احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

حصہخطی تخمین اور تفرقات بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی خطی صورتوں[20] پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ متعارف کرتے ہیں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیائش میں خلل اور حساسیت کو $\mathrm{d}y$ سے ظاہر کریں گے۔

خطی تخمین

آپ شکل 4.126 میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

شکل 4.127 کی علامتیت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ہے۔یوں مماس تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جا سکتا ہے۔

تعریف:
اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{4.15}$$

نقطہ a پر f کی خطی صورت[21] ہو گی۔ f کی درج ذیل تخمین L

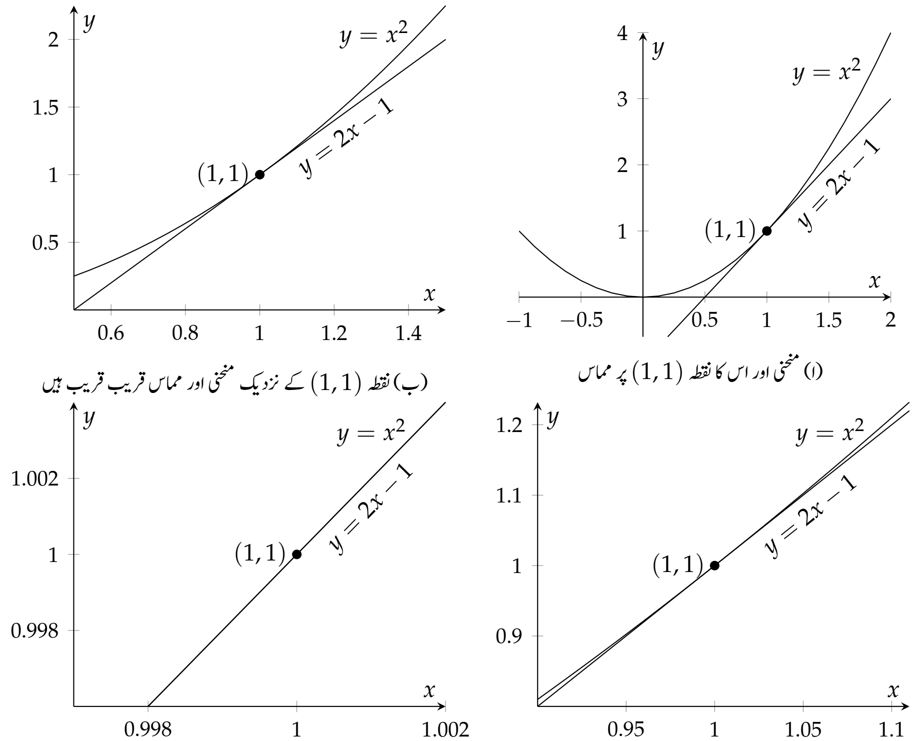
$$f(x) \approx L(x)$$

نقطہ a پر تفاعل f کی معیاری خطی تخمین[22] ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا وسط[23] ہے۔

□

---

[20] linearizations
[21] linearization
[22] standard linear approximation
[23] center



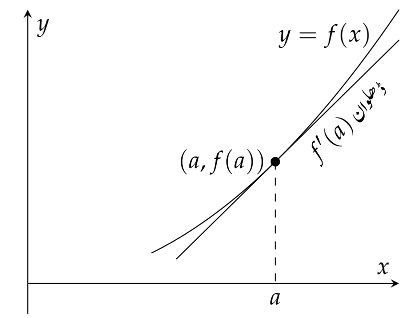
(ا) منحنی اور اس کا نقطہ $(1,1)$ پر مماس

(ب) نقطہ $(1,1)$ کے نزدیک منحنی اور مماس قریب ہیں

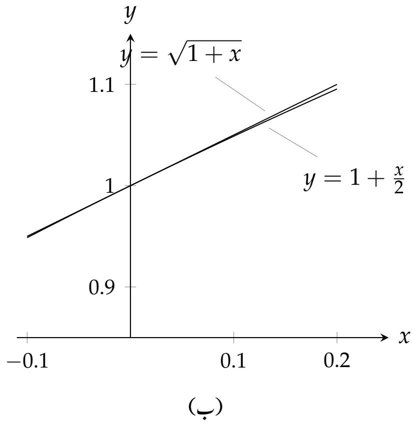
(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

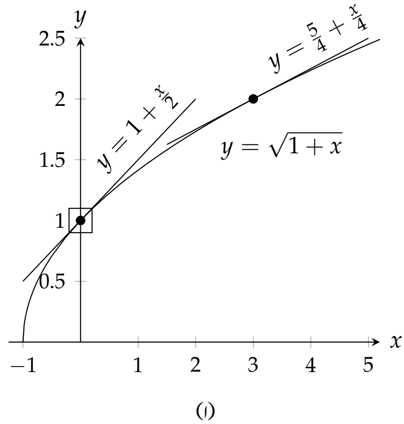
(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

شکل 4.126: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینی طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے



شکل 4.127: نقطہ a پر تفاعل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ہو گا





شکل 4.128: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کا خطی تخمین

مثال 4.40: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خطی صورت تلاش کریں۔

حل: ہم $a = 0$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہٰذا

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

ہو گا۔ شکل 4.128-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔ □

تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل 4.128-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10 \qquad \text{2 اعشاریہ درست}$$

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025 \qquad \text{3 اعشاریہ درست}$$

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250 \qquad \text{5 اعشاریہ درست}$$

وسط سے دور خطی تخمینی میں خلل نا قابل نظر انداز ہو گا۔یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔آپ کو $x = 3$ پر نیا خطی تخمین حاصل کرنا ہو گا۔

مثال 4.41: $x = 3$ پر تفاعل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کا خطی تخمین حاصل کریں۔

حل: ہم $a = 3$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\bigg|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

ہے لہٰذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

ہو گا (شکل 4.128-ا)۔ اس خطی تخمین سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے $0.000\,61$ ہٹ کر ہے۔

اگر ہم مثال 4.40 میں حاصل خطی تخمین استعمال کریں تب

$$\sqrt{+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

حاصل ہو گا جس میں $25\,\%$ خلل پایا جاتا ہے۔ □

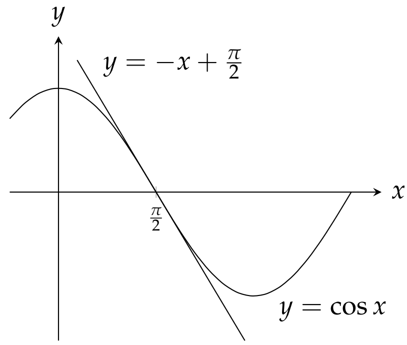
مثال 4.42: جذروں اور طاقتوں کے لئے اہم ترین خطی تخمین درج ذیل ہے۔

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad x \approx 0;\ k \text{ کوئی عدد ہے} \tag{4.16}$$

$x = 0$ کے نزدیک یہ قابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔ □

مساوات 4.16 سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} && k = \frac{1}{2}\\
\frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x && k = -1\\
\sqrt[3]{1+5x^4} &= (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 && k = \frac{1}{3}\\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\tfrac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} && k = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$



شکل 4.129: کوسائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خطی تخمین

دیگر اہم خطی تخمین درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$\tan x \approx x$$

مثال 4.43: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کا خطی تخمین حاصل کریں۔
حل: درج ذیل

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

لیتے ہوئے خطی تخمین درج ذیل ہو گا (شکل 4.129)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0 + (-1)(x - \tfrac{\pi}{2}) = -x + \tfrac{\pi}{2}$$

□

تفرقات

تعریف:
فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے۔ تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر ہے۔ تفرق $\mathrm{d}y$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

□

عموماً تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر میں تبدیلی Δx ہو گی۔البتہ تعریف میں ہم $\mathrm{d}x$ پر یہ شرط لاگو نہیں کرتے ہیں۔ تفرق $\mathrm{d}y$ ہر صورت تابع ہو گا اور اس کی قیمت x اور $\mathrm{d}x$ پر منحصر ہو گی۔

مثال 4.44: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لئے $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔
حل:

$$\mathrm{d}y = (5x^4 + 37)\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y = (3\cos 3x)\,\mathrm{d}x$$

□

اگر $\mathrm{d}x \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $\mathrm{d}x \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ تفرقات کا حاصل تقسیم ہو گا۔

بعض اوقات ہم $\mathrm{d}f'(x)\,\mathrm{d}x$ کی بجائے

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کا تفرق کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}(3x^2 - 6) = 6x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔

تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

حاصل ہو گی۔ چند تفرق کلیات پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}c = 0, && \mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v,\\
&\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\tfrac{u}{v}) = \tfrac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}, && \mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u,\\
&\mathrm{d}(\sin u) = \cos u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\cos u) = -\sin u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\tan u) = \sec^2 u\,\mathrm{d}u,\\
&\mathrm{d}(\cot u) = -\csc^2 u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\sec u) = \sec u \tan u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\csc u) = -\csc u \cot u\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

مثال 4.45:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\tan 2x) &= \sec^2(2x)\,\mathrm{d}(2x) = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x\\
\mathrm{d}(\tfrac{x}{x+1}) &= \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

□

تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ پر جانے سے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کتنی ہو گی۔ اگر $\mathrm{d}x$ نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کا خطی تخمین L ایک جتنے تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب زیادہ آسان ہے للذا اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

شکل میں دیے علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$$

L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\Delta L &= L(x_0 + \mathrm{d}x) - L(x_0)\\
&= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \mathrm{d}x) - x_0]}_{L(x_0+\mathrm{d}x)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)}\\
&= f'(x_0)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

تفرق $\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کا جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $x = x_0$ پر $\mathrm{d}f$ کی قیمت حاصل کی جائے تب $\mathrm{d}f = \Delta L$ ہو گا یعنی خطی تخمین میں تبدیل $\mathrm{d}f$ کے برابر ہو گی۔

جدول 4.1: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

	اصل	اندازاً
حتمی تبدیلی	$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$	$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$
اضافی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)} \times 100$

تفرق تبدیلی کی اندازاً قیمت
فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

مثال 4.46: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ سے $10.1\,\mathrm{cm}$ کیا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}S$ کا حساب کرتے ہوئے ہوئے اس کے رقبہ S میں تبدیلی حاصل کریں۔ اس کو موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔
حل: چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہٰذا اندازاً تبدیلی

$$\mathrm{d}S = S'(r_0)\,\mathrm{d}r = 2\pi r_0\,\mathrm{d}r = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\,\mathrm{m}^2$$

ہو گی۔ حقیقی تبدیل درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{\mathrm{d}S} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{خلل}}$$

□

مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی

x_0 سے نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ منتقل ہوتے ہوئے ہم f میں تبدیلی کو تین طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.47: گزشتہ مثال میں فی صف اندازاً تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\,\%$$

□

مثال 4.48: زمین کا سطحی رقبہ
زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \mp 0.1\,\text{km}$ ہے۔زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟
حل: رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی بنا S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r = 8\pi(6371)(0.1) = 16\,012\,\text{km}^2$$

□

مثال 4.49: رداس r کے کرہ کا رقبہ $1\,\%$ درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہو گا؟
حل: ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|\Delta S| \le \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

ہم اس عدم مساوات میں Δs کی جگہ

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r$$

پر کرتے ہیں۔یوں

$$|8\pi r\,\mathrm{d}r| \le \frac{4\pi r^2}{100} \quad\implies\quad |\mathrm{d}r| \le \frac{1}{8\pi r}\cdot\frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2}\frac{r}{100}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں رداس میں خلل اصل رداس کے $0.5\,\%$ سے کم ہونا ضروری ہے۔ □

مثال 4.50: بند شریانوں کو کھولنا

جزوی طور پر بند شریانوں کی رداس کو بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاو حاصل کی جا سکتی ہے۔ 1830 کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزوئے نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \qquad (k \text{ مستقل})$$

جو مستقل دباو پر فی اکائی وقت میں ایک چھوٹی نالی میں حجم بہاو H دیتا ہے۔اس نالی کا رداس r ہے۔رداس $10\,\%$ بڑھانے سے بہاو پر کیا اثر ہو گا؟
حل: r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 4kr^3\,\mathrm{d}r$$

یوں

$$\frac{\mathrm{d}H}{H}=\frac{4kr^3\,\mathrm{d}r}{kr^4}=4\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا یعنی H میں اضافی تبدیل r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔یوں r میں $10\,\%$ تبدیلی سے H میں $40\,\%$ تبدیلی پیدا ہو گی۔ □

حساسیت

مختلف x پر مساوات $\mathrm{d}f=f'(x)\,\mathrm{d}x$ ہمیں f کی حساسیت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی $\mathrm{d}x$ کے لئے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہو گی۔

مثال 4.51: آپ ایک پل کی اونچائی ناپنے کی خاطر ایک پتھر کو پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ $s=4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حساسیت کیا ہو گی؟

حل: مساوات $\mathrm{d}s=9.8t\,\mathrm{d}t$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔اگر $t=2$ ہو تب

$$\mathrm{d}s=9.8(2)(0.1)=1.96\,\mathrm{m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t=5\,\mathrm{s}$ پر خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}s=9.8(5)(0.1)=4.9\,\mathrm{m}$$

□

تخمین $\Delta f\approx \mathrm{d}f$ میں خلل

فرض کریں $x=x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) &&\text{اصل تبدیلی}\\ \mathrm{d}&=f'(x_0)\Delta x &&\text{تفرقی اندازہ}\end{aligned}$$

$\mathrm{d}f$ اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم تخمین کے خلل کو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\text{تخمینی خلل} &= \Delta f - \mathrm{d}f \\
&= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\
&= \underbrace{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\
&= \underbrace{\left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\
&= \epsilon \cdot \Delta x
\end{aligned}
$$

$\Delta x \to 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے ($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔ یوں قوسین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لئے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔ درحقیقت $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا جب Δx چھوٹا ہو تخمینی خلل $\epsilon\Delta x$ مزید چھوٹا ہو گا۔

$$
\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon\Delta x}_{\text{خلل}}
$$

اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں ہے کہ خلل کتنا چھوٹا ہو گا یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$
\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \tag{4.17}
$$

ہو گی جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم