

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
16	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
33	تفاعل	1.3

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جاسکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔ حقیقی اعداد¹ وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$-\frac{3}{4} = -0.75000 \dots$$

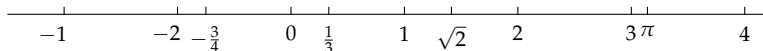
$$\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

¹ real numbers

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں ... سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو لکیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس لکیر کو حقیقی خط² کہتے ہیں۔



\mathbb{R} کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں: الجبرائی خواص، خواص درجہ، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جاسکتے ہیں۔ آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

حقیقی اعداد کی خواص درج ذیل ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

$$1. a + c < b + c \iff a < b$$

$$2. a - c < b - c \iff a < b$$

$$3. ac < bc \iff a < b \text{ اور } c > 0$$

$$4. bc < ac \iff a < b \text{ اور } c < 0 \text{ خصوصی صورت: } -b < -a \iff a < b$$

$$5. \quad \frac{1}{a} > 0 \iff a > 0$$

$$6. \quad \text{اگر } a \text{ اور } b \text{ دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب } a < b \iff \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

درج بالا میں $a < b \iff a + c < b + c$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہوگی۔ دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دار و مدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔ کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ درجہ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

\mathbb{R} کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی سلسلوں³ کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. قدرتی اعداد⁴، یعنی 1، 2، 3، 4، ...

2. عدد صحیح، یعنی 0، 1، 2، 3، ...

3. ناطق اعداد⁵، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔ اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9}, \quad \frac{200}{13}, \quad 57 = \frac{57}{1}$$

sets³
natural numbers⁴
rational numbers⁵

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔
(الف) مختتم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000 \dots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909 \dots = 2.0\overline{9}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور خواص درجہ رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔ یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں غیر ناطق اعداد⁶ کہلاتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نا مختتم اور نا ہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو ارکان کے بیچ تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں وقفہ⁷ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔ اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہذا -1 اور 1 کے بیچ تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔ خطی قطع متناہی وقفہ⁸ جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط لامتناہی وقفہ⁹ کہلاتے ہیں۔

irrational numbers⁶
interval⁷
finite interval⁸
infinite interval⁹

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ بند¹⁰ کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ نصف کھلا¹¹ کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ کھلا¹² کہلاتا ہے۔ وقفے کے سروں کو سرحدی نقطے¹³ بھی کہتے ہیں۔ یہ وقفہ کی سرحد¹⁴ ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو اندرونی نقطے¹⁵ کہتے ہیں۔ تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی اندرون¹⁶ کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسمیں			
علامت	سلسلہ	ترسیم	متناہی
(a, b)	$\{x a < x < b\}$		
$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$		
$[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$		
$(a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$		
(a, ∞)	$\{x x > a\}$		لا متناہی
$[a, \infty)$	$\{x x \geq a\}$		
$(-\infty, b)$	$\{x x < b\}$		
$(-\infty, b]$	$\{x x \leq b\}$		
$(-\infty, \infty)$	\mathbb{R}		

عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

مثال 1.1:

- ¹⁰closed
- ¹¹half-open
- ¹²open
- ¹³boundary points
- ¹⁴boundary
- ¹⁵interior points
- ¹⁶interior

$$\frac{2}{x-1} \geq 4 \quad (3)$$

$$-\frac{x}{3} < x - 1 \quad (2)$$

$$2x - 4 < x + 1 \quad (1)$$

حل:

(1)

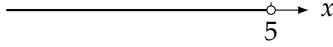
$$2x - 4 < x + 1$$

$$2x < x + 5$$

$$x < 5$$

دونوں ہاتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ سے x منفی کریں



حل سلسلہ وقفہ $(-\infty, 5)$ ہے۔

(2)

$$-\frac{x}{3} < x - 1$$

$$-x < 3x - 3$$

$$0 < 4x - 3$$

$$3 < 4x$$

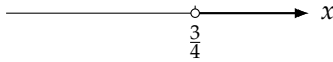
$$\frac{3}{4} < x$$

دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ x جمع کریں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں



وقفہ $(\frac{3}{4}, \infty)$ حل سلسلہ ہے۔

(3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بائیں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بائیں ہاتھ غیر متعین ہے۔ عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

$$2 \geq 4x - 4$$

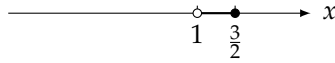
$$6 \geq 4x$$

$$\frac{3}{2} \geq x$$

دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$ ہے۔

□

مطلق قیمت

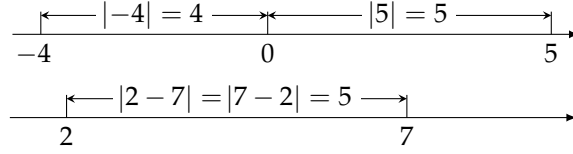
عدد x کی مطلق قیمت¹⁷ جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $|0.88| = 0.88$, $|0| = 0$, $|-13| = -(-13) = 13$, $|-|a|| = |a|$ □

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq 0$ ہوگی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہوگا۔ چونکہ a کی غیر منفی جذر کو \sqrt{a} سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جاسکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

آپ $\sqrt{a^2} = |a|$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہو گا۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$|x - y| = \text{فاصلہ } y \text{ اور } x \text{ کے بیچ}$$

ہو گا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص

$$1. \quad |-a| = |a| \quad \text{کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔}$$

$$2. \quad |ab| = |a||b| \quad \text{حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہو گا۔}$$

$$3. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہو گا۔}$$

$$4. \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہو گی۔ اس کو تکنیکی عدم مساوات کہتے ہیں۔}$$

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a + b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہو گی۔ اس کے علاوہ ہر صورت $|a + b| = |a| + |b|$ ہو گا۔

مثال 1.3:

$$|-2 + 6| = |4| = 4 < |-2| + |6| = 8$$

$$|2 + 6| = |8| = |2| + |6|$$

$$|-2 - 6| = |-8| = 8 = |-2| + |-6|$$



مطلق کی علامت توسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x - 1| = 11$ کو حل کریں۔

حل: اس مساوات کے تحت $2x - 1 = \pm 11$ ہو سکتا ہے لہذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 = 11 & 2x - 1 = -11 \\ 2x = 12 & 2x = -10 \\ x = 6 & x = -5 \end{array}$$



یوں $|2x - 1| = 11$ کا درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے

اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

$$(1.1) \quad |a| < D \iff -D < a < D$$

$$(1.2) \quad |a| \leq D \iff -D \leq a \leq D$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x - 3| < 7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔

$$|x - 3| < 7$$

$$-7 < x - 3 < 7$$

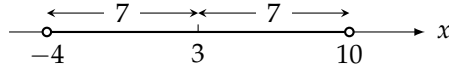
$$-7 + 3 < x < 7 + 3$$

$$-4 < x < 10$$

مساوات 1.1

دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔



□

مثال 1.6: عدم مساوات $|3 - \frac{2}{x}| < 1$ کو حل کریں۔
حل:

$$|3 - \frac{2}{x}| < 1 \iff -1 < 3 - \frac{2}{x} < 1 \quad \text{مساوات 1.1}$$

$$-4 < -\frac{2}{x} < -2 \quad \text{3 منفی کریں}$$

$$2 > \frac{1}{x} > 1 \quad \text{1/2 سے ضرب دیں}$$

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{مکعوس لیں}$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔ آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔ اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب مکعوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہوگی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔ حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2}, 1)$ ہے۔ □

مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ ترسیم کریں۔

$$(الف) \quad |2x - 5| \leq 1 \quad (ب) \quad |2x - 5| \geq 1$$

حل: (الف)

$$|2x - 5| \leq 1$$

$$-1 \leq 2x - 5 \leq 1$$

$$4 \leq 2x \leq 6$$

$$2 \leq x \leq 3$$

مساوات 1.2

جمع

تقسیم 2

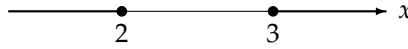
حل سلسلہ بند وقفہ $[2, 3]$ ہے۔



(ب)

$$\begin{array}{l|l}
 |2x - 5| \geq 1 & \\
 \hline
 2x - 5 \geq 1 & -(2x - 5) \geq 1 \\
 2x \geq 6 & 2x - 5 \leq -1 \\
 x \geq 3 & 2x \leq 4 \\
 & x \leq 2
 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ہے۔



□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی اشتراک¹⁸ کی علامت \cup استعمال کی گئی ہے۔ دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ اسی طرح ہم تقاطع¹⁹ کی علامت \cap بھی استعمال کرتے ہیں۔ دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ مثال کے طور پر $[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3)$ ہو گا۔

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1.1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔ اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔
جواب: $0.\bar{1}, 0.\bar{2}, 0.\bar{3}, 0.\bar{8}$

¹⁸ union
¹⁹ intersection

سوال 1.2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔ دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 1.3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $0 < x < 4$	د $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$	ز $-6 < -x < 2$
ب $0 < x - 2 < 4$	ہ $1 < \frac{6}{x} < 3$	
ج $1 < \frac{x}{2} < 3$	و $ x - 4 < 2$	ح $-6 < -x < -2$

سوال 1.4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $4 < y < 6$	د $y < 6$	ز $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$
ب $-6 < y < -4$	ہ $0 < y - 4 < 2$	
ج $y > 4$	و $2 < \frac{y}{2} < 3$	ح $ y - 5 < 1$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ ترتیم کریں۔

سوال 1.5: $-2x > 4$	سوال 1.9: $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
جواب: $x < -2$	جواب: $x \leq -\frac{1}{3}$

سوال 1.6: $8 - 3x \geq 5$	سوال 1.10: $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$
---------------------------	---

سوال 1.7: $5x - 3 \leq 7 - 3x$	سوال 1.11: $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$
جواب: $x \leq \frac{5}{4}$	جواب: $x < -\frac{6}{7}$

سوال 1.8: $3(2 - x) > 2(3 + x)$	سوال 1.12: $-\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}$
---------------------------------	--

مطلق قیمت

درج ذیل مساوات حل کریں۔

$$|1 - t| = 1 \quad \text{سوال 1.16}$$

$$|y| = 3 \quad \text{سوال 1.13}$$

جواب: ± 3

$$|8 - 3s| = \frac{9}{2} \quad \text{سوال 1.17}$$

جواب: $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

$$|y - 3| = 7 \quad \text{سوال 1.14}$$

$$\left| \frac{s}{2} - 1 \right| = 1 \quad \text{سوال 1.18}$$

$$|2t + 5| = 4 \quad \text{سوال 1.15}$$

جواب: $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$

عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ ترسیم کریں

$$|x| < 2 \quad \text{سوال 1.19}$$

جواب: $-2 < x < 2$

$$|x| \leq 2 \quad \text{سوال 1.20}$$

$$|t - 1| \leq 3 \quad \text{سوال 1.21}$$

جواب: $-2 \leq t \leq 4$

$$|t + 2| < 1 \quad \text{سوال 1.22}$$

$$|3y - 7| < 4 \quad \text{سوال 1.23}$$

جواب: $1 < y < \frac{11}{3}$

$$|2y + 5| < 1 \quad \text{سوال 1.24}$$

$$\left| \frac{z}{5} - 1 \right| \leq 1 \quad \text{سوال 1.25}$$

جواب: $0 \leq z \leq 10$

سوال 1.26: $\left| \frac{3}{2}z - 1 \right| \leq 2$

سوال 1.27: $\left| 3 - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{2}$
 جواب: $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

سوال 1.28: $\left| \frac{2}{x} - 4 \right| < 3$

سوال 1.29: $|2s| \geq 4$
 جواب: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

سوال 1.30: $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

سوال 1.31: $|1 - x| > 1$
 جواب: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

سوال 1.32: $|2 - 3x| > 5$

سوال 1.33: $\left| \frac{r+1}{2} \right| \geq 1$
 جواب: $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

سوال 1.34: $\left| \frac{3}{5}r - 1 \right| > \frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات
 دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں
 لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2} = |a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 1.35: $x^2 < 2$
 جواب: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 1.36: $4 \leq x^2$

سوال 1.37: $4 < x^2 < 9$
 جواب: $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 1.38: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 1.39: $(x - 1)^2 < 4$
جواب $(-1, 3)$

سوال 1.40: $(x + 3)^2 < 2$

سوال 1.41: $x^2 - x < 0$
جواب $(0, 1)$

سوال 1.42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $|-a| = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔
جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 1.44: مساوات $|x - 1| = 1 - x$ کو حل کریں۔

سوال 1.45: ٹکوئی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a + b| = (a + b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے ٹکوئی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

سوال 1.46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 1.47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟
جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 1.48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ ترسیم کریں۔

سوال 1.49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔
جواب: $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 1.50: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔

1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدود اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدود

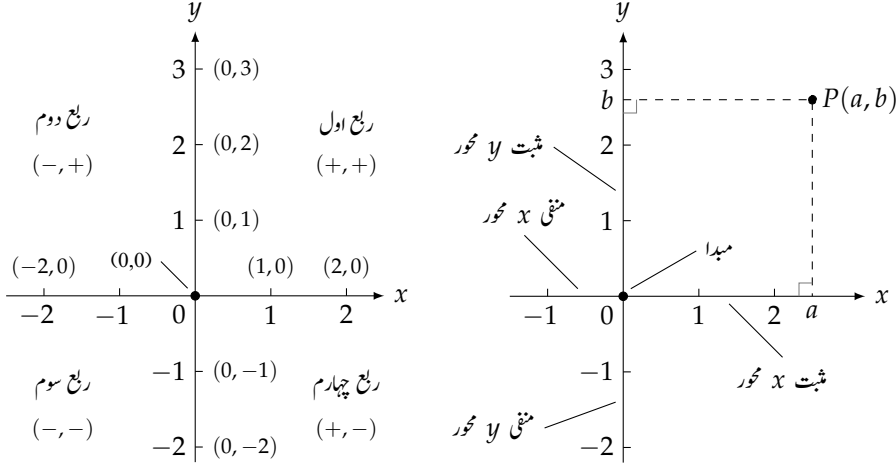
مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ ان خطوط کو مستوی میں محدودی محور²⁰ کہتے ہیں۔ افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔ انتصابی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محدودی نظام کا مبدا²¹ کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جاسکتے ہیں۔ اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x محدود²² a ہو گا۔ اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور

²⁰coordinate axis

²¹origin

²²x-coordinate



شکل 1.2: کارتیسی محدود

کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y محدود $^{23} b$ ہوگا۔ مرتب جوڑی (a, b) کو نقطے کی محدودی جوڑی 24 کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محدودی جوڑی کا y محدود 0 ہوگا جبکہ y محور پر ہر محدودی جوڑی کا x محدود 0 ہوگا۔ محدودی نظام کا مبدأ نقطہ $(0, 0)$ ہے۔

محور x کو مبدأ دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدأ کے دائیں جانب مثبت x محور 25 اور مبدأ کے بائیں جانب منفی x محور 26 پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدأ y محور کو بھی مثبت y محور اور منفی y محور میں تقسیم کرتا ہے۔ محدودی مستوی کو چار ربع 27 میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پہا

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنی میٹر کا فاصلہ

²³ y-coordinate
²⁴ coordinate pair
²⁵ positive x-axis
²⁶ negative x-axis
²⁷ quadrants

ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ 25 m s^{-1} کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی تناسب پہلو²⁸ ایک جیسے رکھتے ہیں لہذا دونوں محور پر پیمائشی فیتہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدود میں کل تبدیلی کو بڑھوتری²⁹ کہتے ہیں۔ اختتامی محدود سے ابتدائی محدود منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہوگی۔

مثال 1.8: نقطہ $A(4, -3)$ سے نقطہ $B(2, 5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہوگی۔

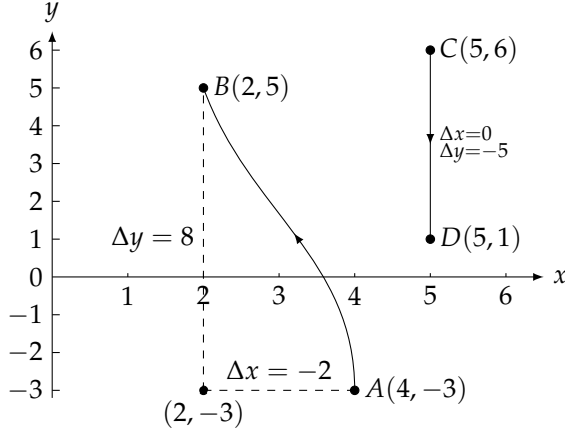
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5, 6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5, 1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔

□

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$$

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔



شکل 1.3: محدودی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

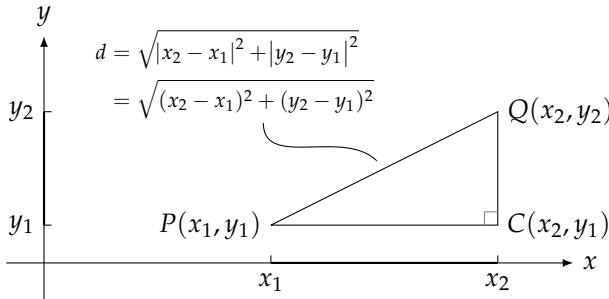
مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ

نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا (شکل 1.4)۔

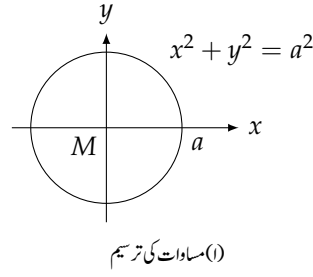
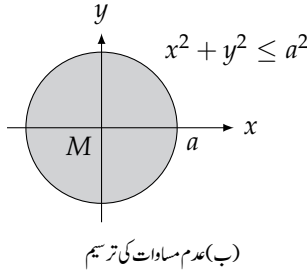
$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1.10: (الف) $P(-1, 2)$ اور $Q(3, 4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)



شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)

(ب) مبدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

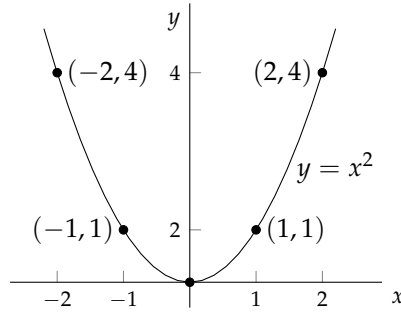
مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو

(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصل $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔ یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔

(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصل $\leq a$ ہے۔ یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہو گی (شکل 1.5)۔

□

اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو اکائی دائرہ³⁰ کہتے ہیں۔



شکل 1.6: قطع مکانی (مثال 1.12)

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(-2,4)$ اور $(2,4)$ ، $(-1,1)$ ، $(1,1)$ ، $(0,0)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدود اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو قطع مکانی³¹ کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکساں سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

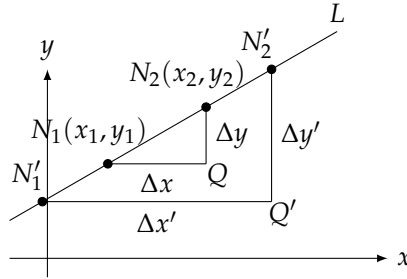
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

کی قیمت ایک جیسی ہوگی (شکل 1.7)۔

تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

parabola³¹



شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N_1'Q'N_2'$ متناہ مشائات ہیں لہذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی ڈھلوان³² کہلاتی ہے۔

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔ مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔ انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لہذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا³³۔ یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں L_1 کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1 - (-1)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔ اسی طرح L_2 کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

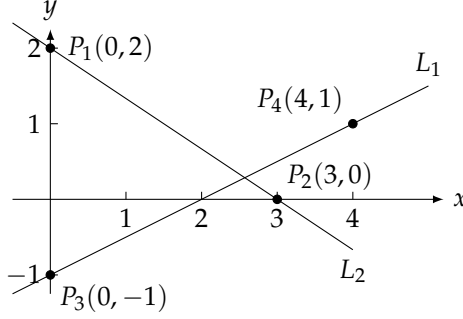
□ ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ ہے۔ یوں دائیں رخ چلتے ہوئے

خط کی چڑھائی یا اترائی کو زاویہ میلان³⁴ سے بھی ناپا جاتا ہے۔ x محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔ افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔ اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہجی ϕ سے ظاہر کیا جائے تب $0 \leq \phi \leq 180^\circ$ ہو گا۔

³²slope

³³چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔

³⁴angle of inclination



شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)



شکل 1.9: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے

خط کی ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

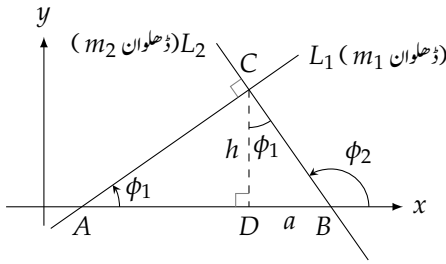
$$m = \tan \phi$$

متوازی اور قائمہ خطوط

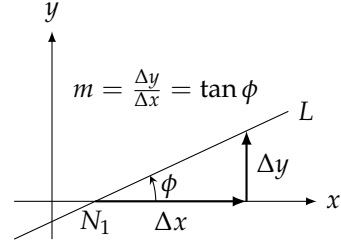
متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔ اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا یہ متوازی ہوں گے۔

اگر غیر اختصابی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1 m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔ یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

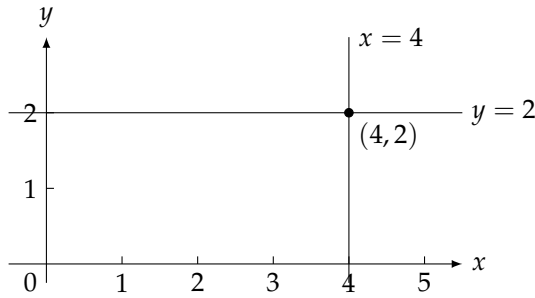
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق



شکل 1.10: غیر انتصابی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجینٹ ہوتا ہے



شکل 1.12: افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan \phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan \phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔ یوں $m_1 m_2 = (\frac{a}{h})(-\frac{h}{a}) = -1$ ہو گا۔

خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ x محور کے نقطہ a سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی x محدود ہو گی۔ یوں اس انتصابی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔ اسی طرح y محور کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔

مثال 1.14: نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتے افقی اور انتصابی خطوط کے مساوات بالترتیب $y = 2$ اور $x = 4$ ہوں گی (شکل 1.12)۔

□

اگر ہمیں غیر انتظامی سیدھے خط L کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر $N(x, y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = y_1 + m(x - x_1)$$

لکھا جاسکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

تعریف: نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان m ہو کی مساوات $y = y_1 + m(x - x_1)$ ہو گی جس کو خط کی نقطہ۔ ڈھلوان مساوات³⁵ ہے۔

مثال 1.15: نقطہ $(3, 2)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔
حل:

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \implies y = -\frac{2}{3}x + 4$$

□

مثال 1.16: نقطہ $(-2, -1)$ اور $(3, 4)$ سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔
حل: اس خط کی ڈھلوان

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ہے۔ ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ لیتے ہیں نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ لیتے ہیں

$$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$$

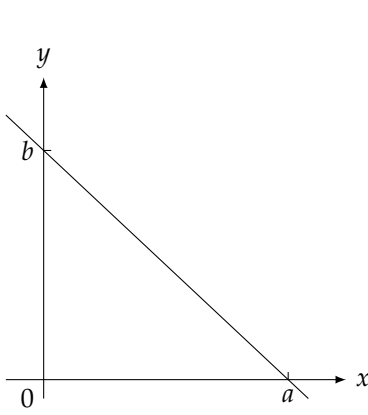
$$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$$

$$y = -1 + x + 2$$

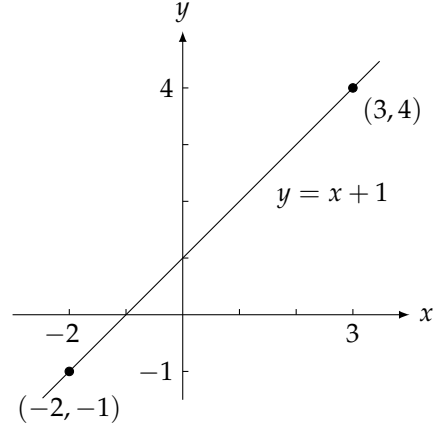
$$y = 4 + x - 3$$

$$y = x + 1$$

$$y = x + 1$$



شکل 1.14: غیر انتظامی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات



شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال 1.16)

□

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔

غیر انتظامی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y قطع³⁶ کہتے ہیں۔ اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر x محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا x قطع³⁷ کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

غیر انتظامی خط جو y محور کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

ہوگی۔

تعریف: درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

کو خط کی ڈھلوان-قطع مساوات³⁸ کہتے ہیں۔ اس خط کی ڈھلوان m ہے اور یہ y محور کو b پر قطع کرتا ہے۔

³⁵ point-slope equation

³⁶ y-intercept

³⁷ x-intercept

³⁸ slope-intercept equation

مثال 1.17: خط $y = 3x - 7$ کی ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ y محور کو -7 پر قطع کرتا ہے۔ □

درج ذیل مساوات کو عمومی خطی مساوات³⁹ کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \quad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1.18: خط $8x + 5y = 20$ کی y قطع تلاش کریں۔
حل: ہم مساوات کو ڈھلوان-قطع روپ میں لکھ کر y قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

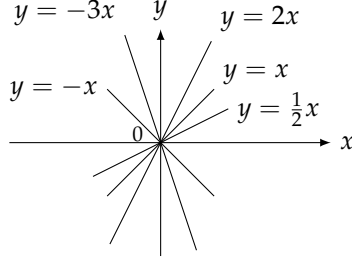
یوں خط کی ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور y قطع 4 ہے۔ □

مثال 1.19: مبداء سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔
چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہوگا لہذا ان کی مساوات $y = mx$ ہوگی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔ □

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔ اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بنا سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں خطی مساوات⁴⁰ کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

³⁹ general linear equation
⁴⁰ linear equations



شکل 1.15: مبداء سے گزرتا خط کی مساوات $y = mx$ ہے جہاں m خط کی ڈھلوان ہے

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباؤ V اور برقی رو I کا تعلق $V = IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔ اس مساوات کی ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔

□

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی
ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1.51: $A(-3, 2), B(-1, -2)$

سوال 1.52: $A(-1, -2), B(-3, 2)$

سوال 1.53: $A(-3.2, -2), B(-8.1, -2)$

سوال 1.54: $A(\sqrt{2}, 4), B(0, 1.5)$

دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.55: $x^2 + y^2 = 1$

سوال 1.56: $x^2 + y^2 = 2$

سوال 1.57: $x^2 + y^2 \leq 3$

سوال 1.58: $x^2 + y^2 = 0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کی قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 1.59: $A(-1, 2), B(-2, -1)$

سوال 1.60: $A(-2, 1), B(2, -2)$

سوال 1.61: $A(2, 3), B(-1, 3)$

سوال 1.62: $A(-2, 0), B(-2, -2)$

دیے گئے نقطے سے گزرتا (الف) انتصابی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 1.63: $(-1, \frac{4}{3})$

سوال 1.64: $(\sqrt{2}, -1.3)$

سوال 1.65: $(0, -\sqrt{2})$

سوال 1.66: $(-\pi, 0)$

خط کی مساوات تلاش کریں۔ خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 1.67: نقطہ $(-1, 1)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان -1 ہو۔

- سوال 1.68: نقطہ $(2, -3)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔
- سوال 1.69: نقطہ $(3, 4)$ اور $(-2, 5)$ سے گزرتا خط۔
- سوال 1.70: نقطہ $(-8, 0)$ اور $(-1, 3)$ سے گزرتا خط۔
- سوال 1.71: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔
- سوال 1.72: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع 3 ہے۔
- سوال 1.73: نقطہ $(-12, -9)$ سے گزرتا جس کی ڈھلوان 0 ہو۔
- سوال 1.74: نقطہ $(\frac{1}{3}, 2)$ سے گزرتا جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔
- سوال 1.75: جس کا x قطع 1 اور y قطع 4 ہو۔
- سوال 1.76: جس کا x قطع 2 اور y قطع 6 ہو۔
- سوال 1.77: جو نقطہ $(5, -1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x + 5y = 15$ کے متوازی ہو۔
- سوال 1.78: جو نقطہ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔
- سوال 1.79: نقطہ 4, 10 سے گزرتا اور خط $6x - 3y = 13$ کا قائمہ ہو۔
- سوال 1.80 تا 1.83: خط کا x قطع اور y قطع تلاش کریں۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال 1.80 تا 1.83)
- سوال 1.80: $3x + 4y = 12$
- سوال 1.81: $x + 2y = -4$
- سوال 1.82: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
- سوال 1.83: $1.5x - y = -3$

سوال 1.84: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Bx - Ay = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

سوال 1.85: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Ax + By = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال 1.86: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(-2, 3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ ، $\Delta y = -6$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 1.87: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(6, 0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = -6$ ، $\Delta y = 0$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 1.88: ایک ذرہ $A(x, y)$ سے $B(3, -3)$ منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ اور $\Delta y = 6$ ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔

سوال 1.89: ایک ذرہ $A(1, 0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1, 0)$ کو واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محدود میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال 1.90: پانی میں دباؤ پانی میں d گہرائی پر غوطہ خور p دباؤ محسوس کرے گا جہاں $p = kd + 1$ ہے جہاں k مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر دباؤ کیا ہوگا؟

سوال 1.91: انعکاس شعاع رُبع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع x محور سے منعکس ہوتی ہے۔ زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔ انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 1.92: سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔ اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔ کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.93: ایک مثلث کے راس $A(1,2)$ ، $B(5,5)$ اور $C(4,-2)$ پر پائے جاتے ہیں۔ مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 1.94: ایک مثلث کے راس $A(0,0)$ ، $B(1,\sqrt{3})$ اور $C(2,0)$ ہیں۔ دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

سوال 1.95: دکھائیں کہ $A(2,-1)$ ، $B(1,3)$ اور $C(-3,2)$ چکور کی راسیں ہیں۔ چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 1.96: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1,1)$ ، $(2,0)$ اور $(2,3)$ ہیں۔ تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 1.97: مبدا کے گرد گھڑی مخالف 90° گھمانے سے نقطہ $(2,0)$ اور $(0,3)$ بالترتیب $(0,2)$ اور $(-3,0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔ درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

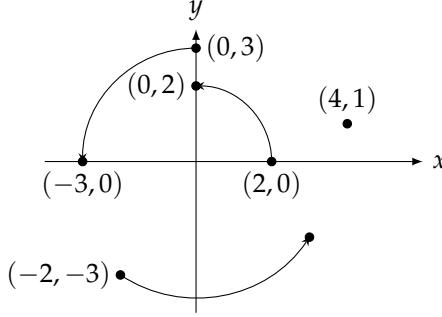
- | | | |
|---------------|-------------|---|
| (ا) $(4,1)$ | (د) $(x,0)$ | (ز) کونسا نقطہ $(10,3)$ پر منتقل ہو گا؟ |
| (ب) $(-2,-3)$ | (ه) $(0,y)$ | |
| (ج) $(2,-5)$ | (و) (x,y) | |

سوال 1.98: k کی کس قیمت کے لئے خط $2x + ky = 3$ اور خط $4x + y = 1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟

سوال 1.99: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1,2)$ اور خط $x + 2y = 3$ اور $2x - 3y = -1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 1.100: دکھائیں کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع کا وسط $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ہو گا۔

سوال 1.101: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0, y_0)$ سے خط $L: Ax + By = C$ تک فاصلہ درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جاسکتا ہے۔



شکل 1.16: گھڑی مخالف 90° گھومنا (سوال 1.97)

• L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔

• خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔

• N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصلہ تلاش کریں۔

(ج) $N(a, b), L : x = -1$

(ا) $N(2, 1), L : y = x + 2$

(د) $N(x_0, y_0), L : Ax + By = C$

(ب) $N(4, 6), L : 4x + 3y = 12$

1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ایلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔ زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔ اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دارومدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔ چونکہ y کی قیمت مکمل طور پر x تعین کرتا ہے لہذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔ یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ $A = \pi r^2$ ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا رقبہ A تفاعل ہے۔ مساوات $A = \pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لئے A کی یکتا قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا دائرہ کار⁴¹ کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا سعت⁴² کہتے ہیں۔ چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0, \infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔ اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

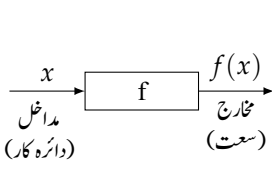
احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ ہم

$$y = f(x) \quad (y \text{ برابر ہے } x \text{ کا } f)$$

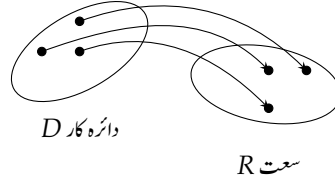
لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y ، متغیر x کا تفاعل ہے۔ یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت x غیر تابع متغیر⁴³ ہے اور خارجی قیمت y تابع متغیر⁴⁴ ہیں۔ x کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہوگی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہوگی۔

تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔

domain⁴¹range⁴²independent variable⁴³dependent variable⁴⁴



شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت



شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کا سعت R کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔ اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

2. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f ، ناکہ $f(x)$ ، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

تدریسیاتی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً حقیقی متغیرات⁴⁵ کے حقیقی قیمت تفاعل⁴⁶ پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3 m رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t - 1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0، 2، $x + 2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔
حل:

$$F(0) = 2(0 - 1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$F(2) = 2(2 - 1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$F(x + 2) = 2(x + 2 - 1) + 3 = 2x + 5$$

$$F(F(2)) = F(5) = 2(5 - 1) + 3 = 11$$

□

روایت دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔ اس کو تفاعل کا قدرتی دائرہ کار⁴⁷ کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔ اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم " $y = x^2, x \geq 2$ " لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔ تفاعل $y = x^2$ کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کا سعت $[4, \infty)$ ہو گا جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

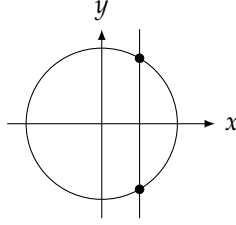
تفاعل	(x) دائرہ کار	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لئے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔ اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔ دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا ماسوائے $x = 0$ ، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لئے حقیقی y دیتا ہے۔ تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔ اس کا سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لئے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔ یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا۔ □



شکل 1.19: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط

تفاعل کی ترسیم

تفاعل f کی تقسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدود تفاعل f کی داخلی، خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔ تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر x کے لئے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔ چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔ اگر تفاعل f کی دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تفاعل کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

مثال 1.24: وقفہ $[-2, 2]$ پر تفاعل $y = x^2$ ترسیم کریں۔

حل: پہلا قدم: پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

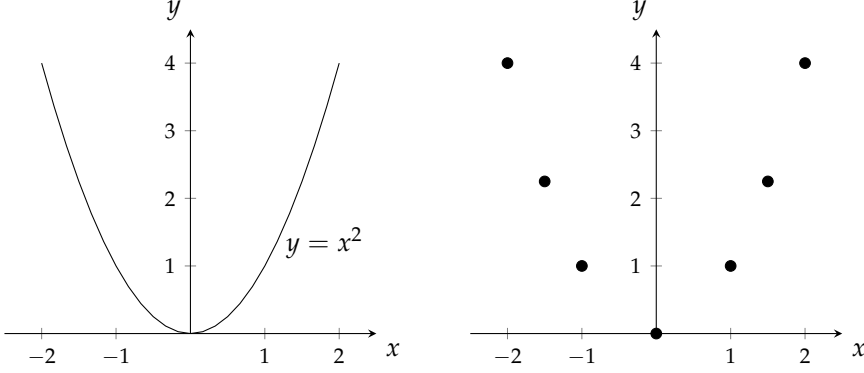
x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو xy مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔

□

تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچیں۔ منحنی پر سرخی لکھیں۔

احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔



شکل 1.20: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال 1.24)

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل $f + g$ ، $f - g$ اور fg کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

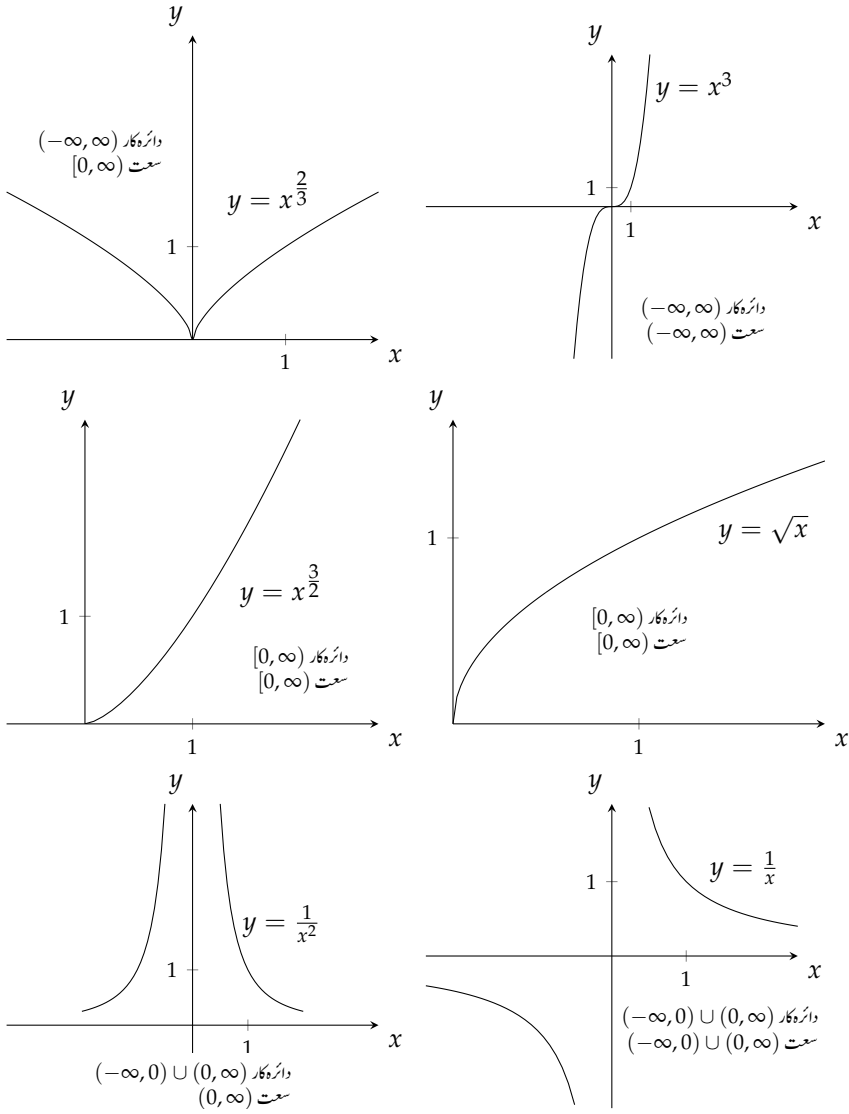
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

f اور g کی دائرہ کار کے اشتراک $D(f) \cap D(g)$ جہاں $g(x) \neq 0$ ہو ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہوگی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$



شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$3g$	$3g(x) = 3\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1)$ (ماسوائے $x=1$)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1]$ (ماسوائے $x=0$)

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جاسکتا ہے جس کو مرکب تفاعل⁴⁸ $f \circ g$ کہتے ہیں۔

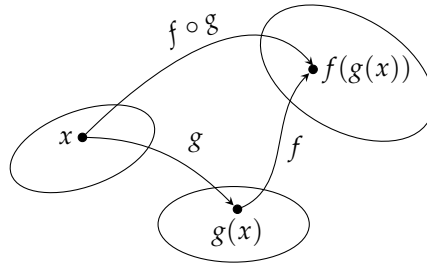
تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f \circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f \circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جاسکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔ $f \circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

⁴⁸ composite function



شکل 1.22: مرکب تفاعل

معین $g \circ f$ حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $g \circ f$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f \circ g$ اور $g \circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = x + 1$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $(f \circ g)(x)$ ب. $(g \circ f)(x)$ ج. $(f \circ f)(x)$ د. $(g \circ g)(x)$

حل:

دائرہ کار	مرکب
$[-1, \infty)$	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$
$[0, \infty)$	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$
$[0, \infty)$	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$
$(-\infty, \infty)$	$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$

یہ جاننے کے لئے کہ $f \circ g$ کا دائرہ کار کیوں $[-1, \infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x) = x + 1$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $x + 1 \geq 0$ یعنی $x \geq -1$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ جفت⁴⁹ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ہے۔

چونکہ $f(-x) = f(x)$ ہے لہذا نقطہ (x, y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یوں جفت تفاعل کی ترسیم y محور کے لحاظ سے تشاکل ہوگی (شکل 1.23-الف)۔ y محور کے ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جاسکتی ہے۔

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ طاق⁵⁰ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

طاق تفاعل کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہوگی (شکل 1.23-ب)۔ چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یہاں بھی y محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جاسکتی ہے۔

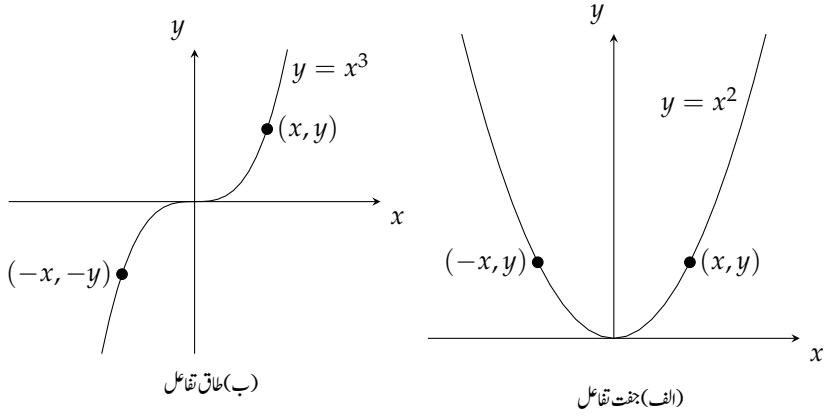
ٹکڑوں میں معین تفاعل

بعض اوقات ایک تفاعل دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات استعمال کرتا ہے۔ اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفاعل ہے (شکل 1.24)۔

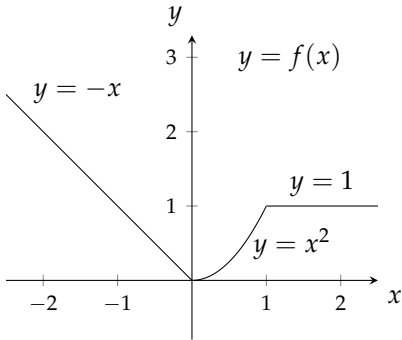
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔

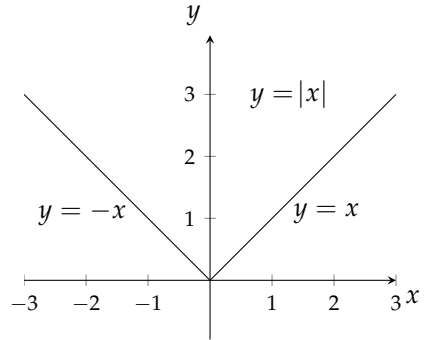
even⁴⁹
odd⁵⁰



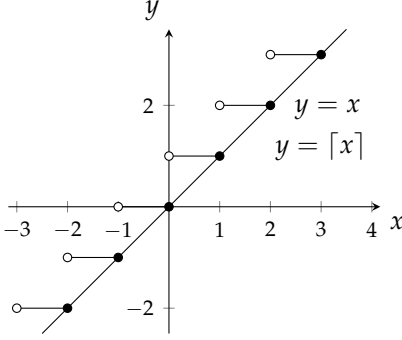
شکل 1.23: جفت اور طاق تفاعل



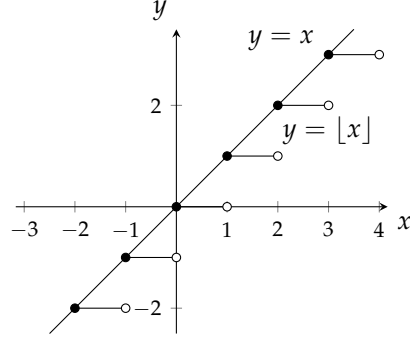
شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27



شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل



شکل 1.27: عدد صحیح چھت تفاعل (مثال 1.29)



شکل 1.26: عدد صحیح زمین تفاعل (مثال 1.28)

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو بڑا ترین عدد تفاعل⁵¹ یا عدد صحیح زمین تفاعل⁵² کہلاتا جس کو $[x]$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} [2.4] &= 2, & [1.9] &= 1, & [0] &= 0, & [-1.2] &= -2 \\ [2] &= 2, & [0.2] &= 0, & [-0.3] &= -1, & [-2] &= -2 \end{aligned}$$

□

مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو کم ترین عدد تفاعل⁵³ یا عدد صحیح چھت تفاعل⁵⁴ کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل

⁵¹ greatest integer function
⁵² integer floor function
⁵³ least integer function
⁵⁴ integer ceiling function

(1.26)۔ اس کی مثال شہر میں کرائے کی ٹیکسی کا کرایا ہے جو فی کلومیٹر ادا کرنا ہوتا ہے۔ اضافی نا مکمل کلومیٹر کی صورت میں مکمل کلومیٹر کا کرایا ادا کرنا ہوتا ہے۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \lceil 3.2 \rceil &= 4, & \lceil 2.9 \rceil &= 3, & \lceil 0 \rceil &= 0, & \lceil 2 \rceil &= 2, \\ \lceil -5 \rceil &= -5, & \lceil -5.6 \rceil &= -5, & \lceil -0.9 \rceil &= 0, & \lceil -7.2 \rceil &= -7 \end{aligned}$$

□

سوالات

تفاعل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1.102: $f(x) = 1 + x^2$

سوال 1.103: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

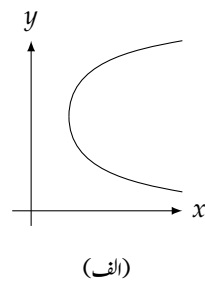
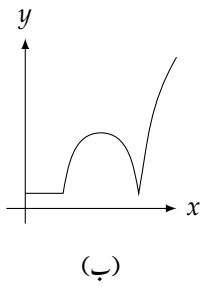
سوال 1.104: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

سوال 1.105: $F(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}}$

سوال 1.106: $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

سوال 1.107: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

سوال 1.108: شکل 1.28 کون سی ترسیم تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں۔



شکل 1.28: اشکال برائے سوال 1.108

