

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	
463	4.8 ترکیب نیوٹن	
475	تکمل	5
475	5.1 غیر قطعی تکملات	
487	5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	
503	5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	
514	5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	
532	5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات	
559	5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	
576	5.7 بنیادی مسئلہ	
597	5.8 قطعی تکمل میں بدل	
603	5.9 اعدادی تکمل	
603	5.10 قاعدہ ڈورنقہ	
623	تکمل کا استعمال	6
623	6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ	
627	6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد	
638	6.2 کلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش	
646	6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا	
661	6.4 بیلی (تکلی) چھلے	
662	6.5 تکلی چھلے	
669	ضمیمہ اول	ا
671	ضمیمہ دوم	ب

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

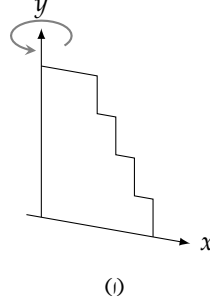
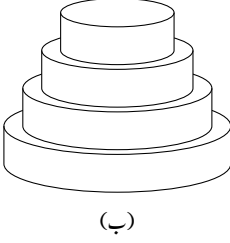
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 6.56: نکلی جسم طواف

6.5 نکلی چھلے

اجسام طواف کا حجم تلاش کرتے ہوئے بعض اوقات چھلا کی بجائے نکلی خول استعمال کرنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے (شکل 6.56)۔

نکلی کلیہ

فرض کریں ہم x محور اور وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے قع خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کرتے ہیں۔ ہمیں جسم طواف کا حجم درکار ہے۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P پر منحصر مستطیلوں کو خطے کا تخمینہ رقبہ لے سکتے ہیں۔ ایک نمائندہ مستطیل کی چوڑائی Δx_k اور قد $f(c_k)$ ہوگا، جہاں نمائندہ مستطیل کے قاعدے کا وسط c_k ہے (شکل 6.57)۔ ہم جیومیٹری سے جانتے ہیں کہ ایسے مستطیل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم

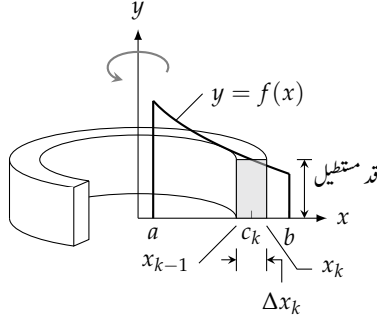
$$\Delta H_k = 2\pi \times \text{خول کا قد} \times \text{خول کا اوسط رداس}$$

ہوگا جو موجودہ صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$\Delta H_k = 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k$$

ہم P پر منحصر n مستطیلوں کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل حجم کے مجموعہ کو تخمیناً جسم طواف کا حجم لیتے ہیں۔

$$H \approx \sum_{k=1}^n \Delta H_k = \sum_{k=1}^n 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k \quad \text{ریمان مجموعہ}$$



شکل 6.57: k ویں مستطیل کو گھمانے سے حاصل نیکی خول۔

$\|P\| \rightarrow 0$ کرتے ہوئے اس مجموعہ کا حد ٹھوس جسم کا حجم ہو گا:

$$H = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

کلیہ خول برائے y محور کے گرد طواف
استراری تقابل $y = f(x)$, $0 \leq a \leq x \leq b$ اور محور x کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا
حجم درج ذیل ہو گا۔

$$(6.7) \quad H = \int_a^b 2\pi (\text{رداس خول})(\text{قد خول}) dx = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

مثال 6.16: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $x = 4$ اور محور x کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ بنا کر محور گردش کے متوازی اس پر قطع دکھائیں۔ قطع کا قد (خول کا قد) اور محور گردش سے قطع کے فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی چوڑائی dx خول کی چوڑائی ہو گی۔ ہم نے شکل 6.58 میں خول دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

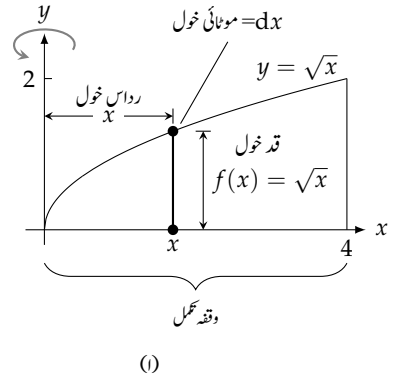
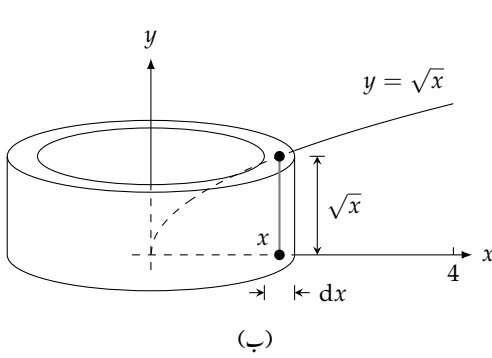
دوسرا قدم: مکمل کے حد معلوم کریں۔ خطے میں x کی قیمت a تا b تبدیل ہوتی ہے لہذا مکمل کے حد a اور b ہوں گے۔

$$H = \int_a^b 2\pi (\text{رداس خول})(\text{قد خول}) dx \quad \text{مساوات 6.7}$$

$$= \int_0^4 2\pi (x)(\sqrt{x}) dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}$$

جزو-1 اور جزو-2 میں حاصل قیمتیں



شکل 6.58: نیکی خول (مثال 6.16)

□

محور y کے گرد خط گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم مساوات 6.7 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم خط کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کریں تب حجم تلاش کرنے کی خاطر مساوات 6.7 میں x کی جگہ y استعمال کیا جائے گا۔

کلیہ خول برائے x محور کے گرد طواف

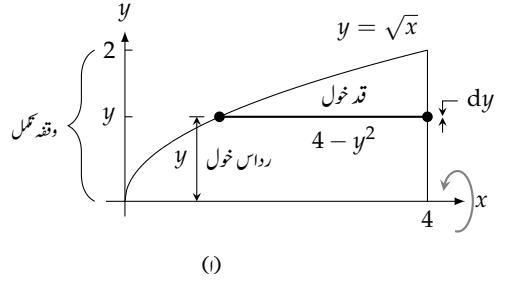
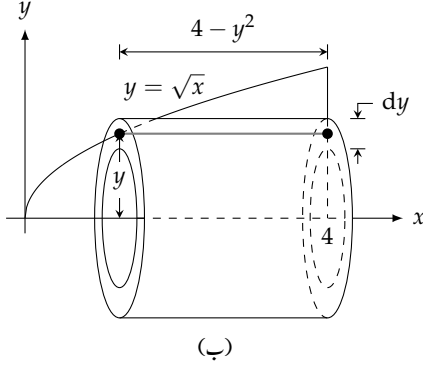
$$(6.8) \quad H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول}) dy = \int_c^d 2\pi y f(y) dy$$

درج بالا مساوات میں $f(y) > 0$ اور $0 \leq c \leq y \leq d$ ہیں۔

مثال 6.17: معنی $y = \sqrt{x}$ ، کلیہ $x = 4$ اور x محور کے بیچ خط کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خط کا خاکہ بنائیں اور اس پر محور گردش کے متوازی قطع دکھائیں۔ قطع کی لمبائی (قد خول) اور محور طواف سے اس کا فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی موٹائی، خول کی چوڑائی dy ہوگی۔ ہم نے شکل 6.59 میں y محور کے گرد بیلیں دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا بنانے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: مکمل کے حد معلوم کریں۔ چونکہ خط میں y کی قیمت $c = 0$ تا $d = 2$ ہو سکتی ہے لہذا یہی اس کے حد ہیں۔



شکل 6.59: محور کے گرد طواف (مثال 6.17)

تیسرا قدم:

$$H = \int_c^d 2\pi(y)(4 - y^2) dy$$

مساوات 6.8

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2) dy$$

جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں

$$= 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi$$

□

یہ نتیجہ مثال 6.9 میں ترکیب قرص سے حاصل جواب کے عین مطابق ہے۔

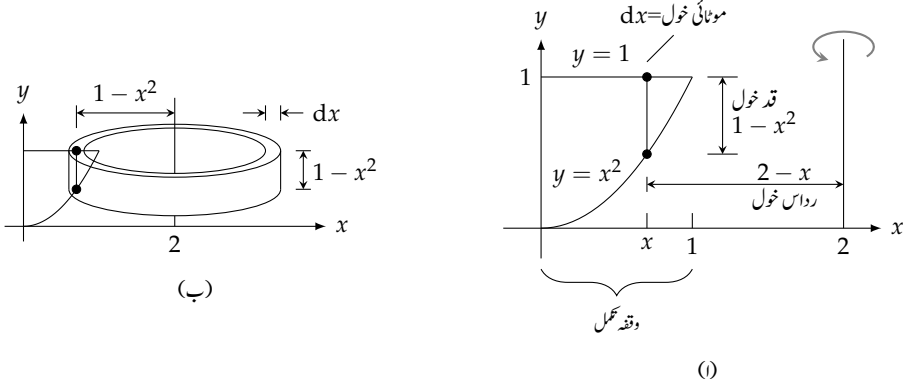
ترکیب خول کا استعمال

محور طواف (افقی یا انصافی) جیسا بھی ہو ترکیب خول کے اقدام درج ذیل ہوں گے۔

ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس میں محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد یا لمبائی (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موٹائی (چوڑائی خول) کی نشاندہی کریں۔

ب. مکمل کے حد معلوم کریں

ج. مکمل (2π) (رداس خول) (قد خول) کا موزوں متغیر (x یا y) کے ساتھ مکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے حجم دریافت کریں۔



شکل 6.60: خطہ اور خول (مثال 6.18)

اگلی مثال میں محور طواف افقی لکیر $x = 2$ ہے۔

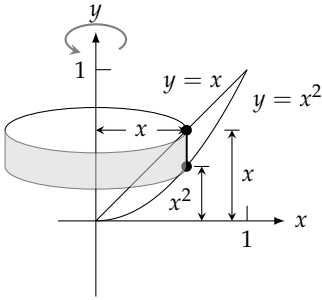
مثال 6.18: ربع اول میں قطع مکانی $y = x^2$ ، لکیر $y = 1$ اور y محور کے بیچ خطہ کو محور طواف $x = 2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خطہ پر محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موناہی (چوڑائی خول dx) کی نشاندہی کریں (شکل 6.60)۔ ہم نے خول بھی بنایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔
دوسرا قدم: مکمل کے حد $a = 0$ اور $b = 1$ ہیں۔
تیسرا قدم:

$$\begin{aligned}
 H &= \int_a^b 2\pi (\text{رداس خول}) (\text{قد خول}) dx & \text{مساوات 6.7} \\
 &= \int_0^1 2\pi (2-x)(1-x^2) dx & \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں} \\
 &= 2\pi \int_0^1 (2-x-2x^2+x^3) dx \\
 &= \frac{13\pi}{6}
 \end{aligned}$$

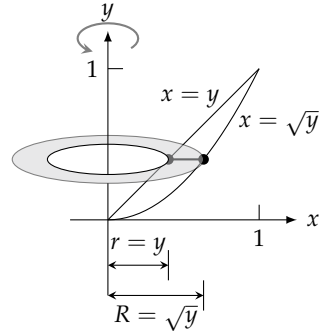
□

تفاعل $y = x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطہ کو مثال بناتے ہوئے شکل 6.61 میں ترکیب چھلا اور ترکیب خول دونوں دکھائے گئے ہیں۔ شکل 6.61-ا اور ب میں y محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے جبکہ شکل 6.61-ج اور د میں x محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے۔ دونوں صورتوں



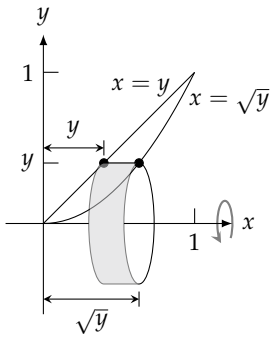
$$H = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi(x)(x - x^2) dx = \frac{\pi}{6}$$

(ب)



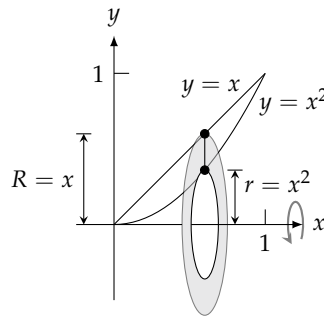
$$H = \int_{y=0}^{y=1} \pi[(\sqrt{y})^2 - (y)^2] dy = \frac{\pi}{6}$$

(د)



$$H = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi(y)(\sqrt{y} - y) dy = \frac{2\pi}{15}$$

(ج)



$$H = \int_{x=0}^{x=1} \pi[(x)^2 - (x^2)^2] dx = \frac{2\pi}{15}$$

(ه)

میں حجم کو ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے حل کیا گیا ہے۔ اس مخصوص خطے کے لئے دونوں محور طواف کے لئے دونوں ترکیب کارآمد ہیں لیکن ایسا ہر صورت میں نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر y محور کے گرد گھماتے ہوئے ترکیب چھلا میں ہمیں y کے لحاظ سے مکمل حل کرنا ہو گا۔ البتہ عین ممکن ہے کہ مستعمل کو y کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔ ایسی صورت میں ہمیں ترکیب خول استعمال کرنی ہو گی جو ہمیں x کے لحاظ سے مکمل لینے کی اجازت دیگا۔

ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے ہر صورت ایک جیسے حجم حاصل ہوں گے۔

سوالات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

