

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	تفاعل کی انتہائی قیمتیں	4.1
340	مسئلہ اوسط قیمت	4.2
356	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	4.3
356	4.3.1 پرکھ	
368	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	4.4
391	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	4.5
418	بہترین بنانا	4.6
442	خط بندی اور تفرقات	4.7
463	ترکیب نیوٹن	4.8
475	تکمل	5
475	غیر قطعی مکملات	5.1
487	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	5.2
503	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	5.3
514	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	5.4
532	ریمان مجموعے اور قطعی مکملات	5.5
559	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	5.6
576	بنیادی مسئلہ	5.7
597	قطعی تکمل میں بدل	5.8
603	اعدادی تکمل	5.9
603	قاعدہ ڈورنقہ	5.10
623	تکمل کا استعمال	6
623	منحنیات کے بیچ رقبہ	6.1
627	6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد	
638	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش	6.2
646	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا	6.3
661	تکلی چھلے	6.4
674	مستوی منحنیات کی لمبائیاں	6.5
686	سطح طواف کا رقبہ	6.6
695	معیار اثر اور مرکز کمیت	6.7
705	6.7.1 وسطانی مرکز	
711	ضمیمہ اول	ا
713	ضمیمہ دوم	ب



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 6.6 سطح طواف کا رقبہ

بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسی گھماتے ہوئے رسی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو سطح طواف<sup>9</sup> کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسی کی لمبائی اور رسی کے ہر حصے کی جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کا رقبہ اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔ زیادہ پیچیدہ سطحوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

## بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  کو  $x$  محور کے گرد گھما کر پیدا کر سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم  $[a, b]$  کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل میں نمائندہ حصہ  $PQ$  اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

توس  $PQ$  محور  $x$  کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے۔ محور  $x$  اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو مخروط مقطوع<sup>10</sup> کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ،  $PQ$  کی پیدا کردہ پٹی کے رقبہ کا تخمین ہو گا۔

مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ  $2\pi$  ضرب دونوں سروں کے رداس کا اوسط ضرب ترچھاقد کے برابر ہو گا۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

قطع  $PQ$  کے پیدا کردہ مخروط مقطوع کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کی پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

$$(6.14) \quad \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ  $[a, b]$  کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے مساوات 6.14 میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

surface of revolution<sup>9</sup>  
frustum<sup>10</sup>



یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات 6.14 کو وقفہ  $[a, b]$  پر کسی تقاض کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔ لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفرقات کے مسئلہ اوسط قیمت کی طرف دیکھتے ہیں۔

اگر  $f$  ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت  $P$  اور  $Q$  کے بیچ ایسا نقطہ  $(c_k, f(c_k))$  ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطع  $PQ$  کے متوازی ہو گا۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

$$\Delta y_k = f'(c_k) \Delta x_k$$

مساوات 6.14 میں درج بالا  $\Delta y_k$  پر کرتے ہیں۔

$$(6.15) \quad \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^n \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$$

اب یہاں ایک بری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بری خبر یہ ہے کہ مساوات 6.15 میں  $x_{k-1}$ ،  $x_k$  اور  $c_k$  ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک دوسرے جیسا کسی صورت نہیں بنایا جاسکتا ہے لہذا مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔ اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا مسئلہ بس کہتا ہے کہ وقفہ  $[a, b]$  کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل کو مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

جو ہم چاہتے ہیں۔ یوں  $a$  تا  $b$  تقاض  $f$  کی ترسیم کو  $x$  محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی شکل کو لیتے ہیں۔

تعریف: محور  $x$  کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ  
اگر  $[a, b]$  پر تقاض  $f(x) \geq 0$  ہموار ہو تب تقاض  $y = f(x)$  کو  $x$  محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(6.16) \quad S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

□

مساوات 6.16 میں جزر وہی ہے جو پیدا کار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیہ میں پایا جاتا ہے۔

مثال 6.21: محور  $x$  کے گرد منحنی  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 2$  گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a = 1, b = 2, y = 2\sqrt{x}, \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

مساوات 6.16 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1} dx \\ &= 4\pi \cdot \left[ \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

□

محور  $y$  کے گرد سطح طواف

محور  $y$  کے گرد سطح طواف کے لئے ہم مساوات 6.16 میں  $x$  اور  $y$  کی جگہیں تبدیل کرتے ہیں۔

محور  $y$  کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ  
اگر  $[c, d]$  پر  $x = g(y) \geq 0$  ہموار ہو تب منحنی  $x = g(y)$  کو محور  $y$  کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$(6.17) \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

مثال 6.22: لکیری قطع  $x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$  کو محور  $y$  کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کا رقبہ پہلو تلاش کریں۔

حل: اس رقبہ کو جیومیٹری سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0, d = 1, x = 1 - y, \frac{dx}{dy} = -1$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

مسادات 6.17 سے اس رقبہ کا حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2} dy \\ &= 2\pi\sqrt{2} \left[ y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

دونوں نتائج ایک جیسے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔

مختصر تفریقی روپ

درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

کو عموماً تفریقی لمبائی قوس  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  کی صورت میں لکھا جاتا ہے:

$$S = \int_a^b 2\pi y ds \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x ds$$

بایاں مساوات میں  $x$  محور سے قطع  $ds$  تک فاصلہ  $y$  ہے۔ دایاں مساوات میں  $y$  محور سے قطع  $ds$  کا فاصلہ  $x$  ہے۔ ان دونوں کلیوں کو

$$S = \int 2\pi (رداس) (چوڑائی پٹی) = \int 2\pi \rho ds$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں رکن لمبائی قوس  $ds$  تک محور طواف سے فاصلہ  $\rho$  ہے۔

