احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

5.9 اعدادی تکمل

ہم نے دیکھا کہ $f(x)$ کے الٹ تفرق $F(x)$ کے کلیہ سے قطعی تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $F(b)-F(a)$ حاصل کی جا سکتی ہے۔ بعض اوقات الٹ تفرق معلوم کرنا مشکل ہوتا ہے بلکہ بعض تفاعل، مثلاً $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم یہ نہیں کہہ رہے ہیں کہ $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کے کلیات اب تک کوئی حاصل کرنے میں کامیاب نہیں ہوا بلکہ ہم کہہ رہے ہیں کہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ان تفاعل کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

ہم جب بھی قطعی تکمل کی قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کرنے میں ناکام ہوں، ہم اعدادی تراکیب، مثلاً قاعدہ ذوزنقہ یا قاعدہ سمسن بروئے کار لاتے ہیں جن پر اس حصہ میں غور کیا جائے گا۔

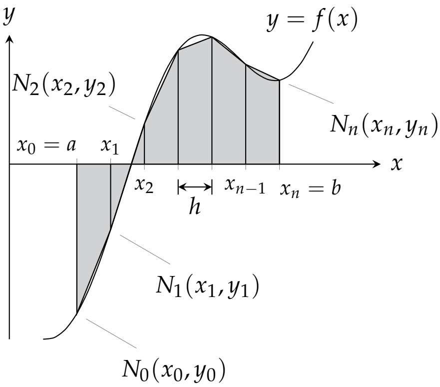
5.10 قاعدہ ذوزنقہ

جب کسی تفاعل جس کی قطعی تکمل کی قیمت درکار ہو کے متکمل f کا الٹ تفرق ہم دریافت نہ کر سکیں تب ہم تکمل کے وقفہ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ پر f کو تخمیناً موزوں کثیر رکنی سے ظاہر کر کے ان کثیر رکنیوں کا تکمل لے کر تمام جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں جو تکمل کی تخمینی قیمت کے برابر ہو گا۔ کسی بھی خانہ بندی کے لئے جتنی زیادہ درجے کے کثیر رکنی منتخب کی جائیں حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ کسی بھی درجے کی کثیر رکنی کے لئے جتنی باریک خانہ بندی کی جائے حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا حتٰی کے ہم پور و پور خلل یا حذفی خلل اتنا بڑھ جائے کہ مزید باریک خانہ بندی سے حاصل جواب کی درستگی کم ہونا شروع ہو جائے۔

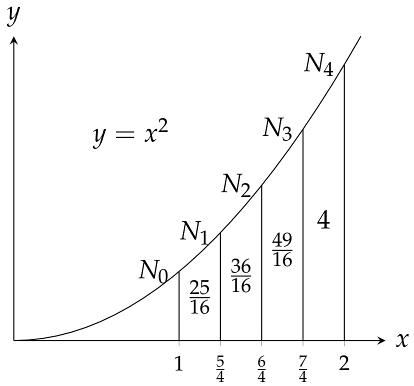
کم درجے کی کثیر رکنی سے بھی اچھے نتائج حاصل ہوتے ہیں بلکہ مستقیم قطعات (درجہ 1 کثیر رکنی) بھی بہترین تخمین دیتے ہیں پس ان کی تعداد کافی ہونی چاہیے۔ اس کی وجہ سمجھنے کے لئے فرض کریں ہم f کے وقفہ $[a,b]$ کو $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n قطعات میں تقسیم کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑتے ہیں (شکل 5.64)۔ لمبائی $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ کو لمبائی قدم[32] کہتے ہیں جس کو یہاں Δx کی بجائے h سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ n قدموں[33] کی تعداد ہے۔ ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں سے تقسیمی نقطوں تک انتصابی لکیریں کھینچنے سے متعدد ذوزنقہ حاصل ہوتے ہیں جو منحنی اور x محور کے بیچ خطہ کی تخمین ہوں گے۔ ہم ان ذوزنقہ کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں جہاں x محور سے اوپر رقبہ کو مثبت جبکہ اس سے نیچے رقبہ کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(y_0+y_1)h + \frac{1}{2}(y_1+y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h \\
&= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\
&= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)
\end{aligned}$$

[32] step size
[33] steps



شکل 5.64: ذوزنقہ قاعدہ برائے اعدادی تکمل۔



شکل 5.65: ذوزنقہ قاعدہ تفاعل $y = x^2$ کا رقبہ کچھ زیادہ دیتا ہے۔

یہاں $y_0 = f(a)$ ، $y_1 = f(x_1)$ ، $\cdots$ ، $y_{n-1} = f(x_{n-1})$ اور $y_n = f(x_n)$ ہیں۔

قاعدہ 5.1: ذوزنقہ قاعدہ
تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کو تخمیناً درج ذیل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (جہاں n ذیلی وقفوں کی لمبائی قدم $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $y_k = f(x_k)$ ہے)۔

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{5.34}$$

مثال 5.51: تکمل $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ کو ذوزنقہ قاعدہ سے $n = 4$ لے کر حل کریں۔ اصل رقبہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

حل: ہم وقفہ $[1, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک وقفہ کی لمبائی $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ہو گی۔ ان ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں پر تفاعل $y = x^2$ کی قیمت درج ذیل ہے۔

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

اب $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.34 استعمال کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \\
&= \frac{1}{8}(1 + 2(\tfrac{25}{16}) + 2(\tfrac{36}{16}) + 2(\tfrac{49}{16}) + 4) = \frac{75}{32} \\
&= 2.343\,75
\end{aligned}
$$

تکمل کی اصل قیمت درج ذیل ہے۔

$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.\bar{3}$$

یہاں تخمینی قیمت اصل قیمت سے زیادہ ہے۔ در حقیقت تمام ذوزنقے مطابقتی خطہ میں کچھ زیادہ رقبہ گھیرتا ہے (شکل 5.65)۔ $\square$

ذوزنقہ تخمین میں قابو خلل

مختلف تفاعل کے ترسیم کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لمبائی قدم h کم کرنے سے چونکہ ذوزنقہ تفاعل پر بہتر بیٹھتا ہے لہٰذا ذوزنقہ تخمین میں خلل

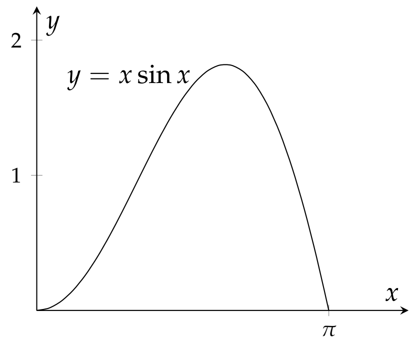
$$E_T = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T \tag{5.35}$$

کم ہو گی۔اعلٰی احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر f کا دہرا تفرق استمراری ہو تب یقینی طور پر ایسا ہی ہو گا۔

ذوزنقہ قاعدہ میں اندازہ خلل
اگر f'' استمراری ہو اور $[a,b]$ پر $|f''|$ کی قیمت کی بالائی حد بندی M ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} h^2 M \tag{5.36}$$

اگرچہ نظریہ کہتا ہے کہ ہر صورت M کی کم ترین قیمت پائی جائے گے عموماً حقیقت میں یہ قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم عام طور پر M کی بہتر سے بہتر اندازاً قیمت معلوم کر کے اسی سے $|E_T M|$ حاصل کرتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا اچھا نہیں لگتا ہے لیکن یہ طریقہ چلتا ہے۔ کسی بھی M کے لئے $|E_T|$ کی قیمت کم کرنے کی خاطر ہم h کو چھوٹا کرتے ہیں۔



شکل 5.66: منکمل برائے مثال 5.53

مثال 5.52: تکمل $\int_1^2 x^2\,dx$ کی تخمینی قیمت مثال 5.51 میں حاصل کی گئی۔ اس تخمینی قیمت میں خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

حل: وقفہ $1 \le x \le 2$ پر $f(x) = x^2$ کا دہرا تفرق $f''(x) = 2$ ہے جس کی قیمت اٹل ہے لہٰذا ہم $M = 2$ لے سکتے ہیں۔اب $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ سے مساوات 5.36 درج ذیل دیتی ہے۔

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}h^2M = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2(2) = \frac{1}{96}$$

ہم $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$ سے $T = \frac{75}{32}$ منفی کر کے یہی خلل $\left|-\frac{1}{96}\right| = \left|\frac{7}{3} - \frac{75}{32}\right|$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں ہم خلل کی بالکل درست مطلق قیمت حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ ایسا ہر بار نہیں ہو گا۔ □

مثال 5.53: ذوزنقہ قاعدہ میں $n = 10$ قدم لیتے ہوئے درج ذیل تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں (شکل 5.66)۔

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

حل: $a = 0$ ، $b = \pi$ اور $h = \frac{\pi - 0}{10}$ سے

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12}h^2M = \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2M = \frac{\pi^3}{1200}M$$

ملتا ہے جہاں $[0, \pi]$ پر $f(x) = x\sin x$ کے دہرا تفرق کی کوئی بھی بالائی حد بندی ہو سکتی ہے۔چونکہ

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left|f''(x)\right| &= |2\cos x - x\sin x| \\
&\le 2|\cos x| + |x||\sin x| && \text{تکونی عدم مساوات } |a+b| \le |a| + |b| \\
&\le 2\cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi && |\sin x| \text{ اور } |\cos x| \text{ ایک سے بڑھ نہیں سکتے ہیں}
\end{aligned}$$

ہم $M = 2 + \pi$ لیتے ہیں۔ یوں

$$|E_T| \le \frac{\pi^3}{1200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133 \qquad \text{بطور حفاظت اوپر کو پورا کیا گیا ہے}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا خلل کسی صورت بھی 0.133 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ زیادہ درست جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم M کی بہتر قیمت تلاش کرنے کی بجائے زیادہ قدم لیں گے، مثلاً $n = 100$ قدم لیتے ہوئے $h = \frac{1\pi}{100}$ ہو گا جس سے خلل کم ہو کر درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$|E_T| \le \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{100}\right)^2 M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{120\,000} < 0.001\,33 = 1.33 \times 10^{-3}$$

□

مثال 5.54: جیسا ہم باب میں دیکھیں گے $\ln 2$ کی قیمت درج ذیل تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

ذوزنقہ قاعدہ سے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے خلل کو 10^{-4} سے کم رکھنے کی خاطر ہمیں کتنے قدم منتخب کرنے ہوں گے۔

حل: قدموں کی تعداد n یعنی ذیلی وقفوں کی تعداد منتخب کرنے کی خاطر ہم مساوات 5.36 بروئے کار لاتے ہیں۔یوں

$$b - a = 2 - 1 = 1, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

سے

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} h^2 \left|f''(x)\right|_{\text{بلندتر}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \left|\frac{2}{x^3}\right|_{\text{بلندتر}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وقفہ $[1,2]$ پر بلندتر $\left|f''\right|$ درکار ہے۔

یہ وہ شاذونادر موقع ہے جب ہم $|f''|$ بلند تر کی ٹھیک ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ وقفہ $[1,2]$ پر $y = \frac{2}{x^3}$ کی قیمت $y = 2$ سے گھٹ کر $y = \frac{1}{4}$ ہوتی ہے۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

ہو گا لہٰذا خلل کی مطلق قیمت 10^{-3} سے تب کم ہو گی جب $\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$ ہو جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6n^2} &< 10^{-4} \\
\frac{10^4}{6} &< n^2 && \text{دونوں اطراف کو } 10^4 n^2 \text{ سے ضرب کریں} \\
\frac{100}{\sqrt{6}} &< |n| && \text{جذر لیں} \\
\frac{100}{\sqrt{6}} &< n && n \text{ مثبت ہے} \\
40.83 &< n && \text{حفاظتی طور پر اوپر کو پورا کیا گیا ہے۔}
\end{aligned}$$

عدد 40.83 سے بڑا پہلا عدد صحیح 41 ہے۔ یوں $n = 41$ یا اس سے بھی زیادہ ذیلی وقفے لیتے ہوئے ذوزنقہ ترکیب سے $\ln 2$ کی قیمت میں خلل کو یقینی طور پر 10^{-4} سے کم رکھا جا سکتا ہے۔ $\square$

سمسن قاعدہ

قاعدہ سمسن میں $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے حصول میں f کو مستقیم خطوط کی بجائے دو رتبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم ترسیم کو سیدھی لکیروں کی بجائے قطع مکافی قوسین سے ظاہر کرتے ہیں۔

رتبی کثیر رکنی $y = Ax^2 + Bx + C$ کا $x = -h$ تا $x = h$ تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} \\
&= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch \\
&= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)
\end{aligned}$$

کثیر رکنی کی مساوات سے

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

لکھے جا سکتے ہیں جن سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} C &= y_1 \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1 \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1 \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1 \end{aligned}$$

یوں حاصل تکمل میں C اور $2Ah^2$ کی قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}[(y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

یعنی

$$\int_{-h}^{h} f(Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{5.37}$$

ملتا ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کو برابر لمبائی کی جفت تعداد کی ذیلی وقفوں میں میں تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.37 کو یک بعد دیگرے ذیلی وقفوں کی جوڑیوں پر لاگو کر کے ان کا مجموعہ لینے سے قاعدہ سمسن حاصل ہو گا۔

قاعدہ سمسن
تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کا تخمین حاصل کرنے کے لئے درج ذیل استعمال کریں جو قاعدہ سمسن[34] کہلاتا ہے۔

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{5.38}$$

y کی قیمتیں نقطہ خانہ بندی

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \cdots,\ x_{n-1} = a + (n-1)h,\ x_n = b$$

پر لیے جاتے ہیں جہاں n جفت اور $h = \frac{b-a}{n}$ ہے۔

[34] Simpson's rule

قاعدہ سمسن میں قابو خلل

قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار

$$E_S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S \tag{5.39}$$

لمبائی قدم گھٹانے سے کم ہوتی ہے (جیسا قاعدہ ذوزنقہ بھی ہوتا ہے) البتہ قاعدہ سمسن میں خلل قابو کرنے کے لئے درکار عدم مساوات میں f کے چار بار تفرق کا استمراری ہونا ضروری ہے۔ اس بار بھی قابو خلل کا کلیہ اعلٰی احصاء دیتی ہے:

قاعدہ سمسن میں اندازاً خلل
اگر $[a,b]$ میں $f^{(4)}$ استمراری ہو اور $\left|f^{(4)}\right|$ کی بالائی حد بندی کی کوئی ایک قیمت M ہو تب مطلق خلل درج ذیل ہو گی۔

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180}h^4 M \tag{5.40}$$

قاعدہ ذوزنقہ کی طرح ہم یہاں بھی عموماً M کی کم سے کم قیمت دریافت نہیں کر پائیں گے۔ ہم M کی کوئی موزوں قیمت تلاش کر کے اسی کو استعمال کرتے ہوئے $|E_S|$ کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 5.55: درج ذیل تکمل کو قاعدہ سمسن سے حل کرتے ہوئے $n=4$ لیں۔

$$\int_0^1 5x^4\,\mathrm{d}x$$

اس تخمین میں مساوات 5.40 کے تحت خلل اندازاً کتنی ہو گی؟

حل: ہم وقفہ تکمل کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کر کے تقسیمی نقطوں پر متکمل $f(x)=5x^4$ کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	0	$\frac{5}{256}$	$\frac{80}{256}$	$\frac{405}{256}$	5

ہم $n=4$ اور $h=\frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.38 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4) \\ &= \frac{1}{12}\left[0+4\left(\frac{5}{256}\right)+2\left(\frac{80}{256}\right)+4\left(\frac{405}{256}\right)+5\right] \approx 1.002\,60 \end{aligned}$$

خلل جاننے سے پہلے ہمیں وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x) = 5x^4$ کے چار بار تفرق $f^{(4)}$ کی بالائی حد بندی کی ایک قیمت M چاہیے۔ چونکہ $f^{(4)}(x) = 120$ مستقل ہے لہٰذا ہم بلا خطر $M = 120$ لے سکتے ہیں۔ یوں $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.40 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$|E_S| \leq \frac{b-1}{180}h^4 M = \frac{1}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 (120) = \frac{1}{384} < 0.002\,61$$

□

کونسا قاعدہ بہتر نتائج دیتا ہے؟

قابو خلل کے کلیات

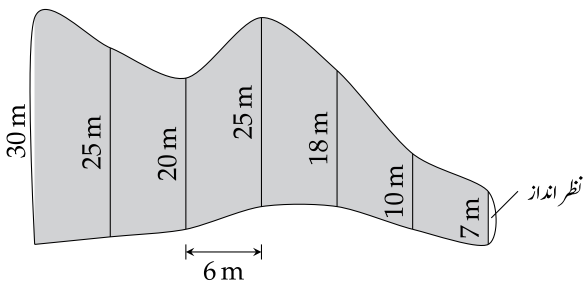
$$|E_T| \leq \frac{b-1}{12}h^2 M, \quad |E_S| \leq \frac{b-a}{180}h^4 M$$

سے یہ جانا جا سکتا ہے کہ کونسا کلیہ بہتر نتیجہ دیگا جہاں بائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f''|$ کی بالائی حد بندی ہے جبکہ دائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f^{(4)}|$ کی بالائی حد بندی ہے۔ اس کے علاوہ قاعدہ سمسن میں جزو $\frac{b-a}{180}$ قاعدہ ذوزنقہ میں جزو $\frac{b-a}{12}$ سے 15 گنّا کم ہے۔ مزید قاعدہ سمسن میں h^4 جبکہ قاعدہ ذوزنقہ میں h^2 استعمال ہوتا ہے۔ یوں اگر $h = \frac{1}{10}$ ہو تب $h^2 = \frac{1}{100}$ جبکہ $h^4 = \frac{1}{10000}$ ہو گا۔ اس طرح اگر دونوں M کی قیمت 1 اور $b - a = 1$ ہوں تب $h = \frac{1}{10}$ کی صورت میں درج ذیل ہوں گے۔

$$|E_T| \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{1200}$$
$$|E_S| \leq \frac{1}{180}\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 1 = \frac{1}{1\,800\,000} = \frac{1}{1500} \cdot \frac{1}{1200}$$

ایک جتنی حسابی کوشش سے اس مثال میں قاعدہ سمسن بہت بہتر نتیجہ دیتا ہے۔

h^4 بالمقابل h^2 وہ اجزاء ہیں جن پر نظر رکھنی چاہیے۔ اگر h کی قیمت 1 سے کم ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت کم ہو گی۔ اگر h کی قیمت 1 ہو تب $h^4 = h^2$ ہو گا۔ اگر h کی قیمت 1 سے زیادہ ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت زیادہ ہو گی۔ ان آخری دو صورتوں میں قابو خلل کلیات ہمیں زیادہ مدد فراہم نہیں کر سکتے ہیں اور ہمیں $y = f(x)$ کی منحنی کو دیکھ کر فیصلہ کرنا ہو گا کہ قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ میں سے کونسا قاعدہ بہتر نتیجہ (اگر دیتا ہو) دیگا۔



شکل 5.67: گندے پانی کا تالاب۔ افقی فاصلے 6 m ہیں (مثال 5.56)۔

اعدادی مواد کے ساتھ کام

تجربہ گاہ میں پیمائش سے حاصل قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے قاعدہ سمسن کے ذریعہ ایسے تفاعل کے تکمل کی قیمت کو اگلے مثال میں حاصل کیا جائے گا جس کا کلیہ ہم نہیں جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ ذوزنقہ کو بھی اسی طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 5.56: ایک شہر میں گندے پانی کا تالاب پایا جاتا ہے جس کو بھرنا مقصود ہے۔یہ تالاب 2.5 m گہرا ہے (شکل 5.67)۔ تالاب سے پانی کی نکاسی کرنے کے بعد اس کو مٹی سے بھرا جائے گا۔ کتنی مٹی درکار ہو گی؟

حل: تالاب کا حجم جاننے کے لئے ہم اس کا سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیں گے۔ سطحی رقبہ کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہیں جہاں $h = 6\,\mathrm{m}$ ہے جبکہ y کی قیمتوں کو تالاب پر ناپا گیا ہے (شکل 5.67)۔

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \\ &= \frac{6}{3}(30 + 100 + 40 + 100 + 36 + 40 + 7) = 706 \end{aligned}$$

سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیتے ہوئے تقریباً $1765\,\mathrm{m}^3$ حجم حاصل ہوتا ہے۔ □

پور و پور خلل

اگرچہ لمبائی قدم h کم کرنے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار کم ہو گی، حقیقت میں بعض اوقات اس کے برعکس بھی ہوتا ہے۔جب h کی قیمت بہت کم ہو، مثلاً $h = 10^{-5}$ ، تب S اور T کی حساب میں پور و پور خلل اتنا بڑھ سکتا ہے کہ نتائج میں بہتری کی بجائے خرابی پیدا ہو سکتی ہے۔ایسی صورت میں آپ کلیات خلل، جو پور و پور خلل کو جاننے سے قاصر ہیں، پر بھروسہ نہیں کر سکتے ہیں۔ لمبائی قدم h کو کسی خاص قیمت سے کم کرنے سے حقیقتاً نتائج خراب ہو سکتے ہیں۔ اس کتاب میں ایسی صورت حال پیدا نہیں ہو گی۔ اگر آپ کو ایسی صورت حال کا سامنا ہو، بہتر ہو گا کہ آپ اعدادی تراکیب پر لکھی گئی کسی کتاب کا سہارا لیں۔

سوالات

تکمل کی قیمت کا اندازہ

سوال 1 تا سوال 10 میں دو جزو پائے جاتے ہیں۔ایک جزو قاعدہ ذوزنقہ اور دوسرا جزو قاعدہ سمسن کے لئے ہے۔

1. قاعدہ ذوزنقہ

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.36 سے خلل $|E_T|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. تکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.35 سے $|E_T|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_T|$ کو اصل تکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

2. قاعدہ سمسن

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.40 سے خلل $|E_S|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. تکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.39 سے $|E_S|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_S|$ کو اصل تکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 1: $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$

سوال 2: $\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x$

سوال 3: $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$

سوال 4: $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,\mathrm{d}x$

سوال 5: $\int_0^2 (t^3+t)\,\mathrm{d}t$

سوال 6: $\int_{-1}^1 (t^3+1)\,\mathrm{d}t$

سوال 7: $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s$

سوال 8: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,\mathrm{d}s$

سوال 9: $\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$

سوال 10: $\int_0^1 \sin \pi t\,\mathrm{d}t$

سوال 11 تا سوال 14 میں (ا) قاعدہ ذوزنقہ، (ب) قاعدہ سمسن استعمال کرتے ہوئے دی گئی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے آٹھ قدم $n = 8$ کے لئے تکمل حل کریں۔ اپنے جواب کو 5 اعشاریہ درستگی تک پور و پور کریں۔ (ج) اس کے بعد تکمل کی اصل قیمت حاصل کریں اور خلل $|E_T|$ کو مساوات 5.35 اور خلل $|E_S|$ کو مساوات 5.39 سے حاصل کریں۔

سوال 11: $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$x\sqrt{1-x^2}$	0.0	0.12402	0.24206	0.34763	0.43301	0.48789	0.49608	0.42361	0

سوال 12: $\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}\,\mathrm{d}\theta$

θ	0	0.375	0.75	1.125	1.5	1.875	2.25	2.625	3.0
$\frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}$	0.0	0.09334	0.18429	0.27075	0.35112	0.42443	0.49026	0.58466	0.6

سوال 13: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

t	−1.5708	−1.1781	−0.7854	−0.3927	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708
$\frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}$	0.0	0.99138	1.26906	1.05961	0.75	0.48821	0.28946	0.13429	0

سوال 14: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y)\sqrt{\cot y}\,\mathrm{d}y$

y	0.78540	0.88357	0.98175	1.07992	1.17810	1.27627	1.37445	1.47262	1.57080
$(\csc^2 y)\sqrt{\cot y}$	2.0	1.51606	1.18237	0.93998	0.75402	0.60145	0.46364	0.31688	0

ذیلی وقفوں کی کم سے کم تعداد

سوال 15 تا سوال 26 میں خلل کی مقدار 10^{-4} سے کم مطلوب ہے۔ (ا) قاعدہ ذوزنقہ اور (ب) قاعدہ سمسن استعمال کریں۔ مساوات 5.36 اور مساوات 5.40 کی مدد سے ذیلی وقفوں کی درکار تعداد تلاش کریں۔ (سوال 15 تا سوال 22 در حقیقت سوال 1 تا سوال 8 ہیں۔)

سوال 15: $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$

سوال 16: $\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x$

سوال 17: $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$

سوال 18: $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,\mathrm{d}x$

سوال 19: $\int_0^2 (t^3+t)\,\mathrm{d}t$

سوال 20: $\int_{-1}^1 (t^3+1)\,\mathrm{d}t$

سوال 21: $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s$

سوال 22: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,\mathrm{d}s$

سوال 23: $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

سوال 24: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

سوال 25: $\int_0^2 \sin(x+1)\,\mathrm{d}x$

سوال 26: $\int_{-1}^1 \cos(x+\pi)\,\mathrm{d}x$

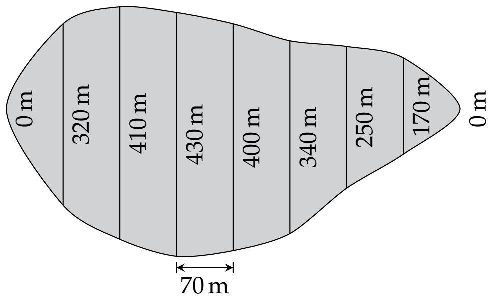
عملی استعمال

سوال 27: آپ کے شہر میں ایک جھیل ہے جس کی اوسط گہرائی $7\,\mathrm{m}$ ہے جبکہ اس کا سطحی رقبہ شکل 5.68 میں دکھایا گیا ہے۔ ماہی گیری کے موسم کی شروع میں اوسطاً فی $9\,\mathrm{m}^3$ ایک مچھلی پائی جاتی ہے۔ماہی گیری کے ایک اجازت نامہ پر اوسطاً فی موسم 20 مچھلیاں شکار کی جاتی ہیں۔ موسم کے اختتام پر جھیل میں پہلے دن کے لحاظ سے $25\,\%$ مچھلی باقی رہنا ضروری ہے۔ ماہی گیری کے موسم میں کتنے اجازت نامے منظور کیے جا سکتے ہیں؟ ترکیب سمسن استعمال کریں۔

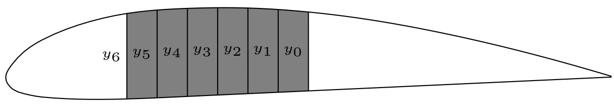
جواب: 4873

سوال 28: جہاز کا ہوائی پترا[35] شکل 5.69 میں دکھایا گیا ہے جس میں $25\,000\,\mathrm{L}$ تیل کی ٹینکی واضح ہے۔ تیل کی کثافت $0.708\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$ ہے۔ درج ذیل معلومات دی گئی ہیں جن کے بیچ افقی فاصلہ $30\,\mathrm{cm}$ ہے۔تیل کی ٹینکی کی لمبائی تلاش کریں۔

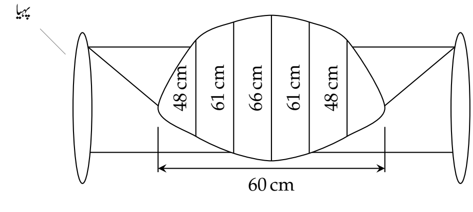
$$y_0 = 45\,\mathrm{cm},\ y_1 = 48\,\mathrm{cm},\ y_2 = 54\,\mathrm{cm},\ y_3 = 57\,\mathrm{cm},\ y_4 = 60\,\mathrm{cm},\ y_5 = y_6 = 63\,\mathrm{cm}$$



شکل 5.68: جھیل برائے سوال 27



شکل 5.69: ہوائی پترا



شکل 5.70: شمسی گاڑی برائے سوال 29

سوال 29: شمسی چادر سے حاصل برقی طاقت سے چلنے والی گاڑی کا رقبہ عمودی تراش شکل 5.70 میں دکھایا گیا ہے۔ہوائی مزاحمت کا کچھ حصہ رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا کوشش کی جاتی ہے کہ رقبہ عمودی تراش کو کم سے کم رکھا جائے۔ اس گاڑی کا رقبہ عمودی تراش قاعدہ سمسن سے دریافت کریں۔

جواب: $2973\,\mathrm{cm}^2$

سوال 30: ایک گاڑی ساکن حالت سے روانہ ہو کر $130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ تک $37.1\,\mathrm{s}$ میں پہنچ پاتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت درج ذیل ہے۔

$\mathrm{km\,h^{-1}}$	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
s	0	2.2	3.2	4.5	5.9	7.8	10.2	12.7	16	20.6	26.2	37.1

اس رفتار تک پہنچتے ہوئے گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟

نظریہ اور مثالیں
سوال 31: کم درجی کثیر رکنیاں
تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ میں خلل

$$|E_T| = \frac{b-a}{12}h^2\left|f''(c)\right|$$

ہے جہاں وقفہ $[a,b]$ میں c (عموماً نا معلوم) نقطہ ہے۔اگر f متغیر x کا خطی تفاعل ہو تب $f''(c)=0$ لہٰذا $E_T=0$ ہو گا اور کسی بھی h کے لئے تکمل کی اصل قیمت T ہو گی۔ یہ تعجب کی بات نہیں ہے چونکہ خطی تفاعل کی صورت میں ترسیم کو تخمینی طور پر ظاہر کرنے والے قطعات ترسیم پر ٹھیک بیٹھیں گے۔ تعجب کی بات سمسن خلل

$$|E_S| = \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(c)\right|$$

ہے جو درجہ چار سے کم کثیر رکنی f کی صورت میں ہر c کے لئے $f^{(4)}(c)=0$ کی بنا $E_S=0$ ہو گا اور یوں اگر ہم صرف دو قدم بھی استعمال کریں تب بھی S تکمل کی اصل قیمت ہو گی۔ یہ دیکھنے کی خاطر $n=2$ لیتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت قاعدہ سمسن سے تلاش کر کے تکمل کی اصل قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x$$

aerofoil[35]

سوال 32: تفاعل سائن تکمل کی قابل استعمال قیمتیں
تفاعل سائن تکمل

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \qquad x \text{ کا سائن تکمل}$$

ان تفاعل میں سے ایک ہے جنہیں بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہے۔ تفاعل $\frac{\sin t}{t}$ کے الٹ تفرق کا کلیہ نہیں پایا جاتا ہے البتہ اعدادی تراکیب سے $\operatorname{Si}(x)$ کی قیمتیں با آسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔

اگرچہ تکمل سائن لکھتے ہوئے یہ حقیقت بظاہر نظر نہیں آتی ہے در حقیقت ہم درج ذیل تفاعل کا تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

جو $\frac{\sin t}{t}$ کی وقفہ $[0, x]$ تک استمراری توسیع ہے۔ اس تفاعل کی دائرہ کار کے ہر نقطہ پر تفاعل کے ہر رتبہ کے تفرق پائے جاتے ہیں۔ اس کا ترسیم ہموار ہے (شکل 5.71) اور ہم قاعدہ سمسن سے بہترین نتائج توقع کرتے ہیں۔

ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ پر $\left|f^{(4)}\right| \leq 1$ ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $n = 4$ لیتے ہوئے درج ذیل کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہوئے خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

$$\operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

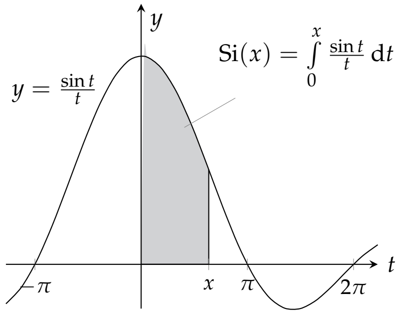
ب. $n = 4$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے $\operatorname{Si}(\pi/2)$ حاصل کریں۔

ج. جزو-ا میں خلل کو جزو-ب میں قیمت کا فی صد لکھیں۔

سوال 33: خلل کی حد بندی مساوات 5.36 اور مساوات 5.40 دیتی ہیں۔ حقیقت میں قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمسن کے نتائج اس سے بہتر ہوں گے۔ مثال 5.53 میں $\int_0^{\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$ کی اندازاً قیمت کو قاعدہ ذوزنقہ سے حاصل کیا گیا۔

ا. قاعدہ ذوزنقہ میں $n = 10$ لیتے ہوئے تکمل کو دوبارہ حل کریں۔

ب. تکمل کی اصل قیمت π اور آپ کے حاصل کردہ جواب میں فرق دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ مثال 5.53 میں $n = 10$ کے لئے حاصل خلل 0.133 سے موجودہ خلل بہت کم ہے۔



شکل 5.71: تفاعل سائن تکمل (سوال 32)

ج. ہم $[0, \pi]$ پر $|f''(x)| = |2\cos x - x\sin x|$ کی بہتر حد بندی معلوم کر کے مثال 5.53 میں $|E_T|$ کی بالائی حد بندی کو 0.133 سے بہتر بنا سکتے ہیں۔ $|f''(x)|$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطہ کو بڑا کرتے ہوئے بہتر بالائی حد بندی دریافت کر کے اس کو بطور M لے کر $|E_T|$ کی بہتر قیمت تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-ا میں حاصل نتیجہ اس سے بھی بہتر ہو ہے۔

سوال 34:

ا. دکھائیں کہ $f(x) = x\sin x$ کا چار بار تفرق $f^{(4)} = -4\cos x + x\sin x$ ہے۔ کمپیوٹر پر اس کو وقفہ $[0, \pi]$ پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطہ کو بڑا کر کے اس کی بالائی حد بندی دیکھ کر دریافت کریں۔

ب. جزو-ا میں حاصل قیمت کو M لے کر قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لیتے ہوئے درج ذیل تکمل حاصل کرنے میں خلل کی بالائی حد بندی کو مساوات 5.40 سے حاصل کریں۔

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

ج. قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لے کر $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ کی قیمت حاصل کریں۔

د. تکمل کی اصل قیمت π اور جزو-ج میں حاصل جواب میں فرق کو 6 اعشاریہ درستگی تک لکھیں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-ب میں حاصل خلل کافی درست ہے۔

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم