احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

6.6 سطح طواف کا رقبہ

بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسی گھماتے ہوئے رسی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو سطح طواف[9] کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسی کی لمبائی اور رسی کے ہر حصے کی جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کا رقبہ اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔ زیادہ پیچیدہ سطحوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل $y = f(x),\ a \leq x \leq b$ کو x محور کے گرد گھما کر پیدا سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل میں نمائندہ حصہ PQ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

قوس PQ محور x کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے۔ محور x اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو مخروط مقطوع[10] کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبہ کا تخمین ہو گا۔

مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ 2π ضرب دونوں سروں کے رداس کا اوسط ضرب ترچھا قد کے برابر ہو گا۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

قطع PQ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کی پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{6.14}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے مساوات 6.14 میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

---

[9] surface of revolution
[10] frustum

یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات 6.14 کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تفاعل کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفرقات کے مسئلہ اوسط قیمت کی طرف دیکھتے ہیں۔

اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطع PQ کے متوازی ہو گا۔اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f'(c_k) &= \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \\ \Delta y_k &= f'(c_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

مساوات 6.14 میں درج بالا Δy_k پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k \end{aligned} \tag{6.15}$$

اب یہاں ایک بری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بری خبر یہ ہے کہ مساوات 6.15 میں x_{k-1} ، x_k اور c_k ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک دوسرے جیسا کسی صورت نہیں بنایا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔اعلیٰ احصاء کا مسئلہ بلس کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل کو مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

جو ہم چاہتے ہیں۔یوں a تا b تفاعل f کی ترسیم کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی تکمل کو لیتے ہیں۔

تعریف: محور x کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تفاعل $y = f(x)$ کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

□

مساوات 6.16 میں جذر وہی ہے جو پیدا کار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیہ میں پایا جاتا ہے۔

مثال 6.21: محور x کے گرد منحنی $y = 2\sqrt{x},\ 1 \le x \le 2$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہوئے

$$a = 1,\ b = 2,\ y = 2\sqrt{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

مساوات 6.16 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}S &= \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\end{aligned}$$

□

محور y کے گرد سطح طواف

محور y کے گرد سطح طواف کے لئے ہم مساوات 6.16 میں x اور y کی جگہیں تبدیل کرتے ہیں۔

محور y کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \ge 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.17}$$

مثال 6.22: لکیری قطع $x = 1 - y,\ 0 \le y \le 1$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کا رقبہ پہلو تلاش کریں۔

حل: اس رقبہ کو جیومیٹری سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0,\ d = 1,\ x = 1 - y,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -1$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

مساوات 6.17 سے اس رقبہ کا حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}y \\ &= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

دونوں نتائج ایک جیسے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □

مختصر تفریقی روپ

درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

کو عموماً تفریقی لمبائی قوس $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے:

$$S = \int_a^b 2\pi y\,\mathrm{d}s \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x\,\mathrm{d}s$$

بایاں مساوات میں x محور سے قطع $\mathrm{d}s$ تک فاصلہ y ہے۔ دایاں مساوات میں y محور سے قطع $\mathrm{d}s$ کا فاصلہ x ہے۔ان دونوں کلیوں کو

$$S = \int 2\pi(\text{رداس})(\text{چوڑائی پٹی}) = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں رکن لمبائی قوس $\mathrm{d}s$ تک محور طواف سے فاصلہ ρ ہے۔

مختصر تفریقی روپ

$$S = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$

کسی مخصوص مسئلے میں آپ رکن لمبائی قوس $\mathrm{d}s$ اور رداس ρ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر تکمل کے حدود بھی اسی متغیر کی روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال 6.23: منحنی $y = x^3,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم مختصر تفریقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s \\
&= \int 2\pi y\,\mathrm{d}s \\
&= \int 2\pi y\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} && \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}
\end{aligned}$$

ہم نے یہاں فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا $\mathrm{d}s$ کو $\mathrm{d}x$ یا $\mathrm{d}y$ کی روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات $y = x^3$ سے $\mathrm{d}y$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہٰذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3,\ \mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x,\ \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + (3x^2\,\mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے تکمل کا متغیر x ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\\
&= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\pi(\tfrac{1}{36})(\tfrac{2}{3})(1+9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2}\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(1+\tfrac{9}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(\tfrac{25}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}(\tfrac{125}{64}-1)\\
&= \tfrac{61\pi}{1728}
\end{aligned}$$

□

سوالات

سطحی رقبہ کے تکمل

سوال 1 تا سوال 8 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ کو بھی ترسیم کریں۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 1: $y=\tan x,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{4};\qquad x$ محور

جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/4}\tan x\sqrt{1+\sec^4 x}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 3.84

سوال 2: $y=x^2,\quad 0\le x\le 2;\qquad x$ محور

سوال 3: $xy=1,\quad 1\le y\le 2;\qquad y$ محور

جواب: (ا) $2\pi\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 5.02

سوال 4: محور y $\quad x=\sin y,\quad 0\le y\le \pi;$

سوال 5: محور x ; نقطہ $(4,1)$ سے $(1,4)$ تک $\quad x^{1/2}+y^{1/2}=3,$

جواب: (ا) $2\pi\int_0^4 (3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 63.37

سوال 6: محور y $\quad y+2\sqrt{y}=x,\quad 1\le y\le 2;$

سوال 7: محور y $\quad x=\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t,\quad 0\le y\le \frac{\pi}{3};$

جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t\right)\sec y\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 2.08

سوال 8: محور x $\quad y=\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t,\quad 1\le x\le \sqrt{5};$

سطحی رقبہ کا حصول

سوال 9: لکیری قطع $y=\frac{x}{2},\ 0\le x\le 4$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ $=\frac{1}{2}$ (محیط قاعدہ)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

جواب: $4\pi\sqrt{5}$

سوال 10: لکیری قطع $y=\frac{x}{2},\ 0\le x\le 4$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 11: لکیری قطع $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\ 1\le x\le 3$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع $=\pi\,(r_1+r_2)$(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

جواب: $3\pi\sqrt{5}$

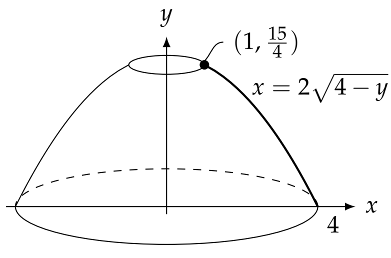
سوال 12: لکیری قطع $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\ 1\le x\le 3$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع $=\pi\,(r_1+r_2)$(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

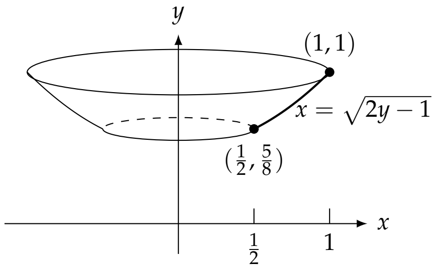
سوال 13: محور x $\quad y=\frac{x^3}{9},\quad 0\le x\le 2,$

جواب: $\frac{98\pi}{81}$

سوال 14: محور x $\quad y=\sqrt{x},\quad \frac{3}{4}\le x\le \frac{15}{4},$



شکل 6.83



شکل 6.84

سوال 15: محور x $\quad y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0.5 \le x \le 1.5,$
جواب: 2π

سوال 16: محور x $\quad y = \sqrt{x+1}, \quad 1 \le x \le 5,$

سوال 17: محور y $\quad x = \frac{y^3}{3}, \quad 0 \le y \le 1,$
جواب: $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

سوال 18: محور y $\quad x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \le y \le 3,$

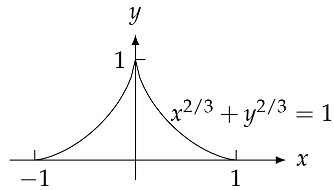
سوال 19: محور y $\quad x = 2\sqrt{4-y}, \quad 0 \le y \le \frac{15}{4},$ (شکل 6.83)
جواب: $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

سوال 20: محور y $\quad x = \sqrt{2y-1}, \quad \frac{5}{8} \le y \le 1,$ (شکل 6.84)

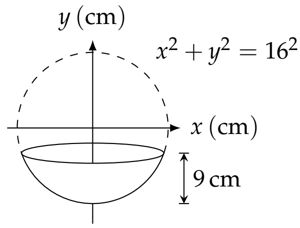
سوال 21: محور x $\quad x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}, \quad 1 \le y \le 2,$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi y \, \mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)
جواب: $\frac{253\pi}{20}$

سوال 22: محور y $\quad y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}, \quad 0 \le x \le \sqrt{2},$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi x \, \mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

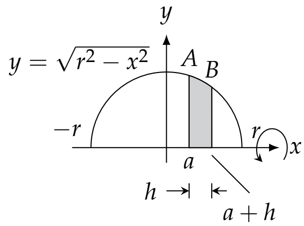
سوال 23: نئی تعریف کی پرکھ
تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \ -a \le x \le x$ کو x محور کے گرد گھمانے سے کروی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات 6.16 سے بھی رداس a کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل 6.85



شکل 6.86



شکل 6.87

سوال 24: نئی تعریف کی پرکھ
لکیری قطع $y = \frac{r}{h}x,\ 0 \le x \le h$ کو x محور کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد h اور اس کے قاعدہ کا رداس r ہے لہٰذا اس کے ترچھا قد $\sqrt{r^2+h^2}$ ہو گا۔ تکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ دریافت کر کے اس کلیہ کی تصدیق کریں۔

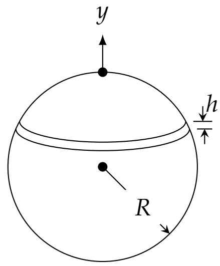
سوال 25: (ا) منحنی $y=\cos x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف کے رقبہ کا تکمل لکھیں جس کو حل کرنا بعد میں سکھایا جائے گا۔ (ب) اس سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔
جواب: (ا) $2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$، (ب) ≈ 14.4236

سوال 26: ستارہ نما کا سطحی رقبہ
ستارہ نما $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ کا وہ حصہ جو x محور سے اوپر پایا جاتا ہے کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.85)۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ۔ ربع اول میں منحنی کے حصہ $y=(1-x^{2/3})^{3/2},\ 0\le x\le 1$) کو x محور کے گرد گھما کر نتیجہ کو دگنا کریں۔)

سوال 27: رنگ
ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 6.86)۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی 0.5 mm موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لئے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔
جواب: 452.4 L

سوال 28: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ
ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروی ڈبل روٹی کے ایک جتنی موٹے ٹکڑوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے (شکل 6.87)؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور x پر وقفہ h کے اوپر نصف دائرے کا قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو x محور کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبہ کی قیمت h کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ (کرارا رقبہ کی قیمت h پر منحصر ہو گی۔)

سوال 29: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ h ہے رداس R کے کروی سطح سے ایک پٹی کاٹتے ہیں (شکل 6.88)۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہو گا۔



شکل 6.88

سوال 30: موسمیاتی ریڈار کو شکل میں دکھائے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہو گا؟ (قاعدہ کو شامل نہ کریں۔)

سوال 31: محور طواف کو قطع کرنے والے منحنیات سے حاصل سطح طواف
وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل f کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات 6.16 اخذ کی گئی۔ جہاں تفاعل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات 6.16 کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$S = \int 2\pi\rho \,\mathrm{d}s = \int 2\pi\left|f(x)\right| \mathrm{d}s \tag{6.18}$$

تفاعل $y=\frac{x^3}{9}-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرا مخروط کا سطحی رقبہ مساوات 6.18 استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔
جواب: $5\sqrt{2}\pi$

سوال 32: قوس $y=\frac{x^3}{9}-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات 6.18 میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہو گا؟

اعدادی تکمل
سوال 33 تا سوال 33 میں محور x کے گرد دیے گئے منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گے۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درستگی تک معلوم کریں۔

سوال 33: $y=\sin x,\quad 0\le x\le\pi$
جواب: 14.4

سوال 34: $y=\frac{x^2}{4},\quad 0\le x\le 2$

سوال 35: $y=x+\sin 2x,\quad -\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$
جواب: 54.9

سوال 36: $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \le x \le 6$

سوال 37: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ
فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں اور k ویں ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کے وسطی نقطہ $m_k = (\frac{x_{k-1}+x_k}{2})$ پر منحنی کی مماس لکیر بنائیں۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ k ویں ذیلی وقفہ میں مماسی قطع کی لمبائی $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطع کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ کو محور x گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\text{ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو } k) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت

بہت سارے ساخت اور میکانی نظام کا رویہ ایسا ہوتا ہے جیسا ان کی کمیت ایک نقطہ میں سموئی ہو جس کو مرکز کمیت کہتے ہیں۔ اس نقطہ کا مقام جاننا اہم ہے جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں یک بعدی اور دو بعد چیزوں پر توجہ دی جائے گی۔ تین بعدی چیزوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

لکیر پر کمیت

ہم اپنا ریاضی نمونہ بتدریج تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی منزل میں ہم محور x جس کا مبدا اس کا چول ہو، پر کمیت m_1 ، m_2 اور m_3 تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دارومدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر منحصر ہے۔

ہر کمیت m_k پر نیچے رخ قوت m_kg عمل کرتا ہے جہاں g ثقلی اسراع ہے (قوت m_kg کو کمیت k_k کا وزن کہتے ہیں)۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو قوت مروڑ[11] کہتے ہیں۔ قوت m_kg کو مبدا سے فاصلہ x_k سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔مبدا سے بائیں جانب کمیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے جبکہ مبدا سے دائیں جانب کمیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام گھومنے کے رجحان کا ناپ ہے۔ اس مجموعہ کو نظام کی قوت مروڑ[12] کہتے ہیں۔

$$\text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3 \tag{6.19}$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \quad \underbrace{(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں g اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے جبکہ عدد $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ نظام کی خاصیت ہے جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

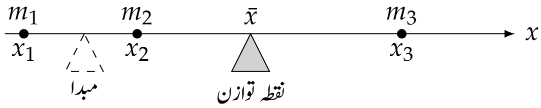
عدد $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ کو مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر کہتے ہیں جو انفرادی کمیت کے معیار اثر m_1x_1 ، m_2x_2 اور m_3x_3 کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر} = \sum m_kx_k$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ $\bar{x}$ پر رکھنے سے نظام کا قوت مروڑ صفر ہو گا۔

---

[11] torque
[12] system torque



اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے ہر کمیت کا قوت مروڑ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$\bar{x}$ کے لحاظ سے m_k کا معیار اثر $=$ ($\bar{x}$ سے m_k کا فاصلہ)(نیچے رخ قوت)

$$= (x_k - \bar{x})m_k g$$

ان معیار اثر کے مجموعہ کو صفر کے برابر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم $\bar{x}$ کے لئے حل کر سکتے ہیں:

$$\sum (x_k - \bar{x})m_k g = 0$$
معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے

$$g\sum (x_k - \bar{x})m_k = 0$$
مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب

$$\sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) = 0$$
g سے تقسیم اور m_k پھیلایا گیا ہے

$$\sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k = 0$$
مجموعہ کا قاعدہ فرق

$$\sum m_k x_k = \bar{x} \sum m_k$$
مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$
$\bar{x}$ کے لئے حل

یہ آخری مساوات کہتی ہے کہ $\bar{x}$ معلوم کرنے کے لئے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کمیت سے تقسیم کریں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

نقطہ $\bar{x}$ کو نظام کا مرکز کمیت[13] کہتے ہیں۔

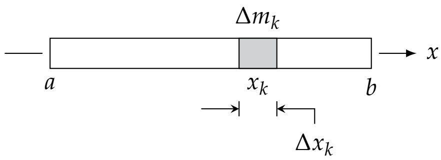
تار اور پتلے سلاخ

بہت سارے موقعوں پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کی کمیت کا مرکز مطلوب ہوتا ہے۔ایسی صورتوں میں اگر ہم تقسیم کمیت کو استمراری تفاعل کی صورت میں لکھ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کی بجائے تکمل ہو گا جیسے نیچے سمجھایا گیا ہے۔

فرض کریں ایک لمبی پٹی $x = a$ تا $x = b$ محور x پر پڑی ہے۔ ہم $[a, b]$ اس پٹی کی خانہ بندی کرتے ہوئے اس کو Δm_k کمیت کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ k ویں ٹکڑے کی لمبائی Δx_k ہے اور یہ مبدا سے تقریباً x_k فاصلے پر پایا جاتا ہے۔اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔

---

[13] center of mass



اول، پٹی کا مرکز کمیت $\bar{x}$ اور نقطہ x_k پر کمیت Δm_k رکھنے سے حاصل نظام کا مرکز کمیت تقریباً ایک ہی مقام پر ہوں گے:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

دوم، مبدا کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً $x_k\Delta m_k$ ہو گا لہٰذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام $x_k\Delta m_m$ کا مجموعہ ہو گا:

$$\text{نظام کا معیار اثر} \approx \sum x_k\Delta m_k$$

سوم، اگر x_k پر پٹی کی کثافت $\delta(x_k)$ ہو جہاں δ استمراری ہے (اور کثافت کی پیمائش کمیت فی لمبائی ہے) تب Δm_k تخمیناً $\delta(x_k)\Delta x_k$ ہو گا:

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}} \approx \frac{\sum x_k\Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k\delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k} \tag{6.20}$$

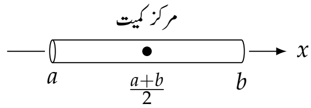
مساوات 6.20 کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل $x\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفہ پر تفاعل $\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات 6.20 میں تخمین بہتر ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x}$$

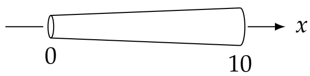
ہم $\bar{x}$ کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

محور x پر کثافتی تفاعل $\delta(x)$ کے سلاخ یا پٹی کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{مبدا کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{کمیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کمیت} \end{aligned} \tag{6.21}$$



شکل 6.89: مستقل کثافت کے پتلے سیدھے سلاخ کا مرکز کمیت دونوں سروں کے وسطی نقطہ پر ہو گا۔



شکل 6.90: متغیر موٹائی کے سیدھے سلاخ کو متغیر کثافت کا سیدھا سلاخ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 6.21 کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور کثافت سے مراد کمیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیمائش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔ یوں تار، سلاخ اور پٹی کے لئے ہم کمیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں جبکہ مستوی سطحوں کے لئے کمیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

مثال 6.24: مستقل کثافت کا سلاخ یا پٹی
مستقل کثافت والے سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: ہم محور x پر $x = a$ سے $x = b$ کو سلاخ تصور کرتے ہیں (شکل 6.89)۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

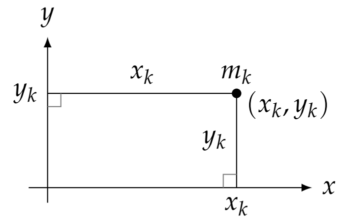
$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_a^b \delta x \, \mathrm{d}x = \delta \int_a^b x \, \mathrm{d}x = \delta [\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2) \\
M &= \int_a^b \delta \, \mathrm{d}x = \delta \int_a^b \mathrm{d}x = \delta [x]_a^b = \delta(b - a) \\
\bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)}{\delta(b-a)} = \frac{b+a}{2}
\end{aligned}$$

مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کمیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطہ پر ہو گا۔ □

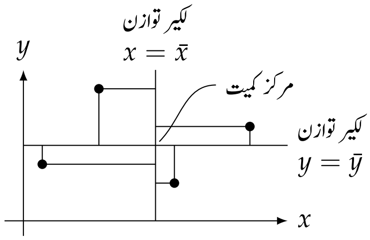
مثال 6.25: متغیر کثافت
ایک سلاخ جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹا ہوتا ہے (شکل 6.90) لہٰذا اس کی کثافت مستقل ہونے کی بجائے $\delta(x) = 1 + \frac{x}{10}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ سلاخ کا مرکز کمیت معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات 6.21 استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_0^{10} x\delta(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{10} x\Big(1 + \frac{x}{10}\Big) \, \mathrm{d}x = \int_0^{10} \Big(x + \frac{x^2}{10}\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\Big]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}\,\mathrm{kg\,m}
\end{aligned}$$



شکل 6.91: ہر کمیت m_k کا ہر انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔



شکل 6.92: دو بعدی کمیتوں کا جھرمٹ اپنے مرکز کمیت پر متوازن ہو گا۔

آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی $\mathrm{kg\,m}$ ہے۔سلاخ کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int_0^{10} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} \left(1 + \frac{x}{10}\right) \mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} 10 + 5 = 15\,\mathrm{kg}$$

مرکز کمیت درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\,\mathrm{m}$$

□

مستوی پر تقسیم کمیت

فرض کریں ایک مستوی میں متناہی تعداد میں کمیت پائے جاتے ہیں۔یوں نقطہ (x_k, y_k) پر کمیت m_k ہو گا (شکل 6.91)۔اس نظام کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

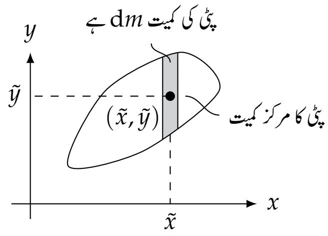
$$M = \sum m_k \qquad \text{نظام کی کمیت}$$

ہر کمیت m_k کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور x کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k y_k$ ہو گا جبکہ محور y کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k x_k$ ہو گا۔دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} M_x &= \sum m_k y_k && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M_y &= \sum m_k x_k && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \end{aligned}$$

نظام کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{6.22}$$



شکل 6.93: چادر کو انتصابی پتلی پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ نمائندہ پٹی کا کسی ایک انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر وہی ہو گا جو پٹی کی کمیت $\mathrm{d}m$ کو پٹی کی مرکز کمیت پر منجمد کرنے سے حاصل ہو گا۔

یک بعدی صورت کی طرح $\bar{x}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $x = \bar{x}$ پر توازن میں ہو گا (شکل 6.92)۔

نظام کے مرکز کمیت کا y محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{6.23}$$

یک بعدی صورت کی طرح $\bar{y}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $y = \bar{y}$ پر توازن میں ہو گا۔ لکیر $y = \bar{y}$ کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو منسوخ کر کے صفر قوت مروڑ پیدا کرتے ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ اس نظام کی پوری کمیت نقطہ $(\bar{x},\bar{y})$ میں پائی جاتی ہے۔ اس نقطہ کو نظام کی کمیت کا مرکز[14] کہتے ہیں۔

پتلی مستوی چادر

کئی بار ہمیں پتلی مستوی چادر کا مرکز کمیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کمیت کی تقسیم استمراری ہے لہٰذا $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں متناہی مجموعوں کی بجائے تکمل پائے جاتے ہیں۔آئیں اس پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں xy مستوی میں ایک پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک پٹیوں میں تقسیم کریں (شکل 6.93 میں پٹیاں محور y کے متوازی ہیں)۔ کسی ایک نمائندہ پٹی کی کمیت کا مرکز $(\tilde{x},\tilde{y})$ ہو گا۔ ہم پٹی کی کمیت Δm کو نقطہ $(\tilde{x},\tilde{y})$ پر منجمد تصور کرتے ہیں۔یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{x}\Delta m$ ہو گا جبکہ محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{y}\Delta m$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 6.22 اور مساوات 6.23 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m}$$

---

center of mass[14]

یک بعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریمان مجموعے پائے جاتے ہیں جن کی قیمتیں، پٹی کی چوڑائی کم سے کم کرنے سے قطعی تکملات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان تکملات کو علامت طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

مستوی میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M_y &= \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M &= \int \mathrm{d}m && \text{کمیت}\\
\bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کمیت}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

ان تکملات کی حصول کے لئے ہم چادر کو محددی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدد کے متوازی ایک نمائندہ پٹی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پٹی کی کمیت اور مرکز کمیت کے محدد $(\tilde{x}, \tilde{y})$ کو x اور y کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد محددی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے بیچ $\tilde{y}\,\mathrm{d}m$ ، $\tilde{x}\,\mathrm{d}m$ اور $\mathrm{d}m$ کے تکملات لیتے ہیں۔

مثال 6.26: ایک تکونی چادر جس کو شکل 6.94-ا میں دکھایا گیا ہے کی مستقل کثافت $\delta = 3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے۔ (ا) محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر M_y معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کمیت M معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کمیت کے مرکز کا $\bar{x}$ محدد معلوم کریں۔

حل: پہلی ترکیب: انتصابی پٹیاں (شکل 6.94-ب)
(ا) نمائندہ پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$ چوڑائی: $\mathrm{d}x$

لمبائی: $2x$ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A = 3 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x$

رقبہ: $\mathrm{d}S = 2x\,\mathrm{d}x$ مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = x$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = x \cdot 6x\,\mathrm{d}x = 6x^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہٰذا پوری چادر کا محور y کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x = 2x^3\Big]_0^1 = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^1 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2\Big]_0^1 = 3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}, \mathrm{cm}$$

دوسری ترکیب: افقی پٹیاں (شکل 6.94-ج)

(ا) نمائندہ انتصابی پٹی کے مرکز کمیت کا y محدد y ہو گا:

$$\tilde{y} = y$$

پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں x محدد پایا جائے گا:

$$\tilde{x} = \frac{\frac{y}{2}+1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

لمبائی: $1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$

چوڑائی: $\mathrm{d}y$

رقبہ: $\mathrm{d}S = \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

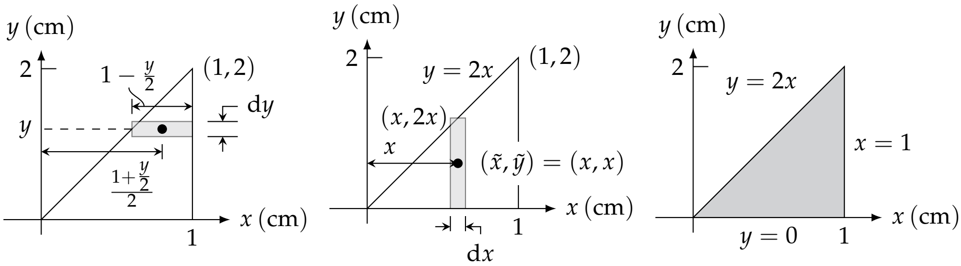
مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y$$

ہو گا اور محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\,\mathrm{g\,cm}$$



(ج) افقی پٹیاں۔ (ب) انتصابی پٹیاں۔ (ا) تکونی چادر۔

شکل 6.94: چادر برائے مثال 6.26

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M=\int \mathrm{d}m=\int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\left[2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\frac{3}{2}(4-2)=3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کی مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}}=\frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$$

ہم اسی طرح M_x اور $\bar{y}$ بھی تلاش کر سکتے ہیں۔ □

اگر پتلی چادر میں کمیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب کمیت کا مرکز محور تشاکل پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کمیت دونوں محور کے نقطہ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

مثال 6.27: مستقل کثافت ایک پتلا مستوی خطہ جس کی کثافت مستقل δ ہے کو بالائی طرف سے قطع مکافی $y=4-x^2$ اور زیریں طرف سے محور x گھیرتا ہے (شکل 6.95)۔ اس خطے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ خطے کی کثافت مستقل ہے اور تقسیم کمیت محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا مرکز کمیت محور y پر پایا جائے گا۔ یوں $\bar{x}=0$ ہو گا۔ ہمیں صرف $\bar{y}=\frac{M_x}{M}$ معلوم کرنا ہے۔

افقی پٹیاں لینے سے درج ذیل مشکل تکمل پیدا ہوتا ہے

$$M_x=\int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$$

لہٰذا ہم انتصابی پٹیاں لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ نمائندہ انتصابی پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$

رقبہ: $\mathrm{d}S = (4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

لمبائی: $4 - x^2$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = \delta(4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

چوڑائی: $\mathrm{d}x$

مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$

محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{y}\,\mathrm{d}m = \frac{4-x^2}{2}\cdot\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہٰذا محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x \tag{6.25}$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}\delta \tag{6.26}$$

چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\delta \tag{6.27}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

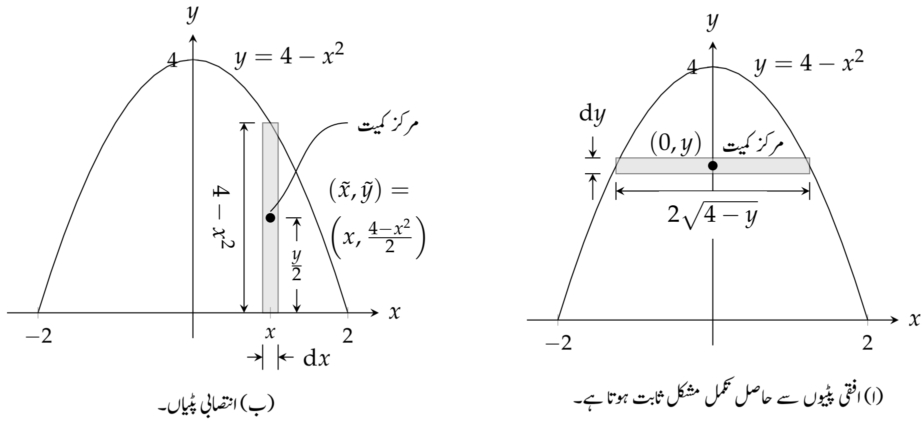
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{15}\delta}{\frac{32}{3}\delta} = \frac{8}{5}$$

چادر کی کمیت کا مرکز درج ذیل نقطہ ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

□

مثال 6.28: متغیر کثافت نقطہ (x, y) پر مثال 6.27 کی چادر کی کثافت $\delta = 2x^2$ لیتے ہوئے چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔



شکل 6.95: چادر برائے مثال 6.27

حل: کمیت اب بھی محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ یوں $\delta = 2x^2$ کے لئے مساوات 6.25 اور مساوات 6.27 درج ذیل صورت اختیار کریں گے۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\,\mathrm{d}x = \frac{2048}{105} \\
M &= \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2} \delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2x^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

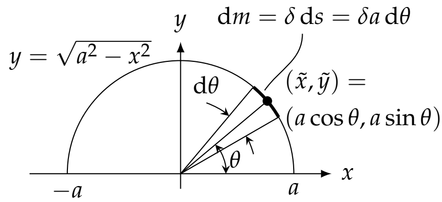
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

چادر کی کمیت کا نیا مرکز درج ذیل ہو گا۔

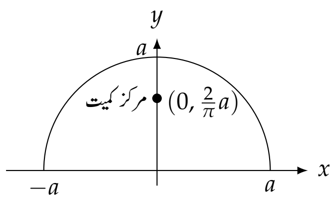
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

□

مثال 6.29: ایک تار جس کی کثافت δ مستقل ہے سے رداس a کا نصف دائرہ بنایا جاتا ہے۔ اس کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔



(ا) مرکز کمیت کے حصول میں مستعمل متغیرات۔



(ب) مرکز کمیت تار پر نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 6.96: نصف دائری تار (مثال 6.29)

حل: ہم نصف دائرے کو تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 6.96)۔کمیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ہم تصور میں تار کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے $\bar{y}$ تلاش کرتے ہیں۔ نمائندہ قطع کے لئے درج ذیل ہو گا۔

لمبائی: $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\theta$ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = a\sin\theta$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}s = \delta a\,\mathrm{d}\theta$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^{\pi} a\sin\theta \cdot \delta a\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^{\pi} \delta a\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\delta a^2[-\cos\theta]_0^{\pi}}{\delta a\pi} = \frac{2}{\pi}a$$

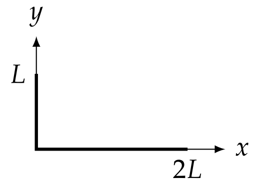
مرکز کمیت $(0, 2a/\pi)$ ہو گا جو مبدا سے تقریباً $\frac{2}{3}$ اوپر ہے۔ □

6.7.1 وسطانی مرکز

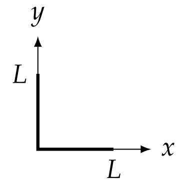
مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کی کلیات میں نسب نما اور شمار کنندہ میں پائے جانے والے δ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔یوں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کی نقطہ نظر سے δ کو شروع سے اکائی تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستقل کثافت کی صورت میں کسی چیز کی کمیت کا مرکز اس چیز کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نا کہ اس مادے پر جس سے یہ چیز بنی ہو۔ایسی صورت میں مرکز کمیت کو عموماً وسطانی مرکز[15] کہتے ہیں۔ یوں اگر آپ سے کہا جائے کہ تکون، مخروط یا کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کو معیار اثر تقسیم کمیت سے معلوم کرتے ہوئے $\delta = 1$ لیں۔

---

[15] centroid



شکل 6.98: فریم برائے سوال 4



شکل 6.97: لوہے کا فریم برائے سوال 3

سوالات

پتلے سلاخ

سوال 1: ایک بچہ جس کی کمیت $40\,\mathrm{kg}$ اور دوسرا بچہ جس کی کمیت $50\,\mathrm{kg}$ ہے ہنڈولا پر جھول رہے ہیں۔ اگر $40\,\mathrm{kg}$ بچہ چول سے $2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو تب ہنڈولا کو متوازن رکھنے کی خاطر دوسرا بچہ چول سے دوسری جانب کتنے فاصلے پر ہو گا؟
جواب: $\frac{8}{5}\,\mathrm{m}$

سوال 2: ایک شہتیر کے سروں کو دو ترازوؤں پر رکھا جاتا ہے جو $100\,\mathrm{kg}$ اور $20\,\mathrm{kg}$ کی پیمائش دیتے ہیں۔ شہتیر کی کمیت کا مرکز کہاں ہو گا؟

سوال 3: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو وسط سے $90°$ زاویہ پر موڑ پر فریم بنایا جاتا ہے (شکل 6.97)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی حصے کا مرکز کمیت کہاں ہو گا؟)

سوال 4: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو $90°$ پر موڑ کر فریم بنایا جاتا ہے جہاں ایک بازو کی لمبائی دوسرے بازو کی لمبائی سے دگنی ہے (شکل 6.98)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کی کمیت کے مراکز کہاں ہوں گے؟)

سوال 5 تا سوال 12 میں محور x کے مختلف وقفوں پر پڑی ہوئی پتلی سلاخ کی کثافتی تفاعل دیے گئے ہیں۔ مساوات 6.21 استعمال کرتے ہوئے مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 5: $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$

سوال 6: $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$

سوال 7: $\delta(x) = 1 + \frac{x}{3}, \quad 0 \le x \le 3$

سوال 8: $\delta(x) = 2 - \frac{x}{4}, \quad 0 \le x \le 4$

سوال 9: $\delta(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \le x \le 4$

سوال 10: $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$

سوال 11:
$$\delta(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

سوال 12:
$$\delta(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

مستقل کثافت والے پتلی چادریں

سوال 13 تا سوال 24 میں وہ خطہ دیا گیا ہے جہاں مستقل کثافت δ والی پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

سوال 13: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 4$ میں محیط خطہ۔

سوال 14: قطع مکافی $y = 25 - x^2$ اور محور x میں محیط خطہ۔

سوال 15: قطع مکافی $y = x - x^2$ اور لکیر $y = -x$ میں محیط خطہ۔

سوال 16: قطع مکافی $y = x^2 - 3$ اور $y = -2x^2$ میں محیط خطہ۔

سوال 17: محور y اور قطع مکافی $x = y - y^3, 0 \le y \le 1$ کے بیچ خطہ۔

سوال 18: قطع مکافی $x = y^2 - y$ اور لکیر $y = x$ میں محیط خطہ۔

سوال 19: محور x اور منحنی $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ۔

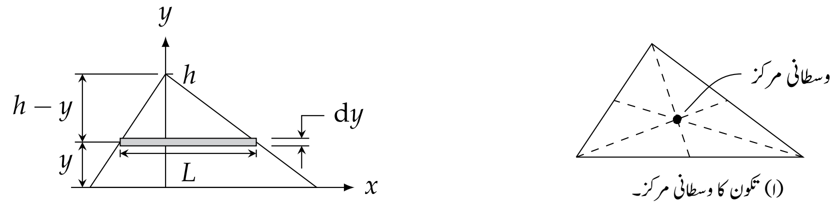
سوال 20: محور x اور منحنی $y = \sec^2 x, -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ۔

سوال 21: قطع مکافی $y = 2x^2 - 4x$ اور $y = 2x - x^2$ میں محیط خطہ۔

سوال 22: (ا) ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے اندر خطہ۔ (ب) محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{9 - x^2}$ کے بیچ خطہ۔ جزو-ا کے نتیجہ کے ساتھ جواب کا موازنہ کریں۔

سوال 23: (ا) ربع اول میں لکیر $x = 3$ ، لکیر $y = 3$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے بیچ تکونی خطہ۔ (اشارہ۔ رقبے کو جیومیٹری کی مدد سے حاصل کریں۔)

سوال 24: وہ خطہ جس کا بالائی سرحد $y = \frac{1}{x^3}$ ، زیریں سرحد $y = -\frac{1}{x^3}$ ، بایاں سرحد $x = 1$ اور دایاں سرحد $x = a > 1$ ہوں۔ اس کے علاوہ $\lim_{a \to \infty} \bar{x}$ بھی معلوم کریں۔



(ب) مرکز کمیت معلوم کرنے میں مستعمل متغیرات۔

(ا) تکون کا وسطانی مرکز۔

شکل 6.99: تکون برائے سوال 29

متغیر کثافت والے پتلی چادریں

سوال 25: محور x اور منحنی $y = \frac{2}{x^2}$, $1 \le x \le 2$ کے بیچ چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = x^2$ ہے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 26: لکیر $y = x$ سے نیچے اور قطع مکافی $y = x^2$ سے اوپر پتلی چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = 12x$ ہے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 27: لکیر $x = 1$، لکیر $x = 4$ اور منحنی $y = \mp\frac{4}{\sqrt{x}}$ کے بیچ چادر کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{1}{x}$ ہو تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

سوال 28: منحنی $y = \frac{2}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 4$ کے بیچ چادر کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \sqrt{x}$ ہو تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

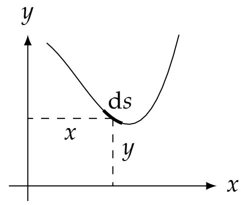
تکون کے وسطانی مراکز

سوال 29: تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا۔
تکون کی راس سے مخالف ضلع کی وسط تک قطع کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ ضلع سے $\frac{1}{3}$ فاصلہ پر وسطانیے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل 6.99)۔ دکھائیں کہ تکون کا وسطانی مرکز بھی اسی نقطہ پر پایا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

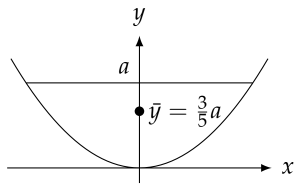
ا. تکون کے کسی ایک ضلع کو محور x پر رکھ کر اس میں نمائندہ افقی پٹی L لیں۔ کمیت $\mathrm{d}m$ کو L اور $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. تشابہ مثلثات کی مدد سے $L = \frac{b}{h}(h - y)$ لکھ کر $\mathrm{d}m$ کے کلیہ میں ڈالیں۔

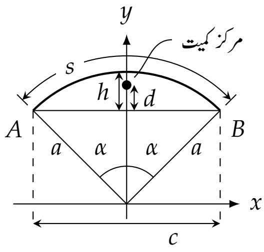
ج. دکھائیں کہ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ ہو گا۔



شکل 6.100: برائے سوال 39



شکل 6.101: برائے سوال 40



شکل 6.102: برائے سوال 41

د. اسی دلیل کو باقی دو وسطانیوں پر بھی لاگو کریں۔

سوال 30 تا سوال 34 مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ سوال 29 کا نتیجہ استعمال کر کر مثلث کا وسطانی مرکز دریافت کریں۔

سوال 30: $(-1,0),\ (1,0),\ (0,3)$

سوال 31: $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$

سوال 32: $(0,0),\ (a,0),\ (0,a)$

سوال 33: $(0,0),\ (a,0),\ (0,b)$

سوال 34: $(0,0),\ (a,0),\ (\frac{a}{2},b)$

پتلی تار

سوال 35: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = \sqrt{x}$ پر $x = 0$ سے $x = 2$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 36: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = x^3$ پر $x = 0$ سے $x = 1$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 37: کثافت $\delta = k\sin\theta$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 38: کثافت $\delta = 1 + k|\cos\theta|$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔

کلیات انجینئری

سوال 39 تا سوال 42 میں دیے گئے فقروں اور کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال 39: قابل تفرق مستوی منحنی کے وسطانی مراکز کے محدد درج ذیل ہوں گے (شکل 6.100)۔

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}$$

سوال 40: قوس $y = \frac{x^2}{4p}$ میں $p > 0$ کی قیمت جو بھی ہو، شکل 6.101 میں دکھائے گئے قطع مکافی خطے کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{3}{5}a$ ہو گا۔

سوال 41: مستقل کثافت کی باریک تار سے، محور y کے لحاظ سے تشاکلی، دائری قوس بنایا جاتا ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے (شکل 6.102)۔ اس کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{a \sin\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$ ہو گا۔

سوال 42: گزشتہ سوال کو جاری رکھا گیا ہے
دکھائیں کہ جب α کی قیمت کم ہو تب وسطانی مرکز سے قطع AB تک فاصلہ d تقریباً $\frac{2h}{3}$ ہو گا۔ایسا درج ذیل اقدام سے ہو گا۔

ا. 1. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha} \tag{6.28}$$

2. درج ذیل تفاعل کو

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

کمپیوٹر پر ترسیم کر کے بڑا کر کے دکھائیں کہ $\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$ ہو گا۔

ب. آپ $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ لے کر مساوات 6.28 کا دایاں ہاتھ حل کر کے دیکھیں کہ 45° سے بڑے زاویوں کے لئے بھی خلل (یعنی d اور $\frac{2}{3}$ میں فرق) بہت کم ہے۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم