

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	
392	4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
416	4.6 بہترین بنانا	
439	ضمیمہ دوم	1

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

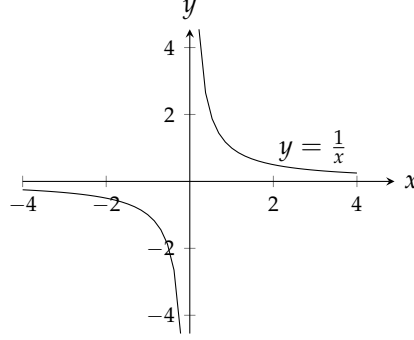
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 4.73: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

4.5 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \rightarrow \pm\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔

$x \rightarrow \pm\infty$ پر حد

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بدترتج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بدترتج گئے گی۔ منفی x جس کی مقدار بدترتج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بدترتج گئے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \rightarrow \pm\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

2. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

□

لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جاسکتا ہے۔

$x \rightarrow \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کے حد حاصل کیے۔ اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کی بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$(4.7) \quad \lim_{x \rightarrow \mp\infty} k = k, \quad \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

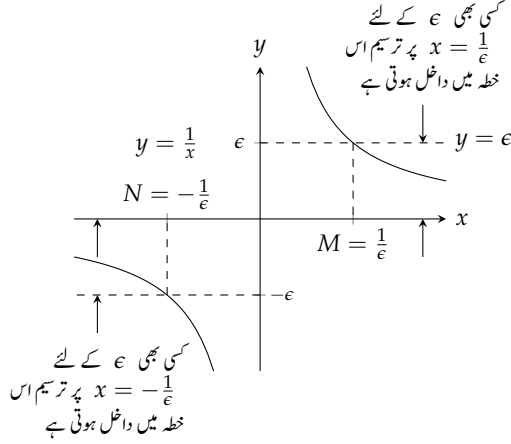
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ا.}$$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x > M, \implies \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔



شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 4.20)

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \implies \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

یا $N = -\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔

□

مسوات 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6: $x \rightarrow \mp\infty$ پر حل کے خواص
 اگر $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) + g(x)] = L + M \quad \text{قاعدہ مجموعہ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) - g(x)] = L - M \quad \text{قاعدہ فرق:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M \quad \text{قاعدہ ضرب:}$$

4.5. $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، مشتق اور غالب اجزاء

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} kf(x) = kL$

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $L^{m/n} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x)]^{m/n}$

یہ خواص بالکل مسئلہ 2.1 (صفحہ 113) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ} \\ &= 5 + 0 = 5 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

ب.

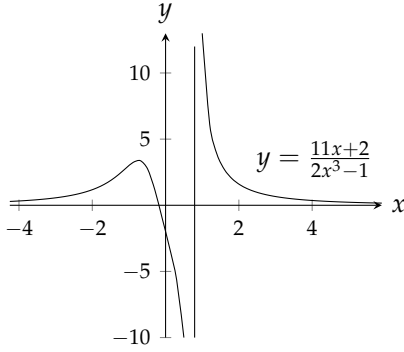
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

□

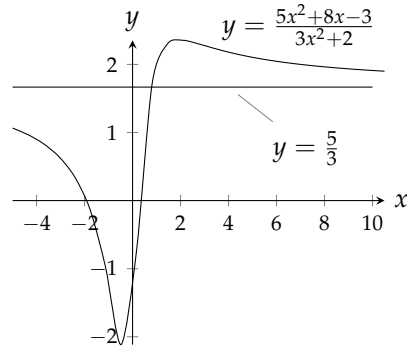
مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 4.75)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

□



شکل 4.76: ترسیم تقاطع اور حد (مثال 4.23)



شکل 4.75: ترسیم تقاطع اور حد (مثال 4.22)

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 4.76)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{11}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$= \frac{0+0}{2-0} = 0$$

□

مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل 4.77

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{3}{x}}{7 + \frac{4}{x}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}$$

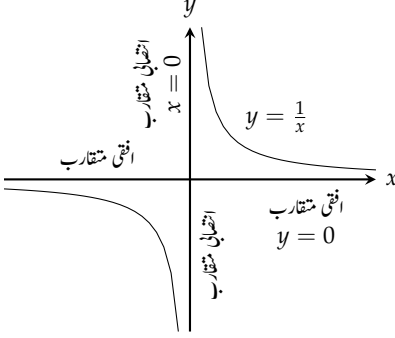
$$= -\infty$$

ا.

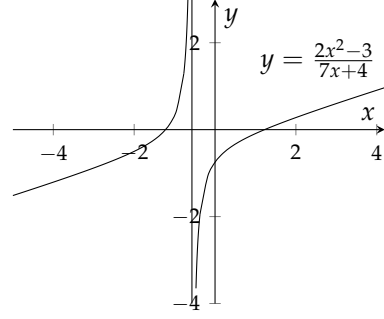
ب.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + \frac{7}{x}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} \quad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$= \frac{\infty}{2} = \infty$$



شکل 4.78: محدودی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے مقارب ہیں۔



شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 4.24

□

مثال 4.22 تا مثال 4.24 سے $x \rightarrow \pm\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انحصالی متقارب

اگر مہداسے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصلہ صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا متقارب¹² کہتے ہیں۔

مثال 4.25: محدودی محور تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل 4.78)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہیں لہذا x محور $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ہیں لہذا y محور بھی $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

□

یاد رہے کہ $x = 0$ پر نسب نما صفر ہے لہذا تفاعل غیر معین ہے۔

تعریف: تفاعل $y = f(x)$ کا خط $y = b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

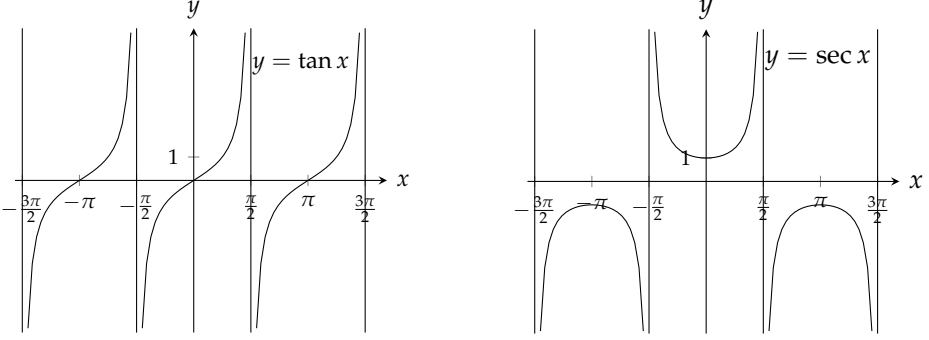
ہو۔

تفاعل $y = f(x)$ کا خط $x = a$ اس صورت انحصالی متقارب ہو گا جب

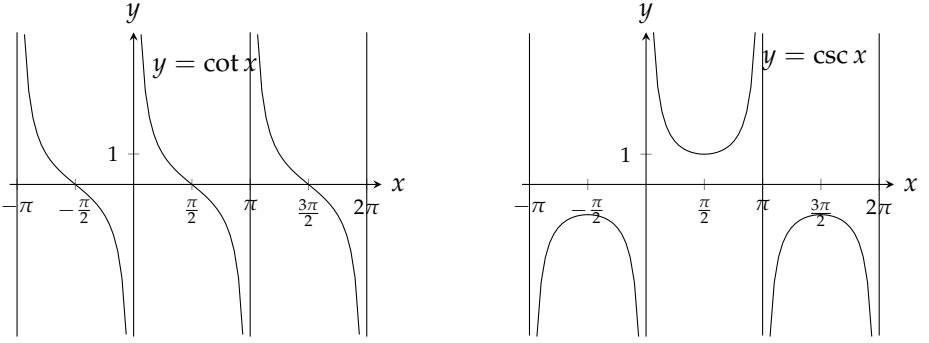
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

ہو۔

□



شکل 4.79: انتظامی مقارب (مثال 4.26)



شکل 4.80: انتظامی مقارب (مثال 4.26)

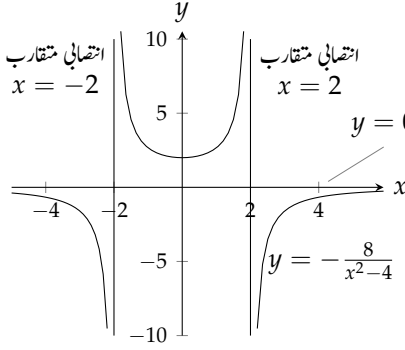
مثال 4.26: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتظامی مقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.79)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

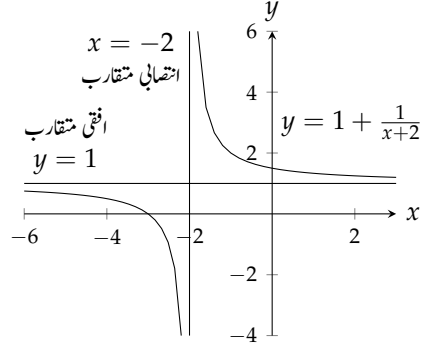
π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتظامی مقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.80)۔

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

□



شکل 4.82: انتصابی مقارب (مثال 4.28)



شکل 4.81: انتصابی مقارب (مثال 4.27)

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم $x \rightarrow \pm\infty$ پر اور $x \rightarrow -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے $x+3$ اور $x+2$ سے تقسیم کر کے

$$y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہوگی۔ یوں محدودی محور کی بجائے خط $y = 1$ اور خط $x = -2$ مقارب خط ہوں گے۔

□

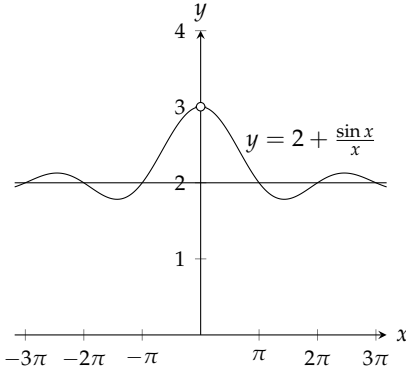
مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا مقارب تلاش کریں۔

$$y = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

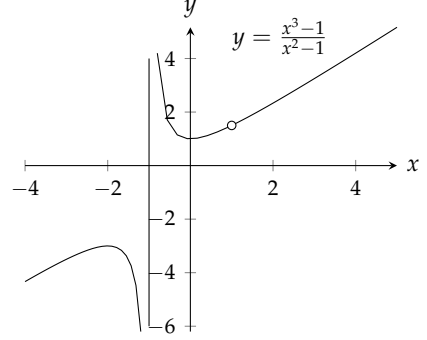
حل: ہم $x \rightarrow \pm\infty$ اور $x \rightarrow \pm 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

چونکہ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ لہذا افقی مقارب خط $y = 0$ ہے (شکل 4.82)۔ چونکہ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ اور $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$ لہذا عمودی مقارب خط $x = 2$ سے بھی مقارب خط حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $x = -2$ بھی مقارب خط حاصل ہو گا۔

□



شکل 4.84: منحنی اپنے مقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کر سکتی ہے
(مثال 4.30)۔



شکل 4.83: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x=1$ پر عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے لہذا اس کی صرف $x=-1$ پر مقاربی خط ہو گا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی مقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

کا $x = -1$ پر انتصابی مقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$$

□

لکھا جاسکتا ہے لہذا عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے اور $x \rightarrow 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل 4.83)۔

مسئلہ 2.4 (صفحہ 119 مسئلہ 7) بھی $x \rightarrow \pm\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال 4.30: مسئلہ 7 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے مقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم $x \rightarrow 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \rightarrow \pm\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

اور $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$ ہے لہذا مسئلہ پیچ کے تحت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2 + 0 = 2$$

□ ہو گا لہذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط $y = 2$ ہو گا (شکل 4.84)۔

ترچھے متقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نا انقضی اور نا انتہائی ہو گا۔

مثال 4.31: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

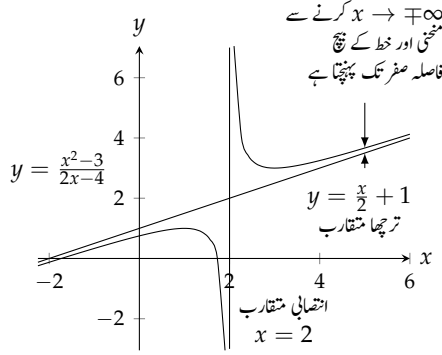
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

حل: ہم $x \rightarrow \pm\infty$ پر اور $x \rightarrow 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ $x^2 - 3$ کو $2x - 4$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

چونکہ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$ ہیں لہذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔
 $x \rightarrow \pm\infty$ پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \rightarrow \frac{x}{2} + 1$ تک پہنچتی ہے۔ یوں $y = \frac{x}{2} + 1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل 4.85)۔

□



شکل 4.85: ترجیحا مقارب (مثال 4.31)

مقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1$$

x کی بڑی قیمتوں کے لئے

$$f(x) = \frac{1}{2x - 4}$$

2 کے قریب x کی قیمتوں کے لئے

بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہذا $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا غلبہ¹³ ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ غالب¹⁴ ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

¹³ dominates
¹⁴ dominant

مثال 4.32: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3 + 1}{x}$$

حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاؤ، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔

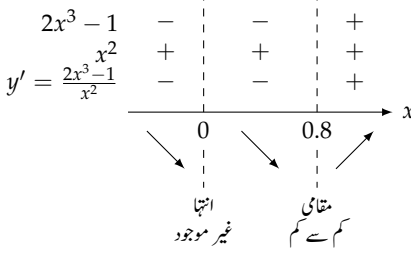
دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(4.8) \quad y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$|x|$ کی بری قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات 4.8 میں $x = 0$ پر انتہائی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔
تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاؤ۔ ایک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔



$$2x - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - 1 = 0$$

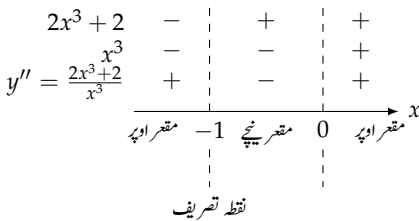
$$x^3 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8$$

چوتھا قدم: مقعر۔ دور رتبی تفرق

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 + 2}{x^3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

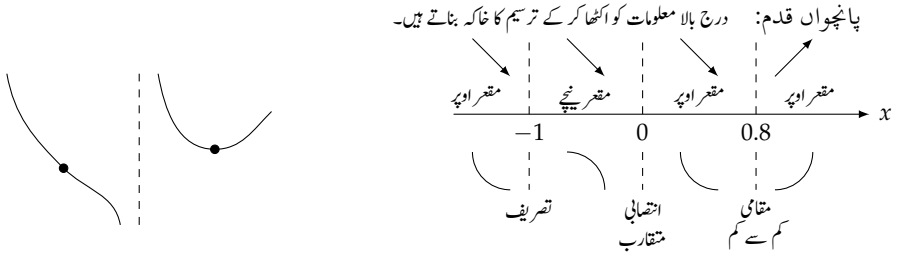


$$2 + \frac{2}{x^3} = 0$$

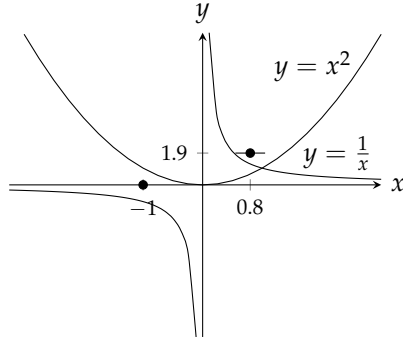
$$2x^3 + 2 = 0$$

$$x^3 = -1$$

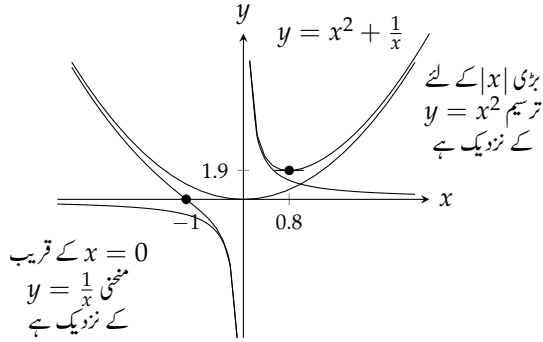
$$x = -1$$



چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تفاعل کی نشاندہی کریں۔
کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟
3. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔
4. متقارب خطوط اور قابل ہماو عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
 $x \rightarrow \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟
5. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاؤ دریافت کریں۔
6. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔
7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔
8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدود، پر f کی قیمت تلاش کریں۔
9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

سوال 1 تا سوال 6 میں (i) $x \rightarrow \infty$ پر (ب) $x \rightarrow -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 1: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

سوال 2: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 3: $g(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$

سوال 4: $g(x) = \frac{1}{8 - \frac{5}{x^2}}$

سوال 5: $h(x) = \frac{-5 + \frac{7}{x}}{3 - \frac{1}{x^2}}$

سوال 6: $h(x) = \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال 7 تا سوال 10 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$

سوال 8: $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\cos \theta}{3\theta}$

سوال 9: $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

سوال 10: $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

ناطق تفاعل کی حد
سوال 11 تا سوال 24 میں دیے ناطق تفاعل کی (i) $x \rightarrow \infty$ اور (ب) $x \rightarrow -\infty$ پر حد تلاش کریں۔

سوال 11: $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

سوال 12: $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال 13: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

سوال 14: $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال 15: $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

سوال 16: $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال 17: $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

سوال 18: $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

$$f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x} \quad \text{سوال 19:}$$

$$g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6} \quad \text{سوال 20:}$$

$$g(x) = \frac{x^4}{x^3+1} \quad \text{سوال 21:}$$

$$h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6} \quad \text{سوال 22:}$$

$$h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x} \quad \text{سوال 23:}$$

$$h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9} \quad \text{سوال 24:}$$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت
ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔
نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 25 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7} \quad \text{سوال 25:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \quad \text{سوال 26:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} \quad \text{سوال 27:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} \quad \text{سوال 28:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}} \quad \text{سوال 29:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4} \quad \text{سوال 30:}$$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال 31 تا سوال 34 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہذا کارتیسی محدود پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔ (ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

$$\text{سوال 31: } f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x \rightarrow -\infty} = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} = 1$$

$$\text{سوال 32: } f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} = -2$$

$$\text{سوال 33: } f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{سوال 34: } f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

تفاعل کی ایجاد

سوال 35 تا سوال 38 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

$$\text{سوال 35: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

$$\text{سوال 36: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \infty$$

$$\text{سوال 37: } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$$

$$\text{سوال 38: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} k(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = -\infty$$

ناطق تفاعل کی ترسیم

سوال 39 تا سوال 66 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ مقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

$$\text{سوال 39: } y = \frac{1}{x-1}$$

سوال 40: $y = \frac{1}{x+1}$

سوال 41: $y = \frac{1}{2x+4}$

سوال 42: $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 43: $y = \frac{x+3}{x+2}$

سوال 44: $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 45: $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

سوال 46: $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 47: $y = \frac{x^2-1}{x}$

سوال 48: $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 49: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$

سوال 50: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 51: $y = \frac{1}{x^2-1}$

سوال 52: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 53: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$

سوال 54: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

سوال 55: $y = \frac{x^2}{x-1}$

سوال 56: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 57: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

$$y = -\frac{x^2-4}{x+1} \quad \text{سوال 58}$$

$$y = \frac{x^2-x+1}{x-1} \quad \text{سوال 59}$$

$$y = -\frac{x^2-x+1}{x-1} \quad \text{سوال 60}$$

$$y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2} \quad \text{سوال 61}$$

$$y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2} \quad \text{سوال 62}$$

$$y = \frac{x}{x^2-1} \quad \text{سوال 63}$$

$$y = \frac{x-1}{x^2(x-2)} \quad \text{سوال 64}$$

$$y = \frac{8}{x^2+4} \quad \text{سوال 65}$$

$$y = \frac{4x}{x^2+4} \quad \text{سوال 66}$$

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 67 تا سوال 72 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

$$y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 67}$$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{سوال 68}$$

$$y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}} \quad \text{سوال 69}$$

$$y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \quad \text{سوال 70}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 71}$$

$$y = -\cos\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) \quad \text{سوال 72}$$

اجزاء کی ترسیمات

سوال 73 تا سوال 76 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

سوال 73: $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 74: $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 75: $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 76: $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 77: $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}$ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا c پایا جاتا ہے کہ $f(c)$ کی قیمت درج ذیل ہو۔

ا. -2 ب. $\cos 3$ ج. $5\,000\,000$

سوال 78: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$ تلاش کریں۔

سوال 79: تشاکی۔ فرض کریں وقفہ $x > 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x < 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟

سوال 80: تشاکی۔ فرض کریں وقفہ $x < 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x > 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہوگا؟

سوال 81: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 82: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں۔ اگر $g(x)$ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی ترسیم کا متقارب ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 83: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 84: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 85:

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال 4.30) متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $x \rightarrow \infty$ پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

$$(1) \quad x > 0 \text{ پر } f \text{ قابل تفرق ہے۔}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \text{ غیر موجود ہے۔}$$

سوال 86: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = x + 1 + \frac{5}{x + 2}$$

جس کی ترجمانی متقارب $y = x + 1$ ہے۔

اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x + 2} = \frac{x + 3 + \frac{7}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

ملتا ہے جس کی متقارب $y = x + 3$ ہے۔

ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 87 اور سوال 88 میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \rightarrow \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 87: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ ہو گا۔

سوال 88: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے
سوال 89 تا سوال 92 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

$$y = -\frac{x^2-4}{x+1} \quad \text{سوال 89}$$

$$y = \frac{x^2+x-6}{2x-2} \quad \text{سوال 90}$$

$$y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1} \quad \text{سوال 91}$$

$$y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2} \quad \text{سوال 92}$$

سوال 93 تا سوال 98 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔ تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

$$y = x^3 + \frac{3}{x} \quad \text{سوال 93}$$

$$y = x^3 - \frac{3}{x} \quad \text{سوال 94}$$

$$y = 2 \sin x + \frac{1}{x} \quad \text{سوال 95}$$

$$y = 2 \cos x - \frac{1}{x} \quad \text{سوال 96}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 3 \sin 2x \quad \text{سوال 97}$$

$$y = (x-1)^{11} + 2 \sin 2\pi x \quad \text{سوال 98}$$

سوال 99 اور سوال 100 کا تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. $x \rightarrow 0^+$ اور $x \rightarrow 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب. $x \rightarrow \pm\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج. $x \rightarrow 1$ اور $x \rightarrow -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$y = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2/3} \quad \text{سوال 99}$$

$$y = \frac{3}{2} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2/3} \quad \text{سوال 100}$$

$$y = -\frac{x^3-2}{x^2+1} \quad \text{سوال 101: تفاعل کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔}$$

$$ا. \quad -9 \leq x \leq 9 \quad ب. \quad -90 \leq x \leq 90 \quad ج. \quad -900 \leq x \leq 900$$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہوگی۔ جزو-ب میں مبداء کے قریب کچھ ہوگا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 102: تقابل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2 - 1}$ کو وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبداء پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبداء کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبداء پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا
بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تقابل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta \quad (\theta = \frac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جاسکتا ہے۔ سوال 108 تا سوال 103 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تاکہ ترسیم پر حد کو دیکھا جاسکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

$$\text{سوال 103: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{سوال 104: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{سوال 105: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5}$$

$$\text{سوال 106: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$$

$$\text{سوال 107: } \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right) \left(\cos \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{سوال 108: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \cos \frac{1}{x}\right) \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$$

4.6 بہترین بنانا

کسی چیز کو بہترین بنانے سے مراد اس چیز کی کسی خاصیت کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ بنانا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل بنانے پر کم تر لاگت آتی ہے؟ 30 cm قطر لکڑ سے کتنی مضبوط ترین شہتیر حاصل کی جاسکتی ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرتے ہیں۔

کاروبار اور صنعتی مثالیں

مثال 4.33: دھاتی چادر کا استعمال

ایک چکور چادر جس کا ضلع 30 cm ہے کے کونوں سے چھوٹے چکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہو گا؟

حل: شکل 4.86 میں کٹا ہوا چادر دکھایا گیا ہے۔ کٹے ہوئے چکور کا ضلع x سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم H مربع سنٹی میٹر

$$H(x) = x(30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

ہو گا۔ چونکہ چادر کے ضلع 30 cm ہے لہذا $0 \leq x \leq 15$ ہو گا جو تفاعل H کا دائرہ کار ہے۔

شکل 4.87 میں حجم بالمقابل x دکھایا گیا ہے جس کے تحت $x = 0$ اور $x = 15$ پر حجم صفر ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خاطر x کے لحاظ سے H کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dx} = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x - 15)(x - 5) = 0,$$

یوں $x = 5$ اور $x = 15$ ملتا ہے جن میں سے صرف $x = 5$ دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر H کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$H(5) = 2000, \quad \text{نقطہ فاصل}$$

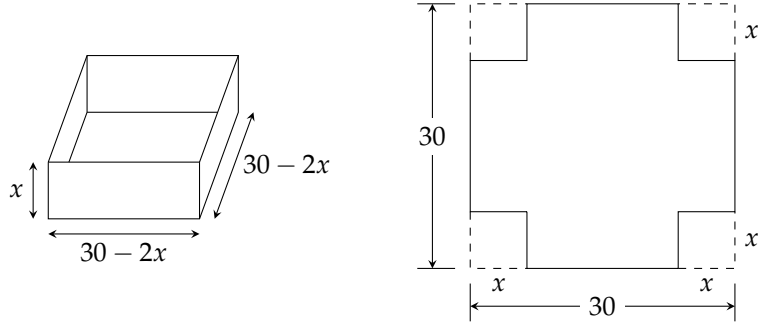
$$H(0) = 0, \quad H(15) = 0 \quad \text{آخری نقطہ}$$

□

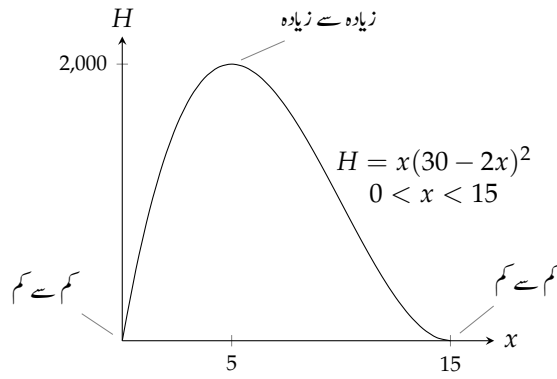
یوں زیادہ سے زیادہ حجم 2000 cm^3 ہے جو 5 cm ضلع چکور کانٹے سے ملے گا۔

مثال 4.34: بیلن

آپ کو ایک لٹریل کا بیلن ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔



شکل 4.86: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال 4.33)۔



شکل 4.87: حجم بالقابل x (مثال 4.33)۔

حل: ٹین ڈبے کی لمبائی h اور اس کا رداس r لیتے ہیں (شکل 4.88)۔ اگر h اور r کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$(4.9) \quad H = \pi r^2 * h = 1000 \quad (\text{ایک لٹر} = 1000 \text{ cm}^3)$$

درکار ہے۔ کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال میں ٹین کے ضیاع کو شامل کیا گیا ہے) ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ ٹین میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$(4.10) \quad S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{ٹین کے دو سر}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{ٹین دیوار}}$$

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ $\pi r^2 h = 1000$ کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مساوات 4.10 میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات 4.9 اور مساوات 4.10 کو ملا کر ایک متغیر کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات 4.9 کو h کے لئے حل کرتے ہوئے

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

اس کو مساوات 4.10 میں پر کرتے ہوئے h سے چکارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

r کی چھوٹی قیمت کے لئے $\frac{2000}{r}$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نکلی یا پائپ نما ہو گا۔ r کی بڑی قیمت کے لئے $2\pi r^2$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چھٹی صورت کا ہو گا۔ r کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ کم سے کم حاصل ہو گا۔

S اپنے پورے دائرہ کار $(0, r)$ میں قابل تفرق ہے لہذا کم سے کم S قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے نقطہ فاصل r کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 = 2000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

تفرق

تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں

r کے لئے حل کریں

نقطہ فاصل

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے کہ S کی کم سے کم قیمت کتنی ہے اور کہاں پائی جاتی ہے۔ چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں ہے لہذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے ہیں لہذا ہمیں $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہو گا۔ ہم تفاعل کا دور تہی تفرق

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r}$$

$$\frac{d^2 S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^2}$$

پر غور کرتے ہیں جو S کی پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل 4.88)۔ یوں پورے دائرہ کار پر S کی ترتیم اوپر مقعر ہوگی اور $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ پر S کی قیمت کم سے کم ہوگی۔ جب

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

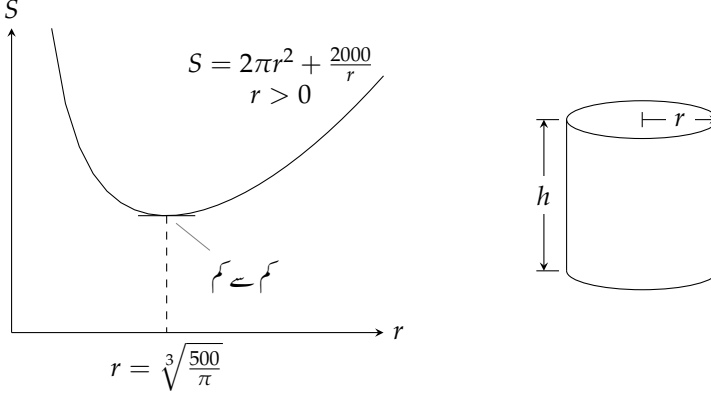
ہو۔ اس کے تحت کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42 \text{ cm}, \quad h \approx 10.84 \text{ cm}$$

□

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

1. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلوم دی گئی ہے؟ کون سی نہیں دی گئی ہے؟ کیا مطلوب ہے؟
2. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔
3. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلہ میں ہر تعلق کو مساوات کی صورت میں لکھیں۔
4. نا معلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نا معلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کہیں مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔
5. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتی اور دور تہی تفرق سے نقطہ فاصل (جہاں $f' = 0$ یا غیر معین ہوگا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔



شکل 4.88: ٹین کا ڈبہ (مثال 4.34)

ریاضیات سے چند مثالیں

مثال 4.35: اعداد کا حاصل ضرب
ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں کی ان کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔

حل: اگر پہلا عدد x ہو تب دوسرا عدد $20 - x$ ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔ f کا دائرہ کار بند وقفہ $0 \leq x \leq 20$ ہے۔

ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر f کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

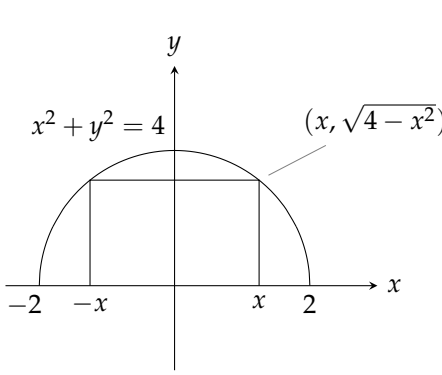
پورے وقفہ $0 \leq x \leq 20$ پر معین ہے اور صرف $x = 10$ پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$

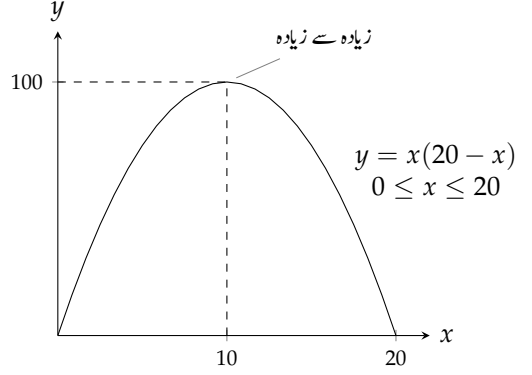
$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

ہیں۔ یوں $f(10) = 100$ زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی اور درکار اعداد 10 اور $(20 - 10) = 10$ ہوں گے (شکل 4.89)۔

□



شکل 4.90: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال 4.36)۔



شکل 4.89: x اور $(20 - x)$ کے حاصل ضرب کی زیادہ سے زیادہ قیمت 100 ہے (مثال 4.35)۔

مثال 4.36: جیومیٹری
رد اس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

حل: نصف دائرے کو کارتیسی محدود کے مبدا پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل 4.90 میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا x پر ہے۔ ہم مستطیل کے اضلاع اور رقبہ S کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$2x, \quad \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{رقبہ: } 2x\sqrt{4 - x^2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ $0 \leq x \leq 2$ میں پائی جاتی ہے۔

ہمیں استمراری تفاعل

$$S = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت وقفہ $[0, 2]$ پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل S کا تفرق

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

نقطہ $x = 2$ پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4-x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

دونوں اطراف کو $\sqrt{4-x^2}$ سے ضرب دیں

$x = -\sqrt{2}$ اور $x = \sqrt{2}$ میں سے صرف $x = \sqrt{2}$ تقابل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔
دائرہ کار کی آخری نقطوں اور اس اگلے نقطہ فاصل پر تقابل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$$

نقطہ فاصل پر قیمت

$$S(0) = 0, \quad S(2) = 0$$

آخری نقطوں پر قیمت

یوں مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ 4 ہے جب اس کی لمبائی $2x = 2\sqrt{2}$ اور چوڑائی $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ ہوگی۔ □

ہیمنگ و فغما اور قانون ابن سہل

خلا میں روشنی کی رفتار $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ہے۔ ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے (تقریباً اس کے $\frac{2}{3}$ تیز)۔

بصریات میں اصول فغما¹⁵ کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

مثال 4.37: ہوا میں روشنی کی رفتار c_1 اور پانی میں روشنی کی رفتار c_2 لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ A سے پانی میں نقطہ B تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ ہوا اور پانی کا سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل: ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو x محور پر رکھتے ہوئے A تا B وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہوگا (شکل 4.91)۔ ایک یکساں ذریعہ میں شعاع کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی ہے لہذا اس میں کم سے کم وقت سے مراد کم سے کم فاصلہ ہے اور شعاع دو نقطوں کے بیچ سیدھے خط پر حرکت کرتی ہے۔ یوں A تا B راہ دو سیدھے خطوط پر مشتمل ہوگی۔ پہلا خط A

¹⁵Fermat's principle

سے N تک ہو گا اور دوسرا خط N سے B تک ہو گا۔ N وہ نقطہ ہے جہاں شعاع ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتی ہے۔ فاصل اور وقت کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \text{وقت}$$

یوں A سے N تک درکار وقت

$$t_1 = \frac{AN}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

اور N سے B تک درکار وقت

$$t_2 = \frac{NB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

ہو گا۔ A سے B تک پہنچنے کے لئے درکار کل وقت دونوں کا مجموعہ ہو گا۔

$$(4.11) \quad t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

اس مساوات میں t متغیر x کا قابل تفرق تقابل ہے اور تقابل کا دائرہ کار $[0, d]$ ہے۔ ہم اس بند دائرہ کار پر کم سے کم وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم تفرق

$$(4.12) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

لیتے ہیں جس کو شکل 4.91 کی مدد سے θ_1 اور θ_2 کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.13) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin \theta_1}{c_1} - \frac{\sin \theta_2}{c_2}$$

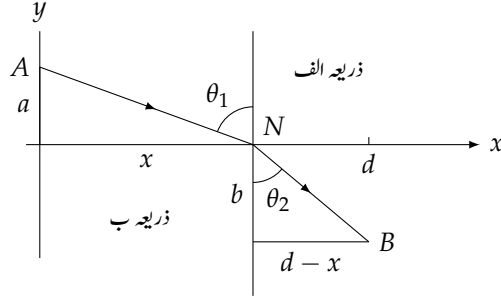
مساوات 4.12 سے ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر $\frac{dt}{dx} < 0$ اور $x = d$ پر $\frac{dt}{dx} > 0$ ہو گا۔ یوں اندر نقطوں کے درمیان کسی نقطہ x_0 پر $\frac{dt}{dx} = 0$ ہو گا۔ چونکہ $\frac{dt}{dx}$ مسلسل بڑھتا تقابل ہے لہذا صرف ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو گا۔

$$(4.14) \quad \frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$$

□

مساوات 4.14 کو ابن سہل کا قانون انعطاف¹⁶ کہتے ہیں¹⁷۔

¹⁶ Ibn Sahl's law of relection
¹⁷ مغربی دنیا میں اس کو Snell's law کہتے ہیں۔



شکل 4.91: ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتے ہوئے شعاع کی راہ (مثال 4.37)

معاشیات میں لاگت اور آمدنی

نظریہ معاشیات میں احصاء کے اہم کردار ہے۔ اس کی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال لاگت، آمدنی اور منافع کے تعلق کے بارے میں ہے۔

فرض کریں کہ

x ارکان فروخت کرنے سے آمدنی $r(x)$ ہے۔

x ارکان کی لاگت پیداوار $c(x)$ ہے۔

x ارکان فروخت کرنے سے منافع $p(x) = r(x) - c(x)$ ہے۔

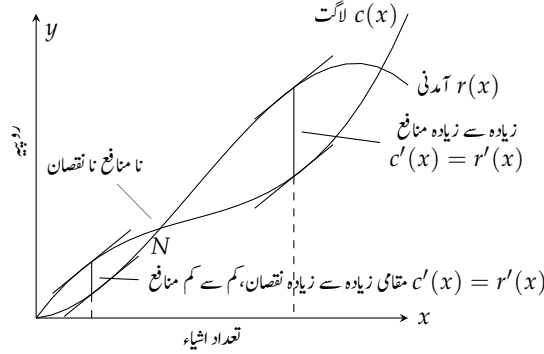
حاشیہ آمدنی اور حاشیہ لاگت پیداوار درج ذیل ہیں۔

$$\frac{dr}{dx} = \text{حاشیہ آمدنی}$$

$$\frac{dc}{dx} = \text{حاشیہ لاگت}$$

ان تفرق کا آمدنی کے ساتھ تعلق کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 4.7: زیادہ سے زیادہ منافع (اگر پایا جاتا ہو) اس صورت ہو گا جب حاشیہ لاگت پیداوار اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔



شکل 4.92: عموماً تقابل لاگت کا مقعر پہلے نیچے اور بعد میں اوپر ہوتا ہے۔ تقابل لاگت تقابل آمدنی کو نا منافع نا نقصان کے نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ N کے بائیں خسارہ اور اس کے دائیں منافع ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام $x > 0$ پر $r(x)$ اور $c(x)$ قابل تفرق ہیں لہذا $p(x) = r(x) - c(x)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر پائی جاتی ہو) $p'(x) = 0$ پر پائی جائے گی۔ چونکہ $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ ہے لہذا $p'(x) = 0$ سے مراد

$$r'(x) - c'(x) = 0, \quad \xRightarrow{\text{یعنی}} \quad r'(x) = c'(x)$$

ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے (شکل 4.92)۔

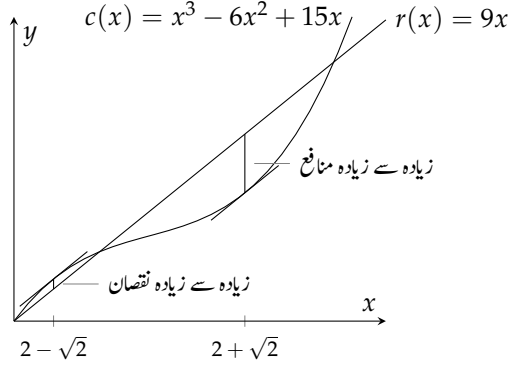
□

ہمیں مسئلہ 4.7 سے کیا ہدایت ملتی ہے؟ ایسی سطح پیداوار جہاں $p'(x) = 0$ ہو، پر زیادہ سے زیادہ منافع یا زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ لیکن معاشی پیشنگوئی کرتے ہوئے پیداوار کی ان سطحوں پر نظر رکھیں جہاں حاشیہ لاگت اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔ اگر زیادہ سے زیادہ منافع پایا جاتا ہو، وہ ان سطح پیداوار میں سے ایک پر ہو گا۔

مثال 4.38: لاگت اور آمدنی تقابل درج ذیل ہیں

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

جہاں تعداد پیداوار x ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار پائی جاتی ہے جس پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب زیادہ سے زیادہ منافع کس سطح پیداوار پر ہو گا؟



شکل 4.93: لاگت با تقابل منافع (مثال 4.38)

حل:

$$\begin{aligned}
 r(x) &= 9x, & c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x \\
 r'(x) &= 9, & c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15
 \end{aligned}$$

r' اور c' تلاش کریں
 ایک دوسرے کے برابر پر کریں
 ترتیب دیں

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 12x + 15 &= 9 \\
 3x^2 - 12x + 6 &= 0 \\
 x^2 - 4x + 2 &= 0
 \end{aligned}$$

دو درجی مساوات حل کریں

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} \\
 &= 2 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

زیادہ سے زیادہ منافع کا امکان $2 + \sqrt{2}$ یا $2 - \sqrt{2}$ سطح پیداوار پر حاصل ہو گا (شکل 4.93)۔ آپ دونوں نقطوں پر آمدنی کا حساب کر کے دیکھیں گے کہ $x = 2 + \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ منافع حاصل ہو گا جبکہ $x = 2 - \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ □

بہترین سطح پیداوار کو کم سے کم اوسط لاگت والی سطح پیداوار تصور کیا جاسکتا ہے۔ اگلے مسئلہ میں یہ سطح پیداوار حاصل کی گئی ہے۔

مسئلہ 4.8: اوسط کم سے کم لاگت پیداوار (اگر پائی جاتی ہو) اس سطح پیداوار پر ہو گی جس پر اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

$x > 0$ اشیاء کی لاگت پیداوار $c(x)$

x اشیاء کی اوسط لاگت پیداوار $\frac{c(x)}{x}$

قابل تفرق ہیں۔

اگر لاگت کو کم سے کم کرنا ممکن ہو، یہ اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{c(x)}{x} \right) &= 0 \\ \frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} &= 0 && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\ xc'(x) - c(x) &= 0 && x^2 \text{ سے ضرب دیں} \\ \underbrace{c'(x)}_{\text{حاشیہ لاگت}} &= \underbrace{\frac{c(x)}{x}}_{\text{اوسط لاگت}} \end{aligned}$$

□

ہمیں دھیان سے مسئلہ 4.8 استعمال کرنا ہو گا جو یہ نہیں کہتا ہے کہ کم سے کم اوسط لاگت کی سطح پیداوار موجود ہے بلکہ کہتا ہے کہ اگر ایسی سطح موجود ہو تب اس کو کہاں تلاش کرنا چاہیے۔ جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں وہاں دیکھیں کہ آیا کم سے کم اوسط لاگت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.39: تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار ہے جہاں اوسط لاگت کم سے کم ہو؟ اگر ایسا ہو تب اس سطح پیداوار کو تلاش کریں۔

حل: ہم جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں، وہاں دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x && \text{لاگت} \\ c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15 && \text{حاشیہ لاگت} \\ \frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\ 3x^2 - 12x + 15 &= x^2 - 6x + 15 \\ 2x^2 - 6x &= 0 \\ 2x(x - 3) &= 0 \\ x &= 0, \quad x = 3 \end{aligned}$$

چونکہ $x > 0$ ہے لہذا کم سے کم اوسط لاگت صرف $x = 3$ ہزار کی پیداوار پر ممکن ہے۔

ہم تفرق کو دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{c(x)}{x} \right) &= 2x - 6 \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{c(x)}{x} \right) &= 2 > 0 \end{aligned}$$

□

دو درجی تفرق مثبت ہے لہذا $x = 3$ پر مطلق کم سے کم ہو گا۔

غیر مسلسل مظہر کا نمونہ بذریعہ تفرقی تفاعل

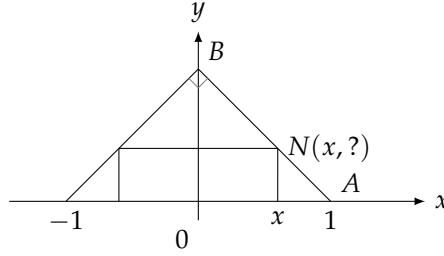
اگر آپ سوچ رہے ہوں کہ جب x عدد صحیح ہے (چونکہ مکمل اشیاء پیدا کیے جاتے ہیں) تب ہم لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرنے کے لئے قابل تفرق تفاعل $c(x)$ اور $r(x)$ کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

جب x کی قیمت بڑی ہو تب ہم لاگت اور آمدنی کو ہموار منحنیات $c(x)$ اور $r(x)$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جو نا صرف x کی عدد صحیح قیمتوں بالکل ان کے بیچ تمام قیمتوں پر قابل تفرق ہیں۔ ان قابل تفرق تفاعل، جو x کی عدد صحیح قیمتوں کے لئے لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرتے ہیں، کی قیمتوں پر ہم احصاء کی مدد سے غور کر سکتے ہیں۔ یوں حاصل نتائج کو ہم حقیقی دنیا میں منتقل کرتے ہوئے امید کرتے ہیں کہ ہم اس سے فائدہ اٹھا سکیں۔ جب ہم ایسا کرتے ہوں، جیسا نظریہ معاشیات میں ہم نے کیا، ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل حقیقت کا اچھا نمونہ ہے۔

ایسی صورتوں میں جب احصاء کہتا ہو کہ بہترین پیداوار x کی غیر عدد صحیح قیمت پر ہوگی، جیسا مثال 4.38 میں $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کا جواب حاصل ہوا، تب ہم اس کا قریب ترین موزوں عدد صحیح لیتے ہیں۔ اگر ہم 20 اشیاء کو ڈبوں میں بند کرتے ہوں تب $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کی صورت میں ہم 3410 یا 3420 لے سکتے ہیں۔

سوالات

ہر سوال کو حل کرنے سے پہلے بہتر ہو گا کہ موزوں دائرہ کار لیتے ہوئے تفاعل کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ جیومیٹری کے مسائل



شکل 4.94: مثلث میں محصور مستطیل (سوال 5)

سوال 1: رداس r دائرہ کے محیط پر دو نقطوں سے وسط تک سیدھی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ اس خطہ کے محیط کی لمبائی $(2r + s)$ ہے جو 100 m کے برابر ہے۔ r اور s کی کن قیمتوں سے خطے کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا؟

سوال 2: ایک قائمہ مثلث کا وتر 5 cm ہے۔ اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 3: ایک مستطیل جس کا رقبہ 16 cm^2 ہے کا کم سے کم محیط کتنا ہو گا؟

سوال 4: دکھائیں کہ ایک محیط کے تمام مستطیل میں اس کا رقبہ سب سے زیادہ ہو گا جو چکور ہو۔

سوال 5: ایک قائمہ مساوی الساقین مثلث کا وتر 2 اکائیاں لمبا ہے۔ اس میں محصور مستطیل کو شکل 4.94 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. N کے محد کو x کی صورت میں لکھیں۔ (خط AB کی مساوات لکھ کر آپ ایسا کر سکتے ہیں۔)

ب. مستطیل کا رقبہ x کی صورت میں لکھیں۔

ج. مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

سوال 6: ایک مستطیل کا قاعدہ x محور پر ہے جبکہ اس کے بالائی دو راس قطع مکانی $y = 12 - x^2$ پر ہیں۔ اس مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 7: آپ $15\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ چادر کے کونوں سے چکور چادر کاٹ کر کھلا مستطیل ڈبہ بنانا چاہتے ہیں۔ اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟

جواب: $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}\text{ cm}^3$

سوال 8: آپ $(a, 0)$ سے $(0, b)$ تک لکیر کھینچ کر ربع اول میں بند خطہ بناتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس خطے کا رقبہ اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $a = b$ ہو۔

سوال 9: ایک دریا کے کنارے مستطیل رقبے کو تین اطراف سے 800 m کل لمبائی کی دیوار سے گھیرا جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

سوال 10: 216 m^2 مستطیل رقبے کو دھاتی تار سے گھیرا جاتا ہے۔ کسی ایک ضلع کے متوازی تار سے اس خطے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ کم سے کم تار استعمال کرنا مقصود ہے۔ مستطیل کی جسامت کیا ہونی چاہیے؟ تار کی کم سے کم لمبائی کیا ہوگی؟

سوال 11: کم ترین وزنی فولادی ٹینکی 256 m^3 ہو۔ یہ ٹینکی 1 cm موٹی فولادی چادر سے بنائی جائے گی۔ بطور انجینئر آپ بغیر ڈھکن چکور قاعدہ والی ٹینکی درکار ہے جس کا حجم $8 \times 8 \times 4 \text{ m}^3$ جواب: $8 \times 8 \times 4 \text{ m}^3$ کا کام ہے کہ ہلکی ترین ٹینکی بنانے کے لئے ٹینکی کا اضلاع تلاش کریں۔ اضلاع کیا ہوں گے؟

سوال 12: بارش کا پانی بارانی علاقے میں بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لئے زمین کی کھدائی کر کے بغیر ڈھکن 1125 m^3 حجم کی ٹینکی بنائی جاتی ہے جس کا قاعدہ چکور ہے۔ ٹینکی کی گہرائی y میٹر جبکہ قاعدہ کی ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔ ٹینکی کا قاعدہ اور اطراف پر لاگت کے ساتھ ساتھ کھدائی کی لاگت بھی ہے جو حاصل ضرب xy کے راست تناسب ہے۔ اگر کل لاگت $c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$ ہو تب لاگت کو کم سے کم رکھنے کی خاطر x اور y کی ہوں گے؟

سوال 13: ایک مستطیل اشتہار میں 50 cm^2 رقبے پر لکھائی ہوگی۔ بالائی اور نچلے جانب 4 cm اور اطراف پر 2 cm خالی جگہ ہوگی۔ کم سے کم کاغذ استعمال کرنے کے لئے مستطیل اشتہار کے اضلاع کیا ہوں گے؟

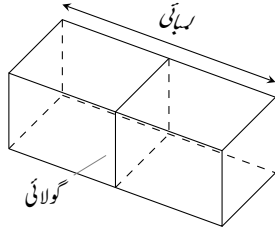
سوال 14: رداس $r = 3$ کی کرہ میں محصور دائری مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے (شکل 14)؟

سوال 15: ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں a اور b ہیں جن کے بیچ زاویہ θ ہے۔ θ کی کون سے قیمت مثلث کی زیادہ سے زیادہ رقبہ دے گی۔ (اشارہ: $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$)

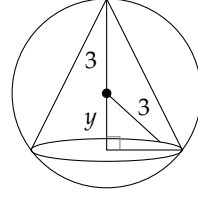
سوال 16: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{5}$ ہے جبکہ اس کے باقی اضلاع x اور y ہیں۔ تفاعل $s = 2x + y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

سوال 17: حجم کا بغیر ڈھکن قائمہ دائری بیلن بنایا جاتا ہے۔ کم سے کم بیلن کی جسامت تلاش کریں۔

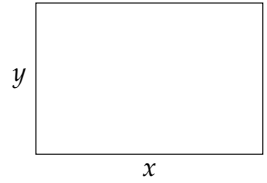
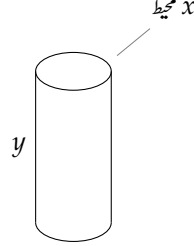
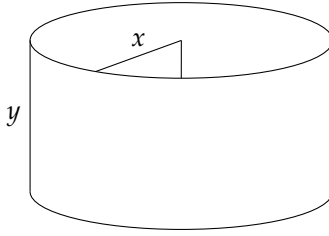
سوال 18: 1000 cm حجم کا قائمہ دائری بیلنی ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ چادر سے بیلن کے اطراف کاٹتے ہوئے کوئی مال ضائع نہیں ہوتا ہے البتہ بالائی اور نچلے دائری حصے کو $2r \times 2r$ چکور سے کاٹتے ہوئے مال ضائع ہوتا ہے۔ یوں ایک ڈبہ بنانے کے لئے $S = 8r^2 + 2\pi rh$



شکل 4.96: ڈبہ برائے سوال 19



شکل 4.95: کرہ میں مخروط (سوال 14)



شکل 4.97: چادر اور بیلن (سوال 21)

رقبے کی چادر درکار ہو گی تاکہ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (مثال 4.34)۔ مثال 4.34 میں کم سے کم لاگت کے لئے h اور r کا تعلق $h = 2r$ تھا۔ اب ان کا تعلق کیا ہو گا؟

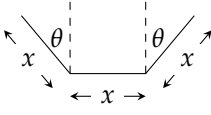
سوال 19: (i) ایک مستطیل ڈبہ کی لمبائی اور گولائی کا مجموعہ 108 cm ہے (شکل 4.96)۔ اس ڈبے کے سر پکڑ ہیں۔ اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس ڈبے کی لمبائی بالمقابل حجم ترسیم کریں اور جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 20: گزشتہ سوال میں پکڑ سروں کی بجائے پکڑ اطراف تصور کریں۔ یوں ڈبے کا حجم $h \times h \times w$ اور گولائی $2h + 2w$ ہو گی۔ اب ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گی؟

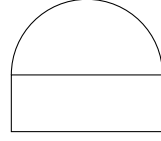
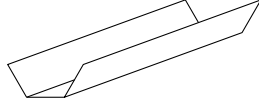
سوال 21: (i) ایک مستطیل چادر جس کا محیط 36 cm اور اضلاع x اور y ہیں کو گول کرتے ہوئے بیلن بنایا جاتا ہے جس کے سر کھلے ہیں۔ اس بیلن کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس مستطیل چادر کے ایک کنارے کو محور تصور کرتے ہوئے، چادر کو اس محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو خیالی بیلنی صورت بناتا ہے۔ اس بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گا؟ (شکل 4.97)

سوال 22: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{3}$ ہے۔ اس کو ایک ضلع کے گرد گھما کر فرضی مخروط بنایا جاتا ہے۔ اس مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ممکن ہے اور اس کا رداس اور قد کیا ہوں گے؟

سوال 23: دائرہ بالمقابل پکڑ



شکل 4.99: پانی کی نالی (سوال 27)



شکل 4.98: کھڑکی (سوال 25)

ا. 4m لمبی تار کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک چکور اور ایک دائرہ بنایا جاتا ہے۔ ان ٹکڑوں کی لمبائیاں کیا ہوں گی کہ دائرے اور چکور کا مجموعی رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو؟

ب. چکور اور دائرے کے مجموعی رقبے کو دائرے کی رداس کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں۔ جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

ج. اب کل رقبے کو چکور کے ضلع کی لمبائی کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں اور جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

سوال 24: مکعب اور کرہ کی سطحی رقبوں کے مجموعے کو مستقل رکھیں۔ مکعب کے ضلع اور کرہ کے رداس کی کون سی نسبت (i) کم سے کم، (ب) زیادہ سے زیادہ مجموعی حجم دے گی؟

سوال 25: ایک مستطیل شیشہ کے اوپر نصف دائری شیشہ مل کر کھڑکی بناتے ہیں (شکل 4.98)۔ مستطیل شیشہ شفاف ہے جبکہ نصف دائری شیشہ ہلکا سیاہ ہے اور فی مربع رقبہ نصف روشنی کو گزرنے دیتا ہے۔ کھڑکی کا محیط مستقل ہے۔ زیادہ سے زیادہ روشنی کے لئے کھڑکی کی جسامت تلاش کریں۔

سوال 26: ایک بیلنی گودام تعمیر کرنی ہے جس کی چھت نصف کروی ہوگی۔ فی مربع سطحی رقبہ نصف کرہ پر لاگت بیلنی دیوار کی فی مربع سطحی رقبہ کی لاگت سے دگنی ہے۔ مستقل حجم کی صورت میں کم سے کم کل لاگت کے لئے گودام کی جسامت تلاش کریں۔ تعمیر میں چٹائی سطح (زمین) پر لاگت اور ضیاع کو نظر انداز کریں۔

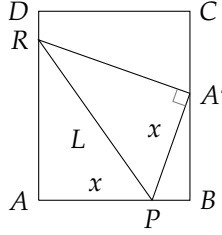
سوال 27: ایک پانی کی نالی تعمیر کرنی ہے جس کی جسامت شکل 4.99 میں دکھائی گئی ہے۔ صرف زاویہ θ متغیر ہے۔ زیادہ سے زیادہ حجم کے لئے θ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 28: ایک مستطیل $8.5 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ کاغذ کو مستوی پر رکھا جاتا ہے (شکل 4.100)۔ کونا A کو مخالف لمبے ضلع پر رکھ کر کاغذ کو چپٹا کیا جاتا ہے۔ لمبائی RP کو کم سے کم کرنا مقصود ہے۔

ا. کاغذ استعمال کرتے ہوئے اس لمبائی کو کم سے کم کریں۔

$$L^2 = \frac{2x^3}{2x-8.5} \text{ دکھائیں}$$

ج. x کی کون سی قیمت L^2 کو کم سے کم بناتی ہے؟



شکل 4.100: کاغذ برائے سوال 28

د. x کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

ہ. x بالمتقابل L ترسیم کریں اور جزو-ب کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

طبعی استعمال

سوال 29: انتظامی حرکت کرتی ایک جسم کی اونچائی $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, $g > 0$ ہے جہاں t سیکنڈوں اور s میٹروں میں ہے۔ جسم کی زیادہ سے زیادہ اونچائی کیا ہوگی؟

سوال 30: ایک عمارت سے 9 m کے فاصلے پر 2.5 m اونچی دیوار ہے۔ دیوار کی دوسری طرف سے عمارت تک سیزھی لگائی جاتی ہے۔ سیزھی کی کم سے کم لمبائی کیا ہوگی؟

سوال 31: شہتیر کہ مضبوطی لکڑی کی شہتیر کی مضبوطی M اس کی چوڑائی w ضرب مربع گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $M = kwd^2$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. 30 cm قطر کے لکڑے کس جسامت کی مضبوط سے مضبوط شہتیر حاصل کی جاسکتی ہے؟

ب. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمتقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمتقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہوگا؟

$$\text{جواب: (i) } \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ cm} \times \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

سوال 32: شہتیر کی سختی S اس کی چوڑائی w ضرب مکعب گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $S = kwd^3$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. 30 cm قطر کی لکڑ سے سخت سے سخت شہتیر حاصل کریں۔ شہتیر کی جسامت کیا ہوگی؟

ب. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہوگا؟

سوال 33: لمحہ t پر ایک بلب میں برقی رو $i = 2 \cos t + 2 \sin t$ ہے۔ رو کی زیادہ سے زیادہ لمحاتی قیمت کیا ہوگی؟

سوال 34: بے رگڑ ریڑھی کو افقی مستوی پر رکھ کر اسپرنگ کے ذریعہ قریبی دیوار کے ساتھ باندھا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ساکن مقام سے اس کو 10 cm دور کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے تاکہ یہ 4 سیکنڈوں کے لئے مستوی پر آگے پیچھے حرکت کر سکے۔ لمحہ t پر اس کا مقام $s = 10 \cos \pi t$ ہے۔

ا. ریڑھی کی زیادہ سے زیادہ رفتار کب اور کتنی ہوگی؟ تب ریڑھی کا مقام اور اس کی اسراع کیا ہوگی؟

ب. جس لمحہ ریڑھی کی اسراع زیادہ سے زیادہ ہو اس لمحہ ریڑھی کا مقام کیا ہوگا؟ تب اس کی رفتار کیا ہوگی؟

سوال 35: علیحدہ علیحدہ اسپرنگ کے ذریعہ چھت سے دو کمیتوں کو قریب قریب لٹکایا جاتا ہے۔ ان کے مقام بالترتیب $s_1 = 2 \sin t$ اور $s_2 = \sin 2t$ ہیں۔

ا. کس لمحہ کمیت ایک دوسرے کے قریب سے گزرتے ہیں؟ (اشارہ: $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$)

ب. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ کے دوران ان کے درمیان انتہائی فاصلہ زیادہ سے زیادہ کب اور کتنا ہوگی؟ (اشارہ: $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$)

سوال 36: محور پر دو ذرات کے مقام $s_1 = \sin t$ اور $s_2 = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ ہیں۔

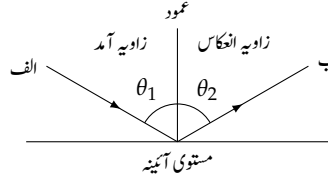
ا. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں دونوں ذرات ایک دوسرے سے کم ملتے ہیں؟

ب. ذرات ایک دوسرے سے کب دور ترین ہوتے ہیں؟

ج. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں ان کے بیچ فاصلہ کی تبدیلی تیز ترین ہوگی؟

سوال 37: لمحہ t پر محور پر ایک ذرے کا مقام $x = (t - 1)(t - 4)^4$ ہے۔

ا. ذرہ ساکن کب ہوگا؟



شکل 4.101: زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے (سوال 39)

ب. کس وقفے کے دوران ذرہ بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. بائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی تیز سے تیز رفتار کیا ہوگی؟

د. وقفہ $0 \leq t \leq 6$ کے لئے x بالمقابل t ترسیم کریں۔ اسی وقفے کے لئے $\frac{dx}{dt}$ بالمقابل t کو بھی ترسیم کریں۔ تزییمات کا ایک دوسرے کے ساتھ اور حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 38: دوپہر کے وقت $t = 0$ بحری جہاز ب کے عین شمال میں بحری جہاز الف موجود ہے۔ بحری جہاز الف 24 km h^{-1} کی رفتار سے جنوب کی طرف رواں ہے جبکہ بحری جہاز ب مشرق کی طرف 16 km h^{-1} کی رفتار سے رواں ہے۔

ا. ان کے بیچ فاصلہ s کو t کی صورت میں لکھیں جہاں s کلومیٹر اور t گھنٹوں میں ہے۔

ب. دوپہر کے وقت ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوگا؟ ایک گھنٹہ بعد یہ شرح کیا ہوگی؟

ج. اس دن حد نظر 10 km تھی۔ کیا ان بحری جہازوں نے ایک دوسرے کو دیکھا ہوگا؟

د. $0 \leq t \leq 3$ کے لئے s بالمقابل t اور $\frac{ds}{dt}$ بالمقابل t ترسیم کریں۔ تزییمات کا حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

ہ. ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ربع اول میں $\frac{ds}{dt}$ کی ترسیم کا افقی متقارب پایا جاتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $t \rightarrow \infty$ کرنے سے $\frac{ds}{dt}$ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ اس حد کو تلاش کریں۔ اس حد کا انفرادی رفتاروں کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 39: بصریات میں اصول فغما کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی اس راستے سے پہنچتی ہے جس پر کم سے کم وقت درکار ہو۔ شکل 4.101 میں نقطہ الف سے شعاع خارج ہو کر آئینہ سے انعکاس کرتے ہوئے نقطہ ب تک پہنچتی ہے۔ دکھائیں کہ اگر شعاع اصول فغما کو مطمئن کرتا ہو تب زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔ (یہ نتیجہ بغیر احصاء کے خالصتاً جیومیٹری کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔)

سوال 40: عمل انگیز: عمل انگیز¹⁸ اس مادہ کو کہتے ہیں جس کی موجودگی کیمیائی تعامل کی شرح پر اثر انداز ہوتی ہے اور جو خود جوں کا

توں رہتا ہے۔ خود عمل انگیز¹⁹ کیمیائی تعامل اس کو کہتے ہیں جس میں حاصل کیمیا خود اس تعامل کے عمل انگیز ہوں۔ خود عمل انگیز کیمیائی تعامل کی ایک مثال 13°C سے کم درجہ پر پڑا ہوا دھاتی ٹین کا کچھ عرصہ میں سفید برادہ میں تبدیل ہونا ہے۔ یہ برادہ خود اس کیمیائی تعامل کا عمل انگیز ہے۔ اس قسم کے تعامل کی شرح شروع میں کم ہوتی ہے جو عمل انگیز پیدا ہونے کے بعد رفتار پکڑتی ہے اور آخر میں ابتدائی کیمیا کم ہونے کی بنا دوبارہ آہستہ ہوتی ہے۔

اس قسم کے تعامل کی رفتار $v = \frac{dx}{dt}$ ابتدائی مواد اور پیدا مواد کے حاصل ضرب کے راست تناسب ہو گی، یعنی

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

جہاں a مواد کی ابتدائی مقدار، x پیدا مواد کی مقدار اور k تناسبی مستقل ہے۔ x کی وہ قیمت تلاش کریں جو زیادہ سے زیادہ v دیگا؟ v کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہو گی؟

ریاضیاتی استعمال

سوال 41: کیا تعامل $f(x) = x^2 - x + 1$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ تفصیل پیش کریں۔

سوال 42: آپ سے پوچھا گیا ہے کہ آیا تعامل $f(x) = 3 + 4 \cos x + \cos 2x$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے۔

ا. سمجھائیں کہ آپ کو کیوں وقفہ $[0, 2\pi]$ میں x کی قیمتوں کے لئے تعامل پر غور کرنا ہو گا۔

ب. کیا f کبھی منفی ہو گا؟ سمجھائیں۔

سوال 43: منحنی $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $(c, 0)$ کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔ (i) $c \geq \frac{1}{2}$ ہے، (ب) $c < \frac{1}{2}$ ہے۔

سوال 44: a کی کس قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کا (i) $x = 2$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال 45: a اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ کی (i) $x = -1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 4$ پر مقامی کم سے کم اور $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال 46: دکھائیں کہ a کی کسی بھی قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کی مقامی کم سے کم قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

سوال 47:

ا. وقفہ $0 < x < \pi$ پر تعامل $y = \cos x - \sqrt{2} \csc x$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 48:

ا. وقفہ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ پر تفاعل $y = \tan x + 3 \cot x$ کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 49: منحنی $y = \sqrt{x}$ نقطہ $(\frac{1}{2}, 16)$ کے کتنا نزدیک آتی ہے؟

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ اور $g(x)$ قابل تفرق ہیں جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے بیچ زیادہ سے زیادہ فاصلہ نقطہ $x = c$ پر پایا جاتا ہے۔ کیا اس نقطے پر ان تفاعل کے مماس میں کوئی خاص بات پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

