احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان

بعض اوقات ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $y = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$ کا بالکل درست حل معلوم نہیں کر سکتے ہیں یا نہیں کرنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں ہم عموماً کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے موزوں وقفہ پر ہر x کے لئے y کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ایسے حل کو ہم اعدادی حل[38] کہتے ہیں اور اس حل کو حاصل کرنے کے طریقہ کو اعدادی ترکیب[39] کہتے ہیں۔ اعدادی تراکیب عموماً بہت کم وقت میں درست نتائج دیتے ہیں اور جہاں بھی تحلیلی حل ناممکن، غیر ضروری یا پیچیدہ ہو، وہاں اعدادی تراکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ اس حصہ میں ہم ایسے ایک ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو ترکیب یولر[40] کہتے ہیں۔

میدان ڈھلوان

ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ تفرقی مساوات $y' = f(x,y)$ پر یہ شرط مسلط کرتی ہے کہ تفرقی مساوات کا حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے گا اور اس نقطہ ہر حل کا ڈھلوان $f(x_0, y_0)$ ہو گا۔ ہم f کے دائرہ کار میں منتخب نقطوں (x,y) پر $f(x,y)$ ڈھلوان والی قلیل سیدھے خطوط بنا کر اس ڈھلوان کو تصویری جامہ پہنا سکتے ہیں۔ نقطہ (x,y) سے گزرتے ہوئے حل کی ڈھلوان اس نقطہ پر بنائے گئے قلیل خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا لہٰذا یہ خط اس نقطہ پر حل کا مماس ہو گا۔ ہم ان مماس پر نظر دوڑا کر حل کے رویہ کو جان سکتے ہیں۔

قلم و کاغذ کے ساتھ میدان ڈھلوان بنانا تھکا دینے والا کام ہے۔ اس کتاب میں تمام مثالوں میں میدان ڈھلوان کمپیوٹر کی مدد سے بنائے گئے۔ آئیں کمپیوٹر کی مدد سے منحنی حل کے حصول پر غور کریں۔

خط بندی کا استعمال

دیے گئے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ سے ہم منحنی حل $y = y(x)$ کی تخمین درج ذیل خط بندی

$$L(x) = y(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}(x - x_0)$$

یا

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

---

[38] numerical solution
[39] numerical method
[40] Euler' method

سے کر سکتے ہیں۔ x_0 کی بالکل پڑوس میں تفاعل $L(x)$ اصل حل $y(x)$ کا اچھا تخمین ہو گا۔ ترکیب یولر میں اس طرح کے خط بندیوں کو آپس میں جوڑ کر زیادہ لمبے فاصلہ کے لئے حل تلاش کیا جاتا ہے۔ اب اس ترکیب پر غور کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (x_0, y_0) منحنی حل پر پایا جاتا ہے۔ فرض کریں ہم غیر تابع متغیر کی ایک نئی قیمت $x_0 = x_0 + \mathrm{d}x$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر بڑھوتری $\mathrm{d}x$ بہت کم ہو تب

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x$$

اصل حل $y = y(x_1)$ کا اچھا تخمین ہو گا۔ یوں نقطہ (x_0, y_0) سے، جو ٹھیک منحنی حل پر پایا جاتا ہے، ہم نقطہ (x_1, y_1) حاصل کر پائیں ہیں جو منحنی حل پر نقطہ $(x_1, y(x_1))$ کے بہت قریب ہو گا۔

نقطہ (x_1, y_1) اور ڈھلوان $f(x_1, y_1)$ لیتے ہوئے ہم دوسرا قدم لیتے ہیں۔ ہم $x_2 = x_1 + \mathrm{d}x$ لے کر

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x$$

سے، منحنی حل $y = y(x)$ کے ساتھ، دوسرا تخمینی نقطہ (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے تیسرے قدم پر ہم نقطہ (x_2, y_2) اور ڈھلوان $f(x_2, y_2)$ سے

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

مثال 7.84: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے لئے ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی تین تخمین y_1 ، y_2 اور y_3 حاصل کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

ابتدا $x_0 = 0$ سے کریں اور $\mathrm{d}x = 0.1$ لیں۔

حل: قدم اول:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= y_0 + (1 + y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \end{aligned}$$

قدم دوم:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= y_1 + (1 + y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \end{aligned}$$

قدم سوم:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= y_2 + (1 + y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662 \end{aligned}$$

□

ترکیب یولر

ترکیب یولر سے ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

کے حل کی تخمینی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم غیر تابع متغیر کے منتخب کردہ قیمتوں کے بیچ یکساں فاصلہ رکھیں اور n عدد ایسے نقطے منتخب کریں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \mathrm{d}x \\ x_2 &= x_1 + \mathrm{d}x \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7.68}$$

اس کے بعد ہم متواتر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7.69}$$

ہم قدموں کی تعداد n جتنی چاہیں رکھ سکتے ہیں، البتہ، n کو بہت بڑا رکھنے سے نتائج میں خلل جمع ہو گا۔

مثال 7.85: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے وقفہ $0 \le x \le 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

$x_0 = 0$ سے شروع کریں اور $\mathrm{d}x = 0.1$ لیں۔

حل: اس مسئلے کا بالکل درست تحلیلی حل $y = 2e^x - 1$ ہے۔ جدول 7.13 میں، مساوات 7.68 اور مساوات 7.69 استعمال کرتے ہوئے، ترکیب یولر سے حاصل 4 اعشاریہ درست تخمینی نتائج کا تحلیلی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ دس قدم بعد $x = 1$ تک پہنچ کر ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل میں 5.6 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال 7.86:

□

جدول 7.13: تحلیلی حل اور ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل کا موازنہ (مثال 7.85)

$y_{\text{تحلیلی}} - y_{\text{تخمینی}} = \text{خلل}$	$y_{\text{تحلیلی}}$	$y_{\text{تخمینی}}$	x
0	1	1	0
0.0103	1.2103	1.2	0.1
0.0228	1.4428	1.42	0.2
0.0377	1.6997	1.662	0.3
0.0554	1.9836	1.9282	0.4
0.0764	2.2974	2.2210	0.5
0.1011	2.6442	2.5431	0.6
0.1301	3.0275	2.8974	0.7
0.1639	3.4511	3.2872	0.8
0.2033	3.9192	3.7159	0.9
0.2491	4.4366	4.1875	1.0

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم