احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقناطیسی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔اس حصے میں چھ تکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin\theta|\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

ثبوت : ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہٰذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہو گی۔چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہٰذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہٰذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہٰذا

$$\sin^2\theta < \theta^2, \quad (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جا سکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

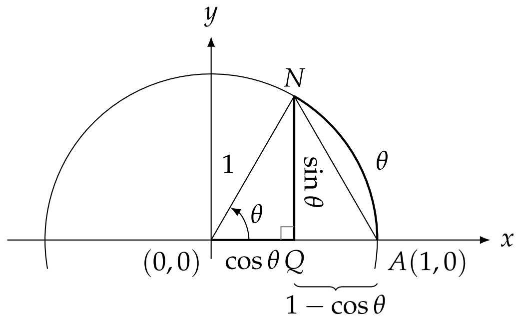
$$|\sin\theta| < |\theta|, \quad |1-\cos\theta| < |\theta|$$

یعنی

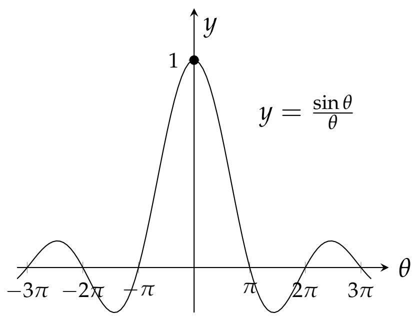
$$-|\theta| < \sin\theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

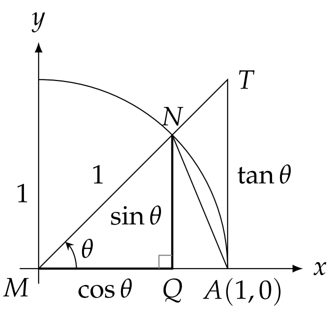
□



شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $\theta > 0$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ لکھی جا سکتی ہے۔



شکل 3.45: تفاعل $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیائش ریڈیئن میں ہے۔



شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4

مثال 3.27: دکھائیں کہ $\theta=0$ پر $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0,\quad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$$

حل: $\theta\to 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $-|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ بیچ سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔ □

تفاعل $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیائش ریڈیئن میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta=0$ پر قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta\to 0} f(\theta)=1$ ہو گا۔

مسئلہ 3.4:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (\text{کی پیمائش ریڈیئن میں ہے } \theta) \tag{3.4}$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{رقبہ}\,\Delta MAN < \text{رقبہ خطہ}\,MAN < \text{رقبہ}\,\Delta MAT$$

ہے۔ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ}\,\Delta MAN &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود}=\frac{1}{2}(1)(\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\\
\text{رقبہ خطہ}\,MAN &= \frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}(1)^2\theta=\frac{\theta}{2}\\
\text{رقبہ}\,\Delta MAT &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود}=\frac{1}{2}(1)(\tan\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta
\end{aligned}$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$$

جس کو $\frac{1}{2}\sin\theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

حاصل ہو گا۔اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$$

چونکہ $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta=1$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin\theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہٰذا $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم y محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔اس تشاکلی کی بنا بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=1=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 148 پر مسئلہ 2.5 کے تحت $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم تکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر تکونیاتی حد تلاش کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$ ہے۔

حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے $\cos h = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}\\
&= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad (\theta = \frac{h}{2})\\
&= -(1)(0) = 0
\end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل $y = \sin\theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h + \cos x\sin h) - \sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\Big(\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h}\Big) + \lim_{h\to 0}\Big(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\Big)\\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کوسائن تفاعل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$y = x^2 - \sin x : \quad \begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق})\\ &= 2x - \cos x\end{aligned}$$

ب.

$$y = x^2 \sin x : \quad \begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) + 2x \sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب})\\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x\end{aligned}$$

ج.

$$y = \frac{\sin x}{x} : \quad \begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم}\\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیائش ریڈیئن میں ہو تب $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہوتا ہے اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہوتا ہے۔یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\cos x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad \text{(تفرق کی تعریف)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}\\
&= \lim_{g\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \qquad \text{(مثال 3.28 اور مسئلہ 3.4)}\\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

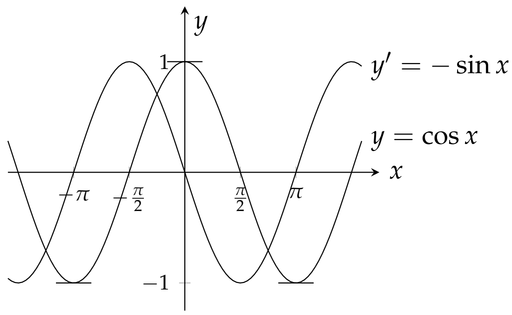
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x = -\pi, 0, \pi$) وہاں اس کا تفرق یعنی $y' = -\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

ا.

$$\begin{aligned}
y &= 5x + \cos x\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)\\
&= 5 - \sin x
\end{aligned}$$



شکل 3.47: تفاعل $y = \cos x$ کی ڈھلوان تفاعل $y' = -\sin x$ دیتی ہے۔

ب.

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x \cos x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) + \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
&= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}
$$

ج.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{(1 - \sin x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) - \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\
&= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \qquad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= \frac{1}{1 - \sin x}
\end{aligned}
$$

□

سادہ ہارمونی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونی حرکت کی ایک مثال ہے۔اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5\cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} s &= 5\cos t && \text{ہم مقام} \\ v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\cos t) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t) = -5\sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\ a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\sin t) = -5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t) = -5\cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں} \end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ s محور پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا حیطہ 5 ہے جبکہ اس کی تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کی تعدد ہے۔

2. تفاعل $\sin t$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو گا۔یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

   جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \mp 1$ ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع $a = -5\cos t$ اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\cos t = 0$ ہو گا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہو گا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہو گا۔اسراع کی مطلق قیمت مبدا سے دور ترین نقطے پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $\cos t = \mp 1$ ہو گا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف : اسراع کے تفرق کو **جھٹکا**[33] کہتے ہیں۔اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب لمحہ t پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$$

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\cos t) \\ &= 5\sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\sin t = \mp 1$ ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

jerk[33]

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہٰذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \sec^2 x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) &= -\csc^2 x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) &= \sec x \tan x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) &= -\csc x \cot x
\end{aligned} \tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔سوال میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم})\\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر $y = \sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔
حل:

$$
\begin{aligned}
y &= \sec x \\
y' &= \sec x \tan x && \text{(مساوات 3.5)} \\
y'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x \tan x) \\
&= \sec x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) + \tan x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}
$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x + \cot x) = 3 + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\csc x) = 2\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) \\
&= 2(-\csc x \cot x) = -2\csc x \cot x
\end{aligned}
$$

□

تکونیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکونیات تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہٰذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x

کی قیمت π کا عدد صحیح مضرب ہو۔ہر ان تفاعل کے لئے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x\to c} f(x) = f(x)$ ہو گا۔نتیجتاً ہم تکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 3.36:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$
□

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ مطمئن ہو گی۔یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\, \theta = x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1,\, \theta = 7x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1,\, \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں $x \to 0$ کرنا $\theta \to 0$ کے مترادف ہے۔یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 3.37:

ا.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2/5)\cdot \sin 2x}{(2/5)\cdot 5x} && \text{(تفاعل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے)}\\ &= \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\\ &= \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{5x}\cdot \frac{1}{\cos 2x}\right) && \left(\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)\\ &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)\\ &= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{\cos 0}\right) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

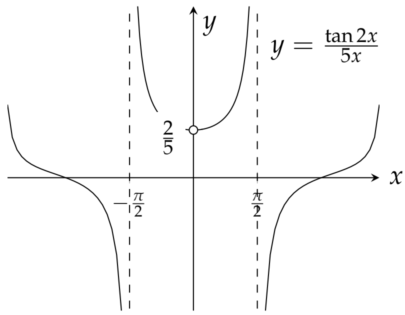
شکل 3.48 سے رجوع کریں۔ □

مثال 3.38: درج ذیل میں $\theta = t - \frac{\pi}{2}$ لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔یوں $t \to \frac{\pi}{2}$ سے مراد $\theta \to 0$ ہو گا۔

