احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے پرکھ موازنہ

گزشتہ حصہ کے ضمنی نتیجہ 9.1 کی استعمال میں اصل سوال یہ معلوم کرنا ہے کہ s_n اوپر سے محدود ہے۔ بعض اوقات ہم دکھا پاتے ہیں کہ چونکہ دیے گئے تسلسل کا ہر جزوی مجموعہ s_n کسی مرتکز تسلسل کے مطابقتی جزوی مجموعہ سے کم ہے لہٰذا دیا گیا تسلسل مرتکز ہے۔

مثال 9.31: درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

اس لئے مرتکز ہے کہ اس کے تمام اجزاء مثبت اور درج ذیل تسلسل کے مطابقتی اجزاء سے کم ہیں۔

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ تعلق $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے جزوی مجموعات کو کیسے اوپر سے محدود بناتا ہے۔ درج ذیل فرض کر کے

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر n کے لئے

$$s_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3$$

ہو گا۔ یوں $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے تمام جزوی مجموعات 3 سے کم ہیں لہٰذا $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ مرتکز ہو گا۔

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے جزوی مجموعات کی بالائی حد بندی 3 ہونے کا یہ مطلب نہیں کہ یہ تسلسل 3 پر مرتکز ہو گا۔ جیسا ہم آگے اس باب میں دیکھیں گے یہ تسلسل e پر مرتکز ہے۔ □

بلا واسطہ پرکھ موازنہ

ہم نے مثال 9.31 میں ارتکاز کو پرکھ موازنہ سے ثابت کیا۔ ہم نے دیے گئے تسلسل کے اجزاء کا ایک مرتکز تسلسل کے مطابقتی اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ایسا کیا۔ اس طریقہ کار سے کئی تراکیب حاصل کئے جا سکتے ہیں جنہیں پرکھ موازنہ[29] کہتے ہیں۔

غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا بلا واسطہ پرکھ موازنہ
فرض کریں $\sum a_n$ ایک ایسا تسلسل ہے جس میں کوئی منفی جزو نہیں پایا جاتا ہے۔

[29] comparison tests

ا. اگر ایسا مرتکز تسلسل $\sum c_n$ پایا جاتا ہو کہ تمام $n > N$ ، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے، کے لئے $a_n \leq c_n$ ہو تب تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہو گا۔

ب. اگر غیر منفی اجزاء کا ایسا منفرج تسلسل $\sum d_n$ پایا جاتا ہو کہ تمام $n > N$ ، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے، کے لئے $a_n \geq d_n$ ہو تب تسلسل $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ: جزو-الف میں جزوی مجموعات $\sum a_n$ کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا ہے

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

لہٰذا یہ غیر گھٹتا ترتیب دیتے ہیں جس کا حد $L \leq M$ ہے۔

جزو-ب میں جزوی مجموعات $\sum a_n$ اوپر سے محدود نہیں ہیں۔ اگر یہ اوپر سے محدود ہوتے تب جزوی مجموعہ $\sum d_n$ کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا

$$M' = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

اور $\sum d_n$ کو انفراج کی بجائے مرتکز ہونا ہوتا۔

□

بلا واسطہ پرکھ موازنہ کو تسلسل پر لاگو کرنے کے لئے ہمیں تسلسل کے ابتدائی اجزاء شامل کرنے ہوں گے۔ ہم کسی بھی اشاریہ N سے پرکھ شروع کر سکتے ہیں جب تک ہم اس کے بعد کے تمام اجزاء شامل کریں۔

مثال 9.32: کیا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے؟

$$5 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

حل: ہم ابتدائی چار اجزاء نظر انداز کر کے باقی اجزاء کا مرتکز ہندسی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ کے اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل دیکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

یوں دیا گیا تسلسل بلا واسطہ پرکھ موازنہ کے تحت مرتکز ہو گا۔ □

بلا واسطہ پرکھ موازنہ استعمال کرنے کی خاطر ہمارے پاس مرتکز اور منفرج تسلسل کی فہرست ہونی چاہیے۔ اب تک ہم درج ذیل جانتے ہیں:

مرتکز تسلسل	منفرج تسلسل
ہندسی تسلسل جس میں $\lvert r\rvert < 1$ ہو	ہندسی تسلسل جس میں $\lvert r\rvert \geq 1$ ہو
دوربینی تسلسل مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	ہارمونی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	کوئی بھی تسلسل $\sum a_n$ جس کے لئے $\lim_{n\to\infty} a_n$ غیر موجود ہو یا $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ہو
p تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p > 1$ ہو	p تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p \leq 1$ ہو

پرکھ موازنہ حد

ہم اب ایسے پرکھ موازنہ پر غور کرتے ہیں جس کا استعمال ان تسلسل میں بالخصوص آسان ثابت ہوتا ہے جن میں a_n اشاریہ n کا ناطق تفاعل ہو۔

فرض کریں ہم درج ذیل تسلسل کے ارتکاز پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$\text{(الف)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-n+1} \qquad\qquad \text{(ب)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^3+100n^2+1000}{2n^6-n+5}$$

ارتکاز یا انفراج جاننے میں صرف دم کارآمد ہوتی ہے۔ جب n بہت بڑا ہو تب نسب نما اور شمار کنندہ میں n کی بلند ترین طاقت سب سے زیادہ اہم ہوں گے۔ یوں (الف) میں بڑے n کے لئے

$$a_n = \frac{2n}{n^2-n+1}$$

کا رویہ $\frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ $\sum \frac{1}{n}$ منفرج ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ $\sum a_n$ بھی منفرج ہو گا۔

اسی طرح (ب) میں بڑے n کے لئے

$$\frac{8n^3+100n^2+1000}{2n^6-n+5}$$

کا رویہ $\frac{8n^3}{2n^6} = \frac{4}{n^3}$ کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ $\sum \frac{4}{n^3}$ مرتکز ہے(یہ مرتکز p تسلسل کا چار گنا ہے) لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تسلسل $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

درج ذیل پرکھ کے تحت ہماری توقعات دونوں صورتوں میں درست ہیں۔

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم