احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 6

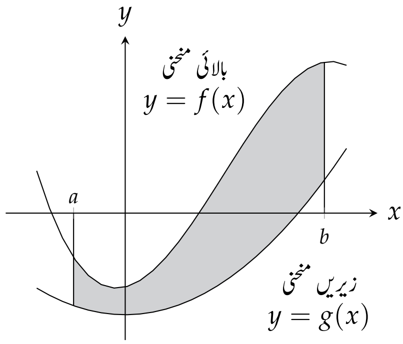
تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے نیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبے، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین پانی کی نکاسی کے لئے درکار کام، سیلاب دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدد۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریمان مجموعوں کے حد یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدوں کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکمل کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جا سکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کی طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ

محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطہ کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔



شکل 6.1: منحنیات $y = f(x)$، $y = g(x)$ اور لکیر $x = a$، $x = b$ کے بیچ خطہ۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کا حد

فرض کریں ایک خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = f(x)$ اور زیریں سرحد منحنی $y = g(x)$ ہیں جبکہ اس کا بایاں اور دایاں سرحد بالترتیب خط $x = a$ اور $x = b$ ہیں (شکل 6.1)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری f اور g کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

تکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ $[a, b]$ پر خانہ بندی $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ کے تحت خطہ کو n انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.2) جہاں k ویں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل 6.3)۔

$$\Delta S_k = \text{قد} \times \text{چوڑائی} = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$

اس کے بعد ہم خطے کے رقبہ کو تخمیناً ان n مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

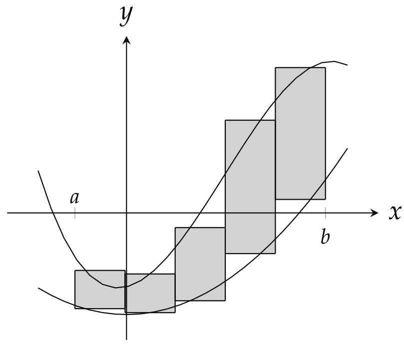
$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ f اور g استمراری ہیں لہٰذا $\|P\| \to 0$ کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ ہو گا:

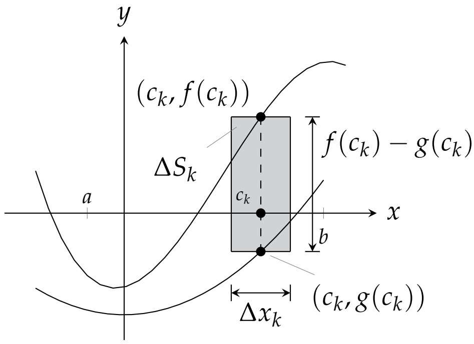
$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

تعریف: اگر پورے $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہوں اور $f(x) \geq g(x)$ ہو تب a تا b منحنیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ رقبہ a تا b متکمل $[f - g]$ کا تکمل ہو گا:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$



شکل 6.2: ہم خطہ کو تخمیناً x محور کے عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔



شکل 6.3: k ویں مستطیل کا قد $f(c_k) - g(c_k)$ اور اس کی چوڑائی Δx_k لہٰذا اس کا رقبہ $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$ ہو گا۔

□

مساوات 6.1 کو استعمال کرنے کے لئے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

دو منحنیات کے بیچ رقبے کی تلاش

1. منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔ اس سے معلوم ہو گا کہ کونسی منحنی بالائی f اور کونسی زیریں g ہے۔ اس سے تکمل کے حد تعین کرنے میں بھی مدد ملتی ہے۔

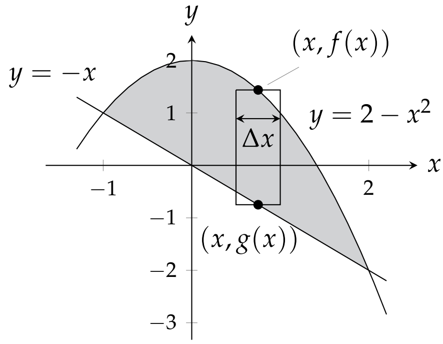
2. تکمل کے حد تلاش کریں۔

3. متکمل $f(x) - g(x)$ کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

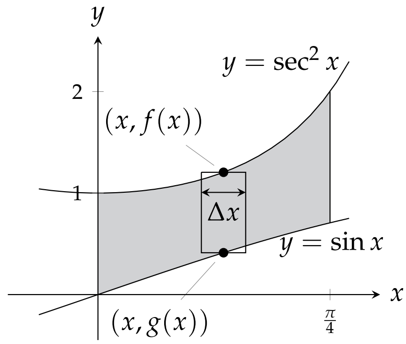
4. متکمل $[f(x) - g(x)]$ کا تکمل a تا b حاصل کریں۔ قطعی تکمل سے حاصل عدد رقبہ ہو گا۔

مثال 6.1: منحنیات $y = \sec^2 x$ اور $y = \sin x$ کے بیچ 0 تا $\frac{\pi}{4}$ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.4)۔ بالائی قوس $f(x) = \sec^2 x$ کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس $g(x) = \sin x$ کی منحنی ہے۔
دوسرا قدم: تکمل کے حد $a = 0$ اور $b = \frac{\pi}{4}$ دیے گئے ہیں۔



شکل 6.5: خطہ برائے مثال 6.2



شکل 6.4: خطہ برائے مثال 6.1

تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = \sec^x - \sin x$

چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x)\,\mathrm{d}x = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ پایا جاتا ہو تب نقاط تقاطع سے تکمل کے حد حاصل ہوں گے۔

مثال 6.2: قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $y = -x$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل 6.5)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم $f(x) = 2 - x^2$ اور $g(x) = -x$ لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے x محدد تکمل کے حد ہوں گے۔

دوسرا قدم: تکمل کے حد جاننے کے لئے ہم $y = 2 - x^2$ اور $y = -x$ کو ایک ساتھ x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x && f(x) \text{ اور } g(x) \text{ کو برابر پر کریں} \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{ایک جانب منتقلی} \\ (x+1)(x-2) &= 0 && \text{تجزی} \\ x = -1, \quad x &= 2 && \text{حل} \end{aligned}$$

خطہ $x=-1$ اور $x=2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

تیسرا قدم: $f(x)-g(x)=(2-x^2)-(-x)=2+x-x^2$

چوتھا قدم:

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)\,\mathrm{d}x=\Big[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2}$$
$$=\Big(4+\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\Big)-\Big(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)$$
$$=6+\frac{3}{2}-\frac{9}{3}=\frac{9}{2}$$

□

فنیات دو ترسیمات کا تقاطع
تکمل کے حصول میں بعض اوقات تکمل کے حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یا تو ایک تفاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کا نقاط تقاطع۔

مساوات $f(x)=g(x)$ حل کرنے کے لئے ہم $y=f(x)$ اور $y=g(x)$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات $f(x)-g(x)=0$ کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل 6.6)۔

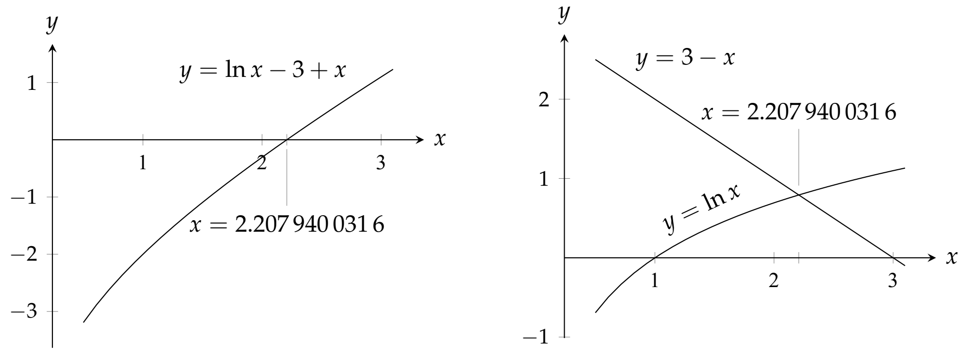
$$f(x)=\ln x,\quad g(x)=3-x$$

6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی خطے پر علیحدہ علیحدہ مساوات 6.1 کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال 6.3: ربع اول میں $y=\sqrt{x}$ کے نیچے اور $y=x-2$ کے اوپر رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ترسیم (شکل 6.7) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد $f(x)=\sqrt{x}$ ہے جبکہ $0\le x\le 2$ پر اس کی نچلی سرحد $g(x)=0$ اور $2\le x\le 4$ پر نچلی سرحد $g(x)=x-2$ ہے (نقطہ $x=2$ پر $g(x)$ کے دونوں کلیات ایک جیسے ہیں)۔ ہم $x=2$ پر خطہ کو دو ذیلی حصوں A اور B میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لئے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔



(ب) جذر

(ا) نقطہ قطع

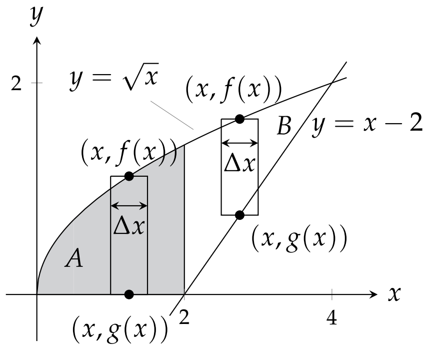
شکل 6.6: تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کے حل کی تلاش۔

دوسرا قدم: خطہ A میں تکمل کے حد $a=0$ اور $b=2$ ہیں۔ خطہ B کا بایاں حد $a=2$ ہے۔اس کے دایاں حد جاننے کے لئے ہم مساوات $y=\sqrt{x}$ اور $y=x-2$ کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$\sqrt{x}=x-2$	$f(x)$ اور $g(x)$ کے برابر پر کریں
$x=(x-2)^2=x^2-4x+4$	مربع لیں
$x^2-5x+4=0$	ایک جانب منتقلی
$(x-1)(x-4)=0$	تجزی
$x=1,\quad x=4$	حل

صرف $x=4$ مساوات $\sqrt{x}=x-2$ کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مربع لینے کی وجہ سے حل $x=1$ پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں دایاں حد $b=4$ ہے۔
تیسرا قدم:

$$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-0=\sqrt{x},\qquad 0\le x\le 2$$
$$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-(x-2)=\sqrt{x}-x+2,\qquad 2\le x\le 4$$



شکل 6.7: خطہ برائے مثال 6.3

چوتھا قدم: ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^2 + \Big[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_2^4 \\
&= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \Big(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\Big) - \Big(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\Big) \\
&= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

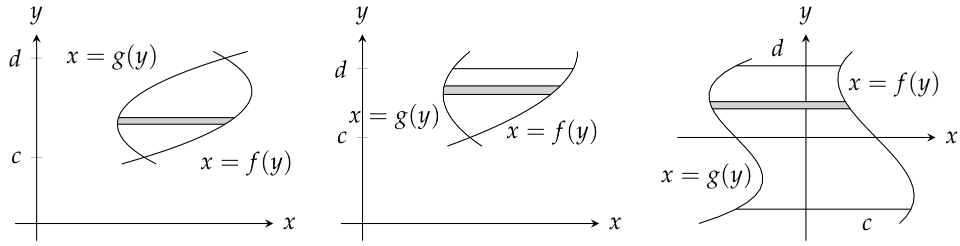
□

تکمل بلحاظ y

اگر سرحد کی مساواتیں y کی تفاعل ہوں تب تخمینی مستطیل کو انتصابی کی بجائے افقی بنایا جاتا ہے اور بنیادی کلیہ میں x کی جگہ y پایا جائے گا (شکل 6.8):

$$S = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y \tag{6.2}$$

مثال 6.4: درج بالا مثال 6.3 کو اس بار مساوات 6.2 کی مدد سے حل کریں۔



شکل 6.8: ان اشکال میں دایاں سرحد f اور بایاں سرحد g ہو گا لہٰذا $f(y) - g(y)$ غیر منفی ہو گا۔

حل: پہلا قدم: ہم خطہ ترسیم کر کے نمائندہ افقی مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.8)۔ خطے کا دایاں سرحد لکیر $x = y + 2$ ہے لہٰذا $f(y) = y + 2$ ہو گا۔ خطے کا بایاں سرحد $x = y^2$ ہے لہٰذا $g(y) = y^2$ ہو گا۔

دوسرا قدم: تکمل کا زیریں حد $y = 0$ ہے۔ تکمل کا بالائی حد جاننے کے لئے ہم $x = y + 2$ اور $x = y^2$ کو y کے لئے حل کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
y + 2 &= y^2 && f \text{ کو } g \text{ کے برابر پر کرتے ہیں} \\
y^2 - y - 2 &= 0 && \text{ایک ہاتھ منتقلی} \\
(y+1)(y-2) &= 0 && \text{تجزی} \\
y = -1, \quad y &= 2 && \text{حل}
\end{aligned}
$$

تکمل کا بالائی حد $y = 2$ ہے (چونکہ $y = -1$ افقی محور سے نیچے تفاعل کا نقطہ قطع دیتا ہے)۔

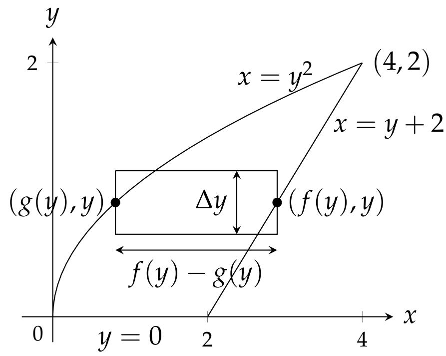
تیسرا قدم:

$$f(y) - g(y) = y + 2 - y^2 = 2 + y - y^2$$

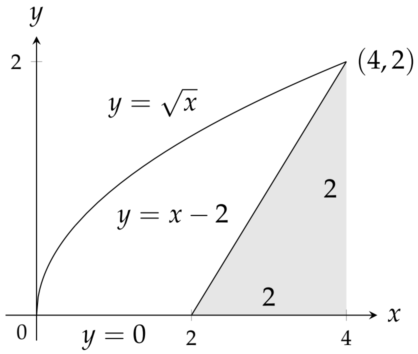
چوتھا قدم:

$$
\begin{aligned}
S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,\mathrm{d}y \\
&= \Big[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big]_0^2 \\
&= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

یہ وہی جواب ہے جو مثال 6.3 میں حاصل کی گیا۔ مثال 6.3 میں دو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش آئی جبکہ یہاں ایک ہی تکمل سے رقبہ معلوم کرنا ممکن تھا۔ □



شکل 6.9: خطہ برائے مثال 6.4



شکل 6.10: بالائی منحنی کے نیچے خطہ سے تکون منفی کرنے سے رقبہ حاصل ہو گا۔

تکمل کے ساتھ جیومیٹریائی کلیات کا استعمال

تکمل اور جیومیٹریائی کلیات کو ملا کر رقبہ نسبتاً زیادہ جلد حاصل ہوتا ہے۔

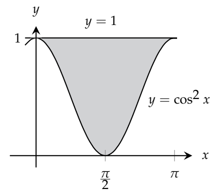
مثال 6.5: مزید ایک بار مثال 6.3 میں دیے گئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم $0 \le x \le 4$ محور x اور $y = \sqrt{x}$ کے بیچ رقبہ سے قاعدہ 2 اور قد 2 کے تکون کا رقبہ منفی کرتے ہوئے درکار خطے کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

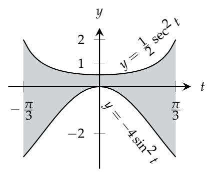
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(2)(2) \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2 \\
&= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

□

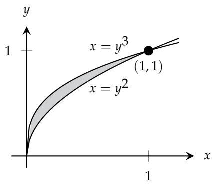
گزشتہ تین مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ دو منحنیات کے بیچ رقبہ بعض اوقات x کی بجائے y کے ساتھ تکمل لے کر نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بعض اوقات تکمل اور جیومیٹری کے کلیات کو ملا کر جلد جواب حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکمل لکھنے سے پہلے مسئلے پر غور کرنا بہتر ہو گا۔



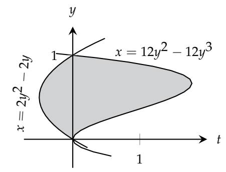
شکل 6.11



شکل 6.12



شکل 6.13



شکل 6.14

سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 1: سایہ دار خطہ شکل 6.11 جہاں سرحد $y=1$ اور $y=\cos^2 x$ ہیں۔

سوال 2: سایہ دار خطہ شکل 6.12 جہاں سرحد $y=\frac{1}{2}\sec^2 t$ ، $y=-4\sin^2 t$ ، $y=-\frac{\pi}{3}$ اور $y=\frac{\pi}{3}$ ہیں۔

سوال 3: سایہ دار خطہ شکل 6.13 جہاں سرحد $x=y^3$ اور $x=y^2$ ہیں۔

سوال 4: سایہ دار خطہ شکل 6.14 جہاں سرحد $x=12y^2-12y^3$ اور $x=2y^2-2y$ ہیں۔

سوال 5: سایہ دار خطہ شکل 6.15 جہاں سرحد $y=2x^2$ اور $y=x^4-2x^2$ ہیں۔

سوال 6: سایہ دار خطہ شکل 6.16 جہاں سرحد $y=x^2$ ، $y=-2x^4$ ، $x=-1$ اور $x=1$ ہیں۔

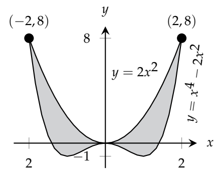
سوال 7: سایہ دار خطہ شکل 6.17 جہاں سرحد $y=1$ ، $y=x$ اور $y=\frac{x^2}{4}$ ہیں۔

سوال 8: سایہ دار خطہ شکل 6.18 جہاں سرحد $y=x^2$ ، $y=2-x$ اور $y=0$ ہیں۔

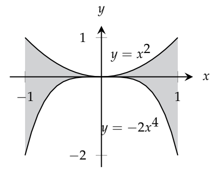
سوال 9 تا سوال 12 میں کل سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 9: سایہ دار رقبہ شکل 6.19 جہاں سرحد $y=x^2-4$ ، $y=-x^2-2x$ اور $x=-3$ ہیں۔

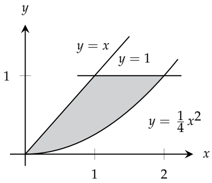
سوال 10: سایہ دار رقبہ شکل 6.20 جہاں سرحد $y=-x^2+3x$ اور $y=2x^3-x^2-5x$ ہیں۔



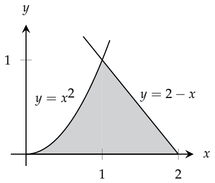
شکل 6.15



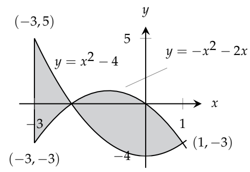
شکل 6.16



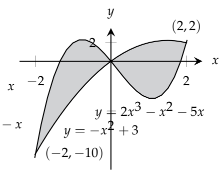
شکل 6.17



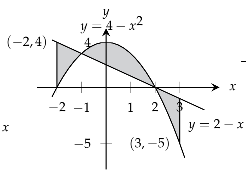
شکل 6.18



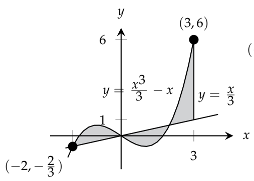
شکل 6.19



شکل 6.20



شکل 6.21



شکل 6.22

سوال 11: سایہ دار رقبہ شکل 6.21 جہاں سرحد $y = 4 - x^2$ ، $y = 2 - x$ ، $x = -2$ اور $x = 3$ ہیں۔

سوال 12: سایہ دار رقبہ شکل 6.22 جہاں سرحد $y = \frac{x^3}{3} - x$ ، $y = \frac{x}{3}$ اور $x = 3$ ہیں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں محیط خطے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 13: $y = x^2 - 2, \quad y = 2$

سوال 14: $y = 2x - x^2, \quad y = -3$

سوال 15: $y = x^4, \quad y = 8x$

سوال 16: $y = x^2 - 2x, \quad y = x$

سوال 17: $y = x^2, \quad y = -x^2 + 4x$

سوال 18: $y = 7 - 2x^2, \quad y = x^2 + 4$

سوال 19: $y = x^4 - 4x^2 + 4, \quad y = x^2$

سوال 20: $y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0, \quad y = 0$

سوال 21: $y = \sqrt{|x|}, \quad 5y = x + 6$ کتنے نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں؟

سوال 22: $y = \left| x^2 - 4 \right|, \quad y = \frac{x^2}{2} + 4$

سوال 23 تا سوال 30 میں دی گئی منحنیات اور لکیروں کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 23: $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$

سوال 24: $x = y^2, \quad x = y + 2$

سوال 25: $y^2 - 4x = 4, \quad 4x - y = 16$

سوال 26: $x - y^2 = 0, \quad x + 2y^2 = 3$

سوال 27: $x + y^2 = 0, \quad x + 3y^2 = 2$

سوال 28: $x - y^{2/3} = 0, \quad x + y^4 = 2$

سوال 29: $x = y^2 - 1, \quad x = \left| y \right| \sqrt{1 - y^2}$

سوال 30: $x = y^3 - y^2, \quad x = 2y$

سوال 31 تا سوال 34 میں محیط رقبہ تلاش کریں۔ رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔

سوال 31: $4x^2 + y = 4, \quad x^4 - y = 1$

سوال 32: $x^3 - y = 0, \quad 3x^2 - y = 4$

سوال 33: $x + 4y^2 = 4 \quad x + y^4 = 1, \quad x \geq 0$

سوال 34: $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 0$

سوال 35 تا سوال 42 میں محیط رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ رقبہ معلوم کریں۔

سوال 35: $y = 2\sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال 36: $y = 8\cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$

سوال 37: $y = \cos(\frac{\pi x}{2}), \quad y = 1 - x^2$

سوال 38: $y = \sin(\frac{\pi x}{2}), \quad y = x$

سوال 39: $y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$

سوال 40: $x = \tan^2 y, \quad x = -\tan^2 y, \quad -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$

سوال 41: $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}, \quad x = 0, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

سوال 42: $y = \sec^2(\frac{\pi x}{3}), \quad y = x^{1/3}, \quad -1 \le x \le 1$

سوال 43: ہوائی جہاز کے پنکھے کی طرح کا خطہ $x - y^3 = 0$ اور $x - y = 0$ گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 44: پنکھا نما خطہ $x - y^{1/3} = 0$ اور $x - y^{1/5} = 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

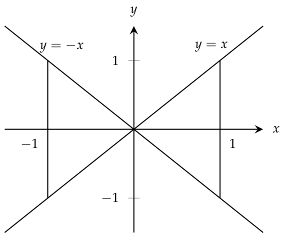
سوال 45: ربع اول میں لکیر $y = x$ ، لکیر $x = 2$ ، منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 46: ربع اول میں بائیں جانب y محور اور دائیں جانب منحنیات $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ تکون نما خطہ گھیرتے ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

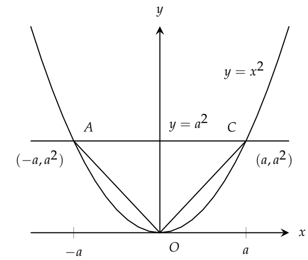
سوال 47: بالائی جانب لکیر $y = 4$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ میں محیط رقبہ کو افقی خط $y = c$ دو برابر ذیلی خطوں میں تقسیم کرتا ہے۔

ا. خطے کا خاکہ کھینچیں اور اس پر افقی لکیر $y = c$ اندازاً درست مقام پر بنائیں۔ قطع مکافی اور افقی لکیر جن نقطوں پر متقاطع ہیں، ان نقطوں کو c کی روپ میں دریافت کر کے خاکے پر دکھائیں۔

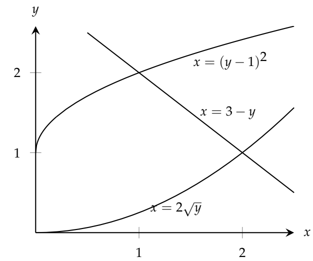
ب. y کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (تکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)



شکل 6.25: خطہ برائے سوال 53



شکل 6.24: خطہ برائے سوال 51



شکل 6.23: خطہ برائے سوال 50

ج. x کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (اس بار بھی تکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)

سوال 48: منحنی $y=3-x^2$ اور لکیر $y=-1$ کے بیچ رقبہ (ا) x کے لحاظ سے، (ب) y کے لحاظ سے تکمل لے کر معلوم کریں۔

سوال 49: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے لکیر $y=\frac{x}{4}$ ، بالائی بائیں منحنی $y=1+\sqrt{x}$ اور بالائی دائیں منحنی $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں۔

سوال 50: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے لکیر $x=2\sqrt{y}$ ، بالائی بائیں منحنی $x=(y-1)^2$ اور بالائی دائیں منحنی $x=3-y$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں (شکل 6.23)۔

سوال 51: قطع مکافی $y=x^2$ میں محصور تکون AOB شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ تکون کا بالائی ضلع لکیر $y=a^2$ ہے۔ تکون اور قطع مکافی کے رقبوں کی نسبت کی حد $a\to 0$ کر کے تلاش کریں۔

سوال 52: مثبت استمراری تفاعل f اور $a\le x\le b$ پر x محور کے بیچ رقبہ 4 ہے۔ منحنی $y=f(x)$ اور $y=2f(x)$ کے بیچ رقبہ $x=a$ تا $x=b$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 53: درج ذیل میں سے کونسا تکمل شکل 6.25 میں دکھایا گیا رقبہ دیتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\int_{-1}^{1}(x-(-x))\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}2x\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_{-1}^{1}(-x-(x))\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}-2x\,\mathrm{d}x$

سوال 54: کیا استمراری تفاعل $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ اور انتصابی لکیروں $x = a$ اور $x = b$ جہاں $a < b$ ہے کے بیچ رقبہ درج ذیل دیتا ہے؟ درست، کبھی کبھار درست یا کبھی نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 55 تا سوال 58 میں مستوی میں منحنیات کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ جہاں منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کرنا دشوار ہو وہاں کمپیوٹر کا سہارا لیتے ہوئے درج ذیل اقدام سرانجام دیں۔

ا. منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے خطہ کی عمومی صورت دیکھیں اور نقاط تقاطع کی تعداد جانیں۔

ب. نقاط تقاطع کو اعدادی تراکیب سے تلاش کریں۔

ج. یک بعد دیگرے جوڑی نقاط تقاطع کے بیچ $\left| f(x) - g(x) \right|$ کا تکمل حل کریں۔

د. جزو-ج میں تکمل کی حاصل قیمتوں کا مجموعہ لیں۔

سوال 55: $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$

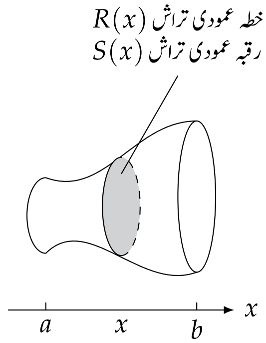
سوال 56: $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$

سوال 57: $f(x) = x + \sin(2x), \quad g(x) = x^3$

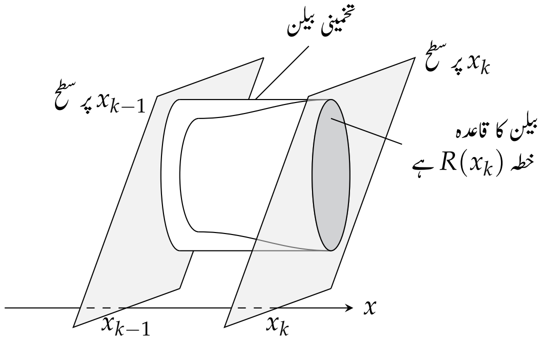
سوال 58: $f(x) = x^2 \cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش

قوسی سرحد کے خطوں کے رقبہ عمودی تراش سے بیلنی حجم معلوم کرنے کے لئے رقبہ عمودی تراش کو بیلن کے قد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرز کے بیلنی حجم سے دیگر اشکال کے خطوں کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے۔



شکل 6.26: عمودی تراش $R(x)$ کا رقبہ $S(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم ٹھوس جسم کا حجم $x = a$ تا $x = b$ تفاعل $S(x)$ کا تکمل لے کر حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل 6.27: سطح x_{k-1} اور x_k کے بیچ ٹکیا کو بڑا کر کے دکھایا گیا ہے اور ساتھ ہی تخمینی بیلن بھی دکھایا گیا ہے۔

ٹکیاں

فرض کریں ہم شکل 6.26 میں دکھائے گئے ٹھوس جسم کا حجم دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ x پر جسم کا عمودی تراش خطہ $R(x)$ ہے جس کا رقبہ $S(x)$ ہے۔ یوں S متغیر x کا حقیقی قیمت تفاعل ہو گا جو x کا استمراری تفاعل بھی ہو گا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے جسم کے حجم کی تعریف پیش کی جا سکتی ہے جس کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ہم x محور کے لحاظ سے وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے جسم کو خانہ بند نقطوں پر x محور کے عمودی، سطحوں سے مولی کی طرح چپٹا ٹکڑے کرتے ہوئے جسم کی ٹکیاں بناتے ہیں۔ یوں نقطہ x_{k-1} اور x_k پر سطحوں کے بیچ k ویں ٹکیا کا حجم تقریباً اس بیلن جتنا ہو گا جو ان سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے اور جس کا عمودی تراش خطہ $R(x_k)$ ہے (شکل 6.27)۔ اس بیلن کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H_k &= \text{قد} \times \text{رقبہ قاعدہ} \\
&= S(x_k) \times (x_{k-1} \text{ اور } x_k \text{ کے بیچ فاصلہ}) \\
&= S(x_k)\Delta x_k
\end{aligned}
$$

اس طرح تمام چھوٹے بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تخمیناً ٹھوس جسم کے حجم کے برابر ہو گا:

$$\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

یہ وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $S(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں۔ کہ جیسے جیسے $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچے ویسے ویسے یہ مجموعے اصل حجم کی بہتر سے بہتر عکاسی کریں گے۔ یوں ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف ان مجموعوں کا تحدیدی تکمل ہو گا۔

تعریف: ایسا ٹھوس جسم جس کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو، کا $x = a$ سے $x = b$ تک حجم $x = a$ تا $x = b$ تفاعل S کا تکمل ہو گا:

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.3}$$

□

مساوات 6.3 استعمال کرنے کے لئے درج ذیل تین اقدام کرنے ہوں گے۔

ٹھوس جسم کی ٹکیوں سے حجم کی تلاش

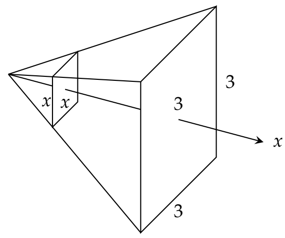
1. ٹھوس جسم اور اس کے نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ کھینچیں۔
2. رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔
3. تکمل کا زیریں اور بالائی حد تلاش کریں۔
4. حجم معلوم کرنے کی خاطر $S(x)$ کا تکمل حل کریں۔

مثال 6.6: ایک اہرام کا قد $3\,\mathrm{m}$ اور اس کے چکور بنیاد کا ضلع $3\,\mathrm{m}$ ہے۔ اہرام کی چوٹی سے x میٹر نیچے اہرام کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا جس کا ضلع x میٹر ہو گا۔ اس اہرام کا حجم تلاش کریں۔

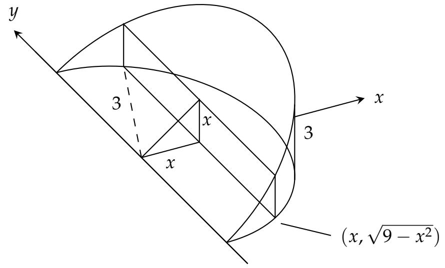
حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم اہرام کی چوٹی کو مبدا پر رکھ کر اہرام کو x محور پر لیٹا ہوا بنا کر نمائندہ رقبہ عمودی تراش بناتے ہیں (شکل 6.28)۔
دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$۔ چونکہ چکور رقبہ عمودی تراش کا ضلع x میٹر ہے لہٰذا اس کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = x^2$ ہو گا۔
تیسرا قدم: تکمل کے حد۔ چکور $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں لہٰذا $a = 0$ اور $b = 3$ ہوں گے۔
چوتھا قدم: حجم۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

یوں اہرام کا حجم $9\,\mathrm{m}^3$ ہو گا۔ □



شکل 6.28: اہرام (مثال 6.6)



شکل 6.29: قوسی پچر (مثال 6.7)

مثال 6.7: رداس 3 کے بیلن کو دو مستوی سے کاٹ کر قوسی پچر بنایا جاتا ہے۔ایک مستوی بیلن کے محور کا عمودی ہے جبکہ دوسرا مستوی پہلے مستوی کو بیلن کے وسط پر 45° سے قطع کرتا ہے۔ پچر کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم پچر اور نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.29)۔ عمودی تراش x محور کے عمودی ہے۔
دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$ ۔ نقطہ x پر مستطیل عمودی تراش کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = (\text{قد})(\text{چوڑائی}) = (x)(2\sqrt{9-x^2}) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

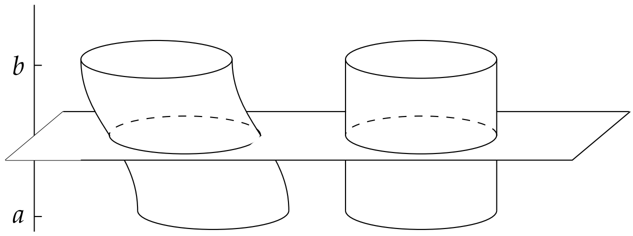
تیسرا قدم: تکمل کے حد۔ مستطیل $x=0$ تا $x=3$ پائے جاتے ہیں۔
چوتھا قدم: حجم۔ درج ذیل میں $u = 9 - x^2$ لہٰذا $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ لے کر تکمل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

□

مثال 6.8: مسئلہ کوالئیرے[1] محور x پر پڑے ہوئے ایسے دو اجسام جن کا ہر x پر رقبہ عمودی تراش ایک دوسرے جیسا ہو کا حجم بھی ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ یہ حقیقت مساوات 6.3 سے صاف ظاہر ہے چونکہ دونوں اجسام کا رقبہ عمودی تراش تفاعل $S(x)$ ایک دوسرے جیسا ہے (شکل 6.30)۔ □

[1] اطالوی ریاضی دان بوناونتورا کوالئیرے [1598-1647]



شکل 6.30: ان اجسام کا حجم ایک دوسرے جیسا ہے۔ آپ سکوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

سوالات

رقبہ عمودی تراش
سوال 1 اور سوال 2 میں x محور کے عمودی، ٹھوس جسم کے، رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 1: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش نصف دائرہ $y = -\sqrt{1-x^2}$ اور نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں ۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ب)۔

ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنا ہوتی ہے (شکل 6.31-ج)۔

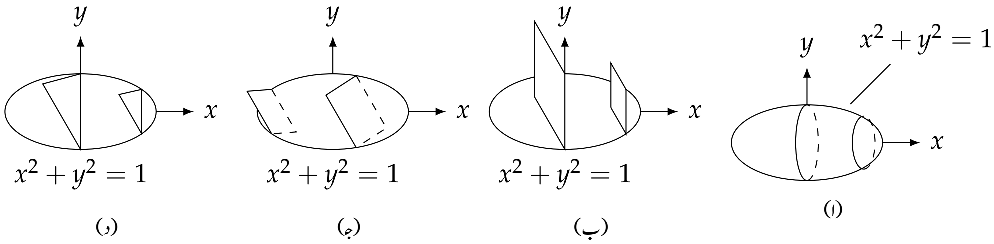
د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-د)۔

سوال 2: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش، قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور قطع مکافی $y = \sqrt{x}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.32-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 2-ب)۔

ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔



شکل 6.31: عمودی تراش برائے سوال 1

شکل 6.32: عمودی تراش برائے سوال 2

د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں۔

ٹکیوں سے حجم کی تلاش
سوال 3 تا سوال 12 میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

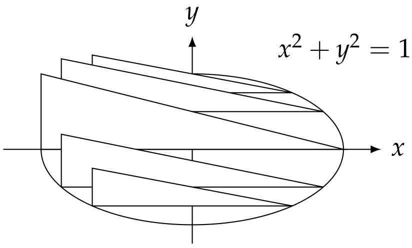
سوال 3: ایک ٹھوس جسم $x=0$ اور $x=4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش کی صورت چکور ہے جو x محور کے عمودی ہیں اور جن کے وتر قطع مکافی $y=-\sqrt{x}$ سے قطع مکافی $y=\sqrt{x}$ تک ہیں۔

سوال 4: ایک ٹھوس جسم $x=-1$ اور $x=1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر دائری اقراص ہیں جو قطع مکافی $y=x^2$ سے قطع مکافی $y=2-x^2$ تک ہیں۔

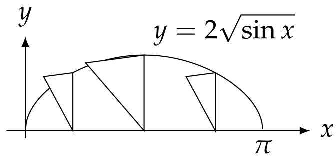
سوال 5: ایک ٹھوس جسم $x=-1$ اور $x=1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قاعدہ کے کنارے نصف دائرہ $y=-\sqrt{1-x^2}$ سے نصف دائرہ $y=\sqrt{1-x^2}$ تک ہیں۔

سوال 6: ایک ٹھوس جسم $x=-1$ اور $x=1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے وتر نصف دائرہ $y=-\sqrt{1-x^2}$ سے نصف دائرہ $y=\sqrt{1-x^2}$ تک ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنّا ہوتی ہے۔

سوال 7: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ منحنی $y=2\sqrt{\sin x}$ اور x محور پر وقفہ $[0,\pi]$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی عمودی تراش درج ذیل ہیں۔



شکل 6.34: عمودی تراش (سوال 10)



شکل 6.33: عمودی تراش (سوال 7)

ا. مساوی الاضلاع مثلث جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں (شکل 6.33)۔

ب. انتصابی چکور جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں۔

سوال 8: ایک ٹھوس جسم $x=-\frac{\pi}{3}$ اور $x=\frac{\pi}{3}$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کی خواص درج ذیل ہیں۔

ا. دائری اقراص جن کے قطر $y=\tan x$ سے $y=\sec x$ تک ہیں۔

ب. انتصابی چکور کن کے قاعدے $y=\tan x$ سے $y=\sec x$ تک ہیں۔

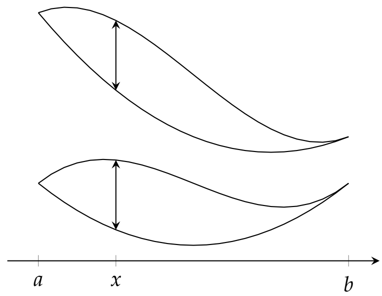
سوال 9: ایک ٹھوس جسم $y=0$ اور $y=2$ پر y محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے دائری عمودی تراش y محور کے عمودی ہیں جن کے قطر y محور سے قطع مکافی $x=\sqrt{5}y^2$ تک ہیں۔

سوال 10: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ قرص $x^2+y^2\leq 1$ ہے۔ عمودی تراش $y=-1$ اور $y=1$ کے بیچ y محور کے عمودی ہیں جو مساوی الساقین مثلث ہیں جن کا ایک ضلع قرص میں پایا جاتا ہے (شکل 6.34)۔

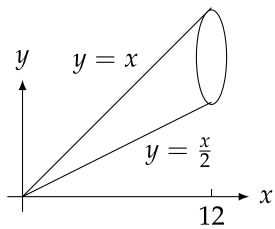
مسئلہ کو الٹیے
سوال 11: بلدار ٹھوس جسم
ایک چکور جس کا ضلع s ہے لکیر L کے عمودی مستوی میں پایا جاتا ہے۔ چکور کا ایک راس L پر پایا جاتا ہے۔ یہ چکور L پر h فاصلہ طے کرتے ہوئے ایک چکر کاٹ کر پیچ نما جسم دیتا ہے جس کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا۔

ا. اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

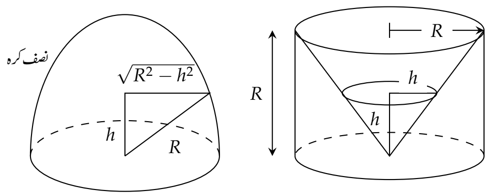
ب. اگر چکور ایک کی بجائے دو بار چکر کاٹتا تب حجم کتنا ہوتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



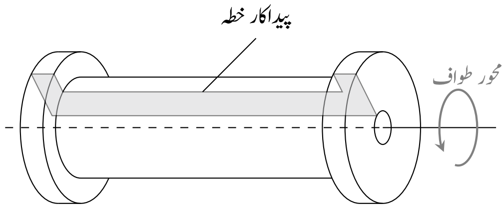
شکل 6.36: وقفہ $[a, b]$ پر کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جتنی ہے (مسئلہ کوالیئرے)۔



شکل 6.35: عمودی تراش (سوال 12)



شکل 6.37: کرہ اور بیلن سے مخروط منفی کر کے ایک جیسا حجم ملتا ہے (سوال 14)۔



شکل 6.38: مستوی خطہ کو کسی محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

سوال 12: ایک ٹھوس جسم $x = 01$ اور $x = 12$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر لکیر $y = \frac{x}{2}$ سے لکیر $y = x$ تک ہیں (شکل 6.35)۔ اس جسم کا حجم کیوں اس قائمہ مخروط جتنا ہو گا جس کا قد 12 اور جس کے قاعدہ کا رداس 3 ہو؟

سوال 13: مسئلہ کوالئیرے کی ابتدائی صورت
کوالئیرے نے طالب علمی کے دوران دریافت کیا کہ اگر دو مستوی خطوں کو x محور کے یکساں وقفہ پر یوں رکھنا ممکن ہو کہ کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جیسی ہو تب دونوں خطوں کا رقبہ ایک دوسرے جیسا ہو گا (شکل 6.36)۔ ٹھوس اجسام کے لئے یہی مسئلہ کوالئیرے نے کبھی ثابت نہیں کیا۔ اگر شکل 13 میں بالائی اور زیریں سرحدیں استمراری تفاعل ہوں تب اس مسئلے کو ثابت کریں۔

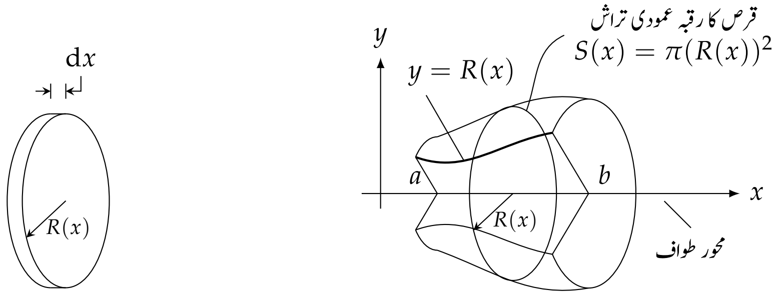
سوال 14: نصف کرہ کا حجم بذریعہ مسئلہ کوالئیرے
نصف کرہ کا حجم $H = \frac{2}{3}\pi R^3$ ہے جہاں R رداس ہے۔رداس R اور قد R کے قائمہ بیلن سے رداس R اور قد R کا قائمہ مخروط ہٹا کر نصف کرہ کا عمودی تراش حاصل ہوتا ہے۔ مخروط کو نوک کے بل رکھا تصور کریں (شکل 6.37)۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے نصف کرہ کا حجم تلاش کریں۔

6.3 اجسام طواف کے حجم۔قرص اور چھلا

مستوی خطے کو کسی محور کے گرد گمانے سے جسم طواف[2] پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.38)۔ جسم طواف پیدا کرنے کے لئے گھمائے جانے والے مستوی خطے کو پیدا کار خطہ[3] کہتے ہیں۔ جسم طواف کا حجم ٹکیوں کی ترکیب سے نہایت خوش اسلوبی سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ہم مستوی خطہ کو استمراری تفاعل $y = R(x),\ a \le x \le b$ اور x کے بیچ خطہ سے ظاہر کر سکیں اور اگر x محور گھومنے کا محور (محور طواف[4]) بھی ہو تب ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 6.39)۔

---
[2] solid of revolution
[3] generating region
[4] axis of revolution



(ا) استمراری تفاعل $y=R(x)$ کو $x=a$ تا $x=b$ محور x کے گرد گھمایا گیا ہے۔

(ب) قرص کا حجم $\mathrm{d}H=\pi(R(x))^2$ ہے۔

شکل 6.39: جسم طواف کے حجم کا حصول بذریعہ ترکیب قرص۔

محور طواف کے لحاظ سے عمودی تراش کا رداس $R(x)$ اور رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x)=\pi(\text{رداس})^2=\pi[R(x)]^2$$

جسم کا حجم، $x=a$ تا $x=b$ ، تفاعل S کا تکمل ہو گا۔

جسم طواف کا حجم (محور طواف x محور ہے)

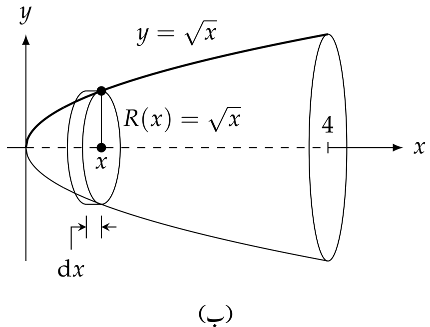
استمراری تفاعل $y=R(x),\ a\le x\le b$ کو x محور کے گرد گمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

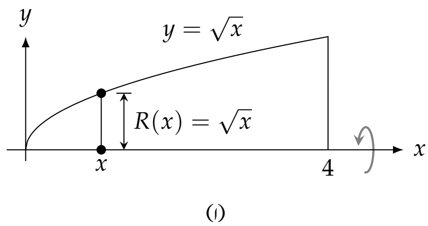
$$H=\int_a^b \pi[\text{رداس}]^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

مثال 6.9: منحنی $y=\sqrt{x},\ 0\le x\le 4$ کو x محور کے گرد گمانے سے ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ رداس بناتے ہیں (شکل 6.40)۔ حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H&=\int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x && \text{6.4 مساوات}\\
&=\int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\,\mathrm{d}x && R(x)=\sqrt{x}\\
&=\pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x=\pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4=\pi\frac{(4)^2}{2}=8\pi
\end{aligned}$$





شکل 6.40: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.9)

□

مساوات 6.4 سے حجم حاصل کرنے کا طریقہ

ا. خطے کا خاکہ بنائیں اور رداس $R(x)$ کی نشاندہی کریں۔

ب. یوں رقبہ عمودی تراش $\pi[R(x)]^2$ ہو گا۔

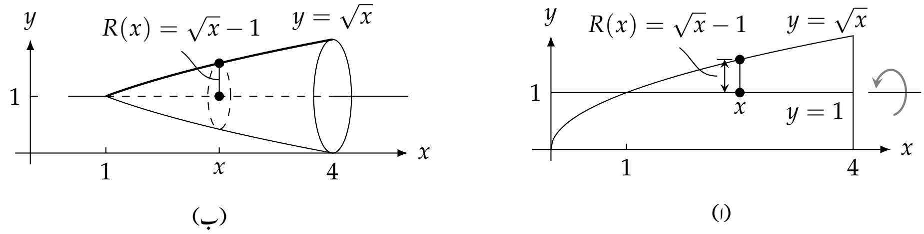
ج. رقبہ عمودی تراش کا تکمل حجم ہو گا۔

اگلے مثال میں محور طواف x محور نہیں ہے، لیکن حجم حاصل کرنے کا اصول تبدیل نہیں ہوتا: تکمل کے موزوں حد استعمال کریں۔

مثال 6.10: تفاعل $y = \sqrt{x}$، لکیر $y = 1$ اور لکیر $x = 4$ کے بیچ خطہ کو لکیر $y = 1$ کے گرد گما کر ٹھوس جسم پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم خطہ اور نمائندہ رداس بنا کر ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.41)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2 \,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.4} \\
&= \int_1^4 \pi[\sqrt{x}-1]^2 \,\mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x}-1 \\
&= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \Big[\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + x\Big]_1^4 = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$



شکل 6.41: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.10)

□

منحنی $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو y محور کے گرد گما کر ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے جس کا حجم تلاش کرتے ہوئے مساوات 6.4 میں x کی جگہ y لکھا جاتا ہے۔

جسم طواف کا حجم (محور طواف y محور ہے)
استمراری تفاعل $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو y محور کے گرد گمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_c^d \pi[\text{رداس}]^2 \,\mathrm{d}x = \int_c^d \pi[R(y)]^2 \,\mathrm{d}y \tag{6.5}$$

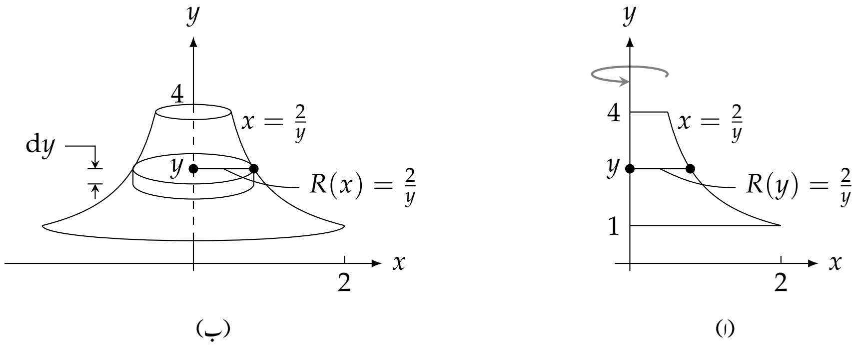
مثال 6.11: منحنی $x = \frac{2}{y},\ 1 \le y \le 4$ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔

حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ قرص اور رداس بناتے ہیں (شکل 6.42)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2 \,\mathrm{d}y && \text{مساوات 6.5}\\
&= \int_1^4 \pi\Big(\frac{2}{y}\Big)^2 \,\mathrm{d}y && R(y) = \frac{2}{y}\\
&= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} \,\mathrm{d}y = 4\pi\Big[-\frac{1}{y}\Big]_1^4 = 4\pi\Big[\frac{3}{4}\Big] = 3\pi
\end{aligned}$$

□

مثال 6.12: قطع مکافی $x = y^2 + 1$ اور لکیر $x = 3$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = 3$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔



شکل 6.42: مستوی خطہ، جسم طواف اور قرص (مثال 6.11)

حل: ہم منحنی اور لکیر کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر جسم طواف کا خاکہ بناتے ہیں اور عمودی تراش کی نمائندہ رداس کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 6.43)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

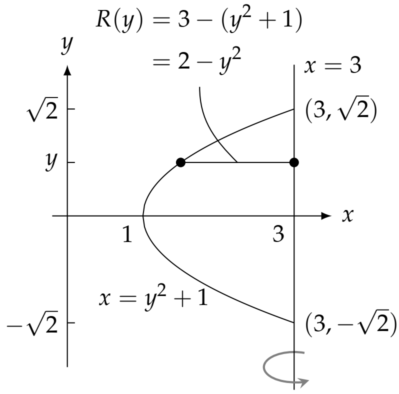
$$\begin{aligned}
H &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2 \, dy && \text{مساوات 6.5} \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2-y^2]^2 \, dy && R(y) = 3-(y^2+1) \\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4-4y^2+y^4] \, dy \\
&= \pi\Big[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

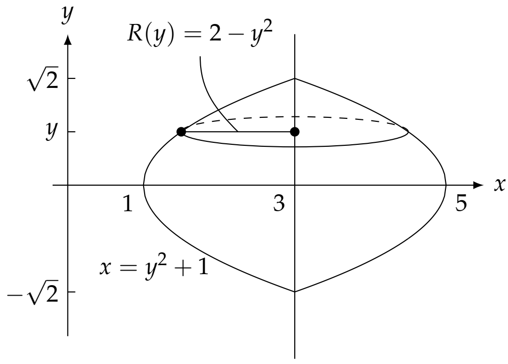
□

ترکیب چھلا

اگر گھمائے جانے والا خطہ محور طواف کو قطع نہ کرتا ہو اور نا ہی محور طواف کو مس کرتا ہو تب جسم طواف میں سوراخ پایا جائے گا (شکل 6.44)۔ ایسے جسم کا بیرونی رداس $R(x)$ اور اندرونی رداس $r(x)$ ہو گا۔ یوں اس کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$





شکل 6.43: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.12)

حجم تلاش کرنے کا کلیہ

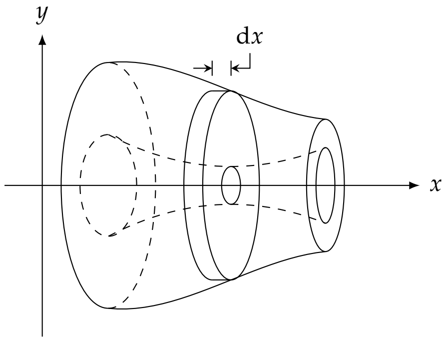
$$H = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

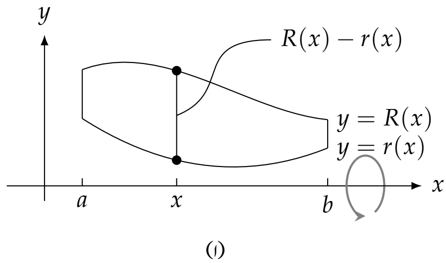
دھیان رہے کہ مساوات 6.6 میں تفاعل $\pi(R^2 - r^2)$ کا تکمل لیا جاتا ہے نا کہ تفاعل $\pi(R-r)^2$ کا۔ اگر پورے وقفہ $[a, b]$ پر اندرونی رداس صفر ہو تب درج بالا سے مساوات 6.4 حاصل ہوتی ہے۔ یوں ترکیب ٹکیا در حقیقت ترکیب چھلا کی مخصوص صورت ہے۔

مثال 6.13: منحنی $y = x^2 + 1$ اور لکیر $y = -x + 3$ کے بیچ خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنی اور لکیر ترسیم کر کے خطے کا خاکہ بنا کر خطے پر محور طواف کے عمودی لکیر کھینچیں (شکل 6.45)۔
دوسرا قدم: نقاط تقاطع سے تکمل کے حد تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &= -x + 3\\
x^2 + x - 2 &= 0\\
(x+2)(x-1) &= 0\\
x = -2, \quad x &= 1
\end{aligned}$$





شکل 6.44: یہاں جسم طواف قرص کی بجائے چھلا نما ہے جس میں سوراخ پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ ذرہ مختلف صورت اختیار کرتا ہے۔

تیسرا قدم: بیرونی اور اندرونی رداس کی نشاندہی کریں۔

$$R(x) = -x + 3 \qquad \text{بیرونی رداس}$$
$$r(x) = x^2 + 1 \qquad \text{اندرونی رداس}$$

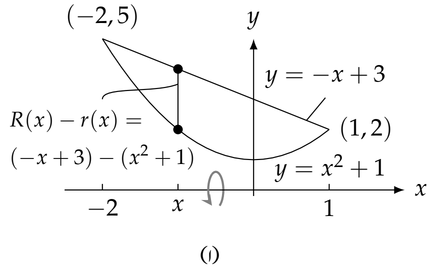
چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^1 \pi([-x+3]^2 - [x^2+1]^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^1 \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\Big[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5}
\end{aligned}$$

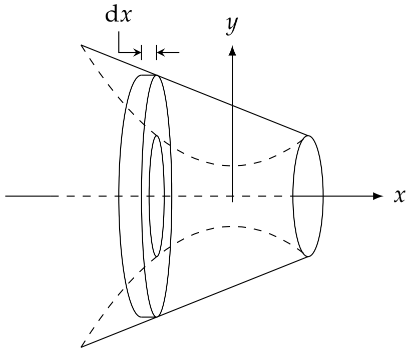
□

ترکیب چھلا سے حجم کی تلاش

ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع کھینچیں۔ خطہ کو محور طواف کے گرد گھمانے سے یہ قطع نمائندہ عمودی تراش دے گا۔



(ا)



(ب)

شکل 6.45: مستوی خطہ اور چھلا نما جسم طواف (مثال 6.13)

ب. تکمل کے حد دریافت کریں۔

ج. عمودی تراش کا بیرونی اور اندرونی رداس کو لکیری قطع سے حاصل کریں۔

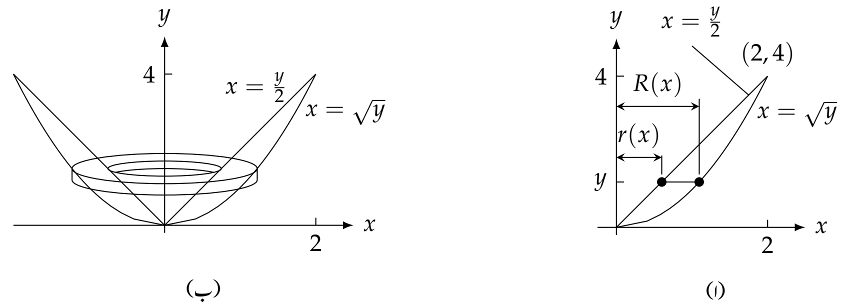
د. تکمل کی ذریعہ حجم حاصل کریں۔

اگر خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب درج بالا اقدام استعمال کرتے ہوئے x کی بجائے y کے ساتھ تکمل لیں۔

مثال 6.14: ربع اول میں قطع مکافی $y=x^2$ اور لکیر $y=2x$ کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ کھینچ کر خطہ پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع بنائیں (شکل 6.46)۔ یہاں محور طواف y محور ہے۔
دوسرا قدم: قطع مکافی اور لکیر ایک دوسرے کو $y=0$ اور $y=4$ پر قطع کرتے ہیں لہٰذا تکمل کے حد $c=0$ اور $d=4$ ہوں گے۔
تیسرا قدم: رقبہ عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y)=\sqrt{y}$ اور اندرونی رداس $r(y)=\frac{y}{2}$ ہے۔
چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2-[r(y)]^2)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^4 \pi\Big([\sqrt{y}]^2-[\tfrac{y}{2}]^2\Big)\,\mathrm{d}y\\
&= \pi\int_0^4 \Big(y-\frac{y^2}{4}\Big)\,\mathrm{d}y=\pi\Big[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\Big]_0^4=\frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$



شکل 6.46: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.14)

□

مثال 6.15: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$ ، لکیر $y = 1$ اور y محور کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم دریافت کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کے خاکہ پر محور طواف $x = \frac{3}{2}$ کے عمودی، لکیری قطع بنائیں (شکل 6.47)۔
دوسرا قدم: تکمل کے حد $y = 0$ اور $y = 1$ ہیں۔
تیسرا قدم: عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \frac{3}{2}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{y}$ ہے۔
چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

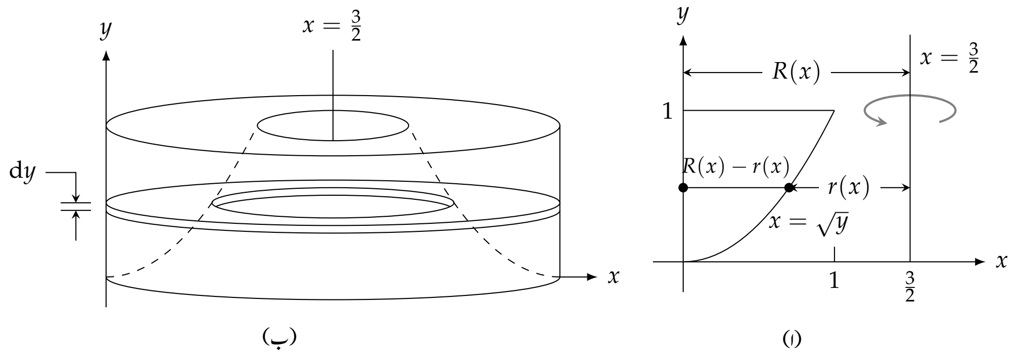
$$\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \pi([\tfrac{3}{2}]^2 - [\tfrac{3}{2} - \sqrt{y}]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \pi \int_0^1 (3\sqrt{y} - y)\,\mathrm{d}y = \pi\Big[2y^{3/2} - \tfrac{y^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

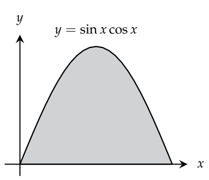
سوالات

حجم بذریعہ ترکیب ٹکیا

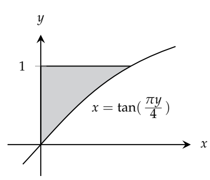
سوال 1 تا سوال 4 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔



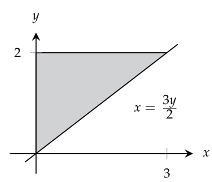
شکل 6.47: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.15)



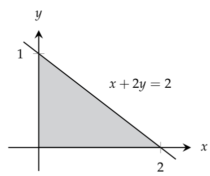
شکل 6.51



شکل 6.50



شکل 6.49



شکل 6.48

سوال 1: سایہ دار خطہ شکل 6.48 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x+2y=2$ ہے۔

سوال 2: سایہ دار خطہ شکل 6.49 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x=\frac{3y}{2}$ ہے۔

سوال 3: سایہ دار خطہ شکل 6.50 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x=\tan\left(\frac{\pi y}{4}\right)$ ہے۔

سوال 4: سایہ دار خطہ شکل 6.51 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $y=\sin x\cos x$ ہے۔

سوال 5 تا سوال 10 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 5: $y=x^2,\quad y=0,\quad x=2$

سوال 6: $y=x^3,\quad y=0,\quad x=2$

سوال 7: $y=\sqrt{9-x^2},\quad y=0$

سوال 8: $y=x-x^2,\quad y=0$

سوال 9: $y=\sqrt{\cos x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad x=0,\quad y=0$

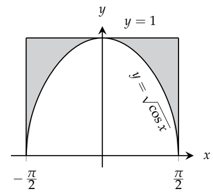
سوال 10: $y=\sec x,\quad y=0,\quad x=-\frac{\pi}{4},\quad x=\frac{\pi}{4}$

سوال 11 اور سوال 12 میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

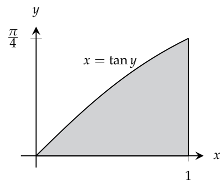
سوال 11: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y=\sqrt{2}$ ، زیریں سرحد منحنی $y=\sec x\tan x$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y=\sqrt{2}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 12: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y=2$ ، زیریں سرحد منحنی $y=\sec x\tan x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y=2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 13 تا سوال 18 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم دریافت کریں۔



شکل 6.52



شکل 6.53

سوال 13: $x=\sqrt{5}y^2, \quad x=0, \quad y=-1, \quad y=1$

سوال 14: $x=y^{3/2}, \quad x=0, \quad y=2$

سوال 15: $x=\sqrt{2\sin 2y}, \quad 0\le y\le \frac{\pi}{2}, \quad x=0$

سوال 16: $x=\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}, \quad -2\le y\le 0, \quad x=0$

سوال 17: $x=\frac{2}{y+1}, \quad x=0, \quad y=0, \quad y=3$

سوال 18: $x=\frac{\sqrt{2y}}{y^2+1}, \quad x=0, \quad y=1$

حجم بذریعہ ترکیب چھلا

سوال 19 اور سوال 19 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 19: خطہ شکل 6.52 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 20: خطہ شکل 6.53 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 21 تا سوال 28 میں دیے منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو x محور گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 21: $y=x, \quad y=1, \quad x=0$

سوال 22: $y=2x, \quad y=x, \quad x=1$

سوال 23: $y=2\sqrt{x}, \quad y=2, \quad x=0$

سوال 24: $y = -\sqrt{x}, \quad y = -2, \quad x = 0$

سوال 25: $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

سوال 26: $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

سوال 27: $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

سوال 28: $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

سوال 29 تا سوال 34 میں خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

سوال 29: مثلث میں محیط خطہ جہاں مثلث کی راسیں $(1,0)$ ، $(2,1)$ اور $(1,1)$ ہیں۔

سوال 30: مثلث جس کی راسیں $(0,1)$ ، $(1,0)$ اور $(1,1)$ ہیں میں محیط خطہ۔

سوال 31: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد قطع مکافی $y = x^2$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد لکیر $x = 2$ ہے۔

سوال 32: خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = \sqrt{x}$ اور زیریں سرحد لکیر $y = x$ ہے۔

سوال 33: ربع اول میں خطہ جس کا بایاں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 3$ ، دایاں سرحد لکیر $x = \sqrt{3}$ اور بالائی سرحد لکیر $y = \sqrt{3}$ ہے۔

سوال 34: خطے کی بائیں سرحد لکیر $x = 4$ اور دائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ہے۔

سوال 35 اور سوال 36 میں خطے کو دئے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 35: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = x^2$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد لکیر $x = 1$ ہیں۔خطے کو لکیر $x = -1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 36: ربع دوم میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = -x^3$ ، زیریں سرحد محور x اور بایاں سرحد لکیر $x = -1$ ہے۔ خطے کو لکیر $x = -2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جسم طواف کے حجم

سوال 37: ایک خطہ جس کی سرحدیں $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ اور $x = 0$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ٹھوس جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

ا. محور x ؛

ب. محور y ؛

ج. لکیر $y=2$ ؛

د. لکیر $x=4$

سوال 38: ایک تکونی خطہ جس کی سرحدیں $y=2x$ ، $y=0$ اور $x=1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $x=1$ ؛

ب. لکیر $x=2$

سوال 39: ایک خطہ جس کی سرحدیں قطع مکافی $y=x^2$ اور $y=1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $y=1$ ؛

ب. لکیر $y=2$ ؛

ج. لکیر $y=-1$

سوال 40: ایک مثلث جس کی راسیں $(0,0)$ ، $(b,0)$ اور $(0,h)$ ہیں میں محیط خطے کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

ا. محور x ؛

ب. محور y

سوال 41: ایک برتن کو رداس $16\,\mathrm{cm}$ کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ برتن کی گہرائی $9\,\mathrm{cm}$ ہے۔ برتن کا حجم تکمل کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 42: منحنی $y=\frac{x}{12}\sqrt{36-x^2},\, 0\le x\le 6\,\mathrm{cm}$ کو x محور کے گرد گھما کر ناشپاتی نما پیتل کا گولہ بنایا جاتا ہے۔ پیتل کی کثافت $8.5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ لیں۔ گولے کی کمیت کتنی ہو گی؟

سوال 43: منحنی $y=\sin x,\, 0\le x\le \pi x$ کو لکیر $y=c$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں $0\le c\le 1$ ہے۔

ا. ٹھوس جسم کی کم سے کم حجم c کی کتنی قیمت پر حاصل ہو گی؟ اس کم سے کم حجم کو تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0,1]$ میں c کی کونسی قیمت زیادہ سے زیادہ حجم دے گی؟

ج. ٹھوس جسم کا حجم بالمقابل c کو پہلے $0 \leq c \leq 1$ کے لئے اور بعد میں بڑی قیمتوں کے لئے ترسیم کریں۔ جیسے جیسے c کی قیمت وقفہ $[0,1]$ سے دور ہوتی جاتی ہے، جسم کے حجم کو کیا ہوتا ہے؟ کیا اس کا طبعی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 44: ہیلی کاپٹر کی پہنچ بڑھانے کی خاطر اس کے نیچے تیل کی اضافی ٹینکی نسب کرنا مطلوب ہے۔ منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3},\ -1 \leq x \leq 1$ کو x محور کے گرد گھما کر ٹینکی بنائی جاتی ہے۔ اس ٹینکی میں کتنے لٹر تیل آئے گا؟

سوال 45: اندرسہ کا حجم
دائری قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو لکیر $y = b\ (b > a)$ کے گرد گھما کر اندرسہ[5] پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔
(اشارہ۔ $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{2}$ ہو گا چونکہ یہ رداس a کے نصف دائرے کا رقبہ ہے۔)

سوال 46: (ا) نصف کروی برتن جس کا رداس a ہے میں پانی کی گہرائی h ہے۔ پانی کی مقدار معلوم کریں۔ (ب) نصف کروی ٹینکی جس کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے میں پانی داخل ہونے کی شرح $0.2\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہو، اس لمحہ گہرائی بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟

سوال 47: اس حصہ میں حجم کے تمام تعریف جیومیٹریائی تعریف کے عین مطابق ہیں۔

ا. نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ حاصل ہوتا ہے۔ قرص کے حجم کا کلیہ مساوات 6.4 استعمال کرتے ہوئے کرہ کے حجم کا کلیہ $H = \frac{4}{3}\pi a^3$ حاصل کریں۔

ب. رداس r اور قد h کا قائمہ مخروط کا حجم احصاء کی مدد سے حاصل کریں۔

6.4 بیلنی (نلکی) چھلے

[5] torus

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم