

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1

1 ابتدائی معلومات

1

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

16

1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جاسکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔ حقیقی اعداد¹ وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$-\frac{3}{4} = -0.75000 \dots$$

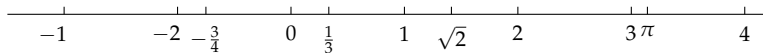
$$\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

¹ real numbers

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں ... سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو لکیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس لکیر کو حقیقی خط² کہتے ہیں۔



\mathbb{R} کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں: الجبرائی خواص، خواص درجہ، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جاسکتے ہیں۔ آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

حقیقی اعداد کی خواص درج ذیل ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

$$1. a + c < b + c \iff a < b$$

$$2. a - c < b - c \iff a < b$$

$$3. ac < bc \iff a < b \text{ اور } c > 0$$

$$4. bc < ac \iff a < b \text{ اور } c < 0 \text{ خصوصی صورت: } -b < -a \iff a < b$$

$$5. \quad \frac{1}{a} > 0 \iff a > 0$$

$$6. \quad \text{اگر } a \text{ اور } b \text{ دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب } a < b \iff \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

درج بالا میں $a < b \iff a + c < b + c$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہوگی۔ دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دار و مدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔ کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ درجہ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

\mathbb{R} کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی سلسلوں³ کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. قدرتی اعداد⁴، یعنی 1، 2، 3، 4، ...

2. عدد صحیح، یعنی 0، 1، 2، 3، ...

3. ناطق اعداد⁵، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔ اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9}, \quad \frac{200}{13}, \quad 57 = \frac{57}{1}$$

sets³
natural numbers⁴
rational numbers⁵

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔
(الف) مختتم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000 \dots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909 \dots = 2.0\overline{9}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور خواص درجہ رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔ یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں غیر ناطق اعداد⁶ کہلاتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نا مختتم اور نا ہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو ارکان کے بیچ تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں وقفہ⁷ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔ اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہذا -1 اور 1 کے بیچ تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔ خطی قطع متناہی وقفہ⁸ جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط لامتناہی وقفہ⁹ کہلاتے ہیں۔

irrational numbers⁶
interval⁷
finite interval⁸
infinite interval⁹

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ بند¹⁰ کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ نصف کھلا¹¹ کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ کھلا¹² کہلاتا ہے۔ وقفے کے سروں کو سرحدی نقطے¹³ بھی کہتے ہیں۔ یہ وقفہ کی سرحد¹⁴ ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو اندرونی نقطے¹⁵ کہتے ہیں۔ تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی اندرون¹⁶ کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسمیں			
علامت	سلسلہ	ترسیم	متناہی
(a, b)	$\{x a < x < b\}$		
$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$		
$[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$		
$(a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$		
(a, ∞)	$\{x x > a\}$		لا متناہی
$[a, \infty)$	$\{x x \geq a\}$		
$(-\infty, b)$	$\{x x < b\}$		
$(-\infty, b]$	$\{x x \leq b\}$		
$(-\infty, \infty)$	\mathbb{R}		

عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

مثال 1.1:

- ¹⁰closed
- ¹¹half-open
- ¹²open
- ¹³boundary points
- ¹⁴boundary
- ¹⁵interior points
- ¹⁶interior

$$\frac{2}{x-1} \geq 4 \quad (3)$$

$$-\frac{x}{3} < x - 1 \quad (2)$$

$$2x - 4 < x + 1 \quad (1)$$

حل:

(1)

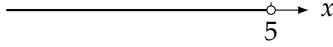
$$2x - 4 < x + 1$$

$$2x < x + 5$$

$$x < 5$$

دونوں ہاتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ سے x منفی کریں



حل سلسلہ وقفہ $(-\infty, 5)$ ہے۔

(2)

$$-\frac{x}{3} < x - 1$$

$$-x < 3x - 3$$

$$0 < 4x - 3$$

$$3 < 4x$$

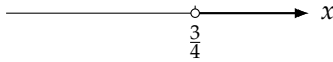
$$\frac{3}{4} < x$$

دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ x جمع کریں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں



وقفہ $(\frac{3}{4}, \infty)$ حل سلسلہ ہے۔

(3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بائیں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بائیں ہاتھ غیر متعین ہے۔ عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

$$2 \geq 4x - 4$$

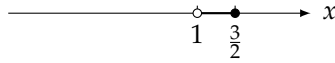
$$6 \geq 4x$$

$$\frac{3}{2} \geq x$$

دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$ ہے۔

□

مطلق قیمت

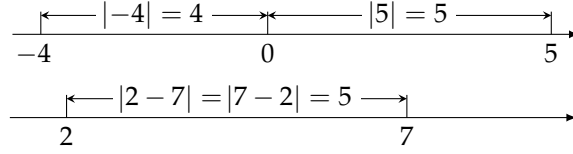
عدد x کی مطلق قیمت¹⁷ جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $|0.88| = 0.88$, $|0| = 0$, $|-13| = -(-13) = 13$, $|-a| = |a|$ □

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq 0$ ہوگی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہوگا۔ چونکہ a کی غیر منفی جذر کو \sqrt{a} سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جاسکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

آپ $\sqrt{a^2} = |a|$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہو گا۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$|x - y| = \text{فاصلہ } y \text{ اور } x \text{ کے بیچ}$$

ہو گا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص

$$1. \quad |-a| = |a| \quad \text{کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔}$$

$$2. \quad |ab| = |a||b| \quad \text{حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہو گا۔}$$

$$3. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہو گا۔}$$

$$4. \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہو گی۔ اس کو تکنیکی عدم مساوات کہتے ہیں۔}$$

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a + b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہو گی۔ اس کے علاوہ ہر صورت $|a + b| = |a| + |b|$ ہو گا۔

مثال 1.3:

$$|-2 + 6| = |4| = 4 < |-2| + |6| = 8$$

$$|2 + 6| = |8| = |2| + |6|$$

$$|-2 - 6| = |-8| = 8 = |-2| + |-6|$$



مطلق کی علامت توسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x - 1| = 11$ کو حل کریں۔
 حل: اس مساوات کے تحت $2x - 1 = \pm 11$ ہو سکتا ہے لہذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 = 11 & 2x - 1 = -11 \\ 2x = 12 & 2x = -10 \\ x = 6 & x = -5 \end{array}$$



یوں $|2x - 1| = 11$ کا درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے

اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

$$(1.1) \quad |a| < D \iff -D < a < D$$

$$(1.2) \quad |a| \leq D \iff -D \leq a \leq D$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x - 3| < 7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔
 حل:

$$|x - 3| < 7$$

$$-7 < x - 3 < 7$$

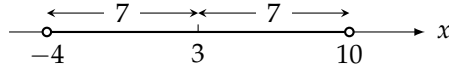
$$-7 + 3 < x < 7 + 3$$

$$-4 < x < 10$$

مساوات 1.1

دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔



□

مثال 1.6: عدم مساوات $|3 - \frac{2}{x}| < 1$ کو حل کریں۔
حل:

$$|3 - \frac{2}{x}| < 1 \iff -1 < 3 - \frac{2}{x} < 1 \quad \text{مساوات 1.1}$$

$$-4 < -\frac{2}{x} < -2 \quad \text{3 منفی کریں}$$

$$2 > \frac{1}{x} > 1 \quad \text{1/2 سے ضرب دیں}$$

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{مکعوس لیں}$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔ آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔ اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب مکعوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہوگی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔ حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2}, 1)$ ہے۔ □

مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ ترسیم کریں۔

$$(الف) \quad |2x - 5| \leq 1 \quad (ب) \quad |2x - 5| \geq 1$$

حل: (الف)

$$|2x - 5| \leq 1$$

$$-1 \leq 2x - 5 \leq 1$$

$$4 \leq 2x \leq 6$$

$$2 \leq x \leq 3$$

مساوات 1.2

جمع

تقسیم 2

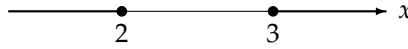
حل سلسلہ بند وقفہ $[2, 3]$ ہے۔



(ب)

$$\begin{array}{l|l}
 |2x - 5| \geq 1 & \\
 \hline
 2x - 5 \geq 1 & -(2x - 5) \geq 1 \\
 2x \geq 6 & 2x - 5 \leq -1 \\
 x \geq 3 & 2x \leq 4 \\
 & x \leq 2
 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ہے۔



□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی اشتراک¹⁸ کی علامت \cup استعمال کی گئی ہے۔ دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ اسی طرح ہم تقاطع¹⁹ کی علامت \cap بھی استعمال کرتے ہیں۔ دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ مثال کے طور پر $[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3)$ ہو گا۔

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1.1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔ اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔
جواب: $0.\bar{1}$, $0.\bar{2}$, $0.\bar{3}$, $0.\bar{8}$

¹⁸ union
¹⁹ intersection

سوال 1.2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔ دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 1.3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $0 < x < 4$	د $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$	ز $-6 < -x < 2$
ب $0 < x - 2 < 4$	ہ $1 < \frac{6}{x} < 3$	
ج $1 < \frac{x}{2} < 3$	و $ x - 4 < 2$	ح $-6 < -x < -2$

سوال 1.4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $4 < y < 6$	د $y < 6$	ز $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$
ب $-6 < y < -4$	ہ $0 < y - 4 < 2$	
ج $y > 4$	و $2 < \frac{y}{2} < 3$	ح $ y - 5 < 1$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ ترتیب کریں۔

سوال 1.5: $-2x > 4$	سوال 1.9: $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
جواب: $x < -2$	جواب: $x \leq -\frac{1}{3}$

سوال 1.6: $8 - 3x \geq 5$	سوال 1.10: $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$
---------------------------	---

سوال 1.7: $5x - 3 \leq 7 - 3x$	سوال 1.11: $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$
جواب: $x \leq \frac{5}{4}$	جواب: $x < -\frac{6}{7}$

سوال 1.8: $3(2 - x) > 2(3 + x)$	سوال 1.12: $-\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}$
---------------------------------	--

مطلق قیمت

درج ذیل مساوات حل کریں۔

$$|1 - t| = 1 \quad \text{سوال 1.16}$$

$$|y| = 3 \quad \text{سوال 1.13}$$

جواب: ± 3

$$|8 - 3s| = \frac{9}{2} \quad \text{سوال 1.17}$$

جواب: $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

$$|y - 3| = 7 \quad \text{سوال 1.14}$$

$$\left| \frac{s}{2} - 1 \right| = 1 \quad \text{سوال 1.18}$$

$$|2t + 5| = 4 \quad \text{سوال 1.15}$$

جواب: $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$

عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ ترسیم کریں

$$|x| < 2 \quad \text{سوال 1.19}$$

جواب: $-2 < x < 2$

$$|x| \leq 2 \quad \text{سوال 1.20}$$

$$|t - 1| \leq 3 \quad \text{سوال 1.21}$$

جواب: $-2 \leq t \leq 4$

$$|t + 2| < 1 \quad \text{سوال 1.22}$$

$$|3y - 7| < 4 \quad \text{سوال 1.23}$$

جواب: $1 < y < \frac{11}{3}$

$$|2y + 5| < 1 \quad \text{سوال 1.24}$$

$$\left| \frac{z}{5} - 1 \right| \leq 1 \quad \text{سوال 1.25}$$

جواب: $0 \leq z \leq 10$

سوال 1.26: $\left| \frac{3}{2}z - 1 \right| \leq 2$

سوال 1.27: $\left| 3 - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{2}$
 جواب: $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

سوال 1.28: $\left| \frac{2}{x} - 4 \right| < 3$

سوال 1.29: $|2s| \geq 4$
 جواب: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

سوال 1.30: $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

سوال 1.31: $|1 - x| > 1$
 جواب: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

سوال 1.32: $|2 - 3x| > 5$

سوال 1.33: $\left| \frac{r+1}{2} \right| \geq 1$
 جواب: $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

سوال 1.34: $\left| \frac{3}{5}r - 1 \right| > \frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات
 دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں
 لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2} = |a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 1.35: $x^2 < 2$
 جواب: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 1.36: $4 \leq x^2$

سوال 1.37: $4 < x^2 < 9$
 جواب: $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 1.38: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 1.39: $(x - 1)^2 < 4$
جواب $(-1, 3)$

سوال 1.40: $(x + 3)^2 < 2$

سوال 1.41: $x^2 - x < 0$
جواب $(0, 1)$

سوال 1.42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $|-a| = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔
جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 1.44: مساوات $|x - 1| = 1 - x$ کو حل کریں۔

سوال 1.45: ٹکوئی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a + b| = (a + b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے ٹکوئی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

سوال 1.46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 1.47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟
جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 1.48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ ترسیم کریں۔

سوال 1.49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔
جواب: $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 1.50: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔

1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدود اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدود

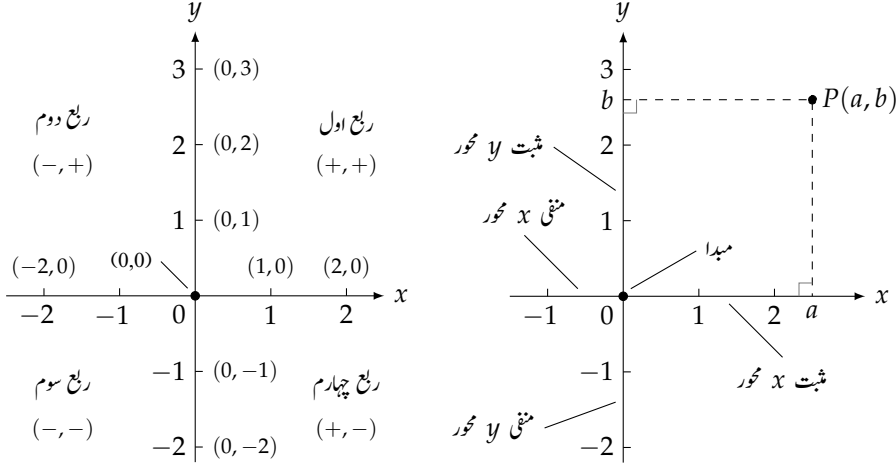
مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ ان خطوط کو مستوی میں محدودی محور²⁰ کہتے ہیں۔ افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔ انتصابی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محدودی نظام کا مبدا²¹ کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جاسکتے ہیں۔ اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x محدود²² a ہو گا۔ اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور

²⁰coordinate axis

²¹origin

²²x-coordinate



شکل 1.2: کارتیسی محدود

کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y محدود $^{23} b$ ہوگا۔ مرتب جوڑی (a, b) کو نقطے کی محدودی جوڑی 24 کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محدودی جوڑی کا y محدود 0 ہوگا جبکہ y محور پر ہر محدودی جوڑی کا x محدود 0 ہوگا۔ محدودی نظام کا مبدأ نقطہ $(0, 0)$ ہے۔

محور x کو مبدأ دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدأ کے دائیں جانب مثبت x محور 25 اور مبدأ کے بائیں جانب منفی x محور 26 پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدأ y محور کو بھی مثبت y محور اور منفی y محور میں تقسیم کرتا ہے۔ محدودی مستوی کو چار ربع 27 میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پہا

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنی میٹر کا فاصلہ

²³ y-coordinate
²⁴ coordinate pair
²⁵ positive x-axis
²⁶ negative x-axis
²⁷ quadrants

ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ 25 m s^{-1} کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی تناسب پہلو²⁸ ایک جیسے رکھتے ہیں لہذا دونوں محور پر پیمائشی فیتہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدود میں کل تبدیلی کو بڑھوتری²⁹ کہتے ہیں۔ اختتامی محدود سے ابتدائی محدود منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہوگی۔

مثال 1.8: نقطہ $A(4, -3)$ سے نقطہ $B(2, 5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہوگی۔

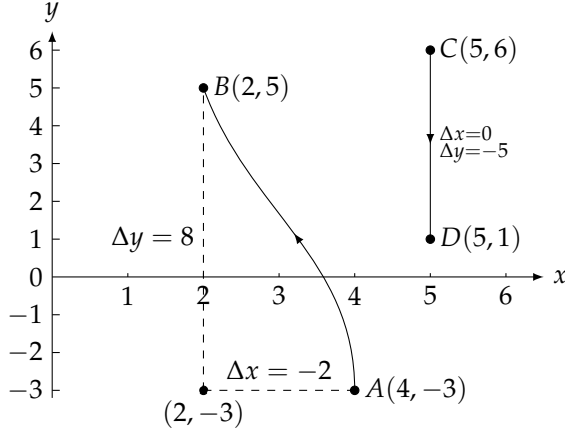
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5, 6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5, 1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔

□

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$$

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔



شکل 1.3: محدودی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

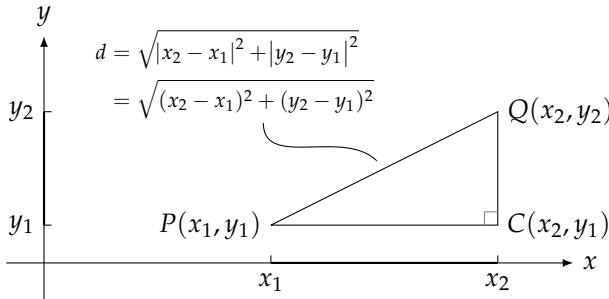
مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ

نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا (شکل 1.4)۔

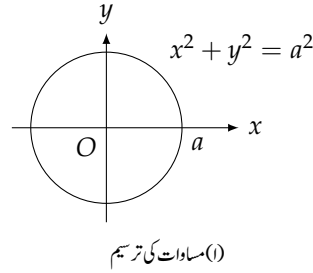
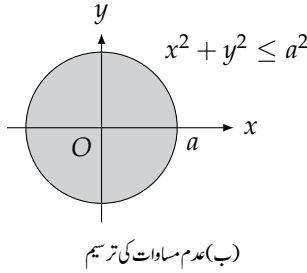
$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1.10: (الف) $P(-1, 2)$ اور $Q(3, 4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)



شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)

(ب) مبدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

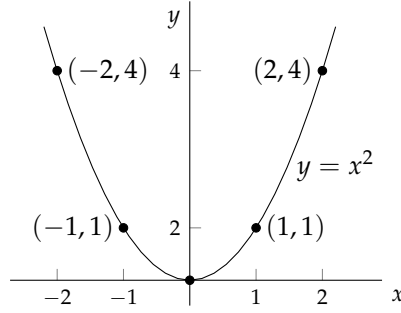
مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو

(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصل $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔ یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔

(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصل $\leq a$ ہے۔ یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہو گی (شکل 1.5)۔

□

اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو اکائی دائرہ³⁰ کہتے ہیں۔



شکل 1.6: قطع مکانی (مثال 1.12)

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(-2,4)$ اور $(2,4)$ ، $(-1,1)$ ، $(1,1)$ ، $(0,0)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدود اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو قطع مکانی³¹ کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکساں سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

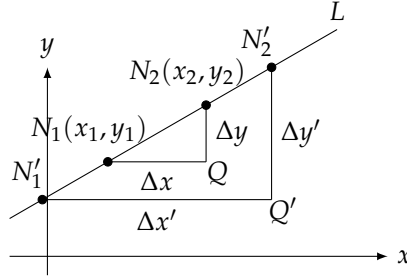
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

کی قیمت ایک جیسی ہوگی (شکل 1.7)۔

تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

parabola³¹



شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N_1'Q'N_2'$ متماثلہ مثلثات ہیں لہذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی ڈھلوان³² کہلاتی ہے۔

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔ مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔ انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لہذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا³³۔ یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

³²slope
³³چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