

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
685	6.6	سطح طواف کا رقبہ
697	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
709	6.7.1	وسطانی مرکز
714	6.8	کام
729	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
738	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
753	7	ماورائی تفاعل
754	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

772	قدرتی لوگار تھم	7.2
790	قوت نمائی تفاعل	7.3
805	$a^x$ اور $\log_a x$	7.4
816	افزائش اور تنزل	7.5
830	قاعدہ لھویٹال	7.6
846	اضافی شرح نمو	7.7
851	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
857	الٹ بکونیاتی تفاعل	7.8
873	الٹ بکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
891	ہڈلولی تفاعل	7.10

911 ا ضمیمہ اول

913 ب ضمیمہ دوم



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



## 7.10 ہڈولی تقابل

ہر ایسا تقابل  $f$  جس کے دائرہ کار کا وسط مبداء پر واقع ہو کو ایک جفت اور ایک طاق تقابل کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

یوں قوت نمائی تقابل  $e^x$  کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

قوت نمائی تقابل  $e^x$  کا جفت اور طاق حصہ، جنہیں بالترتیب  $x$  کا ہڈولی کوسائن اور ہڈولی سائن کہتے ہیں، از خود اہمیت کے حامل ہیں۔ یہ چکدار ٹھوس مادہ میں لہروں کی حرکت، کھجیوں کے بیچ برقی تاروں کا روپ، اور دھاتی مسرد کار<sup>26</sup> میں حرارتی کی تقسیم کو بیان کرتے ہیں۔

## تعریف اور تماثل

ہڈولی کوسائن اور ہڈولی سائن کی تعریف جدول 7.7 کی پہلی دو مساواتیں پیش کرتی ہیں۔ اس جدول میں ہڈولی ٹینجٹ، ہڈولی کوٹینجٹ، ہڈولی سیکنٹ، اور ہڈولی کو سیکنٹ کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ ہم دیکھیں گے، ہڈولی تقابل ان ٹکونیاتی تقابل کے ساتھ کافی ملنے جلتے ہیں جن کے توسط سے ان کے نام رکھے گئے ہیں۔ ان کو شکل 7.66 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

## تماثل

ہڈولی تقابل جدول 7.8 میں دی گئی تماثل کو مطمئن کرتے ہیں۔ ماسوائے علامت، ہم ان تماثل کو ٹکونیاتی تقابل سے جانتے ہیں۔

جدول 7.7: چھ بنیادی ہڈولی تفاعل

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$x$ کا ہڈولی کوسائن
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$x$ کا ہڈولی سائن
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$x$ کا ہڈولی ٹینجینٹ
$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$x$ کا ہڈولی کوٹینجینٹ
$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$x$ کا ہڈولی سیکنٹ
$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$x$ کا ہڈولی کوسیکنٹ

جدول 7.8: ہڈولی تفاعل کے متاتل۔

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

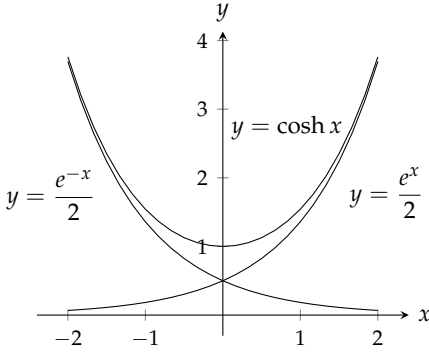
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

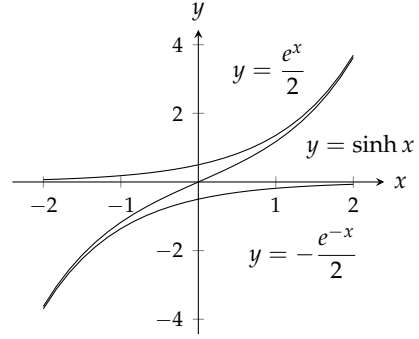
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

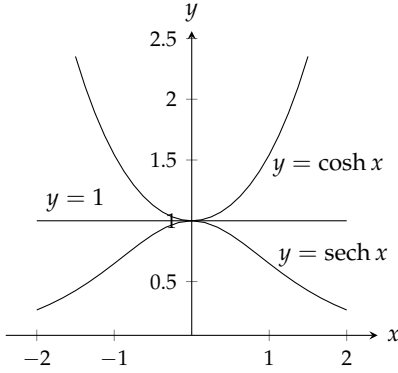
$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$



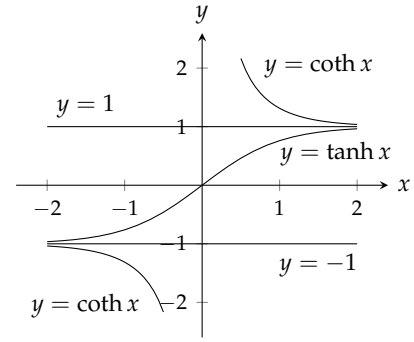
(ب) ہڈولی کوسائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



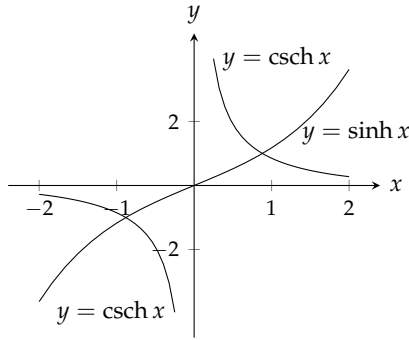
(ل) ہڈولی سائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



(د) ہڈولی کوسائن اور ہڈولی سیکنٹ۔



(ج) ہڈولی ٹینجینٹ اور ہڈولی کوٹینجینٹ۔



(س) ہڈولی سائن اور ہڈولی کوسیکینٹ۔

شکل 7.66: چھ بنیادی ہڈولی تقاعسل۔

جدول 7.9: ہڈولی تقاقل کے کلیات تفرق اور کلیات تکمل۔

(ب) ہڈولی تقاقل کے تکمل۔	(ا) ہڈولی تقاقل کے تفرق۔
$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

تفرق اور تکمل

چھ بنیادی ہڈولی تقاقل، قابل تفرق تقاقل  $e^x$  اور  $e^{-x}$  کے ناطق مجموعے ہیں، لہذا یہ ہر اس نقطہ پر قابل تفرق ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔ یہاں بھی تکنیکی تقاقل کے ساتھ مشابہت نظر آتی ہے۔ جدول 7.9-ا کے کلیات تفرق سے جدول 7.9-ب کے کلیات تکمل حاصل ہوتے ہیں۔ تکنیکی تقاقل کی طرح ہڈولی تقاقل کی قیمتوں کو بھی کیکیولیٹر سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 7.69:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tanh \sqrt{1+t^2}) &= \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt{1+t^2}) \\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{sech}^2 \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

□

مثال 7.70:

$$\begin{aligned} \int \coth 5x \, dx &= \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} \quad u = \sinh 5x \\ &= \frac{1}{5} \ln|u| + C = \frac{1}{5} \ln|\sinh 5x| + C \end{aligned}$$

□

مثال 7.71:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sinh^2 x \, dx &= \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\cosh 2x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sinh 2x}{2} - x \right]_0^1 \\
 &= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672
 \end{aligned}$$

جدول 7.8

□

مثال 7.72:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \, dx &= \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2) \, dx \\
 &= \left[ e^{2x} - 2x \right]_0^{\ln 2} = (e^{2 \ln 2} - 2 \ln 2) - (1 - 0) \\
 &= 4 - 2 \ln 2 - 1 \\
 &\approx 1.6137
 \end{aligned}$$

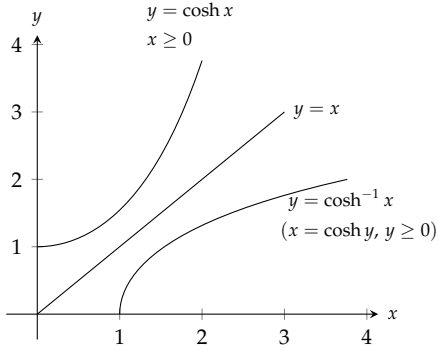
□

الٹ ہڈولی تقاعسل

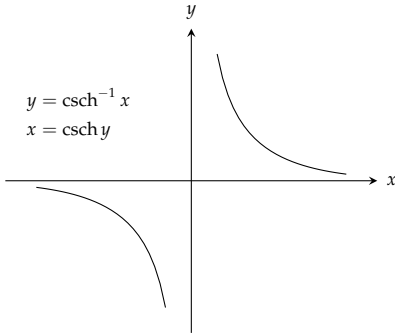
ہم چھ بنیادی ہڈولی تقاعسل کو مکمل میں استعمال کرتے ہیں۔ چونکہ  $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x > 0$  لہذا  $x$  کے لحاظ سے ہڈولی سائن بڑھتا تقاعسل ہے۔ ہم اس کے الٹ کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$y = \sinh^{-1} x$$

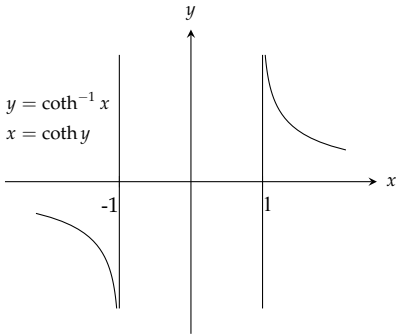
وقفہ  $-\infty < x < \infty$  میں ہر  $x$  کے لئے  $y = \sinh^{-1} x$  کی قیمت وہ ہوگی جس کے ہڈولی سائن کی قیمت  $x$  ہو۔ تقاعسل  $y = \sinh x$  اور  $y = \sinh^{-1} x$  کے ترسیمات کو شکل 7.67-۱ میں پیش کیا گیا ہے۔



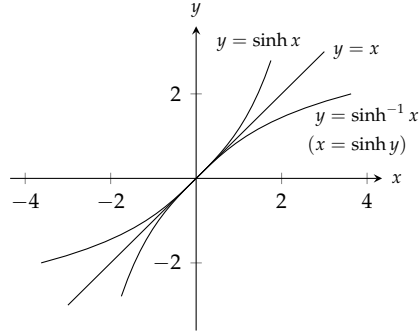
(ب) ہڈولی کوسائن اور الٹ ہڈولی کوسائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر  $y = x$  کے لحاظ سے متشاکلی ہیں۔



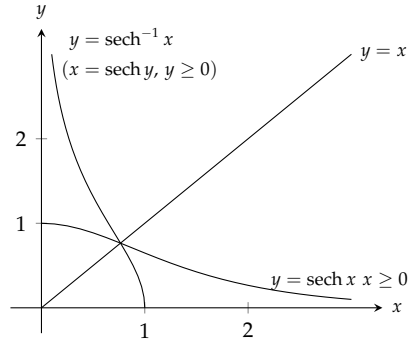
(د) الٹ ہڈولی کوسیکنٹ کا ترسیم۔



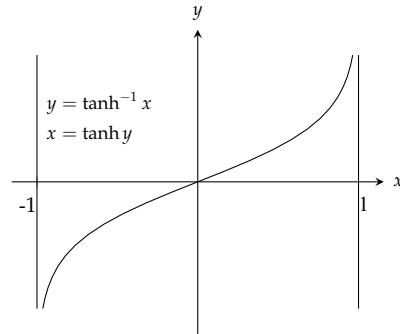
(و) الٹ ہڈولی کوٹینجٹ کا ترسیم۔



(ل) ہڈولی سائن اور الٹ ہڈولی سائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر  $y = x$  کے لحاظ سے متشاکلی ہیں۔



(ج) ہڈولی سیکنٹ اور الٹ ہڈولی سیکنٹ کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر  $y = x$  کے لحاظ سے متشاکلی ہیں۔



(ه) الٹ ہڈولی ٹینجٹ کا ترسیم۔

شکل 7.67: چھ بنیادی ہڈولی تفاعل کے الٹ۔

جدول 7.10: الٹ ہڈولی تقابل کے چند کارآمد تماثل

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

جیسا آپ شکل 7.66-ب میں دیکھ سکتے ہیں، تقابل  $y = \cosh x$  ایک ایک نہیں ہے۔ البتہ اس کی پابند شدہ روپ  $y = \cosh x, x \geq 0$  ایک ایک ہے لہذا اس کا الٹ پایا جائے گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

متغیر  $x \geq 1$  کے ہر قیمت کے لئے وقفہ  $0 \leq y \leq \infty$  میں  $y = \cosh^{-1} x$  ایک ایسا عدد ہو گا جس کے ہڈولی کوسائن کی قیمت  $x$  ہو گی۔ تقابل  $y = \cosh x, x \geq 0$  اور  $y = \cosh^{-1} x$  کی ترسیمات کو شکل 7.67-ب میں دکھایا گیا ہے۔

تقابل  $y = \cosh x$  کی طرح  $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$  بھی ایک ایک نہیں ہے، البتہ  $x$  کو غیر منفی قیمتوں پر پابند کرنے سے  $y = \operatorname{sech} x$  ایک ایک ہوتا ہے جس کا الٹ پایا جائے گا۔ اس الٹ کو

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقفہ  $(0, 1]$  میں  $x$  کی ہر قیمت کے لئے  $y = \operatorname{sech}^{-1} x$  وہ عدد ہو گا جس کا الٹ ہڈولی سینٹ  $x$  ہو گا۔

ہڈولی کوسینٹ، ہڈولی ٹینجینٹ اور ہڈولی کوٹینجینٹ اپنے اپنے دائرہ کار پر ایک ایک ہیں لہذا ان کے الٹ پائے جائیں گے جنہیں

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x, \quad y = \operatorname{coth}^{-1} x$$

سے ظاہر کیا گیا ہے کو شکل 7.67-د، و، و میں ترسیم کیا گیا ہے۔

کارآمد تماثل

چند کارآمد تماثل کو جدول 7.10 میں پیش کیا گیا ہے۔ تقابل  $\sinh^{-1} x$  اور  $\tanh^{-1} x$  کی قیمتیں جاننے ہوئے ان تماثل کی استعمال سے  $\operatorname{sech}^{-1} x$ ،  $\operatorname{csch}^{-1} x$  اور  $\operatorname{coth}^{-1} x$  کی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔

جدول 7.11: الٹ ہڈولی تفاعل کے تفرق۔

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\sinh^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} \\
 \frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1 \\
 \frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1 \\
 \frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1 \\
 \frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} &= \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad 0 < u < 1 \\
 \frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} &= \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad u \neq 0
 \end{aligned}$$

الٹ ہڈولی تفاعل کے تفرق اور مکمل

الٹ ہڈولی تفاعل کا اہم ترین استعمال، مکمل کے ذریعہ جدول 7.11 میں کلیات تفرق سے کلیات مکمل کا حصول ہے۔

تفاعل  $\tanh^{-1} u$  اور  $\coth^{-1} u$  کے تفرق پر  $|u| < a$  اور  $|u| > 1$  کی پابندی، ان تفاعل پر پابندی کی بنا ہے (شکل 7.67-، دیکھیں)۔ کلیات تفرق کو کلیات مکمل میں تبدیل کرتے وقت  $|u| < 1$  اور  $|u| > 1$  میں امتیاز اہمیت حاصل کرتا ہے۔ اگر  $|u| < 1$  ہو تب  $\frac{1}{1-u^2}$  کا مکمل  $\tanh^{-1} u + C$  ہو گا۔ اس کے برعکس  $|u| > 1$  کی صورت میں مکمل  $\coth^{-1} u + C$  ہو گا۔

مثال 7.73: دکھائیں کہ اگر متغیر  $x$  کا  $u$  قابل تفرق تفاعل ہو اور جس کی قیمتیں 1 سے زیادہ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

حل: ہم پہلے عددی  $x > 1$  کی صورت میں  $y = \cosh^{-1} x$  کا تفرق معلوم کرتے ہیں۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

$$x = \cosh y$$

$$1 = \sinh y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

اس کا مساوی

$x$  کے لحاظ سے تفرق

$$x > 0, y > 0, \sinh y > 0$$

$$\cosh y = x$$



جدول 7.12: وہ مکمل جو الٹ ہڈولی تقابل دیتے ہیں۔

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \left( \frac{u}{a} \right), \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \left( \frac{u}{a} \right), \quad u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C & u^2 > a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C, \quad 0 < u < a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C, \quad u \neq 0$$

یوں  $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  ہو گا۔ زنجیری قاعدہ سے درکار نتیجہ ملتا ہے:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$$

□

موزوں بدل استعمال کرتے ہوئے جدول 7.11 میں دیے گئے کلیات تفرق سے جدول 7.12 کے کلیات مکمل اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 7.74: مکمل  $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}$  کی قیمت دریافت کریں۔

حل: قطعی مکمل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} \int \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} & u &= 2x \\ &= \sinh^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C \\ &= \sinh^{-1} \left( \frac{2x}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}} &= \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{2x}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \sinh^{-1} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \sinh^{-1}(0) \\ &= \sinh^{-1} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) - 0 \approx 0.98665 \end{aligned}$$

□

## سوالات

ہذلولی تفاعل کی قیمتیں اور تماثل  
سوال 1 تا سوال 4 میں  $\sinh x$  یا  $\cosh x$  کی ایک قیمت دی گئی ہے۔ تماثل  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  اور ہذلولی تفاعل کی تعریف استعمال کرتے ہوئے باقی پانچ ہذلولی تفاعل کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 1:  $\sinh x = -\frac{3}{4}$

سوال 2:  $\sinh x = \frac{4}{3}$

سوال 3:  $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$

سوال 4:  $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

سوال 5 تا سوال 10 میں فقروں کو قوت نما کی روپ میں لکھ کر ان کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

سوال 5:  $2 \cosh(\ln x)$

سوال 6:  $\sinh(2 \ln x)$

سوال 7:  $\cosh 5x + \sinh 5x$

سوال 8:  $\cosh 3x - \sinh 3x$

سوال 9:  $(\sinh x + \cosh x)^4$

سوال 10:  $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

سوال 11: درج ذیل تماثل

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad \text{ا.}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad \text{ب.}$$

سوال 12:  $\cosh x$  اور  $\sinh x$  کی تعریف سے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

تفرق  
سوال 13 تا سوال 24 میں  $y$  کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے تلاش کریں۔

$$y = 6 \sinh \frac{x}{3} \quad \text{سوال 13:}$$

$$y = \frac{1}{2} \sinh(2x + 1) \quad \text{سوال 14:}$$

$$y = 2\sqrt{t} \tanh \sqrt{t} \quad \text{سوال 15:}$$

$$y = t^2 \tanh \frac{1}{t} \quad \text{سوال 16:}$$

$$y = \ln(\operatorname{sech} z) \quad \text{سوال 17:}$$

$$y \ln(\cosh z) \quad \text{سوال 18:}$$

$$y = \operatorname{sech} \theta (1 - \ln \operatorname{sech} \theta) \quad \text{سوال 19:}$$

$$y = \operatorname{csch} \theta (1 - \ln \operatorname{csch} \theta) \quad \text{سوال 20:}$$

$$y = \ln \cosh v - \frac{1}{2} \tanh^2 v \quad \text{سوال 21:}$$

$$y = \ln \sinh v - \frac{1}{2} \coth v \quad \text{سوال 22:}$$

$$y = (x^2 + 1) \operatorname{sech}(\ln x) \quad \text{سوال 23:} \quad \text{اشارہ: تفرق سے پہلے قوت نما روپ میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔}$$

$$y = (4x^2 - 1) \operatorname{csch}(\ln 2x) \quad \text{سوال 24:}$$

سوال 25 تا سوال 36 میں  $y$  کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے حاصل کریں۔

$$y = \sinh^{-1} \sqrt{x} \quad \text{سوال 25:}$$

سوال 26:  $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

سوال 27:  $y = (1 - \theta) \tanh^{-1} \theta$

سوال 28:  $y = (\theta^2 + 2\theta) \tanh^{-1}(\theta + 1)$

سوال 29:  $y = (1 - t) \coth^{-1} \sqrt{t}$

سوال 30:  $y = (1 - t^2) \coth^{-1} t$

سوال 31:  $y = \cosh^{-1} x - x \operatorname{sech}^{-1} x$

سوال 32:  $y = \ln x + \sqrt{1 - x^2} \operatorname{sech}^{-1} x$

سوال 33:  $y = \operatorname{csch}^{-1}(\frac{1}{2})^\theta$

سوال 34:  $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^\theta$

سوال 35:  $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

سوال 36:  $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

کلیات تکمیل  
سوال 37 تا سوال 40 میں دیے کلیات مکمل کی تصدیق کریں۔

سوال 37:

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1}(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \sin^{-1}(\tanh x) + C$$

سوال 38:  $\int x \operatorname{sech}^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} + C$

سوال 39:  $\int x \coth^{-1} x \, dx = \frac{x^2 - 1}{2} \coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

$$\int \tanh^{-1} x \, dx = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + C \quad \text{سوال 40:}$$

غیر قطعی تکمل  
سوال 41 تا سوال 50 میں تکمل حل کریں۔

$$\int \sinh 2x \, dx \quad \text{سوال 41:}$$

$$\int \sinh \frac{x}{5} \, dx \quad \text{سوال 42:}$$

$$\int 6 \cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) \, dx \quad \text{سوال 43:}$$

$$4 \cosh(3x - \ln 2) \, dx \quad \text{سوال 44:}$$

$$\tanh \frac{x}{7} \, dx \quad \text{سوال 45:}$$

$$\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}} \, d\theta \quad \text{سوال 46:}$$

$$\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \, dx \quad \text{سوال 47:}$$

$$\int \operatorname{csch}^2(5 - x) \, dx \quad \text{سوال 48:}$$

$$\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt \quad \text{سوال 49:}$$

$$\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t)}{t} \, dt \quad \text{سوال 50:}$$

قطعی تکمل  
سوال 51 تا سوال 60 میں تکمل حل کریں۔

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x \, dx \quad \text{سوال 51:}$$

$$\int_0^{\ln 2} \tanh 2x \, dx \quad \text{سوال 52:}$$

$$\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta} \cosh \theta \, d\theta \quad \text{سوال 53:}$$

$$\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \sinh \theta \, d\theta \quad \text{سوال 54:}$$

سوال 55:  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta \, d\theta$

سوال 56:  $\int_0^{\pi/2} 2 \sinh(\sin \theta) \cos \theta \, d\theta$

سوال 57:  $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t} \, dt$

سوال 58:  $\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

سوال 59:  $\int_{-\ln 2}^0 \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$

سوال 60:  $\int_0^{\ln 10} 4 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$

الٹ ہڈلولی تفاعل اور متعلقہ تكميل كى قيمت كا حصول  
ہڈلولی تفاعل كو درج ذيل لوگار تھمى روپ ميں لكھا جا سكتا ہے۔

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

درج بالا كليات استعمال كرتے ہوئے سوال 61 تا سوال 66 ميں ديے اعداد كو لوگار تھمى روپ ميں لكھيں۔

سوال 61:  $\sinh^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right)$

سوال 62:  $\cosh^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$

سوال 63:  $\tanh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

سوال 64:  $\coth^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

سوال 65:  $\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

سوال 66:  $\operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

سوال 67 تا سوال 74 کو (i) الٹ ہڈولی تقابل (ب) قدرتی لوگارٹھم کے روپ میں حل کریں۔

سوال 67:  $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

سوال 68:  $\int_0^{1/3} \frac{6dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

سوال 69:  $\int_{5/4}^2 \frac{dx}{1-x^2}$

سوال 70:  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

سوال 71:  $\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

سوال 72:  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

سوال 73:  $\int_0^\pi \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

سوال 74:  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

نظریہ اور استعمال

سوال 75: (i) مبداء کے لحاظ سے متضامی وقفہ پر معین تقابل  $f$  (یعنی ایسا تقابل جو  $x$  پر معین ہونے کی صورت میں  $-x$  پر بھی معین ہو) کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$(7.50) \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

اس کے بعد دکھائیں کہ  $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$  جفت اور  $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$  طاق ہو گا۔ (ب) اگر  $f$  از خود جفت یا طاق ہو تج مساوات 7.50 کافی سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ ان نئی مساواتوں کو تلاش کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 76: کلیہ  $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $-\infty < x < \infty$  اخذ کریں۔ اس کلیہ میں جذر کے ساتھ منفی کی بجائے مثبت علامت کیوں استعمال ہوتا ہے؟

سوال 77: ایک جسم پر، جس کی کمیت  $m$  ہے، ساکن حال سے ثقلی کشش کی بنا زمین کی طرف گرتے ہوئے سمتی رفتار  $v$  کے مربع کے تناسب ہوائی مزاحمت عمل کرتی ہے۔ یوں  $t$  سیکنڈ بعد اس جسم کی سمتی رفتار درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گی،

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

جہاں  $k$  ایک ایسا مستقل ہے جس کی قیمت کا دار و مدار جسم کے ہوائی حرکیات<sup>27</sup> کے خواص اور ہوا کی کثافت پر منحصر ہوگی۔ (ہم فرض کرتے ہیں کہ جسم زیادہ بلندی سے نہیں گرتا ہے۔ یوں ہوائی کثافت میں تبدیلی کو رد کیا جاسکتا ہے۔)

ا. دکھائیں کہ درج ذیل مساوات تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات ( $t = 0$  پر  $v = 0$ ) کو مطمئن کرتی ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left( \sqrt{\frac{gk}{m}} t \right)$$

ب. جسم کی تحدیدی سمتی رفتار  $\lim_{t \rightarrow \infty} v$  تلاش کریں۔

ج. ایک فضائی غوطہ باز<sup>28</sup> جس کی کمیت  $70 \text{ kg}$  ہو کے لئے  $k = 0.23$  ہو گا۔ اس فضائی غوطہ باز کی تحدیدی سمتی رفتار کتنی ہوگی؟

جواب: (ب)  $v = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ ، (ج)  $v = 54.6 \text{ m s}^{-1}$

سوال 78: فرض کریں ایک جسم محدودی لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ  $t$  پر اس کا مقام

$$s = a \cos kt + b \sin kt \quad (i)$$

$$s = a \cosh kt + b \sinh kt \quad (ب)$$

ہے۔ دکھائیں کہ دونوں صورتوں میں اس جسم کی اسراع  $\frac{d^2s}{dt^2}$  فاصلہ  $s$  کے راست تناسب ہوگی، البتہ پہلی صورت میں یہ مبدا کی جانب اور دوسری صورت میں مبدا سے دوری کے جانب ہوگی۔

سوال 79: ایک ٹریکٹر ٹرائی محور  $x$  پر چلتے ہوئے مبدا تک پہنچ کر محور  $y$  کے رخ مڑتی ہے۔ ٹرائی کے پہیوں سے ٹریکٹر تک فاصلہ کو اکائی تصور کریں۔ یوں جب ٹریکٹر کے پہیے  $(1, 0)$  پر ہوں تب ٹریکٹر مبدا پر ہو گا۔ جب ٹریکٹر مبدا سے محور  $y$  پر چلتا ہے، ٹرائی قوسی راہ  $y = f(x)$  اختیار کرتی ہے۔ یہ قوس درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل ہوگی۔

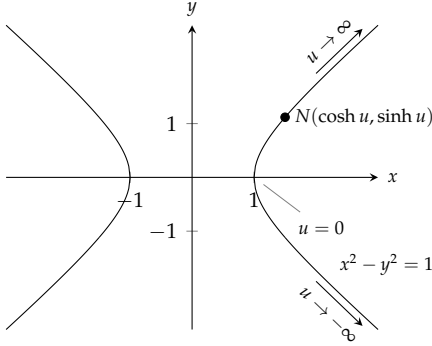
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = 0, \quad x = 1$$

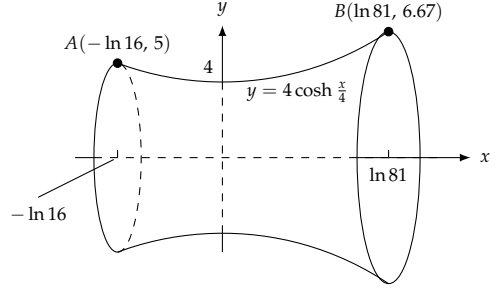
تفرقی مساوات

ابتدائی معلومات





شکل 7.69: قطع زائد تقاعل کے نام کی وجہ (سوال 86)



شکل 7.68: کتر سطح (سوال 84)

اس ابتدائی قیمت مسئلہ کو حل کریں۔ (آپ کو الٹ ہڈولی تقاعل درکار ہوں گے۔)

سوال 80: دکھائیں کہ ربع اول میں قوس  $y = \frac{1}{a} \cosh ax$  اور محدودی کٹیروں اور کٹیروں  $x = b$  کے بیچ رقبہ اس مستطیل کے رقبہ جتنا ہو گا جس کی چوڑائی  $\frac{1}{a}$  اور لمبائی  $s$  ہو جہاں  $x = 0$  سے  $x = b$  تک قوس کی لمبائی  $s$  ہے۔

سوال 81: ربع اول میں بالائی طرف سے قوس  $y = \cosh x$ ، زیریں طرف سے قوس  $y = \sinh x$ ، بائیں سے محور  $y$  اور دائیں سے کٹیروں  $x = 2$  کے بیچ خطے کو محور  $x$  کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

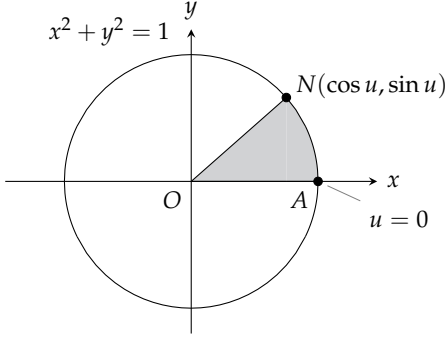
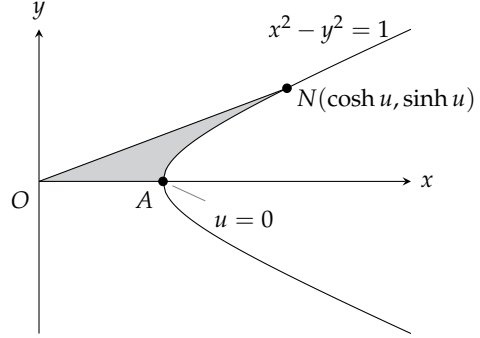
سوال 82: قوس  $y = \operatorname{sech} x$ ، محور  $x$  اور کٹیروں  $x = \pm \ln \sqrt{3}$  کے بیچ خطے کو محور  $x$  کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 83: (i) قوس  $y = \frac{1}{2} \cosh 2x$  کی لمبائی  $x = 0$  سے  $x = \ln \sqrt{5}$  تک تلاش کریں۔ (ب) قوس  $y = \frac{1}{a} \cosh ax$  کی لمبائی  $x = 0$  سے  $x = b > 0$  تک تلاش کریں۔

سوال 84: کتر سطح قوس  $y = 4 \cosh(\frac{x}{4})$ ،  $-\ln 16 \leq x \leq \ln 81$  کو محور  $x$  کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.68)۔ اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے نقطہ  $A$  اور  $B$  کے بیچ تمام قابل تفرق قوسین میں سب سے کم سطح طواف پیدا کرنے والی قوس  $y = 4 \cosh \frac{x}{4}$  ہے۔ یوں  $A$  اور  $B$  پر واقع سخت دائری تاروں کے بیچ صابن کا جھاگ یہی قوسی صورت اپنائے گا۔

سوال 85: (i) قوس  $y = \cosh x$ ،  $-\ln 2 \leq x \leq \ln 2$  کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ درستی تک تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کرتے ہوئے وسطانی مرکز کی نشاندہی کریں۔

(ب)  $u$  کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔(i)  $u$  کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔

شکل 7.70: دائری تقاقل اور قطع زائد تقاقل کا ایک تعلق (سوال 86)۔

سوال 86: اکائی دائرہ پر نقطہ  $(x, y)$  کو تقاقل  $x = \cos u$  اور  $y = \sin u$  سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح اکائی قطع زائد کے دائیں حصہ پر نقطہ  $(x, y)$  کو تقاقل  $x = \cosh u$  اور  $y = \sinh u$  سے حاصل کرنا ممکن ہے (شکل 7.69)۔ اسی لئے ان تقاقل کو قطع زائد تقاقل کہتے ہیں۔

دائری تقاقل اور قطع تقاقل کے بیچ دوسری مشابہت یہ ہے کہ قطع زائد  $x^2 - y^2 = 1$  کے دائیں حصہ میں نقطہ  $(\cosh u, \sinh u)$  کے متغیر  $u$  کی قیمت خطہ AON کے رقبہ کا دگنا ہوگا (شکل 7.70)۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

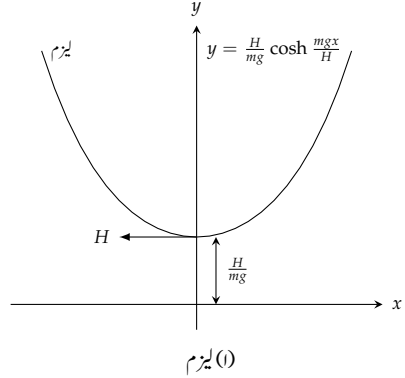
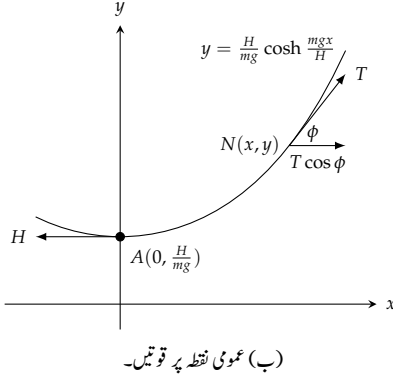
ا. دکھائیں کہ خطہ AON کا رقبہ  $S(u) = \frac{1}{2} \cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1} dx$  ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں دی گئی مساوات کا  $u$  کے لحاظ سے تفرق  $S'(u) = \frac{1}{2}$  ہو گا۔

ج. اس آخری مساوات کو  $S(u)$  کے لئے حل کریں۔  $S(0)$  کی قیمت کتنی ہے؟ کھمل کے مستقل  $C$  کی قیمت کتنی ہوگی؟ مستقل  $C$  جانتے ہوئے حل  $S(u)$  اور  $u$  کا تعلق بیان کریں۔

لشکی ہوئی تار

سوال 87: فرض کریں دو کھبوں کے بیچ لٹکی ہوئی ہے (شکل 7.71)۔ اس تار کی فی اکائی لمبائی کمیت  $m$  ہے اور تار کی سب سے کم اونچائی والے نقطہ پر افقی تناؤ  $H$  ہے۔ ہم محدود یوں منتخب کرتے ہیں کہ قوسی تار کا نیچا حصہ مبدا سے  $\frac{H}{mg}$  بلند ہو جہاں  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  ہے۔ ایسی صورت میں ہم دکھا سکتے ہیں کہ تار کی صورت ہڈولٹی کو سائن  $y = \frac{H}{mg} \cosh \frac{mgx}{H}$  ہوگی۔ ایسی قوس کو لیزم<sup>29</sup> کہتے ہیں۔



شکل 7.71: لیزم برائے سوال 87 اور سوال 88

ا. تار کے کسی عمومی نقطہ  $N(x, y)$  پر تناؤ  $T$  ہو گا جو قوس کو مماسی ہو گا۔ دکھائیں کہ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{mgx}{H}$$

ب. چونکہ تار ساکن ہے لہذا کسی بھی نقطہ پر افقی قوتوں کا مجموعہ صفر ہو گا اور اسی طرح انتہائی قوتوں کا مجموعہ بھی صفر ہو گا۔ یوں دکھائیں کہ  $T = H$  اور  $T = mgy$  ہو گا۔ یوں  $N$  پر تناؤ  $y$  لمبائی کی تار کا وزن ہو گا۔

سوال 88: لیزم (سوال 87 جاری)

تار کی لمبائی  $s = \frac{1}{a} \sinh x$  ہو گی (شکل 7.71) جہاں  $a = \frac{mg}{H}$  ہو گا۔ دکھائیں کہ  $N$  کے محدود کو  $s$  کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے:

$$x = \frac{1}{a} \sinh^{-1} as, \quad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$

سوال 89: جھول اور افقی تناؤ ایک تار جس کی لمبائی 10 m اور کثیت  $1 \text{ kg m}^{-1}$  ہے کو ایک جتنے بلند کھمبوں کے سروں سے باندھا گیا ہے۔ کھمبوں کے بیچ فاصلہ 9.5 m ہے۔

ا. تار کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کریں۔

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax, \quad -5 \leq x \leq 5$$

دکھائیں کہ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے (سوال 88 کے نتائج استعمال کریں۔)

(7.51)

$$5a = \sinh 5a$$

ب. ترسیمات  $y = 5a$  اور  $y = \sinh 5a$  کا نقطہ تقاطع تلاش کرتے ہوئے جزو-اکا ترسیمی حل تلاش کریں۔

ج. مساوات 7.51 کا اعدادی حل تلاش کریں۔ اعدادی حل کا ترسیمی حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. تار کے کم تر بلند نقطہ پر افقی تناؤ معلوم کریں۔

ه. لیزم  $y = \frac{1}{a} \cosh ax$  کو وقفہ  $-5 \leq x \leq 5$  پر ترسیم کریں۔ تار میں جھول کا اندازہ لگائیں۔

جواب:

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