مختصر تفریقی روپ

$$S = \int 2\pi \rho ds$$

کسی مخصوص مسئلے میں آپ رکن لمبائی قوس  $ds$  اور رداس  $\rho$  کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر مکمل کے حدود بھی اسی متغیر کی روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال 6.23: منحنی  $y = x^3, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  کو محور  $x$  کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم مختصر تفریقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi \rho ds \\ &= \int 2\pi y ds \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ہم نے یہاں فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا  $ds$  کو  $dx$  یا  $dy$  کی روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات  $y = x^3$  سے  $dy$  کو  $dx$  کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3, dy = 3x^2 dx, \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2 dx)^2} = \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے مکمل کا متغیر  $x$  ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \\
 &= \int_0^{1/2} 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \\
 &= 2\pi \left( \frac{1}{36} \right) \left( \frac{2}{3} \right) (1 + 9x^4)^{3/2} \Big|_0^{1/2} \\
 &= \frac{\pi}{27} \left[ \left( 1 + \frac{9}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] \\
 &= \frac{\pi}{27} \left[ \left( \frac{25}{16} \right)^{3/2} - 1 \right] \\
 &= \frac{\pi}{27} \left( \frac{125}{64} - 1 \right) \\
 &= \frac{61\pi}{1728}
 \end{aligned}$$

□

### سوالات

سطحی رقبہ کے مکمل  
سوال 1 تا سوال 8 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا مکمل لکھیں۔

ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ کو بھی ترسیم کریں۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس مکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 1: محور  $x$ ،  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ؛  $y = \tan x$ ،  
جواب: (i)  $2\pi \int_0^{\pi/4} \tan x \sqrt{1 + \sec^4 x} dx$ ، (ج)  $\approx 3.84$

سوال 2: محور  $x$ ،  $0 \leq x \leq 2$ ؛  $y = x^2$ ،

سوال 3: محور  $y$ ،  $1 \leq y \leq 2$ ؛  $xy = 1$ ،  
جواب: (i)  $2\pi \int_1^2 \frac{1}{y} \sqrt{1 + y^{-4}} dy$ ، (ج)  $\approx 5.02$

سوال 4: محور  $y$  پر  $x = \sin y$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ ;

سوال 5: محور  $x$  پر نقطہ  $(1, 4)$  سے  $(4, 1)$  تک  $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ ,  
جواب: (i)  $2\pi \int_0^4 (3 - \sqrt{x})^2 \sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2} dx \approx 63.37$  (ج)

سوال 6: محور  $y$  پر  $y + 2\sqrt{y} = x$ ,  $1 \leq y \leq 2$ ;

سوال 7: محور  $y$  پر  $x = \int_0^y \tan t dt$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ ;  
جواب: (i)  $2\pi \int_0^{\pi/3} (\int_0^y \tan t dt) \sec y dy \approx 2.08$  (ج)

سوال 8: محور  $x$  پر  $y = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$ ,  $1 \leq x \leq \sqrt{5}$ ;

سطحی رقبہ کا حصول

سوال 9: لکیری قطع  $y = \frac{x}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  کو محور  $x$  کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ  $= \frac{1}{2}$  (محیط قاعدہ) (ترچھاوند) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔  
جواب:  $4\pi\sqrt{5}$

سوال 10: لکیری قطع  $y = \frac{x}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  کو محور  $y$  کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 11: لکیری قطع  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ,  $1 \leq x \leq 3$  کو محور  $x$  کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع  $= \pi (r_1 + r_2)$  (ترچھاوند) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔  
جواب:  $3\pi\sqrt{5}$

سوال 12: لکیری قطع  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ,  $1 \leq x \leq 3$  کو محور  $y$  کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ مکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع  $= \pi (r_1 + r_2)$  (ترچھاوند) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال 13: محور  $x$  پر  $y = \frac{x^3}{9}$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ;  
جواب:  $\frac{98\pi}{81}$

سوال 14: محور  $x$  پر  $y = \sqrt{x}$ ,  $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{15}{4}$ ;

سوال 15: محور  $x$  پر  $y = \sqrt{2x - x^2}$ ,  $0.5 \leq x \leq 1.5$ ,  
جواب:  $2\pi$

سوال 16: محور  $x$  پر  $y = \sqrt{x+1}$ ,  $1 \leq x \leq 5$ ,

سوال 17: محور  $y$  پر  $x = \frac{y^3}{3}$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  
جواب:  $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

سوال 18: محور  $y$  پر  $x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}$ ,  $1 \leq y \leq 3$ ,

سوال 19: محور  $y$  پر  $x = 2\sqrt{4-y}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{15}{4}$ ,  
جواب:  $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

سوال 20: محور  $y$  پر  $x = \sqrt{2y-1}$ ,  $\frac{5}{8} \leq y \leq 1$ ,

سوال 21: محور  $x$  پر  $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$ ,  $1 \leq y \leq 2$ , (اشارہ مکمل میں  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  کو  
کی صورت میں لکھ کر  $S = \int 2\pi y ds$  میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)  
جواب:  $\frac{253\pi}{20}$

سوال 22: محور  $y$  پر  $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ ,  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ , (اشارہ مکمل میں  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$   
کو  $dx$  کی صورت میں لکھ کر  $S = \int 2\pi x ds$  میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

سوال 23: نئی تعریف کی پرکھ  
تفاعل  $x$  کو  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $-a \leq x \leq a$  کے گرد گھمانے سے کردی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات  
6.16 سے بھی رداس  $a$  کرہ کا سطحی رقبہ  $4\pi a^2$  حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24: نئی تعریف کی پرکھ  
لکیری قطع  $h$  کو  $y = \frac{r}{h}x$ ,  $0 \leq x \leq h$  کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ  $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$   
ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد  $h$  اور اس کے قاعدہ کا رداس  $r$  ہے لہذا اس کے ترچھا قد  $\sqrt{r^2 + h^2}$  ہو گا۔ مکمل سے مخروط کے پہلو کا  
رقبہ دریافت کر کے اس کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 25: (i) منحنی  $y = \cos x$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  کو محور  $x$  کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف  
کے رقبہ کا محتمل لکھیں جس کو حل کرنا بعد میں سکھایا جائے گا۔ (ب) اس سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔  
جواب: (i)  $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$ , (ب)  $\approx 14.4236$

سوال 26: ستارہ نما کا سطحی رقبہ  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  کا وہ حصہ جو  $x$  محور سے اوپر پایا جاتا ہے کو  $x$  محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں منحنی کے حصہ  $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  کو  $x$  محور کے گرد گھما کر نتیجہ کو دیکھنا کریں۔)

سوال 27: رنگ ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی 0.5 mm موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لئے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔  
جواب: 452.4 L

سوال 28: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروی ڈبل روٹی کے ایک جتنی موٹے ٹکڑوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  کو  $x$  محور کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور  $x$  پر وقفہ  $h$  کے اوپر نصف دائرے کا قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو  $x$  محور کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبہ کی قیمت  $h$  کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ (کرارا رقبہ کی قیمت  $h$  پر منحصر ہوگی۔)

سوال 29: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ  $h$  ہے رداس  $R$  کے کروی سطح سے ایک پٹی کاٹتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ  $2\pi Rh$  ہوگا۔

سوال 30: موسیقیاتی ریڈار کو شکل میں دکھائے گئے میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہوگا؟ (قاعدہ کو شامل نہ کریں۔)

سوال 31: محور طواف کو قطع کرنے والے منحنیات سے حاصل سطح طواف وقفہ  $[a, b]$  پر تقابل  $f$  کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات 6.16 اخذ کی گئی۔ جہاں تقابل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات 6.16 کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$(6.18) \quad S = \int 2\pi \rho \, ds = \int 2\pi |f(x)| \, ds$$

تقابل  $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  کو محور  $x$  کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرا مخروط کا سطحی رقبہ مساوات 6.18 استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔  
جواب:  $5\sqrt{2}\pi$

سوال 32: قوس  $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  کو محور  $x$  کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات 6.18 میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہوگا؟

اعدادی تکمیل سوال 33 تا سوال 33 میں محور  $x$  کے گرد دیے گئے منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گے۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درجی تک معلوم کریں۔



سوال 33:  $y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$   
جواب: 14.4

سوال 34:  $y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2$

سوال 35:  $y = x + \sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$   
جواب: 54.9

سوال 36:  $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 6$

سوال 37: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ  
فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  ہموار ہے۔ وقفہ  $[a, b]$  کی خانہ بندی کریں اور  $k$  ویں ذیلی وقفہ  $[x_{k-1}, x_k]$  کے وسطی نقطہ  $m_k = (\frac{x_{k-1} + x_k}{2})$  پر منحنی کی مماس لکیر بنائیں۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k) \frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ  $k$  ویں ذیلی وقفہ میں مماسی قطع کی لمبائی  $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k) \Delta x_k)^2}$  ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطع کو محور  $x$  کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو  $2\pi f(m_k) \sqrt{1 + (f'(m_k))^2} \Delta x_k$  ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ  $[a, b]$  پر  $y = f(x)$  کو محور  $x$  گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (k \text{ ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو}) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## 6.7 معیار اثر اور مرکز کیت

بہت سارے ساخت اور میکانی نظام کا رویہ ایسا ہوتا ہے جیسا ان کی کیت ایک نقطہ میں سمجھی ہو جس کو مرکز کیت کہتے ہیں۔ اس نقطہ کا مقام جاننا اہم ہے جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس باب میں یک بعدی اور دو بعدی چیزوں پر توجہ دی جائے گی۔ تین بعدی چیزوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

## لکیر پر کیت

ہم اپنا ریاضی نمونہ بتدریج تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی منزل میں ہم محور  $x$  جس کا مبدا اس کا چول ہو، پر کیت  $m_1$ ،  $m_2$  اور  $m_3$  تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دار و مدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر منحصر ہے۔

ہر کیت  $m_k$  پر نیچے رخ قوت  $m_k g$  عمل کرتا ہے جہاں  $g$  ثقلی اسراع ہے۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو قوت مروڑ<sup>11</sup> کہتے ہیں۔ قوت  $m_k g$  کو مبدا سے فاصلہ  $x_k$  سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے جبکہ مبدا سے دائیں جانب کیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام گھومنے کے رجحان کا ناپ ہے۔ اس مجموعہ کو نظام کی قوت مروڑ<sup>12</sup> کہتے ہیں۔

$$(6.19) \quad \text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $g$  اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے جبکہ عدد  $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$  نظام کی خاصیت ہے جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

عدد  $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$  کو مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر کہتے ہیں جو انفرادی کیت کے معیار اثر  $m_1 x_1$ ،  $m_2 x_2$  اور  $m_3 x_3$  کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \sum m_k x_k = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ  $\bar{x}$  پر رکھنے سے نظام کا قوت مروڑ صفر ہو گا۔

اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے ہر کیت کا قوت مروڑ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (\text{نیچے رخ قوت}) (\bar{x} \text{ سے } m_k \text{ کا فاصلہ}) &= \bar{x} \text{ کے لحاظ سے } m_k \text{ کا معیار اثر} \\ &= (x_k - \bar{x}) m_k g \end{aligned}$$

torque<sup>11</sup>  
system torque<sup>12</sup>

ان معیار اثر کے مجموعہ کو صفر کے برابر پر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم  $\bar{x}$  کے لئے حل کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} \sum (x_k - \bar{x})m_k g &= 0 && \text{معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے} \\ g \sum (x_k - \bar{x})m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب} \\ \sum (m_k x_k - \bar{x}m_k) &= 0 && g \text{ سے تقسیم اور } m_k \text{ پھیلا یا گیا ہے} \\ \sum m_k x_k - \sum \bar{x}m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ فرق} \\ \sum m_k x_k &= \bar{x} \sum m_k && \text{مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی} \\ \bar{x} &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} && \bar{x} \text{ کے لئے حل} \end{aligned}$$

یہ آخری مساوات کہتی ہے کہ  $\bar{x}$  معلوم کرنے کے لئے مبداء کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کیت سے تقسیم کریں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبداء کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کیت}}$$

نقطہ  $\bar{x}$  کو نظام کا مرکز کمیت<sup>13</sup> کہتے ہیں۔

تار اور پتے سلاخ

بہت سارے موقعوں پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کی کیت کا مرکز مطلوب ہوتا ہے۔ ایسی صورتوں میں اگر ہم تقسیم کیت کو استمراری تعامل کی صورت میں لکھ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کی بجائے مکمل ہو گا جیسے نیچے سمجھایا گیا ہے۔

فرض کریں ایک لمبی پٹی  $x = a$  تا  $x = b$  محور  $x$  پر پڑی ہے۔ ہم  $[a, b]$  اس پٹی کی خانہ بندی کرتے ہوئے اس کو  $\Delta m_k$  کیت کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔  $k$  ویں ٹکڑے کی لمبائی  $\Delta x_k$  ہے اور یہ مبداء سے تقریباً  $x_k$  فاصلے پر پایا جاتا ہے۔ اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔

اول، پٹی کا مرکز کیت  $\bar{x}$  اور نقطہ  $x_k$  پر کیت  $\Delta m_k$  رکھنے سے حاصل نظام کا مرکز کیت تقریباً ایک ہی مقام پر ہوں گے:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کیت}}$$

دوم، مبداء کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً  $x_k \Delta m_k$  ہو گا لہذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام  $x_k \Delta m_k$  کا مجموعہ ہو گا:

$$\bar{x} \approx \sum x_k \Delta m_k$$

سوم، اگر  $x_k$  پر پٹی کی کثافت  $\delta(x_k)$  ہو جہاں  $\delta$  استمراری ہے (اور کثافت کی پیکش کیت فی لمبائی ہے) تب  $\Delta m_k$  تخمیناً  $\delta(x_k)\Delta x_k$  ہو گا:

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(6.20) \quad \bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کیت}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k) \Delta x_k}{\sum \delta(x_k) \Delta x_k}$$

مساوات 6.20 کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ  $[a, b]$  پر استمراری تفاعل  $x\delta(x)$  کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفہ پر تفاعل  $\delta(x)$  کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات 6.20 میں تخمین بہتر ہوں گے لہذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \delta(x) dx}{\int_a^b \delta(x) dx}$$

ہم  $\bar{x}$  کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

محور  $x$  پر کثافتی تفاعل  $\delta(x)$  کے سلاخ یا پٹی کا معیار اثر، کیت اور مرکز کیت۔

$$(6.21) \quad \begin{aligned} M_0 &= \int_a^b x \delta(x) dx && \text{مبدأ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int_a^b \delta(x) dx && \text{کیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کیت} \end{aligned}$$

مساوات 6.21 کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور کثافت سے مراد کیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیکش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔ یوں تار، سلاخ اور پٹی کے لئے ہم کیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں جبکہ مستوی سطحوں کے لئے کیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

مثال 6.24: مستقل کثافت کا سلاخ یا پٹی  
مستقل کثافت والے سلاخ یا پٹی کا مرکز کیت تلاش کریں۔

حل: ہم محور  $x$  پر  $x = a$  سے  $x = b$  کو سلاخ تصور کرتے ہیں۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہذا اس کو مکمل کے باہر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b \delta x \, dx = \delta \int_a^b x \, dx = \delta \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{\delta}{2} (b^2 - a^2) \\ M &= \int_a^b \delta \, dx = \delta \int_a^b 1 \, dx = \delta [x]_a^b = \delta (b - a) \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2} (b^2 - a^2)}{\delta (b - a)} = \frac{b + a}{2} \end{aligned}$$

□

مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطہ پر ہو گا۔

مثال 6.25: متغیر کثافت

ایک سلاخ جس کی لمبائی 10 m ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹی ہوتی ہے لہذا اس کی کثافت مستقل ہونے کی بجائے  $\delta(x) = 1 + \frac{x}{10} \text{ kg m}^{-1}$  ہے۔ سلاخ کا مرکز کیت معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات 6.21 استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{10} x \delta(x) \, dx = \int_0^{10} x \left( 1 + \frac{x}{10} \right) \, dx = \int_0^{10} \left( x + \frac{x^2}{10} \right) \, dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30} \right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3} \text{ kg m} \end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی  $\text{kg m}$  ہے۔ سلاخ کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int_0^{10} \delta(x) \, dx = \int_0^{10} \left( 1 + \frac{x}{10} \right) \, dx = \left[ x + \frac{x^2}{20} \right]_0^{10} = 10 + 5 = 15 \text{ kg}$$

مرکز کیت درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56 \text{ m}$$

□

## مستوی پر تقسیم کیت

فرض کریں ایک مستوی میں متناہی تعداد میں کیت پائے جاتے ہیں۔ یوں نقطہ  $(x_k, y_k)$  پر کیت  $m_k$  ہو گا۔ اس نظام کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \sum m_k \quad \text{نظام کی کیت}$$

ہر کیت  $m_k$  کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور  $x$  کے لحاظ سے اس کا معیار اثر  $m_k y_k$  ہو گا جبکہ محور  $y$  کے لحاظ سے اس کا معیار اثر  $m_k x_k$  ہو گا۔ دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} M_x &= \sum m_k y_k & \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M_y &= \sum m_k x_k & \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \end{aligned}$$

نظام کے مرکز کیت کا  $x$  محدود درج ذیل ہو گا۔

$$(6.22) \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$

یک بعدی صورت کی طرح  $\bar{x}$  کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر  $x = \bar{x}$  پر توازن میں ہو گا۔

نظام کے مرکز کیت کا  $y$  محدود درج ذیل ہو گا۔

$$(6.23) \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$$

یک بعدی صورت کی طرح  $\bar{y}$  کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر  $y = \bar{y}$  پر توازن میں ہو گا۔ لکیر  $y = \bar{y}$  کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو منسوخ کر کے صفر قوت مروڑ پیدا کرتے ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ اس نظام کی پوری کیت نقطہ  $(\bar{x}, \bar{y})$  میں پائی جاتی ہے۔ اس نقطہ کو نظام کی کمیت کا مرکز<sup>14</sup> کہتے ہیں۔

## پتلی مستوی چادر

کئی بار ہمیں پتلی مستوی چادر کا مرکز کیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کیت کی تقسیم استمراری ہے لہذا  $\bar{x}$  اور  $\bar{y}$  کے کلیات میں متناہی مجموعوں کی بجائے مکمل پائے جاتے ہیں۔ انہیں اس پر غور کرتے ہیں۔

فرض کریں  $xy$  مستوی میں ایک پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک پٹیوں میں تقسیم کریں۔ کسی ایک نمائندہ پٹی کی کیت کا مرکز  $(\bar{x}, \bar{y})$  ہو گا۔ ہم پٹی کی کیت  $\Delta m$  کو نقطہ  $(\bar{x}, \bar{y})$  پر منجمد تصور کرتے ہیں۔ یوں محور  $y$  کے لحاظ سے پٹی

<sup>14</sup>center of mass

کا معیار اثر  $\bar{x} \Delta m$  ہو گا جبکہ محور  $x$  کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر  $\bar{y} \Delta m$  ہو گا۔ اس طرح مساوات 6.22 اور مساوات 6.23 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \bar{x} \Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \bar{y} \Delta m}{\sum \Delta m}$$

ایک بعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریمان مجموعے پائے جاتے ہیں جن کی قیمتیں، پٹی کی چوڑائی کم سے کم کرنے سے قطعی نکلات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان نکلات کو علامت طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x} dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int \bar{y} dm}{\int dm}$$

مستوی میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned} M_x &= \int \bar{y} dm && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M_y &= \int \bar{x} dm && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int dm && \text{کمیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کیت} \end{aligned} \quad (6.24)$$

ان نکلات کی حصول کے لئے ہم چادر کو محدودی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدود کے متوازی ایک نمائندہ پٹی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پٹی کی کیت اور مرکز کیت کے محدود  $(\bar{x}, \bar{y})$  کو  $x$  اور  $y$  کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد محدودی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے بیچ  $\bar{y} dm$ ،  $\bar{x} dm$  اور  $dm$  کے نکلات لیتے ہیں۔

مثال 6.26: ایک ٹکونی چادر کی مستقل کثافت  $\delta = 3 \text{ g cm}^{-3}$  ہے۔ (i) محور  $y$  کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر  $M_y$  معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کیت  $M$  معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کیت کے مرکز کا  $\bar{x}$  محدود معلوم کریں۔

حل: پہلی ترکیب: افقی پٹیاں  
(i) نمائندہ پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{چوڑائی: } dx & \quad \text{مرکز کیت: } (\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) \\ \text{کیت: } dm = \delta dA = 3 \cdot 2x dx = 6x dx & \quad \text{لمبائی: } 2x \end{aligned}$$

$$\text{مرکز کیت کا محور } y \text{ سے فاصلہ: } \bar{x} = x \quad \text{رقبہ: } dS = 2x dx$$

یوں محور  $y$  کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x} dm = x \cdot 6x dx = 6x^2 dx$$

ہو گا لہذا پوری چادر کا محور  $y$  کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x} dm = \int_0^1 6x^2 dx = 2x^3 \Big|_0^1 = 2 \text{ g cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int dm = \int_0^1 6x dx = 3x^2 \Big|_0^1 = 3 \text{ g}$$

(ج) چادر کے مرکز کمیت کا  $x$  محدود درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

دوسری ترکیب: انتہائی پٹیاں  
(i) نمائندہ انتہائی پٹی کے مرکز کمیت کا  $y$  محدود  $y$  ہو گا:

$$\tilde{y} = y$$

پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں  $x$  محدود پایا جائے گا:

$$\tilde{x} = \frac{\frac{y}{2} + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$dm = \delta dS = 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy \quad \text{کمیت:}$$

$$1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2} \quad \text{لمبائی:}$$

$$dy \quad \text{چوڑائی:}$$

$$\tilde{x} = \frac{y+2}{4} \quad \text{مرکز کمیت کا محور } y \text{ سے فاصلہ:}$$

$$dS = \frac{2-y}{2} dy \quad \text{رقبہ:}$$

یوں محور  $y$  کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x} dm = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2} dy = \frac{3}{8} (4-y^2) dy$$



ہو گا اور محور  $y$  کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x} dm = \int_0^2 \frac{3}{8} (4 - y^2) dy = \frac{3}{8} \left[ 4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{16}{3} \right) = 2 \text{ g cm}$$

(ب) چادر کی کیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2} (2 - y) dy = \frac{3}{2} \left[ 2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{3}{2} (4 - 2) = 3 \text{ g}$$

(ج) چادر کی مرکز کیت کا  $x$  محدود درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$

□

ہم اسی طرح  $M_x$  اور  $\bar{y}$  بھی تلاش کر سکتے ہیں۔

اگر چٹی چادر میں کیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب کیت کا مرکز محور تشاکل پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کیت دونوں محور کے نقطہ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

مثال 6.27: مستقل کثافت ایک پتلا مستوی خط جس کی کثافت مستقل  $\delta$  ہے کو بالائی طرف سے قطع مکانی  $y = 4 - x^2$  اور زیریں طرف سے محور  $x$  گھیرتا ہے۔ اس خطے کا مرکز کیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ خطے کی کثافت مستقل ہے اور تقسیم کیت محور  $y$  کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہذا مرکز کیت محور  $y$  پر پایا جائے گا۔ یوں  $\bar{x} = 0$  ہو گا۔ ہمیں صرف  $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$  معلوم کرنا ہے۔

افقی پٹیاں لینے سے درج ذیل مشکل مکمل پیدا ہوتا ہے

$$M_x = \int_0^4 2\delta y \sqrt{4 - y} dy$$

لہذا ہم انتصابی پٹیاں لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ نمائندہ انتصابی پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{مرکز کیت: } (\bar{x}, \bar{y}) &= \left( x, \frac{4-x^2}{2} \right) \\ \text{رقبہ: } dS &= (4 - x^2) dx \\ \text{کیت: } dm &= \delta dS = \delta(4 - x^2) dx \\ \text{مرکز کیت کا محور } x \text{ سے فاصلہ: } \bar{y} &= \frac{4-x^2}{2} \\ \text{لمبائی: } 4 - x^2 \\ \text{چوڑائی: } dx \end{aligned}$$

محور  $x$  کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{y} dm = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2) dx = \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2 dx$$

ہو گا لہذا محور  $y$  کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$(6.25) \quad M_x = \int \tilde{y} dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2 dx$$

$$(6.26) \quad = \frac{\delta}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx = \frac{256}{15} \delta$$

چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$(6.27) \quad M = \int dm = \int_{-2}^2 \delta(4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \delta$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{15} \delta}{\frac{32}{3} \delta} = \frac{8}{5}$$

چادر کی کمیت کا مرکز درج ذیل نقطہ ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

□

مثال 6.28: متغیر کثافت نقطہ  $(x, y)$  پر مثال 6.27 کی چادر کی کثافت  $\delta = 2x^2$  لیتے ہوئے چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: کمیت اب بھی محور  $y$  کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہذا  $\bar{x} = 0$  ہو گا۔ یوں  $\delta = 2x^2$  کے لئے مساوات 6.25 اور مساوات 6.27 درج ذیل صورت اختیار کریں گے۔

$$\begin{aligned} M_x &= \int \tilde{y} dm = \int_{-2}^2 \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2 dx = \int_{-2}^2 x^2(4 - x^2)^2 dx \\ &= \int_{-2}^2 (16x^2 - 8x^4 + x^6) dx = \frac{2048}{105} \\ M &= \int dm = \int_{-2}^2 \delta(4 - x^2) dx = \int_{-2}^2 2x^2(4 - x^2) dx \\ &= \int_{-2}^2 (8x^2 - 2x^4) dx = \frac{256}{15} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

چادر کی کیت کا نیا مرکز درج ذیل ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

□

مثال 6.29: ایک تار جس کی کثافت  $\delta$  مستقل ہے سے رداس  $a$  کا نصف دائرہ بنایا جاتا ہے۔ اس کی کیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم نصف دائرے کا تفاعل  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ کیت کی تقسیم محور  $y$  کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہذا  $\bar{x} = 0$  ہو گا۔ ہم تصور میں تار کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے  $\bar{y}$  تلاش کرتے ہیں۔ نمائندہ قطع کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\text{لمبائی: } ds = a d\theta \quad \text{مرکز کیت کا محور } x \text{ سے فاصلہ: } \bar{y} = a \sin \theta$$

$$\text{کیت: } dm = \delta ds = \delta a d\theta$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{\int \bar{y} dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a \sin \theta \cdot \delta a d\theta}{\int_0^\pi \delta a d\theta} = \frac{\delta a^2 [-\cos \theta]_0^\pi}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a$$

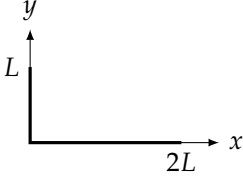
□

مرکز کیت  $(0, 2a/\pi)$  ہو گا جو مبدا سے تقریباً  $\frac{2}{3}$  اوپر ہے۔

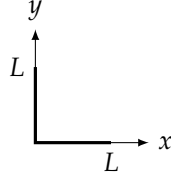
### 6.7.1 وسطانی مرکز

مستقل کثافت کی صورت میں  $\bar{x}$  اور  $\bar{y}$  کی کلیات میں نسب نما اور شمار کنندہ میں پائے جانے والے  $\delta$  ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ یوں  $\bar{x}$  اور  $\bar{y}$  کی نقطہ نظر سے  $\delta$  کو شروع سے اکائی تصور کیا جاسکتا ہے۔ مستقل کثافت کی صورت میں کسی چیز کی کیت کا مرکز اس چیز کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا تاکہ اس مادے پر جس سے یہ چیز بنی ہو۔ ایسی صورت میں مرکز کیت کو عموماً وسطانی مرکز<sup>15</sup> کہتے ہیں۔ یوں اگر آپ سے کہا جائے کہ بکون، مخروط یا کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ  $\bar{x}$  اور  $\bar{y}$  کو معیار اثر تقسیم کیت سے معلوم کرتے ہوئے  $\delta = 1$  لیں۔

<sup>15</sup>centroid



شکل 6.84: فریم برائے سوال 4



شکل 6.83: لوہے کا فریم برائے سوال 3

## سوالات

پتلے سلاخ  
سوال 1: ایک بچہ جس کی کمیت 40 kg اور دوسرا بچہ جس کی کمیت 50 kg ہے ہنڈولا پر جھول رہے ہیں۔ اگر 40 kg بچہ چول سے 2 m فاصلے پر ہو تب ہنڈولا کو متوازن رکھنے کی خاطر دوسرا بچہ چول سے دوسری جانب کتنے فاصلے پر ہو گا؟  
جواب:  $\frac{8}{5}$  m

سوال 2: ایک شہتیر کے سروں کو دو ترازوؤں پر رکھا جاتا ہے جو 100 kg اور 20 kg کی پیمائش دیتے ہیں۔ شہتیر کی کمیت کا مرکز کہاں ہو گا؟

سوال 3: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو وسط سے  $90^\circ$  زاویہ پر موڑ کر فریم بنایا جاتا ہے (شکل 6.83)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی حصے کا مرکز کمیت کہاں ہو گا؟)

سوال 4: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو  $90^\circ$  پر موڑ کر فریم بنایا جاتا ہے جہاں ایک بازو کی لمبائی دوسرے بازو کی لمبائی سے دگنی ہے (شکل 6.84)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کی کمیت کے مراکز کہاں ہوں گے؟)

سوال 5 تا سوال 12 میں محور x کے مختلف وقفوں پر پڑی ہوئی پتلی سلاخ کی کشافنی تفاعل دیے گئے ہیں۔ مساوات 6.21 استعمال کرتے ہوئے مہد کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 5:  $\delta(x) = 4, \quad 0 \leq x \leq 2$

سوال 6:  $\delta(x) = 4, \quad 1 \leq x \leq 3$

سوال 7:  $\delta(x) = 1 + \frac{x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 3$

سوال 8:  $\delta(x) = 2 - \frac{x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 4$

سوال 9:  $\delta(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \leq x \leq 4$

$$\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \leq x \leq 1 \quad \text{سوال 10}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{سوال 11}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{سوال 12}$$

مستقل کثافت والے پتلی چادریں  
سوال 13 تا سوال 24 میں وہ خطہ دیا گیا ہے جہاں مستقل کثافت  $\delta$  والی پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کی کیت کا مرکز تلاش کریں۔

$$\text{سوال 13: قطع مکانی } y = x^2 \text{ اور لکیر } y = 4 \text{ میں محیط خطہ۔}$$

$$\text{سوال 14: قطع مکانی } y = 25 - x^2 \text{ اور محور } x \text{ میں محیط خطہ۔}$$

$$\text{سوال 15: قطع مکانی } y = x - x^2 \text{ اور لکیر } y = -x \text{ میں محیط خطہ۔}$$

$$\text{سوال 16: قطع مکانی } y = x^2 - 3 \text{ اور } y = -2x^2 \text{ میں محیط خطہ۔}$$

$$\text{سوال 17: محور } y \text{ اور قطع مکانی } x = y - y^3, 0 \leq y \leq 1 \text{ کے قع خطہ۔}$$

$$\text{سوال 18: قطع مکانی } x = y^2 - y \text{ اور لکیر } y = x \text{ میں محیط خطہ۔}$$

$$\text{سوال 19: محور } x \text{ اور منحنی } y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ کے قع خطہ۔}$$

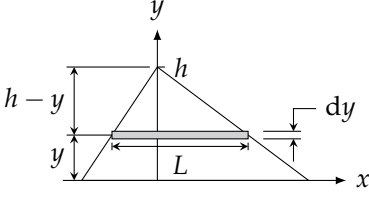
$$\text{سوال 20: محور } x \text{ اور منحنی } y = \sec^2 x, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ کے قع خطہ۔}$$

$$\text{سوال 21: قطع مکانی } y = 2x^2 - 4x \text{ اور } y = 2x - x^2 \text{ میں محیط خطہ۔}$$

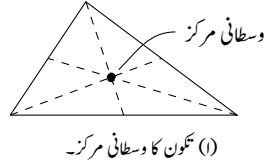
$$\text{سوال 22: (i) ربع اول میں دائرہ } x^2 + y^2 = 9 \text{ کے اندر خطہ۔ (ب) محور } x \text{ اور نصف دائرہ } y = \sqrt{9 - x^2} \text{ کے قع خطہ۔ جزو-ا کے نتیجے کے ساتھ جواب کا موازنہ کریں۔}$$

$$\text{سوال 23: (i) ربع اول میں لکیر } x = 3, \text{ لکیر } y = 3 \text{ اور دائرہ } x^2 + y^2 = 9 \text{ کے قع تکوئی خطہ۔ (اشارہ۔ ربعے کو جیومیٹری کی مدد سے حاصل کریں۔)}$$

$$\text{سوال 24: وہ خطہ جس کا بالائی سرحد } y = \frac{1}{x^3}, \text{ زیریں سرحد } y = -\frac{1}{x^3}, \text{ بائیں سرحد } x = 1 \text{ اور دایاں سرحد } x = a > 1 \text{ ہوں۔ اس کے علاوہ } \lim_{a \rightarrow \infty} \bar{x} \text{ بھی معلوم کریں۔}$$



(ب) مرکز کیت معلوم کرنے میں مستعمل متغیرات۔



شکل 6.85: تکون برائے سوال 29

متغیر کثافت والے پتلی چادریں  
سوال 25: محور  $x$  اور مغنی  $y = \frac{2}{x^2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$  کے بیچ چادر جس کی نقطہ  $(x, y)$  پر کثافت  $\delta(x) = x^2$  ہے کا مرکز کیت تلاش کریں۔

سوال 26: کلیر  $y = x$  سے نیچے اور قطع مکانی  $y = x^2$  سے اوپر پتلی چادر جس کی نقطہ  $(x, y)$  پر کثافت  $\delta(x) = 12x$  ہے کا مرکز کیت تلاش کریں۔

سوال 27: کلیر  $x = 1$ ، کلیر  $x = 4$  اور مغنی  $y = \pm \frac{4}{\sqrt{x}}$  کے بیچ چادر کو محور  $y$  کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (i) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ  $(x, y)$  پر چادر کی کثافت  $\delta(x) = \frac{1}{x}$  ہو تب چادر کی کیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کیت کا مرکز دکھائیں۔

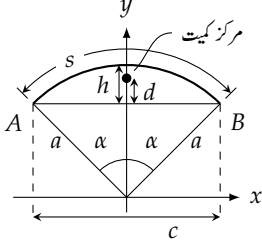
سوال 28: مغنی  $y = \frac{2}{x}$  اور محور  $x$  پر  $x = 1$  تا  $x = 4$  کے بیچ چادر کو محور  $x$  کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (i) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ  $(x, y)$  پر چادر کی کثافت  $\delta(x) = \sqrt{x}$  ہو تب چادر کی کیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کیت کا مرکز دکھائیں۔

تکون کے وسطانی مراکز  
سوال 29: تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا۔  
تکون کی راس سے مخالف ضلع کی وسط تک قطع کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ ضلع سے  $\frac{1}{3}$  فاصلہ پر وسطانیہ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل 6.85)۔ دکھائیں کہ تکون کا وسطانی مرکز بھی اسی نقطہ پر پایا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

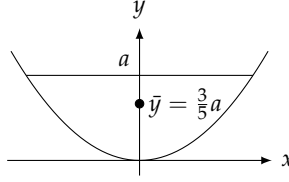
ا. تکون کے کسی ایک ضلع کو محور  $x$  پر رکھ کر اس میں نمائندہ افقی پٹی  $L$  لیں۔ کیت  $dm$  کو  $L$  اور  $dy$  کی صورت میں لکھیں۔

ب. متناہہ مثلثات کی مدد سے  $L = \frac{b}{h}(h - y)$  لکھ کر  $dm$  کے کلیہ میں ڈالیں۔

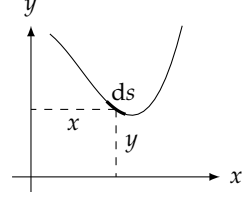
ج. دکھائیں کہ  $\bar{y} = \frac{h}{3}$  ہو گا۔



شکل 6.88: برائے سوال 41



شکل 6.87: برائے سوال 40



شکل 6.86: برائے سوال 39

د. اسی دلیل کو باقی دو وسطانیوں پر بھی لاگو کریں۔

سوال 30 تا سوال 34 مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ سوال 29 کا نتیجہ استعمال کر کر مثلث کا وسطانی مرکز دریافت کریں۔

سوال 30:  $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$

سوال 31:  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

سوال 32:  $(0, 0), (a, 0), (0, a)$

سوال 33:  $(0, 0), (a, 0), (0, b)$

سوال 34:  $(0, 0), (a, 0), (\frac{a}{2}, b)$

پتلی تار

سوال 35: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی  $y = \sqrt{x}$  پر  $x = 0$  سے  $x = 2$  تک پایا جاتا ہے۔ محور  $x$  کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 36: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی  $y = x^3$  پر  $x = 0$  سے  $x = 1$  تک پایا جاتا ہے۔ محور  $x$  کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 37: کثافت  $\delta = k \sin \theta$  لیتے ہوئے، جہاں  $k$  مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 38: کثافت  $\delta = 1 + k |\cos \theta|$  لیتے ہوئے، جہاں  $k$  مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔

کلیات انجینئری

سوال 39 تا سوال 42 میں دیے گئے فکروں اور کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال 39: قابل تفرق مستوی منحنی کے وسطانی مراکز کے محدود درج ذیل ہوں گے (شکل 6.86)۔

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\text{لمبائی}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\text{لمبائی}}$$

سوال 40: قوس  $y = \frac{x^2}{4p}$  میں  $p > 0$  کی قیمت جو بھی ہو، شکل 6.87 میں دکھائے گئے قطع مکانی خطے کے وسطانی مرکز کا  $y$  محدود  $\bar{y} = \frac{3}{5}a$  ہو گا۔

سوال 41: مستقل کشافیت کی باریک تار سے، محور  $y$  کے لحاظ سے تشاکلی، دائری قوس بنایا جاتا ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے (شکل 6.88)۔ اس کے وسطانی مرکز کا  $y$  محدود  $\bar{y} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$  ہو گا۔

سوال 42: گزشتہ سوال کو جاری رکھا گیا ہے۔  
دکھائیں کہ جب  $\alpha$  کی قیمت کم ہو تب وسطانی مرکز سے قطع  $AB$  تک فاصلہ  $d$  تقریباً  $\frac{2h}{3}$  ہو گا۔ ایسا درج ذیل اقدام سے ہو گا۔  
ا. 1. درج ذیل دکھائیں۔

$$(6.28) \quad \frac{d}{h} = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

2. درج ذیل تفاعل کو

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

کمپیوٹر پر ترسیم کر کے بڑا کر کے دکھائیں کہ  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$  ہو گا۔

ب. آپ  $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  لے کر مساوات 6.28 کا دایاں ہاتھ حل کر کے دکھائیں کہ  $45^\circ$  سے بڑے زاویوں کے لئے بھی غل (یعنی  $d$  اور  $\frac{2}{3}$  میں فرق) بہت کم ہے۔



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

