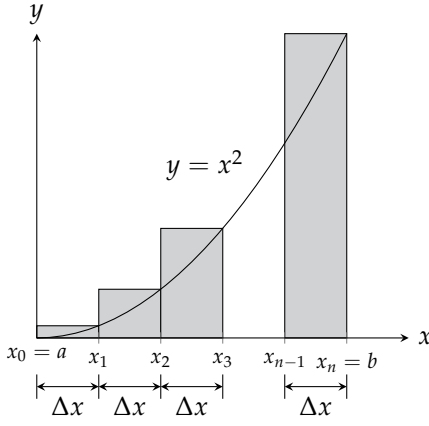
$$\int_a^b x \, dx = (b - a) \cdot \frac{a + b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

یوں $a = 1$ اور $b = \sqrt{5}$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

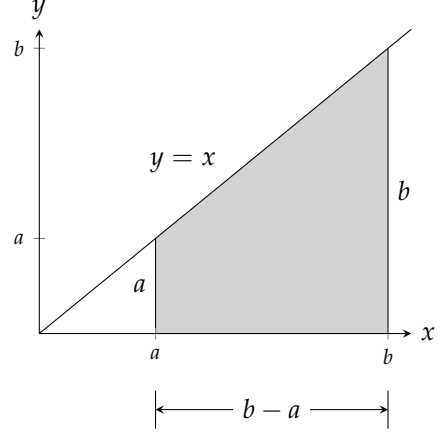
$$\int_1^{\sqrt{5}} x \, dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

□

دھیان رہے کہ x کا الٹ تفرق $\frac{x^2}{2}$ ہے جو مکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔



شکل 5.36: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال 5.34)



شکل 5.35: خطہ برائے مثال 5.33

مثال 5.34: قطعی عمل سے رقبے کا حصول
قطع مکانی $y = x^2$ اور x محور کے تقاطع وقفہ $[0, b]$ پر رقبہ تلاش کریں (شکل 5.36)۔

حل: ہم عمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تقاضی کو ترسیم کر کے وقفہ $[0, b]$ کو n یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$ ہوگی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x, \quad x_n = n\Delta x = b$$

ہم جس طرح چاہیں c_k نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو c_k منتخب کرتے ہیں۔ یوں $c_1 = x_1$ ، $c_2 = x_2$ ، وغیرہ ہوگا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$f(c_1)\Delta x = f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x = (1^2)(\Delta x)^3$$

$$f(c_2)\Delta x = f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2\Delta x = (2^2)(\Delta x)^3$$

\vdots

$$f(c_n)\Delta x = f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2\Delta x = (n^2)(\Delta x)^3$$

ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 (\Delta x)^3 \\
 &= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^n k^2 && (\Delta x)^3 \text{ مستقل ہے} \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{مساوات 5.13 میں } \Delta x = \frac{b}{n} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

اب قطعی تکمل کی تعریف

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

استعمال کرتے ہوئے $x = 0$ تا $x = b$ قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n && \text{یہاں } \|P\| \rightarrow 0 \text{ سے مراد } n \rightarrow \infty \text{ ہے} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\
 &= \frac{b^3}{6} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{b^3}{3}
 \end{aligned}$$

یوں $b = 1$ اور $b = 1.5$ کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{1.5} x^2 dx = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

□

یہاں بھی دھیان رہے کہ x^2 کا الٹ تغرق $\frac{x^3}{3}$ ہے۔

سوالات

سگما روپ
سوال 1 تا سوال 6 میں مجموعہ کو سگما روپ میں لکھنے کے بعد اس کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $\sum_{k=1}^2 \frac{6k}{k+1}$

سوال 2: $\sum_{k=1}^3 \frac{k-1}{k}$

سوال 3: $\sum_{k=1}^4 \cos k\pi$

سوال 4: $\sum_{k=1}^5 \sin k\pi$

سوال 5: $\sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

سوال 6: $\sum_{k=1}^4 (-1)^k \cos k\pi$

سوال 7: درج ذیل میں سے کونسی $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^6 2^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^5 2^k$ ج. $\sum_{k=-1}^4 2^{k+1}$

سوال 8: درج ذیل میں سے کونسی $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^6 (-2)^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^5 (-1)^k 2^k$ ج. $\sum_{k=-2}^3 (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

سوال 9: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

$$\sum_{k=-1}^1 \frac{(-1)^k}{k+2} \quad \text{ج۔}$$

$$\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{k+1} \quad \text{ب۔}$$

$$\sum_{k=2}^4 \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \quad \text{ا۔}$$

سوال 10: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

$$\sum_{k=-3}^{-1} k^2 \quad \text{ج۔}$$

$$\sum_{k=-1}^3 (k+1)^2 \quad \text{ب۔}$$

$$\sum_{k=1}^4 (k-1)^2 \quad \text{ا۔}$$

سوال 11 تا 16 میں دیے مجموعوں کو گناروپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلہ کی زیریں حد پر منحصر ہو گا۔

$$\text{سوال 11: } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\text{سوال 12: } 1 + 4 + 9 + 16$$

$$\text{سوال 13: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\text{سوال 14: } 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$\text{سوال 15: } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\text{سوال 16: } -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$$

متناہی مجموعہ کی قیمت

سوال 17: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^n a_k = -5$ اور $\sum_{k=1}^n b_k = 6$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\sum_{k=1}^n (b_k - 2a_k) \quad \text{د۔}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \quad \text{ج۔}$$

$$\sum_{k=1}^n 3a_k \quad \text{ا۔}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \quad \text{د۔}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{6} \quad \text{ب۔}$$

سوال 18: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ اور $\sum_{k=1}^n b_k = 1$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^n 8a_k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^n 250b_k \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^n (a_k + 1) \quad \text{د. } \sum_{k=1}^n (b_k - 1)$$

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے الجبرائی فقرہوں کی قیمتوں کو صفحہ 533 پر دیے گئے متنہائی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات 5.13 میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال 19:

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^{10} k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^{10} k^2 \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^{10} k^3$$

سوال 20:

$$\text{ا. } \sum_{k=1}^{13} k \quad \text{ب. } \sum_{k=1}^{13} k^2 \quad \text{ج. } \sum_{k=1}^{13} k^3$$

$$\text{سوال 21: } \sum_{k=1}^7 (-2k)$$

$$\text{سوال 22: } \sum_{k=1}^5 \frac{\pi k}{15}$$

$$\text{سوال 23: } \sum_{k=1}^6 (3 - k^2)$$

$$\text{سوال 24: } \sum_{k=1}^6 (k^2 - 5)$$

$$\text{سوال 25: } \sum_{k=1}^5 k(3k + 5)$$

$$\text{سوال 26: } \sum_{k=1}^7 k(2k + 1)$$

$$\text{سوال 27: } \sum_{k=1}^5 \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^5 k \right)^3$$

سوال 28: $\left(\sum_{k=1}^7 k\right)^2 - \sum_{k=1}^7 \frac{k^3}{4}$

ریمان مجموعوں کے لئے مستطیلیں
سوال 29 تا سوال 32 میں تقابل $f(x)$ کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کی ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^4 f(c_k) \Delta x_k$ کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں k ویں ذیلی وقفہ کا (I) بائیں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ c_k ہے۔ (ہائیں، دائیں اور وسطی نقطوں کے لئے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

سوال 29: $f(x) = x^2 - 1, [0, 2]$

سوال 30: $f(x) = -x^2, [0, 1]$

سوال 31: $f(x) = \sin x, [-\pi, \pi]$

سوال 32: $f(x) = \sin x + 1, [-\pi, \pi]$

سوال 33: خانہ بندی $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ کا معیار تلاش کریں۔

سوال 34: خانہ بندی $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ کا معیار تلاش کریں۔

حد کا بطور تکمیل اظہار
سوال 35 تا سوال 42 میں دیے گئے حد کو بطور قطعی تکمیل ظاہر کریں۔

سوال 35: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k$ جہاں $[0, 2]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 36: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2c_k^3 \Delta x_k$ جہاں $[-1, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 37: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-7, 5]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 38: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \Delta x_k$ جہاں $[1, 4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 39: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$ جہاں $[2, 3]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 40: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$ جہاں $[0, 1]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 41: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\sec c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-\pi/4, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 42: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\tan c_k) \Delta x_k$ جہاں $[0, \pi/4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

مسئله تفاعل
سوال 43 تا سوال 48 میں مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-2}^1 5 \, dx \quad \text{سوال 43}$$

$$\int_3^7 (-20) \, dx \quad \text{سوال 44}$$

$$\int_0^3 (-160) \, dt \quad \text{سوال 45}$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2} \, d\theta \quad \text{سوال 46}$$

$$\int_{-2.1}^{3.4} 0.5 \, ds \quad \text{سوال 47}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2} \, dr \quad \text{سوال 48}$$

رقبہ سے مکمل کی قیمت کا حصول
سوال 49 تا سوال 56 میں مکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبہ سے مکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \, dx \quad \text{سوال 49}$$

$$\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4) \, dx \quad \text{سوال 50}$$

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx \quad \text{سوال 51}$$

$$\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2} \, dx \quad \text{سوال 52}$$

سوال 53: $\int_{-2}^1 |x| dx$

سوال 54: $\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx$

سوال 55: $\int_{-1}^1 (2 - |x|) dx$

سوال 56: $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1 - x^2}) dx$

سوال 57 تا سوال 60 میں کھل کی قیمت کو رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال 57: $\int_0^b x dx, \quad b > 0$

سوال 58: $\int_0^b 4x dx, \quad b > 0$

سوال 59: $\int_a^b 2s ds, \quad 0 < a < b$

سوال 60: $\int_a^b 3t dt, \quad 0 < a < b$

قیمت کی تلاش

سوال 61 تا سوال 72 میں دیے کھل کی قیمت کو مثال 5.33 اور مثال 5.34 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 61: $\int_1^{\sqrt{2}} x dx$

سوال 62: $\int_{0.5}^{2.5} x dx$

سوال 63: $\int_{\pi}^{2\pi} \theta d\theta$

سوال 64: $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r dr$

سوال 65: $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 dx$

سوال 66: $\int_0^{0.3} s^2 ds$

سوال 67: $\int_0^{1/2} t^2 dt$

سوال 68: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 d\theta$

سوال 69: $\int_0^{2a} x dx$

سوال 70: $\int_a^{\sqrt{3}a} x dx$

سوال 71: $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 dx$

سوال 72: $\int_0^{3b} x^2 dx$

رقبے کی تلاش
سوال 73 تا سوال 76 میں وقفہ $[0, b]$ پر x محور اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ قطعی مکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 73: $y = 3x^2$

سوال 74: $y = \pi x^2$

سوال 75: $y = 2x$

سوال 76: $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

