

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ تزییم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ڈورنقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنيات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
631	ا	ضمیمہ اول
633	ب	ضمیمہ دوم



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011





## باب 6

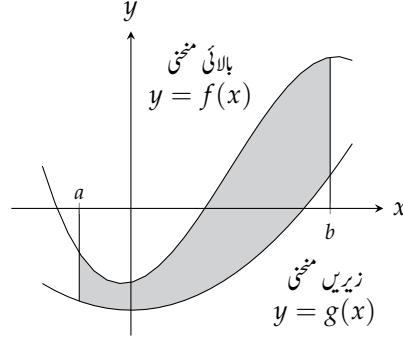
### تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے بیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبہ، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین پانی کی نکاسی کے لئے درکار کام، سیلاب دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدود۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریماں مجموعوں کے حد یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدود کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکمل کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جاسکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کی طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

#### 6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ

محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطہ کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔



شکل 6.1: منحنیات  $y = f(x)$ ،  $y = g(x)$  اور  $x = a$ ،  $x = b$  کے بیچ خط۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کا حد

فرض کریں ایک خط کی بالائی سرحد منحنی  $y = f(x)$  اور زیریں سرحد منحنی  $y = g(x)$  ہیں جبکہ اس کا پایاں اور دایاں سرحد بالترتیب خط  $x = a$  اور  $x = b$  ہیں (شکل 6.1)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری  $f$  اور  $g$  کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو مکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

مکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ  $[a, b]$  پر خانہ بندی  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  کے تحت خطہ کو  $n$  انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.2) جہاں  $k$  ویں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل 6.3)۔

$$\Delta S_k = [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \quad \text{چوڑائی} \times \text{قد}$$

اس کے بعد ہم خطے کے رقبہ کو تخمیناً ان  $n$  مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

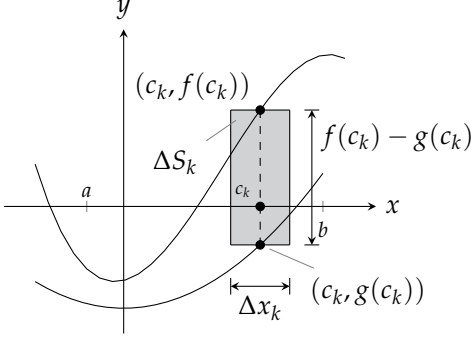
$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \quad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ  $f$  اور  $g$  استمراری ہیں لہذا  $\|P\| \rightarrow 0$  کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$  ہو گا:

$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

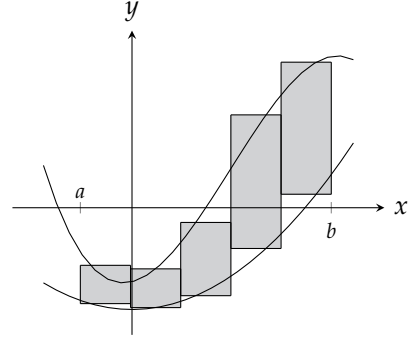
تعریف: اگر پورے  $[a, b]$  پر  $f$  اور  $g$  استمراری ہوں اور  $f(x) \geq g(x)$  ہو تب  $a$  تا  $b$  منحنیات  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے بیچ رقبہ  $a$  تا  $b$  مکمل  $[f - g]$  کا مکمل ہو گا:

$$(6.1) \quad S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



شکل 6.3:  $k$  ویں مستطیل کا قد  $f(c_k) - g(c_k)$  اور اس کی چوڑائی  $\Delta x_k$  لہذا اس کا رقبہ  $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$  ہو گا۔

□



شکل 6.2: ہم خط کو تجزیہاً  $x$  محور کے عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔

مساوات 6.1 کو استعمال کرنے کے لئے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

دو منحنيات کے بیچ رقبے کی تلاش

1. منحنيات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔ اس سے معلوم ہو گا کہ کوئی منحنی بالائی  $f$  اور کوئی زیریں  $g$  ہے۔ اس سے مکمل کے حد تعین کرنے میں بھی مدد ملتی ہے۔

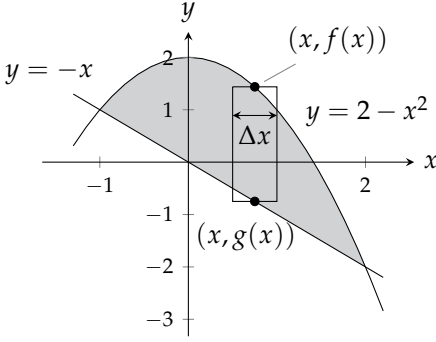
2. مکمل کے حد تلاش کریں۔

3. مکمل  $f(x) - g(x)$  کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

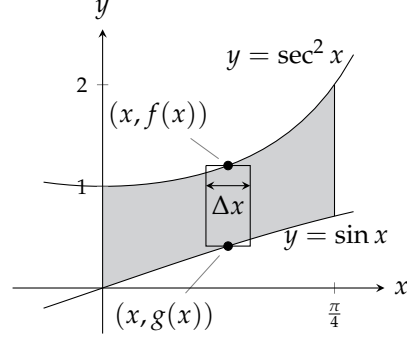
4. مکمل  $[f(x) - g(x)]$  کا مکمل  $a$  تا  $b$  حاصل کریں۔ قطعی مکمل سے حاصل عدد رقبہ ہو گا۔

مثال 6.1: منحنيات  $y = \sec^2 x$  اور  $y = \sin x$  کے تقارب  $0$  تا  $\frac{\pi}{4}$  رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم منحنيات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.4)۔ بالائی قوس  $f(x) = \sec^2 x$  کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس  $g(x) = \sin x$  کی منحنی ہے۔  
دوسرا قدم: مکمل کے حد  $a = 0$  اور  $b = \frac{\pi}{4}$  دیے گئے ہیں۔



شکل 6.5: خطہ برائے مثال 6.2



شکل 6.4: خطہ برائے مثال 6.1

تیسرا قدم:  $f(x) - g(x) = \sec^2 x - \sin x$   
چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x) dx = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

### باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ پایا جاتا ہو تب نقاط تقاطع سے مکمل کے حد حاصل ہوں گے۔

مثال 6.2: قطع مکانی  $y = 2 - x^2$  اور لکیر  $y = -x$  کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل 6.5)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم  $f(x) = 2 - x^2$  اور  $g(x) = -x$  لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے  $x$  محدود مکمل کے حد ہوں گے۔  
دوسرا قدم: مکمل کے حد جاننے کے لئے ہم  $y = 2 - x^2$  اور  $y = -x$  کو ایک ساتھ  $x$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 \\ x &= -1, \quad x = 2 \end{aligned}$$

$f(x)$  اور  $g(x)$  کو برابر پر کریں  
ایک جانب منتقلی  
تجزی  
حل

خطہ  $x = -1$  اور  $x = 2$  کے بیچ پایا جاتا ہے۔  
 تیسرا قدم:  $f(x) - g(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 + x - x^2$   
 چوتھا قدم:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[ 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left( 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) - \left( -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

□

فنیات دو ترسیمات کا تقاطع  
 مکمل کے حصول میں بعض اوقات مکمل کے حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یا تو ایک تفاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کا نقاط تقاطع۔

مساوات  $f(x) = g(x)$  حل کرنے کے لئے ہم  $y = f(x)$  اور  $y = g(x)$  کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات  $f(x) - g(x) = 0$  کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل 6.6)۔

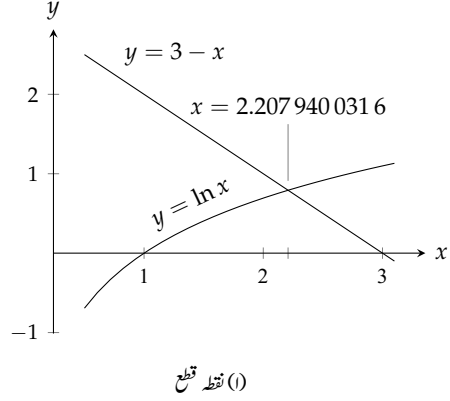
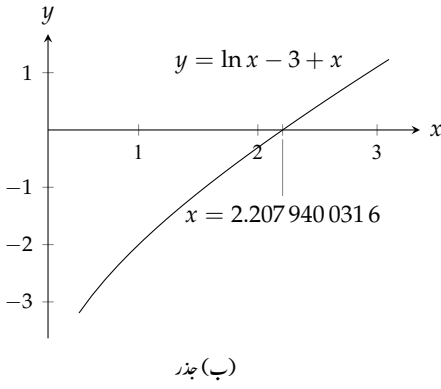
$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = 3 - x$$

### 6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی خطے پر علیحدہ علیحدہ مساوات 6.1 کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال 6.3: ربع اول میں  $y = \sqrt{x}$  کے نیچے اور  $y = x - 2$  کے اوپر رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ترسیم (شکل 6.7) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد  $f(x) = \sqrt{x}$  ہے جبکہ  $0 \leq x \leq 2$  پر اس کی پچھلی سرحد  $g(x) = 0$  اور  $2 \leq x \leq 4$  پر پچھلی سرحد  $g(x) = x - 2$  ہے (نقطہ  $x = 2$  پر  $g(x)$  کے دونوں کلیات ایک جیسے ہیں)۔ ہم  $x = 2$  پر خطہ کو دو ذیلی حصوں  $A$  اور  $B$  میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لئے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔



شکل 6.6: تفاعل  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے حل کی تلاش۔

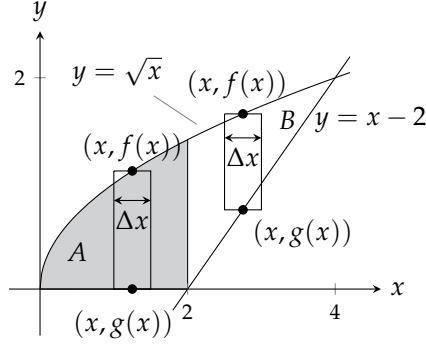
دوسرا قدم: خطہ  $A$  میں مکمل کے حد  $a = 0$  اور  $b = 2$  ہیں۔ خطہ  $B$  کا پایاں حد  $a = 2$  ہے۔ اس کے دایاں حد جاننے کے لئے ہم مساوات  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = x - 2$  کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= x - 2 \\ x &= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 \\ x &= 1, \quad x = 4\end{aligned}$$

$f(x)$  اور  $g(x)$  کے برابر پر کریں  
مرلے لیں  
ایک جانب منتقلی  
تجزی  
حل

صرف  $x = 4$  مساوات  $\sqrt{x} = x - 2$  کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مرلے لینے کی وجہ سے حل  $x = 1$  پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں دایاں حد  $b = 4$  ہے۔  
تیسرا قدم:

$$\begin{aligned}f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2, & 2 \leq x \leq 4\end{aligned}$$



شکل 6.7: خطہ برائے مثال 6.3

چوتھا قدم: ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \sqrt{x} \, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) \, dx \\
 &= \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 \\
 &= \frac{2}{3} (2)^{3/2} - 0 + \left( \frac{2}{3} (4)^{3/2} - 8 + 8 \right) - \left( \frac{2}{3} (2)^{3/2} - 2 + 4 \right) \\
 &= \frac{2}{3} (8) - 2 = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

□

تکمل بلحاظ  $y$





ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

