

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
307	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
528	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
556	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
572	5.7	بنیادی مسئلہ
593	5.8	قطعی تکمل میں بدل
599	5.9	اعدادی تکمل
599	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
640	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
655	6.4	تکلی چھلے
668	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
678	6.6	سطح طواف کا رقبہ
690	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
702	6.7.1	وسطانی مرکز
707	6.8	کام
721	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
731	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
745	7	ماورائی تفاعل
746	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

764	قدرتی لوگار تھم	7.2
781	قوت نمائی تفاعل	7.3
796	$\log_a x$ اور a^x	7.4
808	افزائش اور تنزل	7.5
822	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
838	اضافی شرح نمو	7.7
843	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
849	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
865	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
882	بدلولی تفاعل	7.10
903	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
921	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

931	8 مکمل کے طریقے	
931	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
947	8.2 مکمل بالخص	
952	8.2.1 بار بار استعمال	
961	8.3 جزوی کسر	
976	8.4 نکتہ بنائی بدل	
987	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1004	8.6 غیر مناسب مکمل	

1031	9 لامتناہی تسلسل	
1031	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1050	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1066	9.3 لامتناہی تسلسل	
1085	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1095	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1105	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1117	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1131	9.8 طاقی تسلسل	
1147	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1159	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1177	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1197	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1197	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1221	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1231	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1245	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1261	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1275	10.6	قطبی محدود
1287	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1301	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1302	10.8.1	دائرے
1316	10.9	قطبی محدود میں مکمل

1329	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329	11.1	مستوی میں سمتیت
1346	11.2	کار تہی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1353	11.2.1	کرہ
1363	11.3	ضرب نقطہ
1364	11.3.1	حساب
1378	11.4	صلیبی ضرب
1393	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1408	11.6	تکلی اور مربع سطحیں

1413	جوابات
1415	ا ضمیمہ اول
1417	ب ضمیمہ دوم
1419	ج ضمیمہ تین
1421	د ضمیمہ چار
1423	ه ضمیمہ پانچ
1425	و ضمیمہ چھ
1427	ز ضمیمہ سات
1429	ح ضمیمہ آٹھ
1431	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

11.6 نلکی اور مربع سطحیں

واحد متغیر کے تفاعل کی احصاء میں ہم نے خطوط سے شروع کیا اور خطوط کے بارے میں اپنا علم استعمال کرتے ہوئے مستوی قوسین کا مطالعہ کیا۔ ہم نے مماس پر غور کیا اور دیکھا کہ کسی بھی قابل تفرق منحنی کے چھوٹے حصہ کو خطی تصور کیا جاسکتا ہے۔ خاص اہمیت کے حامل منحنیات میں مخروطی قطعات، اور دو درجی منحنیات شامل ہیں جنہیں متغیر x اور y کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل کی احصاء کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اسی طرح کی راہ پر چلتے ہیں۔ ہم دو بعدی سطح سے شروع کر کے اس سطح کے بارے میں اپنا علم استعمال کر کر فضا میں تین بعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔ خاص اہمیت کے حامل سطحوں میں نلکیاں اور دو درجی سطحیں شامل ہیں جنہیں x ، y ، z کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں دو بعدی سطحوں پر غور کیا گیا۔ اس حصہ میں ہم تین بعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔

نلکی

نلکے²⁶ سے مراد وہ سطح ہے جو (i) ان تمام لکیروں پر مشتمل ہو جو فضا میں کسی دی گئی لکیر کے متوازی ہوں اور (ب) جو دی گئی مستوی منحنی سے گزرتے ہوں۔ اس منحنی کو نلکی کی پیدا کار منحنی²⁷ کہتے ہیں۔ ٹھوس جیومیٹری میں جہاں نلکی سے مراد دائری نلکی ہوتی ہے، پیدا کار منحنی ایک دائرہ ہو گی، لیکن یہاں ہم کسی بھی قسم کی پیدا کار منحنی کی اجازت دیں گے۔ ہماری (درج ذیل) پہلی مثال میں نلکی کو قطع مکانی پیدا کرتا ہے۔

نلکی یا دیگر تین بعدی سطحوں کو ترسیم کرتے ہوئے یا قلم و کاغذ سے ان کا خاکہ بناتے ہوئے ان سطحوں کا محدود سطحوں کے متوازی سطحوں کے ساتھ خط تقاطع کو دیکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ ان منحنیات کو عمودی تراش²⁸ کہتے ہیں۔

مثال 11.47: قطع مکانی نلکی $y = x^2$ محور z کے متوازی لکیروں سے حاصل اس نلکی کی مساوات تلاش کریں جو قطع مکانی $y = x^2$ ، $z = 0$ سے گزرتی ہیں۔

حل: فرض کریں مستوی xy میں قطع مکانی $y = x^2$ پر نقطہ $N_0(x_0, x_0^2, 0)$ پایا جاتا ہے۔ تب کسی بھی z کے لئے چونکہ نقطہ $Q(x_0, x_0^2, z)$ محور z کے متوازی لکیر $x = x_0$ ، $y = x_0^2$ سے گزرتی ہے، پر پایا جائے گا لہذا Q اس نلکی پر پایا جائے گا۔

اس طرح z کی قیمت سے قطع نظر اس سطح پر پائے جانے والے تمام نقاط مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کریں گے۔ یوں $y = x^2$ □ اس نلکی کی مساوات ہو گی۔ اس کی بنا ہم اس نلکی کو "نلکی $y = x^2$ " کہتے ہیں۔

ہم مثال 11.47 سے دیکھ سکتے ہیں کہ مستوی xy میں کوئی بھی منحنی $f(x, y) = c$ محور z کے متوازی نلکی دے گی اور اس نلکی کی مساوات $f(x, y) = c$ ہو گی۔ مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ایک قائمہ نلکی بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر

cylinder²⁶
generating curve²⁷
cross section²⁸

مشتمل ہے جو مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ سے گزرتے ہیں۔ مساوات $x^2 + 4y^2 = 9$ ایک ترخیمی نکلے بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر مشتمل ہے جو مستوی xy میں ترخیم $x^2 + 4y^2 = 9$ سے گزرتے ہیں۔

اسی طرح مستوی xz میں کوئی بھی مخی $g(x, z) = c$ محور y کے متوازی ایک نکلے دیتی ہے جس کی مساوات $g(x, z) = c$ ہوگی۔ کوئی بھی مساوات $h(y, z) = c$ محور x کے متوازی نکلے دیتی ہے اور اس نکلے کی مساوات بھی $h(y, z) = c$ ہوگی۔

تین کارتیسی محوروں میں سے کسی بھی دو محوروں پر مبنی مساوات ایک نکلے دیتی ہے جو تیسری کارتیسی محور کے متوازی ہوگی۔

مربع سطحیں

مربع سطح سے مراد فضا میں x ، y اور z کی دو درجی مساوات کی ترسیم ہے جس کی عمومی مساوات درج ذیل ہے

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

جہاں A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، J اور K مستقل ہیں۔ اس مساوات کی سادہ صورت، حصہ 10.3 میں دو بعدی صورت کی طرح، گھمانے اور منتقلی سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ مربع سطح کی مساوات میں ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے۔ ہم صرف سادہ مساوات پر غور کریں گے۔ اگرچہ نکلے کی تعریف یہ نہیں کہتی ہے البتہ اشکال مربع سطحوں کی بھی مثالیں ہیں۔ ہم اب ترخیمی سطحوں (جن میں کرہ شامل ہے)، قطع مکانی سطحوں، مخروطی سطحوں اور قطع زائد سطحوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 11.48: درج ذیل ترخیمی سطح محدود محوروں کو $(\pm a, 0, 0)$ ، $(0, \pm b, 0)$ اور $(0, 0, \pm c)$ پر مس کرتا ہے۔ یہ اس مستطیل ڈبہ $|x| \leq a$ ، $|y| \leq b$ ، $|z| \leq c$ کے اندر پایا جاتا ہے۔ چونکہ اس سطح کی تقریبی مساوات میں متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے لہذا یہ سطح تینوں محدود سطحوں کے لحاظ سے تشابہ کی ہوگی۔

تینوں محدود سطحوں کا اس سطح کے ساتھ مخی تقاطع، ترخیمات ہوں گی۔ مثال کے طور پر محدود مستوی $z = 0$ اس سطح کو درج ذیل ترخیم پر قطع کرتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad z = 0$$

سطح $z = z_0$ ، $|z_0| < c$ اس سطح سے درج ذیل ترخیمی حصہ کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2(1 - z_0^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - z_0^2/c^2)} = 1$$

اگر نصف محور a ، b اور c میں کوئی دو ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ ترخیمی سطح طواف ہوگی۔ اگر تینوں ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ سطح کرہ ہوگی۔ □

فنیاتے۔ فضا میں ذہنی تصویر کشی

فضا میں سطحوں کی تصویر کشی کمپیوٹر کی مدد سے کی جاسکتی ہے۔ یہ مختلف دو بعدی سطحوں میں لکیریں کھینچ سکتا ہے۔ کمپیوٹر اشکال کو فضا میں گھمانے کا نظارہ پیش کر سکتا ہے گویا آپ جسم کو ہاتھ میں گھما رہے ہوں۔ کمپیوٹر اس کا خیال رکھتا ہے کہ اجسام کا سامنے حصہ نظر آئے جب کے اس کا پچھلا حصہ آنکھوں سے اوجھل رہے۔ عمومی طور پر کمپیوٹر کو سطحوں کی مقدار معلوم مساوات درکار ہوں گی۔

مثال 11.49: سطح $x = 0$ اور سطح $y = 0$ کے لحاظ سے ترخیجہ قطع مکانی سطح

$$(11.45) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

تشاکلی ہو گا۔ صرف مبداء پر محوری تقاطع پایا جاتا ہے۔ مستقل c کی علامت تعین کرتی ہے کہ یہ مکمل سطح xy سے نیچے یا اس سے اوپر پایا جائے گا۔ محدود سطح اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$(11.46) \quad \begin{aligned} x = 0 : \quad z &= \frac{c}{b^2} y^2 \quad \text{مکانی قطع} \\ y = 0 : \quad z &= \frac{c}{a^2} x^2 \quad \text{مکانی قطع} \\ z = 0 : \quad &(0, 0, 0) \quad \text{نقطہ} \end{aligned}$$

مستوی xy سے اوپر ہر سطح $z = z_0$ اسے درج ذیل ترخیجہ میں کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

□

مثال 11.50: دائری قطع مکانی سطح یا قطع مکانی سطح طواف

$$(11.47) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

کو مساوات 11.45 میں $b = a$ پر کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ محور z کے عمودی سطحوں کی عمودی تراش سے دائرے حاصل ہوں گے جن کا مرکز محور z پر ہو گا۔ ان سطحوں کی عمودی تراش جن میں محور z پایا جاتا ہو، مماثل قطع مکانی ہوں گی جن کا مشترک ماسکہ $(0, 0, \frac{a^2}{4c})$ ہو گا۔

دائری قطع مکانی سطحوں سے حصے تراش کر بطور ریڈیو دور بین، مصنوعی سیارے کے تعاقب کار، اور خورد امواج ریڈیو کے اینٹینا استعمال کئے جاتے ہیں۔

□

مثال 11.51: ترخیمی مخروط

$$(11.48) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

تینوں محدودی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ محدودی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$(11.49) \quad x = 0 : \quad z = \pm \frac{c}{b}y \quad \text{خط}$$

$$(11.50) \quad y = 0 : \quad z = \pm \frac{c}{a}x \quad \text{خط}$$

$$z = 0 : \quad (0, 0, 0) \quad \text{نقطہ}$$

مستوی xy سے اوپر اور اس سے نیچے سطحیں $z = z_0$ ، اس سے ترخیمات کاٹتے ہیں جن کے مراکز محور z پر اور اس مساوات 11.49 اور مساوات 11.50 میں دی گئی خطوط پر پائے جاتے ہیں۔

اگر $a = b$ ہو تب یہ مخروط ایک قائمہ دائری مخروط ہو گا۔ □

مثال 11.52: یکے چادری قطع زائد سطح

$$(11.51) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

تینوں محدودی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا۔ محدودی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$x = 0 : \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{قطع زائد}$$

$$(11.52) \quad y = 0 : \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{قطع زائد}$$

$$z = 0 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{قطع زائد}$$

سطح $z = z_0$ اس کو ترخیم میں کاٹتا ہے جس کا مرکز محور z پر اور راسیں مساوات 11.52 میں دی گئی قطع مکانی میں سے ایک پر پائی جاتی ہیں۔

یہ پوری سطح آپس میں جڑی ہوئی ہے یعنی اس سطح پر چل کر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچا جاسکتا ہے۔ اسی لئے اس کو یک چادری قطع مکانی سطح کہتے ہیں۔ اگلی مثال میں دو چادری سطح پائی جاتی ہے۔

اگر $a = b$ ہو تب یہ قطع زائد سطح ایک سطح طواف ہو گا۔ □

مثال 11.53: دو چادریں قطع مکافہ سطح

$$(11.53) \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

تینوں محدودی سطحوں کے لحاظ سے تشابہ کی ہے۔ سطح $z = 0$ اس کو قطع نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت ایک افقی سطح اس صورت اس کو قطع کرتا ہے جب $|z| \geq c$ ہو۔ قطع زائد حصوں

$$x = 0 : \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0 : \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

کے راس اور ماسکے محور z پر پائے جاتے ہیں۔ یہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہے۔ پہلا حصہ سطح $z = c$ سے اوپر اور دوسرا حصہ سطح $z = -c$ سے نیچے پایا جاتا ہے۔ اسی لئے اس کو دو چادریں سطح کہتے ہیں۔

مساوات 11.51 اور مساوات 11.53 میں منفی اجزاء کی تعداد ایک جیسی نہیں ہے۔ دونوں صورتوں میں منفی اجزاء کی تعداد اور چادروں کی تعداد ایک جیسی ہے۔ مساوات 11.51 یا مساوات 11.53 میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 پر کرنے سے ترخیمی مخروط کی مساوات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

حاصل ہوتی ہے (مساوات 11.48)۔ قطع زائد سطحیں اس مخروط کے متقارب ہیں۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mp 1$$

مستوی xy میں خط

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

□

کے متقارب ہیں۔

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

