احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 11

سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

اس حصہ میں سمتیات اور سہ بعدی محددی نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محددی مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محددی خلاء موزوں ہے۔ ہم محددی مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محددی خلاء پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور xy مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

11.1 مستوی میں سمتیات

بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاو، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہو گی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہو گا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہو گا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہو گا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر کے اس نشان کو سمتیہ کہتے ہیں۔

تعریف : ایک مستوی میں کسی مخصوص رخ خط کو سمتیہ[1] کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً $\boldsymbol{v}$ ، سے ظاہر کیا جائے گا[2]۔نقطہ A سے نقطہ B تک تیر کو ہم $\vec{AB}$ لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{OP} = \vec{EF}$$

□

غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی $50\,\%$ بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب مثبت c کی صورت میں $\boldsymbol{v}$ اور $c\boldsymbol{v}$ کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی c کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی[3] کہلاتے ہیں جبکہ $c\boldsymbol{v}$ کے مضرب کو $\boldsymbol{v}$ کا غیر سمتی مضرب[4] کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ حاصل ہو گا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

---

[1] vector
[2] قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان $\vec{v}$ یا نصف تیر کا نشان $\overset{\rightharpoonup}{v}$ ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔)
[3] scalar
[4] scalar multiple

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر $\boldsymbol{v}_1$ کا نمائندہ، مثلاً A سے B تک، ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_1$ کے اختتامی نقطہ (سر) B پر $\boldsymbol{v}_2$ کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل میں $\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{BC}$ ہے۔ مجموعہ $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ اب $\boldsymbol{v}_1$ کے دم A سے $\boldsymbol{v}_2$ کے سر C تک سمتیہ ہو گا۔ یوں اگر

$$\boldsymbol{v}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{BC}$$

ہوں تب

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہٰذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع[5] کہتے ہیں۔

اجزاء

دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

لکھنا ممکن ہو، سمتیات $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کے اجزاء $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ میں تحلیل کیا گیا ہے۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں اساسی[6] سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت x محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(1,0)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{i}$ ہے۔ مثبت y محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(0,1)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{j}$ ہے۔ اب غیر سمتی a کے لئے محور x کے متوازی سمتیہ $a\boldsymbol{i}$ کی لمبائی $|a|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $a > 0$ کے لئے دایاں اور $a < 0$ کے لئے بایاں ہو گا۔ اس طرح غیر سمتی b کے لئے محور y کے متوازی سمتیہ $b\boldsymbol{j}$ کی لمبائی $|b|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $b > 0$ کے لئے اوپر اور $b < 0$ کے لئے نیچے ہو گا۔ شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$ کو اجزاء $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$$

---

[5] parallelogram law
[6] basic

تعریف: اگر $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ہو تب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء سمتیات $a\boldsymbol{i}$ اور $b\boldsymbol{j}$ ہوں گے۔ اعداد a اور b ، اساسی سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

□

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} = a'\boldsymbol{i} + b'\boldsymbol{j} \quad \Leftrightarrow \quad a = a', \quad b = b' \tag{11.1}$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر $\boldsymbol{v}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{v}_2 = a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (a_1 + a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 + b_2)\boldsymbol{j}$$

مثال 11.2:

$$(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) + (5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = (2 + 5)\boldsymbol{i} + (-4 + 3)\boldsymbol{j} = 7\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

□

تفریق

ایک سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا منفی سمتیہ $\boldsymbol{v}(-1) = -\boldsymbol{v}$ ہو گا۔ اس کی لمبائی $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ہو گی البتہ اس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا مخالف ہو گا۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}_2$ کو سمتیہ $\boldsymbol{v}_1$ سے منفی کرنے کی خاطر ہم $-\boldsymbol{v}_2$ اور $\boldsymbol{v}_1$ کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم $\boldsymbol{v}_1$ کے سر سے $-\boldsymbol{v}_2$ کھینچ کر $\boldsymbol{v}_1$ کے دم سے $-\boldsymbol{v}_2$ کے سر تک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل میں دکھایا گیا ہے جہاں

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \boldsymbol{v}_1 + (-\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

اس کے علاوہ $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کے دم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_2$ کے سر سے $\boldsymbol{v}_1$ کے سر تک سمتیہ $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ ہو گا۔ یہ عمل شکل میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

مزید، $-\boldsymbol{v}_2$ کے سر سے $\boldsymbol{v}_1$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (a_1 - a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 - b_2)\boldsymbol{j} \tag{11.2}$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

مثال 11.3:

$$(6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) - (3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}) = (6-3)\boldsymbol{i} + (2-(-5))\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$$

□

ہم نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $\vec{ON}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ کے اجزاء کو $\vec{ON}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$ کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔

$N_1(x_1, y_1)$ سے $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\vec{N_1N_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} \tag{11.3}$$

مثال 11.4: نقطہ $N_1(3,4)$ سے نقطہ $N_2(5,1)$ تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\vec{N_1N_2} = (5-3)\boldsymbol{i} + (1-4)\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$$

□

مقدار

سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کی لمبائی[7] یا مقدار[8] $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے۔ سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ میں دو انتصابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{11.4}$$

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ $30°$ زاویہ پر $20\,\mathrm{N}$ کی قوت $\boldsymbol{F}$ سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتی ہے جبکہ اس کا انتصابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتصابی جزو معلوم کریں۔

حل: ہم قوت $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ اور اس کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں۔ اس مثلث سے $a = 10\sqrt{3}$ اور $b = 10$ حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو $10\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ اور انتصابی جزو $-10\boldsymbol{j}$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{F} = 10\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$ ہو گا۔ انتصابی جزو کا رخ نیچے ہے لہٰذا یہ منفی ہے۔ □

غیر سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$c\boldsymbol{v} = c(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) = (ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j} \tag{11.5}$$

سمتیہ $c\boldsymbol{v}$ کی لمبائی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ضرب $|c|$ ہو گا:

$$\begin{aligned}
|c\boldsymbol{v}| &= \left|(ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j}\right| \\
&= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\
&= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)} \\
&= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\
&= |c||\boldsymbol{v}|
\end{aligned}$$

---

[7] length
[8] magnitude

یوں اگر c غیر سمتی ہو اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب $|c\boldsymbol{v}| = |c||\boldsymbol{v}|$ ہو گا۔

مثال 11.6: اگر $c = -2$ اور $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{v}| = |-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$\begin{aligned}|-2\boldsymbol{v}| &= \big|(-2)(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\big| = |6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||\boldsymbol{v}|\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ $\boldsymbol{0}$ کو ظاہر کرنے کے لئے 0 کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

$$|a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

اکائی سمتیات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو اکائی سمتیہ[9] کہلائے گا۔ سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اکائی سمتیات ہیں۔

$$|\boldsymbol{i}| = |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad |\boldsymbol{j}| = |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ جو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} \tag{11.6}$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا $\boldsymbol{u}$ بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا 2π کرنے سے $\boldsymbol{u}$ کا سر N مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

---

[9] unit vector

لمبائی اور رخ

اگر $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ ہو تب

$$\left|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\boldsymbol{v}| = 1$$

ہو گا لہٰذا $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔یوں ہم $\boldsymbol{v}$ کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\tfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$$

یوں اگر $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ ہو تب

ا. $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔

ب. مساوات $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

حل:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \boldsymbol{v} \text{ کی لمبائی}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v} \text{ کا رخ}$$

$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}}\underbrace{\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right)}_{\text{رخ}}$$

□

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں $a \neq 0$ کی صورت میں سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کا ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گا۔

کسی نقطہ پر ایک منحنی کو ایک سمتیہ تب مماسی[10] یا عمودی[11] ہو گا جب اس نقطہ پر منحنی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال 11.8: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

حل: ہم نقطہ $(1,0)$ پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں۔

اس نقطہ پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کی ڈھلوان $\frac{3}{2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی 1 ہو ہم $\boldsymbol{v}$ کو

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کی لمبائی 1 ہے اور یہ $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-\boldsymbol{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

جو مخالف رخ ہے بھی $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جا سکتی ہے۔

---

[10] tangent
[11] normal

نقطہ $(1,1)$ پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان $\boldsymbol{u}$ کی ڈھلوان کے بالعکس تناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم $\boldsymbol{u}$ کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}, \qquad -\boldsymbol{n} = \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں $(1,1)$ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ □

سوالات

جیومیٹری اور حساب

سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ د. $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$

سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $2\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}$ د. $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$

سوال 3 تا سوال 6 میں $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C}=\sqrt{3}\boldsymbol{i}-\pi\boldsymbol{j}$ لیں۔ نتائج کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 3: $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$

سوال 4: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

سوال 5: $3\boldsymbol{A}-\frac{1}{\pi}\boldsymbol{C}$

سوال 6: $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+32\boldsymbol{j}$

سوال 7: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں۔

ا. $\boldsymbol{w}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. $\boldsymbol{v}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیہ کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔ محددی سطح پر مبدا سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

سوال 9: نقاط $N_1(5,7)$ اور $N_2(2,9)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

سوال 10: نقاط $N_1(1,2)$ اور $N_2(-3,5)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

سوال 11: نقاط $A(-5,3)$ اور $B(-10,8)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔

سوال 12: نقاط $A(-7,-8)$ اور $B(6,11)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔

سوال 13: نقاط $N_1(1,3)$ اور $N_2(2,-1)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

سوال 14: نقاط $N_3(1,3)$ اور N_4 کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_3N_4}$ تلاش کریں جہاں $N_1(2,-1)$ اور $N_2(-4,3)$ کو ملانے والے قطع کا وسطی نقطہ N_4 ہے۔

سوال 15: نقاط $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ اور $D(-2,2)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیات $\overrightarrow{CD}$ اور $\overrightarrow{AB}$ کا مجموعہ تلاش کریں۔

سوال 16: نقطہ A سے مبدا تک سمتیہ، جہاں $\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ اور $B(-2,5)$ ہیں۔

سوال 17: سمتیہ $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $A(2,9)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ B تلاش کریں۔

سوال 18: سمتیہ $\overrightarrow{NQ}=-6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $Q(3,3)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ N تلاش کریں۔

اکائی سمتیات

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 19: زاویہ $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 20: زاویہ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ اور $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 21: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال 22: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال 23 اور سوال 24 میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ اسی رخ تلاش کریں۔

سوال 23: $6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$

سوال 24: $-\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہو گی۔)

سوال 25: $y = x^2, \quad (2, 4)$

سوال 26: $x^2 + 2y^2 = 6, \quad (2, 1)$

سوال 27: $y = \tan^{-1} x, \quad (1, \frac{\pi}{4})$

سوال 28: $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (0, 1)$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم