

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

7.2	قدرتی لوگار تھم	762
7.3	قوت نمائی تفاعل	779
7.4	$\log_a x$ اور a^x	794
7.5	افزائش اور تنزل	805
7.6	قاعدہ لھوپیٹال	819
7.7	اضافی شرح نمو	835
7.7.1	ترتیبی اور شمائی تلاش	840
7.8	الٹ نیکونائی تفاعل	846
7.9	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	862
7.10	ہذلولی تفاعل	879
7.11	یک رتبی تفرقی مساوات	900
7.12	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	918

8	تکمل کے طریقے	929
8.1	تکمل کے بنیادی کلیات	929
8.2	تکمل بالخص	945
8.2.1	بار بار استعمال	950
8.3	جزوی کسر	959
8.4	نیکونائی بدل	974
8.5	جدول تکمل اور کمپیوٹر	985
8.6	غیر مناسب تکمل	1002

9	لا متناہی تسلسل	1029
9.1	اعداد کی ترتیب کی حد	1029
9.2	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	1048
9.3	لا متناہی تسلسل	1064
9.4	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	1083
9.5	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	1093
9.6	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	1103
9.7	بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	1115
9.8	طاققی تسلسل	1129
9.9	ٹیبلر اور مکملارن تسلسل	1145
9.10	ٹیبلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلل کے اندازے	1156
9.11	طاققی تسلسل کے استعمال	1175

10	مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	1195
10.1	مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	1195
10.2	سک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	1219

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تیمی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629	13.8.1	نتیجہ
1639	13.9	لیگریٹھ ضاربین
1647		جوابات

1649	ا ضمیمہ اول
1651	ب ضمیمہ دوم
1653	ج ضمیمہ تین
1655	د ضمیمہ چار
1657	ه ضمیمہ پانچ
1659	و ضمیمہ چھ
1661	ز ضمیمہ سات
1663	ح ضمیمہ آٹھ
1665	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

13.9 لیگرینج ضاربین

جیسا ہم حصہ 13.8 میں دیکھ چکے، بعض اوقات ہمیں تفاعل کی انتہائی قیمت ایسی صورت درکار ہوگی جب اس کے دائرہ کار کو مستوی کے کسی مخصوص ذیلی حصہ، مثلاً قرص یا بند ٹکونی خط، پر رہنے کا پابند بنایا گیا ہو۔ لیکن جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایک تفاعل پر دیگر پابندیاں بھی عائد کی جاسکتی ہیں۔

اس حصہ میں ہم پابند تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کرنے کے ایک طاقتور ترکیب پر غور کریں گے جس کو لیگرینج ضاربین کی ترکیب کہتے ہیں۔ جیومیٹری کے انتہائی مسائل حل کرتے ہوئے یوسف لوئی لیگرینج نے 1755 میں اس ترکیب کو دریافت کیا۔ موجودہ دور میں اس کا استعمال اقتصادیات، انجینئری (جہاں کثیر المراحل راکٹ کی تخلیق میں اسے استعمال کیا جاتا ہے) اور ریاضیات میں پایا جاتا ہے۔

جبری پابند تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت نقاط اور کم سے کم قیمت نقاط

مثال 13.55: مبداء کے قریب ترین نقطہ $N(x, y, z)$ مستوی $2x + y - z = 0$ پر تلاش کریں۔

حل: ہمیں تفاعل

$$\begin{aligned} |ON| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

کی کم سے کم قیمت درج ذیل پابندی کے تحت تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$2x + y - z - 5 = 0$$

چونکہ جب بھی تفاعل

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

کی قیمت کم سے کم ہو، ON کی قیمت بھی کم سے کم ہوتی ہے لہذا ہم $2x + y - z - 5 = 0$ کی پابندی میں رہتے ہوئے $f(x, y, z)$ کی کم سے کم قیمت تلاش کر کے اس مسئلہ کو حل کر سکتے ہیں۔ اس مساوات میں x اور y کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے z کو

$$z = 2x + y - 5$$

لکھ کر ہمیں وہ نقطہ (x, y) تلاش کرنا ہوگا جس پر تفاعل

$$h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$$

کی قیمت کم سے کم ہو۔ چونکہ پورا xy مستوی h کا دائرہ کار ہے لہذا ایک رتبی تفرقی پرکھ کے تحت h کی کم سے کم قیمت ان نقاط پر پائی جائے گی جن پر

$$h_x = 2x + 2(2x + y - 5)(2) = 0, \quad h_y = 2y + 2(2x + y - 5) = 0$$

ہو۔ ان سے

$$10x + 4y = 20, \quad 4x + 4y = 10$$

یعنی

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{5}{6}$$

حاصل ہو گا۔ ہم دو رتبہ تفرقی پرکھ کے ساتھ ساتھ جیومیٹریائی دلیل دیتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ان قیمتوں پر h کی قیمت کم سے کم ہو گی۔
مستوی $z = 2x + y - 5$ پر مطابقتی z محدود

$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}$$

ہو گا۔ یوں مطلوبہ نقطہ

$$N\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

□

ہو گا جو مبدا سے $\frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2.04$ فاصلہ پر ہو گا۔

ہم نے مثال 13.55 میں پابندی کے شرط کی قیمتیں پر کرتے ہوئے کم سے کم قیمت نقطہ تلاش کیا۔ یہ ترکیب بعض اوقات ہمیں آسانی سے جواب نہیں دے پاتی۔ یہی وجہ ہے کہ اس حصہ میں نئی ترکیب متعارف کی جائے گی۔

مثال 13.56: درج ذیل قطع زائد بیلن پر مبدا کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

پہلا حل: بیلن کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ہمیں اس بیلن پر مبدا کے قریب ترین نقطہ تلاش کرنے ہیں۔ یہ وہ نقاط ہوں گے جو $x^2 - z^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتے ہوئے تفاعل

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{فاصلے کا مربع}$$

کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں۔ اگر ہم مشروط مساوات میں x اور y کو غیر متابع متغیرات تصور کریں تب

$$z^2 = x^2 - 1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں بیلن پر نقاط کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

ہیلن پر ان نقاط کے محدود جو f کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں تلاش کرنے کی خاطر ہمیں xy مستوی میں وہ نقاط معلوم کرنے ہوں گے جن پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ h کی انتہائی قیمتیں صرف ان نقاط پر ممکن ہیں جن پر

$$h_x = 4x = 0, \quad h_y = 2y = 0$$

ہو، یعنی، نقطہ $(0, 0)$ لیکن ہیلن پر ایسا کوئی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جہاں x اور y یکوقت صفر ہوں۔ ایسا کیوں کر ہوا؟

کیا ہو کہ ایک رتبی تفرقی پرکھ سے ہم نے (درست طور پر) h کے دائرہ کار میں وہ نقطہ معلوم کیا جس پر h کی قیمت کم سے کم تھی جبکہ ہمیں ہیلن پر وہ نقطہ درکار تھا جس پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ اگرچہ h کا دائرہ کار مکمل xy ہے، ہمیں مستوی xy میں ہیلن کے سایہ کو دائرہ کار لیتے ہوئے نقطہ (x, y, z) کے پہلے دو محدود تلاش کرنے تھے۔ ہیلن کے سایہ میں خطوط $x = 1$ اور $x = -1$ کے بیچ خطہ شامل نہیں ہے۔

ہم $(x$ اور y کی بجائے) y اور z کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے اس پریشانی سے نجات حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں

$$x^2 = z^2 + 1$$

لکھ کر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ سے

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

حاصل ہو گا۔ اب ہم وہ نقاط تلاش کرتے ہیں جن پر k کی قیمت کم سے کم ہو۔ اب yz مستوی میں k کے دائرہ کار میں وہ حصہ جس میں y اور z دریافت کئے جاتے ہیں، ہیلن پر اس دائرہ کار جس پر (x, y, z) مطلوب ہے، ایک دوسرے جیسے ہیں۔ یوں جو نقاط k کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں، ہیلن پر مطابقتی نقاط دیں گے۔ اب k کی کم سے کم قیمت ان نقطوں پر ہو گی جہاں

$$k_y = 2y = 0, \quad k_z = 4z = 0$$

یعنی $y = z = 0$ ہو۔ یوں

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \pm 1$$

ہو گا۔ ہیلن پر مطابقتی نقاط $(\pm 1, 0, 0)$ ہوں گے۔ ہم عدم مساوات

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

سے دیکھ سکتے ہیں کہ نقاط $(\pm 1, 0, 0)$ ہمیں k کی کم سے کم قیمت دیں گے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا سے ہیلن کا کم سے کم فاصلہ 1 ہو گا۔

دوسرا حل: مبدا سے ہیلن تک کم ترین فاصلہ یوں بھی تلاش کیا جاسکتا ہے کہ آپ مبدا پر ایک بلبل تصور کریں۔ اس بلبل میں اتنی ہوا بھریں کہ یہ ہیلن کو بس چھوئے۔ جس نقطہ پر یہ بلبل ہیلن کو چھوتا ہے اس نقطہ پر بلبل اور ہیلن کا ایک ہی مماسی مستوی اور ایک ہی عمودی خط ہو گا۔ یوں اگر

$$g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1 \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

کو 0 کے برابر رکھ کر حاصل ہم قد منحنیات کو بلبلہ اور بیلن تصور کیا جائے تب ڈھلوان ∇f اور ∇g اس نقطہ پر متوازی ہوں گے جہاں یہ سطحیں ایک دوسرے کو چھوتی ہیں۔ یوں نقطہ مس پر ہم ایسا غیر سمتی λ تلاش کر سکتے ہیں جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

یعنی

$$2xi + 2yj + 2zk = \lambda(2xi - 2zk)$$

کو مطمئن کرتا ہو۔ اس طرح نقطہ مماس پر x ، y اور z محدود درج ذیل تین مساوات کو مطمئن کریں گے۔

$$(13.55) \quad 2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z$$

نقطہ (x, y, z) جس کے محدود مساوات 13.55 کو مطمئن کرتے ہوں λ کی کس قیمت کے لئے سطح $x^2 - z^2 - 1 = 0$ پر پائے جائیں گے؟ اس کا جواب دینے کی خاطر ہم اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ اس سطح پر کسی بھی نقطہ کا x محدود صفر نہیں ہے، فیصلہ کرتے ہیں کہ مساوات 13.55 کی پہلی مساوات میں $x \neq 0$ ہو گا۔ یوں $2x = 2\lambda x$ صرف

$$\lambda = 1 \quad \text{یعنی} \quad 2 = 2\lambda$$

کی صورت میں ممکن ہو گا۔ اب $\lambda = 1$ لیتے ہوئے مساوات $2z = -2\lambda z$ سے $2z = -2z$ حاصل ہو گا جس کو صرف $z = 0$ مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی مساوات $2y = 0$ سے $y = 0$ حاصل ہو گا۔ ان معلومات سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ نقطہ کا روپ درج ذیل ہو گا۔

$$(x, 0, 0)$$

سطح $x^2 - z^2 = 1$ پر کن نقاط کے محدود کا یہی روپ ہے؟ ان نقاط پر

$$x^2 - (0)^2 = 1, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

□

ہو گا۔ بیلن پر مہدا کے قریب ترین نقاط $(\pm 1, 0, 0)$ ہوں گے۔

لیگریٹھ ضاربین

ہم نے مثال 13.56 کا دوسرا حل لیگریٹھ ضاربین⁴⁹ کی ترکیب سے حاصل کیا۔ عمومی طور پر یہ ترکیب کہتی ہے تفاعل $f(x, y, z)$ ، جس کے متغیرات پر شرط $g(x, y, z) = 0$ لاگو کی گئی ہو، کی انتہائی قیمتیں، سطح $g = 0$ پر ان نقاط پر پائی جائیں گی جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

کو کسی غیر سستی مستقل λ (جس کو لیگرینج ضارب⁵⁰ کہتے ہیں) کے لئے مطمئن کرتے ہوں۔

اس ترکیب کو مزید جاننے کے لئے اور یہ دیکھنے کی خاطر کہ یہ ترکیب کیوں کام کرتی ہے، ہم درج ذیل مشاہدہ کرتے ہیں جس کو ایک مسئلہ کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔

مسئلہ 13.9: عمودی دھواڑ کا مسئلہ

فرض کریں $f(x, y, z)$ ایک ایسے خطے میں قابل تفرق ہے جس کی اندرون میں ہموار منحنی

$$C: \quad r = g(t)i + h(t)j + k(t)k$$

پائی جاتی ہے۔ اگر C پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہو جہاں C کی نسبت f کی مقامی زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم قیمت ہو تب N_0 پر ∇f منحنی C کو عمودی ہو گا۔

ثبوت: ہم دکھاتے ہیں کہ N_0 پر منحنی کہ سمتیہ رفتار کو ∇f عمودی ہو گا۔ منحنی C پر f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیتا ہے جس کا t کے لحاظ سے تفرق

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dk}{dt} = \nabla f \cdot v$$

ہو گا ایک نقطہ N_0 جس پر f کی منحنی پر قیمت کی نسبت سے مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت ہو، $\frac{df}{dt} = 0$ لہذا

$$\nabla f \cdot v = 0$$

ہو گا

ہم مسئلہ 13.9 میں جزو z کو حذف کر کے دو متغیری تفاعل کے لئے اسی طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

□

ضمنی نتیجہ 13.2: برائے مسئلہ 13.9

ہموار منحنی $r = g(t)i + h(t)j$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x, y)$ کی قیمتوں کی نسبت جن نقاط پر f کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمتیں ہوں وہاں $\nabla f \cdot v = 0$ ہو گا۔

ترکیب لیگرینج ضاربین کا انحصار مسئلہ 13.9 ہے فرض کریں $f(x, y, z)$ اور $g(x, y, z)$ قابل تفرق ہیں اور سطح $g(x, y, z) = 0$ پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہے جہاں سطح پر دیگر قیمتوں کے لحاظ سے f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

⁵⁰Lagrange multiplier

تب سطح $g(x, y, z) = 0$ پر N_0 سے گزرتی ہوئی ہر قابل تفرق منحنی پر f کی قیمتوں کے لحاظ سے N_0 پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی۔ یوں N_0 سے گزرتی ہوئی ایسی ہر قابل تفرق منحنی کے سمتیہ رفتار کو ∇f عمودی ہو گا۔ لیکن ∇g (جیسا ہم حصہ 13.7 میں دیکھ چکے ہیں ∇g ہم قد سطح $g = 0$ کو عمودی ہو گا) بھی ان سمتیات رفتار کو عمودی ہے لہذا N_0 پر ∇g اور غیر سمتی λ کا حاصل ضرب ∇f کے برابر ہو گا۔

لیکچر خانہ کی ترکیب فرض کریں $f(x, y, z)$ اور $g(x, y, z)$ قابل تفرق ہیں۔ شرط $g(x, y, z) = 0$ پر پورا اترتے ہوئے f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت تلاش کرنے کی خاطر x ، y ، z اور λ کی ایسی قیمتیں معلوم کریں جو درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y, z) = 0$$

دو متغیری تفاعل کے لئے موزوں مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y) = 0$$

=====%

مثال 13.57: تخم

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

پر درج ذیل تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x, y) = xy$$

حل: ہم $f(x, y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں درج ذیل شرط پر پورا اترتے ہوئے تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

ایس کرنے کی خاطر ہم پہلے x ، y اور λ کی وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y) = 0$$

مساوات ڈھلوان ہمیں

$$yi + xj = \frac{\lambda}{4}xi + \lambda yj$$

دیتی ہے جس سے

$$y = \frac{\lambda}{4}x, \quad x = \lambda y, \quad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y$$

حاصل ہوتے ہیں لہذا $y = 0$ یعنی $\lambda = \pm 2$ ہو گا۔ ہم اب درج ذیل دو صورتوں پر غور کرتے ہیں۔
پہلی صورت: اگر $y = 0$ ہو تب $x = y = 0$ ہو گا۔ لیکن $(0, 0)$ ترخیم پر نہیں پایا جاتا ہے لہذا $y \neq 0$ ہو گا۔
دوسری صورت: اگر $y \neq 0$ ہو تب $\lambda = \pm 2$ اور $x = \pm 2y$ ہو گا۔ انہیں مساوات $g(x, y) = 0$ میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad 4y^2 + 4y^2 = 8, \quad y = \pm 1$$

یوں ترخیم پر قاعل $f(x, y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں چار نقطوں $(\pm 2, 1)$ ، $(\pm 2, -1)$ پر پائی جائیں گی۔ یہ انتہائی قیمتیں
□ $f(x, y) = xy = -2$ اور $f(x, y) = xy = 2$ ہوں گی۔

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

