

# احصاء اور تحليلي علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامپیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
862	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	بدلولی تفاعل	7.10
900	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نکتہ بنائی بدل	
986	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1003	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1220	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1230 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1286 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301 . . . . .	10.8.1	دائرے
1315 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1345 . . . . .	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353 . . . . .	11.2.1	کرہ
1363 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1364 . . . . .	11.3.1	حساب
1378 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1393 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426 . . . . .	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1478 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1499 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1545 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1562 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1594 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1640 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1657 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1665	14	تکمل بالکثرت
1665 . . . . .	14.1	دوہرا نکملات
1685 . . . . .	14.2	رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701 . . . . .	14.3	دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712 . . . . .	14.4	کار تینی محدود میں تہرا نکمل
1727 . . . . .	14.5	تین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736 . . . . .	14.6	تکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756 . . . . .	14.7	نکملات بالکثرت میں بدل
1771	15	سستی میدان میں نکمل
1771 . . . . .	15.1	لکیری نکمل
1774 . . . . .	15.1.1	جمع پذیری
1781 . . . . .	15.2	سستی میدان، کام، دائری بہاو، اور بہاو
1798 . . . . .	15.3	راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان
1805		جوابات
1853	ا	ضمیمہ اول
1855	ب	ضمیمہ دوم
1857	ج	ضمیمہ تین
1859	د	ضمیمہ چار
1861	ه	ضمیمہ پانچ
1863	و	ضمیمہ چھ
1865	ز	ضمیمہ سات
1867	ح	ضمیمہ آٹھ
1869	ط	ضمیمہ آٹھ
1871	ی	نکملات کا مختصر جدول





## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

### 15.3 راہ سے آزادی، تفاعل مخفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کیت یا پار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے ناکہ منتقلی کی راہ پر۔ اس حصہ میں مکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں مکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ  $D$  پر معین میدان  $F$  ایک ذرہ کو  $D$  میں نقطہ  $A$  سے نقطہ  $B$  منتقل کرتا ہے۔ عموماً مکمل کام  $\int F \cdot dr$  کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہوگی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں مکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوگی ناکہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر  $D$  میں تمام  $A$  اور  $B$  کے لئے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ  $D$  میں  $\int F \cdot dr$  راہ سے آزاد ہے اور  $D$  پر  $F$  بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ  $D$  پر  $F$  کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ  $D$  میں ہر دو نقطوں  $A$  اور  $B$  کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر مکمل کام  $\int_A^B F \cdot dr$  کی قیمت ایک جیسی ہے۔ تب مکمل  $\int F \cdot dr$  خطہ  $D$  میں راہ سے آزاد<sup>7</sup> ہو گا اور میدان  $F$  خطہ  $D$  پر بقائی<sup>8</sup> ہو گا۔

□

عملی زندگی میں عموماً میدان  $F$  صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب  $D$  پر  $F = \nabla f$  ہو جہاں  $f$  ایک غیر سمتی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل  $f$  کو  $F$  کا مخفی قوتہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر  $D$  پر میدان  $F$  معین ہو اور  $F = \nabla f$  ہو جہاں  $f$  خطہ  $D$  پر ایک غیر سمتی تفاعل ہو تب  $f$  کو  $F$  کا مخفی قوتہ تفاعل<sup>9</sup> کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوتہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوتہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان  $F$  کا مخفی قوتہ تفاعل  $f$  جاننے کے بعد  $F$  کی دائرہ کار میں تمام کمالات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔

$$(15.10) \quad \int_A^B F \cdot dr = \int_A^B \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$$

path independent<sup>7</sup>  
conservative<sup>8</sup>  
potential function<sup>9</sup>

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق  $f'$  کی طرح  $\nabla f$  کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لئے فرض کریں تب مساوات 15.10 کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

کا مطابق سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً،  $D$  پر بقائی  $F$  کی صورت میں  $D$  میں ہر بند راہ پر مکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات 15.10 اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل متغیر، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **مکروویو** میں <sup>10</sup> ہموار ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ 12.1 کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ  $F$  کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرقات پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد  $F = \nabla f$  کی صورت میں مخفی قوت تفاعل  $f$  کے مدغم تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان  $F$  کے خواص پر غور کے دوران آفتاب انگیز ثابت ہو گا۔

ہم فضا میں  $D$  کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں  $D$  میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر  $D$  میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ  $D$  **تعلق (دار)**<sup>11</sup> خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جاسکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

### بقائی میدان میں لکیری کمالات

بقائی میدان میں لکیری کمالات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جاسکتی ہیں۔ اس نتیجہ کے تحت مکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہوگی تاکہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ 15.1: **لکیری کمالات کا بنیادی مسئلہ**

1. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ  $D$  میں سمتی میدان  $F = Mi + Nj + Pk$  کے اجزاء استمراری ہیں۔ تب صرف اور صرف اس صورت جب  $D$  میں تمام نقاط  $A$  اور  $B$  کے لئے مکمل  $\int_A^B F \cdot dr$  کی قیمت،  $D$  کے اندر رہتے ہوئے  $A$  اور  $B$  کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل  $f$  موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$F = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

<sup>10</sup> piecewise smooth  
<sup>11</sup> connected

2. اگر مکمل کی قیمت  $A$  اور  $B$  کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب مکمل کی قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: کہ  $F = \nabla f$  سے مراد مکمل کی قیمت کا راہ سے آزاد ہونا ہے  
فرض کریں  $D$  میں  $A$  اور  $B$  دو نقطے ہیں اور  $D$  میں  $A$  سے  $B$  تک ہموار راہ درج ذیل ہے۔

$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

منحنی کی ہمراہ  $t$  کے لحاظ سے  $C$  قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ (15.11) \quad &= \nabla f \cdot \left( \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{aligned}$$

زنجیری قاعدہ

یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \frac{df}{dt} dt \\ &= f(g(t), h(t), k(t)) \Big|_a^b = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

مساوات 15.11

اس طرح مکمل کام کی قیمت  $A$  اور  $B$  پر  $f$  کی قیمتوں پر منحصر ہوگی ناکہ ان کے بیچ راہ پر۔ یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔

□

مثال 15.10: نقاط  $(-1, 3, 9)$  اور  $(1, 6, -4)$  کے بیچ ہموار منحنی  $C$  پر چلتے ہوئے درج ذیل ہٹائی میدان کا کم تلاش کریں۔

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla(xyz)$$

حل:  $f(x, y, z) = xyz$  لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} & \mathbf{F} &= \nabla f \\ &= f(B) - f(A) & \text{مسئلہ 15.1 کا جزو دوم} \\ &= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3 \end{aligned}$$

□

مسئلہ 15.2: درج ذیل فقرے معادل ہیں۔

ا. خطہ  $D$  میں ہر بند راہ پر  $\int F \cdot dr = 0$  ہے۔ب. خطہ  $D$  پر میدان  $F$  بقائی ہے۔

ثبوت: جزو-ا

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ  $D$  میں کسی بھی دو نقاط  $A$  اور  $B$  کے بیچ کسی بھی دو راہوں  $C_1$  اور  $C_2$  پر  $F \cdot dr$  کے عملات کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ ہم شکل میں  $C_2$  کا رخ الٹ کر کے  $B$  سے  $A$  تک راہ کو  $-C_2$  لکھتے ہیں۔ راہ  $C_1$  اور راہ  $-C_2$  مل کر بند راہ  $C$  دیتے ہیں۔ اب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{-C_2} F \cdot dr = \int_C F \cdot dr = 0$$

یوں  $C_1$  اور  $C_2$  پر مکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔

□

ثبوت: جزو-ب

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ ہر بند راہ  $C$  پر  $F \cdot dr$  کا مکمل صفر ہے۔ ہم  $C$  پر کسی دو نقطوں  $A$  اور  $B$  کا انتخاب کر کے  $C$  کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں: نقطہ  $A$  سے  $B$  تک ٹکڑے کو  $C_1$  اور نقطہ  $B$  سے  $A$  تک ٹکڑے کو  $C_2$  لیتے ہوئے خلاف گھڑی مکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \int_A^B F \cdot dr - \int_B^A F \cdot dr = 0$$

□

مسئلہ 15.1 اور مسئلہ 15.2 کے نتائج کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\oint_C F \cdot dr = 0 \text{ میں کسی بھی بند راہ پر } D \Leftrightarrow D \text{ پر } F \text{ بقائی ہے} \Leftrightarrow F = \nabla f \text{ پر } D$$

یہ جانتے ہوئے کہ بقائی میدان میں کیری عملات کا حل کتنا آسان ہے، دو سوالات پیدا ہوتے ہیں:

1. ہمیں کیسے جان سکتے ہیں کہ میدان  $F$  بقائی ہے؟2. بقائی میدان  $F$  کا مطابقتی مخفی قوہ تفاعل  $f$  کیسے دریافت کیا جاسکتا ہے (جہاں  $F = \nabla f$  ہو گا)۔

بقائی میدان کا مخفی قوتہ تفاعل کا حصول  
بقائی میدان کا پرکھ درج ذیل ہے۔

بقائی میدان کا اجزائی پرکھ

میدان  $F = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$  جس کے اجزائی تفاعل کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$(15.12) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

□

ثبوت پرکھ: ہم دکھاتے ہیں کہ بقائی  $F$  کے لئے مساوات 15.12 ہر صورت مطمئن ہو گا۔ ایسا مخفی قوتہ تفاعل  $f$  پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$F = Mi + Nj + Pk = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial z} \end{aligned}$$

استمراری ہونے کی بدولت مدغم جزوی  
تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے

مساوات 15.12 کے باقی دو اجزاء بھی اسی طرح ثابت کیے جاسکتے ہیں۔

ثبوت کا دوسرا حصہ، جس سے مراد لیا جاسکتا ہے کہ مساوات 15.12 کہتی ہے کہ  $F$  بقائی ہو گا، مسئلہ سٹوکس کا نتیجہ ہے۔

□

یہ جانتے ہوئے کہ  $F$  بقائی ہے، ہم عموماً مخفی قوتہ تفاعل  $f$  دریافت کرنا چاہیں گے جو مساوات  $\nabla f = F$  یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k = Mi + Nj + Pk$$

کو  $f$  کے لئے حل کرنے سے حاصل ہو گا۔ ہم درج ذیل تین مساوات کا مکمل لے کر ایسا کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

مثال 15.11: دکھائیں کہ  $\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$  بقائی ہے اور اس کا مخفی توفہ تفاعل  $f$  تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ کا اطلاق

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یہ مساوات مل کر ہمیں بتاتے ہیں کہ ایسا  $f$  پایا جاتا ہے جو  $\nabla f = \mathbf{F}$  کو مطمئن کرتا ہے۔

ہم درج ذیل مساواتوں کے نکلاتوں سے  $f$  کو تلاش کرتے ہیں۔

$$(15.13) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z$$

ہم بائیں سے شروع کرتے ہوئے  $y$  اور  $z$  کو مستقل تصور کر کے پہلی مساوات کا مکمل  $x$  کے لحاظ سے لیتے ہیں:

$$(15.14) \quad f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z)$$

ہم نے مکمل کے مستقل کو  $g(y, z)$  لکھا ہے چونکہ اس کی قیمت  $y$  اور  $z$  کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اس مساوات سے ہم  $\frac{\partial f}{\partial y}$  تلاش کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی  $\frac{\partial f}{\partial y}$  کے برابر پر کرتے ہیں:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

یوں  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$  ہو گا لہذا  $g$  کی قیمت صرف  $z$  پر منحصر ہو گی۔ اس طرح مساوات 15.14 درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$



اس مساوات سے ہم  $\frac{\partial f}{\partial z}$  معلوم کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی  $\frac{\partial f}{\partial z}$  کے برابر پر کرتے ہیں:

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z$$

$$\frac{dh}{dz} = z \quad \text{یعنی}$$

متغیر  $z$  کے ساتھ مکمل لیتے ہیں:

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

□ یوں مستقل  $C$  کی لامتناہی ممکنہ منفرد قیمتیں منتخب کر کے  $F$  کے لامتناہی تعداد کے مخفی قوتہ تفاعل حاصل ہوں گے۔

مثال 15.12: دکھائیں کہ  $F = (2x - 3)i - zj + (\cos z)k$  غیر بقائی ہے۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ استعمال کر کے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

□ حاصل کرتے ہیں۔ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں لہذا  $F$  غیر بقائی ہو گا۔ پرکھ کے باقی اجزاء کو دیکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

قطعی تفرقی روپ

جوابات

