احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ v

میری پہلی کتاب کا دیباچہ vii

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط . . . 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری . . . 15
1.3 تفاعل . . . 32
1.4 ترسیم کی منتقلی . . . 54
1.5 تکونیاتی تفاعل . . . 74

2 حدود اور استمرار 95
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد . . . 95
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد . . . 113
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف . . . 126
2.4 تصور حد کی توسیع . . . 146
2.5 استمرار . . . 165
2.6 مماسی خط . . . 184

3 تفرق 199
3.1 تفاعل کا تفرق . . . 199
3.2 قواعد تفرق . . . 221
3.3 تبدیلی کی شرح . . . 240
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق . . . 257
3.5 زنجیری قاعدہ . . . 277
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما . . . 294
3.7 دیگر شرح تبدیلی . . . 310

4 تفرق کا استعمال 325
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں 325
4.2 مسئلہ اوسط قیمت 340
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ 356
4.3.1 پرکھ 356
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم 368
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء 391
4.6 بہترین بنانا 418
4.7 خط بندی اور تفرقات 442
4.8 ترکیب نیوٹن 463

5 تکمل 475
5.1 غیر قطعی تکملات 475
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی 487
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق 503
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ 514
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات 531
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ 556
5.7 بنیادی مسئلہ 571

ا ضمیمہ اول 575

ب ضمیمہ دوم 577

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

غیر ریمان تکمل والے تفاعل

غیر استمراری تفاعل، ما سوائے چند، نا قابل تکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا $[0,1]$ پر کوئی ریمان تکمل نہیں پایا جاتا ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ناطق}\\ 0, & \text{غیر ناطق}\end{cases}$$

وقفہ $[0,1]$ کے کسی بھی خانہ بندی P کے لئے بالائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}H&=\sum k_H\Delta x_k=\sum 1\cdot\Delta x_k=\sum\Delta x_k=1,\\ L&=\sum k_L\Delta x_k=\sum 0\cdot\Delta x_k=0\end{aligned}$$

وقفہ $[0,1]$ پر f کے تکمل کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ $\|P\|\to 0$ سے H اور L کی ایک جیسی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں ہے:

$$\lim_{\|P\|\to 0} L=0,\qquad \lim_{\|P\|\to 0} H=1$$

یوں $[0,1]$ پر f کا تکمل نہیں پایا جاتا ہے۔ مستقل مضرب kf کا بھی تکمل نہیں پایا جاتا ہے ماسوائے جب k صفر ہو۔

اصطلاحات

علامت $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے ساتھ بہت ساری اصطلاح وابستہ ہیں۔ یوں $\int$ کو علامت تکمل کہتے ہیں، a تکمل کا زیریں حد جبکہ b تکمل کا بالائی حد ہے، f متکمل ہے، x تکمل کا متغیر ہے، جبکہ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ سے مراد a تا b تفاعل f کا تکمل ہے۔ تکمل حل کرنے سے مراد تکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔

تکمل کا بالائی حد

متکمل

علامت تکمل

تکمل کا متغیر x ہے

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{a تا b تفاعل f کا تکمل}}$$

تکمل کا زیریں حد

کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی تکمل کی قیمت تفاعل پر منحصر ہوتی ہے نا کہ غیر تابع متغیر کی علامت پر۔ یوں تکمل میں غیر تابع متغیر کو x کی بجائے u یا t سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ کی بجائے } \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \text{ یا } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں تکمل سے مراد ریمان مجموعہ ہے للہذا غیر تابع متغیر کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا اور تینوں تکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ اسی لیے تکمل کے متغیر کو نقلی متغیر[29] کہتے ہیں۔

مثال 5.31: درج ذیل ریمان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تکمل کی صورت میں لکھیں جہاں P وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k$$

حل: نقطہ c_k پر تفاعل $f(x)=3x^2-2x+5$ کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں -1 تا 3 تفاعل f کا تکمل درکار ہے:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k=\int_{-1}^{3}(3x^2-2x+5)\,\mathrm{d}x$$

□

مستقل تفاعل

ہمیں مسئلہ 5.1 قطعی تکمل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں ایک دوسرا مسئلہ زیر استعمال ہو گا۔ مستقل تفاعل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ $[a,b]$ پر f ایک مستقل تفاعل $f(x)=c$ ہو تب c_k کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} c\cdot\Delta x_k && f(c_k) \text{ ہر نقطہ پر } c \text{ کے برابر ہے} \\
&= c\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب} \\
&= c(b-a) && \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \text{ وقفہ } [a,b] \text{ کی لمبائی } b-a \text{ ہے}
\end{aligned}$$

---

[29] dummy variable

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت $c(b-a)$ کے برابر ہے لہٰذا تکمل کی قیمت بھی یہی ہو گی۔یوں درج ذیل درست ہو گا۔

وقفہ $[a,b]$ جس پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت مستقل c ہے کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

مثال 5.32:

ا. $\int\limits_{-1}^{4} 3\,\mathrm{d}x = 3(4-(-1)) = (3)(5) = 15$

ب. $\int\limits_{-1}^{4} (-3)\,\mathrm{d}x = -3(4-(-1)) = (-3)(5) = -15$

□

غیر منفی تفاعل کے ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال 5.22 میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ $[0,3]$ پر گولا کی تفاعل رفتار

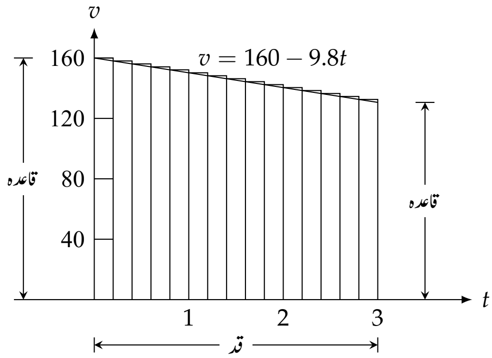
$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے ریمان مجموعے تھے۔ شکل 5.34 میں t محور اور تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔اس ذوزنقہ رقبہ کا قد 3 ، زیریں قاعدہ 160 اور بالائی قاعدہ 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہے، اتنا اصل رقبہ پر مستطیل بہتر بیٹھتے ہیں۔ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$\text{رقبہ} = \text{قد} \cdot \frac{\text{زیریں قاعدہ}+\text{بالائی قاعدہ}}{2} = 3 \cdot \frac{130.6+160}{2} = 435.9$$

آپ کو یاد ہو گا کہ مثال 5.22 میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ہم تکمل کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں:

$$\int_0^3 (160-9.8t)\,\mathrm{d}t = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$



شکل 5.34: وقفہ $[0,3]$ پر سمتی رفتار تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے ریمان رقبہ کے لئے مستطیل۔

ہم تکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔جب ہمیں x محور اور استمراری غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ رقبہ کا کلیہ معلوم ہو تب ہم تکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے تکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ پر $f(x) \geq 0$ استمراری ہے۔ تفاعل f کے ترسیم اور x محور کے بیچ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

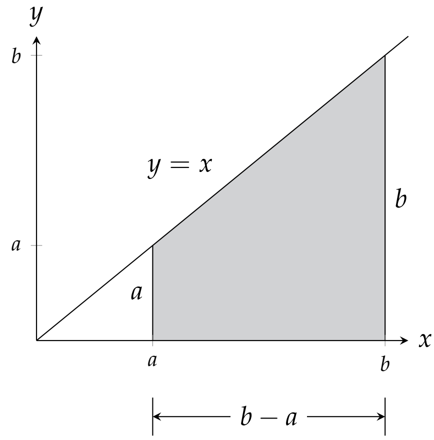
ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لئے پیش کیا۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لئے بھی کار آمد ہو گا؟ اس کا جواب ہے، "جی ہاں"، البتہ یہ ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

مثال 5.33: رقبہ استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت کا تلاش
درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

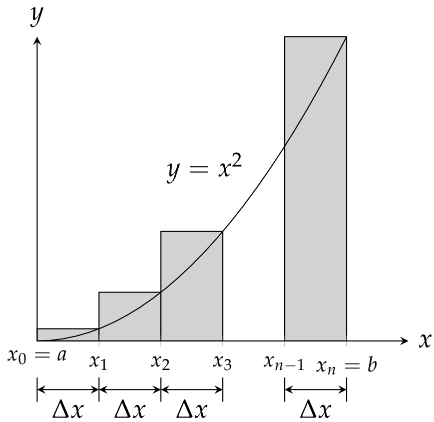
$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x, \quad 0 < a < b$$

حل: ہم خطہ $a < x < b$ کے لئے $y = x$ ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل 5.35)۔ تکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش کرتے ہیں۔

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot\frac{a+b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$



شکل 5.35: خطہ برائے مثال 5.33



شکل 5.36: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال 5.34)

یوں $a=1$ اور $b=\sqrt{5}$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_1^{\sqrt{5}} x\,\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

دھیان رہے کہ x کا الٹ تفرق $\frac{x^2}{2}$ ہے جو تکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔ $\square$

مثال 5.34: قطعی تکمل سے رقبے کا حصول
قطع مکافی $y=x^2$ اور x محور کے بیچ وقفہ $[0,b]$ پر رقبہ تلاش کریں (شکل 5.36)۔

حل: ہم تکمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تفاعل کو ترسیم کر کے وقفہ $[0,b]$ کو n یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$ ہو گی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0=0,\quad x_1=\Delta x,\quad x_2=2\Delta x,\quad \cdots,\quad x_{n-1}=(n-1)\Delta x,\quad x_n=n\Delta x=b$$

ہم جس طرح چاہیں c_k نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو c_k منتخب کرتے ہیں۔یوں $c_1=x_1$ ، $c_2=x_2$ ، وغیرہ ہو گا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(c_1)\Delta x &= f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x = (1^2)(\Delta x)^3\\
f(c_2)\Delta x &= f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2\Delta x = (2^2)(\Delta x)^3\\
&\vdots\\
f(c_n)\Delta x &= f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2\Delta x = (n^2)(\Delta x)^3
\end{aligned}$$

ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2(\Delta x)^3 \\
&= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{مستقل ہے } (\Delta x)^3 \\
&= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{مساوات 5.13 میں } \Delta x = \tfrac{b}{n} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

اب قطعی تکمل کی تعریف

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

استعمال کرتے ہوئے $x=0$ تا $x=b$ قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S_n && \text{یہاں } \|P\|\to 0 \text{ سے مراد } n\to\infty \text{ ہے} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot(2+0+0) = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}
$$

یوں $b=1$ اور $b=1.5$ کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{1.5} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

یہاں بھی دھیان رہے کہ x^2 کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3}$ ہے۔ □

سوالات

سگما روپ

سوال 1 تا سوال 6 میں مجموعہ کو سگما روپ میں لکھنے کے بعد اس کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

سوال 2: $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

سوال 3: $\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

سوال 4: $\sum_{k=1}^{5} \sin k\pi$

سوال 5: $\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

سوال 6: $\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} \cos k\pi$

سوال 7: درج ذیل میں سے کونسی $1+2+4+8+16+32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{5} 2^{k}$ ج. $\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

سوال 8: درج ذیل میں سے کونسی $1-2+4-8+16-32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{5} (-1)^{k} 2^{k}$ ج. $\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

سوال 9: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum\limits_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ ب. $\sum\limits_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{k}}{k+1}$ ج. $\sum\limits_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^{k}}{k+2}$

سوال 10: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum\limits_{k=1}^{4} (k-1)^2$ ب. $\sum\limits_{k=-1}^{3} (k+1)^2$ ج. $\sum\limits_{k=-3}^{-1} k^2$

سوال 11 تا سوال 16 میں دیے مجموعوں کو سگما روپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلہ کی زیریں حد پر منحصر ہو گا۔

سوال 11: $1+2+3+4+5+6$

سوال 12: $1+4+9+16$

سوال 13: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

سوال 14: $2+4+6+8+10$

سوال 15: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

سوال 16: $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$

متناہی مجموعہ کی قیمت

سوال 17: فرض کریں کہ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = -5$ اور $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 6$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum\limits_{k=1}^{n} 3a_k$ ج. $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k+b_k)$ ہ. $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k-2a_k)$

ب. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ د. $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k-b_k)$

سوال 18: فرض کریں کہ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$ اور $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 1$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ ب. $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$ ج. $\sum_{k=1}^{n} (a_k+1)$ د. $\sum_{k=1}^{n} (b_k-1)$

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے الجبرائی فقروں کی قیمتوں کو صفحہ 533 پر دیے گئے متناہی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات 5.13 میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال 19:

ا. $\sum_{k=1}^{10} k$ ب. $\sum_{k=1}^{10} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{10} k^3$

سوال 20:

ا. $\sum_{k=1}^{13} k$ ب. $\sum_{k=1}^{13} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{13} k^3$

سوال 21: $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$

سوال 22: $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

سوال 23: $\sum_{k=1}^{6} (3-k^2)$

سوال 24: $\sum_{k=1}^{6} (k^2-5)$

سوال 25: $\sum_{k=1}^{5} k(3k+5)$

سوال 26: $\sum_{k=1}^{7} k(2k+1)$

سوال 27: $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$

سوال 28: $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$

ریمان مجموعوں کے لئے مستطیلیں

سوال 29 تا سوال 32 میں تفاعل $f(x)$ کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کی ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k$ کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں k ویں ذیلی وقفہ کا (ا) بایاں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ c_k ہے۔ (بائیں، دائیں اور وسطی نقطوں کے لئے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

سوال 29: $f(x) = x^2 - 1, \quad [0,2]$

سوال 30: $f(x) = -x^2, \quad [0,1]$

سوال 31: $f(x) = \sin x, \quad [-\pi, \pi]$

سوال 32: $f(x) = \sin x + 1, \quad [-\pi, \pi]$

سوال 33: خانہ بندی $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ کا معیار تلاش کریں۔

سوال 34: خانہ بندی $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ کا معیار تلاش کریں۔

حد کا بطور تکمل اظہار

سوال 35 تا سوال 42 میں دیے گئے حد کو بطور قطعی تکمل ظاہر کریں۔

سوال 35: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$ جہاں $[0,2]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 36: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2c_k^3 \Delta x_k$ جہاں $[-1,0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 37: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\Delta x_k$ جہاں $[-7,5]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 38: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \Delta x_k$ جہاں $[1,4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 39: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$ جہاں $[2,3]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 40: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4-c_k^2}\,\Delta x_k$ جہاں $[0,1]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 41: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\Delta x_k$ جہاں $[-\pi/4, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 42: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan c_k)\Delta x_k$ جہاں $[0, \pi/4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

مستقل تفاعل

سوال 43 تا سوال 48 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 43: $\int_{-2}^{1} 5\,\mathrm{d}x$

سوال 44: $\int_{3}^{7} (-20)\,\mathrm{d}x$

سوال 45: $\int_{0}^{3} (-160)\,\mathrm{d}t$

سوال 46: $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 47: $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5\,\mathrm{d}s$

سوال 48: $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}r$

رقبہ سے تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 49 تا سوال 56 میں متکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبہ سے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 49: $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$

سوال 50: $\int_{1/2}^{3/2} (-2x+4)\,\mathrm{d}x$

سوال 51: $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 52: $\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 53: $\int_{-2}^{1} |x| \, \mathrm{d}x$

سوال 54: $\int_{-1}^{1} (1 - |x|) \, \mathrm{d}x$

سوال 55: $\int_{-1}^{1} (2 - |x|) \, \mathrm{d}x$

سوال 56: $\int_{-1}^{1} (1 + \sqrt{1 - x^2}) \, \mathrm{d}x$

سوال 57 تا سوال 60 میں تکمل کی قیمت کو رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال 57: $\int_0^b x \, \mathrm{d}x, \quad b > 0$

سوال 58: $\int_0^b 4x \, \mathrm{d}x, \quad b > 0$

سوال 59: $\int_a^b 2s \, \mathrm{d}s, \quad 0 < a < b$

سوال 60: $\int_a^b 3t \, \mathrm{d}t, \quad 0 < a < b$

قیمت کی تلاش

سوال 61 تا سوال 72 میں دیے تکمل کی قیمت کو مثال 5.33 اور مثال 5.34 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 61: $\int_1^{\sqrt{2}} x \, \mathrm{d}x$

سوال 62: $\int_{0.5}^{2.5} x \, \mathrm{d}x$

سوال 63: $\int_{\pi}^{2\pi} \theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 64: $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r \, \mathrm{d}r$

سوال 65: $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 \, \mathrm{d}x$

سوال 66: $\int_0^{0.3} s^2 \, \mathrm{d}s$

سوال 67: $\int_0^{1/2} t^2 \, \mathrm{d}t$

سوال 68: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \, d\theta$

سوال 69: $\int_0^{2a} x \, dx$

سوال 70: $\int_a^{\sqrt{3}a} x \, dx$

سوال 71: $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 \, dx$

سوال 72: $\int_0^{3b} x^2 \, dx$

رقبے کی تلاش

سوال 73 تا سوال 76 میں وقفہ $[0, b]$ پر x محور اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ قطعی تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 73: $y = 3x^2$

سوال 74: $y = \pi x^2$

سوال 75: $y = 2x$

سوال 76: $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال 77: درج ذیل تکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کہاں مثبت ہے؟)

$$\int_a^b (x - x^2) \, dx$$

سوال 78: درج ذیل تکمل کی قیمت کم سے کم کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) \, dx$$

سوال 79: بڑھتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے

(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج اوپر اٹھتی ہے۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی n عدد ذیلی وقفوں میں خانہ بندی P ہے جہاں ایک خانے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہے۔ شکل کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس خانہ بندی پر f کے بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق کو ترسیمی طور پر مستطیل R سے ظاہر کیا جا

سکتا ہے جس کی جسامت $[f(b) - f(a)]$ ضرب Δx ہے۔(اشارہ: فرق $H - L$ ان رقبوں کا مجموعہ ہے جن کے وتر $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \cdots, Q_{n-1}Q_n$ اس ترسیم پر پائے جاتے ہیں۔انہیں افقی مستطیل R پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔)
(ب) فرض کریں ذیلی وقفوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں بلکہ خانہ بندی $[a, b]$ پر مختلف ذیلی وقفوں کی لمبائی Δx_k مختلف ہے۔ اگر Δx_H خانہ بندی P کا معیار ہو تب دکھائیں کہ

$$H - L \le \left| f(b) - f(a)\Delta x_H \right|$$

ہو گا لہٰذا $\lim_{\|P\|\to 0}(H - L) = 0$ ہو گا۔

سوال 80: گھٹتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے
(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج نیچے گرتی ہے۔ سوال 79 کی طرح اس کا خاکہ بنائیں۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P ہے جہاں تمام خانوں کی لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہیں۔ سوال 79 کی طرح فرق $H - L$ تلاش کریں۔
(ب) فرض کریں کہ خانوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہے بلکہ ہر Δx_k مختلف ہے۔ دکھائیں کہ سوال 79 کی عدم مساوات

$$H - L \le \left| f(b) - f(a) \right| \Delta x_H$$

اب بھی کار آمد ہے لہٰذا $\lim_{\|P\|\to 0}(H - L) = 0$ ہو گا۔

سوال 81: تکمل $\int_0^b x^2 \,\mathrm{d}x,\ b > 0$ کی قیمت مثال 5.34 کی طرز پر حاصل کریں البتہ اب ہر خانے کا بائیں سر نقطی قیمت استعمال کریں۔

سوال 82: دکھائیں کہ مجموعہ

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right]$$

درحقیقت $\int_0^1 x \,\mathrm{d}x$ کا تخمینی رقبہ دیتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔(اشارہ: وقفہ $[0, 1]$ کا یکساں n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کا بائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبہ کا مجموعہ لکھیں۔)

سوال 83: درج ذیل

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

کو

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

روپ میں لکھیں جس کو $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ $[0,1]$ کو n برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں اور ہر خانے کے بائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیں۔)

سوال 84: درج ذیل کلیہ استعمال

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \cdots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos(m+1/2)h}{2\sin(h/2)}$$

کرتے ہوئے $y = \sin x$ کے نیچے $x = 0$ تا $x = \pi/2$ رقبہ درج ذیل دو اقدام سے تلاش کریں۔

ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ کو n برابر لمبائیوں کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مطابقتی بالائی مجموعہ H تلاش کریں۔

ب. $n\to\infty$ اور $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$ کرتے ہوئے H کا حد تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 85 تا سوال 90 میں دیے گئے تکمل پر مرکوز ریمان مجموعوں کے ساتھ منسلک مستطیلوں کو کمپیوٹر پر بنائیں۔ ذیلی وقفوں کی تعداد $n = 4, 10, 20, 50$ لیں اور ان کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر لیں۔

سوال 85: $\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

سوال 86: $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

سوال 87: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$

سوال 88: $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,\mathrm{d}x = 1$

سوال 89: $\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 1$

سوال 90: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$

سوال 91: (ا) مجموعہ S_n جس کو سوال 82 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (ب) سوال 83 میں دیے گئے S_n کے لئے دوبارہ حل کریں۔

سوال 92: مجموعہ $\sin h + \sin 2h + \cdots \sin mh$ جسے سوال 84 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر کی مدد سے $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔

سوال 93: بائیں نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مثال 5.23 کے مجموعہ کی سگما علامتی روپ درج ذیل ہے۔

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} 4[9 - (-2 + (k-1))^2]$$

ا. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_8 اور S_{25} لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{4}{8}$ اور $\frac{4}{25}$ ہو گی۔

ب. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_n لکھیں جو n خانوں پر مشتمل ہے اور جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{4}{n}$ ہے۔

ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 94: بائیں سر نقطی قیمت مجموعہ برائے مثال 5.24 درج ذیل ہے۔

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} \pi[16 - (-1 + (k-1))^2]$$

ا. بائیں سر نقطی مجموعہ S_{16} اور S_{80} کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{10}$ ہو گی۔

ب. بائیں سر نقطی مجموعہ S_n کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{8}{n}$ اور خانوں کی تعداد n ہو گی۔

ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ

اس حصہ میں تکمل کے قواعد اور تکمل کا رقبے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ اوسط قیمت پر دوبارہ غور کیا جائے گا۔

قطعی تکمل کے خواص

ہم عموماً قطعی تکملوں کا مجموعہ اور فرق حاصل کرنا چاہتے ہیں یا متکمل کو مستقل سے ضرب دینا چاہتے ہیں یا ان کا موازنہ دیگر قطعی تکمل کے ساتھ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ایسا درج ذیل قواعد کے تحت کرتے ہیں۔

قواعد برائے قطعی تکمل

1. صفر: $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (تعریف)

2. تکمل کی ترتیب: $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (تعریف)

3. مستقل مضرب: $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے)
$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(k=-1)$

4. مجموعہ اور فرق: $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mp \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

5. جمع پذیری: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

6. کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات: اگر وقفہ $[a,b]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت f_H اور کم سے کم قیمت f_L ہو تب درج ذیل ہو گا:

$$f_L \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f_H \cdot (b-a)$$

7. غلبہ: اگر $[a,b]$ پر $f(x) \ge g(x)$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

اگر $[a,b]$ پر $f(x) \ge 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$$

ماسوائے پہلے دو قواعد کے تمام کو قطعی تکمل کی تعریف بذریعہ ریمان مجموعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ ان قواعد کے ثبوت نہایت آسان ہوں گے۔ چونکہ ریمان مجموعہ یہ خواص رکھتا ہے لہٰذا آپ سوچتے ہوں گے کہ مجموعہ کا حد بھی یہی خواص رکھتا ہو گا۔ حقیقت میں ثبوت پیش کرتے ہوئے ذیلی وقفوں کے معیار کے $\epsilon - \delta$ کے پیچیدہ دلائل درکار ہوں گے۔ یقیناً ان قواعد کے ثبوت اتنے آسان نہیں ہیں۔ہم صرف دو قواعد کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ باقی قواعد کے ثبوت اعلٰی کتابوں میں پائے جاتے ہیں۔

دھیان رہے کہ قاعدہ 1 درحقیقت ایک تعریف ہے۔ ہم چاہیں گے کہ صفر لمبائی کے تمام تکمل کی قیمت صفر ہو۔ پہلا قاعدہ قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $a=b$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 2 بھی تعریف ہے جو قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $b<a$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 3 اور قاعدہ 4 حد اور غیر قطعی تکمل کے مماثل قواعد کی طرح ہیں۔دو تفاعل کے تکمل جانتے ہوئے ہم ان کے تمام مستقل مضرب، مجموعہ اور فرق کے تکمل جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ 3 اور 4 کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

اختیاری قابل تکمل تفاعل کے کسی بھی متناہی خطی میل کا جزو در جزو تکمل حاصل کر سکتے ہیں۔ کسی بھی مستقل $c_1, \cdot c_n$ جن کی علامتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں، اور وقفہ $[a, b]$ پر قابل تکمل تفاعل $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + c_n \int_a^n f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

جس کا ثبوت، جو ریاضی ماخوذ سے حاصل کیا جا سکتا ہے، کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

شکل میں مثبت تفاعل کے لئے قاعدہ 5 دکھایا گیا ہے اگرچہ یہ قاعدہ کسی بھی تفاعل کے لئے درست ہے۔

ثبوت: قاعدہ 3
قاعدہ 3 کے تحت تفاعل ضرب k کا تکمل تفاعل کا تکمل ضرب k ہو گا۔ یہ درج ذیل کی بنا پر درست ہے۔

$$\begin{aligned}
\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(c_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\|P\|\to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= k \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

ثبوت: قاعدہ 6
قاعدہ 6 کہتا ہے کہ $[a, b]$ پر تکمل کی قیمت کبھی بھی f کی کم سے کم قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے کم نہیں ہو گی اور نا ہی یہ کبھی f کی زیادہ سے زیادہ قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے زیادہ ہو گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $[a, b]$ کی کسی بھی خانہ بندی اور c_k کی کسی بھی انتخاب

کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f_L \cdot (b-a) &= f_L \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_L \cdot \Delta x_k \\
&\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k \\
&\le f_H \cdot \Delta x_k \\
&= f_H \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \\
&= f_H \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

مختصراً وقفہ $[a, b]$ پر f کے تمام ریمان مجموعے درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$f_L \cdot (b-a) \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k \le f_H \cdot (b-a)$$

لہٰذا ان کا حد، یعنی تکمل، بھی اس شرط کو مطمئن کرتا ہو گا۔

□

مثال 5.35: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 5, \quad \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -2, \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x = 7$$

درج ذیل ہوں گے۔

.1

$$\int_{4}^{1} = -\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -(-2) = 2 \qquad \text{قاعدہ 2}$$

.2

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2(5) + 3(7) = 31 \qquad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}
\end{aligned}$$

.3

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-2) = 3 \qquad \text{قاعدہ } 5$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں درج ذیل تین عمومی تکملات کا حصول سیکھا۔

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a) \qquad (c \text{ مستقل}) \tag{5.16}$$

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad (0 < a < b) \tag{5.17}$$

$$\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} \qquad (b < 0) \tag{5.18}$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتائج کو وسعت دی جا سکتی ہے۔

مثال 5.36: قیمت تلاش کریں: $\int_0^2 (\frac{t^2}{4} - 7t + 5)\,\mathrm{d}t$

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - 7t + 5\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t - 7\int_0^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 5\,\mathrm{d}t && \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}\\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{2^3}{3}\Big) - 7\Big(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\Big) + 5(2-0) && \text{مساوات 5.16 تا مساوات 5.18}\\
&= \frac{2}{3} - 14 + 10 = -\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

□

مثال 5.37: قیمت تلاش کریں: $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$

حل:

$$\int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx \qquad \text{قاعدہ 5}$$
$$\int_2^3 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx - \int_0^2 x^2\,dx \qquad \text{درج بالا حل کریں}$$
$$= \frac{3^2}{3} - \frac{2^3}{3} \qquad \text{مساوات 5.18}$$
$$= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

□

ہم $\int_2^3 x^2\,dx$ کے حل پر مزید غور حصہ میں کریں گے۔

قطعی تکمل کا کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات (کمتر بلند تر عدم مساوات، قاعدہ 6) کہتا ہے کہ $\int_a^b f\,dx$ کا $f_L \cdot (b-a)$ کم سے کم حد ہے جبکہ $f_H \cdot (b-a)$ زیادہ سے زیادہ حد ہے۔

مثال 5.38: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx$ کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

حل: وقفہ $[0,1]$ پر $\sqrt{1+\cos x}$ کی زیادہ سے زیادہ (بلند تر) قیمت $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ ہے لہٰذا

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx \le \sqrt{1+\cos x}_{\text{بلند تر}} \cdot (1-0) \qquad \text{قاعدہ 6}$$
$$\le \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$$

تکمل کی قیمت $\sqrt{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تکمل 2 نہیں ہو سکتا ہے۔ □

مثال 5.39: عدم مساوات $\cos x \ge (1 - x^2/2)$ تمام x کے لئے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \cos x\,dx$ کی کم سے کم (کمتر) قیمت تلاش کریں۔

حل:

$$\int_0^1 \cos x\,dx \ge \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx \qquad \text{قاعدہ 7}$$
$$\ge \int_0^1 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx \qquad \text{قاعدہ 3، قاعدہ 4}$$
$$\ge 1\cdot(1-0) - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1)^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83$$

تکمل کی قیمت کم از کم $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔ □

تکمل اور کل رقبہ

اگر وقفہ $[a,b]$ پر $y=f(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو جس کی قیمتیں مثبت بھی اور منفی بھی ہوں تب $[a,b]$ پر f کا ریمان مجموعہ x محور کے بالائی جانب مستطیلوں کا مثبت رقبوں اور x محور کے نیچے جانب مستطیلوں کا منفی رقبوں کا مجموعہ ہو گا۔ چونکہ مثبت اور منفی مقداریں ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں لہٰذا اس مجموعے کی تحدیدی قیمت تفاعل اور x محور کے بیچ کل رقبہ سے کم ہو گی۔ تکمل کی قیمت محور سے اوپر جانب رقبہ منفی محور سے نیچے جانب رقبہ کے برابر ہو گی۔

اس کا مطلب ہے کہ رقبہ کو تکمل سے حاصل کرتے ہوئے دھیان رکھنا ہو گا۔

مثال 5.40: وقفہ $0 \leq x \leq 3$ پر منحنی $y=4-x^2$ اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: x پر وقفہ $[0,3]$ کو منحنی دو خانوں میں تقسیم کرتی ہے۔ایک خانے میں $f(x)=4-x^2$ کی قیمت مثبت اور دوسرے خانے میں منفی ہے۔ منحنی اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان خانوں پر تکمل لے کر جوابات کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔

وقفہ $[0,2]$ پر تکمل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (4-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 4\,\mathrm{d}x - \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 4(2-0) - \frac{(2)^3}{3} && \text{مساوات 5.16 اور مساوات 5.18} \\
&= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

وقفہ $[2,3]$ پر تکمل:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 4\,\mathrm{d}x - \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x \\
&= 4(3-2) - \left(\frac{(3)^2}{3} - \frac{(2)^3}{3}\right) && \text{مساوات 5.16 اور مثال 5.37} \\
&= 4 - \frac{19}{3} = -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

کل رقبہ $\frac{16}{3} + \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{23}{3}$ ہو گا۔ □

اختیاری استمراری تفاعل کی اوسط قیمت

ہم نے مثال 5.25 میں غیر منفی استمراری تفاعل کی اوسط قیمت پر تبصرہ کیا۔ ہم اب f کا غیر منفی ہونے کی شرط کو ختم کرتے ہوئے تفاعل کی اوسط قیمت کی تعریف پیش کرنے کے قابل ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر استمراری تفاعل کم از کم ایک بار اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔

ہم دوبارہ ریاضیات سے اوسط قیمت کا تصور لیتے ہیں جہاں n اعداد کی انفرادی قیمتوں کے مجموعہ کو n سے تقسیم کرنے سے اعداد کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔بند وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کے لئے لامتناہی تعداد کے اعداد کو لینا ہو گا لیکن ہم یکساں وقفوں پر تفاعل سے نمونہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم $[a,b]$ کو برابر لمبائیوں کے n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہو گی۔ ہم ہر ذیلی وقفے پر f کی قیمت نقطہ c_k پر حاصل کرتے ہیں۔ ان n نمونوں کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \text{مجموعہ کی سگما روپ}\\
&= \frac{\Delta x}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n}\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x}_{[a,b]\ \text{پر}\ f\ \text{کا ریمان مجموعہ}}
\end{aligned}$$

یوں نمونی قیمتوں کی اوسط قیمت ہر صورت $[a,b]$ پر f کا ریمان مجموعہ ضرب $\frac{1}{b-1}$ ہو گی۔ ہم جیسے جیسے نمونہ کی جسامت (تعداد) بڑھاتے جائیں اور خانہ بندی کے معیار کو صفر کے قریب تر کریں، یہ اوسط قیمت $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ تک پہنچے گی۔ اس نتیجہ سے ہمیں درج ذیل تعریف ملتی ہے۔

تعریف: اگر $[a,b]$ پر f قابل تکمل تفاعل ہو تب $[a,b]$ پر f کی اوسط قیمت[30] درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

مثال 5.41: وقفہ $[0,3]$ پر $f(x) = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ کیا دیے گئے وقفے میں کسی نقطے پر f کی قیمت اس اوسط جتنی ہو گی؟

---

[30] average (mean) value

حل:

$$
\begin{aligned}
f_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big(\int_0^3 4\,\mathrm{d}x - \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{3}\Big(4(3-0) - \frac{(3)^3}{3}\Big) = \frac{1}{3}(12-9) = 1
\end{aligned}
$$

وقفہ $[0,3]$ پر f کی اوسط قیمت 1 ہے۔ تفاعل کی قیمت یہی تب ہو گی جب $4-x^2=1$ ہو گا جس سے $x=\mp\sqrt{3}$ ملتے ہیں۔ چونکہ ان دو نقطوں میں سے صرف $x=\sqrt{3}$ وقفہ $[0,3]$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا دیے گئے وقفے میں $x=\sqrt{3}$ پر f کی قیمت اوسط قیمت 1 کے برابر ہو گی۔ □

اوسط قیمت مسئلہ برائے قطعی تکملات

بند وقفہ پر استمراری تفاعل کی قیمت، بند وقفہ پر کم از کم ایک بار، تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی۔ اس فقرے کو قطعی تکملات کا اوسط قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ 5.2: مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات
اگر $[a,b]$ پر f قابل تکمل ہو تب $[a,b]$ میں کسی نقطہ c پر درج ذیل ہو گا۔

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ہم نے مثال 5.41 میں f کو حاصل اوسط قیمت کے برابر پر کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کی جہاں تفاعل اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔ البتہ اس سے یہ حقیقت ثابت نہیں ہوتی ہے کہ ایسا نقطہ موجود ہونا لازمی ہے۔ اس سے صرف اتنا ثابت ہوتا ہے کہ مثال 5.41 میں ایسا نقطہ موجود تھا۔ مسئلہ 5.2 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں زیادہ عمومی دلیل درکار ہو گی۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.2
اگر ہم قاعدہ 6 میں (کمتر بلند تر قاعدہ) دونوں اطراف کو $(b-a)$ سے تقسیم کریں تب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f_L \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f_H$$

چونکہ f استمراری ہے للذا استمراری تفاعل کے مسئلہ 2.9 کے تحت تفاعل f_L اور f_H کے بیچ تمام قیمتیں اختیار کرے گا۔ اس طرح f ہر صورت وقفہ $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ قیمت بھی اختیار کرے گا۔

□

تفاعل کا استمراری ہونا یہاں ضروری ہے۔ غیر استمراری تفاعل اپنی اوسط قیمت کے اوپر سے گزر سکتا ہے۔

ہم مسئلہ 5.2 سے مزید کیا جان سکتے ہیں؟ ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5.42: اگر $[a, b]$ پر f قابل تکمل ہو جہاں $a \neq b$ ہے اور اگر

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

ہو تب $[a, b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x) = 0$ ہو گا۔

حل: وقفہ $[a, b]$ پر f کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

مسئلہ 5.2 کے تحت $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر f یہی اوسط قیمت اختیار کرے گا۔ □

سوالات

معلوم خواص اور قیمتوں سے دیگر تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال 1: فرض کریں f اور g استمراری ہیں اور درج ذیل تکملات دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^2 f(x) \, \mathrm{d}x = -4, \quad \int_1^5 f(x) \, \mathrm{d}x = 6, \quad \int_1^5 g(x) \, \mathrm{d}x = 8$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_2^2 g(x)\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_5^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

ج. $\int_1^2 3f(x)\,\mathrm{d}x$

د. $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

ہ. $\int_1^5 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

و. $\int_1^5 [4f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

سوال 2: فرض کریں f اور f استمراری ہیں اور درج ذیل دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 h(x)\,\mathrm{d}x = 4$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^9 -2f(x)\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_7^9 [f(x)+h(x)]\,\mathrm{d}x$

ج. $\int_7^9 [2f(x)-3h(x)]\,\mathrm{d}x$

د. $\int_9^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

ہ. $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$

و. $\int_9^7 [h(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$

سوال 3: فرض کریں $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u$

ب. $\int_1^2 \sqrt{3}f(z)\,\mathrm{d}z$

ج. $\int_2^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

د. $\int_1^2 [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

سوال 4: فرض کریں $\int_{-3}^0 g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}$ دیا گیا ہے۔درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_0^{-3} g(t)\,\mathrm{d}t$

ب. $\int_{-3}^0 g(u)\,\mathrm{d}u$

ج. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,\mathrm{d}x$

د. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r$

سوال 5: فرض کریں f استمراری ہے جبکہ $\int_0^3 f(z)\,\mathrm{d}z = 3$ اور $\int_0^4 f(z)\,\mathrm{d}z = 7$ دیے گیے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_3^4 f(z)\,\mathrm{d}z$

ب. $\int_4^3 f(t)\,\mathrm{d}t$

سوال 6: فرض کریں h استمراری ہے جبکہ $\int_{-1}^1 h(r)\,\mathrm{d}r = 0$ اور $\int_{-1}^3 h(r)\,\mathrm{d}r = 6$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^3 h(r)\,\mathrm{d}r$ ب. $-\int_3^1 h(u)\,\mathrm{d}u$

سوال 7 تا سوال 18 میں دیے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7: $\int_3^1 7\,\mathrm{d}x$

سوال 8: $\int_0^{-2} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

سوال 9: $\int_0^2 5x\,\mathrm{d}x$

سوال 10: $\int_3^5 \frac{x}{8}\,\mathrm{d}x$

سوال 11: $\int_0^2 (2t-3)\,\mathrm{d}t$

سوال 12: $\int_0^{\sqrt{2}} (t-\sqrt{2})\,\mathrm{d}t$

سوال 13: $\int_2^1 (1+\frac{z}{2})\,\mathrm{d}z$

سوال 14: $\int_3^0 (2z-3)\,\mathrm{d}z$

سوال 15: $\int_1^2 3u^2\,\mathrm{d}u$

سوال 16: $\int_{1/2}^1 24u^2\,\mathrm{d}u$

سوال 17: $\int_0^2 (3x^2+x-5)\,\mathrm{d}x$

سوال 18: $\int_1^0 (3x^2+x-5)\,\mathrm{d}x$

رقبے
سوال 19 تا سوال 22 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 19:

سوال 20:

سوال 21:

سوال 22:

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد (ا) دیے وقفے پر تفاعل تکمل کریں، اور (ب) تفاعل اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 23: $y = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3]$

سوال 24: $y = -x^2 + 5x - 4, \quad [0, 2]$

سوال 25: $y = 2x - x^2, \quad [0, 3]$

سوال 26: $y = x^2 - 4x, \quad [0, 5]$

اوسط قیمت

سوال 27 تا سوال 34 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اس وقفے پر تفاعل کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ دیے گئے وقفہ پر کس نقطہ یا نقطوں پر تفاعل کی قیمت اس کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی؟

سوال 27: $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, \sqrt{3}]$

سوال 28: $f(x) = -\frac{x^2}{2}, \quad [0, 3]$

سوال 29: $f(x) = -3x^2 - 1, \quad [0, 1]$

سوال 30: $f(x) = 3x^2 - 3, \quad [0, 1]$

سوال 31: $f(t) = (t - 1)^2, \quad [0, 3]$

سوال 32: $f(t) = t^2 - t, \quad [-2, 1]$

سوال 33: (ا)$[0,3]$، (ب)$[1,3]$، (ج)$[-1,3]$، $g(x) = |x| - 1$

سوال 34: (ا)$[-1,0]$، (ب)$[0,1]$، (ج)$[-1,1]$، $h(x) = -|x|$

سوال 35 تا سوال 38 دیے گئے وقفہ پر تفاعل کی اوسط قیمت (بغیر تکمل) تلاش کریں۔

سوال 35:

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & -4\le x\le -1\\ -x+2, & -1<x\le 2\end{cases} \qquad [-4,2]$$

سوال 36: وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(t)=1-\sqrt{1-t^2}$ دیا گیا ہے۔

سوال 37: وقفہ $[0,2\pi]$ پر تفاعل $f(t)=\sin t$ دیا گیا ہے۔

سوال 38: وقفہ $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ پر تفاعل $f(\theta)=\tan\theta$ دیا گیا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 40: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int_{0.5}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کا بہتر اندازہ حاصل کریں۔

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

سوال 41: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کسی صورت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 42: دکھائیں کہ $\int_0^1\sqrt{x+8}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $2\sqrt{2}$ اور 3 کے بیچ پائی جاتی ہے۔

سوال 43: فرض کریں f استمراری ہے اور $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[1,2]$ پر کم از کم ایک بار $f(x)=4$ ہو گا۔

سوال 44: فرض کریں $[a,b]$ پر f اور g استمراری ہیں جہاں $a\neq b$ ہے۔ مزید $\int_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=0$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[a,b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x)=g(x)$ ہو گا۔

سوال 45: غیر منفی تفاعل کا تکمل
کمتر بلند تر عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \geq 0, \quad [a, b] \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

سوال 46: غیر مثبت تفاعل کا تکمل
درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \leq 0, \quad [a, b] \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

سوال 47: عدم مساوات $\sin x \leq x$ کسی بھی $x \geq 0$ کے لئے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کی بالائی حد تلاش کریں۔

سوال 48: وقفہ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ پر عدم مساوات $\sec x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ درست ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے $\int_0^1 \sec x\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کی زیریں حد تلاش کریں۔

سوال 49: اگر $[a, b]$ پر قابل تکمل f کی عمومی قیمت $f_{\text{اوسط}}$ ہو تب $[a, b]$ پر عدد $f_{\text{اوسط}}$ اور f کے تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ کیا ایسا ہوتا ہے؟ کیا درج ذیل درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b f_{\text{اوسط}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

سوال 50: کیا اچھا ہوتا کہ وقفہ $[a, b]$ پر قابل تکمل تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل قواعد پر پورا اترتی۔

ا. $(f + g)_{\text{اوسط}} = f_{\text{اوسط}} + g_{\text{اوسط}}$

ب. $(kf)_{\text{اوسط}} = k(f_{\text{اوسط}})$

ج. $f(x) \leq g(x)$ اگر $f_{\text{اوسط}} \leq g_{\text{اوسط}}$

سوال 51: اگر $150\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ اور واپسی اسی راہ کو طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو تب دونوں اطراف کو ملا کر آپ کی اوسط رفتار کتنی ہو گی؟

سوال 52: ایک ڈیم سے $10\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا اور اس کے بعد $20\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے مزید $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا۔ پانی خارج کرنے کی اوسط شرح دریافت کریں۔

5.7 بنیادی مسئلہ

اس حصہ میں تکملی احصاء کا بنیادی مسئلہ پیش کیا جائے گا جو تکمل اور تفرق کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اس مسئلہ نے ریاضیات میں بہت زیادہ ترقی کو ممکن بنایا جس نے اگلے دو صدیوں تک سائنس میں ہلچل مچا دی۔ انسانی تاریخ میں اس مسئلہ کی دریافت کو سب سے زیادہ اہم تصور کیا جاتا ہے۔ لبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس مسئلہ کو دریافت کیا۔

بنیادی مسئلہ، جزو اول

قابل تکمل تفاعل $f(t)$ کا مقررہ عدد a سے عدد x تک تکمل از خود ایک تفاعل F ہو گا جس کی x پر قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.19}$$

مثال کے طور پر اگر f غیر منفی ہو اور a کے دائیں جانب x پایا جاتا ہو تب a تا x ترسیم کے نیچے رقبہ $F(x)$ ہو گا۔ تکمل کا بالائی حد x ہے اور F کسی بھی حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی طرح ایک تفاعل ہے۔ یوں متغیر x کی ہر قیمت کے لئے $F(x)$ ایک مخصوص قیمت دیگا جو a تا x تفاعل f کا تکمل ہو گا۔

نئے تفاعل متعارف کرنے کی ایک اہم ترکیب مساوات 5.19 دیتی ہے جو تفرقی مساوات کا حل بھی دیتی ہے (جس پر کچھ دیر میں غور کیا جائے گا)۔ مساوات 5.19 کا یہاں ذکر کرنا اس لئے ضروری ہے کہ یہ تکمل اور تفرق کے بیچ تعلق بیان کرتی ہے۔ یوں اگر f کوئی بھی استمراری تفاعل ہو تب F متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق f ہو گا۔ اس طرح ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

یہ تصور اتنا اہم ہے کہ یہ احصاء کے بنیادی مسئلہ کا پہلا جزو دیتا ہے۔

مسئلہ 5.3: احصاء کا بنیادی مسئلہ، جزو اول
اگر $[a,b]$ پر f استمراری ہو تب $[a,b]$ کے ہر نقطہ پر $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کا درج ذیل تفرق پایا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x), \quad a \le x \le b \tag{5.20}$$

یہ نتیجہ خوبصورت، طاقتور اور حیران کن ہے اور عین ممکن ہے کہ مساوات 5.20 پوری ریاضیات میں اہم ترین مساوات ہو۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کے لئے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$ کا حل موجود ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کسی دوسرے تفاعل،

یعنی $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ، کا تفرق ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے۔ اور یہ کہتی ہے کہ تکمل اور تفرق کے عمل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

ثبوت : برائے مسئلہ 5.3
ہم تفرق کی تعریف کو تفاعل $F(x)$ پر لاگو کرتے ہوئے اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل حاصل تقسیم

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \tag{5.21}$$

لکھ کر دکھاتے ہیں کہ $h \to 0$ کرتے ہوئے اس کا حد $f(x)$ ملتا ہے۔

مساوات 5.21 میں $F(x+h)$ اور $F(x)$ کی تکملی روپ پر کرنے سے شمار کنندہ درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

صفحہ 556 پر جمع پذیری کا قاعدہ برائے تکملات دائیں ہاتھ کی درج ذیل سادہ روپ دیتی ہے

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

لہٰذا مساوات 5.21 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)] \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.22}$$

مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات (مسئلہ 5.2) کے تحت مساوات 5.22 میں دی گئی آخری تعلق کی قیمت، وقفہ x تا $x+h$ پر f کی کسی ایک قیمت کے برابر ہو گی۔ یوں اس وقفہ میں کسی عدد c پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \tag{5.23}$$

یوں $h \to 0$ کرتے ہوئے $\frac{1}{h}$ ضرب تکمل $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ کی قیمت جاننے کی لئے ہم $h \to 0$ کرتے ہوئے $f(c)$ کی قیمت پر نظر رکھتے ہیں۔

جیسے جیسے $h \to 0$ ہوتا ہے ویسے ویسے وقفے کا سر $x+h$ اس کے سر x کے قریب سے قریب ہوتا جاتا ہے جس کی وجہ سے c بھی x کے قریب سے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ چونکہ x پر f استمراری ہے لہٰذا $f(c)$ کی قیمت $f(x)$ کے قریب سے قریب پہنچتی ہے:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \tag{5.24}$$

دوبارہ شروع سے بات کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} && \text{تفرق کی تعریف} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{مساوات } 5.22 \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) && \text{مساوات } 5.23 \\ &= f(x) && \text{مساوات } 5.24 \end{aligned}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگر f کی قیمتیں مثبت ہوں تب درج ذیل مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

کی ایک خوبصورت جیومیٹریائی معنی اخذ کی جا سکتی ہے۔ چونکہ تب a تا x تفاعل f کا تکمل a تا x محور x اور f کے بیچ رقبہ ہو گا۔ فرض کریں کہ آپ اس رقبہ پر بائیں سے دائیں چلتے ہوئے ایک قالین بچھاتے ہیں جس کی متغیر چوڑائی $f(t)$ ہو۔ جب قالین نقطہ x سے گزرتا ہے اس لمحہ زمین ڈھانپنے کی شرح $f(x)$ ہو گی۔

مثال 5.43:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\pi}^x \cos t\,\mathrm{d}t = \cos x && \text{مساوات 5.20 میں } f(t)=\cos t \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2} && \text{مساوات 5.20 میں } f(t)=\tfrac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

□

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم