احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 5

تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

5.1 غیر قطعی تکملات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق $f(x)$ سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق f ہے۔ ان تفاعل کو f کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو f کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمل

تعریف: تفاعل $f(x)$ کا الٹ تفرق تب $F(x)$ ہو گا جب f کے دائرہ کار میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

f کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ x کے لحاظ سے f کا غیر قطعی تکمل[1] ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

علامت $\int$ کو علامت تکمل کہتے ہیں۔ تفاعل f کو متکمل[2] اور x کو تکمل کا متغیر[3] کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل f کے حاصل کردہ الٹ تفرق F اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکملی علامتیت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{5.1}$$

مستقل C کو تکمل کا مستقل[4] یا اختیاری مستقل[5] کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " x کے لحاظ سے تفاعل f کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$ ہے۔" $F(x) + C$ کے حصول کو f کے تکمل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1: $\int 2x\,\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔
حل:

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$

$2x$ کا الٹ تفرق x^2 ہے اور C تکمل کا مستقل ہے۔کلیہ $x^2 + C$ تفاعل $2x$ کے تمام تفرقات دیتا ہے۔یوں $x^2 + 1$ ، $x^2 - \pi$ اور $x^2 + \sqrt{2}$ تفاعل $2x$ کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔جدول 5.1 میں غیر قطعی تکملات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

---

[1] indefinite integral
[2] integrand
[3] variable of integration
[4] constant of integration
[5] arbitrary constant

جدول 5.1: تکمل کے کلیات

	غیر قطعی تکمل	تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے
1.	$\int x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,\ n$ ناطق	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$
	$\int \mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C$ (خصوصی صورت)	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$
2.	$\int \sin kx \,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{\cos kx}{k}) = \sin kx$
3.	$\int \cos kx \,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sin kx}{k}) = \cos kx$
4.	$\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \sec^2 x$
5.	$\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cot x) = \csc^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$
7.	$\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\csc x) = \csc x \cot x$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں $n = 5$ لیتے ہوئے:

$$\int x^5 \,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں $n = -\frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں $k = 2$ لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں $k = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}} + C = 2\sin\frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق متکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x + \cos x + C) = x\cos x + \sin x - \sin x + 0 = x\cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی تکمل کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ: (k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$
2. منفی کے لئے قاعدہ: (قاعدہ 1 میں $k=-1$ لیا گیا ہے۔)	$\int -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x) \mp g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

ا. ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب kf کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق ضرب k کے برابر ہو۔

ب. بالخصوص ایک تفاعل اس صورت $-f$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔

ج. ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق $f \mp g$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق اور g کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکملی علامتیت میں لکھنے سے غیر قطعی تکمل کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: تکمل کا مستقل

$$\begin{aligned}
\int 5\sec x\tan x\,\mathrm{d}x &= 5\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x && \text{جدول 5.2، قاعدہ 1}\\
&= 5(\sec x + C) && \text{جدول 5.1، کلیہ 6}\\
&= 5\sec x + 5C && \text{غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت}\\
&= 5\sec x + C' && \text{مستقل } 5C \text{ کو مستقل } C' \text{ لکھا گیا ہے}\\
&= 5\sec x + C && C' \text{ ایک مستقل ہے جس کو ہم اب } C \text{ سے ظاہر کرتے ہیں}
\end{aligned}$$

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل C' کو بغیر علامت (') لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہٰذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا تکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ تکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل تکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو تکمل۔
درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x$$

اگر ہم دیکھ کر بتلا سکیں کہ $x^2 - 2x + 5$ کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x &= \int x^2 \, \mathrm{d}x - \int 2x \, \mathrm{d}x + \int 5 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو C لکھا جا سکتا ہے یعنی $C_1 + C_2 + C_3 = C$ جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے C لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل C لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x &= \int x^2 \, \mathrm{d}x - \int 2x \, \mathrm{d}x + \int 5 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکملات

بعض اوقات جن تکملات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکونیاتی تماثل کی مدد سے ان تکملات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔ $\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکمل عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماثل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \qquad\qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \qquad\qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

□

سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 1 تا سوال 18 میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 1: (ا) $2x$ ، (ب) x^2 ، (ج) $x^2 - 2x + 1$

جواب: (ا) x^2 ، (ب) $\frac{x^3}{3}$ ، (ج) $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

سوال 2: (ا) $6x$ ، (ب) x^7 ، (ج) $x^7 - 6x + 8$

سوال 3: (ا) $-3x^{-4}$ ، (ب) x^{-4} ، (ج) $x^{-4} + 2x + 3$
جواب: (ا) x^{-3} ، (ب) $-\frac{1}{3}x^{-3}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

سوال 4: (ا) $2x^{-3}$ ، (ب) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ ، (ج) $-x^{-3} + x - 1$

سوال 5: (ا) $\frac{1}{x^2}$ ، (ب) $\frac{5}{x^2}$ ، (ج) $2 - \frac{5}{x^2}$
جواب: (ا) $-\frac{1}{x}$ ، (ب) $-\frac{5}{x}$ ، (ج) $2x + \frac{5}{x}$

سوال 6: (ا) $-\frac{2}{x^3}$ ، (ب) $\frac{1}{2x^3}$ ، (ج) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

سوال 7: (ا) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ، (ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ج) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
جواب: (ا) $\sqrt{x^3}$ ، (ب) $\sqrt{x}$ ، (ج) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

سوال 8: (ا) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ ، (ب) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ ، (ج) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

سوال 9: (ا) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ، (ب) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$
جواب: (ا) $x^{2/3}$ ، (ب) $x^{1/3}$ ، (ج) $x^{-1/3}$

سوال 10: (ا) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ، (ب) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ، (ج) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

سوال 11: (ا) $-\pi \sin \pi x$ ، (ب) $3 \sin x$ ، (ج) $\sin \pi x - 3 \sin 3x$
جواب: (ا) $\cos(\pi x)$ ، (ب) $-3 \cos x$ ، (ج) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

سوال 12: (ا) $\pi \cos \pi x$ ، (ب) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ ، (ج) $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$

سوال 13: (ا) $\sec^2 x$ ، (ب) $\frac{2}{3}\sec^2 \frac{x}{3}$ ، (ج) $-\sec^2 \frac{3x}{2}$
جواب: (ا) $\tan x$ ، (ب) $2\tan(\frac{x}{3})$ ، (ج) $-\frac{2}{3}\tan(\frac{3x}{2})$

سوال 14: (ا) $\csc^2 x$ ، (ب) $-\frac{3}{2}\csc^2 \frac{3x}{2}$ ، (ج) $1 - 8\csc^2 2x$

سوال 15: (ا) $\csc x \cot x$ ، (ب) $-\csc 5x \cot 5x$ ، (ج) $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$
جواب: (ا) $-\csc x$ ، (ب) $\frac{1}{5}\csc(5x)$ ، (ج) $2\csc(\frac{\pi x}{2})$

سوال 16: (ا) $\sec x \tan x$ ، (ب) $4 \sec 3x \tan 3x$ ، (ج) $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 17: $(\sin x - \cos x)^2$
جواب: $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 18: $(1 + 2\cos x)^2$

تکمل کا حصول
سوال 19 تا سوال 58 میں تکمل حاصل کریں۔ تکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $\int (x+1)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 20: $\int (5 - 6x)\,\mathrm{d}x$

سوال 21: $\int (3t^2 + \frac{t}{2})\,\mathrm{d}t$
جواب: $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 22: $(\frac{t^2}{2} + 4t^3)\,\mathrm{d}t$

سوال 23: $(2x^3 - 5x + 7)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 24: $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,\mathrm{d}x$

سوال 25: $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3})\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 26: $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x)\,\mathrm{d}x$

سوال 27: $\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

سوال 28: $\int x^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x$

سوال 29: $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

سوال 30: $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$

سوال 31: $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) \mathrm{d}y$
جواب: $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

سوال 32: $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) \mathrm{d}y$

سوال 33: $\int 2x(1 - x^{-3}) \, \mathrm{d}x$
جواب: $x^2 + \frac{2}{x} + C$

سوال 34: $\int x^{-3}(x+1) \, \mathrm{d}x$

سوال 35: $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} \, \mathrm{d}t$
جواب: $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

سوال 36: $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} \, \mathrm{d}t$

سوال 37: $\int (-2\cos t) \, \mathrm{d}t$
جواب: $-2\sin t + C$

سوال 38: $\int (-5\sin t) \, \mathrm{d}t$

سوال 39: $7\sin\frac{\theta}{3} \, \mathrm{d}\theta$
جواب: $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$

سوال 40: $\int 3\cos 5\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 41: $\int (-3\csc^2 x) \, \mathrm{d}x$
جواب: $3\cot x + C$

سوال 42: $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) \mathrm{d}x$

سوال 43: $\int \frac{\csc\theta \cot\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$

سوال 44: $\frac{2}{5}\sec\theta \tan\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 45: $\int (4\sec x \tan x - 2\sec^2 x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $4\sec x - 2\tan x + C$

سوال 46: $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \cot x)\,\mathrm{d}x$

سوال 47: $\int (\sin 2x - \csc^2 x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$

سوال 48: $\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)\,\mathrm{d}x$

سوال 49: $\int 4\sin^2 y\,\mathrm{d}y$
جواب: $2y - \sin 2y + C$

سوال 50: $\int \frac{\cos^2 y}{7}\,\mathrm{d}y$

سوال 51: $\int \frac{1+\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 52: $\int \frac{1-\cos 6t}{2}\,\mathrm{d}t$

سوال 53: $\int (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ اشارہ۔ $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
جواب: $\tan\theta + C$

سوال 54: $\int (2+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

سوال 55: $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\cot x - x + C$

سوال 56: $\int (1-\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$

سوال 57: $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\cos\theta + \theta + C$

سوال 58: $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

تکملی کلیہ کی تصدیق

سوال 59 تا سوال 64 میں دیے تکملی کلیات کی تصدیق بذریعہ تفرق کریں۔ ان کلیات کا حصول جلد دکھایا جائے گا۔

سوال 59: $\int (7x-2)^3\,\mathrm{d}x = \frac{(7x-2)^4}{28} + C$

سوال 60: $\int (3x+5)^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C$

سوال 61: $\int \sec^2(5x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\tan(5x-1) + C$

سوال 62: $\int \csc^2(\frac{x-1}{3})\,\mathrm{d}x = -3\cot(\frac{x-1}{3}) + C$

سوال 63: $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+1} + C$

سوال 64: $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x+1} + C$

سوال 65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin x + C$$

ب۔ $$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + C$$

ج۔ $$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int \tan\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sec^3\theta}{3} + C$$

ب۔ $$\int \tan\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + C$$

ج۔ $$\int \tan\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\sec^2\theta$$

سوال 67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$$

ب۔ $$\int 3(2x+1)^2\,\mathrm{d}x = (2x+1)^3 + C$$

ج۔ $$\int 6(2x+1)^2\,\mathrm{d}x = (2x+1)^3 + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x+C}$

ب۔ $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}+C$

ج۔ $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3+C$

نظریہ اور مثالیں

سوال 69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\sqrt{x}),\quad g(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

ا۔ $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

ب۔ $\int g(x)\,\mathrm{d}x$

ج۔ $\int [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

د۔ $\int [-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ہ۔ $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$

و۔ $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ز۔ $\int [x+f(x)]\,\mathrm{d}x$

ح۔ $\int [g(x)-4]\,\mathrm{d}x$

جواب: (ا) $-\sqrt{x}+C$، (ب) $x+C$، (ج) $\sqrt{x}+C$، (د) $-x+C$، (ہ) $x-\sqrt{x}+C$، (و) $-x-\sqrt{x}+C$، (ز) $\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}+C$، (ح) $-3x+C$

سوال 70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x,\quad g(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x)$$

5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے،اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی تکمل میں سے مخصوص الٹ تفرق منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لئے یہ عمل ضروری ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل صورت کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو تفرقی مساوات[6] کہلاتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

اس مساوات میں x آزاد متغیر جبکہ y تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم x کا ایسا تفاعل y جاننا چاہتے ہیں جس کی نقطہ x_0 پر قیمت y_0 ہو۔اس کو ابتدائی قیمت مسئلہ[7] کہتے ہیں۔ جیسا مثال 5.7 میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدموں میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال 5.7: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول

سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

اگر جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جائے تب t سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

حل: ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$v(0)0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ $t = 0$ پر ساکن جسم کی سمتی رفتار $v = 0$ ہے جس کو مختصراً $v(0) = 0$ لکھا جاتا ہے۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int 9.8\,\mathrm{d}t \qquad t \text{ کے لحاظ سے تکمل}$$

$$v + C_1 = 9.8t + C_2 \qquad \text{تکمل کا نتیجہ}$$

$$v = 9.8t + C \qquad \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں}$$

---

[6] differential equation
[7] initial value problem

آخری مساوات کے تحت لمحہ t پر جسم کی رفتار $9.8t + C$ ہو گی جہاں C نا معلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
v &= 9.8t + C \\
0 &= 9.8(0) + C && v(0) = 0 \\
C &= 0
\end{aligned}
$$

یوں لمحہ t پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

□

تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا عمومی حل[8] $y = F(x) + C$ دیتا ہے۔ عمومی حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل[9] تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ x_0 پر y کی قیمت y_0 ہے جس کو مختصراً $y(x_0) = y_0$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک نقطہ اور ڈھلوان سے منحنی کا حصول
ایک منحنی جو نقطہ $(1, -1)$ سے گزرتی ہے کا نقطہ (x, y) پر ڈھلوان $3x^2$ ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

حل: ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

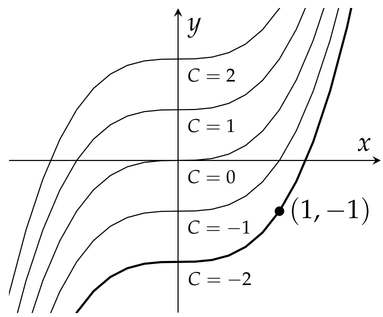
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 && \text{منحنی کی ڈھلوان} \\
y(1) &= -1 && \text{ابتدائی معلومات}
\end{aligned}
$$

ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

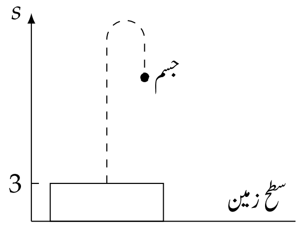
$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x &= \int 3x^2\,\mathrm{d}x \\
y &= x^3 + C && \text{تکمل کے مستقلوں کی یکجا کیا گیا ہے}
\end{aligned}
$$

---

[8] general solution
[9] particular solution



شکل 5.1: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال 5.8



شکل 5.2: تصویر کشی برائے مثال 5.9

عمومی حل $y = x^3 + C$ ہے جس کو C کی مختلف قیمتوں کے لئے شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پر کر کے نا معلوم مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \\ C &= -2 \end{aligned}$$

عمومی حل میں C پر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل 5.1 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

□

اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ تکمل لینا ہو گا۔ پہلا تکمل

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + C$$

تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔ دوسرا تکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال 5.9: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول
زمین سے $3\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ $t = 0$ پر سیدھا اوپر $160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو بطور t کا تفاعل تلاش کریں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہو گی؟

حل: اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل 5.2) جہاں لمحہ t پر زمین سے جسم کی بلندی کو s سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s متغیر t کا دوگنا قابل تفرق تفاعل ہے لہٰذا جسم کی رفتار اور اسراع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

چونکہ ہمارے ریاضی نمونہ میں اسراع گھٹتے ہوئے s کے رخ عمل کرتی ہے لہٰذا ہمارا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160, \quad s(0) = 3 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ہم تفرقی مساوات کو t کے لحاظ سے تکمل کر کے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + C_1$$

ہم پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C_1 تلاش کرتے ہیں۔

$$160 = -9.8(0) + C_1 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160$$

$$C_1 = 160$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا کلیہ مکمل ہوتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + 160$$

ہم t کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا تکمل لیتے ہوئے s تلاش کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8t + 160)\,\mathrm{d}t$$

$$s = -4.9t^2 + 160t + C_2$$

ہم دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے C_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$3 = -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$

یوں مخصوص حل s کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر t ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لمحہ $t = 3$ پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں $t = 3$ پر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9\,\mathrm{m}$$

□

یک رتبی تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال 5.7 اور مثال 5.8 میں دیکھا گیا، جبکہ دو رتبی تفرق تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال 5.9 میں دیکھا گیا۔ اسی طرح تین رتبی تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہو گی۔ ہر بار الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ابتدائی قیمت درکار ہو گی۔

منحنی حل کا خاکہ

تفرقی مساوات کے حل کی ترسیم کو منحنی حل[10] یا منحنی تکمل[11] کہتے ہیں۔ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ کے حل $y = x^3 + C$ کو شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم $f(x)$ کا الٹ تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرقی مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

مثال 5.10: درج ذیل تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

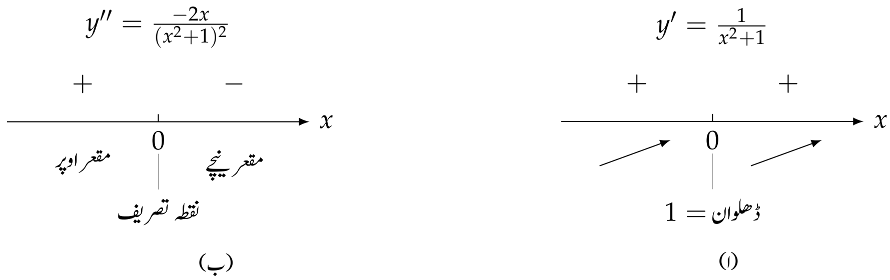
حل: پہلا قدم: y' اور y'': منحنی کی عمومی صورت y' اور y'' پر منحصر ہوتی ہے (حصہ 4.4)۔ ہم $y' = \frac{1}{x^2+1}$ پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق y'' دیتا ہے:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

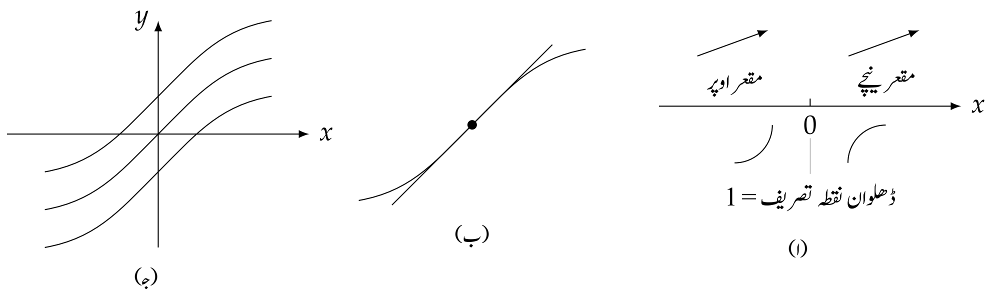
دوسرا قدم: اتار چڑھاو۔ y' کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ہے۔ نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔ چونکہ $y' > 0$ ہے لہٰذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے (شکل 5.3-ا)۔

---

[10] solution curve
[11] integral curve



شکل 5.3: منحنی کی اتار چڑھاو اور مقعر (مثال 5.10)



شکل 5.4: منحنی کی عمومی صورت (مثال 5.10)

تیسرا قدم: مقعر۔ دوگنا تفرق $x = 0$ پر $(+)$ سے تبدیل ہو کر $(-)$ ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا $x = 0$ پر نقطہ تصریف پایا جائے گا (شکل 5.3-ب)۔

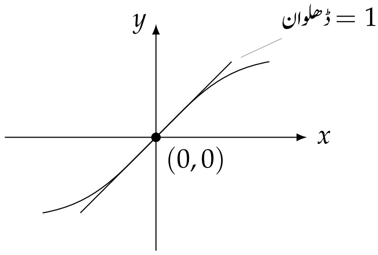
چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کی جھکاو شکل 5.4-ا اور اس کی عمومی صورت شکل 5.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔

پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x\to\mp\infty} y' = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

یوں $x \to \mp\infty$ پر منحنی افقی ہو گی۔

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے لہٰذا y محور کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل 5.4-ج۔ □



شکل 5.5: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال 5.11)

مثال 5.11: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

حل: ہم نے مثال 5.10 میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل 5.4-ج میں دکھایا گیا ہے۔ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ $(0, 0)$ سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کی درکار مخصوص حل ہے جس کو شکل 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ □

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x)$ میں تفاعل $f(x)$ کے الٹ تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے، جس پر آگے ایک باب میں غور کیا جائے گا، جبکہ تفاعل $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ کا الٹ تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}$ کو ہم ترسیمی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

ریاضیاتی نمونہ کشی

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم