

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامسٲٲ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیات اور غلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تیزی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تکلی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تکلی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تعامل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تعامل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تعامل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تعامل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تعامل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629	13.8.1	نتیجہ
1638	13.9	لیگرینج ضاربین
1655	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالکثرت
1663	14.1 دوہرا نکملات
1669	جوابات
1671	ا ضمیمہ اول
1673	ب ضمیمہ دوم
1675	ج ضمیمہ تین
1677	د ضمیمہ چار
1679	ه ضمیمہ پانچ
1681	و ضمیمہ چھ
1683	ز ضمیمہ سات
1685	ح ضمیمہ آٹھ
1687	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 14

تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

14.1 دوہرا تکملات

ہم xy مستوی میں محدود خطہ پر استمراری تفاعل $f(x, y)$ کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دوگنا) تکمل اور باب 5 میں متعارف کردہ ایک گنا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جاسکتی ہے۔

مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل $f(x, y)$ درج ذیل مستطیل خطہ R میں معین ہے۔

$$R : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

ہم تصور میں R پر x اور y محور کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو R کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ ΔS_k میں ایک نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(14.1) \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

اگر پورے R میں f استمراری ہو، تب ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ Δx اور Δy دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے سے مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو R پر f کا دوہرا تکامل¹ کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint_R f(x, y) dS \quad \text{یا} \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(14.2) \quad \iint_R f(x, y) dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات $[a, b]$ اور $[c, d]$ کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات 14.2 میں حد کی قیمت، نا تو رقبات ΔS_k کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر ΔS_k میں نقطہ (x_k, y_k) کے مقام پر منحصر ہو گی۔ انفرادی مجموعات S_n کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کا حد آخر میں وہی ایک ہو گا۔ استمراری f کے لئے اس حد کی وجودیت اور یکتائی کے ثبوت اعلیٰ نصاب میں دیے جاتے ہیں۔ دوہرا تکامل کی وجودیت کے لئے f کا استمرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

دوہرا تکاملات کے خواص

ایک گٹا تکاملات کی طرح، دوہرا تکاملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لئے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

$$ا. \quad \iint_R kf(x, y) dS = k \iint_R f(x, y) dS \quad \text{جہاں } k \text{ کوئی مستقل ہے۔}$$

$$ب. \quad \iint_R (f(x, y) \mp g(x, y)) dS = \iint_R f(x, y) dS \mp \iint_R g(x, y) dS$$

$$ج. \quad \text{اگر } R \text{ پر } f(x, y) \geq 0 \text{ ہو تب } \iint_R f(x, y) dS \geq 0$$

$$د. \quad \text{اگر } R \text{ پر } f(x, y) \geq g(x, y) \text{ ہو تب } \iint_R f(x, y) dS \geq \iint_R g(x, y) dS$$

یہ خواص ایک گٹا تکاملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ 5.6)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

$$ه. \quad \iint_R f(x, y) dS = \iint_{R_1} f(x, y) dS + \iint_{R_2} f(x, y) dS$$

جہاں ایک دوسرے کو نا ڈھانپنے والے مستطیل R_1 اور R_2 خطوں کا مجموعہ (اشتراک) R ہے۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا انکملات بطور حجم

ثابت $f(x, y)$ کی صورت میں ہم مستطیل خطہ R پر f کے دوہرا انکمل کو ٹھوس منشور کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی نچلا سطح R اور بالائی سطح $z = f(x, y)$ ہوگی۔ مجموعہ $S_n = \sum f(x_k, y_k) \Delta S_k$ میں ہر رکن $f(x_k, y_k) \Delta S_k$ ایک انتصابی مستطیلی منشور کا حجم ہوگا جو بنیاد ΔS_k پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینی قیمت ہوگی۔ یوں مجموعہ S_n پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمین ہوگی۔ اس حجم کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(14.3) \quad \text{حجم} = \lim S_n = \iint_R f(x, y) \, dS$$

جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج، باب 6 میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا انکمل کے حصول کا مسئلہ فوبینی

فرض کریں ہم مستوی xy میں مستطیل خطہ $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر مستوی $z = 4 - x - y$ کے نیچے حجم تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ 6.2 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور x کے عمودی نکلیاں لیں تب حجم

$$(14.4) \quad \int_{x=0}^{x=2} S(x) \, dx$$

ہوگا جہاں x پر رقبہ عمودی تراش $S(x)$ ہے۔ ہم x کی ہر قیمت کے لئے درج ذیل مکمل سے $S(x)$ معلوم کر سکتے ہیں

$$(14.5) \quad S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) \, dy$$

جو منحنی $z = 4 - x - y$ کے نیچے، x پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہوگا۔ رقبہ $S(x)$ کے حصول میں x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 14.3 اور مساوات 14.4 کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(14.6) \quad \begin{aligned} \text{حجم} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x) \, dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5 \end{aligned}$$

اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) \, dy \, dx$$

دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ، جسے بار بار تکمل² کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے x کو مستقل رکھتے ہوئے y کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں اور اس کے بعد y کو مستقل رکھتے ہوئے، x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔

اگر ہم محور y کے عمودی نکلیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا۔ ایسی صورت میں ایک علامتی عمودی تراش رقبہ، y کا تفاعل ہو گا:

$$(14.7) \quad S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y$$

یوں پورے جسم کا حجم

$$(14.8) \quad \text{جَم} = \int_{y=0}^{y=1} S(y) dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y) dy = \left[6y - y^2 \right]_0^1 = 5$$

ہو گا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$\text{جَم} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dx dy$$

لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے y کو مستقل رکھتے ہوئے x کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔ اس کے بعد x کو مستقل رکھتے ہوئے x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں۔ اس بار ہم بار بار تکمل کے حصول میں پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں جو مساوات 14.6 میں تکمل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر درج ذیل دوہرا تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint_R (4 - x - y) dS$$

اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں تکمل اس دوہرا تکمل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبینی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا تکمل، کسی بھی ترتیب سے، بار بار تکمل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ (جناب فوبینی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

مسئلہ 14.1: مسئلہ فوینی (پہلا روپ)

اگر مستطیل خطہ $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ پر $f(x, y)$ استمراری ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

مسئلہ فوینی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا انکمل کی قیمت بار بار انکمل سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں دوہرا انکمل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے لحاظ سے انکمل لے سکتے ہیں۔

مسئلہ فوینی مزید کہتا ہے کہ دوہرا انکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بار بار انکمل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کار آمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم جلد ایک مثال میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم x محور یا y محور کے عمودی سطحیں لے کر نکالیں گے۔

مثال 14.1: خطہ $R : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ میں $f(x, y) = 1 - 6x^2y$ کے دوہرا انکمل $\iint_R f(x, y) dS$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: مسئلہ فوینی کے تحت درج ذیل ہو گا:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dS &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 [x - 2x^3y]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = [2y - 8y^2]_{-1}^1 = 4 \end{aligned}$$

انکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy dx &= \int_0^2 [y - 3x^2y^2]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 [(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)] dx = \int_0^2 2 dx = 4 \end{aligned}$$

□

آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا انکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسا³ میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

میکسا احکامات

درکار دوہرا انکمل

integrate(integrate(x² * y, x), y);

$\int \int x^2 y dx dy$

integrate(integrate(x * cos(y), x, 0, 1), y, -%pi/3, %pi/4);

$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \int_0^1 x \cos y dx dy$

wxMaxima³

محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا کھمبات

محدود غیر مستطیل خطہ پر تفاعل $f(x, y)$ کا دوہرا مکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی R پر مستطیل جال بچھاتے ہیں لیکن جزوی مجموعہ میں صرف ان چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہوں۔ ہم ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ ΔS_k میں کوئی نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

اس مجموعہ میں اور مستطیل خطہ پر مجموعہ (مساوات 14.1) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام ΔS_k مل کر خطہ R کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے ہیں۔ البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو، S_n میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور R کا زیادہ سے زیادہ حصہ S_n میں شامل ہو گا۔ اگر f استمراری ہو اور R کی سرحد، متغیر x کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل اور (یا) متغیر y کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کی ترسیمات، ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر متوازنہ طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ S_n کا حد موجود ہو گا۔ ہم اس حد کو R پر f کا دوہرا مکمل کہتے ہیں:

$$\iint_R f(x, y) dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum f(x, y_k) \Delta S_k$$

یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

غیر مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کے دوہرا کھمبات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا کھمبات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی ہے کہ اگر R کو ایسے دو خطوں R_1 اور R_2 میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R f(x, y) dS = \iint_{R_1} f(x, y) dS + \iint_{R_2} f(x, y) dS$$

ہم R پر استمراری اور مثبت f کی صورت میں R اور $z = f(x, y)$ کے بیچ ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی $\iint_R f(x, y) dS$ کرتے ہیں۔

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

