

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327 . . . . .	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیت
1344 . . . . .	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424 . . . . .	11.7	تنگی اور کردی محدود
1435 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولا کے حرکت کی نمونہ کشی
1467 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1476 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوکت
1487 . . . . .		جوابات
1489 . . . . .	ا	ضمیمہ اول
1491 . . . . .	ب	ضمیمہ دوم
1493 . . . . .	ج	ضمیمہ تین
1495 . . . . .	د	ضمیمہ چار
1497 . . . . .	ه	ضمیمہ پانچ
1499 . . . . .	و	ضمیمہ چھ
1501 . . . . .	ز	ضمیمہ سات

1503

ح ضمیمہ آٹھ

1505

ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

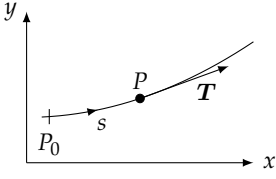
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

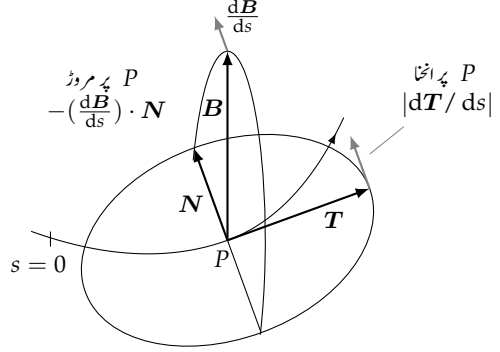
میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 12.17: بڑھتی لمبائی قوس کے رخ چلتے ہوئے اکائی مماسی سمتیہ  $T$  مڑتا ہے۔ نقطہ  $P$  پر  $|dT/ds|$  کی قیمت کو  $P$  پر منحنی کی انحنائیت کہتے ہیں۔



شکل 12.16: ہر متحرک جسم کے ساتھ ایک TNB چھوٹ سفر کرتا ہے جو اس کی راہ کا کردار بیان کرتا ہے۔

## 12.4 انحنائیت، مروڑ اور TNB چھوٹ

اس حصہ میں ہم تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات پر مبنی ایسا چھوٹ متعارف کرتے ہیں جو فضا میں منحنی پر جسم کے ساتھ ساتھ چلتا ہو (شکل 12.16)۔ اس چھوٹ کے تین سمتیات ہیں۔ پہلا اکائی مماسی سمتیہ  $T$  ہے۔ دوسرا  $N$  ہے جو  $\frac{dT}{ds}$  کے رخ اکائی سمتیہ ہے۔ تیسرا اکائی سمتیہ  $B = T \times N$  ہے۔ یہ سمتیات اور ان کے تفرقات اگر معلوم ہوں، فضا میں سواری کی سمت بندی اور اس کی راہ میں موڑ اور بل کے بارے میں مفید معلومات مہیا کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر  $\left| \frac{dR}{ds} \right|$  ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ کتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہے؛ اسی لئے اس کو سواری کی راہ کی انحنائیت<sup>16</sup> کہتے ہیں۔ عدد  $(dB/ds) \cdot N$  ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ مستوی حرکت سے کتنی باہر مڑتی ہے یا بل کھاتی ہے؛ اس کو سواری کی راہ کی مروڑ<sup>17</sup> کہتے ہیں۔ دوبارہ شکل 12.16 پر نظر ڈالیں۔ اگر قوسی راہ پر ایک ریل گاڑی،  $P$ ، اوپر چڑھ رہی ہو تب فی اکائی فاصلہ اس کی سر بتی جتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہو، یہ اس کی انحنائیت ہوگی۔ سمتیات  $T$  اور  $N$  کے مستوی سے ریل گاڑی کا انجن جس شرح سے باہر نکلتا ہو، یہ اس کی مروڑ ہوگی۔

### مستوی منحنی کی انحنائیت

جیسے جیسے ایک ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے، منحنی کے مڑنے سے  $T = \frac{dr}{ds}$  بھی مڑتا ہے۔ چونکہ  $T$  اکائی سمتیہ ہے لہذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی اور راہ پر چلتے ہوئے صرف اس کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔ منحنی پر چلتے ہوئے اکائی فاصلہ پر  $T$  کی شرح تبدیلی کو انحنائیت کہتے ہیں (شکل 12.17)۔ انحنائیت کو روایتی طور پر یونانی حرف  $\kappa$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تعریف: ایک ہموار منحنی جس کا اکائی مماسی سمتیہ  $T$  ہو، کا تقابل انحنا درج ذیل ہو گا۔

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

□

اگر  $|dT/ds|$  بڑی قیمت ہو تب نقطہ  $P$  سے گزرتے ہوئے ذرہ بہت تیزی سے مڑے گا اور  $P$  پر انحنا زیادہ ہوگی۔ اگر  $|dT/ds|$  صفر کے قریب ہو تب  $T$  کا رخ آہستہ تبدیل ہو گا اور  $P$  پر انحنا کم ہوگی۔ اس تعریف کو پرکھتے ہوئے ہم درج ذیل دو مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ سیدھے خط اور دائروں کی انحنا مستقل ہوگی۔

مثال 12.18: سیدھے لکیر کی انحنا صفر ہوگی

سیدھے لکیر پر اکائی مماسی سمتیہ  $T$  کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہذا اس کے اجزاء مستقل ہوں گے۔ یوں  $|dT/ds| = |0| = 0$  ہو گا (شکل 12.18)۔

□

مثال 12.19: رداس  $a$  کے دائرے کی انحنا  $\frac{1}{a}$  ہوگی  
ہم دائرہ کی مقدار معلوم مساوات

$$\mathbf{r}(\theta) = (a \cos \theta)\mathbf{i} + (a \sin \theta)\mathbf{j}$$

میں  $\theta = \frac{s}{a}$  پر کر کے اس کی لمبائی قوس  $s$  کے لحاظ سے مقدار معلوم روپ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.19)۔

$$\mathbf{r} = \left(a \cos \frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \left(a \sin \frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

یوں

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(-\sin \frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\cos \frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

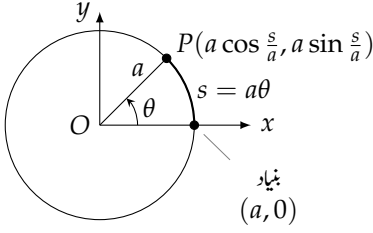
اور

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left(-\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{a} \sin \frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

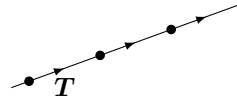
ہوں گے۔ اس طرح کسی بھی کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \kappa &= \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{s}{a} + \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{s}{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \quad \text{اگر } a > 0 \text{ کی بنا } |a| = a \text{ ہو گا} \end{aligned}$$

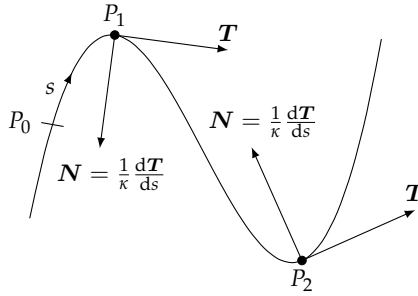
□



شکل 12.19: دائرہ برائے مثال 12.19



شکل 12.18: سیدھے لکیر پر  $T$  کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے  
لہذا اس کی انجنا  $|dT/ds|$  صفر ہو گی۔



شکل 12.20: منحنی کا عمودی سمتیہ  $\frac{dT}{ds}$  ہر وقت اس رخ ہوتا ہے جس رخ  $T$  مڑتا ہو۔ سمتیہ  $N$  کا رخ سمتیہ  $\frac{dT}{ds}$  کا رخ ہے۔

### صدر اکائی عمودی سمتیہ

چونکہ  $T$  کی لمبائی اکائی ہے لہذا  $\frac{dT}{ds}$  اور  $T$  آپس میں عمودی ہوں گے (حصہ 12.1)۔ یوں  $\frac{dT}{ds}$  کو لمبائی  $\kappa$  سے تقسیم کرنے سے ایسا اکائی سمتیہ حاصل ہو گا جو  $T$  کو عمودی ہو گا (شکل 12.20)۔

تعریف: جس نقطہ پر  $\kappa \neq 0$  ہو وہاں مستوی میں منحنی کا صدر اکائی سمتیہ  $N$  درج ذیل ہو گا۔

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds}$$

□

موڑ پر سمتیہ  $\frac{dT}{ds}$  کا رخ اس جانب ہو گا جس جانب منحنی مڑتی ہو۔ یوں اگر بڑھتے فاصلہ کے رخ منہ کرتے ہوئے، اگر  $T$  گھڑی کے رخ مڑے تب سمتیہ  $\frac{dT}{ds}$  کا رخ دائیں ہو گا اور اگر  $T$  گھڑی کے مخالف رخ مڑتی ہو تب اس کا رخ بائیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں صدر عمودی سمتیہ  $N$  منحنی کے مقعر رخ ہو گا (شکل 12.20)۔ جس نقطہ پر  $\kappa = 0$  ہو، وہاں کے بارے میں سوالات میں غور کیا گیا ہے۔

تعریف کی رو سے منحنی  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$  کی لمبائی قوس، مثبت  $\frac{ds}{dt}$  کے لئے ہو گی لہذا  $\left| \frac{ds}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$  ہو گا اور زنجیری قاعدہ درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} N &= \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \\ &= \frac{(d\mathbf{T}/dt)(dt/ds)}{|d\mathbf{T}/dt||dt/ds|} \\ (12.25) \quad &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \end{aligned}$$

اس طرح ہم  $\kappa$  اور  $s$  حاصل کیے بغیر  $N$  حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 12.20: درج ذیل دائری حرکت کے لئے  $\mathbf{T}$  اور  $N$  تلاش کریں۔

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}$$

حل: ہم پہلے  $\mathbf{T}$  دریافت کرتے ہیں۔

$$\mathbf{v} = -(2 \sin 2t)\mathbf{i} + (2 \cos 2t)\mathbf{j},$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t} = 2,$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$= -(\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}$$

یوں

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -(2 \cos 2t)\mathbf{i} - (2 \sin 2t)\mathbf{j},$$

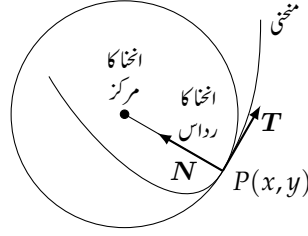
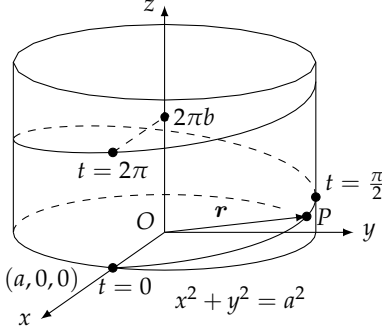
$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \sqrt{4 \cos^2 2t + 4 \sin^2 2t} = 2$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} N &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \\ &= -(\cos 2t)\mathbf{i} - (\sin 2t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

□





شکل 12.21: نقطہ  $P(x, y)$  پر دائرہ انحناء منحنی کے اندرونی رخ ہو گا۔

شکل 12.22: ثابت  $a$ ،  $b$  کے لئے  $r(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j$

### انحناء کا دائرہ اور انحناء کا رداس

مستوی منحنی پر نقطہ  $P$  جہاں  $\kappa \neq 0$  ہو، دائرہ انحناء<sup>18</sup> سے مراد اس مستوی میں وہ دائرہ ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

ا. نقطہ  $P$  پر یہ منحنی کا مماسی ہو (منحنی کا مماسی خط ہی اس کا مماسی خط ہے)؛

ب. نقطہ  $P$  پر اس کی انحناء اور منحنی کی انحناء ایک دوسرے کے برابر ہوں؛

ج. یہ منحنی کے اندرونی یعنی مقعر رخ پایا جائے (شکل 12.21)۔

نقطہ  $P$  پر منحنی کے رداس انحناء<sup>19</sup> سے مراد اس نقطہ پر دائرہ انحناء کا رداس ہے، جو مثال 12.19 کے مطابق درج ذیل ہو گا۔

$$(12.26) \quad \text{رداس انحناء} = \rho = \frac{1}{\kappa}$$

رداس انحناء جاننے کے لئے ہم  $\kappa$  معلوم کر کے اس کا بالعکس تناسب لیتے ہیں۔ نقطہ  $P$  پر مرکز انحناء<sup>20</sup> سے مراد یہاں کے دائرہ انحناء کا مرکز ہو گا۔

circle of curvature<sup>18</sup>  
radius of curvature<sup>19</sup>  
center of curvature<sup>20</sup>

## فضائی منحنیات کی انحناء اور عمودی سمتیات

مستوی منحنیات کی طرح فضا میں ہموار منحنی کے لئے مقدار معلوم لمبائی قوس  $s$ ، مماسی اکائی سمتیہ  $T$  دیتا ہے۔ ہم اب بھی انحناء سے مراد

$$(12.27) \quad \kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

لیتے ہیں۔ سمتیہ  $\frac{dT}{ds}$  سمتیہ  $T$  کو عمودی ہو گا اور ہم صدر اکائی عمودی سمتیہ سے مراد درج ذیل لیتے ہیں۔

$$(12.28) \quad N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}$$

مثال 12.21: درج ذیل پیچ دار منحنی کی انحناء دریافت کریں (شکل 12.22)۔

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad a, b \geq 0, a^2 + b^2 \neq 0$$

حل: ہم سمتیہ رفتار  $\mathbf{v}$  سے  $T$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathbf{v}(t) = -(a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [-(a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}]$$

اب زنجیری قاعدہ سے  $\frac{dT}{ds}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v}|} \end{aligned}$$

زنجیری قاعدہ

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| \implies \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [-(a \cos t)\mathbf{i} - (a \sin t)\mathbf{j}] \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} [-(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}] \end{aligned}$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \kappa &= \left| \frac{dT}{ds} \right| \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} |-(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}| \\ (12.29) \quad &= \frac{a}{a^2 + b^2} \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

ہم مساوات 12.29 سے دیکھتے ہیں کہ مستقل  $a$  کے لئے  $b$  بڑھانے سے انحناء ہوتی ہے۔ مستقل  $b$  کے لئے  $a$  کم کرنے سے بھی انحناء آخر کار انحناء کرتی ہے۔ ایک اسپرنگ کھینچنے سے سیدھا ہوتا ہے۔

اگر  $b = 0$  ہو تب پیچ دار منحنی ایک دائرہ ہو گا جس کا رداس  $a$  اور انحناء  $\frac{1}{a}$  ہو گی۔ اگر  $a = 0$  ہو تب پیچ دار منحنی، محور  $z$  پر سیدھا خط ہو گا اور اس کی انحناء 0 ہو گی۔ □

مثال 12.22: گزشتہ مثال میں منحنی کے لئے  $N$  تلاش کریں۔

حل:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [(a \cos t)i + (a \sin t)j] \quad \text{مثال 12.21}$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$N = \frac{dT/dt}{|dT/dt|} \quad \text{مساوات 12.28}$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} [(a \cos t)i + (a \sin t)j]$$

$$= -(\cos t)i - (\sin t)j$$

□

مروڑ اور سہ عمودی سمتیہ

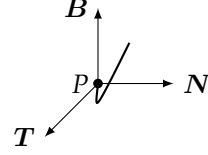
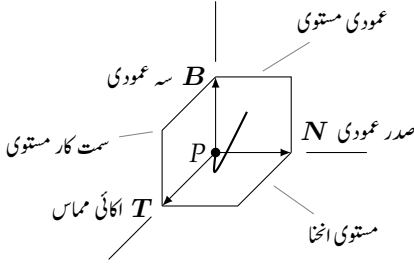
فضا میں منحنی کا سہ عمودی سمتیہ<sup>21</sup>  $B = T \times N$  ہے جو  $T$  اور  $N$  دونوں کو عمودی ہو گا (شکل 12.23)۔ سمتیات  $T$ ،  $N$  اور  $B$  مل کر دایاں ہاتھ، متحرک، سمتی چھوٹ دیتے ہیں جو فضا میں سواری کی حرکت پر غور میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔

سمتیات  $T$ ،  $N$  اور  $B$  کے لحاظ سے  $\frac{dB}{ds}$  کا رویہ کیسا ہو گا؟ حاصل صلیبی ضرب کے قاعدہ تفرق سے

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ  $N$  کا رخ  $\frac{dT}{ds}$  کے رخ ہے لہذا  $\frac{dT}{ds} \times N = 0$  ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(12.30) \quad \frac{dB}{ds} = 0 + T \times \frac{dN}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}$$



شکل 12.23: سمتیات  $T$ ،  $N$  اور  $B$  (اسی ترتیب میں) فضا میں آپس میں عمودی اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چھوکت دیتے ہیں۔

شکل 12.24: سمتیات  $T$ ،  $N$ ،  $B$  کے پیدا تین مستوی کے نام۔

چونکہ حاصل صلیبی ضرب دونوں اجزاء کو عمودی ہوتا ہے لہذا  $\frac{dB}{ds}$  سمتیہ  $T$  کو عمودی ہو گا۔

چونکہ  $\frac{dB}{ds}$  سمتیہ  $B$  (جس کی لمبائی مستقل ہے) کو بھی عمودی ہے لہذا  $B$  اور  $T$  کے مستوی کو  $\frac{dB}{ds}$  عمودی ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں  $\frac{dB}{ds}$  سمتیہ  $N$  کے متوازی ہو گا اور یوں  $\frac{dB}{ds}$  سمتیہ  $N$  کا مستقل مضرب ہو گا۔ اس حقیقت کو علامتی طور پر

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

لکھا جاتا ہے جہاں منفی کی علامت روایتی ہے۔ غیر سمتی  $\tau$ ، منحنی پر مروڑ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ

$$\frac{dB}{ds} \cdot N = -\tau N \cdot N = -\tau(1) = -\tau$$

کی بنا درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$$

تعریف: فرض کریں  $B = T \times N$  ہے۔ تب ہموار منحنی کا تفاعل مروڑ<sup>22</sup> درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$$

□

انحناء  $\kappa$  کے برعکس جو کبھی منفی نہیں ہو سکتا ہے، مروڑ  $\tau$  مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

منحنیات  $T$ ،  $N$  اور  $B$  مل کر تین مستوی دیتے ہیں (شکل 12.24)۔ منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ  $P$  پر عمودی مستوی کی مڑنے کی شرح کو انحناء  $\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$  تصور کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ  $P$  پر  $T$  کے لحاظ سے سطح منحنی انحناء کی مڑنے کی شرح کو مروڑ  $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$  تصور کیا جاسکتا ہے۔ منحنی میں بل کی پیمائش اس منحنی کی مروڑ ہو گی۔

اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء

قوت کشش، بریک یا انجن کی طاقت کی بنا کسی جسم کی اسراع کے مماسی جزو میں ہم عموماً دلچسپی رکھتے ہیں جو اس قوت کی بنا پیدا ہوتی ہے۔ ہم زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے  $v$  کے لئے

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = T \frac{ds}{dt}$$

لکھ کر دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( T \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \frac{dT}{dt} \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \left( \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} T + \frac{ds}{dt} \left( \kappa N \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} T + \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 N \end{aligned}$$

اس کو

$$(12.31) \quad a = a_T T + a_N T$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں اسراع کا غیر سمتی مماسی جزو  $a_T$  اور غیر سمتی عمودی جزو  $a_N$  درج ذیل ہوں گے۔

$$(12.32) \quad a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} |v|, \quad a_N = \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \kappa |v|^2$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 12.31 میں  $B$  نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ جس پر ایک جسم چل رہا ہو جتنا بھی گھومتا ہو، اس پر اسراع ہر صورت  $T$  اور  $N$  کے مستوی میں  $B$  کی عمودی پائی جائے گی۔ یہ مساوات ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ کتنی اسراع حرکت کے مماسی رخ  $\frac{d^2 s}{dt^2}$  اور کتنی اسراع حرکت کے عمودی رخ  $\kappa (ds/dt)^2$  ہو گی۔

ہم مساوات 12.32 سے کیا معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ تعریف کی رو سے، اسراع  $a$  سمتی رفتار  $v$  کی تبدیلی کی شرح ہو گی اور حرکت کے دوران سمتی رفتار کا رخ اور اس کی مقدار (لمبائی) تبدیل ہو گی۔ اسراع کا مماسی جزو  $a_T$  سمتی رفتار  $v$  کی لمبائی کی شرح تبدیلی دیتا ہے (یعنی رفتار میں تبدیلی)۔ عمودی جزو  $a_N$  ہمیں  $v$  کے رخ کی تبدیلی کی شرح دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ  $a_N$  انحناءب رفتار کا مرلے ہو گا۔ اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ جب گاڑی تیز رفتار (زیادہ  $|v|$ ) سے چلتے ہوئے زیادہ جلدی مڑے (بڑی  $\kappa$ ) تب ہمیں کیوں سیدھا بیٹھنے میں مشکل پیش آتی ہے۔ گاڑی کی رفتار دگنی کرنے سے آپ اسی انحناء کے لئے چارگنا زیادہ عمودی اسراع محسوس کریں گے۔

اگر ایک جسم مستقل رفتار سے چل رہی ہو تب  $\frac{d^2 s}{dt^2}$  صفر ہو گا اور تمام اسراع  $N$  کے رخ، دائرے کے مرکز کے رخ ہو گا۔ اگر ایک جسم کی رفتار بڑھ یا گھٹ رہی ہو تب  $a$  کا غیر صفر مماسی جزو ہو گا۔

اسراع کا عمودی جزو  $a_N$  معلوم کرنے کی خاطر ہم عموماً کلیہ  $a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T^2}$  استعمال کرتے ہیں جو  $a_N$  کے لئے مساوات  $|a|^2 = a \cdot a = a_T^2 + a_N^2$  حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم بغیر  $\kappa$  معلوم کیے،  $a_N$  معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(12.33) \quad a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T^2}$$



جوابات





ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



ضمیمہ ج

ضمیمہ تین



ضمیمہ د

ضمیمہ چار





ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چ



ضمیمہ ز

ضمیمہ سات



ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ





ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

