احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

رتبہ اور "o" علامتیت

بڑے O اور چھوٹے o کی علامت کمپیوٹر سائنس میں عام استعمال ہوتی ہے۔ انہیں یہاں متعارف کیا جاتا ہے۔

تعریف: اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ f کا رتبہ g سے کم ہے جس کو $f = o(g)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو " f ، g کا چھوٹا عددی o ہے" پڑھا جاتا ہے۔

□

یوں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $f = o(g)$ سے مراد $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح g سے کم ہے۔

مثال 7.51:

$$\ln x = o(x) \quad \text{پر} \quad x \to \infty \quad \text{لہٰذا} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{چونکہ}$$
$$x^2 = o(x^3+1) \quad \text{پر} \quad x \to \infty \quad \text{لہٰذا} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = 0 \quad \text{چونکہ}$$

□

تعریف: فرض کریں کافی بڑے x پر $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔ تب کافی بڑے x پر اگر کسی مثبت عدد صحیح M کے لئے

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le M$$

ہو تب $x \to \infty$ پر f کا رتبہ زیادہ سے زیادہ g کے رتبے جتنا ہو گا۔ اس کو ہم $f = O(g)$ سے ظاہر کرتے ہیں جس کو " f ، g کا بڑا O ہے' پڑھا جاتا ہے۔

□

مثال 7.52: چونکہ کافی بڑے x کے لئے $\frac{x+\sin x}{x} \le 2$ ہے لہٰذا $x \to \infty$ پر $x + \sin x = O(x)$ ہو گا۔□

مثال 7.53: $x \to \infty$ پر $\frac{e^x+x^2}{e^x} \to 1$ کی بنا $x \to \infty$ پر $e^x + x^2 = O(e^x)$ ہو گا۔ اسی طرح $x \to \infty$ پر $\frac{x}{e^x} \to 0$ کی بنا $x \to \infty$ پر $x = O(e^x)$ ہو گا۔ □

تعریف پر دوبارہ نظر دوڑاتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ کافی بڑے x پر مثبت تفاعل کے لئے $f = o(g)$ سے مراد $f = O(g)$ ہے۔ اس کے علاوہ اگر f اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے (سوال 11)۔

7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش

کمپیوٹر کسی لائحہ کار کے تحت قدم با قدم چل کر کوئی کام سر انجام دیتا ہے۔اس لائحہ کار کو کمپیوٹر الخوارزم[22] کہتے ہیں۔اس لائحہ کار کی کار گزاری جاننے کی خاطر ماہرین عموماً اس کام کو سرانجام کرنے کے کئے درکار قدموں کی گنتی کرتے ہیں۔ ایک ہی کام سرانجام دینے کے دو مختلف لائحہ کار کی کار گزاری میں بہت زیادہ فرق ہو سکتا ہے جنہیں بڑے O علامتی روپ میں پیش کیا جاتا ہے۔ آئیں ایک مثال دیکھتے ہیں۔

ایک لغت میں کسی ایک حرف سے شروع ہونے والے الفاظ کی تعداد $26\,000$ ہے۔ آپ اس حرف سے شروع ہونے والے ایک لفظ کو دو طریقوں سے تلاش کر سکتے ہیں۔ پہلی ترکیب میں آپ پہلے لفظ سے شروع کرتے ہوئے ایک ایک لفظ پڑھ کر درکار لفظ تک پہنچتے ہیں۔ اس ترکیب کو ترتیبی تلاش[23] کہتے ہیں جو لغت میں ترتیب سے الفاظ لکھے گئے ہونے سے استفادہ نہیں کرتا ہے۔ اس ترتیب میں آپ ہر صورت لفظ تلاش کر پائیں گے (یا جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے) لیکن عین ممکن ہے کہ آپ کو $26\,000$ قدم چلنا پڑے۔

اس سے بہتر ترکیب میں آپ لغت کے عین وسط (ایک دو الفاظ آگے پیچھے ہو سکتے ہیں) میں ایک لفظ کو دیکھتے ہیں۔ چونکہ لغت میں الفاظ ترتیب سے ہیں لہٰذا آپ معلوم کر پائیں گے کہ آیا درکار لفظ پہلی نصف یا دوسری نصف حصہ میں ہے۔ لغت کی اس نصف حصہ کو رد کریں جس میں لفظ موجود نہیں ہے۔یوں پہلی قدم میں $13\,000$ الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اب منتخب حصہ کے نصف میں جا کر دیکھیں کہ درکار لفظ کس جانب پایا جاتا ہے۔ یوں دوسرے قدم میں 6500 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہر قدم پر آدھے حصے کو رد کرتے ہوئے چلتے جائیں جب تک آپ درکار لفظ تلاش نہیں کر پاتے یا الفاظ ختم نہیں ہو جاتے۔ چونکہ

$$\frac{26000}{2^{15}} < 1$$

ہوتا ہے لہٰذا آپ کو زیادہ سے زیادہ 15 قدم چل کر درکار لفظ مل جائے گا یا آپ جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے۔ اس ترتیب کو ثنائی!تلاش[24] کہتے ہیں۔

ایک سلسلہ جس کی لمبائی n ہو میں کسی جزو کی تلاش کے لئے ترتیبی تلاش کو n قدم درکار ہو سکتے ہیں۔ اس کے برعکس ثنائی تلاش استعمال کرتے ہوئے اگر $2^{m-1} < n < 2^m$ ہو تب $m-1 < \log_2 n \le m$ ہو گا اور ایک لفظ تک پہنچنے کی خاطر زیادہ سے زیادہ $m = \lceil \log_2 n \rceil$ ($\log_2 n$ کا عدد صحیح چھت تفاعل) بار دو حصوں میں تقسیم کی ضرورت پیش آئے گی۔ یوں ثنائی تلاش میں $\log_2 n$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔

بڑے O روپ میں اس تمام کو نہایت خوش اسلوبی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ترتیبی سلسلہ میں ترتیبی تلاش کو $O(n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے جبکہ ثنائی تلاش کو $O(\log_2 n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔ ہماری مثال میں ان دو میں بہت زیادہ فرق پایا جاتا ہے ($26\,000$ بالمقابل 15) اور چونکہ $n \to \infty$ کرتے ہوئے $\log_2 n$ کے لحاظ سے n زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے لہٰذا n بڑھانے سے یہ فرق زیادہ بڑھے گا۔

---

[22] computer algorithm
[23] sequential search
[24] binary search

سوالات

قوت نما e^x کے ساتھ موازنہ

سوال 1: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $x+3$
ب. $x^3+\sin^2 x$
ج. $\sqrt{x}$
د. 4^x
ہ. $(\frac{3}{2})^x$
و. $e^{x/2}$
ز. $\frac{e^x}{2}$
ح. $\log_{10} x$

جواب: (ا) آہستہ (ب) آہستہ (ج) آہستہ (د) تیز (ہ) آہستہ (و) آہستہ (ز) ایک جیسا (ح) آہستہ

سوال 2: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $10x^4+30x+1$
ب. $x\ln x - x$
ج. $\sqrt{1+x^4}$
د. $(\frac{5}{2})^x$
ہ. e^{-x}
و. xe^x
ز. $e^{\cos x}$
ح. e^{x-1}

طاقت x^2 کے ساتھ موازنہ

سوال 3: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. x^2+4x
ب. x^5-x^2
ج. $\sqrt{x^4+x^3}$
د. $(x+3)^2$
ہ. $x\ln x$
و. 2^x
ز. x^3e^{-x}
ح. $8x^2$

جواب: (ا) ایک جیسا (ب) تیز (ج) ایک جیسا (د) ایک جیسا (ہ) آہستہ (و) تیز (ز) آہستہ (ح) ایک جیسا

سوال 4: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $x^2+\sqrt{x}$ ج. x^2e^{-x} ہ. x^3-x^2 ز. $(1.1)^x$

ب. $10x^2$ د. $\log_{10}(x^2)$ و. $(\frac{1}{10})^x$ ح. x^2+100x

لوگارتھم $\ln x$ کے ساتھ موازنہ

سوال 5: $x\to\infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $\log_3 x$ ج. $\ln\sqrt{x}$ ہ. x ز. $\frac{1}{x}$

ب. $\ln 2x$ د. $\sqrt{x}$ و. $5\ln x$ ح. e^x

جواب: (ا) ایک جیسا (ب) ایک جیسا (ج) ایک جیسا (د) تیز (ہ) تیز (و) ایک جیسا (ز) آہستہ (ح) تیز

سوال 6: $x\to\infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $\log_2(x^2)$ ج. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ہ. $x-2\ln x$ ز. $\ln(\ln x)$

ب. $\log_{10} 10x$ د. $\frac{1}{x^2}$ و. e^{-x} ح. $\ln(2x+5)$

شرح نمو کے لحاظ سے منظم کرنا

سوال 7: $x\to\infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے منظم کریں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

ا. e^x ب. x^x ج. $(\ln x)^x$ د. $e^{x/2}$

جواب: د، ا، ج، ب

سوال 8: $x\to\infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے ترتیب دیں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

ا. 2^x ب. x^2 ج. $(\ln 2)^x$ د. e^x

بڑا O اور چھوٹا o ؛ رتبہ

سوال 9: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

ا. $x = o(x)$ د. $x = O(2x)$ ز. $\ln x = o(\ln 2x)$

ب. $x = o(x+5)$ ہ. $e^x = o(e^{2x})$

ج. $x = O(x+5)$ و. $x + \ln x = O(x)$ ح. $\sqrt{x^2+5} = O(x)$

جواب: (ا) غلط (ب) غلط (ج) درست (د) درست (ہ) درست (و) درست (ز) غلط (ح) درست

سوال 10: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

ا. $\frac{1}{x+3} = O(\frac{1}{x})$ د. $2 + \cos x = O(2)$ ز. $\ln(\ln x) = O(\ln x)$

ب. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = O(\frac{1}{x})$ ہ. $e^x + x = O(e^x)$

ج. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ و. $x \ln x = o(x^2)$ ح. $\ln x = o(\ln(x^2+1))$

سوال 11: دکھائیں کہ اگر $x \to \infty$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح برابر ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے۔

سوال 12: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ سے کم ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ زیادہ سے زیادہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: جب f کا درجہ g کے درجہ سے کم یا اس کے برابر ہو۔

سوال 14: قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ

موجودہ حصہ میں پیش کی گئی تعریف کو زیادہ عمومی بنانے کی خاطر ہم اس میں $x \to \infty$ کی پابندی ختم کر کے اس کی بجائے $x \to a$ پر حد لیتے ہیں جہاں a حقیقی عدد ہے۔ دکھائیں کہ قاعدہ سمسن سے حاصل قطعی تکمل کی تخمین میں $h \to 0$ کرتے ہوئے خلل $O(h^4)$ ہو گا جبکہ قاعدہ ذوزنقہ سے حاصل تخمین میں خلل $O(h^2)$ ہو گا۔ یوں ان دو تراکیب کے نتائج کی درستگی کو اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

دیگر موازنے

سوال 15: ناطق تفاعل کے حد کے بارے میں حصہ 4.5 میں حاصل نتیجہ ہمیں $x \to \infty$ کی صورت میں کثیر رکنی کی اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا بتاتا ہے؟

جواب: زیادہ درجے کا کثیر رکنی، کم درجے کے کثیر رکنی سے زیادہ تیز بڑھتا ہے۔ ایک جیسے درجہ کے کثیر رکنی کی شرح نمو برابر ہوتی ہے۔

سوال 16: کمپیوٹر ترسیم

(ا) درج ذیل پر تحقیق کریں۔ اس کے بعد قاعدہ لھوپیٹال سے اس تحقیق سے حاصل معلومات کی وجہ بیان کریں۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+999)}{\ln x}$$

(ب) دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت، مستقل a کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ اس سے تفاعل $f(x) = \ln(x+a)$ اور $g(x) = \ln x$ کے اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

سوال 17: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{10x+1}$ اور $\sqrt{x+1}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل $\sqrt{x}$ کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال 18: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^4+x}$ اور $\sqrt{x^4-x^3}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل x^2 کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال 19: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کی شرح نمو کسی بھی x^n کے شرح نمو سے زیادہ ہو گی، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے، مثلاً $x^{1\,000\,000}$۔ (اشارہ۔ x^n کا n واں تفرق کیا ہے؟)

سوال 20: تفاعل e^x ہر کثیر رکنی سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے

دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کسی بھی کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

سوال 21:

ا. دکھائیں کہ کسی بھی مثبت عدد صحیح n کی صورت میں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو تفاعل $x^{1/n}$ (مثلاً $x^{1/1\,000\,000}$) کی شرح نمو سے کم ہو گی۔

ب. اگرچہ $x^{1/1\,000\,000}$ کی قیمت آخر کار $\ln x$ کی قیمت سے زیادہ ہو گی، وہاں تک پہنچنے کے لئے آپ کو محور x پر بہت دور جانا ہو گا۔ ایسا $x > 1$ تلاش کریں جس پر $x^{1/1\,000\,000} > \ln x$ ہو۔ دھیان رہے کہ $x > 1$ کی صورت میں مساوات $\ln x = x^{1/1\,000\,000}$ کو $\ln(\ln x) = \frac{\ln x}{1\,000\,000}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ج. تفاعل $x^{1/10}$ کو بھی $\ln x$ سے بڑھنے کے لئے بہت وقت درکار ہو گا۔ کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $x^{1/10}$ کی ترسیم $\ln x$ کی ترسیم کو کٹ کرتی ہو یا جہاں $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو۔

د. وہ نقطہ جس پر $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو کے قریب اس مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے x تلاش کریں۔

جواب: (ب) $\ln(e^{17\,000\,000}) = 17\,000\,000 < (e^{17\times10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx 24\,154\,952.75$ (ج) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ ، (د) نقطہ تقاطع $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ ہے۔

سوال 22: تفاعل $\ln x$ کی شرح نمو ہر کثیر رکنی سے کم ہے
دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو کسی بھی غیر مستقل کثیر رکنی سے کم ہو گی۔

الخوارزم اور تلاش

سوال 23: (ا) آپ کمپیوٹر کی مدد سے ایک کام سرانجام دینا چاہتے ہیں۔ آپ کے پاس تین الخوارزم موجود ہیں جن کے لئے کمپیوٹر کو درکار قدموں کی تعداد درج ذیل تفاعل دیتے ہیں۔ n کی بڑی قیمت کی صورت میں ان میں سے کونسا الخوارزم بہترین ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$n\log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2$$

(ب) جزو-الف میں دیے گئے تفاعل کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کونسا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔
جواب: (ا) جو $O(n\log_2 n)$ قدم چلتا ہے۔

سوال 24: درج ذیل تفاعل کے لئے سوال 23 کو دہرائیں۔

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^n$$

سوال 25: ایک مرتب سلسلہ جس میں دس لاکھ اجزاء پائے جاتے ہیں میں سے آپ کو ایک جزو تلاش کرنا ہے۔ ترتیبی تلاش کے لئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟ ثنائی تلاش کے لئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟
جواب: ترتیبی تلاش کو دس لاکھ قدم چلنا پڑھ سکتا ہے جبکہ ثنائی تلاش میں زیادہ سے زیادہ 20 قدم چلنا ہو گا۔

سوال 26: ایک مرتب سلسلہ میں 450 000 اجزاء پائے جاتے ہیں جن میں سے آپ کو ایک جزو کی تلاش ہے۔ ترتیبی تلاش اور ثنائی تلاش کرتے ہوئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟

جدول 7.6: تکونیاتی تفاعل کو ایک ایک بنانے کی خاطر دائرہ کار کو محدود کیا گیا ہے۔

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$\cot x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل

الٹ تکونی تفاعل کی ضرورت اس وقت پیش آتی ہے جب ہم مثلث کے ضلع کو ناپ کر زاویہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم الٹ تفرق بھی مہیا کرتے ہیں اور تفرقی مساوات کے حل میں عموماً پائے جاتے ہیں۔ اس حصہ میں ان تفاعل کی تعریف پیش کی جائے گی، ان کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا اور ان کی قیمت حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

الٹ تکونیاتی کی تعریف

چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں دہراتی ہیں لہٰذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہیں البتہ ان کے دائرہ کار کو ایسے وقفوں پر پابند کیا جا سکتا ہے جہاں یہ ایک ایک ہوں (جدول 7.6)۔

چونکہ محدود دائرہ کار والے تکونیاتی تفاعل ایک ایک ہیں لہٰذا ان کا الٹ پائے جاتے ہیں جنہیں ظاہر کرنا کا طریقہ درج ذیل ہے۔

$$y = \sin^{-1} x$$
$$y = \cos^{-1} x$$
$$y = \tan^{-1} x$$
$$y = \cot^{-1} x$$
$$y = \sec^{-1} x$$
$$y = \csc^{-1} x$$

ہم کہیں گے " x کا الٹ سائن y کے برابر ہے"، وغیرہ۔ یاد رہے کہ ان الٹ تفاعل میں -1 سے مراد الٹ تفاعل ہے اور لہٰذا اس کو ہر گز بالعکس متناسب تصور نہیں کیا جائے۔ مثال کے طور پر $\sin x$ کا بالعکس متناسب $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$ ہو گا۔

الٹ تکونیاتی تفاعل کے دائرہ کار یوں منتخب کئے جاتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) \tag{7.32}$$

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}(1/x) \tag{7.33}$$

$$\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \tag{7.34}$$

ان تعلقات کو استعمال کر کے $\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$ اور $\tan^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ہم بالترتیب $\sec^{-1} x$ ، $\csc^{-1} x$ اور $\cot^{-1} x$ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

الٹ سائن اور الٹ کوسائن

متغیر x کے الٹ سائن یعنی $\sin^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کا سائن x کے برابر ہو۔ اسی طرح $\cos^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کے کوسائن کی قیمت x ہو۔

تعریف: $y = \sin^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لئے $\sin y = x$ ہو۔ اسی طرح $y = \cos^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[0, \pi]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لئے $\cos y = x$ ہو۔

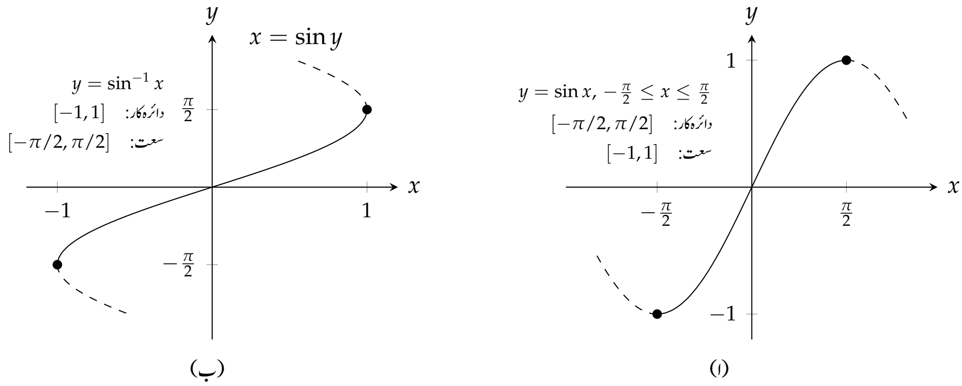
□

تفاعل $y = \sin^{-1} x$ (شکل 7.39) کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے (اور عین $x = \sin y$ کی ترسیم پر پائی جاتی ہے)۔ یوں الٹ سائن طاق تفاعل ہے:

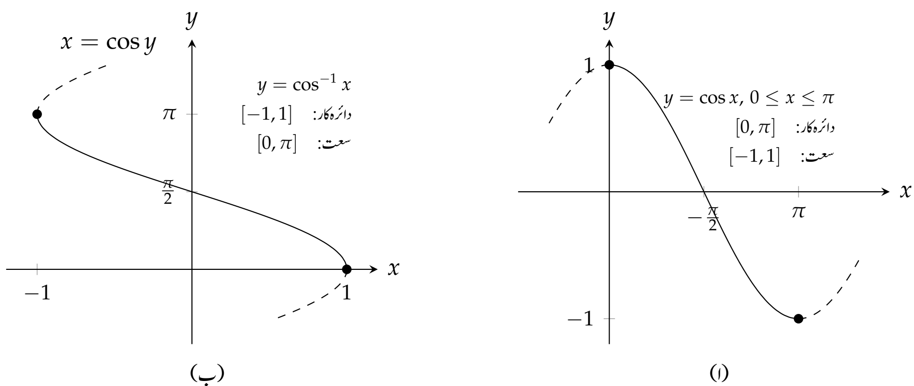
$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x \tag{7.35}$$

تفاعل $y = \cos^{-1} x$ (شکل 7.40) کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے۔

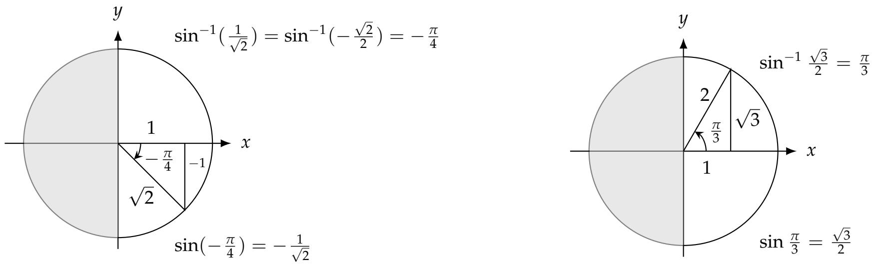
مثال 7.54: تفاعل $\sin^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں



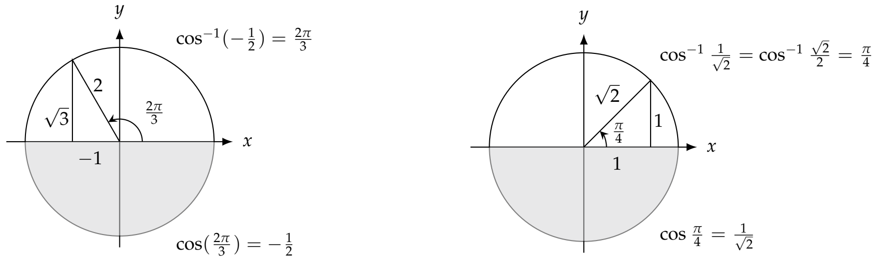
شکل 7.39: ترسیمات برائے (ا) $y = \sin x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$ اور (ب) الٹ سائن تفاعل $y = \sin^{-1} x$ ؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\sin^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \sin y$ کا کچھ حصہ ہے۔



شکل 7.40: ترسیمات برائے (ا) $y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$ اور (ب) الٹ کوسائن تفاعل $y = \cos^{-1} x$ ؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\cos^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \cos y$ کا کچھ حصہ ہے۔



شکل 7.41: سائن اور الٹ سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.54)۔



شکل 7.42: کوسائن اور الٹ سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.55)۔

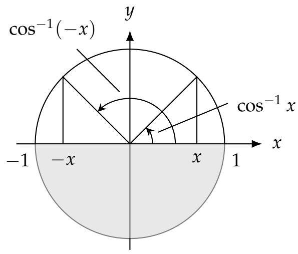
الٹ سائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل 7.54 میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\sin^{-1} x$ کا سعت $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ہے لہٰذا زاویے ربع اول اور ربع چہارم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

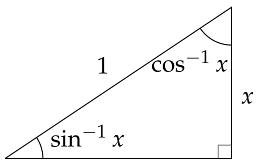
□

مثال 7.55: تفاعل $\cos^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

الٹ کوسائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل 7.55 میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا



شکل 7.43: $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$



شکل 7.44: $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ x $\cos^{-1}$ کا سعت $[0, \pi]$ ہے لٰہذا زاویے ربع اول اور ربع دوم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

□

تماثل جن میں الٹ سائن اور الٹ کوسائن پائے جاتے ہوں

ہم شکل 7.43 میں دیکھتے ہیں کہ x کا الٹ کوسائن تماثل

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi \tag{7.36}$$

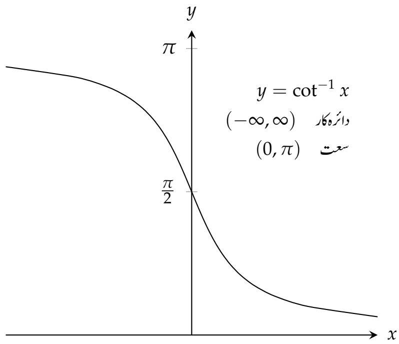
کو مطمئن کرتا ہے جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos^{-1}(x) = \pi - \cos^{-1} x \tag{7.37}$$

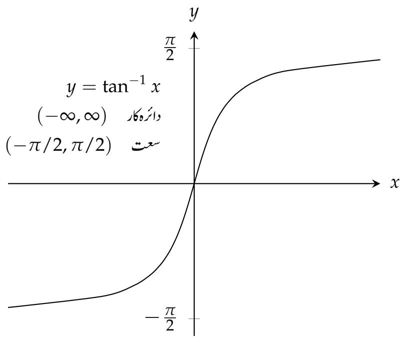
اسی طرح شکل 7.44 میں مثلث کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \tag{7.38}$$

اگرچہ شکل 7.44 میں دی گئی مثلث سے یہ ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے لیکن مساوات 7.38 وقفہ $[-1,1]$ میں دیگر x کے لئے بھی درست ہے۔ یہ حقیقت البتہ مساوات 7.35 اور مساوات 7.37 کا نتیجہ ہے۔



شکل 7.46: ترسیم $y = \cot^{-1} x$



شکل 7.45: ترسیم $y = \tan^{-1} x$

$\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ اور $\csc x$ کے الٹ

متغیر x کا الٹ ٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا ٹینجنٹ x ہو۔ اسی طرح x کا الٹ کوٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا کوٹینجنٹ x ہو۔

تعریف : وقفہ $(-\pi/2, \pi/2)$ میں وہ عدد جس کا $\tan y = x$ ہو عدد $y = \tan^{-1} x$ ہو گا۔ اسی طرح وقفہ $(0, \pi)$ میں وہ عدد جس کا $\cot y = x$ ہو عدد $y = \cot^{-1} x$ ہو گا۔

□

ہم کھلا وقفہ لیتے ہیں تا کہ ان نقطوں سے نجات حاصل کر سکیں جن پر ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ غیر معین ہیں۔

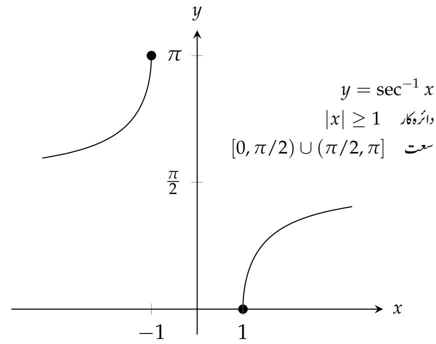
تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کی ترسیم تفاعل $x = \tan y$ کی ترسیم، جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے، کا کچھ حصہ ہے لہٰذا یہ بھی مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا (شکل 7.45)۔ الجبرائی طور پر اس سے مراد

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \tag{7.39}$$

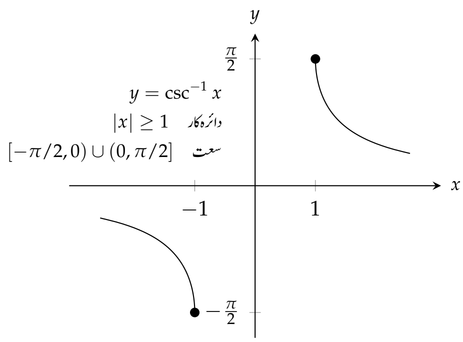
ہے، یعنی، الٹ ٹینجنٹ طاق تفاعل ہے۔ تفاعل $y = \cot^{-1} x$ کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے (شکل 7.46)۔

تفاعل $\sec x$ اور $\csc x$ کے محدود روپ کے الٹ کی ترسیمات کو بالترتیب شکل 7.47 اور شکل 7.48 میں دکھایا گیا ہے۔

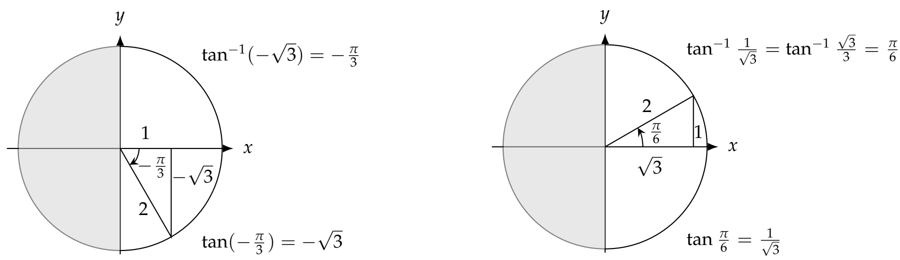
انتباہ: متغیر x کی منفی قیمتوں کے لئے $\sec^{-1} x$ کی تعریف پر اتفاق نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم ربع دوم میں $\frac{\pi}{2}$ اور π کے بیچ زاویہ لیں گے۔ اس انتخاب کی بنا $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ ہو گا اور $\sec^{-1} x$ کے دائرہ کار کے ہر حصہ پر $\sec^{-1} x$ بڑھتا ہوا تفاعل ہو گا۔



شکل 7.47: ترسیم $y = \sec^{-1} x$



شکل 7.48: ترسیم $y = \csc^{-1} x$



شکل 7.49: الٹ کوٹینجنٹ کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.56)۔

مثال 7.56: الٹ کوٹینجنٹ $\tan^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

الٹ کوٹینجنٹ کی مخصوص قیمتوں کا حصول شکل 7.49 میں دکھایا گیا ہے۔ درج ذیل دیگر قیمتیں بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔

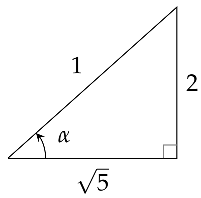
x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

□

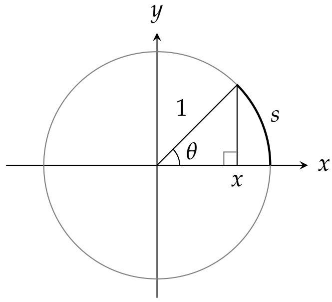
مثال 7.57: اگر $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہو تب $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

حل: چونکہ $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہے لہٰذا ہم α کو قائمہ مثلث کا ایک زاویہ تصور کرتے ہیں جس کا مخالف ضلع 2 اور وتر 3 ہیں۔ مثلث کا تیسرا ضلع (قاعدہ) درج ذیل ہو گا (شکل 7.50)۔

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \qquad \text{مسئلہ فیثاغورث}$$



شکل 7.50: مثلث کی مدد سے زاویوں کا حصول (مثال 7.57)



شکل 7.51: اکائی دائرہ میں زاویہ $\theta = \cos^{-1} x$ مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گا۔

ہم مثلث پر قاعدہ کی لمبائی لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}},\ \csc\alpha = \frac{3}{2},\ \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

□

رداس r کے دائرہ میں مرکز پر زاویہ θ اور قوس کی لمبائی s کا تعلق $s = r\theta$ ہے لہٰذا اکائی دائرہ میں $s = \theta$ ہو گا (شکل 7.51)۔ یوں متغیر x کا الٹ کوسائن $\cos^{-1} x$ زاویہ θ دیگا جس کی قیمت مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گی۔ الٹ سائن کے لئے بھی اس قسم کا تعلق پایا جاتا ہے۔

مثال 7.58: $\cot\left(\sec^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right)$ کی قیمت تلاش کریں۔

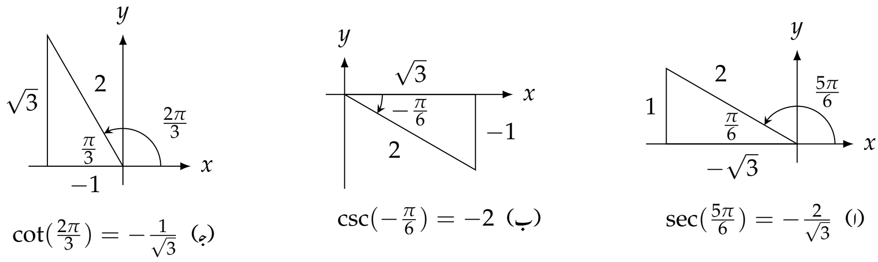
حل: ہم اندر سے باہر کی جانب چلتے ہوئے زاویوں اور نسبتوں کو مثلثوں کی مدد سے ظاہر کریں گے۔

پہلا قدم: سیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع دوم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل 7.52-ا):

$$\sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{2}{-\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

دوسرا قدم: کوسیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع چہارم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل 7.52-ب):

$$\csc^{-1}(-2) = \csc^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) = -\frac{\pi}{6}$$



شکل 7.52: مثلث برائے مثال 7.58

شکل 7.53: مثلث برائے مثال 7.59

تیسرا قدم: کوٹینجنٹ کی قیمتیں ربع چہارم سے حاصل ہو گی (شکل 7.58-ج):

$$\begin{aligned}\cot\left(\sec^{-1}(-\tfrac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right) &= \cot\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

□

مثال 7.59: $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)$ تلاش کریں۔

حل: ہم $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ لے کر زاویہ θ کو قائمہ مثلث میں تصور کرتے ہیں (شکل 7.53-ا)۔ یوں

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قریبی}} = \frac{x}{3}$$

ہو گا۔مثلث کا وتر

$$\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$

ہو گا لہٰذا سیکنٹ کی قیمت درج ذیل ہو گی (شکل 7.53-ب)۔

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$

□

سوالات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم