

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	
463	4.8 ترکیب نیوٹن	
475	تکمل	5
475	5.1 غیر قطعی کمالات	
487	5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	
503	5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	
507	5.4 متناہی مجموعہ سے اندازہ	
509	ضمیمہ دوم	۱



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 5

# تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

### 5.1 غیر قطعی کمالات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق  $f(x)$  سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق  $f$  ہے۔ ان تفاعل کو  $f$  کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو  $f$  کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔



## الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمیل

تعریف: تفاعل  $f(x)$  کا الٹ تفرق تب  $F(x)$  ہو گا جب  $f$  کے دائرہ کار میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

$f$  کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کا غیر قطعی تکمیل<sup>1</sup> ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x) dx$$

علامت  $\int$  کو علامت تکمیل کہتے ہیں۔ تفاعل  $f$  کو متکمل<sup>2</sup> اور  $x$  کو تکمیل کا متغیر<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل  $f$  کے حاصل کردہ الٹ تفرق  $F$  اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکمیلی علامت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$(5.1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

مستقل  $C$  کو تکمیل کا مستقل<sup>4</sup> یا اختیاری مستقل<sup>5</sup> کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " $x$  کے لحاظ سے تفاعل  $f$  کا غیر قطعی تکمیل  $F(x) + C$  ہے۔"  $F(x) + C$  کے حصول کو  $f$  کے تکمیل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1:  $\int 2x dx$  تلاش کریں۔  
حل:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$2x$  کا الٹ تفرق  $x^2$  ہے اور  $C$  تکمیل کا مستقل ہے۔ کلیہ  $x^2 + C$  تفاعل  $2x$  کے تمام تفرقات دیتا ہے۔ یوں  $x^2 + 1$  ،  $x^2 - \pi$  اور  $x^2 + \sqrt{2}$  تفاعل  $2x$  کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔ جدول 5.1 میں غیر قطعی کمالات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

indefinite integral<sup>1</sup>  
integrand<sup>2</sup>  
variable of integration<sup>3</sup>  
constant of integration<sup>4</sup>  
arbitrary constant<sup>5</sup>

جدول 5.1: مکمل کے کلیات

تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے	غیر قطعی مکمل
$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$	1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, n \text{ نا طق}$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = \int 1 dx = x + C$ (خصوصی صورت)
$\frac{d}{dx} \left( -\frac{\cos kx}{k} \right) = \sin kx$	2. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin kx}{k} \right) = \cos kx$	3. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	4. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx} (-\cot x) = \csc^2 x$	5. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	6. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx} (-\csc x) = \csc x \cot x$	7. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں  $n = 5$  لیتے ہوئے:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں  $n = -\frac{1}{2}$  لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں  $k = 2$  لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں  $k = \frac{1}{2}$  لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمیل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق مکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{d}{dx}(x \sin x + \cos x + C) = x \cos x + \sin x - \sin x + 0 = x \cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمیل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی کمالات کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ:	$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
( $k$ کی قیمت $x$ کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	
2. منفی کے لئے قاعدہ:	$\int -f(x) dx = - \int f(x) dx$
(قاعدہ 1 میں $k = -1$ لیا گیا ہے۔)	
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x) \mp g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

ا. ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب  $kf$  کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ  $f$  کے الٹ تفرق ضرب  $k$  کے برابر ہو۔

ب. بالخصوص ایک تفاعل اس صورت  $-f$  کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ  $f$  کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔

ج. ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق  $f \mp g$  کا الٹ تفرق ہوگا جب یہ  $f$  کے الٹ تفرق اور  $g$  کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکلی علامت میں لکھنے سے غیر قطعی کمالات کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: مکمل کا مستقل

جدول 5.2، قاعدہ 1	$\int 5 \sec x \tan x dx = 5 \int \sec x \tan x dx$
جدول 5.1، کلیہ 6	$= 5(\sec x + C)$
غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت	$= 5 \sec x + 5C$
مستقل $5C$ کو مستقل $C'$ لکھا گیا ہے	$= 5 \sec x + C'$
$C'$ ایک مستقل ہے جس کو ہم اب $C$ سے ظاہر کرتے ہیں	$= 5 \sec x + C$

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل  $C'$  کو بغیر علامت (!) لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, dx = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا مکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ مکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل مکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو مکمل۔

درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx$$

اگر ہم دیکھ کر بتا سکیں کہ  $x^2 - 2x + 5$  کا الٹ تفرق  $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$  ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو مکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو  $C$  لکھا جاسکتا ہے یعنی  $C_1 + C_2 + C_3 = C$  جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو مکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے  $C$  لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل  $C$  لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$  اور  $\cos^2 x$  کے عملیات

بعض اوقات جن عملیات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکنیکی تماشل کی مدد سے ان عملیات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔  $\sin^2 x$  اور  $\cos^2 x$  کے عمل عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماشل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

□

## سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 1: 18 سوال میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 1: (ا)  $2x$ ، (ب)  $x^2$ ، (ج)  $x^2 - 2x + 1$   
جواب: (ا)  $x^2$ ، (ب)  $\frac{x^3}{3}$ ، (ج)  $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

سوال 2:  $x^7 - 6x + 8$  (ج)،  $x^7$  (ب)،  $6x$  (ا)

سوال 3:  $x^{-4} + 2x + 3$  (ج)،  $x^{-4}$  (ب)،  $-3x^{-4}$  (ا)  
جواب:  $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$  (ج)،  $-\frac{1}{3}x^{-3}$  (ب)،  $x^{-3}$  (ا)

سوال 4:  $-x^{-3} + x - 1$  (ج)،  $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$  (ب)،  $2x^{-3}$  (ا)

سوال 5:  $2 - \frac{5}{x^2}$  (ج)،  $\frac{5}{x^2}$  (ب)،  $\frac{1}{x^2}$  (ا)  
جواب:  $2x + \frac{5}{x}$  (ج)،  $-\frac{5}{x}$  (ب)،  $-\frac{1}{x}$  (ا)

سوال 6:  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  (ج)،  $\frac{1}{2x^3}$  (ب)،  $-\frac{2}{x^3}$  (ا)

سوال 7:  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  (ج)،  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  (ب)،  $\frac{3}{2}\sqrt{x}$  (ا)  
جواب:  $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$  (ج)،  $\sqrt{x}$  (ب)،  $\sqrt{x^3}$  (ا)

سوال 8:  $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  (ج)،  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$  (ب)،  $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$  (ا)

سوال 9:  $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$  (ج)،  $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  (ب)،  $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  (ا)  
جواب:  $x^{-1/3}$  (ج)،  $x^{1/3}$  (ب)،  $x^{2/3}$  (ا)

سوال 10:  $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$  (ج)،  $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$  (ب)،  $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$  (ا)

سوال 11:  $\sin \pi x - 3 \sin 3x$  (ج)،  $3 \sin x$  (ب)،  $-\pi \sin \pi x$  (ا)  
جواب:  $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + \cos(3x)$  (ج)،  $-3 \cos x$  (ب)،  $\cos(\pi x)$  (ا)

سوال 12:  $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$  (ج)،  $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$  (ب)،  $\pi \cos \pi x$  (ا)

سوال 13:  $-\sec^2 \frac{3x}{2}$  (ج)،  $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$  (ب)،  $\sec^2 x$  (ا)  
جواب:  $-\frac{2}{3} \tan(\frac{3x}{2})$  (ج)،  $2 \tan(\frac{x}{3})$  (ب)،  $\tan x$  (ا)

سوال 14:  $1 - 8 \csc^2 2x$  (ج)،  $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$  (ب)،  $\csc^2 x$  (ا)

سوال 15:  $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$  (ج)،  $-\csc 5x \cot 5x$  (ب)،  $\csc x \cot x$  (ا)  
جواب:  $2 \csc(\frac{\pi x}{2})$  (ج)،  $\frac{1}{5} \csc(5x)$  (ب)،  $-\csc x$  (ا)

سوال 16:  $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$  (ج)،  $4 \sec 3x \tan 3x$  (ب)،  $\sec x \tan x$  (ا)

سوال 17:  $(\sin x - \cos x)^2$   
جواب:  $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 18:  $(1 + 2 \cos x)^2$

تکمل کا حصول  
سوال 19 تا سوال 58 میں مکمل حاصل کریں۔ مکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 19:  $\int (x + 1) dx$   
جواب:  $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 20:  $\int (5 - 6x) dx$

سوال 21:  $\int (3t^2 + \frac{t}{2}) dt$   
جواب:  $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 22:  $(\frac{t^2}{2} + 4t^3) dt$

سوال 23:  $(2x^3 - 5x + 7) dx$   
جواب:  $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 24:  $\int (1 - x^2 - 3x^5) dx$

سوال 25:  $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}) dx$   
جواب:  $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 26:  $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x) dx$

سوال 27:  $\int x^{-\frac{1}{3}} dx$   
جواب:  $\frac{3}{2} x^{2/3} + C$

سوال 28:  $\int x^{-\frac{5}{4}} dx$

سوال 29:  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$   
جواب:  $\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{3}{4} x^{4/3} + C$



سوال 30:  $\int \left( \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

سوال 31:  $\int \left( 8y - \frac{2}{y^{1/4}} \right) dy$   
جواب:  $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

سوال 32:  $\int \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}} \right) dy$

سوال 33:  $\int 2x(1 - x^{-3}) dx$   
جواب:  $x^2 + \frac{2}{x} + C$

سوال 34:  $\int x^{-3}(x + 1) dx$

سوال 35:  $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$   
جواب:  $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

سوال 36:  $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt$

سوال 37:  $\int (-2 \cos t) dt$   
جواب:  $-2 \sin t + C$

سوال 38:  $\int (-5 \sin t) dt$

سوال 39:  $7 \sin \frac{\theta}{3} d\theta$   
جواب:  $-21 \cos \frac{\theta}{3} + C$

سوال 40:  $\int 3 \cos 5\theta d\theta$

سوال 41:  $\int (-3 \csc^2 x) dx$   
جواب:  $3 \cot x + C$

سوال 42:  $\int \left( -\frac{\sec^2 x}{3} \right) dx$

سوال 43:  $\int \frac{\csc \theta \cot \theta}{2} d\theta$   
جواب:  $-\frac{1}{2} \csc \theta + C$

سوال 44:  $\frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta d\theta$

سوال 45:  $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x) dx$   
 جواب:  $4 \sec x - 2 \tan x + C$

سوال 46:  $\int \frac{1}{2} (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx$

سوال 47:  $\int (\sin 2x - \csc^2 x) dx$   
 جواب:  $-\frac{1}{2} \cos 2x + \cot x + C$

سوال 48:  $\int (2 \cos 2x - 3 \sin 3x) dx$

سوال 49:  $\int 4 \sin^2 y dy$   
 جواب:  $2y - \sin 2y + C$

سوال 50:  $\int \frac{\cos^2 y}{7} dy$

سوال 51:  $\int \frac{1+\cos 4t}{2} dt$   
 جواب:  $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 52:  $\int \frac{1-\cos 6t}{2} dt$

سوال 53:  $\int (1 + \tan^2 \theta) d\theta$  اشارہ۔  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$   
 جواب:  $\tan \theta + C$

سوال 54:  $\int (2 + \tan^2 \theta) d\theta$

سوال 55:  $\int \cot^2 x dx$   
 جواب:  $-\cot x - x + C$

سوال 56:  $\int (1 - \cot^2 x) dx$

سوال 57:  $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta$   
 جواب:  $-\cos \theta + \theta + C$

سوال 58:  $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta$

تکمیلی کلیہ کی تصدیق  
 سوال 59 تا سوال 64 میں دیے گئے کلیات کی تصدیق بذریعہ تفریق کریں۔ ان کلیات کا حصول جلد دکھایا جائے گا۔

$$\int (7x - 2)^3 dx = \frac{(7x-2)^4}{28} + C \quad \text{سوال 59:}$$

$$\int (3x + 5)^{-2} dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C \quad \text{سوال 60:}$$

$$\int \sec^2(5x - 1) dx = \frac{1}{5} \tan(5x - 1) + C \quad \text{سوال 61:}$$

$$\int \csc^2\left(\frac{x-1}{3}\right) dx = -3 \cot\left(\frac{x-1}{3}\right) + C \quad \text{سوال 62:}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C \quad \text{سوال 63:}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + C \quad \text{سوال 64:}$$

سوال 65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C \quad \text{ج۔}$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{\sec^3 \theta}{3} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec^2 \theta \quad \text{ج۔}$$

سوال 67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int (2x + 1)^2 dx = \frac{(2x + 1)^3}{3} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int 3(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int 6(2x + 1)^2 dx = (2x + 1)^3 + C \quad \text{ج۔}$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ا۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \sqrt{x^2+x} + C \quad \text{ب۔}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3 + C \quad \text{ج۔}$$

نظریہ اور مثالیں  
سوال 69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

$$\int f(x) dx \quad \text{ا۔} \quad \int [f(x) + g(x)] dx \quad \text{و۔}$$

$$\int g(x) dx \quad \text{ب۔} \quad \int [f(x) - g(x)] dx \quad \text{د۔}$$

$$\int [-f(x)] dx \quad \text{ج۔} \quad \int [x + f(x)] dx \quad \text{ز۔}$$

$$\int [-g(x)] dx \quad \text{د۔} \quad \int [g(x) - 4] dx \quad \text{ح۔}$$

جواب: (ا)  $-\sqrt{x} + C$ ، (ب)  $x + C$ ، (ج)  $\sqrt{x} + C$ ، (د)  $-x + C$ ، (و)  $x - \sqrt{x} + C$ ، (ز)  $-x - \sqrt{x} + C$ ، (ح)  $\frac{x^2}{2} - \sqrt{x} + C$ ، (د)  $-3x + C$

سوال 70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{d}{dx}e^x, \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x \sin x)$$

## 5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی مکمل میں سے مخصوص الٹ تفرق منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لئے یہ عمل ضروری ہے۔

## ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل صورت کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو تفرقی مساوات<sup>6</sup> کہلاتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

اس مساوات میں  $x$  آزاد متغیر جبکہ  $y$  تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم  $x$  کا ایسا تفاعل  $y$  جاننا چاہتے ہیں جس کی نقطہ  $x_0$  پر قیمت  $y_0$  ہو۔ اس کو ابتدائی قیمت مسئلہ<sup>7</sup> کہتے ہیں۔ جیسا مثال 5.7 میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدموں میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال 5.7: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول  
 سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہوگی۔

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 \text{ ms}^{-2}$$

اگر جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جائے تب  $t$  سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہوگی؟

حل: ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{ll} \frac{dv}{dt} = 9.8 & \text{تفرقی مساوات} \\ v(0) = 0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{array}$$

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ  $t = 0$  پر ساکن جسم کی سمتی رفتار  $v = 0$  ہے جس کو مختصراً  $v(0) = 0$  لکھا جاتا ہے۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا  $t$  کے لحاظ سے مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{array}{ll} \frac{dv}{dt} = 9.8 & \text{تفرقی مساوات} \\ \int \frac{dv}{dt} dt = \int 9.8 dt & t \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ v + C_1 = 9.8t + C_2 & \text{مکمل کا نتیجہ} \\ v = 9.8t + C & \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں} \end{array}$$

<sup>6</sup> differential equation  
<sup>7</sup> initial value problem

آخری مساوات کے تحت لمحہ  $t$  پر جسم کی رفتار  $9.8t + C$  ہو گی جہاں  $C$  نا معلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$v = 9.8t + C$$

$$0 = 9.8(0) + C$$

$$C = 0$$

$$v(0) = 0$$

یوں لمحہ  $t$  پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t \text{ m s}^{-2}$$

□

تفاعل  $f(x)$  کا غیر قطعی تکمل  $F(x) + C$  تفرقی مساوات  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  کا عمومی حل<sup>8</sup>  $y = F(x) + C$  دیتا ہے۔ عمومی حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل<sup>9</sup> تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات  $y(x_0) = y_0$  کو مطمئن کرتا ہے۔ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ  $x_0$  پر  $y$  کی قیمت  $y_0$  ہے جس کو مختصراً  $y(x_0) = y_0$  لکھا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک نقطہ اور ڈھلوان سے منحنی کا حصول

ایک منحنی جو نقطہ  $(1, -1)$  سے گزرتی ہے کا نقطہ  $(x, y)$  پر ڈھلوان  $3x^2$  ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

حل: ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$y(1) = -1$$

منحنی کی ڈھلوان

ابتدائی معلومات

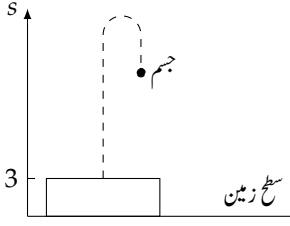
ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

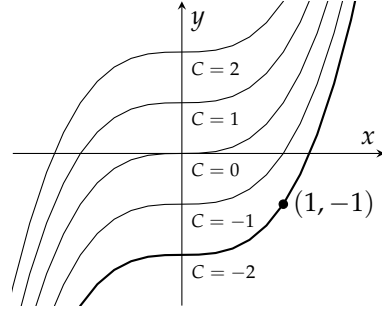
$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 3x^2 dx$$

$$y = x^3 + C$$

تکمل کے مستقلوں کی یکجا کیا گیا ہے



شکل 5.2: تصویر کشی برائے مثال 5.9



شکل 5.1: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال 5.8

عمومی حل  $y = x^3 + C$  ہے جس کو  $C$  کی مختلف قیمتوں کے لئے شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پر کر کے نامعلوم مستقل  $C$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \\ C &= -2 \end{aligned}$$

عمومی حل میں  $C$  پر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل 5.1 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

□

اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ مکمل لینا ہو گا۔ پہلا مکمل

$$\int \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{ds}{dt} + C$$

تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔ دوسرا مکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال 5.9: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول  
زمین سے 3 m بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ  $t = 0$  پر سیدھا اوپر  $160 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ  $9.8 \text{ ms}^{-2}$  کی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو بطور  $t$  کا تفاعل تلاش کریں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہو گی؟

حل: اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل 5.2) جہاں لمحہ  $t$  پر زمین سے جسم کی بلندی کو  $s$  سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $s$  متغیر  $t$  کا دوگنا قابل تفرق تفاعل ہے لہذا جسم کی رفتار اور اسراع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

چونکہ ہمارے ریاضی نمونہ میں اسراع گھٹتے ہوئے  $s$  کے رخ عمل کرتی ہے لہذا ہمارا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -9.8 \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = 160, \quad s(0) = 3 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

ہم تفرقی مساوات کو  $t$  کے لحاظ سے مکمل کر کے  $\frac{ds}{dt}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{d^2s}{dt^2} dt = \int (-9.8) dt$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + C_1$$

ہم پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل  $C_1$  تلاش کرتے ہیں۔

$$160 = -9.8(0) + C_1 \quad \frac{ds}{dt}(0) = 160$$

$$C_1 = 160$$

یوں  $\frac{ds}{dt}$  کا کلیہ مکمل ہوتا ہے:

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + 160$$

ہم  $t$  کے لحاظ سے  $\frac{ds}{dt}$  کا مکمل لیتے ہوئے  $s$  تلاش کرتے ہیں۔

$$\int \frac{ds}{dt} dt = \int (-9.8t + 160) dt$$

$$s = -4.9t^2 + 160t + C_2$$

ہم دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے  $C_2$  حاصل کرتے ہیں۔

$$3 = -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$



یوں مخصوص حل  $s$  کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر  $t$  ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لہذا  $t = 3$  پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں  $t = 3$  پر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9 \text{ m}$$

□

یک رتبہ تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال 5.7 اور مثال 5.8 میں دیکھا گیا، جبکہ درجہ رتبہ تفرق تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال 5.9 میں دیکھا گیا۔ اسی طرح تین رتبہ تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہوگی۔ ہر بار الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ابتدائی قیمت درکار ہوگی۔

### منحنی حل کا خاکہ

تفرق مساوات کے حل کی ترسیم کو منحنی حل<sup>10</sup> یا منحنی تکمل<sup>11</sup> کہتے ہیں۔ تفرق مساوات  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$  کے حل  $y = C + x^3$  کو شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم  $f(x)$  کا الٹ تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرق مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

مثال 5.10: درج ذیل تفرق مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

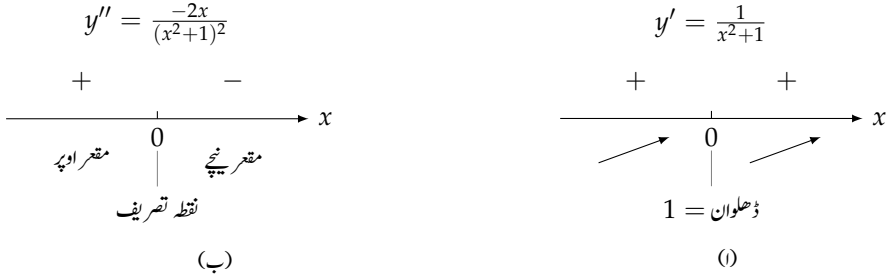
$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

حل: پہلا قدم:  $y'$  اور  $y''$ : منحنی کی عمومی صورت  $y'$  اور  $y''$  پر منحصر ہوتی ہے (حصہ 4.4)۔ ہم  $y' = \frac{1}{x^2 + 1}$  پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق  $y''$  دیتا ہے:

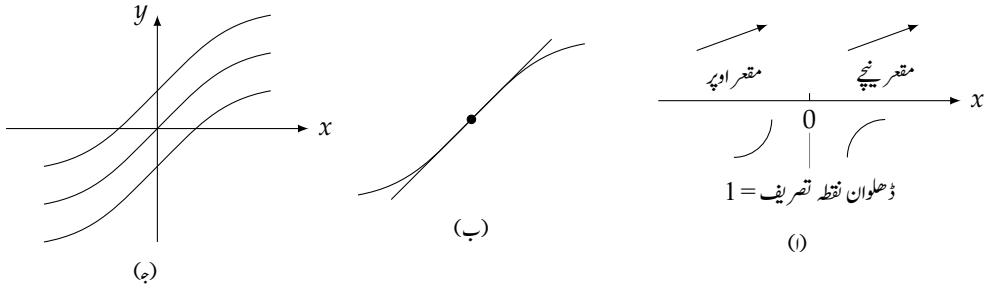
$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

دوسرا قدم: اتار چڑھاؤ۔  $y'$  کا دائرہ کار  $(-\infty, \infty)$  ہے۔ نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا ہے لہذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔ چونکہ  $y' > 0$  ہے لہذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ  $x = 0$  پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے (شکل 5.3)۔

solution curve<sup>10</sup>  
integral curve<sup>11</sup>



شکل 5.3: منحنی کی اتار چڑھاؤ اور مقعر (مثال 5.10)



شکل 5.4: منحنی کی عمومی صورت (مثال 5.10)

تیسرا قدم: مقعر۔ دو گنا تفرق  $x = 0$  پر  $(+)$  سے تبدیل ہو کر  $(-)$  ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا  $x = 0$  پر نقطہ تصریف پایا جائے گا (شکل 5.3-ب)۔

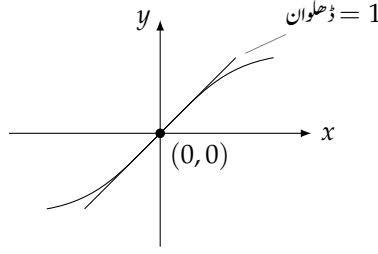
چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کی جھکاؤ شکل 5.4-ا اور اس کی عمومی صورت شکل 5.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔

پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

یوں  $x \rightarrow \pm\infty$  پر منحنی افقی ہو گی۔

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ  $x = 0$  پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے لہذا  $y$  محور کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل 5.4-ج۔ □



شکل 5.5: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال 5.11)

مثال 5.11: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2 + 1} & \text{تفرقی مساوات} \\ y(0) &= 0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

حل: ہم نے مثال 5.10 میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل 5.4-ج میں دکھایا گیا ہے۔ ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ  $(0, 0)$  سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کی درکار مخصوص حل ہے جس کو شکل 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ □

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  میں تفاعل  $f(x)$  کے الٹ تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے، جس پر آگے ایک باب میں غور کیا جائے گا، جبکہ تفاعل  $g(x) = \sqrt{1+x^4}$  کا الٹ تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}$  کو ہم ترتیبی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

### ریاضیاتی نمونہ کشی

ریاضیاتی نمونہ کشی عموماً چار اقدام پر مبنی ہوتا ہے۔ ہم پہلے حقیقی دنیا میں کسی عمل (مثلاً گیند کا گرنا یا کھانسی کے دوران سانس کی نالی کا سکڑنا) کا مشاہدہ کرتے ہوئے اس کے اہم خصوصیات کو ظاہر کرنے والے ریاضی متغیرات کا نظام بناتے ہیں اور معلومات کا ریاضی استعارہ کرتے ہیں۔ اس کے بعد متغیرات کے تعلقات کو (عموماً) موجودہ ریاضی کی زبان میں لکھتے ہوئے نتائج اخذ کرتے ہیں۔ اس کے بعد ریاضیاتی حاصل نتائج کو زیر غور نظام پر لاگو کرتے ہیں۔ آخر میں ہم ریاضی نمونہ سے حاصل نتائج کا مشاہدے کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ پیش گوئی کر سکتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ دیگر نظام پر قابل اطلاق ہو گا۔ بہترین نمونہ وہ ہے جس کے نتائج مشاہدے کے عین مطابق ہوں، جو پیش گوئی کر سکے، جس کا استعمال وسیع اور آسان ہو۔

گیند کے گرنے کو مثال بناتے ہوئے مذکورہ بالا اقدام واضح کرتے ہیں۔ پہلے قدم پر ہم درج ذیل متغیرات اور مشاہدے اکٹھے کرتے ہیں۔  
متغیرات:

فاصلہ:  $s$ وقت:  $t$ 

ابتدائی قیمتیں:

لحظہ  $t = 0$  پر  $s = 0$  اور  $v = 0$  ہیں۔فرض کیا گیا تعلق:  $s = 4.9t^2$ 

دوسرے قدم پر احصاء استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ریاضی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

$$v = 9.8t$$

$$a = 9.8$$

تیسرے قدم پر نتائج کی تشریح کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے لحاظ سے مفہوم بیان کرتے ہیں۔ یوں لحظہ  $t$  پر رفتار  $9.8t$  میٹر فی سیکنڈ ہوگا جبکہ کسی بھی گرتے ہوئے جسم کی اسراع  $9.8 \text{ m s}^{-2}$  ہوگی۔

آخری قدم پر ہم آزادانہ گرنے والے جسم کی لحاظی رفتار اور اسراع ناپ کر تصدیق کرتے ہیں کہ ریاضی نمونہ درست نتائج کی پیش گوئی کر سکتا ہے۔

### نقل اترنا بذریعہ کمپیوٹر

کسی بھی نظام کو سمجھنے کی خاطر ہم مختلف حالات میں اس کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض پیچیدہ نظام کا مشاہدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ (مثلاً جب مشاہدہ بہت مہنگا یا خطرناک ہو یا اس کے لئے بہت وقت درکار ہو۔) ایٹم بم یا سیلابی تباہی یا کھنشاں کا مشاہدہ اس زمرے میں آتے ہیں۔ ان نظام پر غور کرنے کے لئے ہم ریاضی نمونہ کا سہارا لیتے ہیں۔ جہاں نظام کا حساب پیچیدہ یا بہت لمبا ہو وہاں کمپیوٹر کا استعمال سودمند ثابت ہوتا ہے۔ بلند عمارت، دریا پر پل یا برقیاتی اودار بنانے سے پہلے ان کے نمونوں پر کمپیوٹر کی مدد سے غور کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ ہم کمپیوٹر پر عمل کا نقل اتارتے<sup>12</sup> ہیں۔

### سوالات

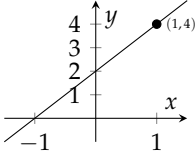
ابتدائی قیمت مسائل

سوال 1: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.6 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

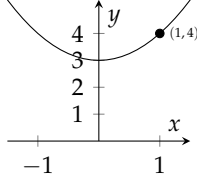
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y(1) = 4$$

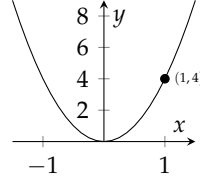
جواب: (ب)



(ج)

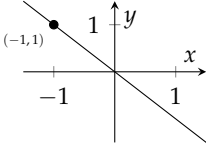


(ب)

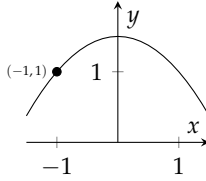


(ا)

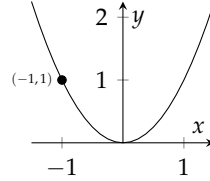
شکل 5.6: تریسہات برائے سوال 1



(ج)



(ب)



(ا)

شکل 5.7: تریسہات برائے سوال 2

سوال 2: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.7 میں کون سی تریسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y(-1) = 1$$

جواب: (ب)

سوال 3 تا سوال 22 میں دیے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 3:  $\frac{dy}{dx} = 2x - 7$ ,  $y(2) = 0$

جواب:  $y = x^2 - 7x + 10$

سوال 4:  $\frac{dy}{dx} = 10 - x$ ,  $y(0) = -1$

سوال 5:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x, \quad x > 0, \quad y(2) = 1$   
 جواب:  $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

سوال 6:  $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

سوال 7:  $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$   
 جواب:  $y = 9x^{1/3} + 4$

سوال 8:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

سوال 9:  $\frac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$   
 جواب:  $s = t + \sin t + 4$

سوال 10:  $\frac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

سوال 11:  $\frac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$   
 جواب:  $r = \cos(\pi\theta) - 1$

سوال 12:  $\frac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

سوال 13:  $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$   
 جواب:  $v = \frac{1}{2} \sec t + \frac{1}{2}$

سوال 14:  $\frac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v(\frac{\pi}{2}) = -7$

سوال 15:  $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x, \quad y'(0) = 4, y(0) = 1$   
 جواب:  $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

سوال 16:  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y'(0) = 2, y(0) = 0$

سوال 17:  $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=1} = 1, r(1) = 1$   
 جواب:  $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

سوال 18:  $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{3t}{8}, \quad \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=4} = 3, s(4) = 4$

سوال 19:  $\frac{d^3 y}{dx^3} = 6, y''(0) = -8, y'(0) = 0, y(0) = 5$   
 جواب:  $y = x^3 - 4x^2 + 5$

سوال 20:  $\frac{d^3 \theta}{dt^3} = 0, \theta''(0) = -2, \theta'(0) = -\frac{1}{2}, \theta(0) = \sqrt{2}$

سوال 21:  $y^{(4)} = -\sin t + \cos t, y'''(0) = 7, y''(0) = y'(0) = -1, y(0) = 0$   
 جواب:  $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

سوال 22:  $y^{(4)} = -\cos x + 8 \sin 2x, y'''(0) = 0, y''(0) = y'(0) = 1, y(0) = 3$

رفتار سے مقام معلوم کرنا  
 سوال 23 تا سوال 26 میں رفتار  $v = \frac{ds}{dt}$  اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ  $t$  پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 23:  $v = 9.8t + 5, s(0) = 10$   
 جواب:  $s = 4.9t^2 + 5t + 10$

سوال 24:  $v = 32t - 2, s(1/2) = 4$

سوال 25:  $v = \sin \pi t, s(0) = 0$   
 جواب:  $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

سوال 26:  $v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, s(\pi^2) = 1$

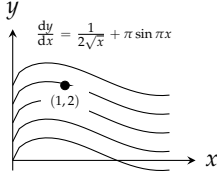
اسراع سے مقام کی تلاش  
 سوال 27 تا سوال 30 میں اسراع  $a = \frac{dv}{dt}$ ، ابتدائی رفتار اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ  $t$  پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 27:  $a = 32, v(0) = 20, s(0) = 5$   
 جواب:  $s = 16t^2 + 20t + 5$

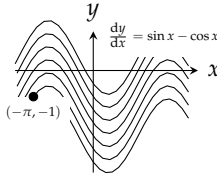
سوال 28:  $a = 9.8, v(0) = -3, s(0) = 0$

سوال 29:  $a = -4 \sin 2t, v(0) = 2, s(0) = -3$   
 جواب:  $s = \sin(2t) - 3$

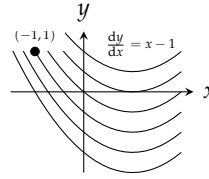
سوال 30:  $a = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{3t}{\pi}, v(0) = 0, s(0) = -1$



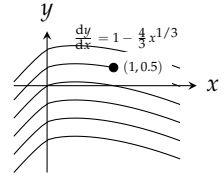
شکل 5.11: منحنیات برائے  
سوال 36



شکل 5.10: منحنیات برائے  
سوال 35



شکل 5.9: منحنیات برائے  
سوال 34



شکل 5.8: منحنیات برائے  
سوال 33

ترسیم کا حصول

سوال 31: ایسی ترسیم  $y = f(x)$  تلاش کریں جو نقطہ  $(9, 4)$  سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان  $3\sqrt{x}$  ہو۔  
جواب:  $y = 2x^{3/2} - 50$

سوال 32: منحنی  $y = f(x)$  نقطہ  $(0, 1)$  سے گزرتی ہے جہاں اس کا مماس افقی ہے۔ یہ ترسیم  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$  کو مطمئن کرتی ہے۔ اس ترسیم کو تلاش کریں۔

منحنیات حل (تکملی منحنیات)  
سوال 33 تا سوال 36 میں منحنی حل دکھائے گئے ہیں۔ دیے نقطے پر منحنی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 33: ترسیمات کو شکل 33 میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب:  $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

سوال 34: ترسیمات کو شکل 34 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 35: ترسیمات کو شکل 35 میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب:  $y = -\sin x - \cos x - 2$

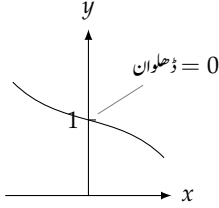
سوال 36: ترسیمات کو شکل 36 میں دکھایا گیا ہے۔

تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچنا مثال 5.10 میں سکھایا گیا۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے سوال 37 تا سوال 40 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کے خاکے بنائیں۔

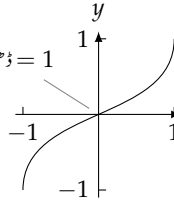
سوال 37:  $\frac{dy}{dx} = 2x$   
جواب: شکل 5.12

سوال 38:  $\frac{dy}{dx} = -2x + 2$

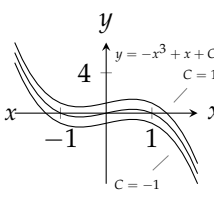




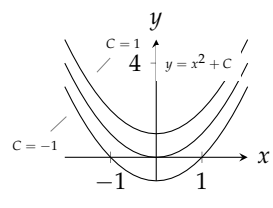
شکل 5.15



شکل 5.14



شکل 5.13



شکل 5.12

سوال 39:  $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$

جواب: شکل 5.13

سوال 40:  $\frac{dy}{dx} = x^2$

سوال 41 تا 44 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ مثال 5.10 اور مثال 5.11 کی طرح بنائیں۔

سوال 41:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad y(0) = 0$

جواب: شکل 5.14

سوال 42:  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}, \quad y(0) = 1$

سوال 43:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

جواب: شکل 5.15

سوال 44:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}, \quad y(0) = 0$

عملی استعمال

سوال 45: چاند پر ثقلی اسراع  $1.6 \text{ m s}^{-2}$  ہے۔ ایک پتھر کو چاند پر گھرے شگاف میں گرایا جاتا ہے۔ اس کی رفتار اس لمحے پر کیا ہوگی

جب یہ 30 سینڈ بعد شگاف کی تہہ تک پہنچتا ہے؟

جواب:  $48 \text{ m s}^{-1}$

سوال 46: ایک راکٹ سطح زمین سے سیدھا اوپر رخ  $20 \text{ m s}^{-2}$  کی اسراع سے اڑتا ہے۔ ایک منٹ بعد اس کی رفتار کیا ہوگی؟

سوال 47: 10 m بلندی سے پانی میں کھودا جاتا ہے۔ پانی میں داخل ہوتے ہوئے لمحے پر آپ کی رفتار کیا ہوگی؟  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$

لیں۔

جواب:  $14 \text{ m s}^{-1}$

سوال 48: مریخ پر سطح کے نزدیک ثقلی اسراع  $3.72 \text{ m s}^{-2}$  ہے۔ ایک راکٹ جس کو مریخ کی سطح سے  $93 \text{ m s}^{-1}$  کی ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جائے کس بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 49: آپ اسلام آباد تا لاہور موٹروے پر  $100 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار سے صفر کر رہے ہیں جب آپ کو سامنے ایک حادثہ نظر آتا ہے۔ آپ یکدم گاڑی کو روکنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گاڑی  $75 \text{ m}$  میں مکمل رک جاتی ہے۔ رکنے کی اسراع تلاش کریں۔ اس کا جواب حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔  
پہلا قدم: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= -k & k \text{ مستقل} \\ \frac{ds}{dt}(0) &= 100, \quad s(0) = 0 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

دوسرا قدم:  $t$  کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر  $\frac{ds}{dt} = 0$  حاصل ہو گا۔ (آپ کے جواب میں  $k$  پایا جائے گا)۔  
تیسرا قدم:  $k$  کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر  $s = 75$  حاصل ہوتا ہے۔  
جواب:  $t = \frac{100}{k}$ ,  $k = \frac{200}{3} \text{ km h}^{-2}$

سوال 50: موٹر سائیکل پر با حفاظت صفر کے لئے لازمی ہے کہ آپ  $50 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار سے  $14 \text{ m}$  میں رک سکیں۔ ایسا کرنے کے لئے کتنی اسراع درکار ہو گی؟

سوال 51: ایک ذرہ محوری کلیپر پر  $\frac{d^2 s}{dt^2} = 15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$  اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ لمحہ  $t = 1$  پر  $s = 0$  اور  $\frac{ds}{dt} = 4$  ہیں۔ لمحہ  $t$  پر  $v = \frac{ds}{dt}$  اور  $s$  تلاش کریں۔  
جواب:  $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ ,  $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

سوال 52: چاند پر اپلو-15 پرواز کے داؤد سکاٹ نے پر اور ہتھوڑے کو تقریباً  $1.25 \text{ m}$  بلندی سے ایک ساتھ گرنے دیا۔ چاند پر ہوا کی غیر موجودگی کی بنا دونوں کے گرنے کی رفتار یکساں تھی۔ بتائیں گرنے کا دورانیہ کتنا تھا؟ گرنے کا دورانیہ دریافت کرنے کے لئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے تفاعل  $s$  تلاش کریں جس کا آزاد متغیر  $t$  ہو۔ اس کے بعد  $t$  کی وہ قیمت تلاش کریں جو  $s = 0$  دے۔

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= -1.6 \text{ m s}^{-2} & \text{تفرقی مساوات} \\ \frac{ds}{dt}(0) &= 0, \quad s(0) = 1.25 & \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

سوال 53: محدودی کلیپر پر مستقل اسراع  $a$  سے حرکت کرتے ہوئے جسم کے مقام  $s$  کی معیاری مساوات درج ذیل ہے

$$(5.2) \quad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

جہاں لمحہ  $t = 0$  پر جسم کی رفتار  $v_0$  اور مقام  $s_0$  ہیں۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے اس مساوات کو اخذ کریں۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a \quad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = v_0, \quad s(0) = s_0 \quad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 54: سیارہ کی سطح کے نزدیک آزادی کے ساتھ گرتے ہوئے جسم کا مقام درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$(5.3) \quad s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

جہاں ثقلی اسراع  $a$ ، سطح سیارہ سے جسم کی ابتدائی بلندی  $s_0$  اور جسم کی ابتدائی رفتار  $v_0$  ہے۔ چونکہ اسراع نیچے رخ (بلندی  $s$  کے الٹ) ہے لہذا مساوات میں منفی کی علامت پائی جاتی ہے۔ اگر لمحہ  $t = 0$  پر جسم کی رفتار اوپر رخ ہو تب  $v_0$  مثبت ہو گا اور اگر اس کا رخ نیچے کو ہو تب  $v_0$  منفی ہو گا۔

مساوات 5.2 استعمال کیے بغیر آپ مساوات 5.3 ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ ابتدائی قیمت مسئلہ کیا ہو گا؟ اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.3 کو حاصل کریں۔

نظریہ اور مثالیں  
سوال 55: رفتار کی الٹ تفرق سے ہٹاؤ کا تعین۔

ا. فرض کریں محور  $s$  پر ایک جسم کی رفتار  $v = 9.8t - 3$  ہے۔  $\frac{ds}{dt} = v$

1. اگر  $t = 0$  پر  $s = 5$  ہو تب  $t = 1$  تا  $t = 3$  جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

2. اگر  $t = 0$  پر  $s = -2$  ہو تب  $t = 1$  تا  $t = 3$  جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

3. اگر  $t = 0$  پر  $s = s_0$  ہو تب  $t = 1$  تا  $t = 3$  جسم کا ہٹاؤ تلاش کریں۔

ب. فرض کریں محدودی لکیر پر ایک جسم کا مقام  $s$  متغیر  $t$  کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کیا یہ درست ہے کہ  $\frac{ds}{dt}$  کا الٹ تفرق جانتے ہوئے دورانیہ  $t = a$  تا  $t = b$  کے لئے آپ جسم کا ہٹاؤ جان سکتے ہیں اگرچہ ان دونوں لمحات پر آپ کو جسم کا ہٹاؤ معلوم نہیں ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) 33.2 m ، 33.2 m ، 33.2 m ، (ب) درست

سوال 56: یکسانی حل

اگر قابل تفرق تفاعل  $y = F(x)$  اور  $y = G(x)$  وقفہ  $I$  پر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل ہوں تب کیا  $I$  میں ہر  $x$  کے لئے  $F(x) = G(x)$  ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

## 5.3 مکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق

بعض اوقات انجناے مکمل میں متغیرات کی تبدیلی سے جانا پہچانا مکمل حاصل ہوتا ہے۔ مکمل کے اس طریقہ کو ترکیب بدل کہتے ہیں۔ مکمل کے حصول کا یہ ایک اہم ترین طریقہ ہے۔ آئیں اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

عمومی طاقی قاعدہ کی مکملی صورت

جب  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تقابل ہو اور  $n$  ناطق عدد ہو جس کی قیمت  $-1$  نہ ہو تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u^{n+1}}{n+1} \right) = u^n \frac{du}{dx}$$

مثال 5.12:  $u = x^2 + 2x - 3$  لیتے ہوئے  $du = 2x dx + 2 dx = 2(x+1) dx$  اور  $\frac{1}{2} du = (x+1) dx$  یوں مکمل

$$\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) dx$$

کو ترکیب بدل سے حل کیا جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) dx &= \int u^2 \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^2 du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} u^3 + C \quad u \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ &= \frac{1}{6} (x^2 + 2x - 3)^3 + C \quad u \text{ بدلیں} \end{aligned}$$

□

آخری قدم پر  $u$  کی قیمت واپس پر کی گئی ہے۔

مثال 5.13:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 t \cos t dt &= \int u^4 du & u = \sin t, du = \cos t dt \\ &= \frac{u^5}{5} + C & u \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\ &= \frac{\sin^5 t}{5} + C & u \text{ بدلیں} \end{aligned}$$

□

ترکیب بدل کی کامیابی اس بات پر منحصر ہے کہ ہم ایسا بدل تلاش کر سکیں جو مشکل تکمیل کو جانے پہچانے تکمیل میں تبدیل کرتا ہو۔ بعض اوقات پہلے بدل کے بعد دوسرا اور تیسرا بدل بھی درکار ہوتا ہے یا ہم کوئی دوسرا بدل استعمال کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات کئی مختلف بدل قابل استعمال ہوں گے (اگلا مثال)۔

مثال 5.14: درج ذیل تکمیل حل کریں۔

$$\int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}}$$

حل: ہم مشکل ترین حصے کی سادہ صورت تلاش کرنے کی غرض سے  $u = z^2 + 1$  لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} & u = z^2 + 1, \, du = 2z \, dz \\ &= \int u^{-1/3} \, du \\ &= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\ &= \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\ &= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{3/2} + C & u \text{ کا بدل } z^2 + 1 \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

□

مثال 5.15:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + y^2} \cdot 2y \, dy &= \int u^{1/2} \, du & u = 1 + y^2, \, du = 2y \, dy \\ &= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\ &= \frac{2}{3} (1 + y^2)^{3/2} + C & u \text{ کی جگہ } 1 + y^2 \text{ پر کریں} \end{aligned}$$

□

مثال 5.16:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4t-1} dt &= \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{4} du & u = 4t-1, du = 4 dt, \frac{1}{4} du = dt \\
&= \frac{1}{4} \int u^{1/2} du \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C & u \text{ کے لحاظ سے مکمل} \\
&= \frac{1}{6} u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{6} (4t-1)^{3/2} + C & u \text{ کی جگہ } 4t-1 \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

تکوینیاتی تفاعل

اگر  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو تب  $\sin u$  بھی  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ زنجیری قاعدہ ہمیں  $\sin u$  کا تفرق دیتا ہے:

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

اسی مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\sin u$  مضرب  $\frac{du}{dx} \cdot \cos u$  کا الٹ تفرق ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\int \left( \cos u \frac{du}{dx} \right) dx = \sin u + C$$

بائیں ہاتھ دونوں  $dx$  کو باضابطہ کاٹ کر درج ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$(5.4) \quad \int \cos u du = \sin u + C$$

مساوات 5.4 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی مکمل کو  $\int \cos u du$  روپ میں لکھ سکیں، ہم  $u$  کے لحاظ سے اس کا مکمل لیتے ہوئے  $\sin u + C$  حاصل کریں گے۔

مثال 5.17:

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta + 5) d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7} du & u = 7\theta + 5, du = 7 d\theta, \frac{1}{7} du = d\theta \\
&= \frac{1}{7} \int \cos u du \\
&= \frac{1}{7} \sin u + C & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\
&= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C & u \text{ کی جگہ } 7\theta + 5 \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

مساوات 5.4 کی جوڑی مساوات درج ذیل ہے جہاں  $u$  قابل تفرق تفاعل ہے۔

$$(5.5) \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

مثال 5.18:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x^3) dx &= \int \sin(x^3) \cdot x^2 dx \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} du & u = x^3, du = 3x^2 dx, \frac{1}{3} du = x^2 dx \\
&= \frac{1}{3} \int \sin u du \\
&= \frac{1}{3} (-\cos u + C') & u \text{ کے لحاظ سے تکمیل} \\
&= -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C & \frac{C'}{3} = C \text{ اور } u = x^3
\end{aligned}$$

□

قابل تفرق تفاعل  $u$  کے لئے زنجیری قاعدہ کی مدد سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

$$(5.6) \quad \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$(5.7) \quad \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$(5.8) \quad \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$(5.9) \quad \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

## 5.4 تنہای مجموعے سے اندازہ لگانا





ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

