

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	
461	ضمیمہ دوم	1

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

4.7 خط بندی اور تفرقات

بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی خط بندی²⁰ پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات dx اور dy متعارف کرتے ہیں جو $\frac{dy}{dx}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیشکش میں خلل اور حساسیت کو dy سے ظاہر کریں گے۔

خطی تخمین

آپ شکل 4.126 میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔ نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جاسکتا ہے۔

شکل 4.127 کی علامت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ہے۔ یوں مماس درج ذیل تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جاسکتا ہے۔

تعریف:

اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

$$(4.15) \quad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

نقطہ a پر f کی خط بندی²¹ ہوگی۔ f کی درج ذیل تخمین L

$$f(x) \approx L(x)$$

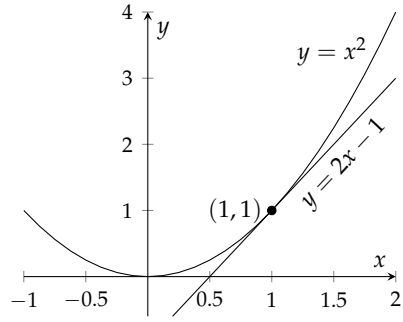
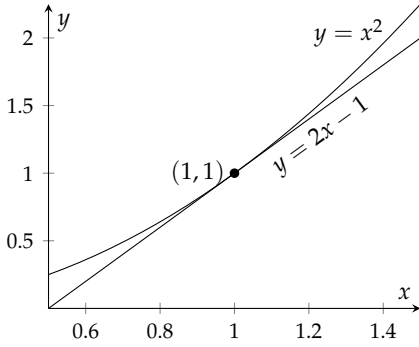
نقطہ a پر تفاعل f کی معیاری خطی تخمین²² ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا وسط²³ ہے۔

linearizations²⁰

linearization²¹

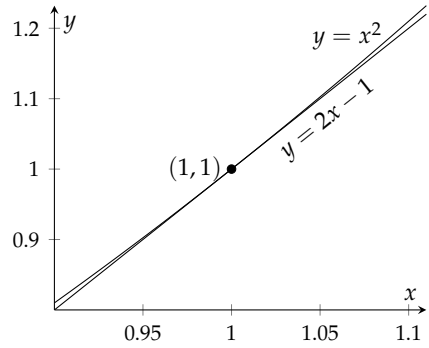
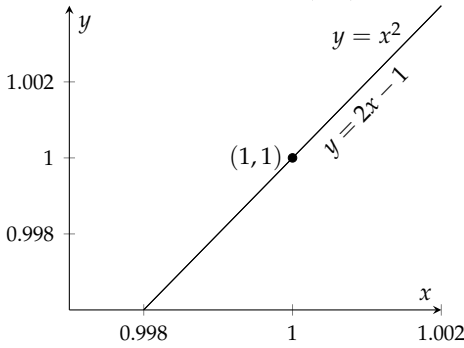
standard linear approximation²²

center²³



(ب) نقطہ (1, 1) کے نزدیک منحنی اور مماس قریب قریب ہیں

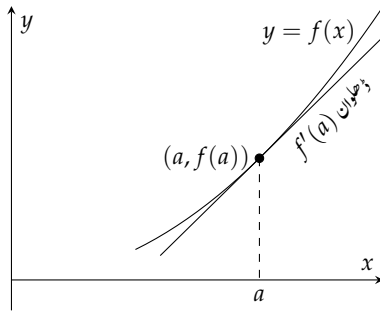
(ا) منحنی اور اس کا نقطہ (1, 1) پر مماس



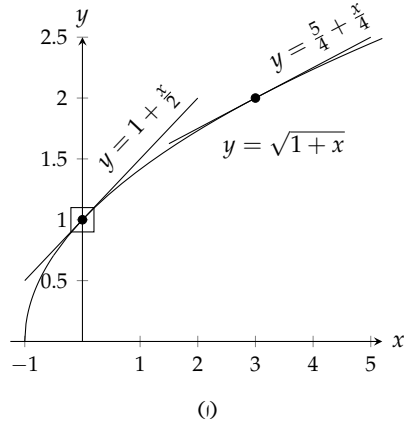
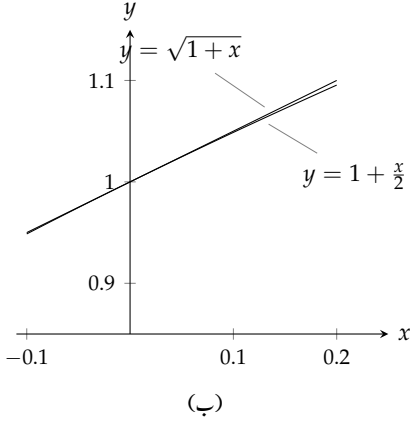
(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

شکل 4.126: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینہ طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جاسکتا ہے



شکل 4.127: نقطہ a پر تعاقب $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ہوگا



شکل 4.128: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کی خط بندی۔

□

مثال 4.40: $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی تلاش کریں۔
حل: ہم $a = 0$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہذا

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

ہو گا۔ شکل 4.128-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔ اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔

□

تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل 4.128-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$$

2 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$$

3 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$$

5 اعشاریہ درست

وسط سے دور خط بندی میں خلل ناقابل نظر انداز ہو گا۔ یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جاسکتا ہے۔ آپ کو $x = 3$ پر نئی خط بندی حاصل کرنی ہوگی۔

مثال 4.41: $x = 3$ پر تقابل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: ہم $a = 3$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

ہے لہذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

ہو گا (شکل 4.128)۔ اس خط بندی سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے 0.00061 ہٹ کر ہے۔

اگر ہم مثال 4.40 میں حاصل خط بندی استعمال کریں تب

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

□

حاصل ہو گا جس میں % 25 خلل پایا جاتا ہے۔

مثال 4.42: جذروں اور طاقتوں کے لئے اہم ترین خط بندی درج ذیل ہے۔

$$(4.16) \quad (1+x)^k \approx 1+kx \quad k \text{ کوئی عدد ہے؛ } x \approx 0$$

□

$x = 0$ کے نزدیک یہ تقابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔

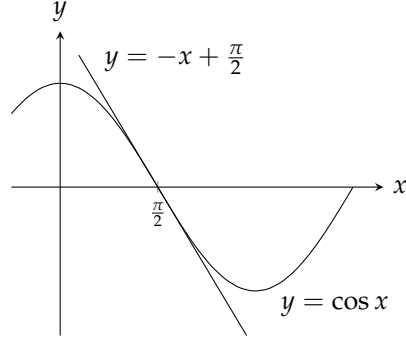
مساوات 4.16 سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1+x \quad k = -1$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \quad k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} \quad k = -\frac{1}{2}$$



شکل 4.129: کو سائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خط بندی۔

دیگر اہم خط بندی درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

مثال 4.43: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: درج ذیل

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

لیتے ہوئے خط بندی درج ذیل ہو گی (شکل 4.129)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 0 + (-1)(x - \frac{\pi}{2}) = -x + \frac{\pi}{2}$$

□

تفرقات

تعریف:

فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے۔ تفرق dx غیر تابع متغیر ہے۔ تفرق dy درج ذیل ہے۔

$$dy = f'(x) dx$$

□

عموماً تفرق dx غیر تابع متغیر میں تبدیلی Δx ہوگی۔ البتہ تعریف میں ہم dx پر یہ شرط لاگو نہیں کرتے ہیں۔ تفرق dy ہر صورت تابع ہوگا اور اس کی قیمت x اور dx پر منحصر ہوگی۔

مثال 4.44: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لئے dy تلاش کریں۔
حل:

$$dy = (5x^4 + 37) dx, \quad dy = (3 \cos 3x) dx$$

□

اگر $dx \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $dy = f'(x) dx$ کے دونوں اطراف کو dx سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $dx \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ تفرقات کا حاصل تقسیم ہوگا۔

بعض اوقات ہم $df'(x) dx$ کی بجائے

$$df = f'(x) dx$$

لکھتے ہیں اور df کو f کا تفرق کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x dx$$

ہوگا۔

تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

کے دونوں اطراف کو dx سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$d(u+v) = du + dv$$

حاصل ہوگی۔ چند تفرقی کلیات پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} dc &= 0, & d(cu) &= c du, & d(u+v) &= du + dv, \\ d(uv) &= u dv + v du, & d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2}, & d(u^n) &= nu^{n-1} du, \\ d(\sin u) &= \cos u du, & d(\cos u) &= -\sin u du, & d(\tan u) &= \sec^2 u du, \\ d(\cot u) &= -\csc^2 u du, & d(\sec u) &= \sec u \tan u du, & d(\csc u) &= -\csc u \cot u du \end{aligned}$$

مثال 4.45:

$$\begin{aligned} d(\tan 2x) &= \sec^2(2x) d(2x) = 2 \sec^2 2x dx \\ d\left(\frac{x}{x+1}\right) &= \frac{(x+1) dx - x d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x dx + dx - x dx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

□

تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + dx$ پر جانے سے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کتنی ہوگی۔ اگر dx نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کی خط بندی L ایک دوسرے کے برابر تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب زیادہ آسان ہے لہذا اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

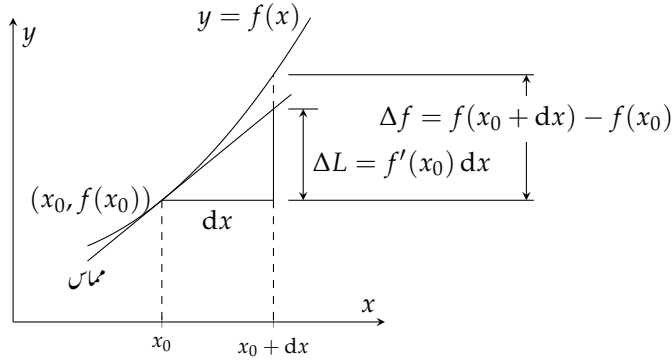
شکل 4.130 میں دیے علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$$

L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(x_0 + dx) - L(x_0) \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + dx) - x_0]}_{L(x_0+dx)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)} \\ &= f'(x_0) dx \end{aligned}$$

تفرق $df = f'(x) dx$ کا جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $x = x_0$ پر df کی قیمت حاصل کی جائے تب $df = \Delta L$ ہو گا یعنی خط بندی میں تبدیلی df کے برابر ہوگی۔ تفرقی تبدیلی کی اندازاً قیمت



شکل 4.130: چھوٹے dx کی صورت میں f کی خط بندی تقریباً f میں تبدیلی کے برابر ہوگی۔

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + dx$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہوگا۔

$$df = f'(x_0) dx$$

مثال 4.46: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10$ cm سے 10.1 cm کیا جاتا ہے۔ dS کا حساب کرتے ہوئے اس کے رقبہ S میں تبدیلی حاصل کریں۔ اس کا موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔
حل: چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہذا اندازاً تبدیلی

$$dS = S'(r_0) dr = 2\pi r_0 dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2$$

ہوگی۔ حقیقی تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{dS} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{غل}}$$

□

مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی

x_0 سے نزدیک نقطہ $x_0 + dx$ منتقل ہوتے ہوئے ہم f میں تبدیلی کو تین طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 4.1: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

اندازاً	اصل	
$df = f'(x_0) dx$	$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$	حتمی تبدیلی
$\frac{df}{f(x_0)}$	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	اضافی تبدیلی
$\frac{df}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	فی صد تبدیلی

مثال 4.47: گزشتہ مثال میں فی صف اندازاً تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{dS}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\%$$

□

مثال 4.48: زمین کا سطحی رقبہ زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \pm 0.1 \text{ km}$ ہے۔ زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟
حل: رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی بنا S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$dS = \left(\frac{dS}{dr}\right) dr = 8\pi r dr = 8\pi(6371)(0.1) = 16012 \text{ km}^2$$

□

مثال 4.49: رداس r کے کرہ کا رقبہ 1% درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہو گا؟
حل: ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|\Delta S| \leq \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

ہم اس عدم مساوات میں ΔS کی جگہ

$$dS = \left(\frac{dS}{dr}\right) dr = 8\pi r dr$$

پر کرتے ہیں۔ یوں

$$|8\pi r dr| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \implies |dr| \leq \frac{1}{8\pi r} \cdot \frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2} \frac{r}{100}$$

□

حاصل ہوتا ہے۔ یوں رداس میں خلل اصل رداس کے 0.5% سے کم ہونا ضروری ہے۔

مثال 4.50: بند شریانوں کا کھولنا (انجیوپلاستی)²⁴

جزوی طور پر بند شریانوں کی رداس کو بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاؤ حاصل کی جاسکتی ہے۔ 1830 کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزوئے نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \quad (k \text{ مستقل})$$

جو مستقل دباؤ پر فی اکائی وقت میں ایک چھوٹی نالی میں حجم بہاؤ H دیتا ہے۔ اس نالی کا رداس r ہے۔ رداس r 10% بڑھانے سے بہاؤ پر کیا اثر ہو گا؟
حل: r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$dH = \frac{dH}{dr} dr = 4kr^3 dr$$

یوں

$$\frac{dH}{H} = \frac{4kr^3 dr}{kr^4} = 4 \frac{dr}{r}$$

ہو گا یعنی H میں اضافی تبدیلیں r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔ یوں r میں 10% تبدیلی سے H میں 40% تبدیلی پیدا ہو گی۔
□

حسایت

مختلف x پر مساوات $df = f'(x) dx$ ہمیں f کی حسایت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی dx کے لئے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہو گی۔

مثال 4.51: آپ ایک پل کی اونچائی ناپنے کی خاطر ایک پتھر کو پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ $s = 4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حسایت کیا ہو گی؟
حل: مساوات $ds = 9.8t dt$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔ اگر $t = 2$ ہو تب

$$ds = 9.8(2)(0.1) = 1.96 \text{ m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t = 5 \text{ s}$ پر خلل درج ذیل ہو گا۔

$$ds = 9.8(5)(0.1) = 4.9 \text{ m}$$

□

تخمین $\Delta f \approx df$ میں خلل

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) && \text{اصل تبدیلی} \\ d &= f'(x_0)\Delta x && \text{تفرقی اندازہ}\end{aligned}$$

df اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم خلل تخمین کو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{خلل تخمین} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x\end{aligned}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے ($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔ یوں توسین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لئے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔ درحقیقت $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon \rightarrow 0$ ہو گا جب Δx چھوٹا ہو تخمین خلل $\epsilon \Delta x$ مزید چھوٹا ہو گا۔

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon \Delta x}_{\text{خلل}}$$

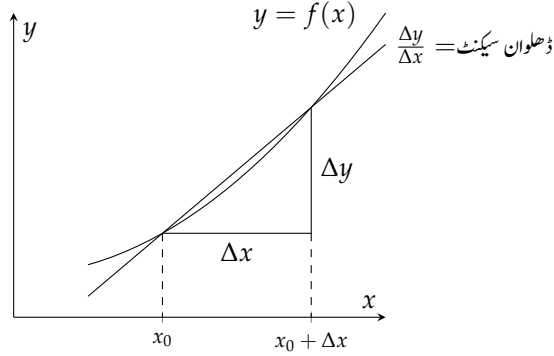
اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں ہے کہ خلل کتنا چھوٹا ہو گا یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$(4.17) \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

ہو گی جہاں $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon \rightarrow 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔



شکل 4.131: $x = x_0$ پر y کے تفرق سے مراد $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ہے۔

زنجیری تفرق کا ثبوت

زنجیری قاعدہ کے بارے میں ہم حصہ 3.5 میں بات کی گئی جہاں اس کا ثبوت پیش نہیں کیا گیا۔ انہیں مساوات 4.17 کی مدد سے زنجیری قاعدے کا ثبوت پیش کریں۔

فرض کریں $f(u)$ متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $u = g(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ اگر x_0 پر g قابل تفرق ہو اور $g(x_0)$ پر f قابل تفرق ہو تب مرکب تفاعل x_0 پر قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

فرض کریں x میں اضافہ Δx ہے اور فرض کریں کہ u اور y میں مطابقتی اضافے بالترتیب Δu اور Δy ہیں۔ جیسا آپ شکل 4.131 میں دیکھ سکتے ہیں

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ہو گا لہذا ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ یہ حد $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ کے برابر ہو گا۔

مساوات 4.17 کے تحت

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

ہو گا جہاں $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ہو گا۔ اسی طرح

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

ہو گا جہاں $\Delta u \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ہو گا۔ Δu اور Δy کی مساواتوں کو ملا کر

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

حاصل ہوتا ہے لہذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

ہو گا۔ چونکہ $\Delta x \rightarrow 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \rightarrow 0$ اور $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ہوں گے لہذا دائیں ہاتھ تین اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

کمیت کا توانائی میں تبادلہ

نیوٹن کا دوسرا قانون

$$F = \frac{d}{dx}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma$$

کمیت کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔ جیسا آپ جانتے ہیں حقیقت میں کمیت کی قیمت سمتی رفتار پر منحصر ہے یعنی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

جہاں ساکن کمیت m_0 ہے اور روشنی کی رفتار $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ہے۔ اگر کمیت کی سمتی رفتار v روشنی کی رفتار سے بہت کم ہو تب ہم تخمینی طور پر

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

یعنی

$$(4.18) \quad m = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

ہو گا۔ مساوات 4.18 رفتار کی بنا کمیت میں اضافہ بیان کرتی ہے۔

طبیعیات نیوٹن میں $\frac{1}{2} m_0 v^2$ کو جسم کی حرکی توانائی کہتے ہیں اور اگر ہم مساوات 4.18 کو

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

لکھیں تب

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{1}{2} m_0 (0)^2 = \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

یعنی

$$(4.19) \quad (\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

ہو گا۔ یوں صفر سمتی رفتار سے v سمتی رفتار تک پہنچنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی تقریباً $(\Delta m)c^2$ ہو گی۔

مساوات 4.19 میں $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ پر کرتے ہوئے

$$\Delta(\text{حرکی توانائی}) \approx 90\,000\,000\,000\,000\,000 \Delta m$$

توانائی حاصل ہو گی جہاں کمیت کی اکائی kg اور توانائی کی اکائی جاول J ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کمیت میں معمولی تبدیلی سے توانائی میں بہت بڑی تبدیلی آتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم میں ایک گرام سے کم کمیت توانائی میں تبدیل ہوتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم سے مراد وہ ایٹمی بم ہے جو 20 000 ٹن یعنی $2 \times 10^7 \text{ kg}$ بارودی مواد (ٹی این ٹی²⁵) کے دھماکے کے برابر توانائی خارج کرتا ہو۔

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال 1 تا سوال 6 میں $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی $L(x)$ تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = x^4, \quad x = 1$

سوال 2: $f(x) = x^{-1}, \quad x = 2$

سوال 3: $f(x) = x^3 - x, \quad x = 1$

سوال 4: $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x = 2$

سوال 5: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 4$

سوال 6: $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad x = -4$

آپ سوال 7 تا سوال 12 میں دیے تعامل کی خط بندی استعمال کرنا چاہتے ہیں۔ بعد کا کام آسان بنانے کی خاطر آپ خط بندی کے وقفے کا وسط دیے گئے نقطہ x_0 کے نزدیک عدد صحیح پر رکھنا چاہیں گے جہاں تعامل اور تعامل کے تفرق کی قیمت تلاش کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ خط بندی تلاش کریں۔

سوال 7: $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$

سوال 8: $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.6$

سوال 9: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$

سوال 10: $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$

سوال 11: $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$

سوال 12: $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1.3$

تکونیاتی تعامل کی خط بندی

سوال 13 تا سوال 16 میں $x = a$ پر تعامل f کی خط بندی تلاش کریں۔ دو مختلف نقطوں پر دو مختلف حد بندی درکار ہیں۔ تعامل اور تعامل کی خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 13: $f(x) = \sin x, \quad x = 0, x = \pi$

سوال 14: $f(x) = \cos x, \quad x = 0, x = -\frac{\pi}{2}$

سوال 15: $f(x) = \sec x, \quad x = 0, x = -\frac{\pi}{3}$

سوال 16: $f(x) = \tan x, \quad x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$

سوال 17: کی قیمت صفر کے قریب لیتے ہوئے درج ذیل تعامل کی خطی تخمین تلاش کریں۔ کلیہ $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کریں۔

$$h(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}} \quad \text{ج.} \quad g(x) = \frac{2}{1-x} \quad \text{ا.} \quad f(x) = (1+x)^2$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad \text{ب.} \quad g(x) = (1-x)^6 \quad \text{ا.} \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}$$

سوال 18: کیلکولیٹر سے تیز تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمتیں حاصل کریں۔

$$\text{ا. } (1.0002)^{50} \quad \text{ب. } \sqrt[3]{1.009}$$

سوال 19: $x=0$ پر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کا $\sqrt{1+x}$ اور $\sin x$ کی انفرادی خط بندی کے ساتھ کیا رشتہ ہے؟

سوال 20: ہم طاقی قاعدہ سے جانتے ہیں کہ تمام ناطق اعداد k کے لئے مساوات

$$\frac{d}{dx}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

مطمئن ہوتی ہے۔ ہم بعد کے ایک باب میں دیکھیں گے کہ یہ مساوات غیر ناطق اعداد کے لئے بھی مطمئن ہوتی ہے۔ یہی یہاں فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x=0$ پر $f(x) = (1+k)^k$ کی خط بندی $L(x) = 1+kx$ ہے۔

تفرقات

سوال 21 تا سوال 32 میں dy تلاش کریں۔

$$\text{سوال 21: } y = x^3 - 3\sqrt{x}$$

$$\text{سوال 22: } y = x\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{سوال 23: } y = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\text{سوال 24: } y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$$

$$\text{سوال 25: } 2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$$

$$\text{سوال 26: } xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$$

سوال 27: $y = \sin(5\sqrt{x})$

سوال 28: $y = \cos(x^2)$

سوال 29: $y = 4 \tan\left(\frac{x^3}{3}\right)$

سوال 30: $y = \sec(x^2 - 1)$

سوال 31: $y = 3 \csc(1 - 2\sqrt{x})$

سوال 32: $y = 2 \cot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

خلل تخمین
سوال 33 تا سوال 38 میں x کی قیمت x_0 سے $x_0 + dx$ ہونے کی بنا قاعداً $f(x)$ کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ درج ذیل تلاش کریں (شکل 4.130)۔

ا. تبدیلی $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$

ب. اندازاً تبدیلی $df = f'(x_0) dx$

ج. خلل تخمین $|\Delta f - df|$

سوال 33: $f(x) = x^2 + 2x, x_0 = 0, dx = 0.1$

سوال 34: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, x_0 = -1, dx = 0.1$

سوال 35: $f(x) = x^3 - x, x_0 = 1, dx = 0.1$

سوال 36: $f(x) = x^4, x_0 = 1, dx = 0.1$

سوال 37: $f(x) = x^{-1}, x_0 = 0.5, dx = 0.1$

سوال 38: $f(x) = x^3 - 2x + 3, x_0 = 2, dx = 0.1$

تبدیلی کا تفرقی اندازہ

سوال 39 تا سوال 44 میں رقبہ یا حجم میں تبدیلی کی تفرقی صورت لکھیں۔

سوال 39: رداس r کے کرہ کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ میں تبدیلی جب رداس r_0 سے $r_0 + dr$ ہوتا ہے۔

سوال 40: مکعب کے حجم $H = x^3$ میں تبدیلی جب اس کے ضلع کی لمبائی x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + dx$ ہوتی ہے۔

سوال 41: مکعب کی سطحی رقبہ $S = 6x^2$ میں تبدیلی جب اس کا ضلع x_0 سے $x_0 + dx$ ہوتا ہے۔

سوال 42: قائمہ مخروط کا رقبہ پہلو $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ جب رداس r_0 سے $r_0 + dr$ ہوتا ہے جبکہ اس کی اونچائی h تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

سوال 43: قائمہ بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ جب اس کا رداس r_0 سے تبدیل ہو کر $r_0 + dr$ ہو جبکہ اس کی لمبائی h تبدیل نہ ہو۔

سوال 44: قائمہ بیلن کا رقبہ پہلو $S = 2\pi r h$ جب اس کی لمبائی h_0 سے $h_0 + dh$ ہو جائے جبکہ اس کا رداس تبدیل نہ ہو۔

استعمال

سوال 45: ایک دائرے کا رداس 2 m سے بڑھ کر 2.02 m ہو جاتا ہے۔

ا. رقبے میں تبدیلی تلاش کریں۔

ب. رقبہ میں تبدیلی اور ابتدائی رقبہ کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 46: ایک درخت کا قطر 30 cm تھا۔ اگلے سال اس کا محیط 2 cm بڑھ گیا۔ درخت کا قطر کتنا بڑھا؟ درخت کا رقبہ عمودی تراش کتنا بڑھا؟

سوال 47: ایک مکعب کی اضلاع کی لمبائی 10 cm ہے جس میں 1% خلل متوقع ہے۔ اس کے حجم میں کتنا فی صد خلل ہو گا؟

سوال 48: ایک چکور کے رقبہ میں 2% سے کم خلل قابل قبول ہے۔ اس کے ضلع کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 49: ایک کرہ کا قطر $100 \pm 1\text{ cm}$ ناپا جاتا ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم حاصل کیا جاتا ہے۔ حجم میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال 50: ایک کرہ کے حجم میں 3% تک خلل قابل قبول ہے۔ اس کے قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 51: ایک قائمہ بیلیں کا رداس اور اس کی لمبائی ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یوں اس کا حجم πh^3 ہو گا۔ اس کے حجم میں 1 % خلل قابل قبول ہے۔ اس کی لمبائی کی پیمائش میں قابل قبول خلل کتنا ہو گا؟

سوال 52: ایک قائمہ ٹینکی کا قد 10 m ہے۔ اس کی پیمائش حجم اور اصل حجم میں 1 % کا فرق قابل قبول ہے۔ اس کے اندرونی قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا۔

سوال 53: ایک دائری قرص کے رداس میں کتنا فرق dr قابل قبول ہو گا تاکہ اس کی کیت میں فرق اصل کیت کے $\frac{1}{1000}$ سے کم ہو۔ قرص کی موٹائی میں خلل کو نظر انداز کریں۔

سوال 54: خون کے بہاؤ میں 50 % اضافہ حاصل کرنے کی خاطر مثال 4.50 میں r کو کتنا فی صد بڑھانا ہو گا؟

سوال 55: دکھائیں کہ مثال 4.51 میں t میں 5 % خلل کی بنا s میں 10 % خلل پیدا ہو گا۔

سوال 56: دل پر خلائی مشق کے اثرات اکائی وقت میں دل درج ذیل

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

کام کرتا ہے جہاں W اکائی وقت میں کام ہے، P دباؤ خون ہے، V دل سے اکائی وقت میں خارج خون کا حجم ہے، δ خون کی کثافت ہے، v دل سے اخراج کے وقت خون کی اوسط رفتار ہے، اور g ثقلی اسراع ہے۔

مستقل P ، V ، δ اور v کی صورت میں W صرف g کا تفاعل ہو گا۔ ایسی صورت میں یہ مساوات درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$(4.20) \quad W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ مستقل})$$

آپ چاند پر g میں تبدیلی dg اور زمین پر g میں اتنی ہی تبدیلی dg کا W پر اثر دیکھنا چاہتے ہیں۔ چاند پر $g = 1.6 \text{ ms}^{-2}$ اور زمین پر $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ہیں۔ مساوات 4.20 سے چاند dW اور زمین dW کی نسبت حاصل کریں۔ نتیجہ کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

سوال 57: مکعب کا حجم $H = x^3$ ہے۔ اس کے کنارے کی لمبائی میں Δx کے اضافہ سے حجم میں ΔH اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اضافی حجم ΔH کا خاکہ بنا کر اس کو درج ذیل کا مجموعہ ظاہر کریں۔

ا. تین تختے جن کے اطراف x ، x اور Δx ہیں۔

ب. تین ڈنڈے جن کے اطراف x ، Δx اور Δx ہیں۔

ج. ایک مکعب جس کے اطراف Δ ، Δx اور Δx ہیں۔

تفرقی کلیہ $dH = 3x^2 dx$ حجم میں تبدیلی کو تین تختوں کے حجم (جزو-ا) سے حاصل کرتی ہے۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

