احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 15

سمتی میدان میں تکمل

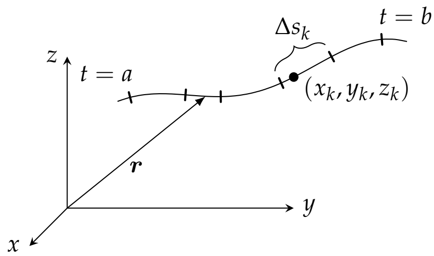
ایک جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقناطیسیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاو پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

15.1 خطی تکمل

جب فضا میں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$, $a \le t \le b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگا۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ f کا **خطی تکمل**[1] کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، خطی تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

خطی تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان تکملات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاو کا حساب کرتے ہیں۔

[1] line integral



شکل 15.1: منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کو $t = a$ اور $t = b$ کے بیچ قوسچوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہے۔

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کی، متناہی تعداد کی قوسچوں میں، خانہ بندی کرتے ہیں (شکل 15.1)۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہو گی۔ ہم ہر قوسچہ پر ایک نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k \tag{15.1}$$

اگر f استمراری ہو اور g ، h ، اور k کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات 15.1 کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a **تا** b **اس قوس پر** f **کا تکمل** کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس تکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{"} C \text{ پر } f \text{ کا تکمل"} \tag{15.2}$$

ہموار منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \le t \le b$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ ہموار ہو ($\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہو اور کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہ ہو) تب ہم $\mathrm{d}s$ کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $\mathrm{d}s = \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \qquad t_0 = a \text{ حصہ 12.3 کی مساوات 12.20 میں}$$

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے تکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

خطی تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تفاعل f کا تکمل لینے کے لئے

ا. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t \tag{15.3}$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل C کی لمبائی دیگا۔

مثال 15.1: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک قطع پر $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ تکمل کریں (شکل 15.2)۔

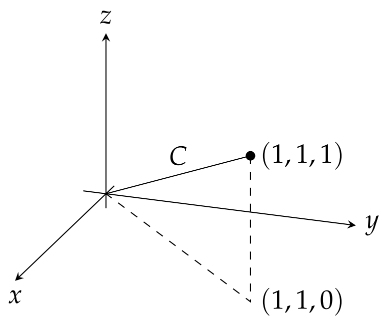
حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

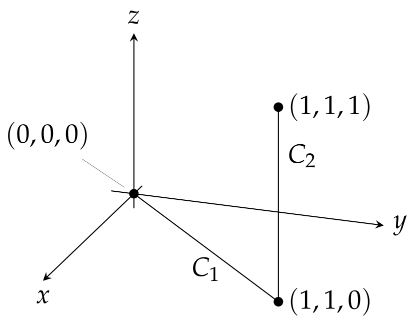
جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہیں ہو سکتا ہے لہذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t && \text{مساوات 15.3}\\
&= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\Big[t^2 - t^3\Big]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

□



شکل 15.2: تکمل کی راہ (مثال 15.1)۔



شکل 15.3: تکمل کی راہ (مثال 15.2)۔

15.1.1 جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1 ، C_2 ، $\cdots$ ، C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکملات کا مجموعہ ہو گا:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s \tag{15.4}$$

مثال 15.2: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ C_1 اور C_2 پر چل کر پہنچا جاتا ہے (شکل 15.3)۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم C_1 اور C_2 کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1
\end{aligned}$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_{C_1\cup C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{مساوات } 15.4\\
&= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 (t-3t^2+0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-3+t)(1)\,\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{2}\Big[\frac{t^2}{2} - t^3\Big]_0^1 + \Big[\frac{t^2}{2} - 2t\Big]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

یہاں مثال 15.1 اور مثال 15.2 کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا تکمل لینے کے لئے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ تکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔سوم، مثال 15.1 میں C اور مثال 15.2 میں $C_1 \cup C_2$ پر تکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تکملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے تکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

کمیت: $$M = \iiint_D \delta(x, y, z) \, \mathrm{d}H$$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x\delta \, \mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\delta \, \mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\delta \, \mathrm{d}s$$

مرکز کمیت کے محدد:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}s & I_y &= \int_C (x^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}s \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s & I_L &= \int_C r^2\delta \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

جہاں لکیر L سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

لکیر L کے لحاظ سے رداس دوار: $$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

مثال 15.3: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پایا جاتا ہے (شکل 15.4)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس اسپرنگ کی کثافت مستقل تفاعل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کمیت اور مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکلی کی بنا اس کا مرکز کمیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $\left|\boldsymbol{v}(t)\right|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{v}(t)\right| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
&= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}
\end{aligned}$$

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\text{پیچدار}} \delta\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2)\delta\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)(\sqrt{17})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}} = 1
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔ □

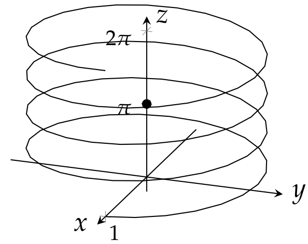
مثال 15.4: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے (شکل 15.5)۔ محراب کے نقطہ (x, y, z) پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کمیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

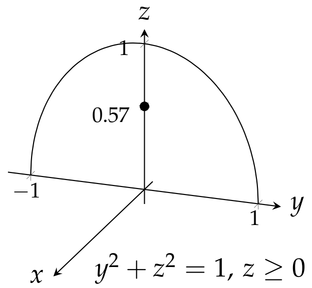
$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \pi$$

لکھتے ہوئے $\bar{z}$ دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

$$\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$



شکل 15.4: اسپرنگ برائے مثال 15.3

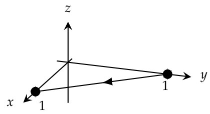


شکل 15.5: محراب کا مرکز کمیت (مثال 15.4)۔

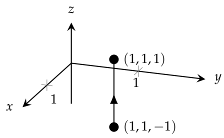
ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_C \delta \,\mathrm{d}s = \int_C (2 - z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (2 - \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi - 2 \\
M_{xy} &= \int_0^C z\delta \,\mathrm{d}s = \int_C z(2 - z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (2\sin t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{8 - \pi}{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
\end{aligned}
$$

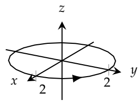
یوں مرکز کمیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔ □



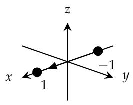
(ا)



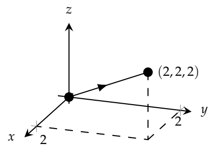
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

سوالات

سمتی مساوات کی ترسیمات

سوال 15.1 تا سوال 15.1 میں دی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل تا شکل میں تلاش کریں۔

سوال 15.1: $\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 1$

سوال 15.2: $\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 1$

سوال 15.3: $\quad \boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 15.4: $\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}, \quad -1 \le t \le 1$

سوال 15.5: $\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2$

جوابات