احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفز. كي

جامعہ کامییٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

#### عنوان

ix																																											باچ	وي
xi																																						چ	ديبا.	ب کا	تباب	پہلی <i>–</i>	ری	میر
1																																							ت	علومار	ئى مە	ابتداؤ		1
1																																		خط	بقی	حق	اور	راد	ل اء	حقيفي		1.1		
1 14																																	ئ	وترة	ر <sup>ا</sup> هو	,	لے او	طوه	ر، خ	محد		1.2		
30																																							ل	تفاعا		1.3		
52																																					تتقلي	، ن	یم یم ک	7		1.4		
72																																										1.5		
12	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	U	س	يان	,		1.5		
93																																							رار	استم	اور	حدود		2
93																																		عد	. ,	7 او	ثرر	یی ځ	ىكى _	تند		2.1		
11(	· ).				•					•					•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				•	•	•	عد	قوا	ئے	ز	•) _/	ل کر	ين تلاش	حد		2.2		
123																																										2.3		
143																																												
163																																										2.5		
181																																												
101	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•				
195	5																																									تفرق		3
195	5.																																			(	زز	اتفا	ل ک	تفاع		3.1		
217	7.																																				į	نر و	ر ت	قواء		3.2		
236																																										3.3		
253																																										3.4		
274																																										3.5		
27 291																																										3.6		
308																																												

عبنوان	iv

ا استعال عالم	تفرق دَ	4
تفاعل کی انتہائی قیمتیں	4.1	
مئله اوسط قیت	4.2	
مقانی انتہا کی قیمتوں کا یک رتبی تفر تی پر کھ	4.3	
353		
'لا اور ''لا کے ساتھ ترسیم	4.4	
$x  o \pm \infty$ ير حد، متقارب اور غالب اجزاء $x  o \pm \infty$	4.5	
بهترین بناما	4.6	
خط بندی اور تفر قات	4.7	
تركيب نيوڻن أ	4.8	
• • •		
471	تحمل	5
غير قطعي كملات	5.1	·
تىر كى عنات ابتدائى قىت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	5.2	
تحمل بذریعه ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	5.3	
اندازه بذرایعه متنانی مجموعه	5.4	
ر یمان مجموعے اور تطعی تکملات	5.5	
خصوصیات، رقبه، اور اوسط قیمت مسکله	5.6	
بنیادی مسّله	5.7	
تطعی کمل میں بدل	5.8	
اعدادی تملل	5.9	
	5.10	
استعال استعال	تکمل کا	6
منحنیات کے ﷺ رقبہ	6.1	
نگایاں کاٹ کر قجم کی تلاش	6.2	
اجهام طواف کے حجم۔ قرص اور حیطلا	6.3	
•		
Y ·	6.4	
متوی منحنیات کی لمبائیاں	6.5	
سطح طواف کار قبہ	6.6	
معيار اثر اور مر كز كميت	6.7	
6.7.1 وسطانی مرکز		
کام	6.8	
	6.9	
بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال	6.10	
	ماورائی	7
الٹ تفاعل اور ان کے تفرق	7.1	

عــــنوان

ئار هم      .	7.2 قدرتی لوگ	
يُ تفاعلُ	7.3 قوت نماؤ	
$\log_a x$		
۵		
ينال	• /	
ت ح نمو		
تریتیی اور شاکی حلاش		
ناقى تفاعل	7.8 الث تكونه	
یاقی تفاعل کے تغرق؛ محمل	7.9 الث تكون	
يان د د د د د د د د د د د د د د د د د د د	7.10 مذلولي تفائ	
تفرقی مساوات	7.11 کمک رتی	
ر ب مدادی تر کیب؛ میدان دٔ هلوان		
- · · ·	<del></del>	
	تکمل کے طریقے	8
بنیادی کلیات	8.1 کمل کے	
	4	
ل	•	
ر		
ر ا		
ک ل اور کمپیوٹر	_	
ں اور پیوٹر	· •	
ب س	8.6 عير مناسه	
	لامتنابى تشكسل	9
زتیب کی حد	لانتیابی س 9.1 اعداد کی تا	7
ر یب ق عبد علاش کرنے کے مسئلے	9.2 ترتب <u>ک</u>	
ىلىل <sub></sub>	9.2 ريب 9.3 لامتناي	
ا جزاء والے تسلسل کا تکملی پر کھ	9.4 غير منفي ا	
ا براء والے من کا کی پڑھا	9.4 کیر ن	
اجزاء کے تسلسل کے نقابلی پر کھی	9.5 غير منفى ا	
ا جزاء کے نشکسل کا تناسی اور جذری پر کھ	9.6 غير منفى ا	
ل، مطلق اور مشروط ار تکاز	9.7 بدلتا تتكسل	
ىل مارن شكىل ماران شكىل	9.8 طاقتي تشك	
لاارن تسكسل	9.9 ٹیکر اور مکا	
ں کا ار تکاز؛ خلل کے اندازے	9.10 ئىرنىلىل	
مُل کے استعال کی میں میں کہ استعال کی استعال کا استعال کی استعال ک	9.11 طاقتي تسك	
مقدار معلوم اور قطبی محدد	مع ط حصر منحنی	10
مقدار سفوم اور من محدد تھے اور دو قدری مساواتیں		10
ھے اور دو فدر کی مساوا تیں		
کاظ سے محروط خصول کی جماعت بندی	10.2 سنگ کے	

Vi

1229       او در قر قاسادات اور گومتا       10.4         1243       استوی منعنیات کے مقدار معلوم روپ کا حسول       10.5         1259       حقد الرسم متعنیات       10.5         1273       استوی معنیات       10.6         1285       استوی معنیات       10.7         1299       استوی معنیات       10.8         1300       خوا مسون کے قلمی سمادات       10.8         1314       استوی معنیات اور خط می	
10.5 احساء اور مقدار معلوم منحنیات استروی عدد عدد عدد عدد استروی الدول عدد عدد عدد عدد عدد عدد عدد عدد عدد عد	10.3 دو
1273       والم العلى حد الله العلى	10.4
1285.       رقط محدور میں ترسم       10.7         1299.       10.8.1         1300.       ارترے       10.8.1         1314.       الاحدام       10.9         1327.       استحیالی جو میلری       10.9         1327.       استحیالی جو میلری       11.1         1344.       الله محتیات       11.2         1351.       مستحیات       11.2         1351.       الله محتیات       11.3         1362.       الله محتیات       11.3         1376.       الله محتیات       11.4         1391.       حباد       11.5         1405.       الله محتیات       11.6         1423.       الله محتیات       11.7         1435.       الله محتیات       الله محتیات         1435.       الله محتیات       الله محتیات         1435.       الله محتیات       الله محتیات         1436.       الله محتیات       الله محتیات         1437.       الله محتیات       الله محتیات         1438.       الله محتیات       الله محتیات         1439.       الله محتیات       الله محتیات       الله محتیات         1459.       الله محتیات       الله محتیات       الله محتیات         1490.	
1299.       عرفوط حصوں کے قبلی سمادات       10.8.1         1300       دائرے       10.8.1         1314       دائرے       10.9         1327       استعمل حدوث من محمیات       11.1         1327       11.2       11.2         1344       استعمل المحمد المورد المنظل المحمد	10.6 قط
1300       العام المعلى المدائل المعلى	10.7 قط
1300       العام المعلى المدائل المعلى	<i>7</i> 10.8
1327       استان اور ظامل شمل شحلیا چیو مسطری         1327       11.1         1344       استوی میں سمتیات         11.2       11.2         1351       راستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات         11.3       11.3         1361       را الله شعر الله أله الله شعر الله شعر الله شعر الله أله الله شعر الله الله الله الله أله الله الله الله	.1
1327       متوی میں سمتیات       11.1         1344       تیمی (متطیل) محدو اور فغا میں سمتیات       11.2         1351       مرب فقط         1361       11.3         1362       11.3         1376       ماسیلی ضرب         11.4       ماسیلی ضرب         1391       ماسیلی ضرب         1405       ماسیلی ضرب         1405       ماسیلی ضطوط اور مستوی میرود         1423       ماسیلی فور میرود         1435       میرود         1435       میرود         1435       میرود         1438       میرود         1458       میرود         1458       میرود         1467       میرود         1475       میرود         1475       میرود         1476       میرود         1477       میرود         148       میرود         1513       میرود میرود         1513       میرود         1513       میرود         1528       میرود         1543       میرود         1543       میرود         1543       میرود	10.9
1327       متوی میں سمتیات       11.1         1344       تیمی (متطیل) محدو اور فغا میں سمتیات       11.2         1351       مرب فقط         1361       11.3         1362       11.3         1376       ماسیلی ضرب         11.4       ماسیلی ضرب         1391       ماسیلی ضرب         1405       ماسیلی ضرب         1405       ماسیلی ضطوط اور مستوی میرود         1423       ماسیلی فور میرود         1435       میرود         1435       میرود         1435       میرود         1438       میرود         1458       میرود         1458       میرود         1467       میرود         1475       میرود         1475       میرود         1476       میرود         1477       میرود         148       میرود         1513       میرود میرود         1513       میرود         1513       میرود         1528       میرود         1543       میرود         1543       میرود         1543       میرود	
1344       اعرائيس (ستطيل) محدد اور فضا مين سمتيات         1351       11.2.1         1361       11.3.1         1362       11.3.1         1376       11.4         1376       11.4         1391       11.5         1405       11.6         1405       11.6         1423       11.7         1435       11.7         1435       12.1         1435       12.1         1458       12.2         1467       12.2         1467       12.3         1475       12.4         1497       12.5         1513       12.6         152       12.6         153       12.6         1543       13.2         1543       13.3	11 منتیات اور 11.1 مس
1351       رو       11.2.1         1361       شرب فتط       11.3.1         1362       ب       11.3.1         1376       ب       11.4         1391       فضل ور ستوى       11.5         1405       ب       11.6         1405       ب       11.7         1423       ب       11.7         1435       ب       12.1         1435       ب       12.1         1458       ب       12.1         1458       ب       12.2         1467       T       12.2         1467       T       12.3         1475       ب       12.4         1497       ب       12.5         1513       ب       12.5         1526       ب       13.1         1527       ب       ب       13.1         1528       ب       13.3         1543       ب       13.3	11.1
1361       ضرب نقط.       11.3.1         1376       11.4       11.4         1376       11.4       11.5         1401       11.5       11.5         1405       11.6       11.6         1423       11.7       11.7         1435       احمة تقاعل اور فضائل متحنيات       12.1         1435       احمة تقاعل اور فضائل متحنيات       12.1         1458       الحراكي قوت تفاعل اور فضائل متحنيات       12.2         1467       T       12.3         1475       الحراكي قوت اور اكائي ممان سمتيم T       12.3         1475       T       \$\frac{1}{2}\$	1
1362       بسابی علی اللہ علی اور مرابع سطین اللہ علی اور مرابع سطین اللہ علی اور کروی محدد اللہ علی اور کروی محدد اللہ علی اور کروی محدد اللہ علی اور فضا میں حرکت اللہ علی اور فضا میں حرکت اللہ علی علی اللہ علی علی اللہ عل	
1376       سلبی ضرب         1391       نصابین خطوط اور مستوی         11.5       نصابی خطوط اور مستوی         11.6       نصابی اور مرابع سطین         11.7       نصابی اور نصا بیل حرکت         135       سیتی قبیت نفاعل اور نصا بیل حرکت         1435       سیتی قبیت نفاعل اور نصا بیل حرکت         1458       سیتی قبیت نفاعل اور نصا بیل حرکت کی ضونہ کئی         1458       سیتی محرکت کی ضونہ کئی         1459       سیتی سیتی سیتی سیتی کے المحرک کی خوالہ المحرک کے کی محرکت کی خوالہ کی خوا	
1391       نضا میں مخطوط اور مستوی         1405       نسای اور مربع سطحیں         11.6       نسای اور رفع سطحیں         11.7       نسای اور نشا میں حرکت         سی قبیت نفاعل اور نشا میں حرکت       12.1         1435       نسائل اور فضا میں حرکت         12.1       سی تبیت نفاعل اور فضا کی موند کئی         1458       کے موند کئی         1458       کے موند کئی         1467       T         1467       T         1475       کے موند کئی         1497       پیم المنظور اور اکائی مماسی سمتیہ         1497       پیم السخیر نفاعل اور جزوی تفر قات         1513       کثیر السخیر نفاعل اور جزوی تفر قات         1513       کثیر السخیر نفاعل اور جزوی تفر قات         1513       کثیر السخیر السخیر نفاعل اور جزوی تفر قات         1528       کشیر السخیر	
1405       تکل اور مرابع سطین         1423       11.7         1423       11.7         ستی قیت نفاعل اور فضائی محدیات       12.1         1435       12.1         1458       12.2         1458       2.2         1458       2.2         1467       7         12.1       12.3         1467       7         1475       2.2         1475       2.2         1475       2.2         1497       2.2         1513       2.5         1513       2.5         1513       2.5         1513       2.5         1513       3.1         1528       3.2         1543       3.3	
1435       قیت نفاعل اور فضائی حرکت         1435       12.1         1458       12.2         1458       12.2         1467       7         12.1       14.2         1467       7         1475       12.4         1475       12.4         1475       12.4         1497       2         1513       2         1513       2         1513       2         1513       3         1513       13.1         1528       3         1543       3         1543       3         1543       3         1543       3         1543       3         1543       3         1543       3         1543       3	
1435       ستی قیت نفاعل اور فضائی منحنیات       12.1         1458       گولا کی حرکت کی نمونه گئی       12.2         1467       T لمبائی قوس اور اکائی ممای سمتیم       12.3         1475       پیار الله المحالی المحال	11.7 نکک
1435       ستی قیت نفاعل اور فضائی منحنیات       12.1         1458       گولا کی حرکت کی نمونه گئی       12.2         1467       T لمبائی قوس اور اکائی ممای سمتیم       12.3         1475       پیار الله المحالی المحال	12 سمتی قمہ یں ق
1458.       العلق عمل الله الله الله الله الله الله الله ال	12.1 سائي <i>ٽ</i> 12.1 سائ
1467       T المبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ 12.3         1475       12.4         1475       اخنا، مروثر اور TNB چیوکٹ         12.5       فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت         کثیر المتخبر نقاعل اور جزوی تفر قات       ا 13.1         1513       شغیرات کے نقاعل         1528       ادور استمرار         1543       ا 13.3         1543       ا 13.3	
1475.       اخنا، مروثر اور TNB چيوكث         1497.       المحتار المعنوعي سياروں اور مصنوعي سياروں کی حرکت         1513       کثير المتخبر نفاعل اور جزوی تفر قات         1513.       المحتار منتخبرات کے نفاعل         1514.       المحتار المح	12.3 لما
1497.       المعنوع على سياروں اور مصنوع سياروں كى حركت         1513       المتخبر نفاعل اور جزوى تفر قات         1513.       المتخبر نفاعل اور جنوى تفريات كے نفاعل         1528.       المتحبر المتحرار         13.2       المتحبر المتحرار         1543.       المتحبر المتحبر المتحبر المتحبر المتحرار         1543.       المتحبر المت	.خا 12.4
1513       تشر التغیر نفاعل اور جزوی تفر قات         1513       تشیرات کے نفاعل         1528       تا تا تا ترار دی         1543       تا قات         1543       تا قات         1543       تا قات	12.5 فلكو
13.1 تشير متغيرات كے نفاعل	
13.2 حد اور استمرار	13 كثير المتغير تأ
13.3 جزوى تفر قاًت	
- 13.4 كفرق يذكري، خط بندي، اور كفر قات	
13.5 ننجري تاعده	13.5
13.6 پایند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفر قات	
13.7 رخی تفرقات، سمتیه و هلوان، اور ممای سطحین	ن 13.7
13.8 انتهائی قیمتیں اور نقطہ زین	13.8 ائت
ات	جوابات
ضیمہ اول	ا ضميمه اول

162	29	ضميمه دوم	ب
163	31	ضميمه تين	ટ
163	33	ضميمه چار	,
163	35	ضميمه بإنج	p
163	37	ضميمه چھ	,
163	39	ضميمه سات	j
164	41	ضميمه آٹھ	٢
164	43	ضميمه آٹھ	Ь

## ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے کلھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونااس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مغید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تفکیل دیا گیا ہے۔اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبكه اردو اصطلاحات چننے ميں درج ذيل لغت سے استفادہ كيا گيا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نظاندہی میرے برقی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$ 

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر كي

5 جون <u>2019</u>

# میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

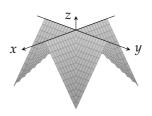
امید کی جاتی ہے کہ بیہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف بیر پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

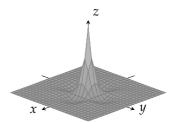
میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كَي

2011 كتوبر \_2011



 $|x| \le a$ ,  $|y| \le a$  پر "هَاعل  $|x| \le a$ ,  $|y| \le a$  چيت  $|x| \le a$ ,  $|y| \le a$  پر "هَاعل |x| - |y| |x| - |y| کا |x| - |y| کا خيت |x| - |x| زياده سے زياده قيت |x| - |x| و اور کم سے کم قيت |x| - |x|



 $|x| \leq \frac{3\pi}{2}$  ,  $|y| \leq \frac{3\pi}{2}$  نظم 13.54: چکور خطہ  $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$  کی  $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$  زیادہ سے زیادہ قبت z = 1 اور کم ہے کم قبت تقریباً z = 1

### 13.8 انتهائی قیمتیں اور نقطه زین

مستوی xy میں محدود بند خطہ میں استمراری تفاعل کی اس دائرہ کار میں مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں پائی جائیں گی (شکل 13.54 اور شکل 13.55 اور شکل 13.55 ان قیمتوں کا جاننا اور ان نقطوں کا جاننا، جہاں سے قیمتیں پائی جاتی ہیں، ضروری ہے۔ہم جزوی تفر قات سے عموماً انہیں جان سکتے ہیں۔

#### تفرقی پر کھ

واحد متغیری نفاعل کا مقامی انتہائی نقطہ علاش کرنے کی خاطر ہم ان نقطوں پر نظر رکھتے ہیں جہاں اس نفاعل کا مماس افقی ہو۔ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت، مطلق کم سے کم قیمت یا نقطہ زین علاش کرتے ہیں۔ دو متغیری نفاعل z = f(x,y) کے لئے ہم ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت، مطلق کم سے کم قیمت یا نقطہ زین پر مزید بات جلد کی جائے گی۔)
علاش کرتے ہیں۔ (نقطہ زین پر مزید بات جلد کی جائے گی۔)

تحریفات : فرض کریں خطہ f(x,y) ، جس میں نقطہ f(a,b) پیا جاتا ہو، میں نفاعل f(x,y) معین ہے۔ تب

- f(a,b) بوتب f(a,b) > f(x,y) پر f(x,y) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب نظام f(a,b) بوتب نظام f(a,b) بوتب نظام بوگار
- f(a,b) بوتب  $f(a,b) \leq f(x,y)$  پر f(x,y) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب f(a,b) بوتب نظم بوگا۔

مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ کو سطح z=f(x,y) کے پہاڑی جبکہ مقامی کم سے کم نقطہ کو وادی میں گھائی تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسے نقطوں پر ممای مستوی افقی ہوں گے، بشر طبیکہ بیہ موجود ہوں۔

واحد متغیر تفاعل کی طرح، مقامی انتها کی تلاش ایک رتبی تفرقی پر کھ پر منحصر ہو گا۔

مسکہ 13.7: مقامی انتہائی قیمیت کا کی رہی تفرتی پر کھا اگر تفاعل f(x,y) کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ  $f_y(a,b)=0$  بر مقامی زیادہ  $f_x(a,b)=0$  اور  $f_x(a,b)=0$  اور  $f_x(a,b)=0$  بروں گے۔

ثبوت: فرض کریں تفاعل f کی دائرہ کار کے ایک اندرونی نقطہ (a,b) پر تفاعل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یائی جاتی ہے۔ تب

ال منتوی y=b کی کار از روزی نظر ہوگا۔ z=f(x,b) کو جس منحنی کے دائرہ z=b منتوں z=b کار کا اذرونی نظر ہوگا۔

2. نقطہ x=a پر تفاعل z=f(x,b) متغیر x=a کاظ سے قابل تفرق ہو گا (اور یہ تفرق z=f(x,b) ہو گا)۔

3. نقطہ x=a پر تفاعل z=f(x,b) کی مقامی زیادہ سے زیادہ تیمت پائی جائے گا۔

 $f_x(a,b)=0$  يول x=a يول x=a يو كا تفرق صفر بو گا (مسئلہ 4.2)۔ چونکہ یہ تفرق z=f(x,b) ہو گا۔ x=a يول عنظہ x=a يول منتخى x=a منتخى x=a كے دائرہ كار كا اندرونی نقطہ بو گا۔

تناعل  $f_{y}(a,b)=0$  کابت کیا جا سکتا ہے۔ z=f(a,y) ثابت کیا جا سکتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیت کے لئے مسلے کا ثابت مکمل ہوتا ہے۔ مقامی کم سے کم قیت کے لئے مسلے کا ثبوت آپ سے سوالات میں مانگا گیا ہے۔

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$
 افتط  $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$  برکرنے ج $f_x(a,b)=0$  اور  $f_x(a,b)=0$  برکرنے ج $f_x(a,b)=0$  برکرنے ج

لعيني

$$z = f(a, b)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح مسلم 13.7 کہتا ہے کہ مقامی انتہا پر یقیناً افتی ممای مستوی ہوگا، بشر طیکہ اس نقط پر ممای مستوی موجود ہو۔

واحد متغیر تفاعل کی صورت کی طرح، مسئلہ 13.7 کہتا ہے کہ تفاعل f(x,y) کی انتہائی قیمت صرف اور صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جا سکتی ہے:

- بو،  $f_x = f_y = 0$  اندرونی نقاط جہال .1
- یں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں،  $f_{x}$  اور  $f_{y}$  میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں،
  - 3. تفاعل کے دائرہ کار کے سرحدی نقاط۔

تحریف: نفاعل f(x,y) کے دائرہ کار کا وہ اندرونی نقطہ جہاں  $f_x$  اور  $f_y$  دونوں صفر ہوں یا جہاں  $f_x$  اور  $f_y$  میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں،  $f_x$  کا نقطہ فاصلی  $f_x$  ہوگا۔

اس طرح تفاعل f(x,y) کی انتہائی قیمتیں صرف نقاط فاصل اور سرحدی نقاط پر پائی جائیں گی۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح، ضروری نہیں کہ ہر نقطہ فاصل پر مقامی انتہا ہو۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ تصریف ممکن ہے۔ دو متغیرات کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ زین ممکن ہوگا۔

تعریف: نقطہ فاصل (a,b) پر اس صورت قابل تفرق تفاعل f(x,y) کا فقطہ زیرے x + y = 0 جب ہر کھلے قرص میں، جس کا مرکز (a,b) ہو، ایسے دائرہ کاری نقاط f(x,y) > f(a,b) ہوں جن پر f(x,y) > f(a,b) ہو۔ z = f(x,y) ہو۔ z = f(x

П

critical point<sup>42</sup> saddle point<sup>43</sup>

## جوابات

ضمیمها ضمیمه اول

ضمیمه به ضمیمه د وم

ضمیمه تنین

ضمیمه د ضمیمه چار

ضمیمه هاینچ

ضمیمه و ضمیمه جیم

ضمیمه ز ضمیمه سات

ضمیمه آڅھ

ضمیمه آگھ