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{t-\frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

□

احصاء کی میدان کے علاوہ تفاعل $\frac{\sin x}{x}$ دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔



شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $y = -10x + 3\cos x$
جواب: $y' = -10 - 3\sin x$

سوال 2: $y = \frac{2}{x} + 3\sin x$

سوال 3: $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
جواب: $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

سوال 4: $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال 5: $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
جواب: $y' = 0$

سوال 6: $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

سوال 7: $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

سوال 8: $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

سوال 9: $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

سوال 10: $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

سوال 11: $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

سوال 12: $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

سوال 13 تا سوال 16 میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال 13: $s = \tan t - t$

سوال 14: $s = t^2 - \sec t + 1$

سوال 15: $s = \frac{1+\csc t}{1-\csc t}$

سوال 16: $s = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

سوال 17 تا سوال 20 میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 17: $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$

سوال 18: $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$

سوال 19: $r = \sec \theta \csc \theta$

سوال 20: $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

سوال 21 تا سوال 24 میں $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ تلاش کریں۔

سوال 21: $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

سوال 22: $p = (1 + \csc q) \cos q$

سوال 23: $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

سوال 24: $p = \frac{\tan q}{1+\tan q}$

سوال 25: (ا) $y = \csc x$ اور (ب) $y = \sec x$ کے لئے y'' تلاش کریں۔

سوال 26: (ا) $y = -2 \sin x$ اور (ب) $y = 9 \cos x$ کے لئے $y^{(4)} = \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ تلاش کریں۔

سوال 27 تا سوال 32 میں حد تلاش کریں۔

سوال 27: $\lim\limits_{x\to 2} \sin(\frac{1}{x} - \frac{1}{2})$

سوال 28: $\lim\limits_{x\to \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

سوال 29: $\lim\limits_{x\to 0} \sec[\cos x + \pi \tan(\frac{\pi}{4 \sec x}) - 1]$

سوال 30: $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x}$

سوال 31: $\lim\limits_{t\to 0} \tan(1 - \frac{\sin t}{t})$

سوال 32: $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos(\frac{\pi\theta}{\sin\theta})$

سوال 33 تا سوال 48 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

سوال 34: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل})$

سوال 35: $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{4y}$

سوال 36: $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$

سوال 37: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

سوال 38: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{2t}{\tan t}$

سوال 39: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$

سوال 40: $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2 \cot x \csc 2x$

سوال 41: $\lim_{x\to 0} \frac{x+x\cos x}{\sin x\cos x}$

سوال 42: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+\sin x}{2x}$

سوال 43: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

سوال 44: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

سوال 45: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

سوال 46: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

سوال 47: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

سوال 48: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y\cot 5y}{y\cot 4y}$

مماسی خطوط

سوال 49 تا سوال 52 میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

سوال 49: $y=\sin x,\ -3\pi/2\le x\le 2\pi,\ x=-\pi,0,3\pi/2$

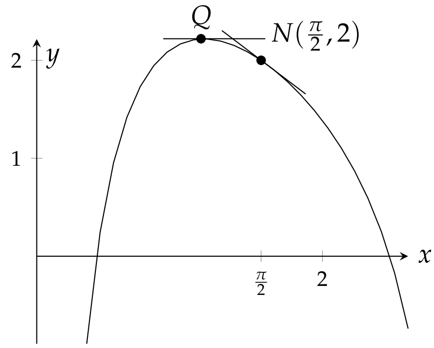
سوال 50: $y=\tan x,\ -\pi/2<x<\pi/2,\ x=-\pi/3,0,\pi/3$

سوال 51: $y=\sec x,\ -\pi/2<x<\pi/2,\ x=-\pi/3,\pi/4$

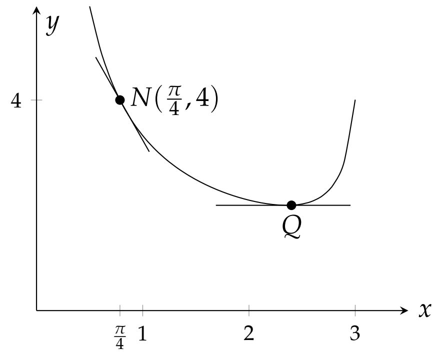
سوال 52: $y=1+\cos x,\ -3\pi/2\le x\le 2\pi,\ x=-\pi/3,3\pi/2$

کیا سوال 53 تا سوال 56 کا دائرہ کار $0\le x\le 2\pi$ میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

سوال 53: $y=x+\sin x$



شکل 3.49: تفاعل $y = 4 + \cot x - 2\csc x$ کی منحنی (سوال 59)



شکل 3.50: تفاعل $y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$ کی منحنی (سوال 60)

سوال 54: $y = 2x + \sin x$

سوال 55: $y = x - \cot x$

سوال 56: $y = x + 2\cos x$

سوال 57: منحنی $y = \tan x$ پر $-\pi/2 < x < \pi/2$ کے بیچ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = 2x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 58: منحنی $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = -x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 59: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.49 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سوال 60: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.50 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سادہ ہارمونی حرکت

سوال 61 تا سوال 61 میں محوری لکیر s پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ $t = \pi/4$ سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال 61: $s = 2 - 2\sin t$

سوال 62: $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال 63: کیا c کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

سوال 64: کیا b کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر (ا) استمراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, x \geq 0 \end{cases}$$

سوال 65: $\frac{\mathrm{d}^{999}}{\mathrm{d}x^{999}}(\cos x)$ تلاش کریں۔

سوال 66: $\frac{\mathrm{d}^{725}}{\mathrm{d}x^{725}}(\sin x)$ تلاش کریں۔

سوال 67: x کے لحاظ سے (ا) $\sec x$ اور (ب) $\csc x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

سوال 68: x کے لحاظ سے $\cot x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 69: $-\pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \cos x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$ لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

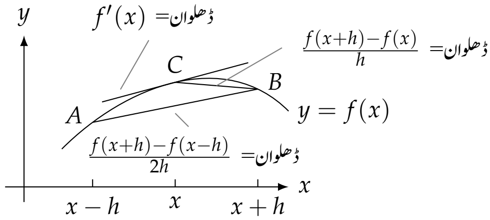
اب $h = -1, -0.5, -0.3$ کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \to 0^+$ اور $h \to 0^-$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال 70: وسطی فرق حاصل تقسیم **وسطی تفریقی حاصل تقسیم**[34]

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

---

[34] centered difference quotient



شکل 3.51: فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم سے وسطی تفریقی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

کو اعدادی تراکیب میں $f'(x)$ کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔اگر $f'(x)$ موجود ہو تب $h \to 0$ کرتے ہوئے یہ تفاعل کا تفرق دیتی ہے جو h کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً **فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم**[35]

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

سے بہتر ہوتا ہے (شکل 3.51)۔ (ا) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \sin x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = \cos x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = \cos x$ اور

$$y = \frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔سوال 69 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔
(ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \cos x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = -\sin x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = -\sin x$ اور

$$y = \frac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔سوال 69 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 71: وسطی تفریقی حاصل تقسیم کے لئے انتباہ بعض اوقات x پر نا قابل تفرق $f(x)$ کے لئے بھی وسطی تفریقی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

کا $h \to 0$ کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔مثال کے طور پر $f(x) = |x|$ لیں اور

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0-h|}{2h}$$

[35] Fermat's difference quotient

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ $x=0$ پر $f(x)=|x|$ کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال 72: دائرہ کار $(-\pi/2, \pi/2)$ پر $y=\tan x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73: دائرہ کار $0<x<\pi$ پر $y=\cot x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 74: وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر $y=\frac{\sin x}{x}$ ، $y=\frac{\sin 2x}{x}$ اور $y=\frac{\sin 4x}{x}$ کو اکٹھے ترسیم کریں۔ y محور کو یہ ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتا نظر آتی ہیں؟ کیا یہ ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟ $x \to 0$ کرتے ہوئے آپ $y=\frac{\sin 5x}{x}$ اور $y=\frac{\sin(-3x)}{x}$ کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟ k کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے $y=\frac{\sin kx}{x}$ سے کیا توقع کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 75: درجات بالمقابل ریڈیئن x کو درجات میں ناپتے ہوئے $\sin x$ اور $\cos x$ کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h)=\frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے $\lim_{h\to 0} f(h)$ کا اندازہ لگائیں۔اس اندازے کا $\frac{\pi}{180}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔کیا اس حد کی قیمت $\frac{\pi}{180}$ کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جا سکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

ج. اب $\sin x$ کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے $\sin x$ کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ہ. بلند درجی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔ $y=\sin x$ اور $y=\cos x$ کے لئے y'' اور y''' تلاش کریں۔

زنجیری قاعدہ

ہم $\sin x$ اور $x^2 - 4$ کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً $\sin(x^2 - 4)$ کا تفرق **زنجیری قاعدہ**[36] کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہو گا۔احصاء میں تفرق کے حصول کے لئے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 3.39: تفاعل $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ حقیقتاً تفاعل $y = 2u$ اور $u = 3x - 5$ کا مرکب ہے۔ ان تینوں تفاعل کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟

حل: ان تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3$$

چونکہ $6 = 2 \cdot 3$ ہے لہٰذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

کیا تعلق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ایک اتفاق ہے؟ اگر ہم تفرق کو شرح تبدیلی تصور کریں اور $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ ہوں تب اگر u سے y دگنا تبدیل ہوتا ہو اور x سے y تین گنا تبدیل ہوتا ہو تب ہم توقع کریں گے کہ x سے y چھ گنا تبدیل ہو گا۔

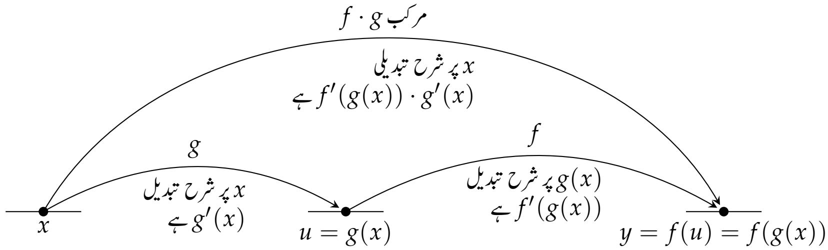
آئیں دوسرا تفاعل لے کر دیکھیں۔

مثال 3.40: $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$ کو $y = u^2$ اور $u = 3x^2 + 1$ کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

---

[36] chain rule



شکل 3.52: $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب x پر مرکب $f \cdot g$ کا تفرق دے گا۔

اور

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\
&= 36x^3 + 12x
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں اور ایک بار پھر درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

x پر مرکب تفاعل $f(g(x))$ کا تفرق $g(x)$ پر f کا تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل 3.52)۔

مسئلہ 3.5: **زنجیری قاعدہ**
اگر $u = g(x)$ پر $f(u)$ قابل تفرق ہو اور x پر $g(x)$ قابل تفرق ہو تب x پر مرکب تفاعل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{3.6}$$

ہو گا۔ لیبنٹز طرز لکھائی میں اگر $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ ہوں تب

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.7}$$

ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ کو $u = g(x)$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدہ کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر $\Delta x \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے زنجیری قاعدے کو ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے چونکہ عین ممکن ہے کہ x میں تبدیل سے u میں تبدیل Δu صفر ہو۔ زنجیری قاعدہ اگلے باب میں ثابت کیا جائے گا۔

مثال 3.41: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: یہاں $y = f(g(x))$ یعنی $u = x^2 + 1$ اور $f(u) = \sqrt{u}$ ہیں۔ چونکہ f اور g کے تفرق

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ہیں لہٰذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

□

باہر، اندر قاعدہ

اگر $y = f(g(x))$ ہو تب مساوات 3.7 درج ذیل کہتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'[g(x)] \cdot g'(x) \tag{3.8}$$

جہاں دائیں طرف f کی اندرون کو نظر انداز کر کے جوں کا توں رکھ کر f کا تفرق لے کر اس کو f کی اندرون کے تفرق کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ یوں پہلے بیرونی تفاعل کا تفرق اور بعد میں اندرونی تفاعل کا تفرق لیا جاتا ہے۔

مثال 3.42:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \overbrace{\sin}^{\text{بیرونی}} \underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی}} = \overbrace{\cos}^{\text{تفرق بیرونی}} \underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی نظر انداز}} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\text{تفرق اندرونی}}$$

□

زنجیری قاعدہ کا بار بار اطلاق

بعض اوقات ہم زنجیری قاعدہ کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔درج ذیل مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.43: $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ کا تفرق تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan(5-\sin 2t)) \\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5-\sin 2t) && u = 5-\sin 2t \text{ لے کر } \tan u \text{ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\left(0-(\cos 2t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t)\right) && u = 2t \text{ لے کر } 5-\sin u \text{ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2 \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5-\sin 2t)
\end{aligned}$$

□

زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کے کلیات

تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔اگر f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = f(u)$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u) = f'(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال کے طور پر اگر u تغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور $y = u^n$ ہو جہاں n عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^n)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
&= nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

قاعدہ 3.8: **طاقت کا زنجیری قاعدہ**
اگر $u(x)$ قابل تفرق ہو اور n عدد صحیح ہو تب u^n قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.9}$$

مثال 3.44:

ا.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^5 x &= 5\sin^4 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\\ &= 5\sin^4 x\cos x\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)^{-3} &= -3(2x+1)^{-4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)\\ &= -3(2x+1)^{-4}(2)\\ &= -6(2x+1)^{-4}\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)\end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3x-2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)^{-1}\\ &= -1(3x-2)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)\\ &= -1(3x-2)^{-2}(3)\\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں تفاعل $\sin^5 x$ استعمال کیا گیا جو $(\sin x)^5$ لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

مثال 3.45: درجات بالمقابل ریڈیئن
یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ ان دونوں میں فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ ریڈیئن $\pi = 180^\circ$ ہوتا ہے لہٰذا ریڈیئن $\frac{\pi x}{180} = x^\circ$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^\circ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(x^\circ)$$

ہو گا۔ اسی طرح $\cos(x^\circ)$ کا تفرق $-\frac{\pi}{180}\sin(x^\circ)$ ہو گا۔

زاویہ کی ناپ درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کی ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا $\frac{\pi}{180}$ کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی زیادہ آسان ہو گی۔ □

مثال 3.46: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟
حل: ہم پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی s ہو تب اس کا حجم $H = s^3$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s اور H متغیر t (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کے راست متناسب ہے۔ یہ مفروضہ اس لئے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخل ہوتی ہے۔ یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -k(6s^2), \qquad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔ تناسب کا مستقل k مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً ارد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ ابتدائی حجم کو H_0 لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&H = s^3, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(6s^2)\\
&H = H_0 \quad \text{پر} \quad t = 0\\
&H = \frac{3}{4}H_0 \quad \text{پر} \quad t = 1\,\mathrm{h}
\end{aligned}$$

اب ہمیں $H=0$ پر t تلاش کرنا ہو گا۔
ہم $H=s^3$ کا تفرق زنجیری قاعدہ سے t کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

تبدیلی کی شرح $-k(6s^2)$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}&=-6ks^2\\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}&=-2k\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔اطراف کی لمبائی مستقل شرح $2k$ سے کم ہو رہی ہے۔یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی s_0 ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی $s_1=s_0-2k$ ہو گی جس سے

$$2k=s_0-s_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔پگھلنے کا وقت $2kt=s_0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$t_{\text{پگھلنا}}=\frac{s_0}{2k}=\frac{s_0}{s_0-s_1}=\frac{1}{1-\frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0}=\frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}}=(\tfrac{3}{4})^{1/3}\approx 0.91$$

ہے لہٰذا پگھلنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}}=\frac{1}{1-0.91}\approx 11\,\mathrm{h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر $\frac{1}{4}$ حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لئے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتی۔ ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور اس کو مزید بہتر کس طرح بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم