احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جا سکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔**حقیقی اعداد**[1] وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

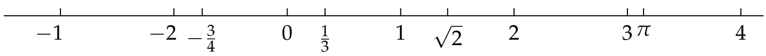
$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{4} &= -0.75000\cdots \\
\frac{1}{3} &= 0.33333\cdots \\
\sqrt{2} &= 1.4142\cdots
\end{aligned}
$$

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں $\cdots$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو لکیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اس لکیر کو **حقیقی خط**[2] کہتے ہیں۔

---

[1] real numbers
[2] real line



$\Re$ کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جا سکتے ہیں: الجبرائی خواص، خواص درجہ، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جا سکتے ہیں۔آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

1. $a < b \implies a + c < b + c$
2. $a < b \implies a - c < b - c$
3. $c > 0$ اور $a < b \implies ac < bc$
4. $c < 0$ اور $a < b \implies bc < ac$ خصوصی صورت: $a < b \implies -b < -a$
5. $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$
6. اگر a اور b دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

درج بالا میں $a < b \implies a + c < b + c$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہو گی۔دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دارومدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ درجہ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

$\Re$ کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی **سلسلوں**[3] کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. **قدرتی اعداد**[4]، یعنی 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، $\cdots$

2. **عدد صحیح**، یعنی 0 ، ∓1 ، ∓2 ، ∓3 ، $\cdots$

3. **ناطق اعداد**[5]، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9}, \quad \frac{200}{13}, \quad 57 = \frac{57}{1}$$

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔

(الف) مختتم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000\cdots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909\cdots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور خواص درجہ رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں **غیر ناطق اعداد**[6] کہلاتے ہیں۔غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نا مختتم اور نا ہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

---

[3] sets
[4] natural numbers
[5] rational numbers
[6] irrational numbers

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو ارکان کے بیچ تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں **وقفہ**[7] کہلاتا ہے۔ مثال کے طور تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہٰذا -1 اور 1 کے بیچ تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔خطی قطع **متناہی وقفہ**[8] جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط **لامتناہی وقفہ**[9] کہلاتے ہیں۔

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ **بند**[10] کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ **نصف کھلا**[11] کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ **کھلا**[12] کہلاتا ہے۔وقفے کے سروں کو **سرحدی نقطے**[13] بھی کہتے ہیں۔یہ وقفہ کی **سرحد**[14] ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو **اندرونی نقطے**[15] کہتے ہیں۔تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی **اندرون**[16] کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسموں کو جدول 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔

عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

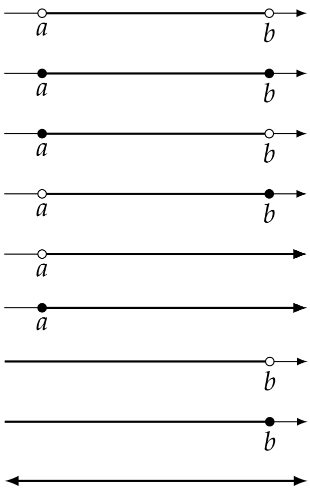
مثال 1.1:

1) $2x - 4 < x + 1$ 2) $-\frac{x}{3} < x - 1$ 3) $\frac{2}{x-1} \geq 4$

حل:

[7] interval
[8] finite interval
[9] infinite interval
[10] closed
[11] half-open
[12] open
[13] boundary points
[14] boundary
[15] interior points
[16] interior

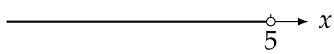
جدول 1.1: وقفوں کی قسمیں



	علامت	سلسلہ	ترسیم
متناہی	(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
	$[a,b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
	$[a,b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
لا متناہی	(a,∞)	$\{x \mid x > a\}$	
	$[a,\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x \mid x < b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
	$(-\infty,\infty)$	$\Re$	

(1

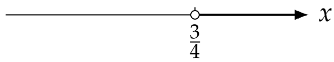
$$\begin{aligned} 2x-4 &< x+1 \\ 2x &< x+5 && \text{دونوں ہاتھ 4 جمع کریں} \\ x &< 5 && \text{دونوں ہاتھ سے } x \text{ منفی کریں} \end{aligned}$$



حل سلسلہ وقفہ $(-\infty,5)$ ہے۔

(2

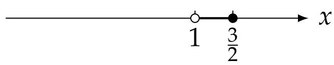
$$\begin{aligned} -\frac{x}{3} &< x-1 \\ -x &< 3x-3 && \text{دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں} \\ 0 &< 4x-3 && \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ } x \text{ جمع کریں} \\ 3 &< 4x && \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں} \\ \frac{3}{4} &< x && \text{دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں} \end{aligned}$$



وقفہ $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ حل سلسلہ ہے۔

3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بایاں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بایاں ہاتھ غیر متعین ہے۔عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-1} &\geq 4 && \\
2 &\geq 4x - 4 && \text{دونوں ہاتھ کو } x-1 \text{ سے ضرب دیں} \\
6 &\geq 4x && \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ } 4 \text{ جمع کریں} \\
\frac{3}{2} &\geq x && \text{دونوں ہاتھ کو } 4 \text{ سے تقسیم کریں}
\end{aligned}$$



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $\left(1,\frac{3}{2}\right]$ ہے۔

□

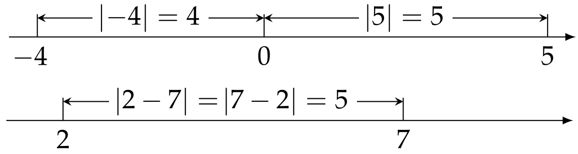
مطلق قیمت

عدد x کی **مطلق قیمت**[17] جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $|0.88| = 0.88, \quad |0| = 0, \quad |-13| = -(-13) = 13, \quad \big|-|a|\big| = |a|$ □

[17] absolute value



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq$ ہو گی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہو گا۔چونکہ a کی غیر منفی جذر کو $\sqrt{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

آپ $|a| = \sqrt{a^2}$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہو گا۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$x \text{ اور } y \text{ کے بیچ فاصلہ} = \left|x - y\right|$$

ہو گا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص درج ذیل ہیں۔

1. $|-a| = |a|$ کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔
2. $|ab| = |a||b|$ حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہو گا۔
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$ دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہو گی۔اس کو **تکونی عدم مساوات** کہتے ہیں۔

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a+b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہو گی۔اس کے علاوہ ہر صورت $|a+b| = |a| + |b|$ ہو گا۔

مثال 1.3:

$$\begin{aligned}
|-2+6| &= |4| = 4 < |-2| + |6| = 8\\
|2+6| &= |8| = |2| + |6|\\
|-2-6| &= |-8| = 8 = |-2| + |-6|
\end{aligned}$$

□

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x-1| = 11$ کو حل کریں۔
حل: اس مساوات کے تحت $2x-1 = \mp 11$ ہو سکتا ہے لہٰذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
2x-1&=11 & 2x-1&=-11\\
2x&=12 & 2x&=-10\\
x&=6 & x&=-5
\end{aligned}
$$

یوں $|2x-1| = 11$ کا درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔ □

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

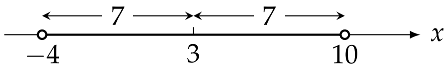
مطلق قیمتیں اور وقفے اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

$$|a| < D \iff -D < a < D \tag{1.1}$$
$$|a| \le D \iff -D \le a \le D \tag{1.2}$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x-3| < 7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔
حل:

$$
\begin{aligned}
|x-3| &< 7 & &\\
-7 < x-3 &< 7 & &\text{مساوات 1.1}\\
-7+3 < x &< 7+3 & &\text{دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں}\\
-4 < x &< 10 & &
\end{aligned}
$$

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔



□

مثال 1.6: عدم مساوات $\left|3-\frac{2}{x}\right|<1$ کو حل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\left|3-\frac{2}{x}\right|<1 \iff -1<3-\frac{2}{x}<1 & \qquad \text{1.1 مساوات} \\
-4<-\frac{2}{x}<-2 & \qquad \text{3 منفی کریں} \\
2>\frac{1}{x}>1 & \qquad -\tfrac{1}{2}\ \text{سے ضرب دیں} \\
\frac{1}{2}<x<1 & \qquad \text{معکوس لیں}
\end{aligned}
$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب معکوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہو گی جب $\frac{1}{2}<x<1$ ہو۔حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2},1)$ ہے۔ □

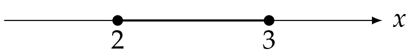
مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

(الف) $|2x-5|\leq 1$ (ب) $|2x-5|\geq 1$

حل: (الف)

$$
\begin{aligned}
|2x-5| &\leq 1 & \\
-1\leq 2x-5 &\leq 1 & \qquad \text{1.2 مساوات} \\
4\leq 2x &\leq 6 & \qquad \text{5 جمع} \\
2\leq x &\leq 3 & \qquad \text{2 تقسیم}
\end{aligned}
$$

حل سلسلہ بند وقفہ $[2,3]$ ہے۔

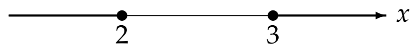


(ب)

$$|2x-5| \geq 1$$

$$\begin{array}{c|c} 2x-5 \geq 1 & -(2x-5) \geq 1 \\ 2x \geq 6 & 2x-5 \leq -1 \\ x \geq 3 & 2x \leq 4 \\ & x \leq 2 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ہے۔



□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی **اشتراک**[18] کی علامت $\cup$ استعمال کی گئی ہے۔دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔اسی طرح ہم **تقاطع**[19] کی علامت $\cap$ بھی استعمال کرتے ہیں۔دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔مثال کے طور پر $[1,3) \cap [2,4] = [2,3)$ ہو گا۔

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔
جواب: $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}$

سوال 2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

[18] union
[19] intersection

ا $0 < x < 4$
ب $0 < x - 2 < 4$
ج $1 < \frac{x}{2} < 3$
د $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
ہ $1 < \frac{6}{x} < 3$
و $|x - 4| < 2$
ز $-6 < -x < 2$
ح $-6 < -x < -2$

سوال 4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $4 < y < 6$
ب $-6 < y < -4$
ج $y > 4$
د $y < 6$
ہ $0 < y - 4 < 2$
و $2 < \frac{y}{2} < 3$
ز $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$
ح $\left|y - 5\right| < 1$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

سوال 5: $-2x > 4$
جواب: $x < -2$

سوال 6: $8 - 3x \geq 5$

سوال 7: $5x - 3 \leq 7 - 3x$
جواب: $x \leq \frac{5}{4}$

سوال 8: $3(2 - x) > 2(3 + x)$

سوال 9: $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
جواب: $x \leq -\frac{1}{3}$

سوال 10: $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$

سوال 11: $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$
جواب: $x < -\frac{6}{7}$

سوال 12: $-\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}$

مطلق قیمت

سوال 13 تا سوال 18 میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال 13: $\left|y\right| = 3$
جواب: ∓ 3

سوال 14: $\left|y-3\right| = 7$

سوال 15: $|2t+5| = 4$
جواب: $-\frac{1}{2}, \quad -\frac{9}{2}$

سوال 16: $|1-t| = 1$

سوال 17: $|8-3s| = \frac{9}{2}$
جواب: $\frac{7}{6}, \quad \frac{25}{6}$

سوال 18: $\left|\frac{s}{2}-1\right| = 1$

سوال 19 تا سوال 34 میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ کو ترسیم کریں

سوال 19: $|x| < 2$
جواب: $-2 < x < 2$

سوال 20: $|x| \leq 2$

سوال 21: $|t-1| \leq 3$
جواب: $-2 \leq t \leq 4$

سوال 22: $|t+2| < 1$

سوال 23: $\left|3y-7\right| < 4$
جواب: $1 < y < \frac{11}{3}$

سوال 24: $\left|2y+5\right| < 1$

سوال 25: $\left|\frac{z}{5}-1\right| \leq 1$
جواب: $0 \leq z \leq 10$

سوال 26: $\left|\frac{3}{2}z-1\right| \leq 2$

سوال 27: $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$
جواب: $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

سوال 28: $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$

سوال 29: $|2s| \geq 4$
جواب: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

سوال 30: $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

سوال 31: $|1 - x| > 1$
جواب: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

سوال 32: $|2 - 3x| > 5$

سوال 33: $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$
جواب: $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

سوال 34: $\left|\frac{3}{5}r - 1\right| > \frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات

سوال 35 تا سوال 42 میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2} = |a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 35: $x^2 < 2$
جواب $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 36: $4 \leq x^2$

سوال 37: $4 < x^2 < 9$
جواب $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 38: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 39: $(x - 1)^2 < 4$
جواب $(-1, 3)$

سوال 40: $(x+3)^2 < 2$

سوال 41: $x^2 - x < 0$
جواب $(0,1)$

سوال 42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $|-a| = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔
جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 44: مساوات $|x-1| = 1-x$ کو حل کریں۔

سوال 45: تکونی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a+b| = (a+b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے تکونی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\
&\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
&= (|a| + |b|)^2 \\
|a+b| &\leq |a| + |b|
\end{aligned}$$

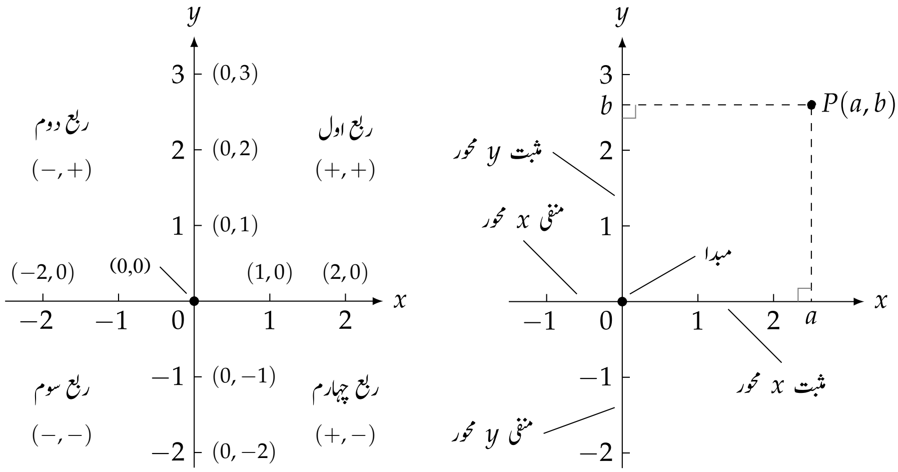
سوال 46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟
جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ کو ترسیم کریں۔

سوال 49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔
جواب: $(-2,0) \cup (4,\infty)$

سوال 50: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔



شکل 1.2: کارتیسی محدد

1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدد اور خطوط پر نظرثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدد

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ان خطوط کو مستوی میں **محددی محور**[20] کہتے ہیں۔افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔انتصابی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محددی نظام کا **مبدا**[21] کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جا سکتے ہیں۔اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x **محدد**[22] a ہو گا۔اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y **محدد**[23]

[20] coordinate axis
[21] origin
[22] x-coordinate
[23] y-coordinate

b ہو گا۔ مرتب جوڑی (a,b) کو نقطے کی **محددی جوڑی**[24] کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محددی جوڑی کا y محدد 0 ہو گا جبکہ y محور پر ہر محددی جوڑی کا x محدد 0 ہو گا۔ محددی نظام کا مبدا نقطہ $(0,0)$ ہے۔

محور x کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدا کے دائیں جانب **مثبت x محور**[25] اور مبدا کے بائیں جانب **منفی x محور**[26] پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدا y محور کو بھی **مثبت y محور** اور **منفی y محور** میں تقسیم کرتا ہے۔ محدد مستوی کو چار **ربعات**[27] میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پیما

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی **تناسب پہلو**[28] ایک جیسے رکھتے ہیں لہٰذا دونوں محور پر پیمائشی فیتہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

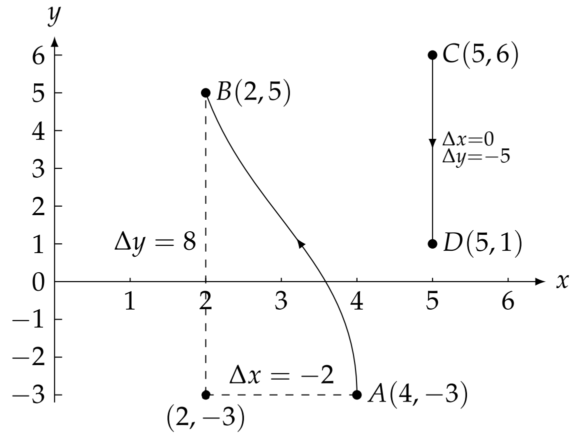
ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدد میں کل تبدیلی کو **بڑھوتری**[29] کہتے ہیں۔ اختتامی محدد سے ابتدائی محدد منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

مثال 1.8: نقطہ $A(4,-3)$ سے نقطہ $B(2,5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = 2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

coordinate pair[24]
positive x-axis[25]
negative x-axis[26]
quadrants[27]
aspect ratio[28]
increments[29]



شکل 1.3: محددی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5,6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5,1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔

حل: $\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$ □

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا (شکل 1.4)۔

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

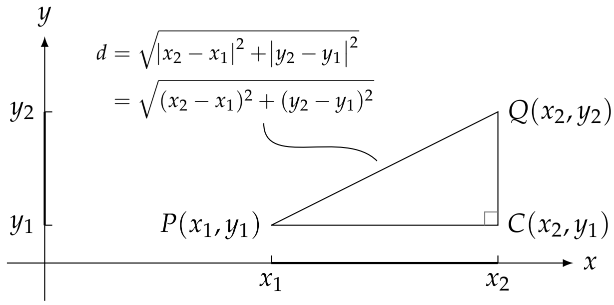
مثال 1.10: (الف) $P(-1,2)$ اور $Q(3,4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

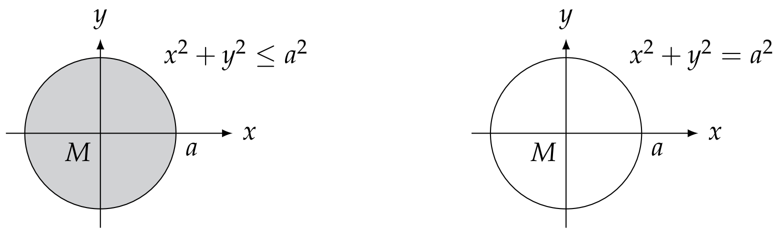
(ب) مبدا سے $P(x,y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثا غورث)



(ب) عدم مساوات کی ترسیم

(ا) مساوات کی ترسیم

شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)

ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

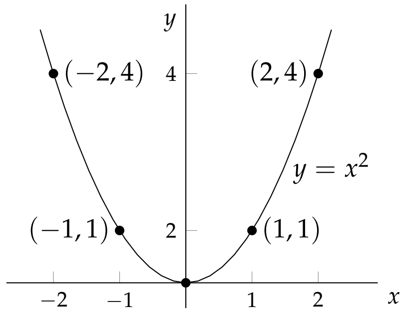
مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو

(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصل $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔

(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \le a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصل $\le a$ ہے۔یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہو گی (شکل 1.5)۔ □

اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو **اکائی دائرہ**[30] کہتے ہیں۔

[30] unit circle



شکل 1.6: قطع مکافی (مثال 1.12)

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(-1,1)$ ، $(2,4)$ اور $(-2,4)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدد اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو **قطع مکافی**[31] کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکتا سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

کی قیمت ایک جیسی ہو گی (شکل 1.7)۔

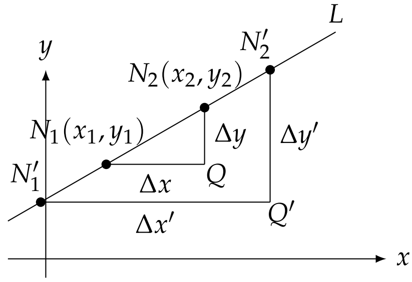
تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی **ڈھلوان**[32] کہلاتی ہے۔

---

parabola[31]
slope[32]



شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N_1'Q'N_2'$ تشابہ مثلثات ہیں لہٰذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لہٰذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا[33]۔یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں L_1 کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1 - (-1)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔اسی طرح L_2 کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

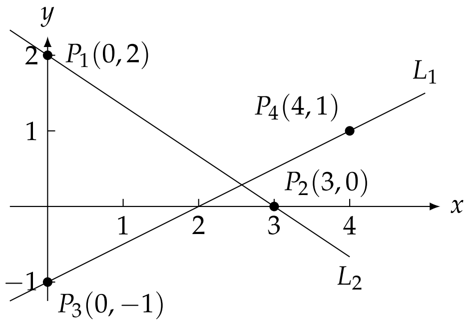
ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ ہے۔یوں دائیں رخ چلتے ہوئے □

خط کی چڑھائی یا اترائی کو **زاویہ میلان**[34] سے بھی ناپا جاتا ہے۔ x محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہجی ϕ سے ظاہر کیا جائے تب $0 \leq \phi \leq 180^\circ$ ہو گا۔

خط کی ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

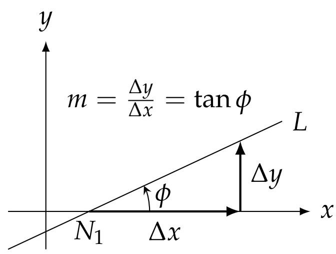
$$m = \tan\phi$$

[33] چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔
[34] angle of inclination

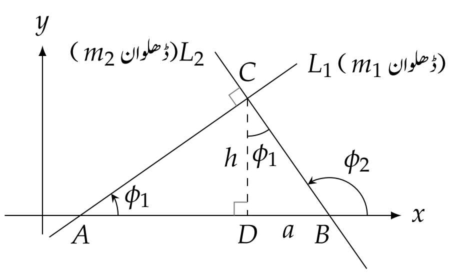


شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)

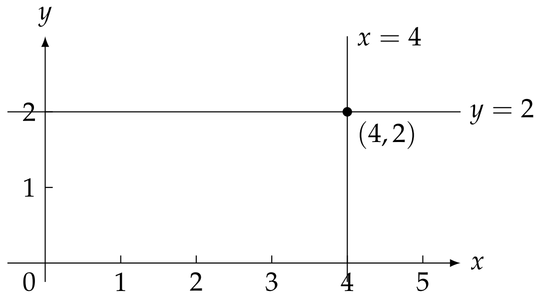
شکل 1.9: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے



شکل 1.10: غیر انتصابی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجنٹ ہوتا ہے



شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق



شکل 1.12: افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

متوازی اور قائمہ خطوط

متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا یہ متوازی ہوں گے۔

اگر غیر انتصابی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1 m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan\phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan\phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔یوں $m_1 m_2 = (\frac{a}{h})(-\frac{h}{a}) = -1$ ہو گا۔

خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ x محور کے نقطہ a سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی x محدد a ہو گی۔یوں اس انتصابی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔اسی طرح y محور کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔

مثال 1.14: نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتے افقی اور انتصابی خطوط کے مساوات بالترتیب $y = 2$ اور $x = 4$ ہوں گی (شکل 1.12)۔ □

اگر ہمیں غیر انتصابی سیدھے خط L کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر $N(x, y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Longrightarrow \quad y = y_1 + m(x - x_1)$$

لکھا جا سکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

تعریف: نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان m ہو کی مساوات $y = y_1 + m(x - x_1)$ ہو گی جس کو خط کی **نقطہ۔ڈھلوان مساوات**[35] ہے۔

مثال 1.15: نقطہ $(3, 2)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔
حل:

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + 4$$

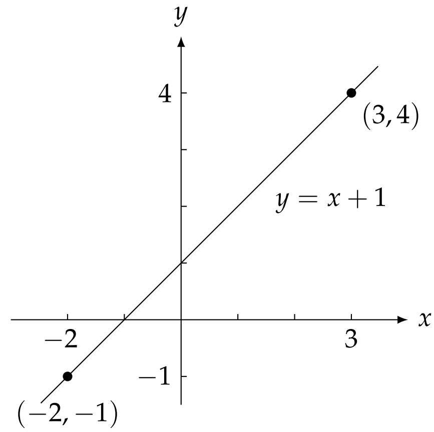
□

مثال 1.16: نقطہ $(-2, -1)$ اور $(3, 4)$ سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔
حل: اس خط کی ڈھلوان

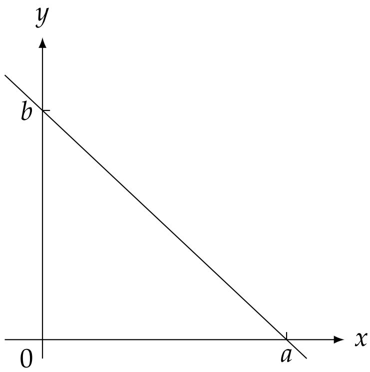
$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ہے۔ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ لیتے ہیں	نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ لیتے ہیں
$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$	$y = -1 + 1 \cdot (x - x(-2))$
$y = 4 + x - 3$	$y = -1 + x + 2$
$y = x + 1$	$y = x + 1$



شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال 1.16)



شکل 1.14: غیر انتصابی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔ □

غیر انتصابی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y **قطع**[36] کہتے ہیں۔اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر x محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا x **قطع**[37] کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

غیر انتصابی خط جو y محور کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \implies \quad y = mx + b$$

ہو گی۔

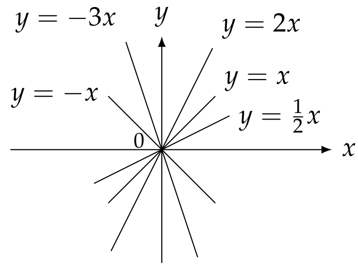
تعریف: درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \implies \quad y = mx + b$$

کو خط کی **ڈھلوان۔قطع مساوات**[38] کہتے ہیں۔اس خط کی ڈھلوان m ہے اور یہ y محور کو b پر قطع کرتا ہے۔

---

[35] point-slope equation
[36] y-intercept
[37] x-intercept
[38] slope-intercept equation



شکل 1.15: مبدا سے گزرتا خط کی مساوات $y = mx$ ہے جہاں m خط کی ڈھلوان ہے

مثال 1.17: خط $y = 3x - 7$ کی ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ y محور کو -7 پر قطع کرتا ہے۔ □

درج ذیل مساوات کو **عمومی خطی مساوات**[39] کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 1.18: خط $8x + 5y = 20$ کی y قطع تلاش کریں۔
حل: ہم مساوات کو ڈھلوان-قطع روپ میں لکھ کر y قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

یوں خط کی ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور y قطع 4 ہے۔ □

مثال 1.19: مبدا سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔
چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہو گا لہٰذا ان کی مساوات $y = mx$ ہو گی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔ □

---

[39] general linear equation

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بنا سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں **خطی مساوات**[40] کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔یہ جانتے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباو V اور برقی رو I کا تعلق $V = IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔اس مساوات کی ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔ $\square$

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی

سوال 1 تا سوال 4 میں ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1: $A(-3,2),\ B(-1,-2)$
جواب: $2, -4; 2\sqrt{5}$

سوال 2: $A(-1,-2),\ B(-3,2)$

سوال 3: $A(-3.2,-2),\ B(-8.1,-2)$
جواب: $-4.9, 0; 4.9$

سوال 4: $A(\sqrt{2},4),\ B(0,1.5)$

سوال 5 تا سوال 8 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 5: $x^2 + y^2 = 1$
جواب: اکائی دائرہ

[40] linear equations

سوال 6: $x^2 + y^2 = 2$

سوال 7: $x^2 + y^2 \leq 3$
جواب: رداس $\sqrt{3}$ کا دائرہ اور اس کی اندرون۔دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 8: $x^2 + y^2 = 0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

سوال 9 تا سوال 12 دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کی قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 9: $A(-1, 2),\ B(-2, -1)$
جواب: $m_\perp = -\frac{1}{3}$

سوال 10: $A(-2, 1),\ B(2, -2)$

سوال 11: $A(2, 3),\ B(-1, 3)$
جواب: $\perp$ غیر معین ہے۔

سوال 12: $A(-2, 0),\ B(-2, -2)$

سوال 13 تا سوال 16 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتا (الف) انتصابی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 13: $(-1, \frac{4}{3})$
جواب: (الف) $x = -1$ (ب) $y = \frac{4}{3}$

سوال 14: $(\sqrt{2}, -1.3)$

سوال 15: $(0, -\sqrt{2})$
جواب: (الف) $x = 0$ $y = -\sqrt{2}$

سوال 16: $(-\pi, 0)$

سوال 17 تا سوال 30 میں خط کی مساوات تلاش کریں۔خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 17: نقطہ $(-1,1)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان -1 ہو۔
جواب: $y=-x$

سوال 18: نقطہ $(2,-3)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔

سوال 19: نقطہ $(3,4)$ اور $(-2,5)$ سے گزرتا خط۔
جواب: $y=-\frac{x}{5}+\frac{23}{5}$

سوال 20: نقطہ $(-8,0)$ اور $(-1,3)$ سے گزرتا خط۔

سوال 21: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔
جواب: $y=-\frac{5}{4}x+6$

سوال 22: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع -3 ہے۔

سوال 23: نقطہ $(-12,-9)$ سے گزرتا جس کی ڈھلوان 0 ہو۔
جواب: $y=-9$

سوال 24: نقطہ $(\frac{1}{3},2)$ سے گزرتا جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔

سوال 25: جس کا x قطع -1 اور y قطع 4 ہو۔
جواب: $y=4x+4$

سوال 26: جس کا x قطع 2 اور y قطع -6 ہو۔

سوال 27: جو نقطہ $(5,-1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x+5y=15$ کے متوازی ہو۔
جواب: $y=-\frac{2}{5}x+1$

سوال 28: جو نقطہ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x+5y=\sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔

سوال 29: نقطہ $4,10$ سے گزرتا اور خط $6x-3y=13$ کا قائمہ ہو۔
جواب: $y=-\frac{x}{2}+12$

سوال 30: نقطہ $(0,1)$ سے گزرتا اور خط $8x-13y=13$ کا قائمہ۔

خط کا x قطع اور y قطع تلاش کریں۔ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال 31 تا سوال 34)

سوال 31: $3x + 4y = 12$
جواب: قطع $x = 4$ ، قطع $y = 3$

سوال 32: $x + 2y = -4$

سوال 33: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
جواب: قطع $x = \sqrt{3}$ ، قطع $y = -\sqrt{2}$

سوال 34: $1.5x - y = -3$

سوال 35: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Bx - Ay = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔
جواب: جی ہاں۔ خطوط قائمہ ہیں چونکہ ان کی ڈھلوان $-\frac{A}{B}$ اور $\frac{B}{A}$ ایک دوسرے کے منفی معکوس ہیں۔

سوال 36: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Ax + By = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال 37: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(-2,3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ ، $\Delta y = -6$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔
جواب: $(3, -3)$

سوال 38: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(6,0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = -6$ ، $\Delta y = 0$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 39: ایک ذرہ $A(x,y)$ سے $B(3,-3)$ منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ اور $\Delta y = 6$ ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔
جواب: $(-2, -9)$

سوال 40: ایک ذرہ $A(1,0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1,0)$ کو واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محدد میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال 41: پانی میں دباو پانی میں d گہرائی پر غوطہ خور p دباو محسوس کرے گا جہاں $p = kd + 1$ ہے جہاں k مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر

دباو کیا ہو گا؟
جواب: 5.97 کرہ ہوائی دباو

سوال 42: انعکاس شعاع ربع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع x محور سے منعکس ہوتی ہے۔زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 43: **سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ** سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟
جواب: جی ہاں۔ $C = F = -40°$

نظریہ اور مثالیں

سوال 44: ایک مثلث کے راس $A(1,2)$ ، $B(5,5)$ اور $C(4,-2)$ پر پائے جاتے ہیں۔مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 45: ایک مثلث کے راس $A(0,0)$ ، $B(1,\sqrt{3})$ اور $C(2,0)$ ہیں۔دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

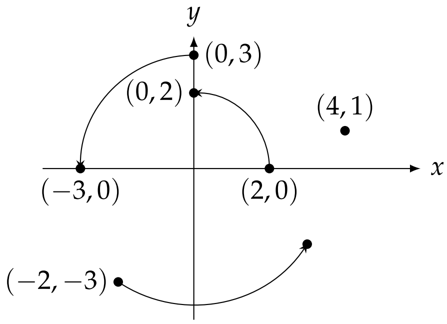
سوال 46: دکھائیں کہ $A(2,-1)$ ، $B(1,3)$ اور $C(-3,2)$ چکور کی راسیں ہیں۔چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 47: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1,1)$ ، $(2,0)$ اور $(2,3)$ ہیں۔تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔
جواب: $(-1,4), (-1,-2), (5,2)$

سوال 48: مبدا کے گرد گھڑی مخالف $90°$ گھمانے سے نقطہ $(2,0)$ اور $(0,3)$ بالترتیب $(0,2)$ اور $(-3,0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

ا) $(4,1)$
ب) $(-2,-3)$
ج) $(2,-5)$
د) $(x,0)$
ہ) $(0,y)$
و) (x,y)
ز) کونسا نقطہ $(10,3)$ پر منتقل ہو گا؟

سوال 49: k کی کس قیمت کے لئے خط $2x + ky = 3$ اور خط $4x + y = 1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟
جواب: $k = -8, \quad k = \frac{1}{2}$



شکل 1.16: گھڑی مخالف 90° گھومنا (سوال 48)

سوال 50: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1,2)$ اور خط $x+2y=3$ اور $2x-3y=-1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 51: دکھائیں کہ $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ کو ملانے والے قطع کا وسط $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہو گا۔

سوال 52: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0,y_0)$ سے خط $L: Ax+By=C$ تک فاصل درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

- L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔
- خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔
- N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصل تلاش کریں۔

ا) $N(2,1), L: y=x+2$

ب) $N(4,6), L: 4x+3y=12$

ج) $N(a,b), L: x=-1$

د) $N(x_0,y_0), L: Ax+By=C$

1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ابلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دارومدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔چونکہ y کی قیمت مکمل طور پر x تعین کرتا ہے لہٰذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چونکہ $A = \pi r^2$ ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا رقبہ A تفاعل ہے۔مساوات $A = \pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لئے A کی یکتا قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا **دائرہ کار**[41] کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا **سعت**[42] کہتے ہیں۔چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0, \infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

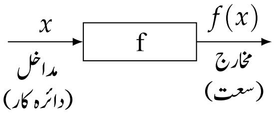
ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ہم

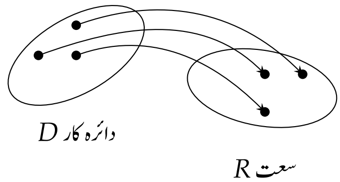
$$y = f(x) \qquad (y \text{ برابر ہے } f \text{ کا } x)$$

لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y، متغیر x کا تفاعل ہے۔یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت x **غیر تابع متغیر**[43] ہے اور خارجی قیمت y **تابع متغیر**[44] ہیں۔ x کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہو گی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہو گی۔

تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔



شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت



شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کا سعت R کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

2. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f، نا کہ $f(x)$، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

---

domain[41]
range[42]
independent variable[43]
dependent variable[44]

قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً **حقیقی متغیرات**[45] کے **حقیقی قیمت تفاعل**[46] پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$3\,\mathrm{m}$ رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi\,\mathrm{m}^2$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t-1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0 ، 2 ، $x+2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
F(0) &= 2(0-1) + 3 = -2 + 3 = 1\\
F(2) &= 2(2-1) + 3 = 2 + 3 = 5\\
F(x+2) &= 2(x+2-1) + 3 = 2x + 5\\
F(F(2)) &= F(5) = 2(5-1) + 3 = 11
\end{aligned}$$

□

---

real variables[45]
real valued function[46]

روایتی دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔اس کو تفاعل کا **قدرتی دائرہ کار**[47] کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم " $y = x^2, x \geq 2$ " لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔تفاعل $y = x^2$ کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کا سعت $[4, \infty)$ ہو گا جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

تفاعل	دائرہ کار(x)	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

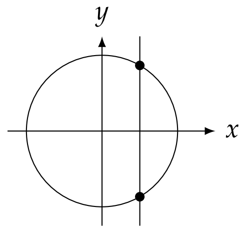
تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لئے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x = 0$ ، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لئے حقیقی y دیتا ہے۔تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔اس کا سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لئے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔تفاعل کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا۔ □

natural domain[47]



شکل 1.19: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط ہے۔

تفاعل کی ترسیم

تفاعل f کی تقسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدد تفاعل f کی داخلی، خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

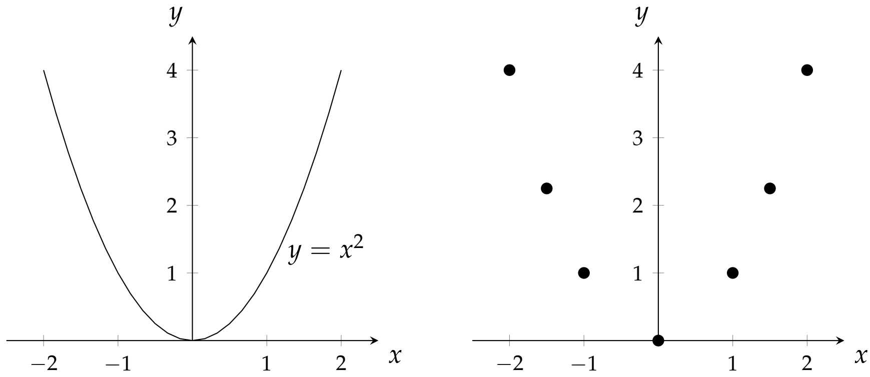
ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر x کے لئے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہٰذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہٰذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔اگر تفاعل f کی دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تفاعل کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

مثال 1.24: وقفہ $[-2, 2]$ پر تفاعل $y = x^2$ ترسیم کریں۔
حل: **پہلا قدم:** پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو xy مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔
تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچیں۔ منحنی پر سرخی لکھیں۔ □

احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔



شکل 1.20: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال 1.24)

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل $f+g$ ، $f-g$ اور fg کی تعریف درج ذیل ہے۔

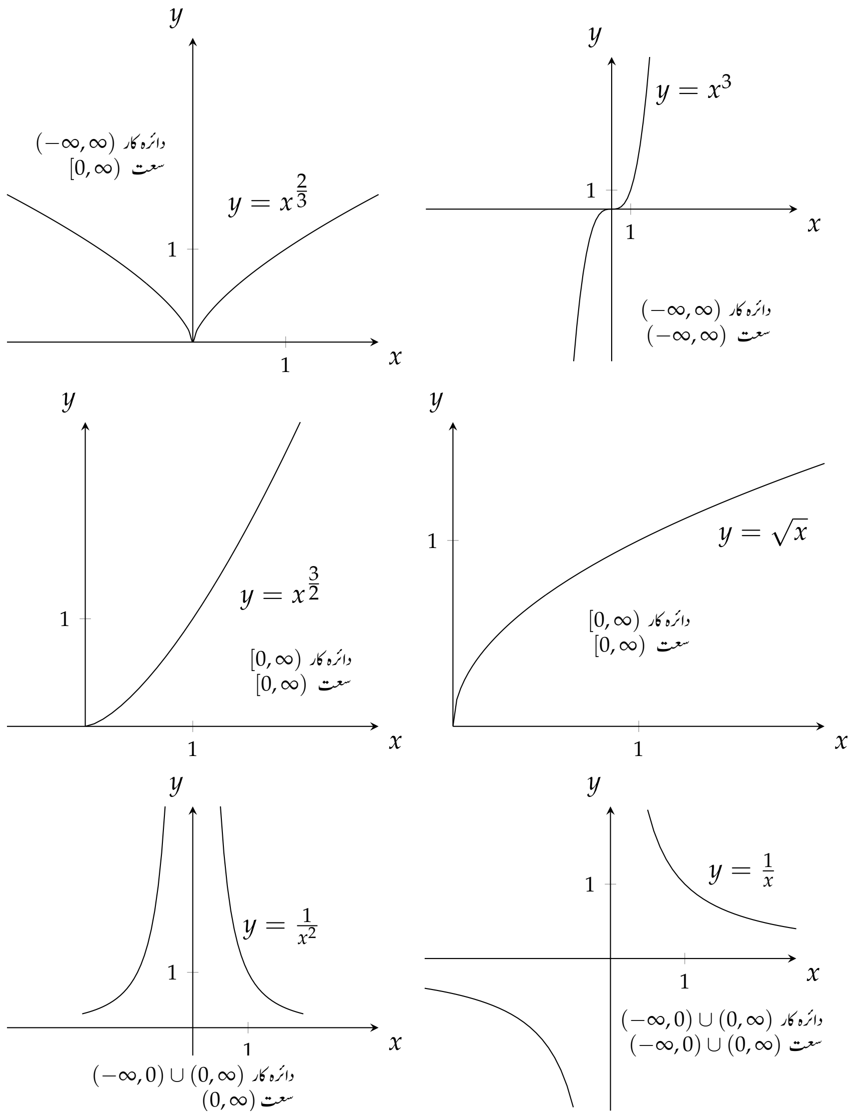
$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\
(fg)(x) &= f(x)g(x)
\end{aligned}
$$

f اور g کی دائرہ کار کے اشتراک $D(f)\cap D(g)$ جہاں $g(x)\neq 0$ ہو ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$(\tfrac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہو گی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$



شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x)=\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
g	$g(x)=\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$3g$	$3g(x)=3\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]=D(f)\cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f\cdot g$	$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ ($x=1$ ماسوائے)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ ($x=0$ ماسوائے)

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جس کو **مرکب تفاعل**[48] $f\circ g$ کہتے ہیں۔

تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f\circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$f\circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

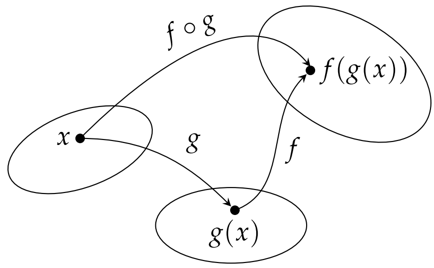
تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جا سکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔ $f\circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

معین $g\circ f$ حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $g\circ f$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f\circ g$ اور $g\circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ اور $g(x)=x+1$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

[48] composite function



شکل 1.22: مرکب تفاعل

ا. $(f\circ g)(x)$ ب. $(g\circ f)(x)$ ج. $(f\circ f)(x)$ د. $(g\circ g)(x)$

حل:

مرکب	دائرہ کار
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x+1}$	$[-1,\infty)$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)+1=\sqrt{x}+1$	$[0,\infty)$
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{4}}$	$[0,\infty)$
$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x+1)=(x+1)+1=x+2$	$(-\infty,\infty)$

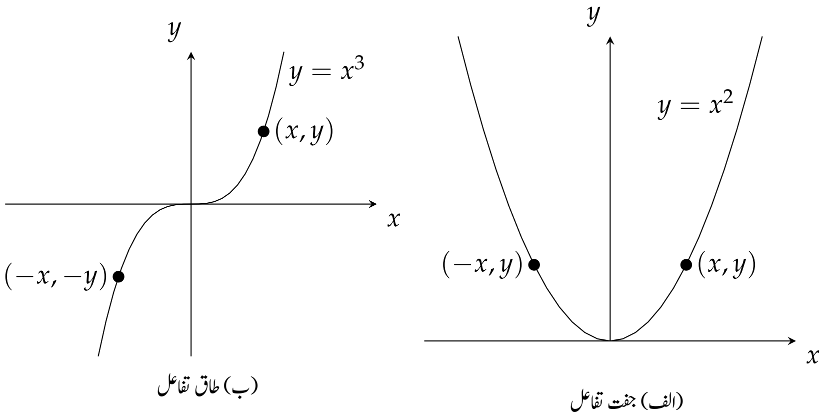
یہ جاننے کے لئے کہ $f\circ g$ کا دائرہ کار کیوں $[-1,\infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x)=x+1$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $x+1\geq 0$ یعنی $x\geq -1$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x)=f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y=f(x)$ **جفت**[49] کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔تفاعل $f(x)=x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ ہے۔

چونکہ $f(-x)=f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x,y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x,y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔یوں جفت تفاعل کی ترسیم y محور کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-الف)۔ y محور کے ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جا سکتی ہے۔

[49]even



شکل 1.23: جفت اور طاق تفاعل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ **طاق**[50] کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔تفاعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

طاق تفاعل کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-ب)۔چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔یہاں بھی y محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جا سکتی ہے۔

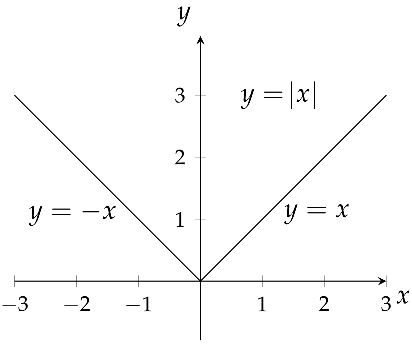
ٹکڑوں میں معین تفاعل

بعض اوقات ایک تفاعل دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات استعمال کرتا ہے۔اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفاعل ہے (شکل 1.24)۔

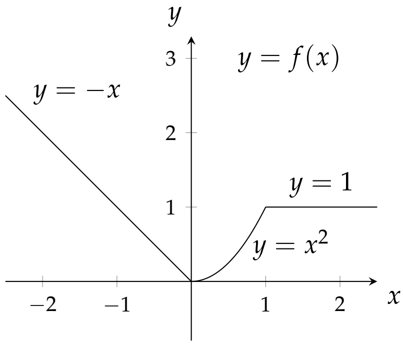
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔

[50] odd



شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل



شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل

ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو **بڑا ترین عدد صحیح تفاعل**[51] یا **عدد صحیح زمین تفاعل**[52] کہلاتا جس کو $\lfloor x \rfloor$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

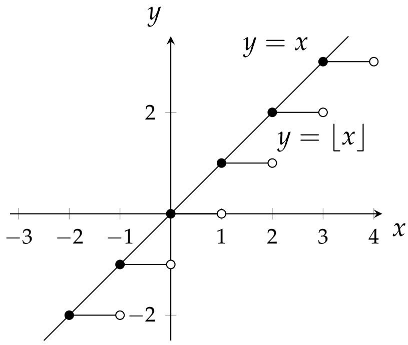
$$\begin{array}{llll} \lfloor 2.4 \rfloor = 2, & \lfloor 1.9 \rfloor = 1, & \lfloor 0 \rfloor = 0, & \lfloor -1.2 \rfloor = -2 \\ \lfloor 2 \rfloor = 2, & \lfloor 0.2 \rfloor = 0, & \lfloor -0.3 \rfloor = -1, & \lfloor -2 \rfloor = -2 \end{array}$$

□

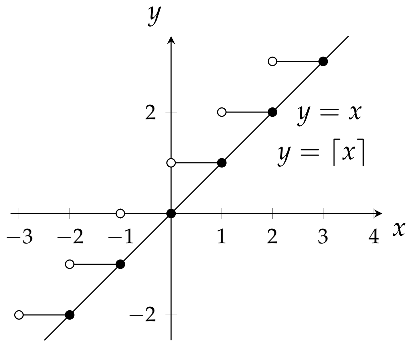
مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو **کم ترین عدد صحیح تفاعل**[53] یا **عدد صحیح چھت تفاعل**[54] کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ اس کی مثال ٹیکسی کا کرایا

---

[51] greatest integer function
[52] integer floor function
[53] least integer function
[54] integer ceiling function



شکل 1.26: عدد صحیح زمین تفاعل (مثال 1.28)



شکل 1.27: عدد صحیح چھت تفاعل (مثال 1.29)

ہے جو فی کلومیٹر واجب الادا ہوتا ہے۔اضافی نا مکمل کلومیٹر کی صورت میں مکمل کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔یوں 17.2 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہو گا۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{array}{llll} \lceil 3.2 \rceil = 4, & \lceil 2.9 \rceil = 3, & \lceil 0 \rceil = 0, & \lceil 2 \rceil = 2, \\ \lceil -5 \rceil = -5, & \lceil -5.6 \rceil = -5, & \lceil -0.9 \rceil = 0, & \lceil -7.2 \rceil = -7 \end{array}$$

□

سوالات

سوال 1 تا سوال 6 میں تفاعل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = 1 + x^2$

جواب: دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ، سعت $[1, \infty)$

سوال 2: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

سوال 3: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

جواب: دائرہ کار $(0, \infty)$ ، سعت $(0, \infty)$

سوال 4: $F(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}}$

(ب) (الف)

شکل 1.28: اشکال برائے سوال 7

(ب) (الف)

شکل 1.29: اشکال برائے سوال 8

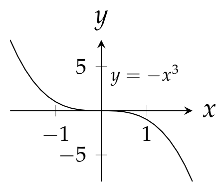
سوال 5: $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$
جواب: دائرہ کار $[-2, 2]$ ، سعت $[0, 2]$

سوال 6: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4-z^2}}$

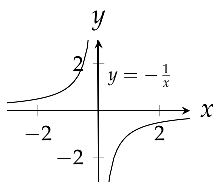
سوال 7: شکل 1.28 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) چونکہ چند x پر y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا x کا تفاعل نہیں ہے۔
(ب) چونکہ ہر x پر y کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہٰذا x کا تفاعل ہے۔

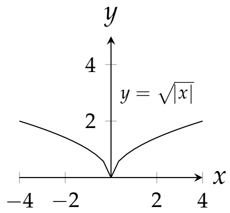
سوال 8: شکل 1.29 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔



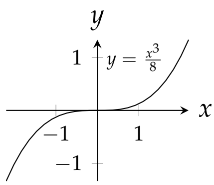
شکل 1.30



شکل 1.31



شکل 1.32



شکل 1.33

تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

سوال 9: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی x کا تفاعل لکھیں۔

جواب: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad p = 3x$

سوال 10: چکور کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں چکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔اب چکور کے رقبہ کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال 11: مکعب کی ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتری لمبائی d کی صورت میں لکھیں۔مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو d کا تفاعل لکھیں۔

$x = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad A = 2d^2, \quad V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

سوال 12: ربع اول میں نقطہ N تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔ N کے محدد کو مبدا سے N تک خط کی ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

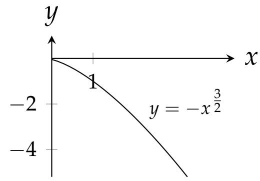
تفاعل اور ترسیم

سوال 13 تا سوال 24 میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ان میں کونسی تشاکل پائی جاتی ہے (اگر پائی جاتی ہو تب)۔اشکال 1.21 میں دی ترسیم کا سہارا لیا جا سکتا ہے۔

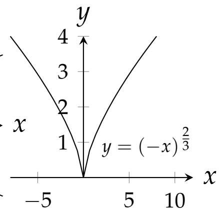
سوال 13: $y = -x^3$

جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.30

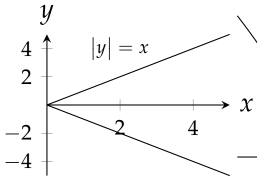
سوال 14: $y = -\frac{1}{x^2}$



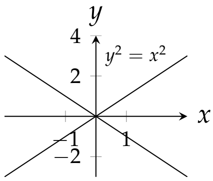
شکل 1.34



شکل 1.35



شکل 1.36



شکل 1.37

سوال 15: $y=-\frac{1}{x}$

جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔شکل 1.31

سوال 16: $y=\frac{1}{|x|}$

سوال 17: $y=\sqrt{|x|}$

جواب: y محدد کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.32

سوال 18: $y=\sqrt{-x}$

سوال 19: $y=\frac{x^3}{8}$

جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.33

سوال 20: $y=-4\sqrt{x}$

سوال 21: $y=-x^{\frac{3}{2}}$

جواب: کوئی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 1.34

سوال 22: $y=(-x)^{\frac{3}{2}}$

سوال 23: $y=(-x)^{\frac{2}{3}}$

جواب: y محور کے لحاظ سے تشاکل۔ شکل 1.35

سوال 24: $y=-x^{\frac{2}{3}}$

سوال 25: (الف) $|y|=x$ اور (ب) $y^2=x^2$ ترسیم کریں۔یہ مساوات x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) x کی ہر مثبت قیمت کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.36
(ب) ہر $x \neq 0$ کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.37

سوال 26: (الف) $|x| + |y| = 1$ اور (ب) $|x + y| = 1$ ترسیم کریں۔ یہ x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ وجہ پیش کریں۔

جفت اور طاق تفاعل

سوال 27 تا سوال 38 میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ جفت ہیں؟

سوال 27: $f(x) = 3$
جواب: جفت

سوال 28: $f(x) = x^{-5}$

سوال 29: $f(x) = x^2 + 1$
جواب: جفت

سوال 30: $f(x) = x^2 + x$

سوال 31: $g(x) = x^3 + x$
جواب: طاق

سوال 32: $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

سوال 33: $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$
جواب: جفت

سوال 34: $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$

سوال 35: $h(t) = \frac{1}{t-1}$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 36: $h(t) = \left|t^3\right|$

سوال 37: $h(t) = 2t + 1$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 38: $h(t) = 2|t| + 1$

مجموعے، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

سوال 39 تا سوال 40 میں f ، g ، $f+g$ اور $f \cdot g$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 39: $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

جوابات: $D_f : -\infty < x < \infty,, D_g : x \geq 1,, R_f : -\infty < y < \infty,, R_g : y \geq 0,$
$D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g,, R_{f+g} : y \geq 1,, R_{f \cdot g} : y \geq 0$

سوال 40: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 41 تا سوال 42 میں f ، g ، $\frac{f}{g}$ اور $\frac{g}{f}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 41: $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

جواب: $D_f : -\infty < x < \infty,\ D_g : -\infty < x < \infty,\ R_f : y = 2,\ R_g : y \geq 1,$
$D_{\frac{f}{g}} : -\infty < x < \infty,\ R_{\frac{f}{g}} : 0 < y \leq 2,\ D_{\frac{g}{f}} : -\infty < x < \infty,\ R_{\frac{g}{f}} : y \geq \frac{1}{2}$

سوال 42: $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تفاعل کے مرکب

سوال 43: اگر $f(x) = x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $f(g(0))$ ج. $f(g(x))$ ہ. $f(f(-5))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(0))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

جواب:

ا. 2 ج. x^2+2 ہ. 5 ز. $g+10$

ب. 22 د. $x^2+10x+22$ و. -2 ح. x^4-6x^2+6

سوال 44: اگر $f(x)=x-1$ اور $g(x)=\frac{1}{x+1}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $f(g(\frac{1}{2}))$ ج. $f(g(x))$ ہ. $f(f(2))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(\frac{1}{2}))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

سوال 45: اگر $u(x)=4x-5$ ، $v(x)=x^2$ اور $f(x)=\frac{1}{x}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $u(v(f(x)))$ ج. $v(u(f(x)))$ ہ. $f(u(v(x)))$

ب. $u(f(v(x)))$ د. $v(f(u(x)))$ و. $f(v(u(x)))$

جواب:

ا. $\frac{4}{x^2}-5$ ج. $(\frac{4}{x}-5)^2$ ہ. $\frac{1}{4x^2-5}$

ب. $\frac{4}{x^2}-5$ د. $(\frac{1}{4x-5})^2$ و. $\frac{1}{(4x-5)^2}$

سوال 46: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=\frac{x}{4}$ اور $h(x)=4x-8$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $h(g(f(x)))$ ج. $g(h(f(x)))$ ہ. $f(g(h(x)))$

ب. $h(f(g(x)))$ د. $g(f(h(x)))$ و. $f(h(g(x)))$

سوال 47 اور سوال 47 میں $f(x)=x-3$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، $h(x)=x^3$ اور $j(x)=2x$ لیں۔ سوال کے ہر جزو کو تفاعل کا مرکب لکھیں۔ مرکب میں f ، g ، h اور j میں سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل ہو سکتے ہیں۔

سوال 47:

ا. $y = \sqrt{x} - 3$ ج. $y = x^{\frac{1}{4}}$ ہ. $y = \sqrt{(x-3)^3}$

ب. $y = 2\sqrt{x}$ د. $y = 4x$ و. $y = (2x-6)^3$

جواب:

ا. $f(g(x))$ ج. $g(g(x))$ ہ. $g(h(f(x)))$

ب. $j(g(x))$ د. $j(j(x))$ و. $h(j(f(x)))$

سوال 48:

ا. $y = 2x - 3$ ج. $y = x^9$ ہ. $y = 2\sqrt{x-3}$

ب. $y = x^{\frac{3}{2}}$ د. $y = x - 6$ و. $y = \sqrt{x^3 - 3}$

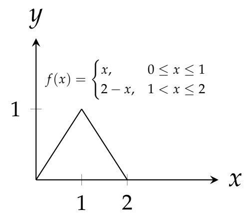
سوال 49: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	
(ب)	$x + 2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ہ)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	
(و)	$\frac{1}{x}$		x

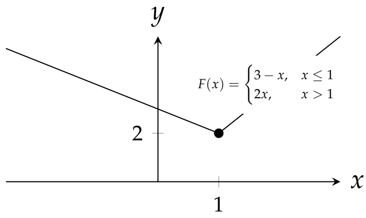
جواب:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(ب)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(ج)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(ہ)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
(و)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

سوال 50: کوئی عدد x لیں۔اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟



شکل 1.38



شکل 1.39

ٹکڑوں میں معین تفاعل

سوال 51 تا سوال 54 میں تفاعل ترسیم کریں۔

سوال 51:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

جواب: شکل 1.38

سوال 52:

$$g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

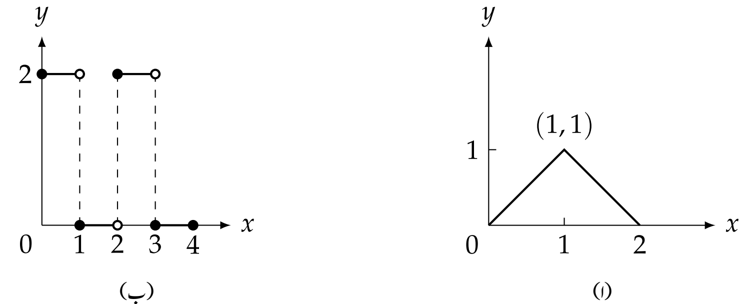
سوال 53:

$$F(x) = \begin{cases} 3-x, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

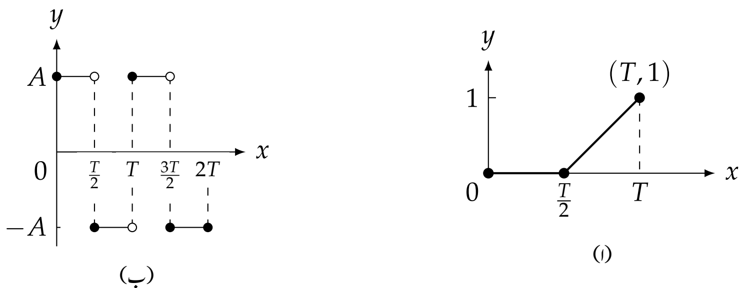
جواب: شکل 1.39

سوال 54:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$$



شکل 1.40: اشکال برائے سوال 55



شکل 1.41: اشکال برائے سوال 56

سوال 55: شکل 1.40 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

جواب: (الف) $y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ (ب) $y = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \text{ یا } 2 \le x < 3 \\ 0, & 1 \le x < 2 \text{ یا } 3 \le x \le 4 \end{cases}$

سوال 56: شکل 1.41 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چھت اور زمین تفاعل

سوال 57: x کی کن قیمتوں کے لئے (الف) $\lfloor x \rfloor = 0$ ہو گا؟ (ب) $\lceil x \rceil = 0$ ہو گا؟
جواب: الف $0 \le x < 1$ (ب) $-1 < x \le 0$

سوال 58: کون سے عدد صحیح x مساوات $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال 59: کیا تمام x کے لئے $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 60: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔ $f(x)$ کو x کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} \left|\lfloor x \rfloor\right|, x \geq 0 \\ \left|\lceil x \rceil\right|, \qquad x < 0 \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل

سوال 61: فرض کریں کہ f جفت تفاعل اور g طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط $\Re$ پر معین ہیں۔درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

ا. fg	د. $f^2 = ff$	ز. $g \circ f$
ب. $\frac{f}{g}$	ہ. $g^2 = gg$	ح. $f \circ f$
ج. $\frac{g}{f}$	و. $f \circ g$	ط. $g \circ g$

جواب:

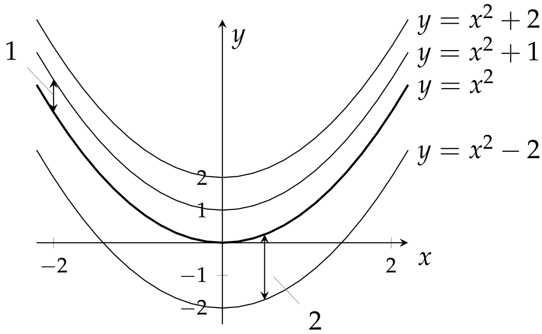
ا. طاق	د. جفت	ز. جفت
ب. طاق	ہ. جفت	ح. جفت
ج. طاق	و. جفت	ط. طاق

سوال 62: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

ترسیم

سوال 63: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = \sqrt{1-x}$ ترسیم کریں۔ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم کو بھی ترسیم کریں۔

سوال 64: فرض کریں کہ $f(x) = x - 7$ اور $g(x) = x^2$ ہیں۔ f اور g کے ساتھ $f \circ g$ اور $g \circ f$ کو بھی ترسیم کریں۔



شکل 1.42: تفاعل $f(x) = x^2$ کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال 1.30 اور مثال 1.31)۔

1.4 ترسیم کی منتقلی

اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ایسا کرنے سے نئی مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کا ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتا ہے۔ہم دائرہ اور قطع مکافی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر دیگر منحنیات پر بھی قابل لاگو ہے۔

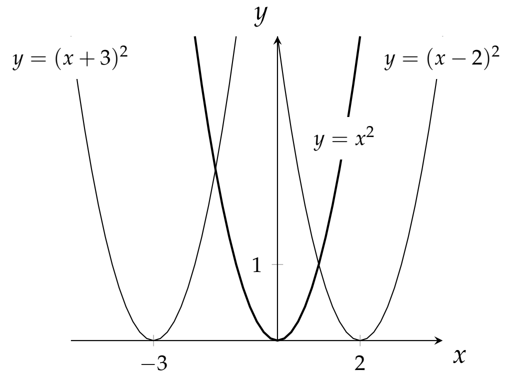
ترسیم کو کیسے منتقل کیا جاتا ہے

تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ $y = f(x)$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔

مثال 1.30: کلیہ $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے $y = x^2 + 1$ حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل 1.42)۔ □

مثال 1.31: مساوات $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = x^2 - 2$ ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل 1.42)۔ □

مثال 1.32: $y = x^2$ میں x کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل 1.43)۔ □



شکل 1.43: $y = x^2$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر x کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔دائیں منتقلی کی خطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال 1.32 اور مثال 1.33)

$y = f(x)$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لئے x کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال 1.33: $y = x^2$ میں x کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = (x-2)^2$ حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل 1.43)۔ $\square$

منتقلی کے کلیات

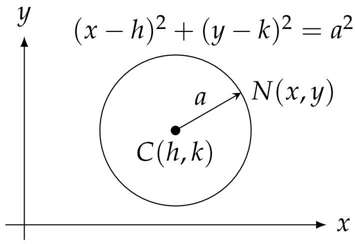
انتصابی منتقلی $\qquad y = f(x) + k$

$k > 0$ کی صورت میں ترسیم k اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ $k < 0$ کی صورت میں ترسیم $|k|$ اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

افقی منتقلی $\qquad y = f(x-h)$

$h > 0$ کی صورت میں ترسیم h اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ $h < 0$ کی صورت میں ترسیم $|h|$ اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

مثال 1.34: $y = (x-2)^2 + 3$ تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ $\square$



شکل 1.44: xy مستوی میں h,k کے گرد رداس a کا دائرہ

مساوات دائرہ

ایک مقررہ نقطہ سے یکساں فاصلے پر نقطوں کا سلسلہ دائرہ کہلاتا ہے۔مقررہ نقطہ کو دائرے کا **مرکز**[55] کہتے ہیں جبکہ مرکز سے دائرے تک فاصلے کو دائرے کی **رداس**[56] کہتے ہیں (شکل 1.44)۔ ہم نے مثال 1.11 میں دیکھ کہ مبدا کے گرد رداس a کے دائرے کی مساوات $x^2+y^2=a^2$ ہے۔مرکز کو (h,k) منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ حاصل ہوتی ہے۔

رداس a کا دائرہ جس کا مرکز (h,k) ہو کی معیاری مساوات

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \tag{1.3}$$

مثال 1.35: دائرہ $x^2+y^2=25$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔نئی مساوات $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ ہو گی۔اس کا مرکز $(-2,3)$ ہو گا۔ □

مثال 1.36: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز $3,4$ پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$$

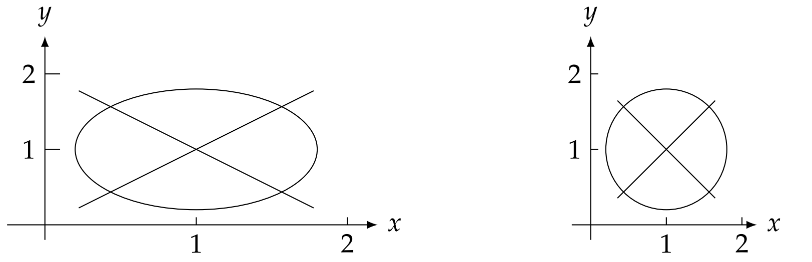
□

مثال 1.37: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x-1)^2+(y+5)^2=3$$

---

[55] center
[56] radius



(ا) چکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے

(ب) غیر چکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے

شکل 1.45: چکور اور غیر چکور نقش

حل: اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رداس $a=\sqrt{3}$ اور مرکز $(h,k)=(1,-5)$ لکھے جا سکتے ہیں۔ □

کمپیوٹر چکور نقش
چکور نقش سے مراد ایسا نقش ہے جس میں افقی اور انتصابی محدد کی پیمائش ایک جیسی ہو۔چکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔غیر چکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔چکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شیشہ نہیں ہے۔بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام x اور y محدد کی پیمائش غیر یکساں کرتے ہیں۔یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جا سکتا ہے کہ وہ چکور ترسیم ہی دکھائے۔شکل 1.45 میں چکور اور غیر چکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائری کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

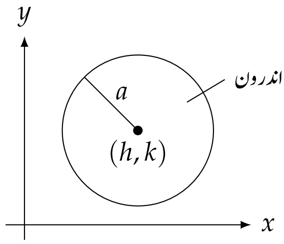
مثال 1.38: درج ذیل دائرہ کا رداس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+4x-6y-3&=0\\
x^2+4x+y^2-6y&=3\\
x^2+4x+4-4+y^2-6y+9-9&=3\\
(x+2)^2-4+(y-3)^2-9&=3\\
(x+2)^2+(y-3)^2&=16=4^2
\end{aligned}$$

یوں رداس $a=4$ اور مرکز $(h,k)=(-2,3)$ ہیں۔ □



شکل 1.46: دائرے کی اندرون

اندرون اور بیرون

دائرہ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے کم ہو۔ یہ نقطے درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2+(y-k)^2<a^2$$

اس خطہ کو دائرے کی **اندرون**[57] کہتے ہیں (شکل 1.46)۔

دائرے کی **بیرون**[58] ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے زیادہ ہو۔ ایسے نقطے درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2+(y-k)^2>a^2$$

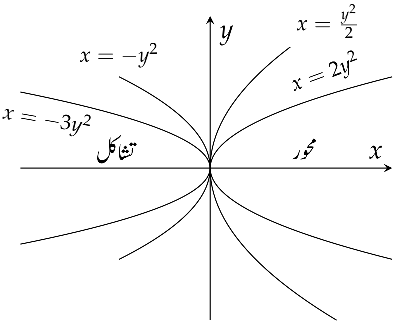
مثال 1.39:

خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کی اندرون	$x^2+y^2<1$
اکائی دائرہ اور اس کی اندرون	$x^2+y^2\leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2+y^2>1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2+y^2\geq 1$

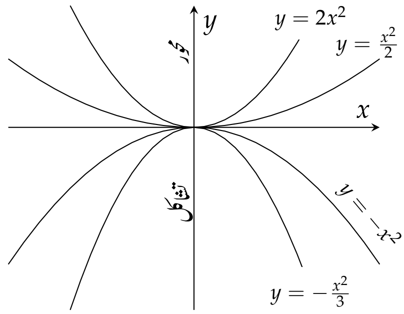
□

---

[57] interior
[58] exterior



شکل 1.48: قطع مکافی $x = ay^2$



شکل 1.47: قطع مکافی $y = ax^2$

قطع مکافی ترسیم

مساوات $y = 3x^2$ یا $y = -5x^2$ جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y = ax^2$$

کی ترسیم کو **قطع مکافی**[59] کہتے ہیں جس کی **محور**[60] تشاکل y محور ہے۔اس قطع مکافی کی **راس**[61] (جہاں قطع مکافی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبدا پر پائی جاتی ہے۔مثبت a $(a > 0)$ کی صورت میں یہ قطع مکافی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی a $a < 0$ کی صورت میں یہ قطع مکافی نیچے کو کھلتا ہے۔ $|a|$ کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکافی اتنا تنگ ہو گا (شکل 1.47)۔

کلیہ $y = ax^2$ میں x اور y کو آپس میں ادل بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$x = ay^2$$

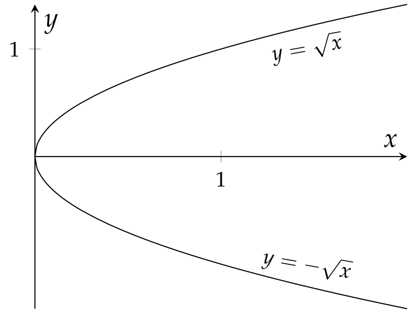
اس قطع مکافی کی ترسیم کا محور، x محور ہو گا اور اس کی راس مبدا پر پائی جائے گی (شکل 1.48)۔

مثال 1.40: کلیہ $x = y^2$ ہمیں x بطور y کا تفاعل دیتا ہے لیکن یہ ہمیں y بطور x کا تفاعل نہیں دیتا ہے۔ y کے لئے حل کرتے ہوئے $y = \mp\sqrt{x}$ حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت x کے لئے y کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تفاعل کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

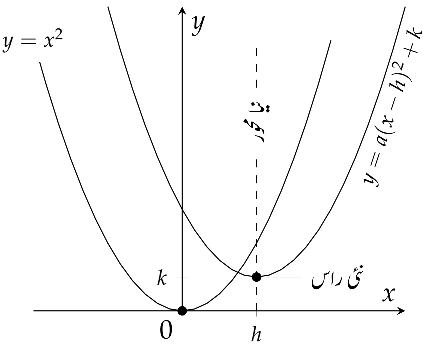
ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت x کے لئے یہ کلیات y کی ایک قیمت دیتے ہیں۔ $y = \sqrt{x}$ کی ترسیم قطع مکافی کا بالائی حصہ اور $y = -\sqrt{x}$ قطع مکافی کا نچلا حصہ دیتے ہیں (شکل 1.49)۔

□

parabola[59]
axis[60]
vertex[61]



شکل 1.49: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کی ترسیم مبدا پر ملتے ہیں اور مساوات $x = y^2$ کی ترسیم دیتے ہیں (مثال 1.40)



شکل 1.50: قطع مکافی $y = ax^2,\ a > 0$ کو h اکائیاں دائیں اور k اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے

دو درجی مساوات $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

قطع مکافی $y = ax^2$ کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y = a(x-h)^2 \tag{1.4}$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y - k = a(x-h)^2 \tag{1.5}$$

لکھتے ہیں۔ دونوں منتقلی سے قطع مکافی کی راس (h, k) کو منتقل ہوتی ہے جبکہ اس کا محور $x = k$ ہو گا (شکل 1.50)۔

مساوات 1.5 کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.6}$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت $y = ax^2$ کی ترسیم ہو گی جس کو کہیں اور منتقل کیا گیا ہے۔ کیوں؟ اس لئے کہ جس طرح مساوات 1.5 سے مساوات 1.6 حاصل کی گئی اسی طرح واپس مساوات 1.6 سے مساوات 1.5 بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ منحنی $y = ax^2 + bx + c$ اور $y = ax^2$ کی صورت اور سمت بندی ایک جیسی ہیں۔

قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c$ کا محور خط $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا۔ اس کا قطع y حاصل کرنے کی خاطر $x = 0$ پر کیا جائے گا۔

منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کی ترسیم مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم قطع مکافی ہے جو $a > 0$ کی صورت میں اوپر رخ اور $a < 0$ کی صورت میں نیچے رخ کھلتا ہے۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{1.7}$$

اس کی راس اس نقطے پر ہو گی جہاں قطع مکافی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔راس کا x محدد $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا جس کو قطع مکافی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1.41: ترسیم قطع مکافی
مساوات $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ترسیم کریں۔
حل: **پہلا قدم:** مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

دوسرا قدم: چونکہ $a < 0$ ہے لہٰذا قطع مکافی نیچے کھلا ہے۔
تیسرا قدم: قطع مکافی کی محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

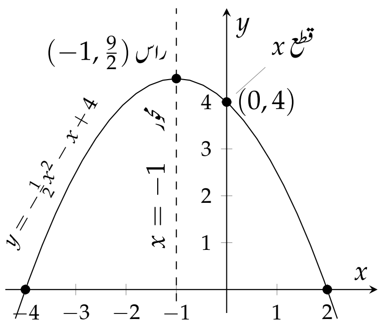
یوں راس کا x محدد -1 ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

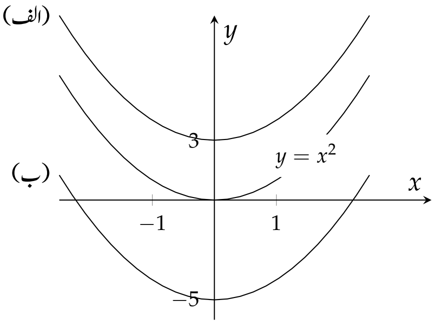
اس طرح راس $(-1, \frac{9}{2})$ ہو گی۔
چوتھا قدم: قطع x (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= 0 && \text{قطع مکافی کی مساوات میں } y = 0 \text{ پر کریں}\\
x^2 + 2x - 8 &= 0\\
(x-2)(x+4) &= 0 && \text{دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں}\\
x = 2, \quad x &= -4
\end{aligned}$$

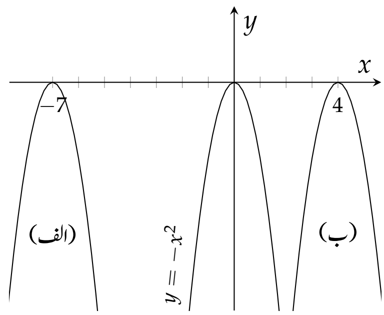
پانچواں قدم: $y = ax^2$ کا خاکہ بناتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کر کے منتقلی کے بعد کے xy محور کھینچیں (شکل 1.51)۔ □



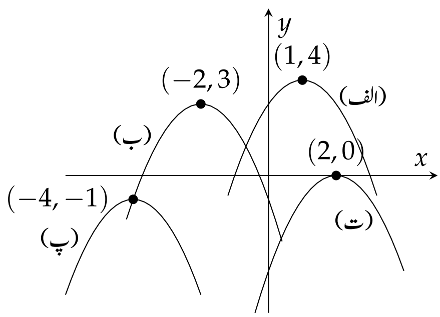
شکل 1.51: ترسیم قطع مکافی (مثال 1.41)



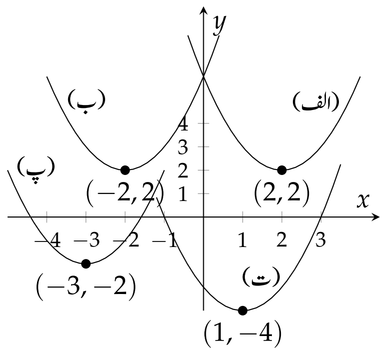
شکل 1.53: اشکال برائے سوال 2



شکل 1.52: اشکال برائے سوال 1



شکل 1.55: اشکال برائے سوال 4



شکل 1.54: اشکال برائے سوال 3

سوالات

ترسیم کی منتقلی

سوال 1: شکل 1.52 میں $y=-x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

جواب: (الف) $y=-(x+7)^2$ (ب) $y=-(x-4)^2$

سوال 2: شکل 1.53 میں $y=x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

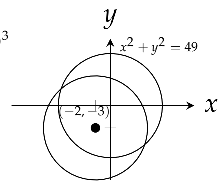
سوال 3: شکل 1.54 میں دکھائے گئے ترسیم کی مساوات درج ذیل میں سے منتخب کریں۔

$$y=(x-1)^2-4,\quad y=(x-2)^2+2,\quad y=(x+2)^2+2,\quad y=(x+3)^2-2$$

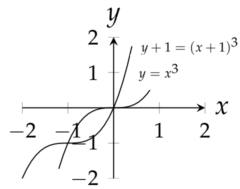
جواب: (الف) $y=(x-2)^2+2$ (ب) $y=(x+2)^2+2$ (پ) $y=(x+3)^2-2$ (ت) $y=(x-1)^2-4$

سوال 4: شکل 1.55 میں $y=-x^2$ کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔ چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔

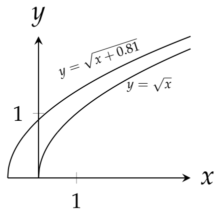
سوال 5 تا سوال 16 میں ترسیم منتقل کریں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساوات حاصل کریں۔ اصل اور منتقل شدہ ترسیم کھینچیں۔



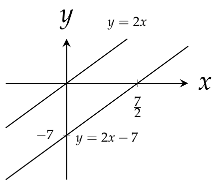
شکل 1.56



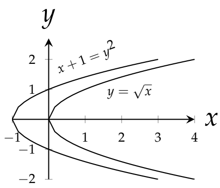
شکل 1.57



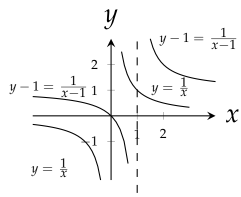
شکل 1.58



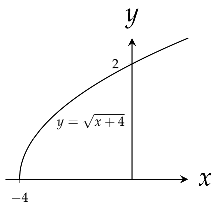
شکل 1.59



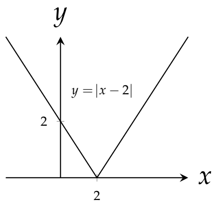
شکل 1.60



شکل 1.61



شکل 1.62



شکل 1.63

سوال 5: $x^2+y^2=49$ کو 3 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $(x+2)^2+(y+3)^2=49$، شکل 1.56

سوال 6: $x^2+y^2=25$ کو 3 اوپر، 4 بائیں منتقل کریں۔

سوال 7: $y=x^3$ کو 1 نیچے، 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y+1=(x+1)^3$، شکل 1.57

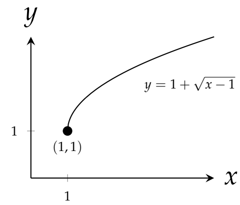
سوال 8: $y=x^{\frac{2}{3}}$ کو 1 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال 9: $y=\sqrt{x}$ کو 0.81 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y=\sqrt{x+0.81}$، شکل 1.58

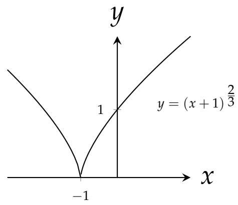
سوال 10: $y=-\sqrt{x}$ کو 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 11: $y=2x-7$ کو 7 اوپر منتقل کریں۔
جواب: $y=2x$، شکل 1.59

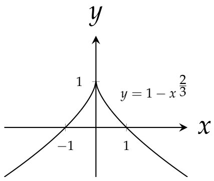
سوال 12: $y=\frac{1}{2}(x+1)+5$ کو 5 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔



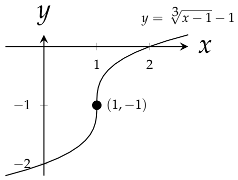
شکل 1.64



شکل 1.65



شکل 1.66



شکل 1.67

سوال 13: $y=x^2$ کو 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $x+1=y^2$ ، شکل 1.60

سوال 14: $x=-3y^2$ کو 2 اوپر، 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 15: $y=\frac{1}{x}$ کو 1 اوپر، 1 دائیں منتقل کریں۔
جواب: $y-1=\frac{1}{x-1}$ ، شکل 1.61

سوال 16: $y=\frac{1}{x^2}$ کو 1 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

سوال 17 تا سوال 36 میں تفاعل ترسیم کریں۔ صفحہ 38 پر شکل 1.21 میں دی گئی ترسیم کا سہارا لیں۔

سوال 17: $y=\sqrt{x+4}$
جواب: شکل 1.62

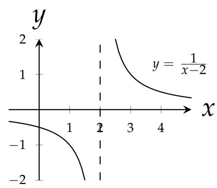
سوال 18: $y=\sqrt{9-x}$

سوال 19: $y=|x-2|$
جواب: شکل 1.63

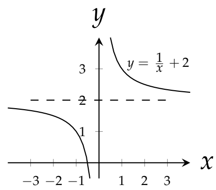
سوال 20: $y=|1-x|-1$

سوال 21: $y=1+\sqrt{x-1}$
جواب: شکل 1.64

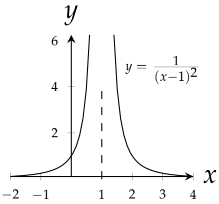
سوال 22: $y=1-\sqrt{x}$



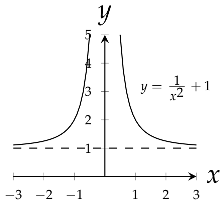
شکل 1.68



شکل 1.69



شکل 1.70



شکل 1.71

سوال 23: $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.65

سوال 24: $y = (x-8)^{\frac{2}{3}}$

سوال 25: $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.66

سوال 26: $y + 4 = x^{\frac{2}{3}}$

سوال 27: $y = \sqrt[3]{x-1} - 1$
جواب: شکل 1.67

سوال 28: $y = (x+2)^{\frac{3}{2}} + 1$

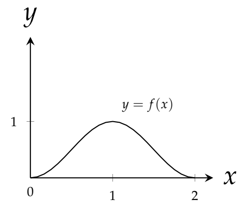
سوال 29: $y = \frac{1}{x-2}$
جواب: شکل 1.68

سوال 30: $y = \frac{1}{x} - 2$

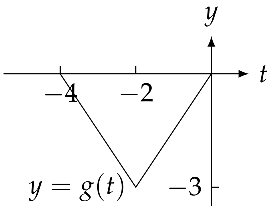
سوال 31: $y = \frac{1}{x} + 2$
جواب: شکل 1.69

سوال 32: $y = \frac{1}{x+2}$

سوال 33: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$
جواب: شکل 1.70



شکل 1.72: تفاعل برائے سوال 37



شکل 1.73: تفاعل برائے سوال 38

سوال 34: $y = \frac{1}{x^2} - 1$

سوال 35: $y = \frac{1}{x^2} + 1$
جواب: شکل 1.71

سوال 36: $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

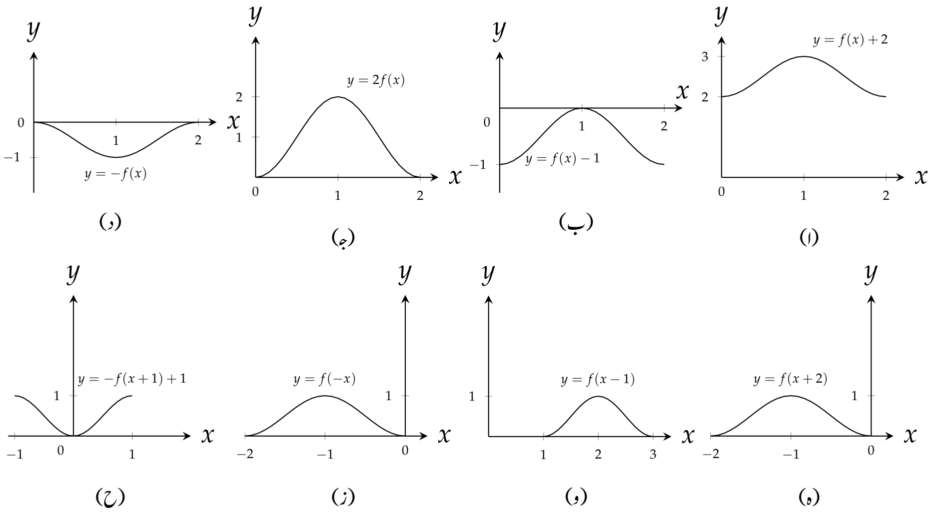
سوال 37: شکل 1.72 میں دکھائے گئے تفاعل $f(x)$ کا دائرہ کار $[0,2]$ اور سعت $[0,1]$ ہے۔درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔

ا. $f(x) + 2$
ب. $f(x) - 1$
ج. $2f(x)$
د. $-f(x)$
ہ. $f(x+2)$
و. $f(x-1)$
ز. $f(-x)$
ح. $-f(x+1) + 1$

جوابات:اشکال کے لئے شکل 1.74 دیکھیں۔جبکہ دائرہ کار اور سعت درج ذیل ہیں۔

ا. $D : [0,2], R : [2,3]$
ب. $D : [0,2], R : [-1,0]$
ج. $D : [0,2], R = [0,2]$
د. $D : [0,2], R : [-1,0]$
ہ. $D : [-2,0], R : [0,1]$
و. $D : [1,3], R : [0,1]$
ز. $D : [-2,0], R : [0,1]$
ح. $D : [-1,1], R : [0,1]$

سوال 38: شکل 1.73 میں دکھائے گئے تفاعل $g(t)$ کا دائرہ کار $[-4,0]$ اور سعت $[-3,0]$ ہے۔درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔



شکل 1.74: اشکال برائے سوال 37 کے جوابات

ا. $g(-t)$ ج. $g(t)+3$ ہ. $g(-t+2)$ ز. $g(1-t)$

ب. $-g(t)$ د. $1-g(t)$ و. $g(t-2)$ ح. $-g(t-4)$

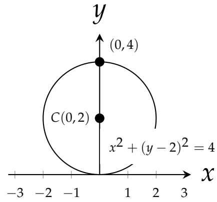
دائرے

سوال 39 تا سوال 44 میں دائرے کا رداس a اور مرکز $C(h,k)$ دیا گیا ہے۔دائرے کی مساوات لکھیں۔دائرہ اور دائرے کی مرکز کا xy مستوی میں خاکہ کھینچیں۔دائرے کا قطع x اور قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کی نشاندہی کریں اور اس کے محدد لکھیں۔

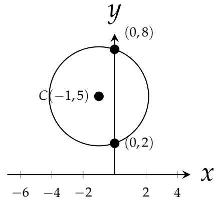
سوال 39: $C(0,2), \quad a = 2$
جواب: $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ، شکل 1.75

سوال 40: $C(-3,0), \quad a = 3$

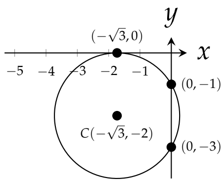
سوال 41: $C(-1,5), \quad a = \sqrt{10}$
جواب: $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$ ، شکل 1.76



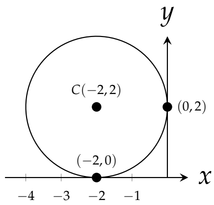
شکل 1.75



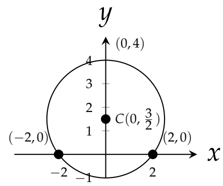
شکل 1.76



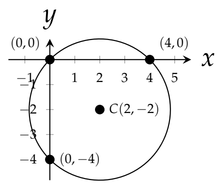
شکل 1.77



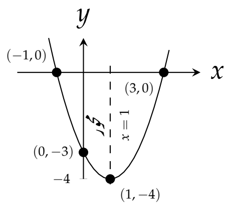
شکل 1.78



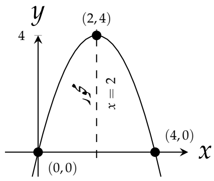
شکل 1.79



شکل 1.80



شکل 1.81



شکل 1.82

سوال 42: $C(1,1), \quad a=\sqrt{2}$

سوال 43: $C(-\sqrt{3},-2), \quad a=2$
جواب: $(x+\sqrt{3})^2+(y+2)^2=4$ ، شکل 1.77

سوال 44: $C(3,\frac{1}{2}), \quad a=5$

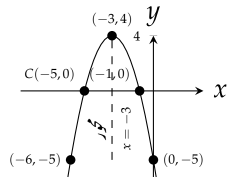
سوال 45 تا سوال 50 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔دائرے کا مرکز اور قطع x ، قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کے محدد دکھائیں۔

سوال 45: $x^2+y^2+4x-4y+4=0$
جواب: $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ ، شکل 1.78

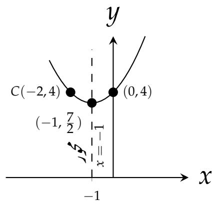
سوال 46: $x^2+y^2-8x+4y+16=0$

سوال 47: $x^2+y^2-3y-4=0$
$x^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$ ، شکل 1.79

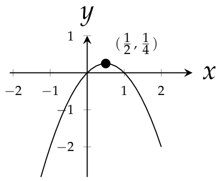
سوال 48: $x^2+y^2-4x-\frac{9}{4}=0$



شکل 1.83



شکل 1.84



شکل 1.85

سوال 49: $x^2+y^2-4x+4y=0$
$(x-2)^2(y+2)^2=8$ ، شکل 1.80

سوال 50: $x^2+y^2+2x=3$

قطع مکافی

سوال 51 تا سوال 58 میں دیے گئے قطع مکافی ترسیم کریں۔ راس، محور اور قطع x ، قطع y بھی ظاہر کریں۔

سوال 51: $y=x^2-2x-3$
$y=x^2-2x-3$ ، شکل 1.81

سوال 52: $y=x^2+4x+3$

سوال 53: $y=-x^2+4x$
جواب: $y=-x^2+4x$ شکل 1.82

سوال 54: $y=-x^2+4x-5$

سوال 55: $y=-x^2-6x-5$
جواب: شکل 1.83

سوال 56: $y=2x^2-x+3$

سوال 57: $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$
جواب: شکل 1.84

سوال 58: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

سوال 59: قطع مکافی $y = x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔
جواب: شکل 1.85

سوال 60: قطع مکافی $y = 3 - 2x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $g(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

عدم مساوات

سوال 61 تا سوال 68 میں دیے گئے عدم مساوات اور عدم مساوات کی جوڑیوں پر تبصرہ کریں۔

سوال 61: $x^2 + y^2 > 7$
جواب: رداس $\sqrt{7}$ کے دائرے کی بیرون۔دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 62: $x^2 + y^2 < 5$

سوال 63: $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$
جواب: $(1,0)$ پر مرکز اور رداس 2 دائرے پر اور اس کے اندر۔

سوال 64: $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$

سوال 65: $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$
جواب: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ جھلی۔(وہ نقطے جن کا مبدا سے فاصل 1 اور 2 کے بیچ ہے۔)

سوال 66: $x^2 + y^2 \leq 4, \quad (x+2)^2 + y^2 \leq 4$

سوال 67: $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$
جواب: خط $y = -3$ کی بالائی جانب رداس 3 کے دائرہ کی اندرون۔دائرے کا مرکز $(0,-3)$ ہے۔

سوال 68: $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4, \quad x > 2$

سوال 69: ایسا عدم مساوات لکھیں جو رداس $\sqrt{6}$ کے دائرہ جس کا مرکز $(-1,2)$ ہو کے اندر نقطوں کو ظاہر کرتی ہو۔
جواب: $(x+2)^2+(y-1)^2<6$

سوال 70: رداس 4 اور مرکز $(-4,2)$ والے دائرے کے باہر نقطوں کے لئے عدم مساوات لکھیں۔

سوال 71: رداس 2 اور مرکز $(0,0)$ دائرے پر یا اس کے اندر، اور نقطہ $(1,0)$ سے گزرتا انتصابی خط پر یا اس کے دائیں جانب نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔
جواب: $x^2+y^2\leq 2, \quad x\geq 1$

سوال 72: رداس 2 اور مرکز $(0,0)$ والے دائرے کے باہر اور ایسے دائرا، جس کا مرکز $(1,3)$ ہو اور جو مبدا سے گزرتا ہو، کے اندر نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

منتقلی خطوط

سوال 73: خط $y=mx$ جو مبدا سے گزرتا ہے کو افقی اور انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تا کہ یہ نقطہ (x_0,y_0) سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں (جس کو نقطہ-ڈھلوان مساوات کہتے ہیں)۔
جواب: $y=y_0+m(x-x_0)$

سوال 74: خط $y=mx$ کو انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تا کہ یہ نقطہ $(0,b)$ سے گزرے۔نئے خط کی مساوات تلاش کریں۔

خطوط، دائرے اور قطع مکافی کا ایک دوسرے کو قطع ہونا

سوال 75 تا سوال 82 میں دیے دو مساوات ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

سوال 75: $y=2x, \quad x^2+y^2=1$
جواب: $(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$

سوال 76: $x+y=1, \quad (x-1)^2+y^2=1$

سوال 77: $y-x=1, \quad y=x^2$
جواب: $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}), \quad (\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2})$

سوال 78: $x+y=0, \quad y=-(x-1)^2$

سوال 79: $y=-x^2, \quad y=2x^2-1$
جواب: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

سوال 80: $y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=(x-1)^2$

سوال 81: $x^2+y^2=1, \quad (x-1)^2+y^2=1$
جواب: $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

سوال 82: $x^2+y^2=1, \quad x^2+y=1$

سوال 83 تا سوال 86 میں مساوات $y=f(ax)$ میں مستقل a کی تبدیلی کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر ہم $y=f(ax)$ کو کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کرتے ہیں۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y=f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a=2,3,\cdots,10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y=f(ax)$ ترسیم کریں۔ a کی (مثبت) قیمت بڑھانے کے اثرات پر تبصرہ کریں۔

ب. $y=f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a=-2,-3,\cdots,-10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y=f(ax)$ ترسیم کریں۔ اب ترسیم پر اثرات کیا ہیں؟

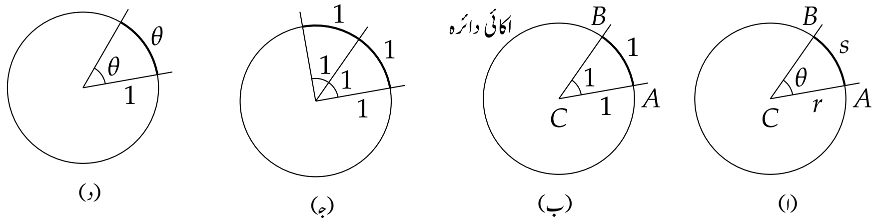
ج. $y=f(x)$ اور $y=f(ax)$ کو $a=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ کے لئے ترسیم کریں۔ ترسیم پر $|a|<1$ کا کیا اثر پایا جاتا ہے؟

سوال 83: $f(x)=\frac{5x}{x^2+4}, \quad [-10,10]$

سوال 84: $f(x)=\frac{2x(x-1)}{x^2+1}, \quad [-3,-2]$

سوال 85: $f(x)=\frac{x+1}{2x^2+1}, \quad [-2,-2]$

سوال 86: $f(x)=\frac{x^4-4x^3+10}{x^2+4}, \quad [-1,4]$



شکل 1.86: ریڈیئن کی تعریف

1.5 تکونیاتی تفاعل

اس حصہ میں ریڈیئن، تکونی تفاعل، دوریت اور بنیادی تکونی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

ریڈیئن

چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات کی صورت میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے جہاں 180° کو π ریڈیئن کہتے ہیں۔ ریڈیئن کی استعمال سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

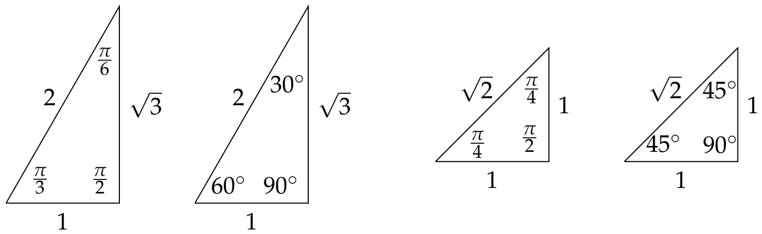
شکل 1.86-ا میں رداس r کا دائرہ دکھایا گیا ہے جس کے مرکز C سے دو شعاعیں نکل رہی ہیں جو مرکز پر وسطی زاویہ θ بناتی ہیں۔ یہ شعاعیں دائرے کو A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ قوس AB کی لمبائی s ہے۔ اگر دائرے کا رداس 1 ہو تب ہم اس دائرے کو **اکائی دائرہ**[62] کہتے ہیں۔ اکائی دائرے پر اکائی لمبائی کا قوس جتنا زاویہ بناتی ہے اس کو ایک ریڈیئن زاویہ کہتے ہیں (یہی ایک ریڈیئن کی تعریف ہے)۔ شکل 1.86-ب میں ایک ریڈیئن کی اس تعریف کی وضاحت کی گئی ہے۔ شکل 1.86-ج میں اکائی لمبائی کے دو قوس ساتھ ساتھ رکھے گئے ہیں جو ایک ایک ریڈیئن کا وسطی زاویہ بناتے ہیں۔ یوں کل قوس کی لمبائی 2 ہے اور کل زاویہ 2 ریڈیئن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اکائی دائرے پر وسطی زاویہ کی ریڈیئن میں ناپ قوس کی لمبائی کے برابر ہو گی۔ شکل 1.86-د میں اس حقیقت کو دکھایا گیا ہے۔

زاویہ ACB کی ریڈیئن ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس AB کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط 2π ہے اور ایک مکمل چکر 360° ہے لہٰذا درج ذیل تعلق لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boxed{\pi \text{ ریڈیئن} = 180^\circ}$$

---

[62] unit circle



شکل 1.87: اشکال برائے مثال 1.42

مثال 1.42: **درجہ سے ریڈیئن میں زاویے کی تبدیلی**

$45°$ کو ریڈیئن میں لکھیں اور $\frac{\pi}{6}$ کو درجہ میں لکھیں۔

حل: شکل 1.87 دیکھیں۔

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈیئن}$$
$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30°$$

□

ریڈیئن اور درجہ

$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0.02 \text{ ریڈیئن}$$
$$1 \text{ ریڈیئن} = \frac{180}{\pi} \approx 57°$$

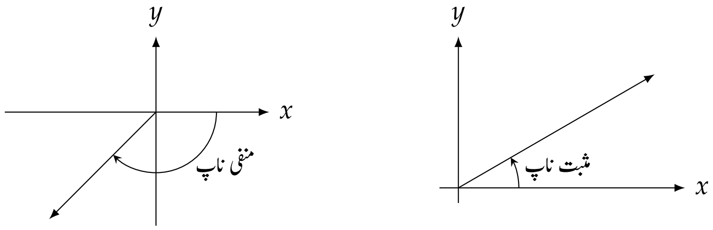
دھیان رہے کہ زاویے کی پیمائش درجات میں ہونے کو $°$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ریڈیئن کو بغیر علامت لکھا جاتا ہے۔یوں $\theta = 45°$ سے مراد پینتالیس درجہ ہو گا جبکہ $\theta = 3$ سے مراد تین ریڈیئن ہو گا۔

xy مستوی میں شعاع کا راس مبدا پر اور شعاع کا ابتدائی مقام مثبت x محور پر ہونے کی صورت میں زاویہ کے مقام کو **معیاری مقام**[63] کہتے ہیں۔مثبت x محور سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ زاویہ کی ناپ مثبت اور گھڑی کی سوئی کی رخ ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل 1.88)۔یوں مثبت x محور کا زاویہ 0 ریڈیئن اور منفی x محور کا زاویہ π ریڈیئن ہو گا۔

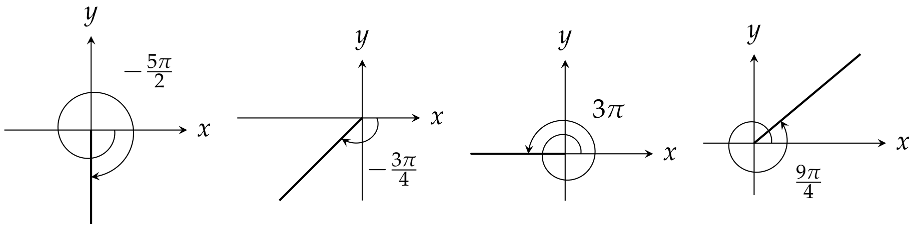
گھڑی مخالف چکر بیان کرتے ہوئے زاویے کی ناپ 2π یعنی $360°$ سے زیادہ ہو سکتی ہے۔اسی طرح گھڑی کی رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ کچھ بھی ممکن ہے (شکل 1.89)۔

---

[63] standard position

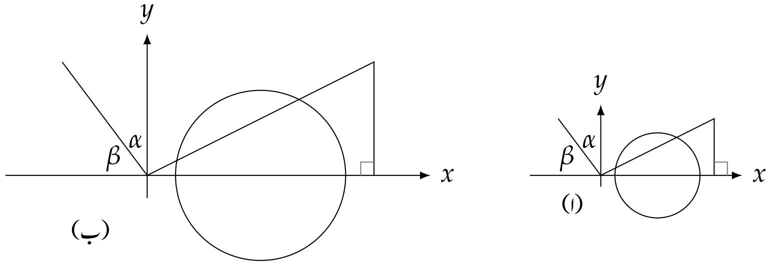


شکل 1.88: زاویے کی ناپ

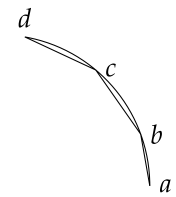


شکل 1.89: مثبت اور منفی ریڈیئن

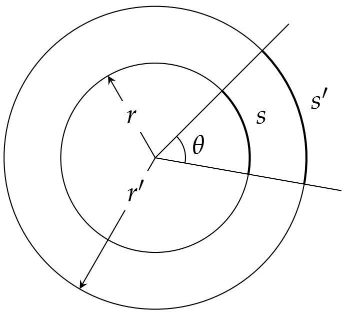
شکل 1.90-ا میں چند اشکال کو لچکدار xy مستوی پر دکھایا گیا ہے۔اس xy مستوی کو کھینچ کر x رخ اور y رخ کی لمبائیاں k گنا کرنے سے شکل 1.90-ب حاصل ہوتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ جسامت k گنا کر دی گئی ہے۔یوں اگر بائیں شکل کے تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہوں تب اس کی وتر کی لمبائی $\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گی۔دائیں شکل میں تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب ka اور kb ہوں گی لہٰذا اس کا وتر $\sqrt{(ka)^2+(kb)^2}=k\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گا۔آپ نے دیکھا کہ دائیں مستوی پر نا صرف افقی اور انتصابی خط بلکہ ترچھے خط کی لمبائی بھی k گنا ہو گئی ہے۔چونکہ ہر ترچھے خط کو کسی تکون کا وتر تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا دائیں مستوی پر (ہر افقی اور ہر انتصابی خط کے ساتھ ساتھ) ہر ترچھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی۔کیا جسامت k گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی k گنا ہو گی؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جس کا ثبوت اب پیش کرتے ہیں۔



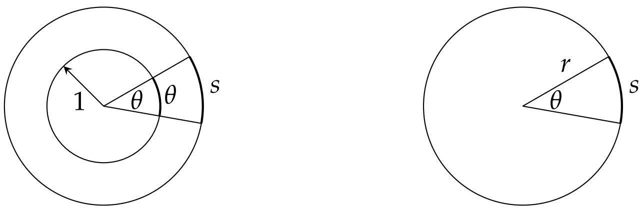
شکل 1.90: شکل بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر اثر نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 1.91: قوس کی لمبائی



شکل 1.92: محیط دائرہ



شکل 1.93: قوس، رداس اور زاویے کا تعلق۔

شکل 1.91 میں قوس کی لمبائی جاننے کی خطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی لی جا سکتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔اب اگر اس قوس کی جسامت کو k گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی لہٰذا ان کی مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی k گنا ہو گی۔(ثبوت مکمل ہوا۔)

شکل 1.93-ا میں رداس r کے دائرے پر قوس s اور وسطی زاویہ θ دکھائے گئے ہیں۔اس دائرے کے مرکز پر ہم 1 رداس کا دائرہ بناتے ہیں (شکل 1.93-ب؛ اگر دیے گئے دائرے کا رداس اکائی سے کم ہو تب یہ دائرہ اکائی دائرے کے اندر نظر آئے گا)۔ (جیسا شکل 1.93-ب میں دکھایا گیا ہے) ریڈیئن کی تعریف کی رو سے اکائی دائرے پر قوس اور زاویہ آپس میں برابر ہوں گے۔شکل 1.93-ب میں دونوں دائروں پر قوس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{s}{\theta}$ اور دائروں کے رداس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{r}{1}$ ایک جیسا ہوں گے، یعنی $\frac{s}{\theta} = \frac{r}{1}$ جس سے درج ذیل اہم ترین کلیہ ملتا ہے۔

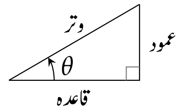
قوس، رداس اور زاویے کا تعلق

$$s = r\theta$$

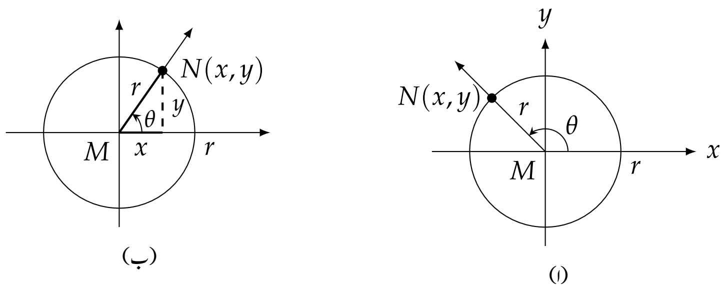
زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں

یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔یوں اگر ہم زاویہ $\frac{\pi}{6}$ کی بات کریں تب اس سے مراد $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن کا زاویہ ہو گا ناکہ $\frac{\pi}{6}$ درجے کا زاویہ۔

سائن	$\sin\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$,	کوسیکنٹ	$\csc = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$
کوسائن	$\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$,	سیکنٹ	$\sec = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$
ٹینجنٹ	$\tan\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$,	کوٹینجنٹ	$\cot = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$



شکل 1.94: قائمہ مثلث اور تکونیاتی تفاعل



شکل 1.95: تکونیاتی تفاعل

مثال 1.43: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر 2π لمبائی کا قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بناتا ہے۔ (ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو $\frac{3\pi}{4}$ وسطی زاویہ بناتا ہو۔
حل:

$$\text{(الف)} \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(ب)} \quad s = r\theta = 8\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) = 6\pi$$

□

چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل

آپ زاویہ حادہ کے تکونیاتی تفاعل سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل 1.94)۔ ہم انہیں تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرجہ اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس r کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب ان تکونیاتی تفاعل کو نقطہ $N(x,y)$ کے محدد کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتا ہوا شعاع دائرے کو $N(x,y)$ پر قطع کرتا ہے۔

شکل 1.95-ا کو دیکھتے ہوئے ان تفاعل کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

چھ تکونیاتی تفاعل

$$\begin{aligned}
&\text{سائن} \quad \sin\theta = \frac{y}{r} && \text{کوسیکنٹ} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}\\
&\text{کوسائن} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} && \text{سیکنٹ} \quad \sec\theta = \frac{r}{x}\\
&\text{ٹینجنٹ} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} && \text{کوٹینجنٹ} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

آپ شکل 1.95-ب سے دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ حادہ کی صورت میں تکونیاتی تفاعل کی توسیعی تعریف اور قائمہ زاویہ تکونی تعریف ایک جیسے ہیں۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $x=0$ کی صورت میں $\tan\theta$ اور $\sec\theta$ غیر معین ہیں (چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے)۔یوں یہ $\theta = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots$ کے لئے غیر معین ہیں۔اسی طرح $y=0$ یعنی $\theta = 0, \mp\pi, \mp2\pi, \cdots$ کے لئے $\cot\theta$ اور $\csc\theta$ غیر معین ہیں۔

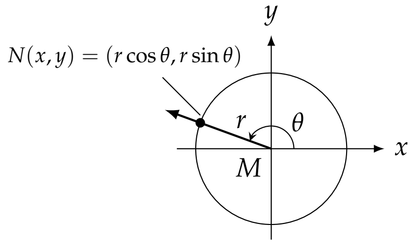
اسی طرح درج ذیل تعریف بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

تکونیاتی تفاعل کے باہمی تعلقات

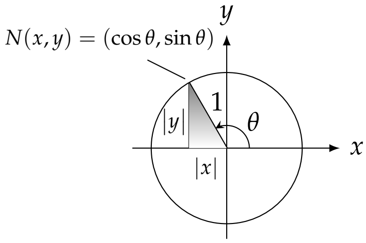
$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} & \cot\theta &= \frac{1}{\tan\theta}\\
\sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} & \csc\theta &= \frac{1}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

مستوی میں نقطہ $N(x,y)$ کو مبدا سے فاصلہ r اور زاویہ θ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے (شکل 1.96)۔چونکہ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ اور $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$



شکل 1.96: مستوی میں کارتیسی محدد کا r اور θ میں اظہار۔



شکل 1.97: زاویہ θ کے لئے زاویہ حادہ تکون

تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں

شکل 1.95 کے دائرے میں $r = 1$ ہونے کی صورت میں $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی تعارفی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\cos\theta = x, \quad \sin\theta = y$$

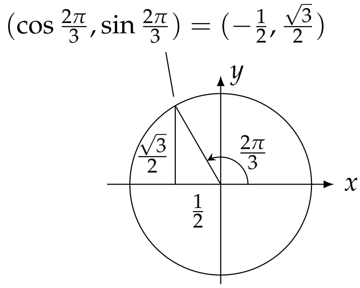
یوں ہم سائن اور کوسائن کی قیمتوں کو بالترتیب نقطہ $N(x,y)$ کی x اور y محدد سے پڑھ سکتے ہیں۔نقطہ N سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون سے بھی انہیں حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 1.97)۔ہم x اور y کی قیمتیں تکون کی اطراف سے ناپتے ہیں۔ x اور y کی علامتیں اس ربع سے تعین کی جاتی ہیں جس میں تکون پایا جاتا ہو۔

مثال 1.44: $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔
حل: **پہلا قدم** زاویے کو معیاری مقام پر اکائی دائرے میں بنائیں۔حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.98)۔
دوسرا قدم جہاں اکائی دائرے کو شعاع قطع کرتی ہے اس نقطے کے محدد دریافت کریں:

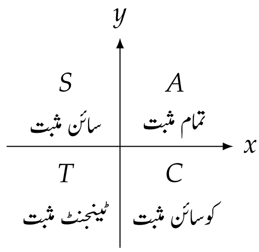
$$\cos\frac{2\pi}{3} = x \text{ محدد کا } N = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = y \text{ محدد کا } N = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تکونیاتی تفاعل کی قیمتوں کی علامت جاننے کے لئے شکل 1.99 میں دکھایا گیا $CAST$ کا قاعدہ یاد رکھیں۔ □

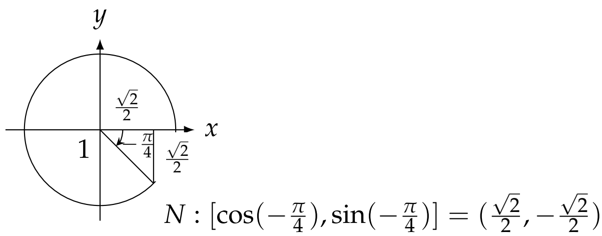
مثال 1.45: $-\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔
حل: **پہلا قدم:** معیاری مقام پر اکائی دائرے میں زاویہ کھینچ کر حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.100)۔



شکل 1.98: تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں (مثال 1.44)



شکل 1.99: قاعدہ $CAST$



شکل 1.100: شکل برائے مثال 1.45

دوسرا قدم: نقطہ N کے محدد تلاش کریں۔

$$\cos(-\tfrac{\pi}{4}) = N \text{ کا محدد } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(-\tfrac{\pi}{4}) = N \text{ کا محدد } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

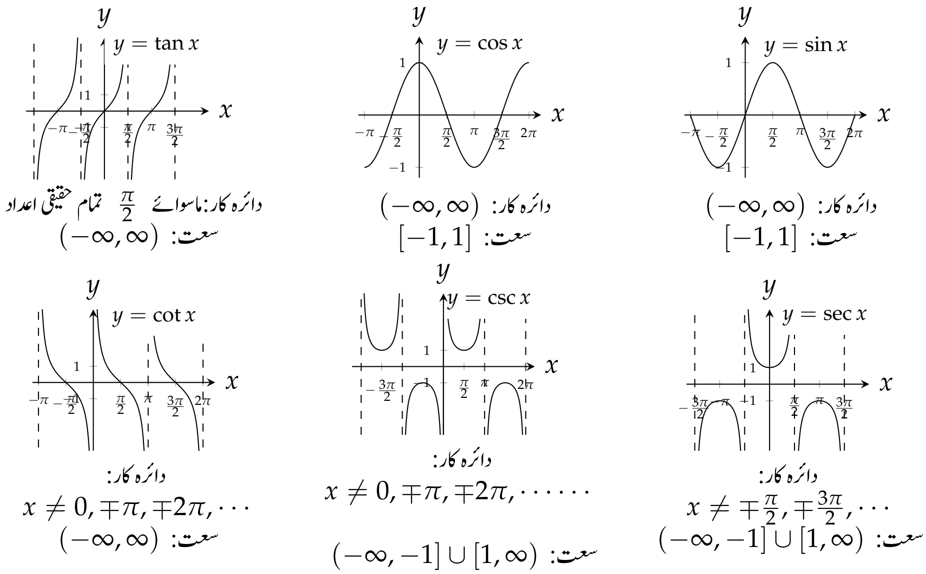
□

درج بالا دو مثالوں کی طرح حل کرتے ہوئے جدول میں دیے قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔

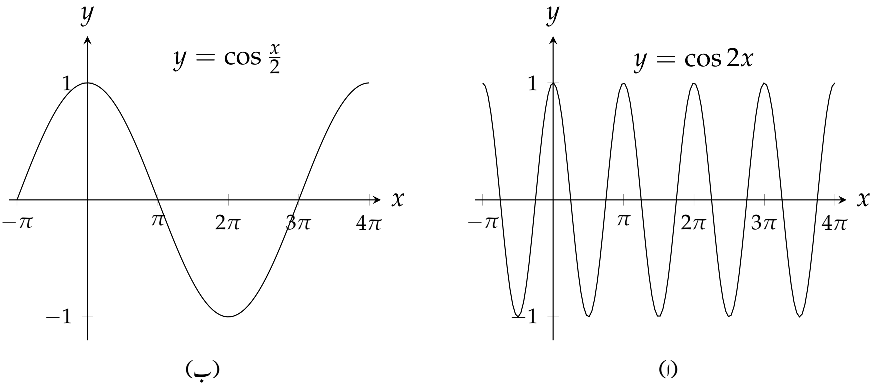
ترسیم

تکونیاتی تفاعل کو کارتیسی محدد میں ترسیم کرتے ہوئے ہم عموماً غیر تابع متغیر θ کو x سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 1.101)۔

درجہ	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°
ریڈیئن	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0



شکل 1.101: چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کے ترسیم۔ان تفاعل کی دوریت صاف ظاہر ہے۔



شکل 1.102: $\cos 2x$ کا دوری عرصہ کم ہے جبکہ $\cos\frac{x}{2}$ کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

دوریت

معیاری مقام پر زاویہ x اور زاویہ $x+2\pi$ ہم مکان ہوں گے۔یوں ان دونوں زاویوں کے تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔مثال کے طور پر $\cos(x+2\pi)=\cos x$ ہو گا۔ایسے تفاعل جن کی قیمت مقررہ وقفوں سے دہراتی ہو **دوری**[64] کہلاتا ہے۔

تعریف: اگر کسی مثبت عدد p کے لئے تمام x پر $f(x+p)=f(x)$ ہو تب تفاعل $f(x)$ **دوری** کہلاتا ہے۔ p کی ایسی کم سے کم قیمت کو $f(x)$ کا **دوری عرصہ**[65] کہتے ہیں۔

ہم شکل 1.101 سے دیکھ سکتے ہیں کہ ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ تفاعل کا دوری عرصہ $p=\pi$ ہے جبکہ باقی چار تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔

شکل 1.102 میں $y=\cos 2x$ اور $y=\cos\frac{x}{2}$ ترسیم کیے گئے ہیں۔تکونیاتی تفاعل میں x کو 1 سے بڑی عدد سے ضرب کرنے سے تفاعل تیز ہو جاتا ہے (اس کی تعدد بڑھ جاتی ہے اور اس کا دوری عرصہ کم ہو جاتا ہے) جبکہ 1 سے کم عدد سے x کو ضرب کرنے سے تفاعل آہستہ ہو جاتا ہے جس سے اس کا دوری عرصہ بڑھ جاتا ہے۔

دوری تفاعل کی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ سائنس میں عموماً طبعی نظام جن پر ہم غور کرتے ہیں کا رویہ دوری ہوتا ہے۔دل کی دھڑکن، دماغی لہریں اور گھریلو استعمال کی 220 وولٹ کی بجلی دوری ہیں۔اسی طرح خرد امواج تندور میں برقناطیسی میدان جو خوراک کو گرم کرتی ہیں دوری

---

periodic[64]
period[65]

ہوتی ہیں۔ موسمی کاروبار میں سرمایہ کی آمد و رفت اور گھومنے والی مشین کا رویہ بھی دوری ہوتا ہے۔ ہمارے پاس پختہ شواہد موجود ہیں جن کے تحت دنیا پر برفانی عہد تقریباً 90 000 تا 100 000 سال کے وقفہ سے دہراتا ہے۔

اگر اتنے زیادہ چیزیں دوری ہیں تب ہم صرف تکونیاتی تفاعل پر کیوں غور کرنا چاہتے ہیں؟ اس کا جواب اعلٰی احصاء کا ایک حیرت کن مسئلہ دیتا ہے جس کے تحت ہر دوری تفاعل، جسے ہم ریاضی نمونہ میں استعمال کرنا چاہیں گے، کو ہم سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں۔ یوں سائن اور کوسائن تفاعل کا احصاء جانتے ہوئے ہم کسی بھی دوری تفاعل کا ریاضی نمونہ اخذ کر سکیں گے۔

جفت بالمقابل طاق

شکل 1.101 سے ظاہر ہے کہ کوسائن اور سیکنٹ تفاعل جفت ہیں جبکہ باقی چار تفاعل طاق ہیں:

جفت	طاق
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

مماثل

اکائی دائرے پر نقطہ $N(\cos\theta, \sin\theta)$ سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے درج ذیل ملتا ہے (شکل 1.103)۔

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1.8}$$

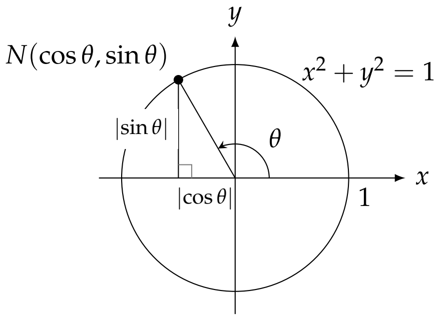
یہ مساوات θ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اور غالباً یہ اہم ترین تکونیاتی مماثل ہے۔

مساوات 1.8 کے دونوں ہاتھ کو ایک بار $\cos^2\theta$ اور ایک بار $\sin^2\theta$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

آپ درج ذیل مماثل سے بخوبی واقف ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B \\ \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B \end{aligned} \qquad \text{مجموعہ زاویہ کلیات} \tag{1.9}$$



شکل 1.103: عمومی زاویہ θ کے لئے حوالہ تکون۔

اس کتاب میں تمام درکار مماثل کو مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 1.9 A اور B کی ہر قیمت کے لئے درست ہیں۔ $\cos(A - B)$ اور $\sin(A - B)$ کے لئے بھی اسی طرح کے کلیات پائے جاتے ہیں (سوال 35 اور سوال 36)۔

مجموعہ زاویہ کلیات میں A اور B دونوں کے لئے θ پر کرنے سے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \qquad \text{دوہرا زاویہ کلیات} \tag{1.10}$$

درج ذیل کلیات

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

کو آپس میں جمع کرنے سے $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ اور تفریق کرنے سے $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ حاصل ہوتا ہے جن سے دوہرا زاویے کے درج ذیل مزید دو کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \tag{1.11}$$

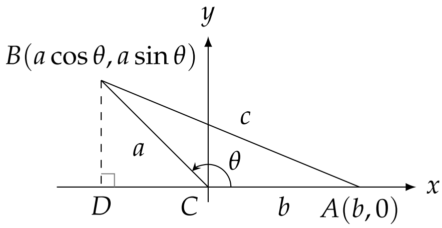
$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{1.12}$$

درج بالا میں θ کی جگہ $\frac{\theta}{2}$ لکھنے سے **نصف زاویہ کلیات**[66] حاصل ہوتے ہیں۔

قاعدہ کوسائن

اگر تکون ABC کے اضلاع a ، b اور c ہوں اور c کے سامنے زاویہ θ ہو تب درج ذیل ہو گا (شکل 1.104)۔

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{1.13}$$



شکل 1.104: قاعدہ کوسائن

اس مساوات کو **قاعدہ کوسائن**[67] کہتے ہیں۔

اس کلیہ کو حاصل کرنے کی خاطر تکون کو کارتیسی محدد پر یوں بنائیں کہ اس کا ایک راس مبدا پر اور ایک ضلع x محور پر ہو (شکل 1.104)۔ راس B سے x محور پر قائمہ گرائیں۔ یوں حاصل قائمہ مثلث ABD پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق کرتے ہیں جہاں A سے D تک فاصلہ $b - a\cos\theta$ لکھا جائے گا (مثلاً $b = 3$ اور $a\cos\theta = -2$ کی صورت میں $AD = 3 - (-2) = 5$ ہو گا اور $a\cos\theta = 1$ کی صورت میں $AD = 3 - 1 = 2$ ہو گا)۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
c^2 &= (b - a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 \\
&= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 - 2ab\cos\theta \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ کا سہارا لیا گیا ہے۔

قاعدہ کوسائن مسئلہ فیثاغورث کو عمومی بناتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی صورت میں $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ کی بنا قاعدہ کوسائن سے $c^2 = a^2 + b^2$ یعنی مسئلہ فیثاغورث حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

ریڈیئن، درجہ اور دائری قوس

سوال 1: رداس $10\,\text{cm}$ کے دائرے پر کتنی لمبائی کا قوس (الف) $\frac{4\pi}{5}$ ریڈیئن (ب) $110°$ کا وسطی زاویہ بنائے گا؟
جواب: (الف) 8π سنٹی میٹر (ب) 0.19 میٹر

---

half angle formulae[66]
law of cosines[67]

سوال 2: رداس 8 کے دائرے پر 10π لمبائی کا قوس، مرکز پر کتنا وسطی زاویہ بناتا ہے؟ جواب درجات اور ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 3: **کیلکولیٹر** 80° کا وسطی زاویہ بنانے کی خاطر آپ 30 cm قطر کے قرص پر مرکز سے دو خط کھینچنا چاہتے ہیں۔ محیط پر قرص کی لمبائی 1 mm درستگی تک تلاش کریں۔
جواب: 20.9 cm

سوال 4: **کیلکولیٹر** ایک میٹر قطر کے پہیا کو ہموار زمین پر 30 cm چلایا جاتا ہے۔ پہیا کتنا زاویہ گھوما ہو گا؟ جواب (الف) ریڈیئن کے دسواں حصہ اور (ب) درجہ کے ایک حصہ درستگی تک تلاش کریں۔

تکونیاتی تفاعل کی قدر پیمائی

سوال 5: درج ذیل بایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

θ	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

سوال 6: درج بالا دایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

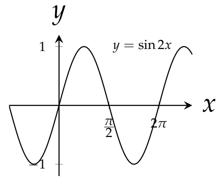
سوال 7 تا سوال 12 میں $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ میں سے ایک دیا گیا ہے۔ باقی دو تفاعل کو دیے گئے وقفے کے اندر تلاش کریں۔

سوال 7: دائرہ کار: $[\frac{\pi}{2},\pi]$ $\sin x = \frac{3}{5},$
جواب: $\cos x = -\frac{4}{5}, \quad \tan x = -\frac{3}{4}$

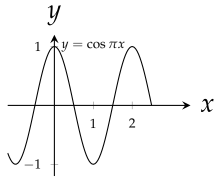
سوال 8: دائرہ کار: $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\tan x = 2,$

سوال 9: دائرہ کار: $[-\frac{\pi}{2},0]$ $\cos x = \frac{1}{3},$
جواب: $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \tan x = -\sqrt{8}$

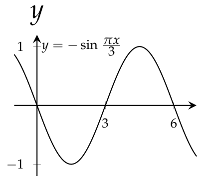
سوال 10: دائرہ کار: $[\frac{\pi}{2},\pi]$ $\cos x = -\frac{5}{13},$



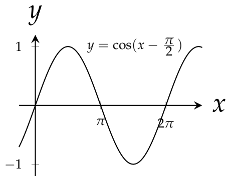
شکل 1.105



شکل 1.106



شکل 1.107



شکل 1.108

سوال 11: دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ $\tan x = \frac{1}{2}, \quad$
جواب: $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 12: دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ $\sin x = -\frac{1}{2}, \quad$

تکونیاتی تفاعل کی ترسیم

سوال 13 تا سوال 22 میں دیا گیا تفاعل ترسیم کریں۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ تلاش کریں۔

سوال 13: $\sin 2x$
جواب: دوری عرصہ π ہے۔ شکل 1.105

سوال 14: $\sin \frac{x}{2}$

سوال 15: $\cos \pi x$
جواب: دائرہ کار: 2 ، شکل 1.106

سوال 16: $\cos \frac{\pi x}{2}$

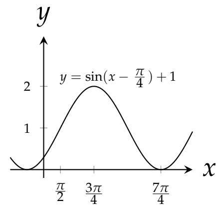
سوال 17: $-\sin \frac{\pi x}{3}$
جواب: دائرہ کار: 6 ، شکل 1.107

سوال 18: $-\cos 2\pi x$

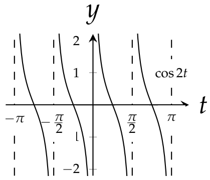
سوال 19: $\cos(x - \frac{\pi}{2})$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.108

سوال 20: $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

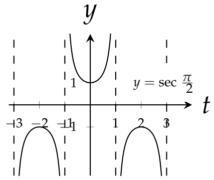
سوال 21: $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.109



شکل 1.109



شکل 1.110



شکل 1.111

سوال 22: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے تفاعل کو ts مستوی میں ترسیم کریں جہاں افقی محور t ہو۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ اور تشاکل تلاش کریں۔

سوال 23: $s = \cot 2t$
جواب: دائرہ کار: $\frac{\pi}{2}$ ، شکل 1.110

سوال 24: $s = -\tan \pi t$

سوال 25: $s = \sec \frac{\pi t}{2}$
جواب: دائرہ کار: 4 ، شکل 1.111

سوال 26: $s = \csc \frac{t}{2}$

سوال 27: کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے
(الف) $y = \cos x$ اور $y = \sec x$ کو $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\sec x$ کے رویہ پر $\cos x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔
(ب) $-pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \sin x$ اور $y = \csc x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\csc x$ کے رویہ پر $\sin x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

سوال 28: $-7 \leq x7$ کے لئے $y = \tan x$ اور $y = \cot x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\tan x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے $\cot x$ پر تبصرہ کریں۔

سوال 29: $y = \sin x$ اور $y = \lfloor \sin x \rfloor$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lfloor \sin x \rfloor$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 30: $y = \sin x$ اور $y = \lceil \sin x \rceil$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lceil \sin x \rceil$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

اضافی تکونیاتی مماثل

مجموعہ زاویہ کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال 31 تا سوال 36 میں دیے گئے مماثل حاصل کریں۔

سوال 31: $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

سوال 32: $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

سوال 33: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

سوال 34: $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$

سوال 35: $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

سوال 36: $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

سوال 37: اگر سوال 35 میں $B = A$ پر کیا جائے تب کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ حاصل کردہ مماثل کو پہلے سے جانتے ہیں؟

سوال 38: مجموعہ زاویہ کلیات میں $B = 2\pi$ لینے سے کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ نتائج سے مطمئن ہیں؟

مجموعہ زاویہ کلیات کا استعمال

سوال 39 تا سوال 42 میں دی گئی مقدار کو $\sin x$ اور $\cos x$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 39: $\cos(\pi + x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 40: $\sin(2\pi - x)$

سوال 41: $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 42: $\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

سوال 43: $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\sin\frac{7\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

سوال 44: $\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\cos\frac{11\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 45: $\cos\frac{\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

سوال 46: $\sin\frac{5\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

دوہرا زاویہ کلیات کا استعمال
سوال 47 تا سوال 50 میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 47: $\cos^2\frac{\pi}{8}$
جواب: $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

سوال 48: $\cos^2\frac{\pi}{12}$

سوال 49: $\sin^2\frac{\pi}{12}$
جواب: $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

سوال 50: $\sin^2\frac{\pi}{8}$

نظریہ اور مثالیں

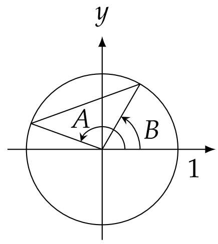
سوال 51: ٹینجنٹ مجموعہ زاویہ کا کلیہ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ ہے۔اس کلیہ کو اخذ کریں۔

سوال 52: $\tan(A-B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

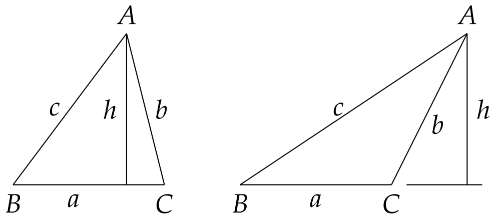
سوال 53: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A-B)$ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 54: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 کی طرز کے شکل پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A+B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔یہ شکل کیسا ہو گا۔

سوال 55: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a=2$ ، $b=3$ اور زاویہ $C=60^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔
جواب: $c=\sqrt{7}\approx 2.646$



شکل 1.112: شکل برائے سوال 53



شکل 1.113: اشکال برائے سوال 57

سوال 56: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 40°$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 57: قاعدہ سائن قاعدہ سائن کہتا ہے کہ اگر مثلث کے زاویے A ، B ، C کے سامنے اضلاع بالترتیب a ، b ، c ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اشکال 1.113 اور مماثل $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ استعمال کرتے ہوئے اس قاعدہ کو اخذ کریں۔

سوال 58: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 60°$ ہیں۔ $\sin B$ کو قاعدہ سائن سے حاصل کریں۔

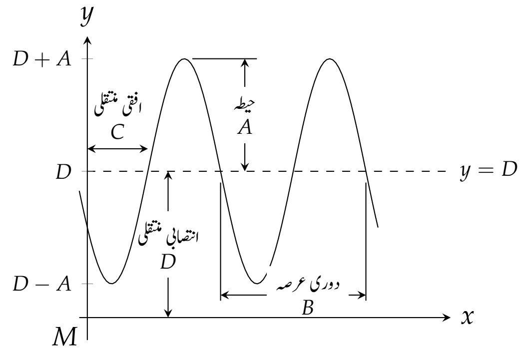
سوال 59: کیلکولیٹر ایک مثلث کا ضلع $c = 2$ اور زاویے $A = \frac{\pi}{4}$ اور $B = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔ زاویہ A کا مخالف ضلع a اور تلاش کریں۔
جواب: $a = 1.464$

سوال 60: تخمین $\sin x \approx x$ x کی چھوٹی قیمتوں کے لئے $\sin x \approx x$ ہوتا ہے جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ اس کی وجہ تیسرے باب میں بتلائی جائے گی۔ $|x| < 0.1$ کے لئے تخمینی خلل 5000 میں 1 حصہ سے کم ہو گا۔

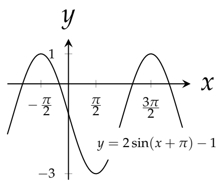
(الف) کمپیوٹر پر $y = x$ اور $y = \sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟

(ب) کمپیوٹر پر $y = x$ اور $y = \sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ درجات میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟

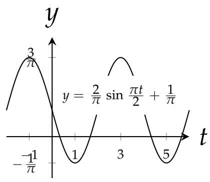
(پ) کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے $x = 0.1$ کے لئے $\sin x$ حاصل کریں۔ اگر آپ کا کیلکولیٹر ریڈیئن استعمال کر رہا ہو تب جواب تقریباً 0.1 ہی ہو گا۔ اگر کیلکولیٹر درجات استعمال کر رہا ہو تب جواب مختلف ہو گا۔



شکل 1.114: عمومی سائن تفاعل



شکل 1.115



شکل 1.116

عمومی سائن ترسیم

شکل 1.114 میں درج ذیل تفاعل کی ترسیم یعنی عمومی سائن ترسیم دکھائی گئی ہے جہاں $|A|$ حیطہ، $|B|$ دوری عرصہ، C افقی منتقلی اور D انتصابی منتقلی ہے۔سوال 61 تا سوال 64 میں عمومی سائن تفاعل کے A ، B ، C اور D تلاش کریں۔تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

سوال 61: $y = 2\sin(x+\pi) - 1$
جواب: $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$ ؛ شکل 1.115

سوال 62: $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

سوال 63: $y = -\frac{2}{\pi}\sin(-\frac{\pi t}{2}) + \frac{1}{\pi}$
جواب: $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$ ؛ شکل 1.116

سوال 64: $y = \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

سوال 65 تا سوال 65 میں عمومی سائن تفاعل $f(x) = A\sin(\frac{2\pi}{B}(x-C)) + D$ پر ترسیم کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ ترسیم کے لئے کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال 65: دوری عرصہ $A = 3, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر تفاعل ترسیم کریں۔ دوری عرصہ بڑھانے سے تفاعل کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ (ب) B کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $B = -3$ اور $B = -2\pi$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں۔

سوال 66: افقی منتقلی $A = 3, B = 6, D = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $C = 0, 1, 2$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ C کی بڑھتے مثبت قیمت کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) C کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی۔ (پ) صفر افقی منتقلی کے لئے C کی کم تر مثبت قیمت کیا ہو گی؟ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 67: انتصابی منتقلی $A = 3, B = 6, C = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $D = 0, 1, 3$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ D کی بڑھتی مثبت قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) D کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

سوال 68: حیطہ $B = 6, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) A کی مثبت بڑھتی قیمتوں کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $f(x)$ کو $A = 1, 5, 9$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔ (ب) A کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

باب 2

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکونیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں با ضابطہ وضع کرتے ہیں۔ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔تفاعل کی تفرق، جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 2.1: ایک پتھر $100\,\mathrm{m}$ اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے دارانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔یوں پہلی t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

(الف) پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2-0} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔

(ب) پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(1)^2}{2-1} = 14.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔ □

مثال 2.2: پتھر کی رفتار $t = 1\,\mathrm{s}$ اور $t = 2\,\mathrm{s}$ پر تلاش کریں۔

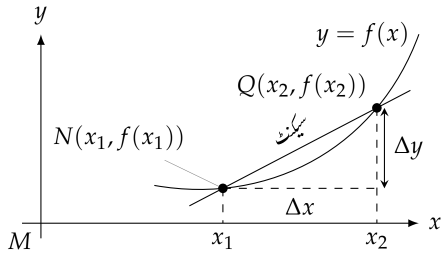
حل: ہم وقتی وقفہ $[t_0, t_0 + h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا درج بالا کلیہ میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے "لمحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔یوں $t_0 = 1$ اور $t_0 = 2$ کے لئے $h = 0.1, 0.01, \cdots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

h	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ کے لئے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ پر پتھر کی رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔اسی طرح $t_0 = 2$ پر پتھر کی رفتار $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ نظر آئے گی۔ □



شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

اوسط شرح تبدیلی اور سیکنٹ خطوط

x کے لحاظ سے تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1, x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی h $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1, x_2]$ پر $y = f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

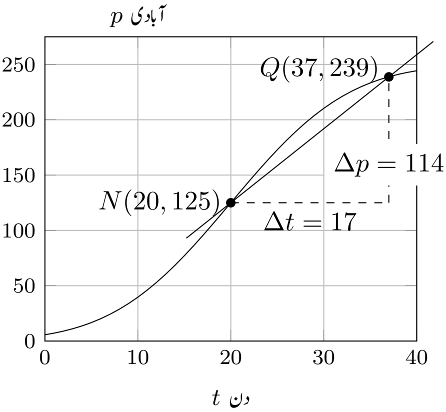
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گزرتے ہوئے خط کو ترسیم کا **سیکنٹ**[1] کہتے ہیں۔یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

مثال 2.3: نمو آبادی کی اوسط شرح
ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

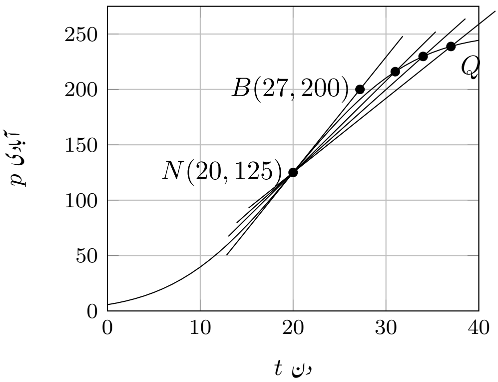
حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔یوں $37 - 20 = 17$ دنوں میں آبادی میں $239 - 125 = 114$ تبدیل رونما ہوئی۔یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7 \text{(مکھیاں فی دن)}$$

[1] secant



شکل 2.2: مکھی کی نمو آبادی



شکل 2.3: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔ □

درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

مثال 2.4: مثال 2.3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

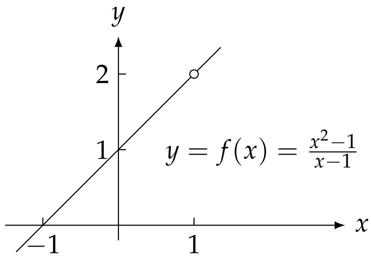
حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
$(37,239)$	$\frac{239-125}{37-20}=6.7$
$(35,230)$	$\frac{230-125}{35-20}=7$
$(32,216)$	$\frac{216-125}{32-20}=7.6$
$(27,200)$	$\frac{200-125}{27-20}=10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو مس کرتا ہے۔اس خط کو دیے گئے منحنی کا **مماس**[2] کہتے ہیں۔اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 مکھیاں فی دن ہو گی۔ □

---

[2] tangent



شکل 2.4: شکل برائے مثال 2.5

لمحہ $t = 1$ اور لمحہ $t = 2$ پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو **لمحاتی شرح تبدیلی**[3] کہتے ہیں۔جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لمحاتی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔لمحاتی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم **حد**[4] کہتے ہیں۔

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 2.5: تفاعل $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ نقطہ $x = 1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟
حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x = 1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے f تعین کرتا ہے۔کسی بھی $x \neq 1$ کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \qquad (x \neq 1)$$

یوں خط $y = x + 1$ جس سے نقطہ $x = 1$ یعنی $(1, 2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

---
[3] instantaneous rates of change
[4] limits

$x(\neq 1)$	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,\ (x\neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 تک پہنچنے سے $f(x)$ کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا x ایک تک پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

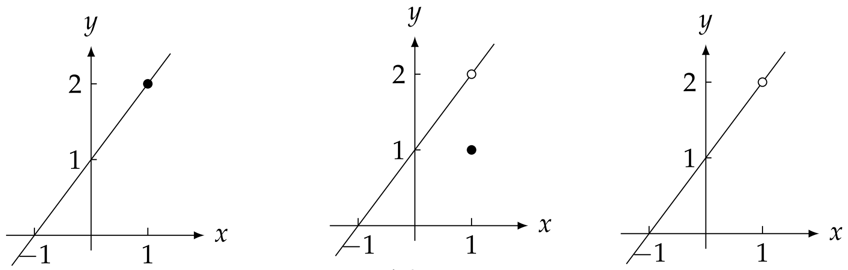
x کی قیمت x_0 تک پہنچنے کو $x \to x_0$ لکھا جاتا ہے۔ □

تعریف: **حد کی غیر رسمی تعریف**
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ پر تفاعل $f(x)$ معین ہے جبکہ عین نقطہ x_0 پر $f(x)$ غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لئے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 تک پہنچنے سے f کی قیمت **حد** L تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراد پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد $10\,\mu\text{m}$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف جلد پیش کریں گے۔

مثال 2.6: $x \to x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجودیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں f کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تفاعل g کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تفاعل h کا $x \to 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں یعنی $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$۔ □



$h(x) = x + 1$ (ج)

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (ب)

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (ا)

شکل 2.5: $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 2$

بعض اوقات $\lim_{x \to x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔اس کی مثال تفاعل $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور تکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہو۔

مثال 2.7:

ا. $\lim_{x \to 2} (4) = 4$

ب. $\lim_{x \to 13} (4) = 4$

ج. $\lim_{x \to 3} x = 3$

د. $\lim_{x \to 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$

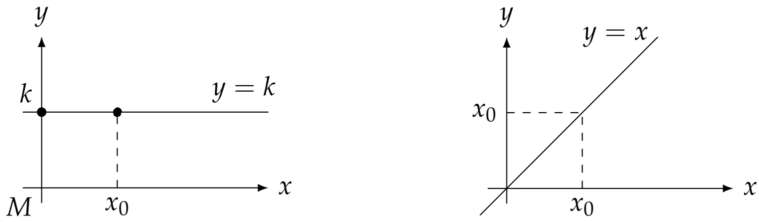
ہ. $\lim_{x \to -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3}$

□

مثال 2.8:

ا. اگر f مماثلی تفاعل $f(x) = x$ ہو تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ل)۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$



(ب) مستقل تفاعل

(ا) مماثل تفاعل

شکل 2.6: اشکال برائے مثال 2.7

ب. اگر f مستقل تفاعل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k$$

□

مثال 2.9: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔
درج ذیل تفاعل کا $x \to 0$ پر رویہ کیسا ہو گا؟

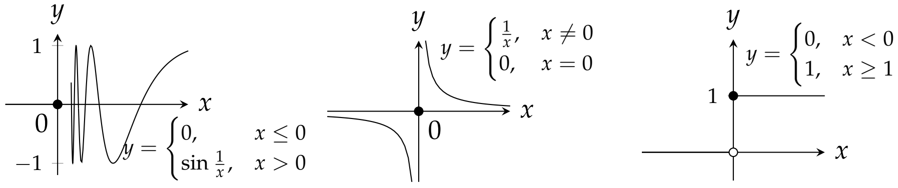
ا. $$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ب. $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ج. $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

حل:

ا. اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ کا $x \to 0$ پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تفاعل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لئے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لئے U کی قیمت 1 ہے۔یوں 0 کے قریب پہنچنے سے U کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔



(ج) $f(x)$ (ب) $g(x)$ (ا) اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$

شکل 2.7: اشکال برائے مثال 2.9

ب. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

$\square$

سوالات 2.1

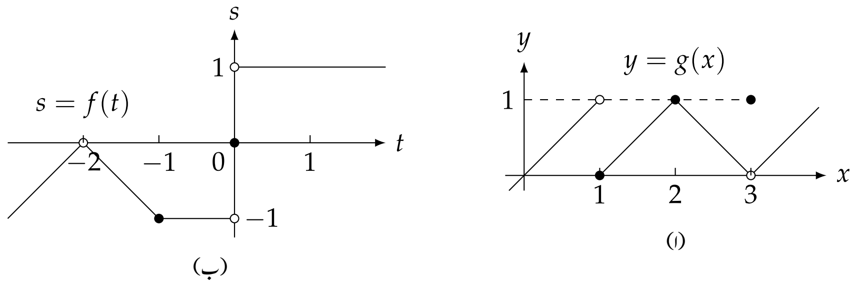
ترسیم سے حد

سوال 1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

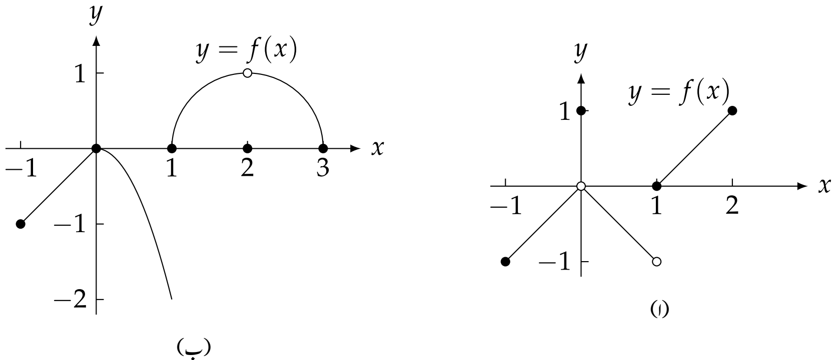
ا. $\lim_{x\to 1} g(x)$ ب. $\lim_{x\to 2} g(x)$ ج. $\lim_{x\to 3} g(x)$

جواب: (ا) موجود نہیں ہے۔جیسے جیسے x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 0 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔یوں x کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہونے سے L کی یکتا قیمت کے نزدیک تر $g(x)$ نہیں پہنچتا ہے۔(ب) 1 (ج) 0

سوال 2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔



شکل 2.8: اشکال برائے سوال 1 اور سوال 2



شکل 2.9: اشکال برائے سوال 3 اور سوال 4

ا. $\lim_{t\to -2} f(t)$ ب. $\lim_{t\to -1} f(t)$ ج. $\lim_{t\to 0} f(t)$

سوال 3: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ا) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

ا. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے   ج. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ہ. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

ب. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ د. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ و. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے

جواب: (ا) درست (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ہ) غلط (و) درست

سوال 4: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

ا. $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود نہیں ہے
ب. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
ج. $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے
د. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔
ہ. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(1,3)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

وجودیت اور حد

سوال 5 اور سوال 6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

سوال 5: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

جواب: جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔جب x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔یوں x کا 1 کے نزدیک تر ہونے سے $\frac{x}{|x|}$ کسی یکتا قیمت کے نزدیک تر نہیں ہوتی ہے۔

سوال 6: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

سوال 7: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے۔کیا $\lim_{x\to x_0} f(x)$ کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 8: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1,1]$ میں تمام x کے لئے معین ہے۔کیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 9: اگر $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

سوال 10: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ لازماً موجود ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ لازماً ہو گا؟ کیا ہم $\lim_{x\to 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11: $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $x = -3.1, -3.01, -3.001, \cdots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔ اس جدول سے $\lim_{x \to -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس نقاط $x = -2.9, -2.99, \cdots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. تفاعل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \to -3$ کے لئے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \to -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

جواب: (ا)

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(ج) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

سوال 12: $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینی قیمتوں $x = 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ پر تفاعل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0 = \sqrt{2}$ کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ $x \to \sqrt{2}$ کے لئے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 13: $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $x = -5.9, -5.99, -5.999, \cdots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x \to -6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس $x = -6.1, -6.01, -6.001, \cdots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہو گا؟

ب. G کو $x_0 = 6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x \to -6$ کے لئے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	-0.126582	-0.1251564	-0.1250156	-0.1250015	-0.1250001	-0.1250000

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	-0.123456	-0.124843	-0.124984	-0.124998	-0.124999	-0.124999

(ج) $\lim_{x\to -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0.125$

سوال 14: $h(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$ لیں۔

ا. نقاط $x = 2.9, 2.99, 2.999, \cdots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to 3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔اس کے برعکس $x = 3.1, 3.01, 3.001, \cdots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. $x_0 = 3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x \to 3$ کے لئے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to 3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 15: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to -1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -1$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	-0.99999	-0.999999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

(ج) $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$

سوال 16: $F(x) = \frac{x^2+3x+2}{2-|x|}$ لیں۔

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -2$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim\limits_{x\to -2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -2$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim\limits_{x\to -2} F(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 17: $g(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ لیں۔

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim\limits_{x\to 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب:(ا)

θ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

θ	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

(ج) $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = 1$

سوال 18: $G(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ لیں۔

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $t_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{t \to 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔کیا x کی قیمت $x \to 1$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب: (ا)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$f(x)$	0.348678	0.366032	0.367695	0.367861	0.367877	0.367879

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	0.385543	0.369711	0.368063	0.367897	0.367881	0.367878

(ج) $\lim_{x \to 1} f(x) \approx 0.36788$

سوال 20: $f(x) = \frac{3^x - 1}{x}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔کیا x کی قیمت $x \to 0$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 21 تا سوال 28 میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو تفاعل میں پر کرتے ہوئے تفاعل کی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x \to 2} 2x$

جواب: 4

سوال 22: $\lim_{x\to 0} 2x$

سوال 23: $\lim_{x\to \frac{1}{3}} (3x-1)$
جواب: 0

سوال 24: $\lim_{x\to 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال 25: $\lim_{x\to -1} 3x(2x-1)$
جواب: 9

سوال 26: $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 27: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sin x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 28: $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے وقفہ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

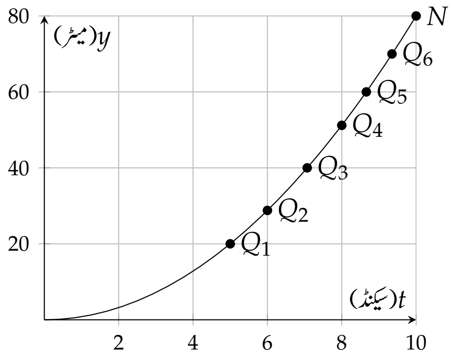
سوال 29: $f(x)=x^3+1$؛ (الف) $[2,3]$، (ب) $[-1,1]$
جواب: (ا) 19 (ب) 1

سوال 30: $g(x)=x^2$؛ (الف) $[-1,1]$، (ب) $[-2,0]$

سوال 31: $h(t)=\cos t$؛ (الف) $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$، (ب) $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$
جواب: (ا) $-\frac{4}{\pi}$ (ب) $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

سوال 32: $g(t)=2+\cos t$؛ (الف) $[0,\pi]$، (ب) $[-\pi,\pi]$

سوال 33: $R(\theta)=\sqrt{4\theta+1}$ ؛ $[0,2]$
جواب: 1



شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم

سوال 34: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ ؛ $[1,2]$

سوال 35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ NQ_1 ، NQ_2 ، $\cdots$ ، NQ_6 کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10\,\mathrm{s}$ پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔(الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے 1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

جواب: (ب) $5600000 \approx$ سالانہ (پ) $4200000 \approx$ سالانہ

سوال 37: تفاعل $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x = 2$ ، $\frac{11}{10}$ ، $\frac{101}{100}$ ، $\frac{1001}{1000}$ ، $\frac{10001}{10000}$ اور $x = 1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔(الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $x \neq 1$ کے لئے وقفہ $[1,x]$ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔ (ب) $x = 1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 38: $x \geq 0$ کے لئے $g(x) = \sqrt{x}$ لیں۔

ا. وقفہ $[1,2]$ ، $[1,1.5]$ اور $[1,1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ کے لئے x کے لحاظ سے وقفہ $[1,1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x = 1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h \to 0$ کے لئے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا) $0.414213, 0.449489, \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ (ب)

$1+h$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1+h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.000005	1.000005
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(ج) 0.5 (د) 0.5

سوال 39: $t \neq 0$ کے لئے $f(t) = \frac{1}{t}$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t = 2$ تا $t = 3$ اور (ب) وقفہ $t = 2$ تا $t = T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T = 2.1$ ، $T = 2.01$ ، $T = 2.001$ ، $T = 2.0001$ ، $T = 2.00001$ اور $T = 2.000001$ ، کے لئے وقفہ $[2,T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t = 2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2,T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \to 2$ کے لئے تلاش کریں۔($T = 2$ پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال 40 تا سوال 45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔(الف) نقطہ x_0 کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر تفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 40: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

سوال 41: $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2}$

سوال 42: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

سوال 43: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

سوال 44: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$

سوال 45: $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3-3\cos x}$

2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔پہلے تین مسئلے مثال 2.8 کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 2.1: **حد کے خواص**
اگر $\lim_{x\to c} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ہوں،جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = L+M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = L-M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to c} kf(x) = kL$ (k مستقل عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ہو گا بشرطیکہ $L^{\frac{m}{n}}$ حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا مجموعہ ہو گا۔
2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا فرق ہو گا۔
3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہو گا۔
5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل تقسیم ہو گا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔
6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہو گا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ ا میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 2.10: $\lim\limits_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}$ تلاش کریں۔

حل: مثال 2.8 کے نتائج $\lim\limits_{x\to c} x = c$ اور $\lim\limits_{x\to c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 2.1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

ا. $\lim\limits_{x\to c} x^2 = (\lim\limits_{x\to c} x)(\lim\limits_{x\to c} x) = c \cdot c = c^2$ حاصل ضرب یا طاقت

ب. $\lim\limits_{x\to c}(x^2+5) = \lim\limits_{x\to c} x^2 + \lim\limits_{x\to c} 5 = c^2+5$ مجموعہ اور (ا)

ج. $\lim\limits_{x\to c} 4x^2 = 4\lim\limits_{x\to c} x^2 = 4c^2$ ضرب مستقل اور (ا)

د. $\lim\limits_{x\to c}(4x^2-3) = \lim\limits_{x\to c} 4x^2 - \lim\limits_{x\to c} 3 = 4c^2-3$ فرق اور (ج)

ہ. $\lim\limits_{x\to c} x^3 = (\lim\limits_{x\to c} x^2)(\lim\limits_{x\to c} x) = c^2 \cdot c = c^3$ حاصل ضرب اور (ا) یا طاقت

و. $\lim_{x\to c}(x^3+4x-3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c}(4x^2-3) = c^3+4c^2-3$ مجموعہ، (ج) اور (د)

ز. $\lim_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)}{\lim_{x\to c}(x^2+5)} = \frac{c^3+4c^2-3}{c^2+5}$ حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب)

□

مثال 2.11: $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}$ تلاش کریں۔

حل:

مثال 2.10-د اور $n=\frac{1}{2}$ کے ساتھ قاعدہ طاقت

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3} = \sqrt{4(-2)^2-3}$$
$$= \sqrt{16-3} = \sqrt{13}$$

□

مسئلہ 2.1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x \to c$ کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں۔ناطق تفاعل کا حد $x \to c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2.2: کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا
اگر $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

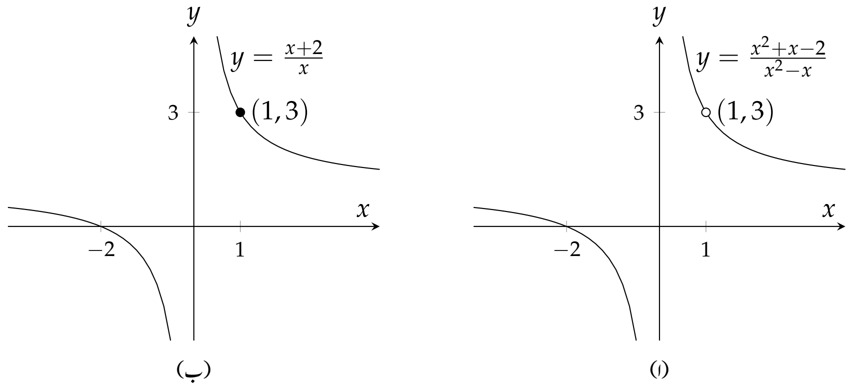
مسئلہ 2.3: غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا
فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c) \neq 0$ ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 2.12:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5} = \frac{0}{6} = 0$$

یہ ایک ہی قدم میں مثال 2.10 کا حل ہے۔ □



شکل 2.11: ماسوائے نقطہ $(1,3)$ کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے اسقاط

مسئلہ 2.3 ناطق تفاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تفاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔ صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹتے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پر کرنے سے حد حاصل کیا جا سکتا ہے۔ درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x = 1$ پر صفر ہیں۔ یوں $(x-1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جا سکتا ہے۔

مثال 2.13: یکساں جزو کی منسوخی
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $x = 1$ پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہو گا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے۔ البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$$

اب $x \neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

شکل 2.11 میں $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ اور $y = \frac{x+2}{x}$ کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔ یہ ترسیم صرف نقطہ $(1,3)$ پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ البتہ اس نقطہ پر دونوں تفاعل کا حد ایک جیسا ہے۔ □

مثال 2.14: **ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا**

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $h=0$ پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نم اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق[5] $\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔نسب نما میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}\\
&= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} && \text{مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} && \text{جس کو ہم کاٹتے ہیں}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

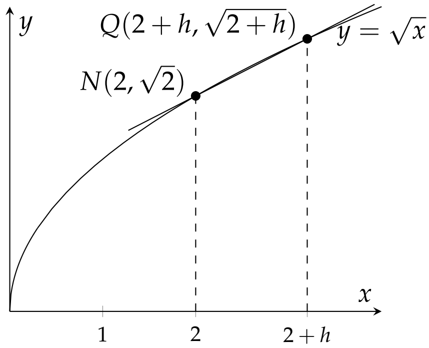
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}} && \text{نسب نما اب } h=0 \text{ پر صفر نہیں ہے}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ تفاعل $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ درحقیقت تفاعل $y=\sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2,\sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h,\sqrt{2+h})$ کے بیچ سیکنٹ کی ڈھلوان ہے اور $h\to 0$ کرنے سے مراد $Q\to N$ ہے۔نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ہم نے دیکھا کہ اس سیکنٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □

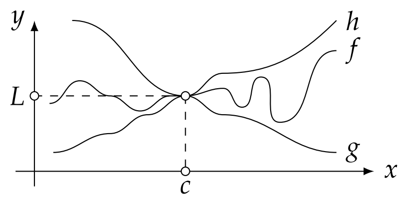
مسئلہ بیچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔اس کو **مسئلہ بیچ**[6] اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل f سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل g اور تفاعل h کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تفاعل کے بیچ پھنسے ہوئے تفاعل کی قیمت L ہو گی (شکل 2.13)۔اس کا ثبوت ضمیمہ ا میں دیا گیا ہے۔

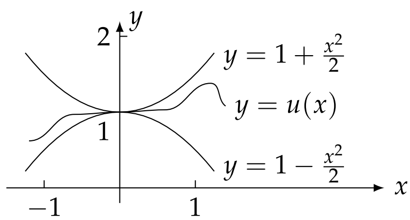
[5] conjugate expression
[6] sandwich theorem



شکل 2.12: $N \to Q$ کرنے سے سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے



شکل 2.13: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔



شکل 2.14: شکل برائے مثال 2.15

مسئلہ 2.4: **مسئلہ بیچ**
فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو، میں (ممکن ہے کہ) ماسوائے $x = c$ پر تمام x کے لئے

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ہے۔ مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

ہے۔ تب $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ہو گا۔

مثال 2.15: اگر تمام $x \neq 0$ کے لئے $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x \to 0} u(x)$ تلاش کریں۔
حل: چونکہ

$$\lim_{x \to 0}(1 - \tfrac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x \to 0}(1 + \tfrac{x^2}{2}) = 1$$

ہیں لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل 2.14)۔ □

مثال 2.16: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$ ہو تب $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ ہو گا۔
حل: چونکہ $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ہے، اور $-|f(x)|$ اور $|f(x)|$ کا حد 0 ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $f(x)$ کا حد بھی 0 ہو گا۔ □

سوالات 2.2

حد کا حساب

سوال 1 تا سوال 16 میں حد تلاش کریں۔

سوال 1: $\lim_{x \to -7}(2x + 5)$
جواب: -9

سوال 2: $\lim_{x \to 12}(10 - 3x)$

سوال 3: $\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$
جواب: 4

سوال 4: $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$

سوال 5: $\lim\limits_{t\to 6}8(t-5)(t-7)$
جواب: -8

سوال 6: $\lim\limits_{s\to \frac{2}{3}}3s(2s-1)$

سوال 7: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$
جواب: $\frac{5}{8}$

سوال 8: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{4}{x-7}$

سوال 9: $\lim\limits_{y\to -5}\frac{y^2}{5-y}$
جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 10: $\lim\limits_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 11: $\lim\limits_{x\to -1}3(2x-1)^2$
جواب: 27

سوال 12: $\lim\limits_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

سوال 13: $\lim\limits_{y\to -3}(5-y)^{\frac{4}{3}}$
جواب: 16

سوال 14: $\lim\limits_{z\to 0}(2z-8)^{\frac{1}{3}}$

سوال 15: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 16: $\lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال 17 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 17: $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 18: $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال 19: $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$

جواب: -7

سوال 20: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال 21: $\lim_{t\to 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$

جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 22: $\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال 23: $\lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 24: $\lim_{y\to 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال 25: $\lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$

جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 26: $\lim_{v\to 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال 27: $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 28: $\lim_{x\to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

سوال 29: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

جواب: 4

سوال 30: $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

قواعد حد کا استعمال

سوال 31: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0}(f(x)+7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)}\\
&= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)}\\
&= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

جواب: (ا) قاعدہ حاصل تقسیم (ب) فرق اور قاعدہ طاقت (پ) مجموعہ اور ضرب مستقل قاعدہ

سوال 32: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} &= \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{(\lim_{x\to 1} p(x))(\lim_{x\to 1}(4-r(x)))} && \text{(ب)}\\
&= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{(\lim_{x\to 1} p(x))(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x))} && \text{(پ)}\\
&= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

سوال 33: $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ اور $\lim_{x\to c} g(x) = -2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$

ب. $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

ج. $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x))$

د. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

جواب: (ا) -10 (ب) -20 (ج) -1 (د) $\frac{5}{7}$

سوال 34: $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ اور $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$

ب. $\lim_{x\to 4} xf(x)$

ج. $\lim_{x\to 4}(g(x))^2$

د. $\lim_{x\to 4} \frac{g(x)}{f(x)-1}$

سوال 35: $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ اور $\lim_{x\to b} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$

ب. $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

ج. $\lim_{x\to b} 4g(x)$

د. $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$

جواب: (ا) 4 (ب) -21 (ج) -12 (د) $-\frac{7}{3}$

سوال 36: $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$ ، $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$ اور $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x))$

ب. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

ج. $\lim_{x\to -2} \frac{-4p(x)+5r(x)}{s(x)}$

اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لمحاتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنا پہ احصاء میں عموماً درپیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

سوال 37 تا سوال 42 میں اس حد کو دیے گئے x پر تفاعل $f(x)$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 37: $f(x) = x^2, \quad x = 1$
جواب: 2

سوال 38: $f(x) = x^2, \quad x = -2$

سوال 39: $f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$
جواب: 3

سوال 40: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = -2$

سوال 41: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

سوال 42: $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$

مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 43: اگر $-1 \le x \le 1$ کے لئے $\sqrt{5 - 2x} \le f(x) \le \sqrt{5 - x^2}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} f(x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sqrt{5}$

سوال 44: اگر تمام x کے لئے $2 - x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ ہو تب $\lim_{x\to 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال 45: (الف) یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x}$$

(ب) $-2 \le x \le 2$ کے لئے $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ ، $y = \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x}$ اور $y = 1$ ترسیم کریں۔ $x \to 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔
جواب: (ا) حد 1 ہے۔

سوال 46: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لئے مطمئن ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}<\frac{1-\cos x}{x^2}<\frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

(ب) $-2\le x\le 2$ کے لئے $y=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}$ ، $y=\frac{1-\cos x}{x^2}$ اور $y=\frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ان ترسیم کا رویہ $x\to 0$ کرتے ہوئے کیسا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر $[-1,1]$ میں x کے لئے $x^4\le f(x)\le x^2$ اور $x<-1$ اور $x>1$ کے لئے $x^2\le f(x)\le x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x\to c} f(x)$ خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 48: فرض کریں کہ تمام $x\neq 2$ کے لئے $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2} h(x)=-5$ ہے۔کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا $f(2)=0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x\to 2} f(2)=0$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 49: اگر $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2}=1$ ہو تب $\lim_{x\to 4} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: 7

سوال 50: اگر $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (ب) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال 51: (الف) اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3$ ہو تب $\lim_{x\to 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
(ب) اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=4$ ہو تب $\lim_{x\to 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: (ا) 5 (ب) 5

سوال 52: اگر $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to 0} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گے؟

کمپیوٹر

سوال 53: (الف) $\lim_{x\to 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 54: (الف) $h(x) = x^2\cos\frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x\to 0} h(x)$ تلاش کریں۔
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبرا سے حاصل کریں۔

2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہو گی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

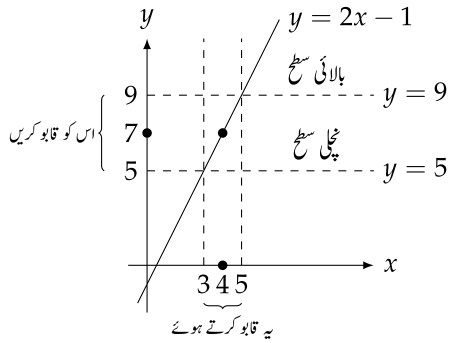
ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دارومدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مستری انجن کی سلنڈر کا قطر $50\ \mu\text{m}$ درستگی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

مثال 2.17: خطی تفاعل قابو کرنا
تفاعل $y = 2x - 1$ کے خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟
حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لئے $\left|y - 7\right| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $\left|y - 7\right|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

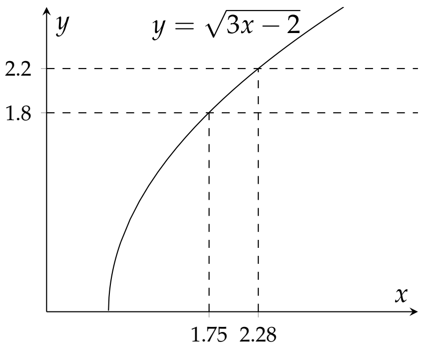
$$\left|y - 7\right| = \left|(2x - 1) - 7\right| = \left|2x - 8\right|$$

یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $\left|2x - 8\right| < 2$ کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\left|2x - 8\right| &< 2\\
-2 < 2x - 8 &< 2\\
6 < 2x &< 10\\
3 < x &< 5\\
-1 < x - 4 &< 1
\end{aligned}$$



شکل 2.15: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 2.17)



شکل 2.16: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔

x کو $x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □

فنیات

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جا سکتے ہیں۔ درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور نچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی لکیروں سے ظاہر کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفہ میں تفاعل کا رویہ دیکھا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ کے ترسیم پر y محور کے مطلوبہ وقفہ $(1.8, 2.2)$ پر غور کریں۔ یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل 2.16)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ $(1.98, 2.02)$ اور $(1.9998, 2.0002)$ پر بھی تفاعل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2.18: $6\,\text{cm}$ اندرونی قطر کے ایک لٹر پیمائشی پیالے پر $1\,\text{mm}$ وقفہ پر افقی لکیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔
پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ ایک لٹر $(1000\,\text{cm}^3)$ پانی ناپنے کی خاطر h کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل $1\,\%$ سے کم ہونا چاہیے۔
حل: ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \le 10$$

یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہو گی۔

$$\begin{aligned}
|36\pi h - 1000| &\le 10\\
-10 \le 36\pi h - 1000 &\le 10\\
990 \le 36\pi h &\le 1010\\
\tfrac{990}{36\pi} \le h &\le \tfrac{1010}{36\pi}\\
8.8 \le h &\le 8.9
\end{aligned}$$

یوں $1\,\%$ درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1\,\text{cm}$ یعنی $1\,\text{mm}$ ہے۔پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر افقی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مائع ناپنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ □

حد کی باضابطہ تعریف

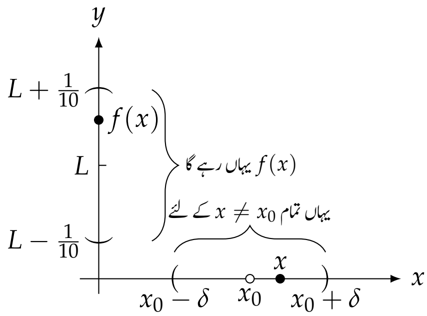
مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \to x_0$ کرنے سے $f(x)$ کا حد L حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہو گی (شکل 2.17)۔البتہ اتنا جاننا کافی نہیں ہے چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھراتی ہو۔

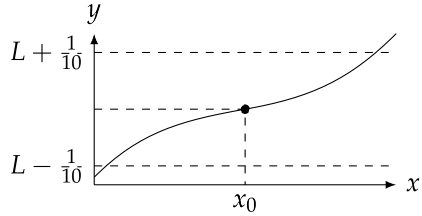
ہمیں سے کہا جا سکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100{,}000}$ ہے۔ہر مرتبہ ہم x_0 کے ارد گرد ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جا سکتا ہے۔البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جا سکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھر تھراہٹ کا شکار ہوتے ہوئے L تک نہ پہنچتی ہو۔

شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔شکی انسان قابل قبول چھوٹ ϵ چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔

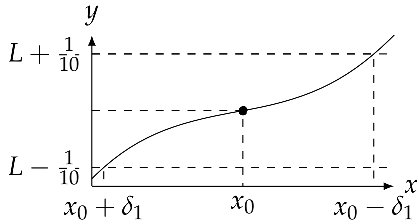
اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لئے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔



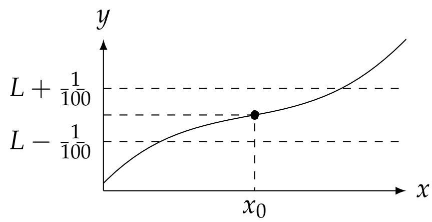
شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم



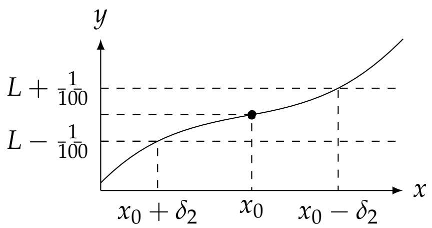
(ا) پہلا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں



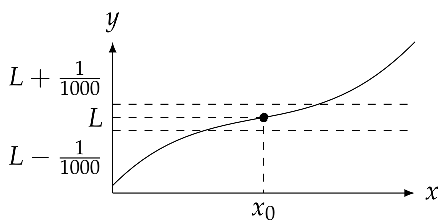
(ب) پہلے جواب: $|x - x_0| < \delta_1$ رکھیں



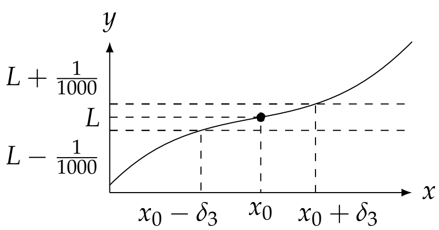
(ج) دوسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں



(د) دوسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_2$ رکھیں

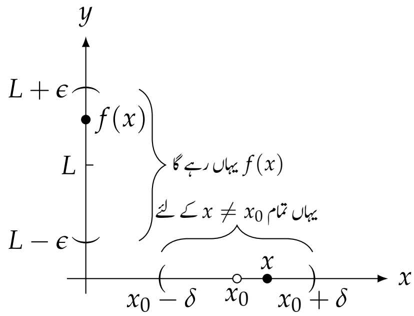


(ہ) تیسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں



(و) تیسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_3$ رکھیں

شکل 2.18: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ



شکل 2.19: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی قریب ہو گی۔

تعریف: **حد کی با ضابطہ تعریف**
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں $f(x)$ معین ہے جبکہ نقطہ x_0 پر عین ممکن ہے کہ $f(x)$ معین نہ ہو۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔فرض کریں کہ آپ خراد کی مشین پر قطر L کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔ اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج نہیں دیتی ہے لہٰذا آپ کو $f(x)$ قطر یعنی $L-\epsilon$ اور $L+\epsilon$ کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہو گا۔ دھرا کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لئے x کو قابو میں رکھنا ضروری ہو گا لہٰذا x کو $x-\delta$ اور $x+\delta$ کے بیچ رکھنا ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ ϵ کم کی جائے، آپ کو ویسے ویسے δ کو درست کرنا ہو گا۔

تعریف کو پرکھنے کی مثالیں

حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی ہے البتہ اس سے حد کی درستگی کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔ درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔ حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 2.19: دکھائیں کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$ ہے۔
حل: حد کی تعریف میں $x_0=1$ ، $f(x)=5x-3$ اور $L=2$ لیں۔ کسی بھی دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ہمیں موزوں $\delta>0$ تلاش کرنا ہو گا تاکہ اگر $x\neq 1$ ہو اور $x_0=1$ سے x کا فاصلہ δ سے کم ہو یعنی اگر

$$0<|x-a|<\delta$$

ہو تب $L=2$ سے $f(x)$ کا فاصلہ ϵ سے کم ہو گا یعنی:

$$\left|f(x)-2\right|<\epsilon$$

ہم ϵ کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے δ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\left|(5x-3)-2\right| &= |5x-5|<\epsilon\\ 5|x-1|&<\epsilon\\ |x-1|&<\frac{\epsilon}{5}\end{aligned}$$

یوں ہم $\delta=\frac{\epsilon}{5}$ لے سکتے ہیں (شکل 2.20)۔ اب اگر $0<|x-1|<\delta=\frac{\epsilon}{5}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

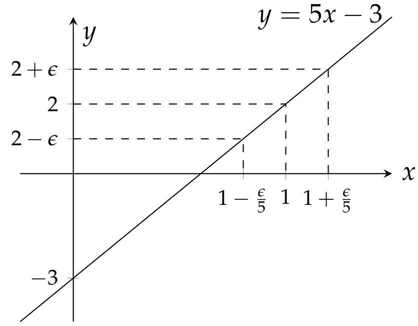
$$\left|(5x-3)-2\right|=|5x-5|=5|x-1|<5(\tfrac{\epsilon}{5})=\epsilon$$

اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$ ہے۔

$\delta=\frac{\epsilon}{5}$ وہ واحد قیمت نہیں ہے جس کے لئے $0<|x-1|<\delta$ سے مراد $|5x-5|<\epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔ δ کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لئے بھی $0<|x-1|<\delta$ سے مراد $|5x-5|<\epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔ حد کی تعریف بہترین δ کی بات نہیں کرتی ہے بلکہ δ کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو کی بات کرتی ہے۔ □

مثال 2.20: دو اہم حد
تصدیق کریں: (ا) $\lim_{x\to x_0} x=x_0$ (ب) $\lim_{x\to x_0} k=k$ جہاں k مستقل ہے۔
حل: (ا) فرض کریں کہ $\epsilon>0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا $\delta>0$ تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لئے

$0<|x-x_0|<\delta$ سے مراد $|x-x_0|<\epsilon$ ہو۔



شکل 2.20: تفاعل $f(x) = 5x - 3$ کے لئے $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{5}$ کی صورت میں $\left|f(x) - 2\right| < \epsilon$ ہو گا (مثال 2.19)۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ δ کی قیمت ϵ کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل 2.21-ا)۔ یوں ثابت ہو کہ $\lim_{x\to x_0} = x_0$ ہے۔

(ب) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا δ تلاش کرنا ہے کہ ہر x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{سے مراد} \quad |k - k| < \epsilon \quad \text{ہو۔}$$

چونکہ $k - k = 0$ ہے لہٰذا کسی بھی مثبت عدد کو δ لیا جا سکتا ہے (شکل 2.21-ب)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to x_0} k = k$ ہے۔ □

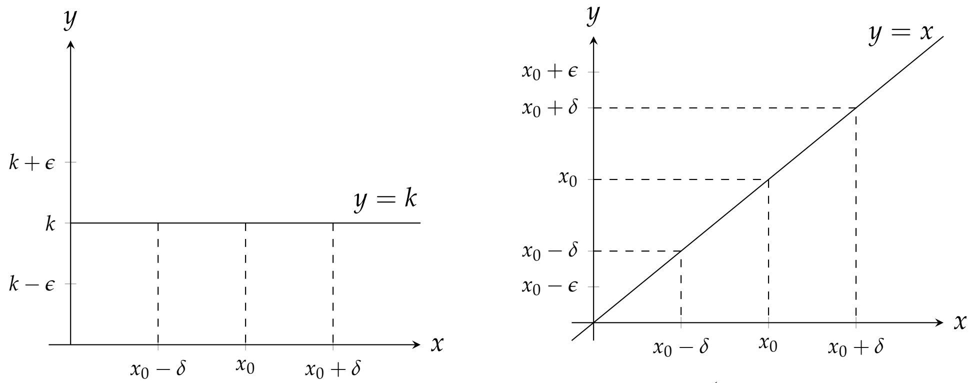
دیے گئے ϵ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

مثال 2.19 اور مثال 2.20 میں x_0 کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر $\left|f(x) - L\right|$ کی قیمت ϵ سے کم تھی x_0 کے لحاظ سے تشاکلی تھا۔ یوں ہم δ کو وقفہ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشاکل نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا ہے، ہم x_0 سے وقفے کے قریبی سر تک فاصلے کو δ لے سکتے ہیں۔

مثال 2.21: حد $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$ کے لئے $\epsilon = 1$ کے لحاظ سے $\delta > 0$ تلاش کریں۔ یعنی ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $0 < |x - 5| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت $\implies$ کو پڑھیں "سے مراد"۔)

$$0 < |x-5| < \delta \quad \overset{\text{سے مراد}}{\implies} \quad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$

حل: اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ (a, b) تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد



(ا) $0<|x-x_0|<\delta$ کی صورت میں $f(x)=x$ کے لئے جب بھی $\delta\le\epsilon$ ہو تب $|f(x)-x_0|<\epsilon$ ہو گا۔

(ب) تفاعل $f(x)=k$ کے لئے کسی بھی مثبت δ کی صورت میں $|f(x)-k|<\epsilon$ ہو گا۔

شکل 2.21: اشکال برائے مثال 2.20

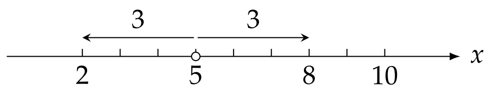
$\delta>0$ حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ $5-\delta<x<5+\delta$ کا وسط نقطہ x_0 ہو اور یہ وقفہ (a,b) کے اندر پایا جاتا ہو۔
پہلا قدم: عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0=5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں کہ اس وقفے پر تمام $x\neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x-1}-2\right| &< 1\\
-1<\sqrt{x-1}-2 &< 1\\
1<\sqrt{x-1} &< 3\\
1<x-1 &< 9\\
2<x &< 10
\end{aligned}$$

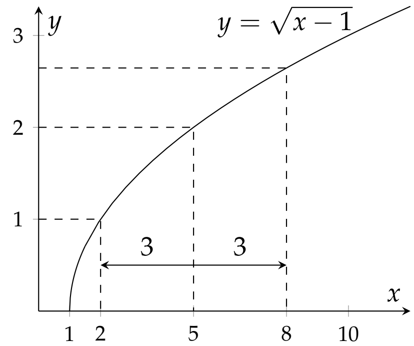
عدم مساوات کھلے وقفہ $(2,10)$ پر تمام نقطوں کے لئے مطمئن ہوتی ہے لہذا یہ اس وقفے پر تمام $x\neq 5$ کے لئے بھی مطمئن ہو گی۔
دوسرا قدم: ایسا $\delta>0$ تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ $5-\delta<x<5+\delta$ کو وقفہ $(2,10)$ میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ $(2,10)$ کے قریبی سر کا فاصلہ 3 ہے۔اس طرح $\delta=3$ یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے $0<|x-5|<\delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x وقفہ $(2,10)$ میں پائے جائیں گے جس سے $\left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$ خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0<|x-5|<3 \quad\Longrightarrow\quad \left|\sqrt{x-1}-2\right|<1$$

□



(ا) $x_0 = 5$ کے ارد گرد رداس 3 کا کھلا وقفہ $(2, 10)$ کے اندر پایا جائے گا۔



(ب) تفاعل اور وقفہ

شکل 2.22: اشکال برائے مثال 2.21

دیے گئے f ، L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

ایسا $\delta > 0$ کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

کو دو قدموں میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ (a, b) حاصل کریں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو کھلا وقفہ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، جس کا وسط x_0 ہے، کو (a, b) کے اندر رکھے۔اس δ وقفہ میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہو گی۔

مثال 2.22: ثابت کریں کہ درج ذیل تفاعل کے لئے $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

حل: ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ $0 < |x - 2| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - 4\right| < \epsilon$$

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|f(x)-4\right|<\epsilon$ کو حل کرتے ہوئے $x_0=2$ کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام $x\neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔اب $x\neq x_0=2$ کے لئے $f(x)=x^2$ ہے لہٰذا عدم مساوات کی صورت $\left|x^2-4\right|<\epsilon$ ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\left|x^2-4\right| &< \epsilon\\
-\epsilon < x^2-4 &< \epsilon\\
4-\epsilon < x^2 &< 4+\epsilon\\
\sqrt{4-\epsilon} < |x| &< \sqrt{4+\epsilon} && \text{فرض کریں کہ } \epsilon<4 \text{ ہے}\\
\sqrt{4-\epsilon} < x &< \sqrt{4+\epsilon}
\end{aligned}$$

کھلا وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon},\sqrt{4+\epsilon})$ میں تمام $x\neq 2$ کے لئے عدم مساوات $\left|f(x)-4\right|<\epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta>0$ تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ $(2-\delta,2+\delta)$ کو $(\sqrt{4-\epsilon},\sqrt{4+\epsilon})$ کے اندر رکھتا ہو۔نقطہ $x_0=2$ سے کھلا وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon},\sqrt{4+\epsilon})$ کے قریبی سر کا فاصلہ δ ہو گا۔یوں $2-\sqrt{4-\epsilon}$ اور $\sqrt{4+\epsilon}-2$ میں سے کم قیمت δ کے برابر ہو گی۔ δ کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لئے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0<|x-2|<\delta \quad\implies\quad \left|f(x)-4\right|<\epsilon$$

□

درج بالا مثال میں ہم نے $\epsilon<4$ کیوں فرض کیا؟ اس لئے کہ تمام x کے لئے ایسا δ کہ $\delta>|x-2|>0$ سے مراد $\left|f(x)-4\right|<\epsilon<4$ ہو میں ہم نے δ کی وہ قیمت دریافت کی جو ϵ کے کسی بھی بڑی قیمت کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسئلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے ہیں۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسئلوں (بالخصوص حصہ 2.2 کے مسئلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کیے جاتے ہیں۔آئیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال 2.23: قاعدہ مجموعہ
اگر $\lim_{x\to c} f(x)=L$ اور $\lim_{z\to c} g(x)+M$ ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$$

حل: فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہم ایسا مثبت عدد δ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ $0 < |x - c| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) + g(x) - (L + M)\right| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \left|f(x) + g(x) - (L + M)\right| &= \left|(f(x) - L) + (g(x) - M)\right| \\ &\le \left|f(x) - L\right| + \left|g(x) - M\right| \qquad \text{تکونی عدم مساوات} \end{aligned}$$

چونکہ $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہے للہذا ایسا عدد $\delta_1 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_1 \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ $\lim_{x\to c} g(x) = M$ موجود ہے للہذا ایسا عدد $\delta_2 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_2 \quad \implies \quad \left|g(x) - M\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ δ_1 اور δ_2 میں سے چھوٹی قیمت δ کے برابر ہے۔اب اگر $0 < |x - c| < \delta$ ہو تب

$$\left|f(x) - L\right| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x - c| < \delta_1$$

ہوں گے، اور $|x - c| < \delta_2$ اور $\left|g(x) - M\right| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔اس طرح

$$\left|f(x) + g(x) - (L + M)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا۔اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$ ہے۔ □

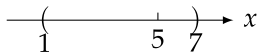
2.3 سوالات

نقطہ x_0 پر وقفے کا وسط لانا

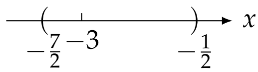
سوال 1 تا سوال 6 میں x محور پر وقفہ (a, b) ترسیم کریں جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے۔اس کے بعد ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $|x - x_0| < \delta$ سے مراد $a < x < b$ ہو۔

سوال 1: $a = 1, b = 7, x_0 = 5$
جواب: $\delta = 2$ شکل 2.23

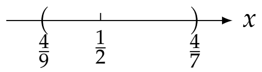
سوال 2: $a = 1, b = 7, x_0 = 2$



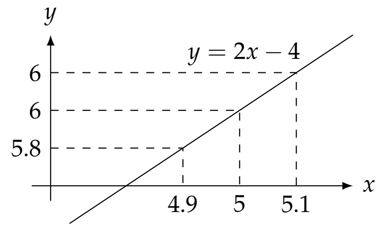
شکل 2.23



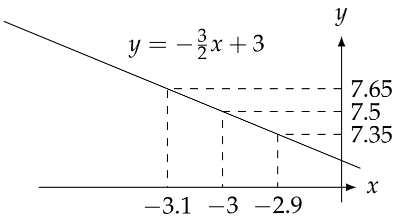
شکل 2.24



شکل 2.25



شکل 2.26: ترسیم برائے سوال 7



شکل 2.27: ترسیم برائے سوال 8

سوال 3: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -3$

جواب: $\delta = \frac{1}{2}$ شکل 2.24

سوال 4: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 5: $a = \frac{4}{9}, b = \frac{4}{7}, x_0 = \frac{1}{2}$

جواب: $\delta = \frac{1}{18}$ شکل 2.25

سوال 6: $a = 2.7591, b = 3.2391, x_0 = 3$

δ کا حصول بذریعہ ترسیم

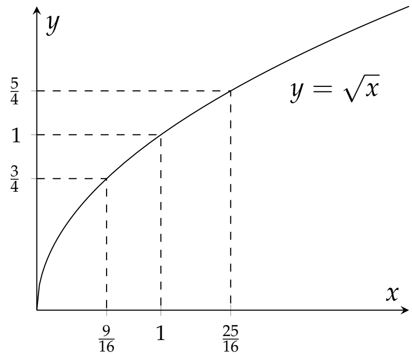
سوال 7 تا سوال 14 میں ترسیم سے ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad 0 < \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

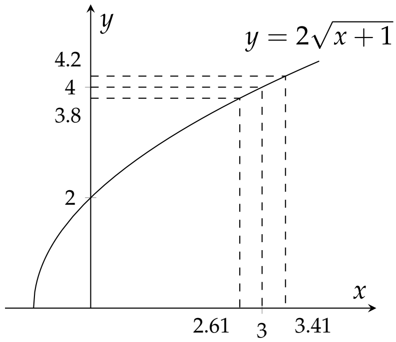
سوال 7: $f(x) = 2x - 4, x_0 = 5, L = 6, \epsilon = 0.2$ شکل 2.26

جواب: $\delta = 0.1$

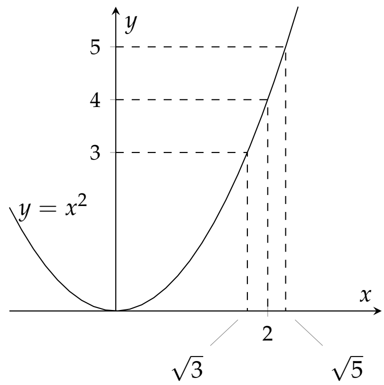
سوال 8: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3, x_0 = -3, L = 7.5, \epsilon = 0.15$ شکل 2.27



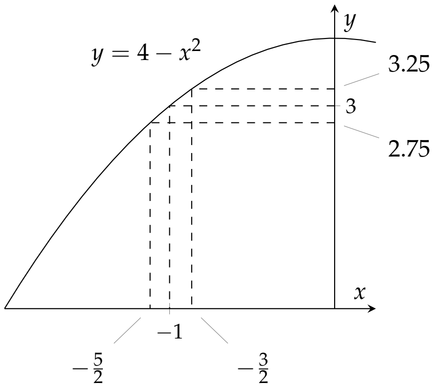
شکل 2.28: ترسیم برائے سوال 9



شکل 2.29: ترسیم برائے سوال 10



شکل 2.30: ترسیم برائے سوال 11



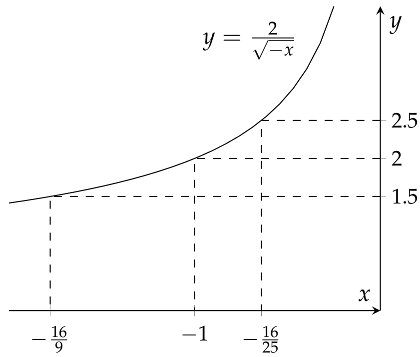
شکل 2.31: ترسیم برائے سوال 12

سوال 9: $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, L = 1, \epsilon = \frac{1}{4}$ شکل 2.28
جواب: $\delta = \frac{7}{16}$

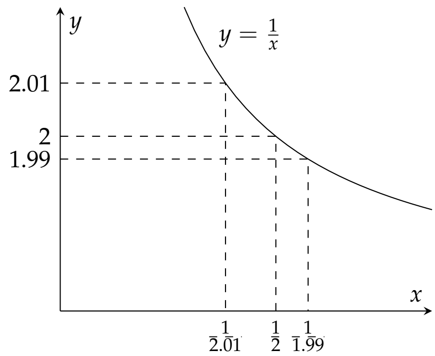
سوال 10: $f(x) = 2\sqrt{x+1}, x_0 = 3, L = 4, \epsilon = 0.2$ شکل 2.29

سوال 11: $f(x) = x^2, x_0 = 2, L = 4, \epsilon = 1$ شکل 2.30
جواب: $\delta = \sqrt{5} - 2$

سوال 12: $f(x) = 4 - x^2, x_0 = -1, L = 3, \epsilon = 0.25$ شکل 2.31



شکل 2.32: ترسیم برائے سوال 13



شکل 2.33: ترسیم برائے سوال 14

سوال 13: $\quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}, x_0 = -1, L = 2, \epsilon = 0.5$ شکل 2.32
جواب: $\quad \delta = 0.36$

سوال 14: $\quad f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}, L = 2, \epsilon = 0.01$ شکل 2.33

δ کا الجبرائی حصول

سوال 15 تا سوال 30 میں $f(x)$ اور اعداد L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ دیے گئے ہیں۔ہر سوال میں x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کریں جس پر عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہو۔اس کے بعد $\delta > 0$ کی ایسی قیمت تلاش کریں کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے ہر x کے لئے عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

سوال 15: $\quad f(x) = x + 1, L = 5, x_0 = 4, \epsilon = 0.01$
جواب: $\quad \delta = 0.01, \quad (3.99, 4.01)$

سوال 16: $\quad f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \epsilon = 0.02$

سوال 17: $\quad f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, x_0 = 0, \epsilon = 0.1$
جواب: $\quad \delta = 0.19, \quad (-0.19, 0.21)$

سوال 18: $\quad f(x) = \sqrt{x}, L = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{4}, \epsilon = 0.1$

سوال 19: $\quad f(x) = \sqrt{19 - x}, L = 3, x_0 = 10, \epsilon = 1$
جواب: $\quad \delta = 5, \quad (3, 15)$

سوال 20: $\quad f(x) = \sqrt{x - 7}, L = 4, x_0 = 23, \epsilon = 1$

سوال 21: $f(x)=\frac{1}{x}, L=\frac{1}{4}, x_0=4, \epsilon=0.05$
جواب: $\delta=\frac{2}{3}, \quad (\frac{10}{3}, 5)$

سوال 22: $f(x)=x^2, L=3, x_0=\sqrt{3}, \epsilon=0.1$

سوال 23: $f(x)=x^2, L=4, x_0=-2, \epsilon=0.5$
جواب: $\delta=\sqrt{4.5}-2\approx 0.12, \quad (-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$

سوال 24: $f(x)=\frac{1}{x}, L=-1, x_0=-1, \epsilon=0.1$

سوال 25: $f(x)=x^2-5, L=11, x_0=4, \epsilon=1$
جواب: $\delta=\sqrt{17}-4\approx 0.12, \quad (\sqrt{15}, \sqrt{17})$

سوال 26: $f(x)=\frac{120}{x}, L=5, x_0=24, \epsilon=1$

سوال 27: $f(x)=mx, m>0, L=2m, x_0=2, \epsilon=0.03$
جواب: $\delta=\frac{0.03}{m}, \quad (2-\frac{0.03}{m}, 2+\frac{0.03}{m})$

سوال 28: $f(x)=mx, m>0, L=3m, x_0=3, \epsilon=c>0$

سوال 29: $f(x)=mx+b, m>0, L=\frac{m}{2}+b, x_0=\frac{1}{2}, \epsilon=c>0$
جواب: $\delta=\frac{c}{m}, \quad (\frac{1}{2}-\frac{c}{m}, \frac{1}{2}+\frac{c}{m})$

سوال 30: $f(x)=mx+b, m>0, L=m+b, x_0=1, \epsilon=0.05$

با ضابطہ حد پر مزید سوالات

سوال 31 تا سوال 36 میں تفاعل $f(x)$ ، نقطہ x_0 اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ تلاش کریں۔اس کے بعد ایسا عدد $\delta>0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0<|x-x_0|<\delta \quad \implies \quad \left|f(x)-L\right|<\epsilon$$

سوال 31: $f(x)=3-2x, x_0=3, \epsilon=0.02$
جواب: $\delta=0.01, \quad L=-3$

سوال 32: $f(x)=-3x-2, x_0=-1, \epsilon=0.03$

سوال 33: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, x_0=2, \epsilon=0.05$
جواب: $\delta=0.05, \quad L=4$

سوال 34: $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+5}, x_0 = -5, \epsilon = 0.05$

سوال 35: $f(x) = \sqrt{1-5x}, x_0 = -3, \epsilon = 0.5$
جواب: $\delta = 0.75, \quad L = 4$

سوال 36: $f(x) = \frac{4}{x}, x_0 = 2, \epsilon = 0.4$

سوال 37 تا سوال 50 میں دیا گیا فقرہ حد ثابت کریں۔

سوال 37: $\lim_{x\to 4}(9-x) = 5$

سوال 38: $\lim_{x\to 3}(3x-7) = 2$

سوال 39: $\lim_{x\to 9}\sqrt{x-5} = 2$

سوال 40: $\lim_{x\to 0}\sqrt{4-x} = 2$

سوال 41: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

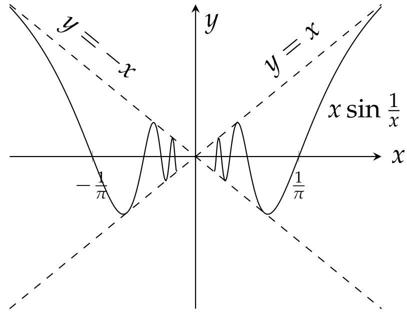
سوال 42: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$

سوال 43: $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$

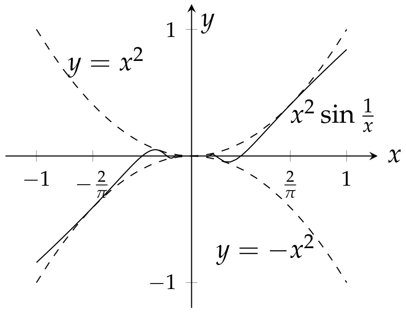
سوال 44: $\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$

سوال 45: $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} = -6$

سوال 46: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$



شکل 2.34: ترسیم برائے سوال 49



شکل 2.35: ترسیم برائے سوال 50

سوال 47: $f(x)=\begin{cases}4-2x, & x<1\\ 6x-4, & x\geq 1\end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

سوال 48: $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ \frac{x}{2}, & x\geq 0\end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

سوال 49: $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ شکل 2.34

سوال 50: $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$ شکل 2.35

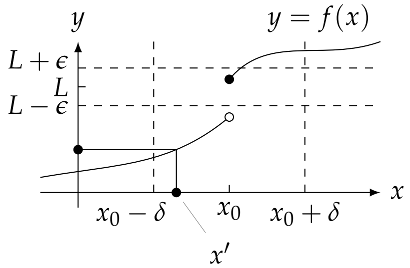
نظریہ اور مثالیں

سوال 51: $\lim_{x\to 2} f(x)=5$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

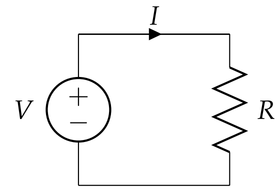
سوال 52: $\lim_{x\to 0} g(x)=k$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 53: یہ کہنا کہ "جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت L کے قریب ہوتی جاتی ہے" سے یہ اخذ نہیں کیا جا سکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال 54: یہ کہنا کہ "کسی بھی دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $\left|f(x)-L\right|<\epsilon$ ہے" سے یہ مراد نہیں لیا جا سکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔



شکل 2.37



شکل 2.36: قانون اوہم (سوال 56)

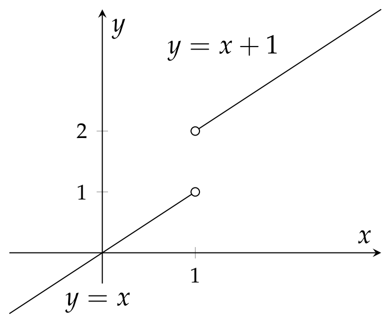
سوال 55: انجن کی سلنڈر کی رگڑائی
انجن سلنڈر کا رقبہ عمودی تراش $58\,\mathrm{cm}^2$ حاصل کرنے کے لئے رگڑائی کرنے سے پہلے آپ جاننا چاہیں گے کہ سلنڈر کے رقبہ میں خلل کو $\mp 0.06\,\mathrm{cm}^2$ درستگی کے اندر رکھنے کے لئے درکار $8.593\,\mathrm{cm}$ قطر میں چھوٹ کتنی ہے۔ یہ جاننے کی خاطر آپ $A = \frac{\pi d^2}{4}$ لکھ کر $|A-58| \le 0.06$ کو حل کرتے ہوئے قطر d تلاش کرتے ہو۔ قطر کا کیا وقفہ حاصل ہو گا؟
جواب: $[8.589, 8.598]$

سوال 56: اوہم کا قانون کہتا ہے کہ $V = IR$ ہو گا جہاں V برقی دباو، I برقی رو اور R برقی مزاحمت ہیں جن کی اکائیاں بالترتیب وولٹ V، ایمپیئر A اور اوہم Ω ہیں (شکل 2.36)۔ آپ کے ادارے کو کہا گیا ہے کہ وہ برقی مزاحمت فراہم کرے۔ برقی دباو $220\,\mathrm{V}$ ہو گی جبکہ برقی رو $10\,\mathrm{mA} \mp 0.1\,\mathrm{mA}$ ہونی ضروری ہے۔ مطلوبہ برقی رو $10\,\mathrm{mA}$ میں چھوٹ $0.1\,\mathrm{mA}$ ہے۔ درکار برقی مزاحمت کا وقفہ کیا ہو گا؟

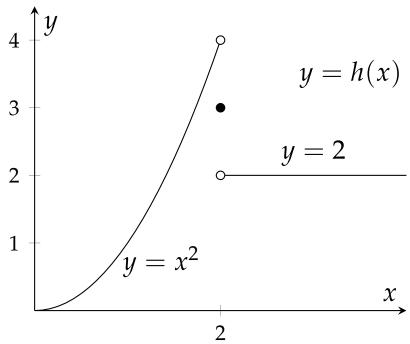
کب $x \to x_0$ کرنے سے عدد L تفاعل $f(x)$ کا حد نہیں ہو گا؟

یہ ثابت کرنے کی خاطر آپ کو ایسا $\epsilon > 0$ تلاش کرنا ہو گا جس کے لئے ایسا کوئی $\delta > 0$ نہیں پایا جاتا ہو کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر ہم اس ϵ کے لئے ثابت کریں گے کہ ہر $\delta > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ اور $|f(x) - L| \ge \epsilon$ ہوں (مثلاً شکل 2.37 میں نقطہ $x = x'$)۔

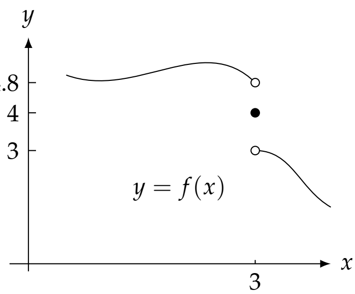
سوال 57: فرض کریں $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ ہے جس کو شکل 2.38 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) $\epsilon = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدم مساوات $0 < |x-1| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے کوئی بھی $\delta > 0$ عدم مساوات $|f(x) - 2| < \frac{1}{2}$ کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ یعنی ہر δ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $0 < |x-1| < \delta$ اور $|f(x) - 2| \ge \frac{1}{2}$ ہوتے ہیں۔ یوں $\lim_{x\to 1} f(x) \ne 2$ ہو گا۔
(ب) دکھائیں $\lim_{x\to 1} f(x) \ne 1$
(پ) دکھائیں $\lim_{x\to 1} f(x) \ne 1.5$



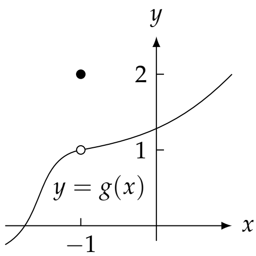
شکل 2.38: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 57



شکل 2.39: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 58



شکل 2.40: ترسیم برائے سوال 59



شکل 2.41: ترسیم برائے سوال 60

سوال 58: تفاعل (شکل 2.39) $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$ کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 3$

(پ) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 2$

سوال 59: تفاعل کی ترسیم شکل 2.40 اس کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 4.2$

(پ) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 3$

سوال 60: دکھائیں کہ شکل 2.41 کی ترسیم کے لئے $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 2$ ہے۔ کیا ایسا نظر آتا ہے جیسے حد $\lim_{x\to -1} g(x)$ موجود ہے؟ اگر حد موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر حد نہیں پایا جاتا تو اس کی وجہ پیش کریں۔

حد بذریعہ ترسیم۔کمپیوٹر کا استعمال

سوال 61 تا سوال 66 میں آپ نے ترسیم کے ذریعہ δ تلاش کرنا ہو گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

(الف) تفاعل $y = f(x)$ کو نقطہ x_0 کے قریب ترسیم کریں۔

(ب) ترسیم کو دیکھ کر حد کا اندازہ لگائیں۔ حد کو حساب کے ذریعہ تلاش کرتے ہوئے اپنے اندازے کی تصدیق کریں۔

(پ) $\epsilon = 0.2$ لیتے ہوئے تحدیدی خطوط $y_1 = L - \epsilon$ اور $y_2 = L + \epsilon$ کھینچیں۔ ساتھ ہی x_0 کے قریب تفاعل f ترسیم کریں۔

(ت) درج بالا جزو (پ) سے ایسے $\delta > 0$ کا اندازہ لگائیں کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتے ہوں۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

اپنا اندازہ پرکھنے کی خاطر f ، y_1 اور y_2 کو وقفہ $0 < |x - x_0| < \delta$ پر ترسیم کریں۔ اگر تفاعل کی کوئی قیمت وقفہ $[L - \epsilon, L + \epsilon]$ کے باہر پائی جاتی ہو تب منتخب کردہ δ بہت بڑا تھا لہٰذا δ کی چھوٹی قیمت لیتے ہوئے دوبارہ کوشش کریں۔

(ٹ) جزو (پ) اور (ت) کو $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ کے لئے دہرائیں۔

سوال 61: $f(x) = \frac{x^4 - 81}{x - 3}, x_0 = 3$

سوال 62: $f(x) = \frac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, x_0 = 0$

سوال 63: $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}, x_0 = 0$

سوال 64: $f(x) = \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}, x_0 = 0$

سوال 65: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, x_0 = 1$

سوال 66: $f(x) = \frac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, x_0 = 1$

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. یک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **بائیں ہاتھ حد**[7] حاصل ہو گا۔اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **دائیں ہاتھ حد**[8] حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

یک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔اسی لئے عام حد کو بعض اوقات **دو طرفہ حد**[9] بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر یک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

تعریف: **دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف**
فرض کریں کہ وقفہ (a, b)، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **دائیں ہاتھ حد** L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

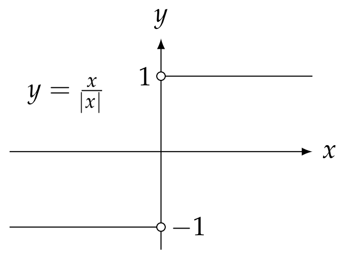
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

فرض کریں کہ وقفہ (c, a)، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **بائیں ہاتھ حد** M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

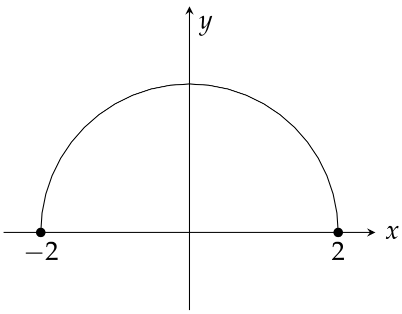
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

---

left-handed limit[7]
right-handed limit[8]
two-sided limit[9]



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔



شکل 2.43: تفاعل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔

شکل 2.42 میں تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -1$$

$x \to a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x \to a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا دائرہ کار $[-2, 2]$ ہے۔ تفاعل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

نقطہ $x = -2$ پر تفاعل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = 2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x = -2$ اور $x = 2$ پر تفاعل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ □

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تفاعل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تفاعل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: **یک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد**
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$ پر: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$ پر: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔(دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$ پر: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(2) = 2$ ہے۔

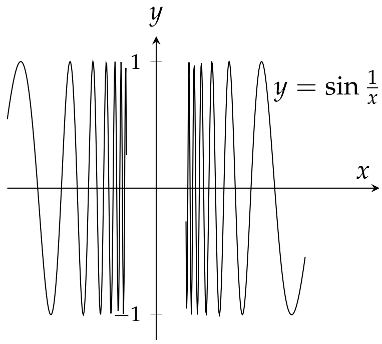
$x = 3$ پر: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

$x = 4$ پر: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔(نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

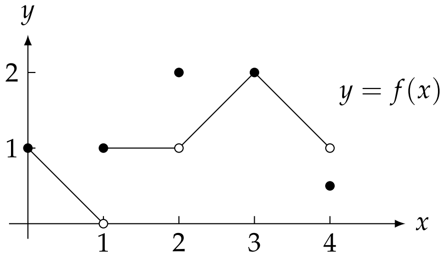
اس کے علاوہ $[0,4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ □

اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا یک طرفہ حد موجود تھا۔درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نا ہی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin\frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔
حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ایسا کوئی یکتا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔یوں $x = 0$ پر $\sin\frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نا کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔
□



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

لامتناہی حد

آئیں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے $x \to 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔یوں $x \to 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x \to 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

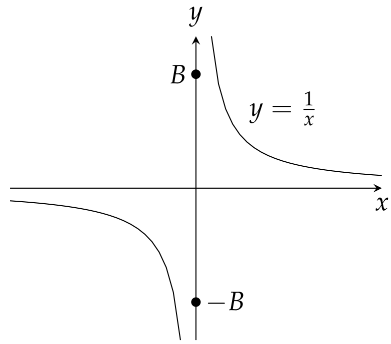
یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x \to 0^-$ کرنے سے $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

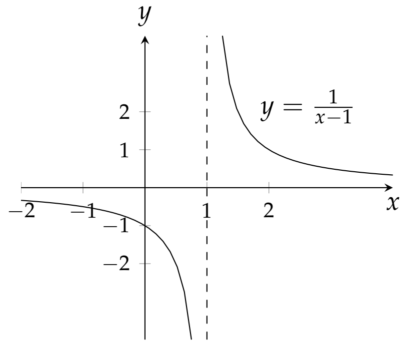
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x \to 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: یک طرفہ حد
$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.46: تفاعل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27

حل: **ترسیمی حل:** تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x - 1$ اور اس کے بالعکس متناسب پر غور کریں۔ $x \to 1^+$ کرنے سے $(x-1) \to 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \to \infty$ ملتے ہیں۔ $x \to 1^-$ کرنے سے $(x-1) \to 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ ملتے ہیں۔ □

مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد

(ا) $x = 0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x = -3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔

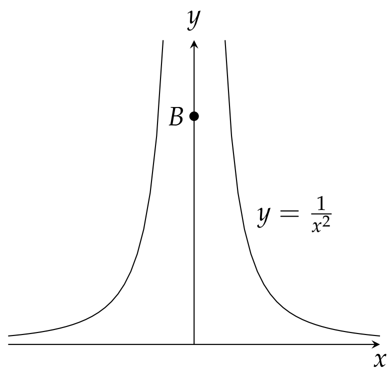
حل: (ا) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

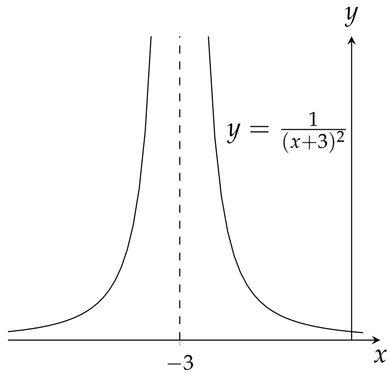
(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.48: تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.49: تفاعل $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \to 0$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \to 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: ناطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \qquad \text{(ا)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \qquad \text{(ب)}$$

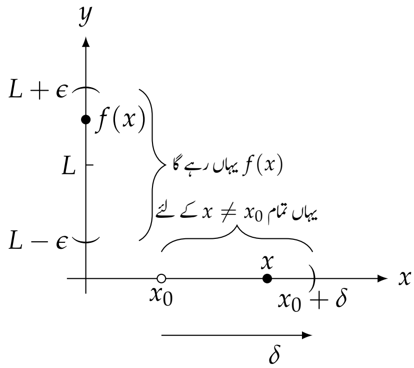
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \qquad \text{(ج)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \qquad \text{(د)}$$

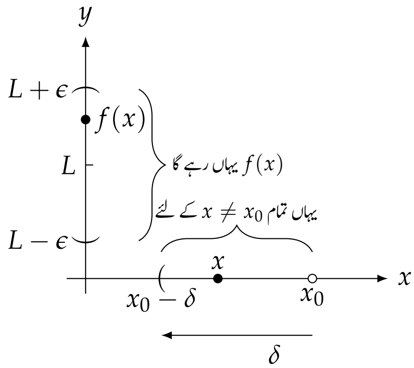
$$\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \qquad \text{(و)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \qquad \text{(ہ)}$$

جزو (ا) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہٰذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔جزو (ہ) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جا سکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.1}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

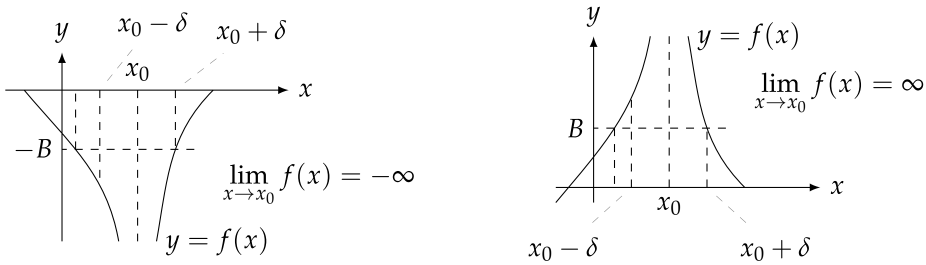
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

بائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.2}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$



شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$0 < x - x_0 < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.3}$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\delta < x - x_0 < 0 \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.4}$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.5}$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبدا سے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: **لامتناہی حد**

(ا) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

ا. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

ج. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

د. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

ہ. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ موجود ہے۔

و. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

ز. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

ح. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

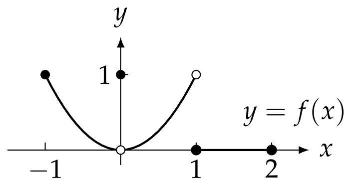
ط. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

ي. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$

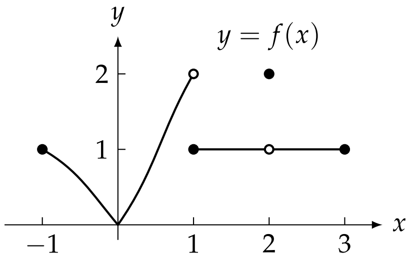
يا. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ غیر موجود ہے۔

یب. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$

جواب:



شکل 2.53: تفاعل برائے سوال 1



شکل 2.54: تفاعل برائے سوال 2

ا. درست   ج. غلط   ہ. درست   ز. غلط   ط. غلط   یا. درست

ب. درست   د. درست   و. درست   ح. غلط   ي. غلط   یب. غلط

سوال 2: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تفاعل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔

ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim_{x\to 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

د. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

ہ. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

و. $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ز. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

ح. کھلے وقفہ $(-1,1)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

ط. کھلے وقفہ $(1,3)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

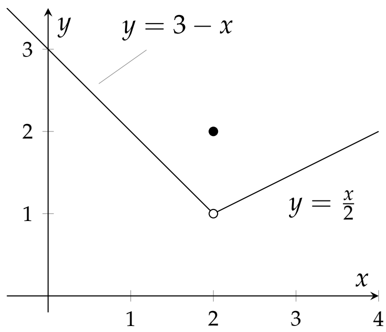
ي. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$

یا. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ غیر موجود ہے۔

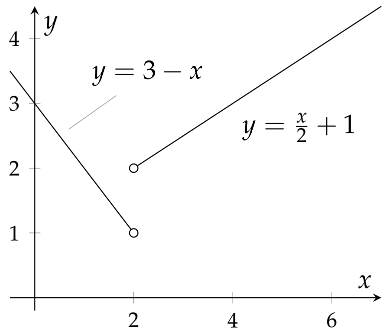
سوال 3: درج ذیل تفاعل کو شکل 3 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x<2 \\ \frac{x}{2}+1, & x>2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔



شکل 2.56: تفاعل برائے سوال 4



شکل 2.55: تفاعل برائے سوال 3

ب. کیا $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود ہے۔اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تا نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $2, 1$ ، (ب) نہیں $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ ، (ج) $3, 3$ ، (د) ہاں، 3

سوال 4: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

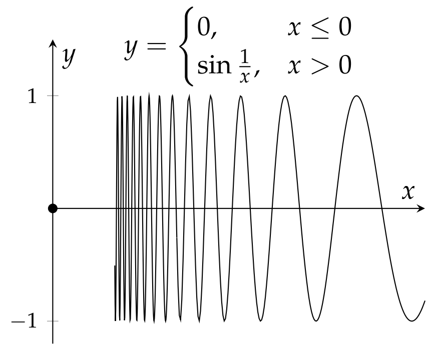
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

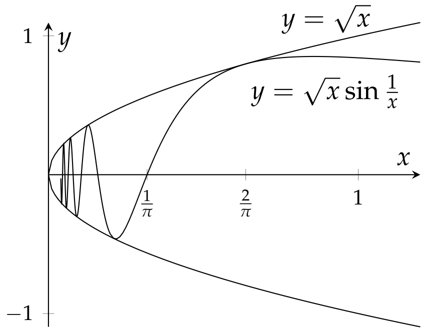
ب. کیا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ اور $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 5



شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 6

سوال 5: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

ا. کیا $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) نہیں (ب) ہاں، 0 (ج) نہیں

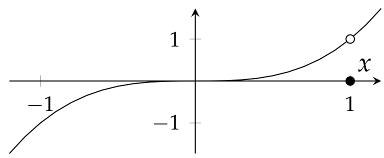
سوال 6: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

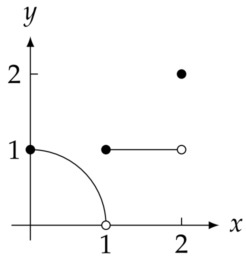
ب. کیا $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7:



شکل 2.59: ترسیم برائے سوال 7



شکل 2.60: ترسیم برائے سوال 9

ا. تفاعل $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) شکل 2.59 (ب) $1, 1$ (ج) ہاں، 1

سوال 8:

ا. تفاعل $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9 اور سوال 10 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

سوال 9: $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 0\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

جواب: شکل 9 (ا) $D: 0\le x\le 2$ ، $R: 0<y\le 1$ اور $y=2$ (ب) $(0,1)\cup(1,2)$ (ج) $x=2$ (د) $x=0$

سوال 10: $$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0 \text{ یا } 0<x\le 1\\ 1, & x=0\\ 0, & x<-1 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 11 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

سوال 11: $\lim\limits_{x\to -0.5^-}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

جواب: $\sqrt{3}$

سوال 12: $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

سوال 13: $\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$

جواب: 1

سوال 14: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

سوال 15: $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

جواب: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 16: $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

سوال 17: (ا) $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$ (ب) $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

جواب: (ا) 1 (ب) -1

سوال 18: (ا) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 19: (ا) $\lim_{\theta\to 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta\to 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$
جواب: (ا) 1 (ب) $\frac{2}{3}$

سوال 20: (ا) $\lim_{t\to 4^+} (t-|t|)$ (ب) $\lim_{t\to 4^-} (t-|t|)$

لامتناہی حد: سوال 21 تا سوال 32 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}$
جواب: ∞

سوال 22: $\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 23: $\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$
جواب: $-\infty$

سوال 24: $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 25: $\lim_{x\to -8^+} \frac{2x}{x+8}$
جواب: $-\infty$

سوال 26: $\lim_{x\to -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 27: $\lim_{x\to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$
جواب: ∞

سوال 28: $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 29: (ا) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$
جواب: (ا) ∞ (ب) $-\infty$

سوال 30: (ا) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

سوال 31: $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$
جواب: ∞

سوال 32: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 33 تا سوال 36 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x$
جواب: ∞

سوال 34: $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 35: $\lim_{\theta\to 0^-} (1+\csc\theta)$
جواب: $-\infty$

سوال 36: $\lim_{\theta\to 0}(2-\cot\theta)$

مزید حساب: سوال 37 تا سوال 42 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 37: $\lim \frac{1}{x^2-4}$

ا. $x\to 2^+$ ب. $x\to 2^-$ ج. $x\to -2^+$ د. $x\to -2^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) $-\infty$ (ج) $-\infty$ (د) ∞

سوال 38: $\lim \frac{x}{x^2-1}$

ا. $x\to 1^+$ ب. $x\to 1^-$ ج. $x\to -1^+$ د. $x\to -1^-$

سوال 39: $\lim(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to \sqrt[3]{2}$ د. $x \to -1$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞ (ج) 0 (د) $\frac{3}{2}$

سوال 40: $\lim \frac{x^2-1}{2x+4}$

ا. $x \to -2^+$ ب. $x \to -2^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 0^-$

سوال 41: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 2^+$ ج. $x \to 2^-$ د. $x \to 2$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $-\infty$ ہو گا۔

سوال 42: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

ا. $x \to 2^+$ ب. $x \to -2^+$ ج. $x \to 0^-$ د. $x \to 1^+$

سوال 43 تا سوال 46 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

سوال 43: $\lim(2 - \frac{3}{t^{1/3}})$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞

سوال 44: $\lim(\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

سوال 45: $\lim(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) ∞ (ج) ∞ (د) ∞

سوال 46: $\lim(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x\to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x\to a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x\to c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

یک طرفہ حد کی با ضابطہ تعریف

سوال 51: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5+\delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟
جواب: $\delta = \epsilon^2, \lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

سوال 52: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4-\delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 53 اور سوال 54 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 53: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$

سوال 54: $\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

سوال 55: (ا) $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔
جواب: (ا) 400 (ب) 399 (ج) حد غیر موجود ہے۔

سوال 56: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔(ا) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ تلاش کریں۔اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے فقروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

سوال 57: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

سوال 58: $\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

سوال 59: $\lim_{x \to 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty$

سوال 60: $\lim_{x \to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

یک طرفہ لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لا متناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لا متناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to x_0^+} = \infty$$

سوال 61: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

ا. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$
ب. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
ج. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

جواب: (ا) ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہے۔(ب) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔(ج) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔

یک طرفہ لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 62 تا سوال 67 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 62: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

سوال 63: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

سوال 64: $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

سوال 65: $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

سوال 66: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$

سوال 67: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے ناکہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اتنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاید ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مالیکیول میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی در حقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے ناکہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

عملاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی **اندرونی نقطے**[10] (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، **بائیں سر نقطے**[11] اور **دائیں سر نقطے**[12]۔

تعریف: **اندرونی نقطہ پر استمرار**
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ c $x = c$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر f استمراری ہو گا۔

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

شکل 2.61 میں $x = 0$ پر (ا) استمراری ہے۔اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کی بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔انہیں **قابل ہٹاو**[13] عدم استمرار کہتے ہیں۔ان دونوں میں $x \to 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر پر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے۔

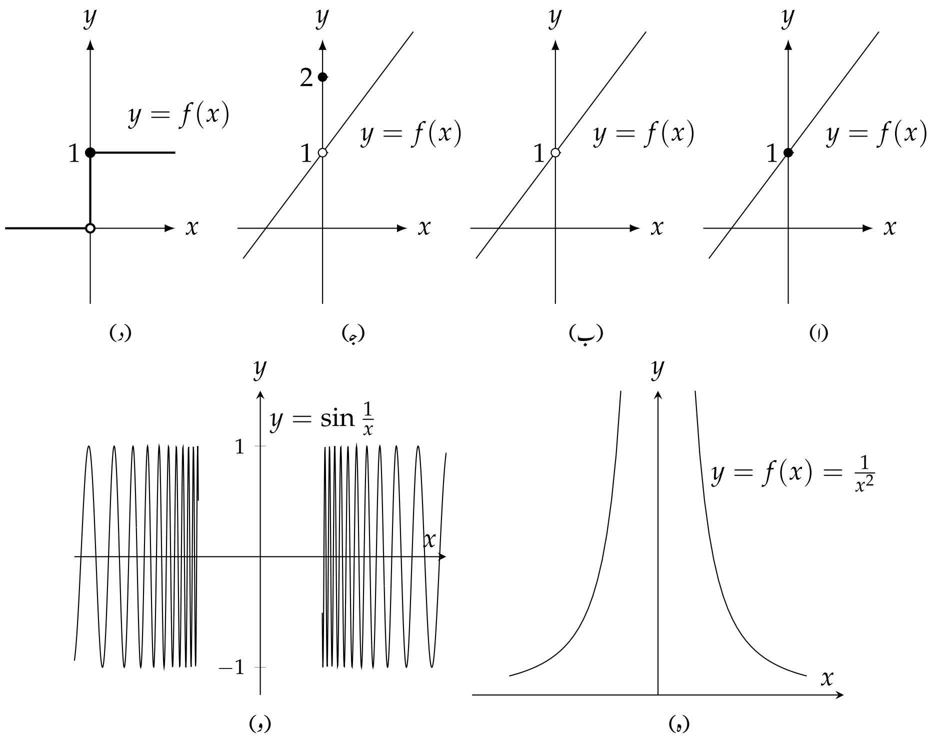
شکل 2.61 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تشویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں لہٰذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جا سکتی ہے۔ (د) میں **چھلانگ عدم استمرار**[14] پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (ہ) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا **لا متناہی عدم استمرار**[15] پایا جاتا ہے۔ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لئے غیر استمراری ہے کہ $x \to 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں **ارتعاشی عدم استمرار**[16] پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

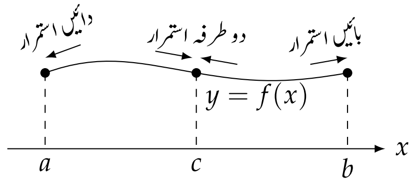
آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

---

interior points[10]
left endpoints[11]
right endpoints[12]
removable[13]
jump discontinuity[14]
infinite discontinuity[15]
oscillating discontinuity[16]



شکل 2.61: $x = 0$ پر تفاعل (ا) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (و) غیر استمراری ہیں۔



شکل 2.62: نقطہ a ، b اور c پر استمرار

تعریف: **بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار**
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔

عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل **دائیں استمراری**[17] ہو گا۔اسی طرح تفاعل f اس صورت **بائیں استمراری**[18] ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.62)۔

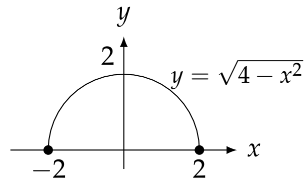
مثال 2.30: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل 2.63)۔

□

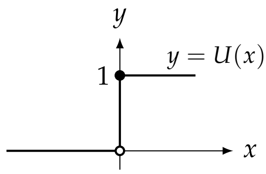
مثال 2.31: شکل 2.64 میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ نا بائیں استمراری ہے اور نا ہی استمراری ہے۔
□

---

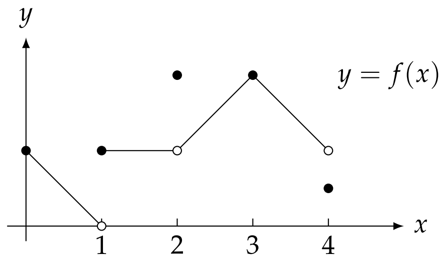
[17] right-continuous
[18] left-continuous



شکل 2.63: پورے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری



شکل 2.64: یہ تفاعل مبدا پر دائیں استمراری ہے



شکل 2.65: تفاعل f بند وقفہ $[0,4]$ پر معین ہے۔یہ تفاعل $x=1,2,4$ پر غیر استمراری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استمراری ہے۔

ہم نقطے پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

پرکھ استمرار
نقطہ $x=c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

1. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)

2. $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے ($x\to c$ پر f کا حد پایا جاتا ہے)

3. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ (تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

یک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل $y=f(x)$ جسے شکل 2.65 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔نقطہ $x=0,1,2,3,4$ پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

ا. $x = 0$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(0)$ موجود ہے $(f(0) = 1)$

2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)

3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں)

ب. چونکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے لہٰذا $x = 1$ پر f غیر استمراری ہے۔پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استمراری ہے چونکہ

1. $f(1)$ موجود ہے ($f(1) = 1$)

2. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ (نقطہ $x = 1$ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)

3. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ (دائیں ہاتھ حد اور تفاعل کی قیمتیں برابر ہیں۔)

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ کی بنا $x = 2$ پر f غیر استمراری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

د. $x = 3$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(3)$ موجود ہے ($f(3) = 2$)

2. $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ (نقطہ $x = 2$ پر حد موجود ہے۔)

3. $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)

ہ. چونکہ $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ ہے لہٰذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استمراری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار
اگر نقطہ $x = c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x = c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

1. $f+g$ اور $f-g$
2. fg
3. kf ، جہاں k کوئی عدد ہے
4. $\frac{f}{g}$ (بشرطیکہ $g(c) \neq 0$ ہو)
5. $(f(x))^{m/n}$ (بشرطیکہ $(f(x))^{m/n}$ اس وقفے پر معین ہو جس پر c پایا جاتا ہے، اور m اور n عدد صحیح ہیں۔)

درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

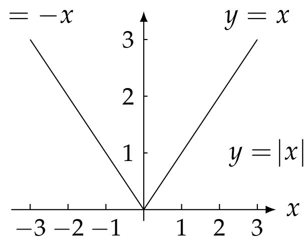
مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار
حقیقی خط کے ہر نقطہ پر ہر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال 2.33: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = x^4 + 20$ اور $g(x) = 5x(x-2)$ استمراری ہیں۔تفاعل

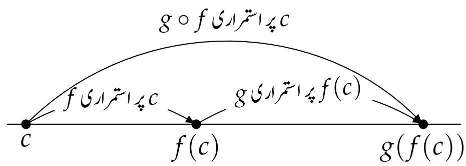
$$r(x) = \frac{x^2+20}{5x(x-2)}$$

ماسوائے $x = 0$ اور $x = 2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔ □

مثال 2.34: $f(x) = |x|$ کی استمرار
x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = |x|$ استمراری ہے (شکل 2.66)۔ $x > 0$ کے لئے $f(x) = x$ ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔اسی



شکل 2.66: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔



شکل 2.67: مرکب تفاعل کی استمرار۔

طرح $x < 0$ کے لئے $f(x) = -x$ ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔آخر میں مبدا پر $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$ ہے۔
$\square$

مثال 2.35: **تکونیاتی تفاعل کی استمرار**
اگلے باب میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استمراری ہے لہٰذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$\square$

مسئلہ 2.8: **مرکبات کی استمرار**
اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استمراری ہوں تب c پر $g \circ f$ استمراری ہو گا (شکل 2.67)۔

مرکب کی استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

(ا) $y = \sqrt{x}$ — مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت)

(ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ — مسئلہ 2.7 اور مسئلہ 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب)

(ج) $y = \dfrac{x\cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$ — مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی)

(د) $y = \left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$ — مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حتمی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب)

□

نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔اگر $f(c)$ غیر معین ہو لیکن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل F نقطہ $x = c$ پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو f کی نقطہ $x = c$ تک **استمراری توسیع**[19] کہتے ہیں اور توسیع شدہ تفاعل کو **وسیع تفاعل**[20] کہتے ہیں۔ناطق تفاعل f کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا $x = 2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

حل: اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x \neq 2$ پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل $x \neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x = 2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

یوں f کی نقطہ $x = 2$ تک توسیع تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

تفاعل f کی ترسیم شکل 2.68 میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی یہی ترسیم ہے مگر اس میں $(2, \frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

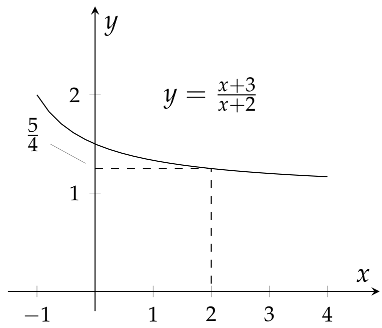
$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

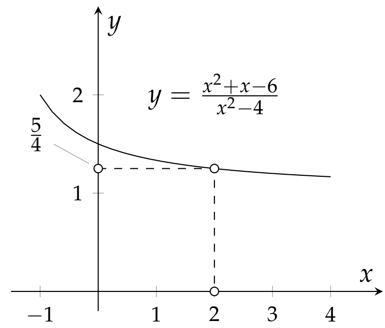
□

---

[19] continuous extension

[20] extended function





شکل 2.68: تفاعل $f(x)$ اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تفاعل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ایسا تفاعل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

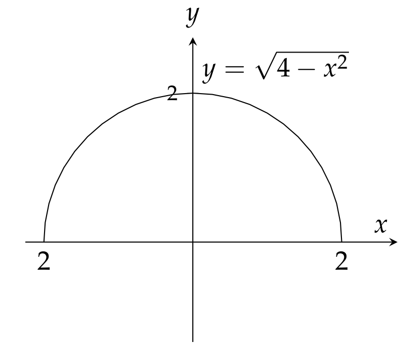
اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تفاعل کی قیمت برابر ہوں تب f **وقفہ پر استمراری**[21] کہلائے گا۔جو تفاعل I پر استمراری ہو یہ تفاعل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تفاعل
شکل 2.69 میں وقفوں پر استمراری تفاعل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔ □

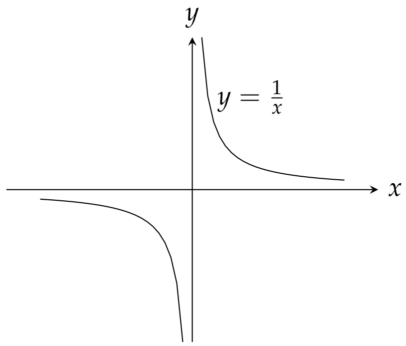
وقفوں پر استمراری تفاعل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ان میں ایک **متوسط قیمت خاصیت**[22] ہے۔اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تفاعل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تفاعل **متوسط قیمت خاصیت** رکھتا ہے۔

مسئلہ 2.9: **مسئلہ متوسط قیمت**
فرض کریں کہ تفاعل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔تب اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا کہ $f(c) = y_0$ ہو (شکل 2.70)۔

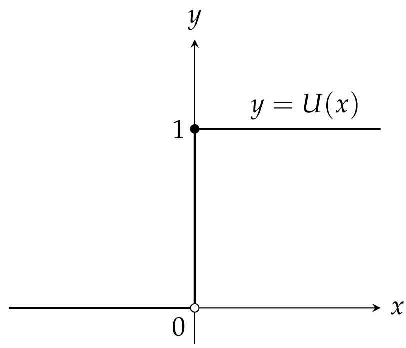
continuous on interval[21]
intermediate value property[22]



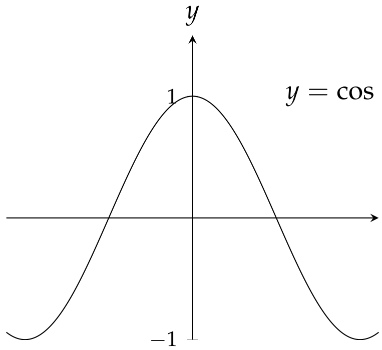
(ا) $[-2,2]$ پر استمراری



(ب) $(-\infty,0)$ اور $(0,\infty)$ پر استمراری

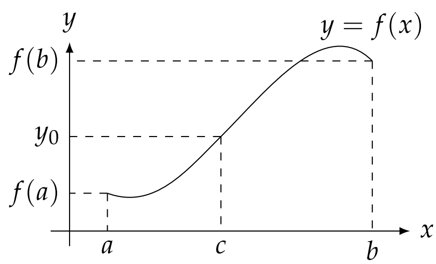


(ج) $(-\infty,0)$ اور $[0,\infty)$ پر استمراری

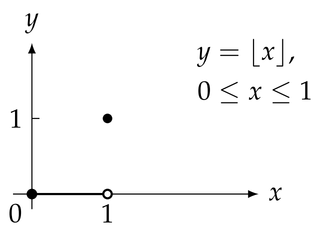


(د) $(-\infty,\infty)$ پر استمراری

شکل 2.69: وقفوں پر استمراری تفاعل (مثال 2.38)



شکل 2.70: وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ ہر قیمت رکھتا ہے



شکل 2.71: تفاعل $y=\lfloor x\rfloor, 0\le x\le 1$ کوئی بھی قیمت $f(0)=0$ اور $f(1)=1$ کے بیچ قبول نہیں کرتا ہے۔

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کی استمرار ضروری ہے۔اگر I میں صرف ایک نقطے پر بھی f غیر استمراری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔اس کی ایک مثال شکل 2.71 میں دی گئی ہے۔

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ I پر استمراری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔اس میں عددی صحیح زمین تفاعل $\lfloor x \rfloor$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نا ہی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

تلاش جذر

مساوات $f(x) = 0$ کے حل کو $f(x)$ کا **صفر**[23] یا **جذر**[24] کہتے ہیں۔مسئلہ 2.9 کے تحت استمراری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت $(\pm)$ تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں f استمراری ہے)۔ مساوات کی ترسیم x محور کو f کی جذر پر قطع کرتی ہے۔ہم $y = f(x)$ کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ یہ کہاں x محور کو قطع کرتی ہے۔ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت دیکھتے ہیں۔اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک کا جذر تلاش کیا جا سکتا ہے۔شکل 2.72 میں، قدم با قدم، اس عمل سے $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

ترسیم سے مساوات کو حل کرتے ہوئے تفاعل کے جذر حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔اس سے کم دورانیے میں جذر کو بذریعہ اعدادی تراکیب حاصل کیا جا سکتا ہے جن پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

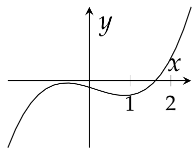
سوالات

استمرار بذریعہ ترسیم

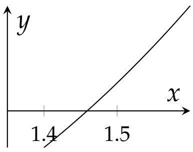
سوال 1 تا سوال 4 میں دریافت کریں کہ آیا تفاعل وقفہ $[-1, 3]$ پر استمراری ہے۔نا ہونے کی صورت میں کہاں تفاعل غیر استمراری ہے اور ایسا کیوں ہے؟

سوال 1: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.73-ا میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: نہیں؛ $x = 2$ پر غیر استمراری ہے؛ $x = 2$ پر غیر معین ہے۔

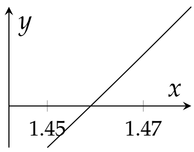
---
[23] zero
[24] root



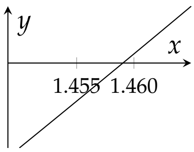
(ا) جذر (صفر) 1 اور 2 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



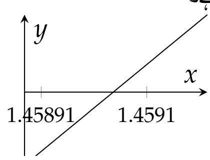
(ب) جذر (صفر) 1.4 اور 1.5 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



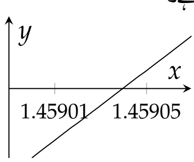
(ج) جذر (صفر) 1.45 اور 1.47 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(د) جذر (صفر) 1.455 اور 1.460 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

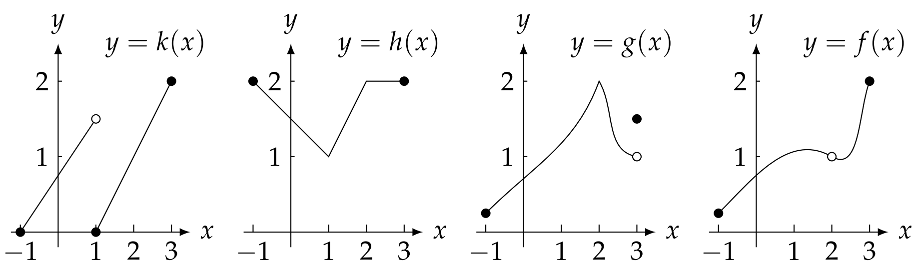


(ہ) جذر (صفر) 1.45891 اور 1.4591 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



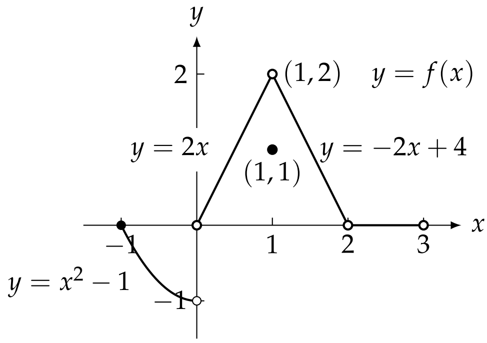
(و) جذر (صفر) 1.45901 اور 1.45905 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

شکل 2.72: ترسیم کے ذریعہ $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کے جذر کا قدم با قدم حصول۔



(ا) (ب) (ج) (د)

شکل 2.73: اشکال برائے سوال 1 تا سوال 4



شکل 2.74: ترسیم برائے سوال 5 تا سوال 10

سوال 2: تفاعل $y = g(x)$ جسے شکل 2.73-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3: تفاعل $y = h(x)$ جسے شکل 2.73-ج میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: استمراری

سوال 4: تفاعل $y = k(x)$ جسے شکل 2.73-د میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5 تا سوال 10 درج ذیل تفاعل کے بارے میں ہیں جس کو شکل 2.74 میں ترسیم کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

سوال 5: (ا) کیا $f(-1)$ موجود ہے؟
(ب) کیا $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ موجود ہے؟
(ج) کیا $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ ہے؟
(د) کیا $x = -1$ پر $f(x)$ استمراری ہے؟
جواب: (ا) ہاں، (ب) ہاں، (ج) ہاں، (د) ہاں

سوال 6: (ا) کیا $f(x)$ موجود ہے؟
(ب) کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟
(ج) کیا $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ہے؟
(د) کیا $x = 1$ پر f استمراری ہے؟

سوال 7: (ا) کیا $x = 2$ پر f معین ہے؟
(ب) کیا $= 2$ پر f استمراری ہے؟
جواب: (ا) نہیں، (ب) نہیں

سوال 8: x کی کس قیمت پر f استمراری ہے؟

سوال 9: $x = 2$ پر توسیع کردہ تفاعل کو استمراری بنانے کی خاطر $f(2)$ کی کیا قیمت ہونی چاہیے؟
جواب: 0

سوال 10: $f(1)$ کی کیا قیمت غیر استمرار کو ختم کرے گی؟

پرکھ استمرار کا استعمال

کن نقطوں پر سوال 11 اور سوال 12 میں دیے گئے تفاعل غیر استمراری ہیں۔ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم کیا جا سکتا ہے؟ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم نہیں کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11: حصہ 2.4 میں سوال 1 کے تفاعل۔
جواب: 1 نا قابل ہٹاو؛ 0 قابل ہٹاو

سوال 12: حصہ 2.4 سوال 2 میں کے تفاعل۔

سوال 13 تا سوال 28 میں کن نقطوں پر تفاعل استمراری ہیں۔

سوال 13: $y = \frac{1}{x-2} - 3x$
جواب: تمام ماسوائے $x = 2$

سوال 14: $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

سوال 15: $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
جواب: تمام ماسوائے $x = 3$ اور $x = 1$

سوال 16: $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$

سوال 17: $y = |x-1| + \sin x$
جواب: تمام x

سوال 18: $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$

سوال 19: $y = \frac{\cos x}{x}$
جواب: تمام ماسوائے $x = 0$

سوال 20: $y = \frac{x+2}{\cos x}$

سوال 21: $y = \csc x$
جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 22: $y = \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 23: $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n طاق عدد صحیح ہے۔

سوال 24: $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

سوال 25: $y = \sqrt{2x+3}$
جواب: تمام $x > -\frac{3}{2}$

سوال 26: $y = \sqrt[4]{3x-1}$

سوال 27: $y = (2x-1)^{1/3}$
جواب: تمام x

سوال 28: $y = (2-x)^{1/5}$

مرکب تفاعل کے حد

سوال 29 تا سوال 34 میں حد تلاش کریں۔

سوال 29: $\lim_{x \to \pi} \sin(x - \sin x)$
جواب: 0

سوال 30: $\lim_{t \to 0} \sin(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t))$

سوال 31: $\lim_{y \to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
جواب: 1

سوال 32: $\lim_{x\to 0} \tan(\frac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3}))$

سوال 33: $\lim_{t\to 0} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{19-3\sec 2t}})$
جواب: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوال 34: $\lim_{x\to \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

استمراری توسیع

سوال 35: $g(3)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x=3$ پر $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ کی استمراری توسیع ہو۔
جواب: $g(3)=6$

سوال 36: $h(2)$ کی تعریف یوں کریں کہ $t=2$ پر $h(t)=\frac{t^2+3t-10}{t-2}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 37: $f(1)$ کی تعریف یوں کریں کہ $s=1$ پر $f(s)=\frac{s^3-1}{s^2-1}$ کی استمراری توسیع ہو۔
جواب: $f(1)=\frac{3}{2}$

سوال 38: $g(4)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x=4$ پر $g(x)=\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 39: a کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<3 \\ 2ax, & x\geq 3\end{cases}$ استمراری ہے؟
جواب: $a=\frac{4}{3}$

سوال 40: b کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $g(x)=\begin{cases} x, & x<-2 \\ bx^2, & x\geq -2\end{cases}$ استمراری ہے؟

استمراری توسیع۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 41 تا سوال 44 میں تفاعل f کو ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کہ آیا مبدا پر اس کا استمراری توسیع پایا جاتا ہے۔اگر ایسا ہو تب $x=0$ پر وسیع تفاعل کی موزوں قیمت تلاش کریں۔ اگر تفاعل کی استمراری توسیع ممکن نہ ہو، تب کیا اس کو مبدا پر دائیں یا بائیں سے استمراری بنایا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں مبدا پر وسیع تفاعل کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 41: $f(x)=\frac{10^x-1}{x}$

سوال 42: $f(x) = \frac{10^{|x|}-1}{x}$

سوال 43: $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

سوال 44: $f(x) = (1+2x)^{1/x}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: ایک استمراری تفاعل کی قیمت $x = 0$ پر منفی اور $x = 1$ پر مثبت ہے۔ $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ مساوات $f(x) = 0$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟ ایک خاکہ کھینچ کر وجہ بیان کریں۔

سوال 46: مساوات $\cos x = x$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟

سوال 47: دکھائیں کہ وقفہ $[-4, 4]$ میں مساوات $x^3 - 15x + 1 = 0$ کے تین حل پائے جاتے ہیں۔

سوال 48: دکھائیں کہ کسی x پر تفاعل $F(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$ کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

سوال 49: دکھائیں کہ c کی ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جن پر تفاعل $f(x) = x^3 - 8x + 10$ کی قیمت (ا) π ؛ (ب) $-\sqrt{3}$ ؛ (ج) $5\,000\,000$ ہوں گی۔

سوال 50: سمجھائیں کہ درج ذیل جملے ایک ہی معلومات پوچھتی ہیں۔

(ا) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے جذر تلاش کریں۔

(ب) اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جہاں $y = x^3$ اور $y = 3x + 1$ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

(ج) وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جن پر $x^3 - 3x = 1$ ہو گا۔

(د) ان نقطوں کے x محدد تلاش کریں جہاں منحنی $y = x^3 - 3x$ خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔

(ہ) مساوات $x^3 - 3x - 1 = 0$ کو حل کریں۔

سوال 51: ایسا تفاعل $f(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = 2$ پر جہاں اس کا قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 2$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار قابل ہٹاو ہے۔

سوال 52: ایسا تفاعل $g(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = -1$ پر جہاں اس کا نا قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 1$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار نا قابل ہٹاو ہے۔

سوال 53: تمام نقطوں پر غیر استمراری تفاعل
(ا) اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہوئے، کہ حقیقی اعداد کا ہر غیر خالی وقفہ ناطق اور غیر ناطق اعداد پر مشتمل ہے، دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل ہر نقطے پر عدم استمراری ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ناطق} \\ 0 & x \text{ غیر ناطق} \end{cases}$$

(ب) کیا کسی نقطے پر f دائیں استمراری یا بائیں استمراری ہے؟

سوال 54: اگر $0 \le x \le 1$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ استمراری ہوں تب کیا $[0,1]$ کے کسی نقطے پر $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: اگر تفاعل $h(x) = f(h)\cdot g(x)$ نقطہ $x = 0$ پر استمراری ہو تب کیا $f(x)$ اور $g(x)$ ضرور $x = 0$ پر استمراری ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 56: ایسے تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی مثال دیں جو $x = 0$ پر استمراری ہوں لیکن ان کا مرکب تفاعل $f \circ g$ نقطہ $x = 0$ پر عدم استمراری ہو۔ کیا یہ مسئلہ 2.8 کی خلاف ورزی کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 57: کیا یہ کہنا درست ہو گا کہ جو تفاعل کسی وقفے پر کبھی صفر نہیں ہوتا ہے وہ تفاعل اس وقفہ پر کبھی علامت تبدیل نہیں کرتا ہے؟اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 58: کیا یہ درست ہے کہ ربڑ کی پٹی کو دونوں سروں سے کھینچنے کے باوجود پٹی پر ایک نقطہ ایسا پایا جاتا ہے جو اپنی جگہ بر قرار رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 59: مسئلہ مقررہ نقطہ
فرض کریں کہ وقفہ $0,1$ میں تفاعل f استمراری ہے اور $[0,1]$ میں ہر x کے لئے $0 \le f(x) \le 1$ ہے۔دکھائیں کہ $[0,1]$ میں ایسا نقطہ c پایا جاتا ہے جس پر $f(c) = c$ ہو گا۔ c کو f کا **مقررہ نقطہ**[25] کہتے ہیں۔

سوال 60: استمراری تفاعل کی علامت بر قرار رکھنے کی خاصیت
فرض کریں کہ وقفہ (a,b) پر تفاعل f معین ہے اور نقطہ c جہاں f استمراری ہے پر $f(c) \neq 0$ ہے۔دکھائیں کے c کے ارد گرد وقفہ $c-\delta, c+\delta$ میں f کی علامت وہی ہو گی جو c پر $f(c)$ کی ہے۔ یہ ایک غیر معمولی نتیجہ ہے۔ اگرچہ (a,b) پر f معین ہے، کسی بھی نقطے پر تفاعل کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے ماسوائے نقطہ c پر۔ اس کے ساتھ شرط $f(c) \neq 0$ ملانے سے f غیر صفر حاصل ہوتا ہے یعنی پورے وقفے پر f مثبت یا منفی ہو گا۔

سوال 61: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 سے اس حصے کا مسئلہ 2.6 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے۔

---
[25] fixed point

سوال 62: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.2 اور مسئلہ 2.3 سے موجودہ حصے کا مسئلہ 2.7 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے؟

سوال کا حل بذریعہ ترسیم

کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کھینچ کر درج ذیل سوالات حل کریں۔

سوال 63: $x^3-3x-1=0$
جواب: $x\approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$

سوال 64: $2x^3-2x^2-2x+1=0$

سوال 65: $x(x-1)^2=1$
جواب: $x \approx 1.7549$ ایک جذر حاصل کریں۔

سوال 66: $x^x=2$

سوال 67: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=4$
جواب: $x\approx 3.5156$

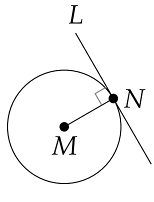
سوال 68: $x^3-15x+1=0$ تین جذر تلاش کریں۔

سوال 69: $\cos x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔
جواب: $x\approx 0.7391$

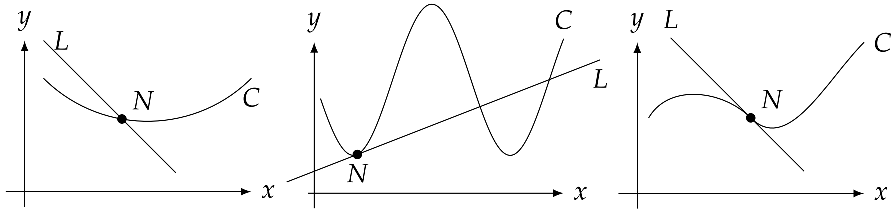
سوال 70: $2\sin x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

2.6 مماسی خط

حصہ 2.1 میں سیکنٹ اور مماس پر بحث کی گئی۔اس بحث کو اس حصے میں جاری رکھتے ہیں۔ہم سیکنٹ کی ڈھلوان کا حد تلاش کرتے ہوئے منحنی کا مماس حاصل کریں گے۔



شکل 2.75: نقطہ N پر مماس اور رداس آپس میں عمودی ہیں۔



(ا) نقطہ N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کے دونوں اطراف پر پایا جاتا ہے۔

(ب) نقطہ N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کو کئی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

(ج) اگرچہ L منحنی C کو ایک نقطہ N پر مس کرتا ہے، یہ منحنی کا مماس نہیں ہے۔

شکل 2.76: عمومی منحنی کے مماس۔

منحنی کے مماس سے کیا مراد ہے؟

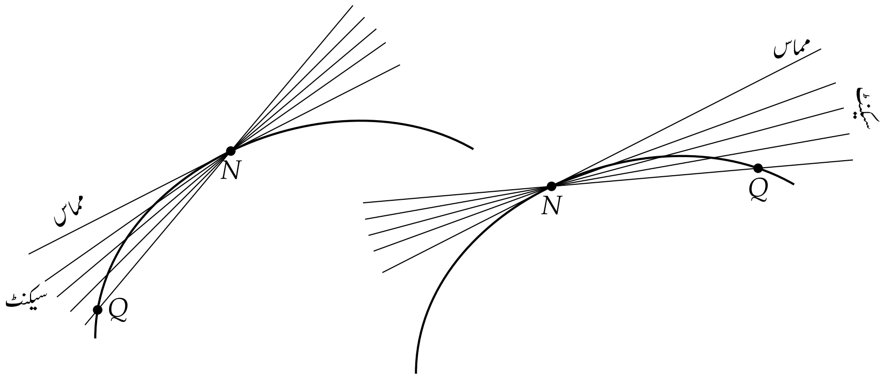
دائرے کی مماس کا مطلب سیدھا سادہ ہے۔نقطہ N پر دائرہ C کے مماس سے مراد خط L ہے جو نقطہ N سے گزرتا ہے اور N پر رداس کو عمودی ہے (شکل 2.75)۔ نقطہ N پر کسی اور منحنی C کے مماس سے کیا مطلب ہے؟ دائرے کی جیومیٹری کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مماس کا مطلب درج ذیل میں سے ایک ہو سکتا ہے۔

1. N سے C کی مرکز تک خط کو عمودی خط L ،

2. خط L منحنی C کو صرف ایک نقطہ، یعنی N پر مس کرتا ہے،

3. خط L نقطہ N سے گزرتا ہے اور منحنی C کے ایک جانب رہتا ہے۔

اگرچہ یہ تینوں جملے دائرے کی صورت میں درست ہیں البتہ یہ ہر منحنی کے لئے بلا تضاد درست نہیں ہیں۔ عموماً منحنیات کا مرکز نہیں پایا جاتا ہے، اور نقطہ N پر جس خط کو ہم C کا مماس کہنا چاہتے ہیں وہ C کو کہیں اور یا N پر منقطع سکتا ہے۔اس کے علاوہ ضروری نہیں ہے کہ منحنی کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہوا سیدھا خط منحنی کا مماس ہو (شکل 2.76)۔



شکل 2.77: نقطہ N کے دائیں یا بائیں جانب منحنی C پر نقطہ Q کو N کے قریب تر کرنے سے N پر C کا مماس حاصل ہو گا۔

عمومی منحنی کا مماس متعارف کرنے کی خاطر ہمیں متحرک حکمت عملی سے کام لینا ہو گا۔ ہم نقطہ N اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے سیکنٹ پر نظر رکھتے ہوئے Q کو منحنی پر رکھتے ہوئے N کے نزدیک لاتے ہیں (شکل 2.77)۔اس حکمت عملی میں ہم درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

1. ہم سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حساب لگاتے ہیں۔

2. منحنی پر رہتے ہوئے Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد پر غور کرتے ہیں۔

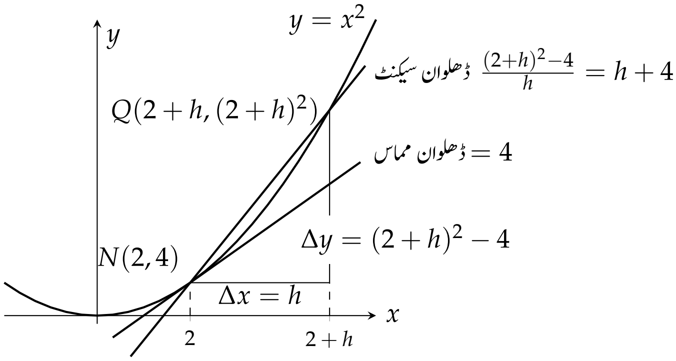
3. اگر یہ حد موجود ہو تب اس کو N پر منحنی کی ڈھلوان تسلیم کرتے ہوئے اس خط کو N پر C کا مماس تسلیم کریں جس کی ڈھلوان اس حد کے برابر ہو اور جو N سے گزرتا ہو۔

مثال 2.39: نقطہ $N(2,4)$ پر قطع مکافی $y=x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔اس نقطے پر قطع مکافی کی مماس کی مساوات حاصل کریں (شکل 2.78)۔
حل: ہم $N(2,4)$ اور $Q(2+h,(2+h)^2)$ سے سیکنٹ گزار کر اس کی ڈھلوان کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$\text{سیکنٹ کی ڈھلوان} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-2^2}{(2+h)-(2)} = \frac{h^2+4h+4-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

اگر $h>0$ ہو تب N کی دائیں جانب اور اس سے اوپر نقطہ Q پایا جائے گا۔اگر $h<0$ ہو تب N کی بائیں جانب اور اس سے نیچے نقطہ Q پایا جائے گا۔دونوں صورتوں میں قطع مکافی پر رہتے ہوئے جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ N کے نزدیک پہنچتا ہے ویسے ویسے h کی قیمت صفر کے نزدیک پہنچتی ہے جس سے سیکنٹ کی ڈھلوان کی درج ذیل حد حاصل ہوتی ہے۔

$$\lim_{h\to 0}(h+4)=4$$



شکل 2.78: قطع مکافی کا مماس (مثال 2.39)

ہم N پر قطع مکافی کی ڈھلوان 4 تسلیم کرتے ہیں۔نقطہ N پر قطع مکافی کا مماس وہ خط ہے جس کی ڈھلوان 4 ہے اور جو نقطہ $(2,4)$ سے گزرتا ہے۔اس مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x-2) && \text{نقطہ ڈھلوان مساوات} \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

□

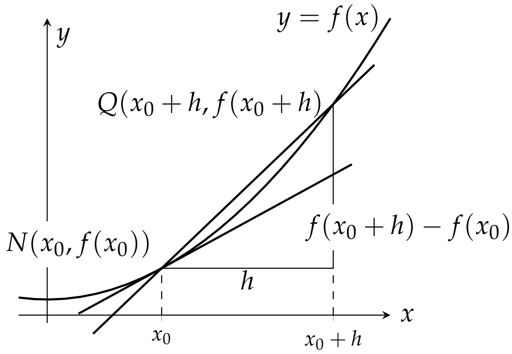
تفاعل کی ترسیم کا مماس

نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس اسی متحرک حکمت عملی سے حاصل کیا جاتا ہے۔ہم N اور $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ سے گزرتا ہوا سیکنٹ بناتے ہیں۔اس کے بعد $h \to 0$ کرتے ہوئے اس سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہیں (شکل 2.79)۔اگر یہ حد موجود ہو، اس کو N پر منحنی کے مماس کا ڈھلوان مانا جاتا ہے اور اتنی ڈھلوان کا سیدھا خط جو N سے گزرتا ہو کو N پر منحنی کا مماس قبول کیا جاتا ہے۔

تعریف: نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کی **ڈھلوان** درج ذیل عدد کو کہتے ہیں۔

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔)}$$

N پر اس ڈھلوان کے خط کو اس نقطے پر منحنی کا **مماس** کہتے ہیں۔



شکل 2.79: مماس کی ڈھلوان $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ہو گی۔

نئی تعریف پیش کرنے کے بعد اس کو جانی پہچانی صورتوں میں استعمال کرتے ہوئے متوقع جوابات حاصل کر کے یقین دہانی ہوتی ہے۔درج ذیل مثال دکھاتا ہے کہ ڈھلوان کی موجودہ تعریف ہمیں غیر انتصابی لکیروں کی صورت میں متوقع جوابات دیتی ہے۔

مثال 2.40: ڈھلوان کی تعریف کا استعمال
دکھائیں کہ نقطہ $(x_0, mx_0 + b)$ پر خط $y = mx + b$ کا مماس یہی خط ہے۔
حل: ہم $f(x) = mx + b$ لیتے ہوئے قد با قدم چلتے ہیں۔
پہلا قدم: $f(x_0)$ اور $f(x_0 = h)$ ڈھونڈتے ہیں۔

$$f(x_0) = mx_0 + b$$
$$f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b$$

دوسرا قدم: ڈھلوان تلاش کرتے ہیں۔

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$$

تیسرا قدم: نقطہ ڈھلوان مساوات استعمال کرتے ہوئے مماس کی مساوات لکھتے ہیں۔نقطہ $x_0, mx_0 + b$ پر مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= (mx_0 + b) + m(x - x_0) \\ &= mx_0 + b + mx - mx_0 \\ &= mx + b \end{aligned}$$

$\square$

مثال 2.41: (ا) $x = a$ پر منحنی $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
(ب) کس نقطے پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ کے برابر ہے؟
(ج) a تبدیل کرنے سے نقطہ $a, \frac{1}{a}$ پر مماس کو کیا ہو گا؟
حل: (ا) یہاں $f(x) = \frac{1}{x}$ ہے اور $(a, \frac{1}{a})$ پر ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a-h)}{a(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ ہمیں اس وقت تک $\lim_{h\to 0}$ بار بار لکھنا پڑا جب تک ہم $h = 0$ پر کرنے کے قابل نہیں ہوئے۔
(ب) نقطہ $x = a$ پر $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہے جس کو $-\frac{1}{4}$ کے برابر پر کرتے ہیں۔

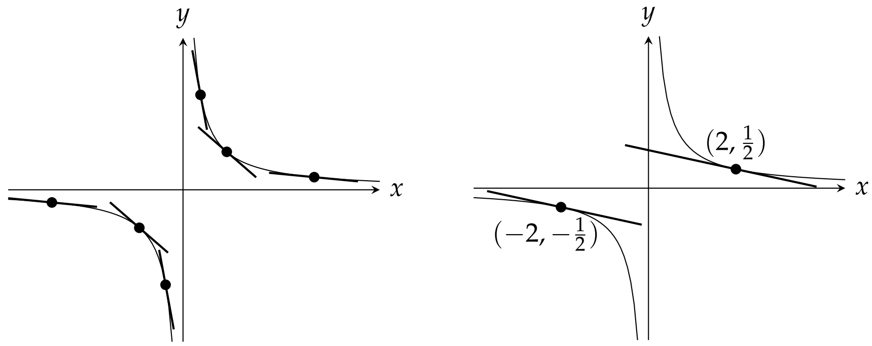
$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

اس کے حل $a = 2$ اور $a = -2$ ہیں لہٰذا منحنی $y = \frac{1}{x}$ کا دو نقطوں یعنی $(2, \frac{1}{2})$ اور $(-2, -\frac{1}{2})$ پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے (شکل 2.80-ا)۔
(ج) ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہر صورت منفی رہے گی۔یوں $a \to 0^+$ کی صورت میں ڈھلوان $-\infty$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے اور مماس انتصابی صورت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے۔یہی کچھ $a \to 0^-$ کرتے ہوئے بھی نظر آتا ہے۔جیسے جیسے مبدا سے a دور ہٹتا ہے ویسے ویسے مماس افقی صورت اختیار کرتا ہے (شکل 2.80-ب)۔ $\square$

شرح تبدیلی

درج ذیل الجبرائی فقرے کو x_0 پر f کا **تفریقی حاصل تقسیم**[26] کہتے ہیں۔اگر h کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے تفریقی حاصل تقسیم کا حد پایا جاتا ہو، اس حد کو x_0 پر f کا **تفرق**[27] کہتے ہیں۔اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو سیکنٹ کی ڈھلوان تصور کریں تب تفرق

[26] difference quotient
[27] derivative



(ا) دو نقطوں پر مماس کی ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے۔

(ب) مبدا کے قریب ڈھلوان زیادہ ہے۔

شکل 2.80: اشکال برائے مثال 2.41

نقطہ x_0 پر منحنی اور مماس کی ڈھلوان دیتا ہے۔اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو اوسط تبدیلی شرح تصور کریں (جیسا ہم نے حصہ 2.1 میں کیا) تب تفرق نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل کی شرح تبدیلی دیتا ہے۔ احصاء میں دو اہم ترین ریاضیاتی تصور میں سے ایک تفرق ہے جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

مثال 2.42: لمحاتی رفتار (حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2)

حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2 میں سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے پتھر پر غور کیا گیا۔ ہم جانتے تھے کہ پہلی t سیکنڈوں میں یہ $y = 4.9t^2$ میٹر فاصلہ طے کرتا ہے اور بتدریج کم دورانیہ میں اوسط رفتار سے ہم نے $t = 1$ پر اس کی لمحاتی رفتار معلوم کی۔ ٹھیک $t = 1$ پر لمحاتی رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم $f(t) = 4.9t^2$ لیتے ہیں۔یوں $t = 1$ اور $t = 1 + h$ کے دوران اوسط رفتار

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} = \frac{4.9(2th + h^2)}{h} = 4.9(2t + h)$$

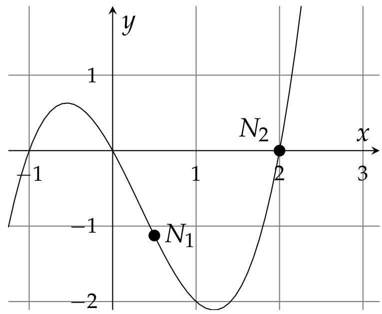
ہو گی۔ٹھیک لمحہ $t = 1$ پر پتھر کی رفتار درج ذیل ہو گی جو ہماری پہلی جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

$$\lim_{h \to 0} 4.9(2 + h) = 4.9(2 + 0) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

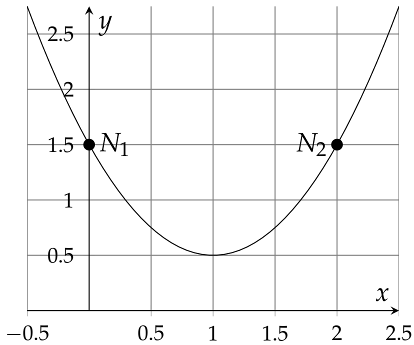
□

سوالات

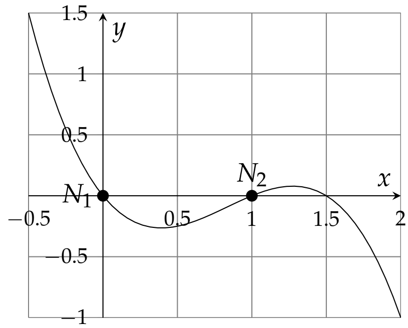
سوال 1 تا سوال 4 میں نقطہ N_1 اور N_2 پر منحنی کی ڈھلوان کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ نقطے پر فیتہ یا کوئی دوسرا سیدھا کنارہ رکھ کر سیکنٹ کی حد سے ڈھلوان حاصل کریں۔ (ترسیم سے عموماً بالکل ٹھیک جواب حاصل نہیں ہوتا ہے لہٰذا آپ کے جواب میں اور دیے گئے جواب میں فرق ہو سکتا ہے۔)



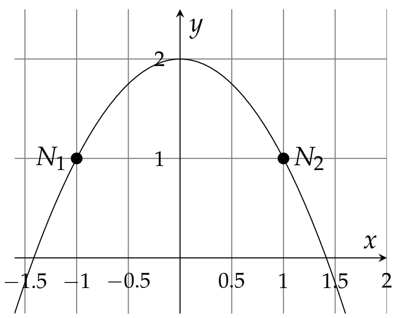
شکل 2.81: منحنی برائے سوال 1



شکل 2.82: منحنی برائے سوال 2



شکل 2.83: منحنی برائے سوال 3



شکل 2.84: منحنی برائے سوال 4

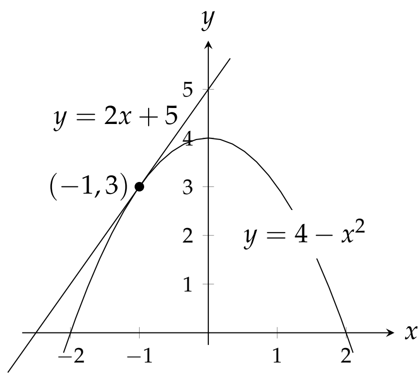
سوال 1: شکل 2.81
جواب: $N_1 : m = -2.25, \quad N_2 : m = 6$

سوال 2: شکل 2.82
جواب: $N_1 : m = -2, \quad N_2 : m = 2$

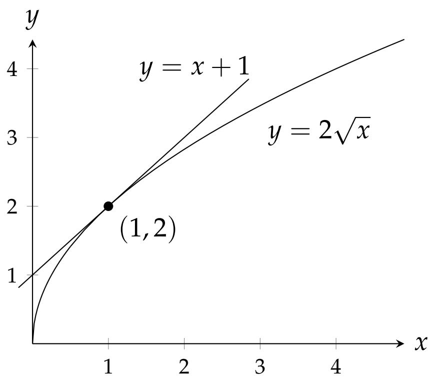
سوال 3: شکل 2.83
جواب: $N_1 : m = -1.5, \quad N_2 : m = 0.5$

سوال 4: شکل 2.84
جواب: $N_1 : m = 2, \quad N_2 : m = -2$

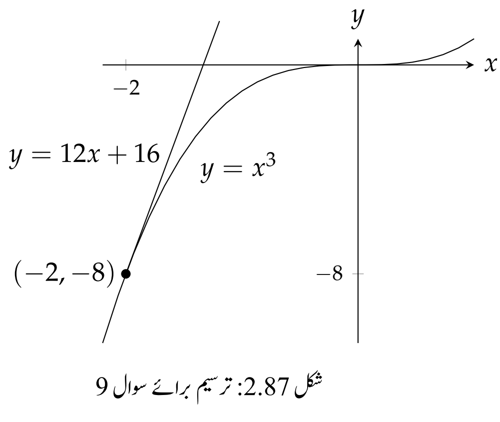
سوال 5 تا سوال 10 میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔ تفاعل اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔



شکل 2.85: ترسیم برائے سوال 5



شکل 2.86: ترسیم برائے سوال 7



شکل 2.87: ترسیم برائے سوال 9

سوال 5: $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$
جواب: $y = 2x + 5$ شکل 2.85

سوال 6: $y = (x-1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

سوال 7: $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$
جواب: $y = x + 1$ شکل 2.86

سوال 8: $y = \frac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

سوال 9: $y = x^3, \quad (-2, -8)$
جواب: $y = 12x + 16$ شکل 2.87

سوال 10: $y = \frac{1}{x^3}, \quad (-2, -\frac{1}{8})$

سوال 11 تا سوال 18 میں دیے نقطے پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔اس نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11: $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$
جواب: $m = 4, \quad y - 5 = 4(x - 2)$

سوال 12: $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

سوال 13: $g(x) = \frac{x}{x-2}, \quad (3, 3)$
جواب: $m = -2, \quad y - 3 = -2(x - 3)$

سوال 14: $g(x) = \frac{8}{x^2}, \quad (2, 2)$

سوال 15: $h(t) = t^3, \quad (2, 8)$
جواب: $m = 12, \quad y - 8 = 12(t - 2)$

سوال 16: $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1, 4)$

سوال 17: $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$
جواب: $m = \frac{1}{4}, \quad y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

سوال 18: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad (8, 3)$

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے گئے نقطے پر ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 19: $y = 5x^2, \quad x = -1$
جواب: $m = -10$

سوال 20: $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

سوال 21: $y = \frac{1}{x-1}, \quad x = 3$
جواب: $m = -\frac{1}{4}$

سوال 22: $y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x = 0$

مخصوص ڈھلوان کے مماس

سوال 23: کس نقطے پر تفاعل $f(x) = x^2 + 4x - 1$ کا مماس افقی ہے؟
جواب: $(-2, -5)$

سوال 24: کس نقطے پر تفاعل $g(x) = x^3 - 3x$ کا مماس افقی ہے؟

سوال 25: ان تمام خطوط کی مساوات حاصل کریں جن کی ڈھلوان -1 ہے اور جو تفاعل $y = \frac{1}{x-1}$ کی مماس ہیں۔
جواب: $y = -(x+1), \quad y = -(x-3)$

سوال 26: اس سیدھے خط کی مساوات تلاش کریں جو تفاعل $y = \sqrt{x}$ کا مماس اور جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے۔

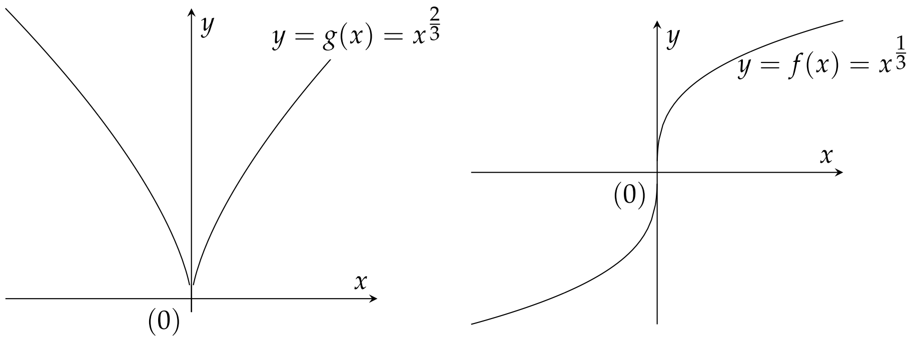
شرح تبدیلی

سوال 27: ایک جسم کو ساکن حالت سے $100\,\mathrm{m}$ بلند عمارت سے گرایا جاتا ہے۔ t سیکنڈ بعد زمین سے اس کا فاصلہ $100 - 4.9t^2$ میٹر ہو گا۔ گرنے کے 2 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟
جواب: $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 28: اڑان کے t سیکنڈ بعد ایک مزائل $3t^2$ میٹر بلندی پر ہے۔ 10 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہے؟

سوال 29: ایک دائرے کے رقبہ $A = \pi r^2$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیل $r = 3$ پر کیا ہو گی؟
جواب: 6π

سوال 30: ایک گیند کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیلی $r = 2$ پر کیا ہو گی؟



(ا) مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے۔

(ب) مبدا پر انتصابی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 2.88: انتصابی مماس

مماس کے لئے پرکھ

سوال 31: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 32: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

انتصابی مماس

اگر $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \infty$ یا $-\infty$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس انتصابی ہے۔

نقطہ $x = 0$ پر تفاعل $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کا مماس درج ذیل ہو گا (شکل 2.88-ا)۔

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

آئیں اب مبدا پر تفاعل $y = g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (شکل 2.88-ب) کا مماس حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$

اب چونکہ مبدا تک دائیں سے پہنچنے سے حد ∞ جبکہ مبدا تک بائیں سے پہنچنے سے حد $-\infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مبدا پر درج بالا حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 33: کیا درج ذیل تفاعل کا مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 34: کیا درج ذیل تفاعل کا نقطہ $(0, 1)$ پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ انتصابی مماس

سوال 35 تا سوال 44 میں دیا گیا تفاعل کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کریں۔ ترسیم کا مماس کہاں انتصابی نظر آتا ہے؟ حساب سے انتصابی مماس کی تصدیق کریں۔

سوال 35: $y = x^{\frac{2}{5}}$

جواب: (ا) کہیں نہیں

سوال 36: $y = x^{\frac{4}{5}}$

سوال 37: $y=x^{\frac{1}{5}}$
جواب: (ا) $x=0$ پر

سوال 38: $y=x^{\frac{3}{5}}$

سوال 39: $y=4x^{\frac{2}{5}}-2x$
جواب: (ا) کہیں نہیں

سوال 40: $y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$

سوال 41: $y=x^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{1}{3}}$
جواب: (ا) $x=1$ پر

سوال 42: $y=x^{\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{1}{3}}$

سوال 43: $y=\begin{cases}-\sqrt{|x|}, & x\le 0\\ \sqrt{x}, & x>0\end{cases}$
جواب: (ا) $x=0$ پر

سوال 44: $y=\sqrt{|4-x|}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 45 تا سوال 48 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $x_0-\frac{1}{2}\le x\le x_0+3$ پر تفاعل $y=f(x)$ ترسیم کریں۔

ب. نقطہ x_0 پر تفریقی حاصل تقسیم q کو قدم h کی صورت میں لکھیں۔

ج. $h\to 0$ کرتے ہوئے q کی حد تلاش کریں۔

د. $h=3,2,1$ کے لئے سیکنٹ خطوط $y=f(x_0)+q(x-x_0)$ متعارف کرتے ہوئے (ا) میں دیے گئے وقفے پر ان سیکنٹ خطوط کو تفاعل f کے ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 45: $f(x)=x^3+2x,\quad x_0=0$

سوال 46: $f(x)=x+\frac{5}{x},\quad x_0=1$

سوال 47: $f(x)=x+\sin 2x,\quad x_0=\frac{\pi}{2}$

سوال 48: $f(x)=\cos x+4\sin 2x,\quad x_0=\pi$

باب 3

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

3.1 تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کی ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

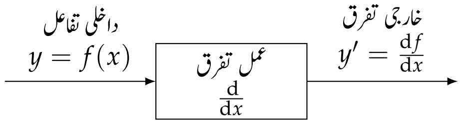
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔اس حصے میں f کی دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کی ڈھلوان پر بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا **تفرق**[1] درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

[1] derivative



شکل 3.1: تفرق کے عمل کی ڈبہ صورت

f' کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x پر f کا **تفرق** پایا جاتا ہے یا کہ x پر f **قابل تفرق**[2] ہے۔

علامتیت

تفاعل $y = f(x)$ کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل 3.1)۔

$D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔

$\dot{y}$ نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو "x کے لحاظ سے y کو تفرق" پڑھتے ہیں۔اسی طرح $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ کو "x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

---
[2] differentiable

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال 2.40 اور مثال 2.41 میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال 2.40 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx + b) = m$$

اور مثال 2.41 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{3.1}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کے حاصل کے اقدام

1. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

2. درج ذیل تفریقی حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

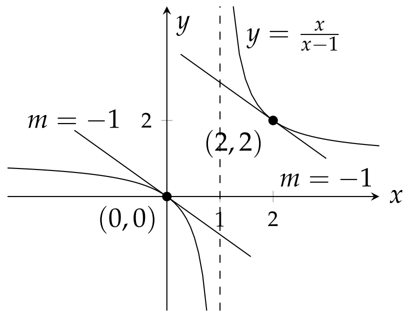
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال 3.1:

ا. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟



شکل 3.2: $x = 0$ اور $x = 2$ پر $y' = -1$ ہو گا (مثال 3.1)۔

حل: (ا) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔
پہلا قدم: یہاں $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h) = \frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔
دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب) $y = f(x)$ کی ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہو گی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

اس مساوات $(x-1)^2 = 1$ کے مترادف ہے لہٰذا $x = 2$ اور $x = 0$ درکار نتائج ہیں (شکل 3.2)۔ □

مثال 3.2:

1. $x > 0$ کے لئے $y = \sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

2. $x = 4$ پر تفاعل $y = \sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (ا) **پہلا قدم:**

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(h)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ سے ضرب دیتے ہیں

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل 3.3 دیکھیں۔
(ب) $x = 4$ پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

نقطہ $(4,2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4,2)$ پر f کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = \frac{1}{4}x + 1$$

□

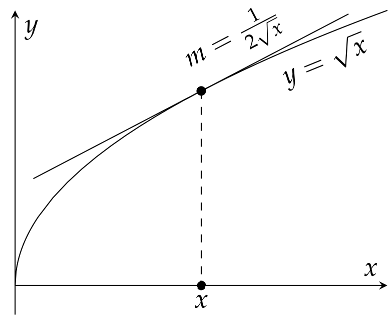
نقطہ $x = a$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

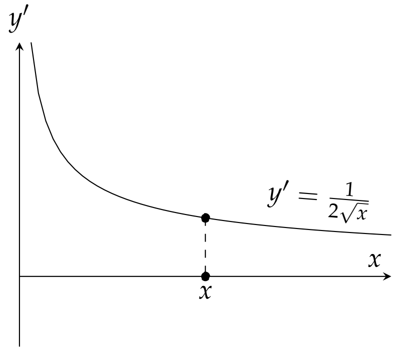
کے علاوہ

$$y'\Big|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

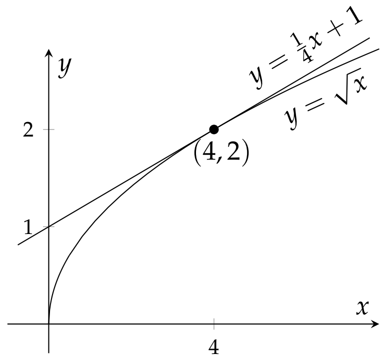
سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں $|_{x=a}$ علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو $x = a$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔



(ا) تفاعل $y = \sqrt{x}$

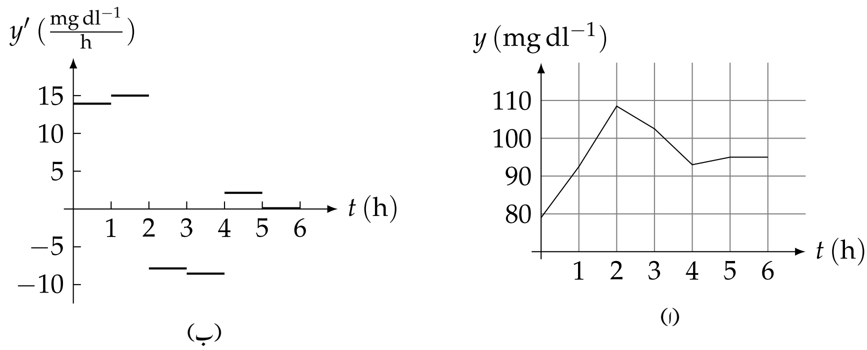


(ب) $x > 0$ کے لئے $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



(ج) تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور نقطہ $(4, 2)$ پر اس کا مماس $y = \frac{1}{4}x + 1$

شکل 3.3: اشکال برائے مثال 3.2۔نقطہ $x = 0$ پر تفاعل معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔



شکل 3.4: (ا) قبل پرواز پرکھ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پرکھ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

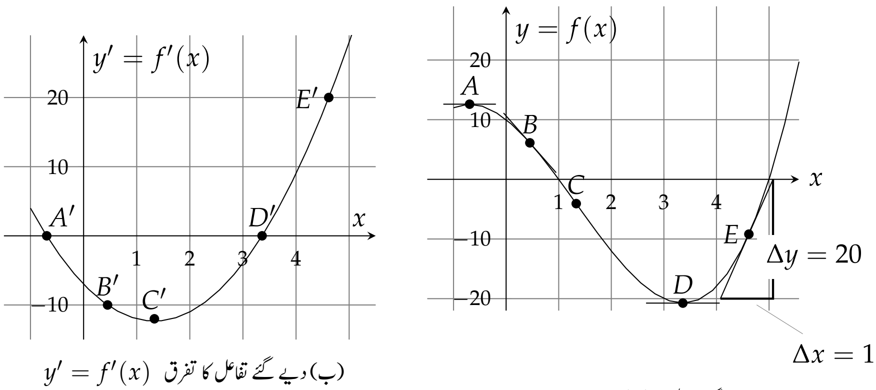
تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباو بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تاکہ ہمیں f کی صورت نظر آئے۔ مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان f' سے ہم عموماً f' کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

مثال 3.3: **دوا**

23 اپریل 1988 کو 31 کلو گرام وزنی، ڈیڈلس[3] نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریتی[4] سے جزیرہ سانٹورینی[5] تک اڑا کر 115.11 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔ یہ جہاز امریکی یونیورسٹی[6] کے طلبہ نے تیار کیا۔ اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل 3.4-ا میں دکھایا گیا ہے۔ موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جا سکتا ہے۔ تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل 3.4-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر $79\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ سے بڑھ کر $83\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ ہو جاتا ہے۔ یوں تبدیلی $\Delta y = 93 - 79 = 14\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ ہے جس کو $\Delta x = 1\,\mathrm{h}$ سے تقسیم کرتے ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}}{\mathrm{h}}$$

Daedalus[3]
Crete[4]
Santorini[5]
MIT[6]



(ب) دیے گئے تفاعل کا تفرق $y' = f'(x)$

(ا) دیا گیا تفاعل $y = f(x)$

شکل 3.5: اشکال برائے مثال 3.5

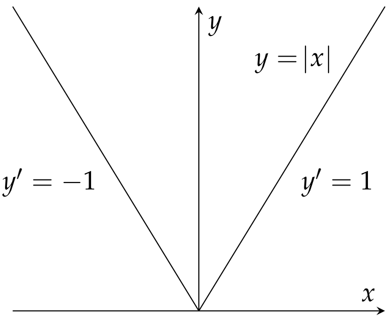
حاصل ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \cdots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ان نقطوں پر تفرقی سیڑھی تفاعل غیر معین ہے۔ □

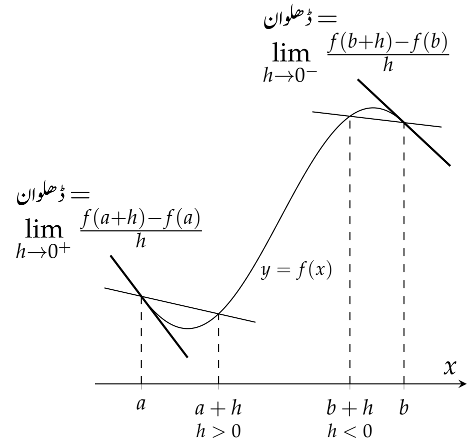
جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.4: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 3.5-ا میں دکھایا گیا ہے۔اس کے تفرق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل: شکل 3.5-ا کے ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔شکل-ا کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔ A سے D تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل 3.5-ب کے مطابقتی نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔نقطہ E پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جا سکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔آپ شکل-ا میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو -10 ہو گا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔شکل-ا میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔ □



شکل 3.7: چونکہ مبدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں للذا مبدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال 3.5)۔



شکل 3.6: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لا متناہی) پر تفاعل $y = f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a, b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل 3.6)۔

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a \text{ پر دائیں ہاتھ تفرق}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad b \text{ پر بائیں ہاتھ تفرق}$$

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ 2.5 کی بنا کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال 3.5: تفاعل $y = |x|$ وقفہ $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مبدا کے دائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1\cdot x) = 1, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot x) = -1$$

ہے (شکل 3.7)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h > 0 \text{ تب } |h| = h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

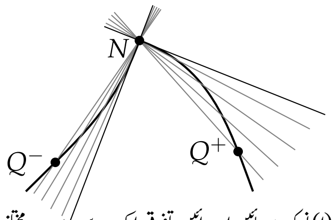
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h < 0 \text{ تب } |h| = -h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1\end{aligned}$$

□

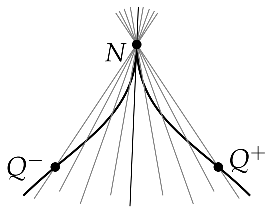
کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہو گا۔ اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

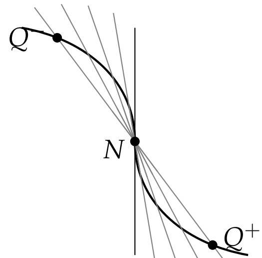
1. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل 3.8-ا)۔
2. راس، جہاں NQ کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ب)۔
3. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کی ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ج)۔
4. عدم استمرار (شکل 3.8-د اور شکل 3.8-ہ)۔



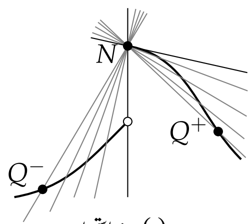
(ا) نوک پر بائیں اور دائیں تفرق ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔



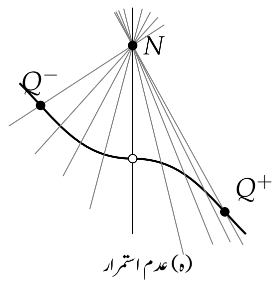
(ب) راس پر ایک طرف سے ڈھلوان ∞ جبکہ دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے۔



(ج) نقطہ N پر مماس انتصابی ہے۔



(د) عدم استمرار



(ہ) عدم استمرار

شکل 3.8: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل نا قابل تفرق ہو گا۔

قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہو گا۔

مسئلہ 3.1: اگر $x = c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x = c$ پر f استمراری ہو گا۔

ثبوت : ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہیں۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\
&= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h
\end{aligned}$$

اب $h \to 0$ لیں۔ مسئلہ 2.1 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x = c$ پر f کا یک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x = c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دائیں) سے استمراری ہو گا۔

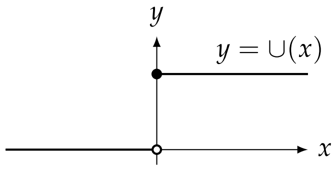
انتباہ مسئلہ 3.1 کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال 3.5 میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y = |x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل 3.9) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

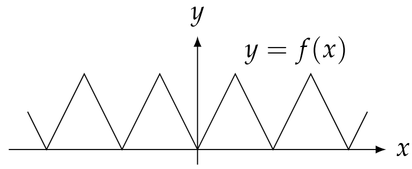
کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائشٹراس[7] نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

[7] [1815-1897]



شکل 3.10: اکائی سیڑھی تفاعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے لہٰذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔



شکل 3.9: دندان ترسیم استمراری لیکن لا متناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔

یہ کلیہ f کو بڑھتی تعدد کے کوسائن تفاعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔بل کو بل دینے سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کا مماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفاعل جن کا کسی بھی نقطے پر مماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری[8] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفاعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفاعل کسی دوسرے کا تفرقی تفاعل ہو۔درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.2: اگر جس وقفے پر f قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ a اور b پائے جاتے ہیں تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے بیچ ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ 3.2 (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفاعل اس صورت تک کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل 3.10)۔ ایک تفاعل کب کسی دوسرے تفاعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبنٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ان کے جواب کو ہم باب میں دیکھیں گے۔

[8] chaos theory

سوالات

تفرق تفاعل اور قیمتوں کی تلاش

سوال 1 تا سوال 6 میں تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = 4 - x^2; \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$

جواب: $-2x, 6, 0, -2$

سوال 2: $F(x) = (x-1)^2 + 1; \quad F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال 3: $g(t) = \frac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$

جواب: $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

سوال 4: $k(z) = \frac{1-z}{2z}; \quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال 5: $p(\theta) = \sqrt{3\theta}; \quad p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$

جواب: $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$

سوال 6: $r(s) = \sqrt{2s+1}; \quad r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال 7 تا سوال 12 میں دیا گیا تفرق حاصل کریں۔

سوال 7: $y = 2x^3; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

جواب: $6x^2$

سوال 8: $r = \frac{s^3}{2} + 1; \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$

سوال 9: $s = \frac{t}{2t+1}; \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

جواب: $\frac{1}{(2t+1)^2}$

سوال 10: $v = t - \frac{1}{t}; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

سوال 11: $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$

جواب: $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

سوال 12: $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$

ڈھلوان اور مماسی خطوط

سوال 13 تا سوال 16 میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 13: $f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad x = -3$

جواب: $1 - \frac{9}{x^2}, 0$

سوال 14: $k(x) = \frac{1}{2+x}; \quad x = 2$

سوال 15: $s = t^3 - t^2; \quad t = -1$

جواب: $3t^2 - 2t, 5$

سوال 16: $y = (x+1)^3; \quad x = -2$

سوال 17 تا سوال 18 میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 17: $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}; \quad (x, y) = (6, 4)$

جواب: $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y - 4 = -\frac{1}{2}(x-6)$

سوال 18: $g(z) = 1 + \sqrt{4-z}; \quad (z, w) = (3, 2)$

سوال 19 تا سوال 22 میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19: $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1}; \quad s = 1 - 3t^2$

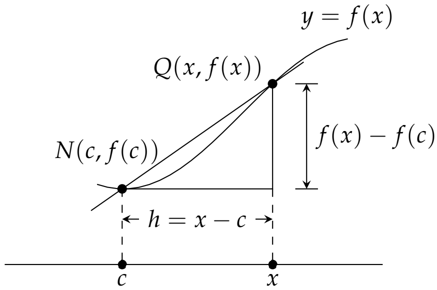
جواب: 6

سوال 20: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sqrt{3}}; \quad y = 1 - \frac{1}{x}$

سوال 21: $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}; \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 22: $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=4}; \quad w = z + \sqrt{z}$



شکل 3.11: حصول تفرق کا متبادل کلیہ

تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ

تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔شکل 3.11 میں سیکنٹ کی ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{3.2}$$

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔سوال 23 تا سوال 26 میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

سوال 23: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad c = -1$
جواب: -1

سوال 24: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad c = 2$

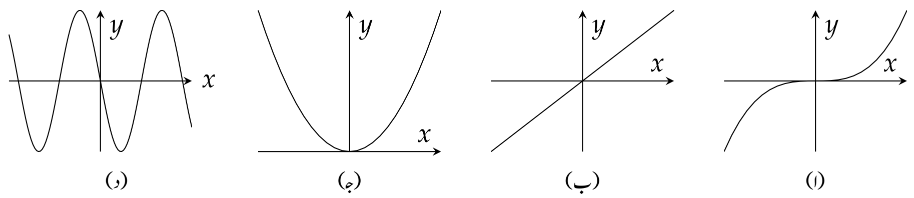
سوال 25: $g(t) = \frac{t}{t-1}, \quad c = 3$
جواب: $-\frac{1}{4}$

سوال 26: $k(s) = 1 + \sqrt{s}, \quad c = 9$

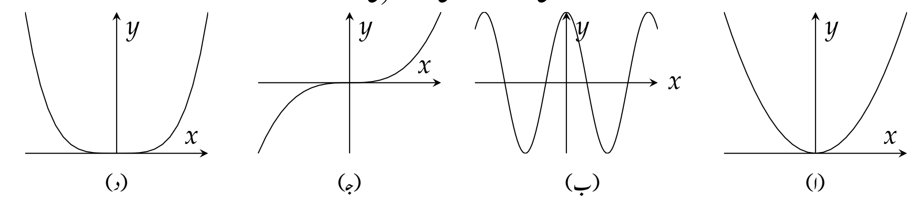
ترسیمات سوال 27 تا سوال 30 میں دیے گئے تفاعل کا تفرق شکل 3.12 میں تلاش کریں۔

سوال 27: شکل 3.13-ا
جواب: شکل 3.12-ب

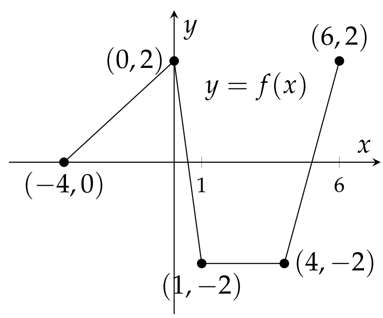
سوال 28: شکل 3.13-ب
جواب: شکل 3.12-د



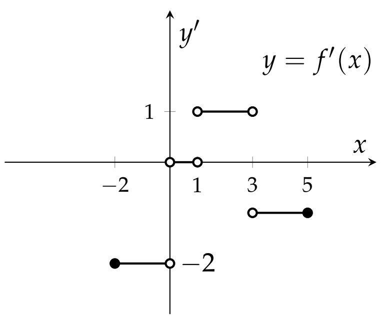
شکل 3.12: تفاعل کے تفرق



شکل 3.13: اصل تفاعل



شکل 3.14: ترسیم برائے سوال 31



شکل 3.15: تفاعل کے تفرق کا ترسیم برائے سوال 32

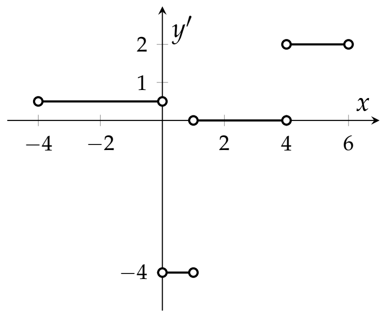
سوال 29: شکل 3.13-ج
جواب: شکل 3.12-ج

سوال 30: شکل 3.13-د
جواب: شکل 3.12-ا

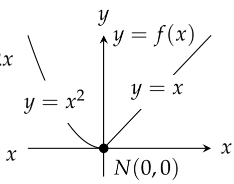
سوال 31: قطعات کو جوڑ کر شکل 3.14 حاصل کی گئی ہے۔(ا) وقفہ $[-4,6]$ پر کہاں f' غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) انتصابی محور کو y' کہتے ہوئے f' کو ترسیم کریں۔ ترسیم سیڑھی نما ہو گا۔

جواب: (ا) $x = 0, 1, 4$ ؛ (ب) شکل 3.16

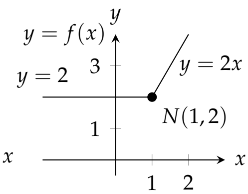
سوال 32: تفاعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی
(ا) درج ذیل طریقے سے تفاعل f ترسیم کو وقفہ $[-2,5]$ پر کریں۔



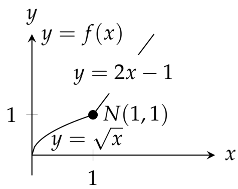
شکل 3.16: جواب برائے سوال 32



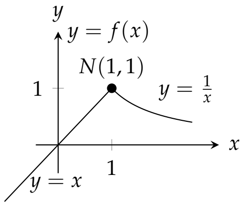
شکل 3.17



شکل 3.18



شکل 3.19



شکل 3.20

1. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔

2. ترسیم کو نقطہ $(-2,3)$ سے شروع کریں۔

3. تفاعل کا تفرق شکل 3.15 میں دکھایا گیا ہے۔

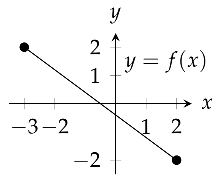
(ب) نقطہ $(-2,0)$ سے شروع کرتے ہوئے جزو (ا) کا ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 33 تا سوال 36 میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تفاعل نا قابل تفرق ہے۔

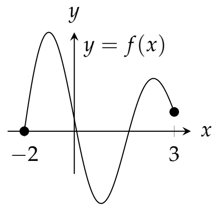
سوال 33: تفاعل کو شکل 3.17 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ ہے لہٰذا $x = 0$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔

سوال 34: تفاعل کو شکل 3.18 میں دکھایا گیا ہے۔

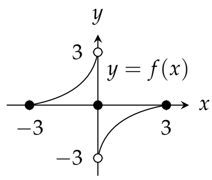
سوال 35: تفاعل کو شکل 3.19 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ جبکہ $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ ہے لہٰذا $x = 1$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔



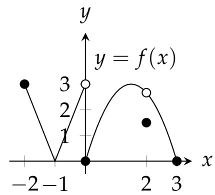
شکل 3.21



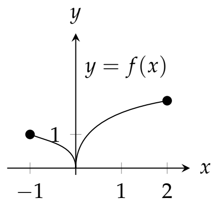
شکل 3.22



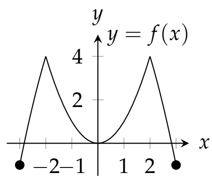
شکل 3.23



شکل 3.24



شکل 3.25



شکل 3.26

سوال 36: تفاعل کو شکل 3.20 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 37 تا سوال 42 میں بند دائرہ کار D پر تفاعل کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کن نقطوں پر تفاعل (ا) قابل تفرق، (ب) استمراری لیکن نا قابل تفرق، (ج) غیر استمراری اور نا قابل تفرق ہے؟

سوال 37: ترسیم شکل 3.21 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 2$ ہے۔

جواب: (ا) $-3 \le x \le 2$ (ب) کوئی نہیں (ج) کوئی نہیں۔

سوال 38: ترسیم شکل 3.22 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 39: ترسیم شکل 3.23 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 3$ ہے۔
جواب: (ا) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ (ب) کوئی نہیں (ج) $x = 0$

سوال 40: ترسیم شکل 3.24 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 41: ترسیم شکل 3.25 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -1 \le x \le 2$ ہے۔
جواب: (ا) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ (ب) $x = 0$ (ج) کوئی نہیں۔

سوال 42: ترسیم شکل 3.26 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 43 تا سوال 46 میں درج ذیل کریں۔

شکل 3.27: ترسیم برائے شکل 45

ا. تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق $y' = f'(x)$ تلاش کریں۔

ب. $y = f(x)$ اور $y' = f'(x)$ کو علیحدہ محدد پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج. x کی کن قیمتوں کے لئے y' کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د. x بڑھنے سے x کی قیمتوں کے کن وقفوں پر $y = f(x)$ بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (اگلے باب میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال 43: $y = -x^2$
جواب: (ا) $y' = -2x$ (ج) $x < 0, x = 0, x > 0$ (د) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

سوال 44: $y = -\frac{1}{x}$

سوال 45: $y = \frac{x^3}{3}$
جواب: (ا) $y' = x^2$ ، (ب) شکل 3.27، (ج) $x \neq 0$ ، 0 ، $x = 0$ ، کوئی نہیں، (د) $-\infty < x < \infty$ ، کوئی نہیں۔

سوال 46: $y = \frac{x^4}{4}$

سوال 47: کیا $y = x^3$ کا کبھی منفی ڈھلوان ہو گا؟ اگر ہے تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $y' = 3x^2$ کبھی بھی منفی نہیں ہو گا۔

سوال 48: کیا $y = 2\sqrt{x}$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: کیا قطع مکافی $y = 2x^2 - 13x + 5$ کے مماس کا ڈھلوان -1 ہو سکتا ہے۔اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں ہے تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں، $y + 16 = -(x - 3)$ نقطہ $(3, -16)$ پر مماس ہے۔

سوال 50: کیا منحنی $y=\sqrt{x}$ کا کوئی مماس x محور کو $x=-1$ پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال 51: کیا $(-\infty,\infty)$ پر قابل تفرق تفاعل کا تفرق $y=\lfloor x\rfloor$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: نہیں، چونکہ تفاعل $y=\lfloor x\rfloor$ متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا ہے۔

سوال 52: $f(x)=|x|$ کے تفرق کو ترسیم کرنے کے بعد $y=\frac{|x|-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}$ ترسیم کریں۔ ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال 53: یہ جانتے ہوئے کہ $x=x_0$ پر تفاعل $f(x)$ قابل تفرق ہے، آپ $x=x_0$ پر تفاعل $-f$ کی قابل تفرق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں؛ $(-f)'(x)=-(f'(x))$

سوال 54: کیا $t=7$ پر $g(t)$ کا قابل تفرق ہونے سے آپ $t=7$ پر $3g$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: فرض کریں کہ t کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $g(t)$ اور $h(t)$ معین ہیں اور $g(0)=h(0)=0$ ہے۔ کیا $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{h(t)}$ موجود ہو گا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $g(t)=mt$ اور $h(t)=t$ کے لئے $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{h(t)}=m$ ہو گا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

سوال 56: (ا) فرض کریں کہ $-1\le x\le 1$ کے لئے تفاعل $f(x)$ شرط $\left|f(x)\right|\le x^2$ کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ $x=0$ پر f قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ $x=0$ پر

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 57: $0\le x\le 2$ کے لئے $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ کو ترسیم کریں۔ اس کے اوپر پہلے $h=1,0.5,0.1$ لیتے ہوئے $y=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h=-1,-0.5,-0.1$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 58: $-2\le x\le 2$ اور $0\le y\le 3$ لیتے ہوئے $y=3x^2$ ترسیم کریں۔ اسی کے اوپر پہلے $h=2,1,0.2$ لیتے ہوئے $y=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h=-2,-1,-0.2$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کیا ہو رہا ہے۔

سوال 59: وائشٹراس کا نا قابل تفرق تفاعل وائشٹراس تفاعل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ()^n \cos(9^n \pi x)$ کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں کہ یہ کتنی بلدار ہے۔

سوال 60 تا سوال 65 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت قدم h لیتے ہوئے عمومی نقطہ x پر حاصل تقسیم q متعارف کریں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د. $x = x_0$ پر کرتے ہوئے تفاعل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ہ. x_0 سے x کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پر کریں۔کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (ا) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 60: $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

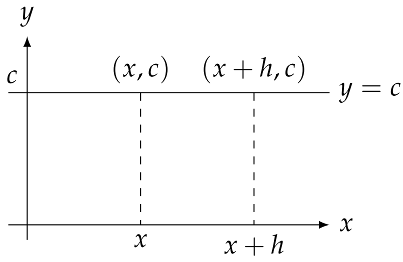
سوال 61: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1$

سوال 62: $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

سوال 63: $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1$

سوال 64: $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 65: $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$



شکل 3.28: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

3.2 قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ 3.1: مستقل کا تفرق
اگر c مستقل ہو تب $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c=0$ ہو گا۔

مثال 3.6: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8)=0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\right)=0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3})=0$ □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے $f(x)=c$ کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل 3.28)۔ ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں x^n کا تفرق دیتا ہے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔

قاعدہ 3.2: **قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح**
اگر n مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت n سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو n سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 3.7:

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

□

ثبوت قاعدہ: اگر $f(x) = x^n$ ہو تب $f(x+h) = (x+h)^n$ ہو گا۔چونکہ n مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1+a^{n-2}b} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

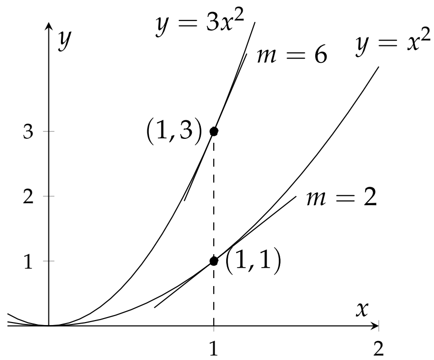
استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ہم $a = x+h$ اور $b = x$ لیتے ہیں۔یوں $h = a - b$ ہو گا۔اس طرح

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\
&= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جو n ارکان پر مشتمل ہے اور $h \to 0$ کرتے ہوئے ہر رکن کا حد x^{n-1} ہے۔یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

□



شکل 3.29: ترسیم برائے مثال 3.8

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

قاعدہ 3.3: **قاعدہ مستقل مضرب**
اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

بالخصوص مثبت عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

مثال 3.8: تفرقی کلیہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$ کہتی ہے کہ y محور کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم $y = x^2$ کی پیمائش تبدیل کرنے سے ہر نقطے کی ڈھلوان 3 سے ضرب ہو گی (شکل 3.29)۔ □

مثال 3.9: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ 3.3 میں $c = -1$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

ثبوت قاعدہ : (قاعدہ 3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu &= \lim_{h\to 0} \frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} && f(x)=cu(x) \text{ کے تفرق کی تعریف} \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{تحدیدی خاصیت} \\ &= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && u \text{ قابل تفرق ہے} \end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفرق تفاعل کے مجموعے کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.4: **قاعدہ مجموعہ**
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ $u+v$ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہو گا جہاں u اور v دونوں قابل تفرق ہوں۔ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی **تفریقی قاعدہ** حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفرق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفرق ان کے تفرق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u+(-1)v]=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعل کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعہ میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔اگر $u_1,u_2,\cdots,u_n$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب $u_1+u_2+\cdots+u_n$ بھی قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.10:

(ا) $y = x^4 + 12x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(12x) = 4x^3 + 12$$

(ب) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1)\\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0\\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$

□

آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.4) ہم تفرق کی تعریف کو $f(x) = u(x) + v(x)$ پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)+v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\ &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لئے ثبوت

ہم درج ذیل فقرے کو **ریاضی ماخوذ**[9] کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} \tag{3.3}$$

جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ $n = 2$ کے لئے درست ہے۔ یہ ریاضی ماخوذ کا پہلا قدم ہے۔

[9] mathematical induction

دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح $n = k$ (جہاں $k \geq n_0 = 2$ ہے) کے لئے درست ہے تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}$$

ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}}) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح $n \geq 2$ کے لئے قاعدہ 3.4 کی درستگی کی تصدیق کرتا ہے۔

مثال 3.11: کیا منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تب کہاں پایا جاتا ہے؟

حل: افقی مماس وہاں ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ صفر کے برابر ہو۔ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

اور اس کے بعد مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ کو x کے لئے حل کرتے ہیں۔

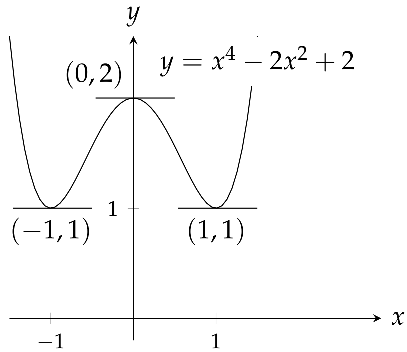
$$\begin{aligned}
4x^3 - 4x &= 0 \\
4x(x^2 - 1) &= 0 \\
x &= 0, 1, -1
\end{aligned}$$

منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس $x = 0, 1, -1$ پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابقتی نقطے $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(0, 2)$ ہیں (شکل 3.30)۔ □

حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔مثال کے طور پر

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$ ہے جبکہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1 \cdot 1 = 1$ ہو گا۔



شکل 3.30: افقی مماس (مثال 3.11)

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.5: **قاعدہ حاصل ضرب**
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب uv بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

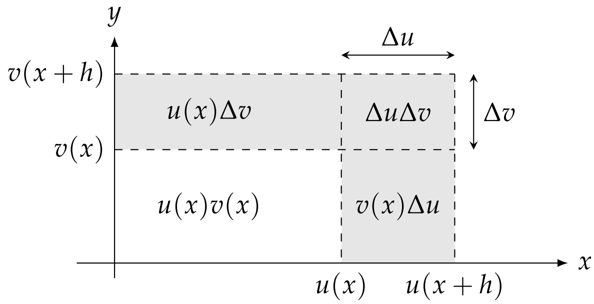
حاصل ضرب uv کا تفرق u ضرب v کا تفرق جمع v ضرب u کا تفرق ہو گا۔اس کو $(uv)' = uv' + vu'$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفرق کی تعریف کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہو گا جس کو u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں $u(x+h)v(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\end{aligned}$$



شکل 3.31: قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی۔

چونکہ x پر u قابل تفرق ہے لہٰذا $h \to 0$ کرنے سے $u(x+h) \to u(x)$ ہو گا۔ دو کسر کی تحدیدی قیمتیں x پر $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ہیں۔ مختصراً درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ مثبت ہوں اور x بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب $h > 0$ کی صورت میں شکل 3.31 حاصل ہو گا۔ $u(x)$ اور $v(x)$ بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u \Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کو h سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$

حاصل ہو گا۔ اب $h \to 0^+$ کرنے سے $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.12: تفاعل $y=(x^2+1)(x^3+3)$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: قاعدہ حاصل ضرب میں $u=x^2+1$ اور $v=x^3+3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2+1)(x^3+3)] &= (x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)\\ &= 3x^4+3x^2+2x^4+6x\\ &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

□

اس مثال میں قوسین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3)=x^5+x^3+3x^2+3\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

ملتا ہے جو مثال 3.12 میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال 3.13: فرض کریں کہ $y=uv$ تفاعل u اور v کا حاصل ضرب ہے۔درج ذیل استعمال کرتے ہوئے $y'(2)$ تلاش کریں۔

$$u(2)=3,\quad u'(2)=-4,\quad v(2)=1,\quad v'(2)=2$$

حل: قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y'=(uv)'=uv'+vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y'(2) &= u(2)v'(2)+v(2)u'(2)\\ &= (3)(2)+(1)(-4)=6-4=2\end{aligned}$$

□

حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں تھا اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں ہو گا۔درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

قاعدہ 3.6: **قاعدہ حاصل تقسیم**
اگر $u(x)$ اور $v()$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم $\frac{u}{v}$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

اس آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں $v(x)u(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)&=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسب نما میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.14: تفاعل $y=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: ہم $u=t^2-1$ اور $v=t^2+1$ لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\frac{(t^2+1)\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \qquad (\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2t,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2t)\\&=\frac{2t^3+2t-2t^3+2t}{(t^2+1)^2}\\&=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

$\square$

منفی عدد صحیح کے لئے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ 3.7: منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ
اگر n منفی عدد صحیح اور $x \neq 0$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔اگر n منفی عدد صحیح ہو تب $m = -n$ مثبت عدد صحیح ہو گا۔یوں $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) - 1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہٰذا } \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} && \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے}
\end{aligned}$$

$\square$

مثال 3.15:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{x^3}\right) &= 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}
\end{aligned}$$

$\square$

مثال 3.16: منحنی $y = x + \frac{2}{x}$ کا نقطہ $(1,3)$ پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔
حل: منحنی کی ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 + 2\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

ہے جس کی قیمت نقطہ $x = 1$ پر

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

ہو گی۔نقطہ $(1,3)$ پر ڈھلوان $m = -1$ کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y - 3 &= (-1)(x-1) && \text{نقطہ-ڈھلوان مساوات} \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$

□

قاعدہ کا انتخاب
تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 3.17: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کی بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر x^4 سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

□

دو درجی اور بلند درجی تفرق

تفرق $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ اول تفرق**[10] یا **یک درجی تفرق** یا مختصراً **پہلا تفرق**[11] کہتے ہیں۔یہ تفرق ازخود x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ دوم تفرق**[12] یا **دو درجی تفرق** یا مختصراً **دوسرا تفرق**[13] کہتے ہیں۔

دو درجی تفرق کی علامت $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ میں شمار کنندہ میں d جبکہ نسب نما میں x کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔درج بالا مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ سے مراد تفرقی علامتوں کا ضرب نہیں ہے بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر y'' قابل تفرق ہو تب اس کے تفرق $y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ تین تفرق** یا **تین درجی تفرق** یا مختصراً **تیسرا تفرق** کہتے ہیں۔اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(n-1)}$$

کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ** n **تفرق** یا n **درجی تفرق** یا n **واں تفرق** کہیں گے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔آپ نے دیکھا کہ بلند درجی تفرق کو قوسین میں بند y کا طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال 3.18: تفاعل $y = x^3 - 3x^2 + 2$ کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
y' &= 3x^2 - 6x \\
y'' &= 6x - 6 \\
y''' &= 6 \\
y^{(4)} &= 0
\end{aligned}$$

چونکہ $y^{(4)} = 0$ ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہٰذا اس کا تفرق در حقیقت صفر (یعنی مستقل) کا تفرق ہو گا جو صفر ہی ہے۔یوں اس تفاعل کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے۔اس کا چار درجی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

---

[10] first order derivative
[11] first derivative
[12] second order derivative
[13] second derivative

سوالات

تفرق کا حساب

سوال 1 تا سوال 12 میں تفاعل کا درجہ اول اور درجہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال 1: $y = -x^2 + 3$
جواب: $y' = -2x, \quad y'' = -2$

سوال 2: $y = x^2 + x + 8$

سوال 3: $s = 5t^3 - 3t^5$
جواب: $s' = 15t^2 - 15t^4, \quad s'' = 30t - 60t^3$

سوال 4: $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال 5: $y = \frac{4x^3}{3} - x$
جواب: $y' = 4x^2 - 1, \quad y'' = 8x$

سوال 6: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال 7: $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$
جواب: $w' = -6z^{-3} + \frac{1}{z^2}, \quad w'' = 18z^{-4} - \frac{2}{z^3}$

سوال 8: $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال 9: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
جواب: $y' = 12x - 10 + 10x^{-3}, \quad y'' = 12 - 30x^{-4}$

سوال 10: $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال 11: $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
جواب: $r' = -\frac{2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \quad r'' = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

سوال 12: $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال 13 تا سوال 16 میں (ا) y' کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفرق حاصل کریں۔

سوال 13: $y=(3-x^2)(x^3-x+1)$
جواب: $y'=-5x^4+12x^2-2x-3$

سوال 14: $y=(x-1)(x^2+x+1)$

سوال 15: $y=(x^2+1)\left(x+5+\frac{1}{x}\right)$
جواب: $y'=3x^2+10x+2-\frac{1}{x^2}$

سوال 16: $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}+1\right)$

سوال 17 تا سوال 28 میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 17: $y=\frac{2x+5}{3x-2}$
جواب: $y'=\frac{-19}{(3x-2)^2}$

سوال 18: $z=\frac{2x+1}{x^2-1}$

سوال 19: $g(x)=\frac{x^2-4}{x+0.5}$
جواب: $g'(x)=\frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

سوال 20: $f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

سوال 21: $v=(1-t)(1+t^2)^{-1}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

سوال 22: $w=(2x-7)^{-1}(x+5)$

سوال 23: $f(s)=\frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$
جواب: $f'(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

سوال 24: $u=\frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

سوال 25: $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$
جواب: $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

سوال 26: $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

سوال 27: $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$
جواب: $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

سوال 28: $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

سوال 29: تفاعل $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ کے تمام بلند درجی تفرق تلاش کریں۔
جواب: $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12$ جبکہ تمام $n \geq 5$ کے لئے
$y^{(n)} = 0$

سوال 30: تفاعل $y = \frac{x^5}{120}$ کے تمام بلند درجی تفرق تلاش کریں۔

سوال 31 تا سوال 38 میں یک درجی اور دو درجی تفرق تلاش کریں۔

سوال 31: $y = \frac{x^3+7}{x}$
جواب: $y' = 2x - 7x^{-2}, \quad y'' = 2 + 14x^{-3}$

سوال 32: $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

سوال 33: $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\theta^{-4}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} = -12\theta^{-5}$

سوال 34: $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

سوال 35: $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$
جواب: $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -z^{-2} - 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = 2z^{-3}$

سوال 36: $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

سوال 37: $p = \left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$

جواب: $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \quad \frac{d^2p}{dq^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

سوال 38: $p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال 39: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے تفاعل ہیں جو $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

$x = 0$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{d}{dx}(uv), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

جواب:

$$\frac{d}{dx}(uv) = 13, \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = -7, \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{7}{25}, \frac{d}{dx}(7v - 2u) = 20$$

سوال 40: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

$x = 1$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{d}{dx}(uv), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

ڈھلوان اور مماس

سوال 41: (ا) نقطہ $(2, 1)$ پر منحنی $y = x^3 - 4x + 1$ کے مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کتنی اور کس نقطے پر ہے؟ (ج) جس نقطے پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان 8 ہے وہاں مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 42: (ا) منحنی $y = x^3 - 3x - 2$ کے افقی مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔ مماسی نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساواتیں بھی تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کیا ہے اور کس نقطے پر ہے؟ اس نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 43: مبدا اور $(1,2)$ پر منحنی $y=\frac{4x}{x^2+1}$ کے مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 44: نقطہ $(2,1)$ پر $y=\frac{8}{x^2+4}$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 45: منحنی $y=ax^2+bx+c$ نقطہ $(1,2)$ سے گزرتی ہے اور مبدا پر خط $y=x$ کا مماس ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 46: نقطہ $(1,0)$ پر $y=x^2+ax+b$ اور $y=cx-x^2$ کا مشترک مماس پایا جاتا ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 47: (ا) نقطہ $(-1,0)$ پر منحنی $y=x^3-x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) کمپیوٹر پر منحنی اور مماس کو ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کا اندازہ لگائیں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

سوال 48: (ا) مبدا پر منحنی $y=x^3-6x^2+5x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی اور مماس کو کمپیوٹر پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

طبعی استعمال

سوال 49: دباو اور حجم بند ڈبہ میں مستقل درجہ حرارت T پر گیس کا حجم V اور دباو P درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں جہاں a ، b اور c مستقل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$ تلاش کریں۔

$$P=\frac{nRT}{V-nb}-\frac{an^2}{V^2}$$

سوال 50: دوا کو جسم کا رد عمل دوا کو جسم کے رد عمل کو عموماً درج ذیل کلیہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں C مثبت مستقل ہے جبکہ M خون میں جذب دوا کی مقدار ہے۔

$$R=M^2\left(\frac{C}{2}-\frac{M}{3}\right)$$

اگر رد عمل فشار خون کی تبدیلی ہو تب R کو ملی میٹر پارہ میں ناپا جاتا ہے۔ اگر رد عمل درجہ حرارت میں تبدیلی ہو تب R کو کیلون میں ناپا جاتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ تلاش کریں۔ یہ تفرق جو M کا تفاعل ہے، دوا کو جسم کی حساسیت کہلاتا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 51: فرض کریں کہ قاعدہ حاصل ضرب میں v کی قیمت مستقل c ہو۔ کیا اس سے قاعدہ مضرب مستقل حاصل کیا جا سکتا ہے؟

سوال 52: قاعدہ بالعکس متناسب
(ا) **قاعدہ بالعکس متناسب**[14] کہتا ہے کہ جس نقطے پر تفاعل $v(x)$ قابل تفرق ہو اس نقطے پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

ہو گا۔ دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب در حقیقت قاعدہ حاصل تقسیم کی ایک مخصوص صورت ہے۔ (ب) دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب اور قاعدہ حاصل ضرب کو ملا کر قاعدہ حاصل تقسیم اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال 53: مثبت عدد صحیح کا دوسرا ثبوت الجبرائی کلیہ

$$cx^n-c^n=(x-c)(x^{n-1}+x^{n-2}c+\cdots+xc^{n-2}+c^{n-1})$$

اور صفحہ 3.2 پر دیا گیا کلیہ تفرق (مساوات 3.2)

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n)=nx^{n-1}$ حاصل کریں۔

سوال 54: قاعدہ حاصل ضرب کی عمومی صورت قاعدہ حاصل ضرب متغیر x کے قابل تفرق تفاعل u اور v کے لئے درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)=u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

(ا) متغیر x کے قابل تفرق تین تفاعل کے حاصل ضرب uvw کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ب) متغیر x کے قابل تفرق چار تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2u_3u_4$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ج) متغیر x کے قابل تفرق متناہی تعداد تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2\cdots u_n$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟

سوال 55: $x^{3/2}$ کو $x\cdot x^{1/2}$ لکھ کر قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{3/2})$ حاصل کریں۔ جواب کو ناطق عدد ضرب x کا ناطق طاقت لکھیں۔ جزو (ب) اور (ج) کو بھی اسی طرح حل کریں۔ (ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{5/2})$ تلاش کریں۔ (ج) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{7/2})$ تلاش کریں۔ (د) درج بالا تین جزو میں آپ کیا نقش دیکھتے ہیں۔

---

[14] reciprocal rule

3.3 تبدیلی کی شرح

اس حصے میں ہم تبدیلی کی شرح پر تفرق کی مدد سے غور کریں گے۔ وقت کے لحاظ سے فاصلہ میں تبدیلی کی مثالیں سمتی رفتار اور اسراع ہیں۔ہم وقت کے علاوہ دیگر متغیر کے لحاظ سے بھی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔مثال کے طور پر حکیم جاننا چاہے گا کہ دوا میں معمولی تبدیلی سے مریض کی حالت پر کیا اثر ہو گا۔ماہر اقتصادیات جاننا چاہے گا کہ سرمایہ کاری میں معمولی تبدیلی سے اقتصادی ترقی پر کتنا اثر پایا جائے گا۔ان سوالات کو موزوں متغیر کے لحاظ سے تفرق کی صورت میں ظاہر کیا جائے گا۔

اوسط اور لمحاتی شرح تبدیلی

ہم کسی دورانیہ پر اوسط شرح تبدیلی سے شروع کرتے ہیں۔اس دورانیے کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے حاصل شرح تبدیلی کی حد کو تفاعل کا تفرق کہتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ x_0 تا x_0+h پر تفاعل $f(x)$ کی **اوسط شرح تبدیلی** سے مراد

$$\text{اوسط شرح تبدیلی} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ہے۔ x کے لحاظ سے x_0 پر f کی **(لمحاتی) شرح تبدیلی**

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

کو کہتے ہیں بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

روایتی طور پر اگر x وقت کو ظاہر نہ کرتا ہو تب بھی لفظ لمحاتی استعمال کیا جاتا ہے۔عموماً کو مختصراً کہتے ہیں۔

مثال 3.19: دائرے کے رقبہ S اور رداس r کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$S = \pi r^2$$

رقبے کی شرح تبدیلی $r = 0.1\,\mathrm{m}$ پر کیا ہو گی؟

حل: رداس کے لحاظ سے رقبے کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$$

ہے۔یوں $r = 0.1\,\mathrm{m}$ کی صورت میں r تبدیل کرنے سے رقبہ تبدیل ہونے کی شرح $0.2\pi\,\mathrm{m^2/m}$ ہو گی۔یوں اس رداس پر رداس میں Δr میٹر چھوٹی تبدیلی سے رقبے میں $0.2\pi\Delta r$ مربع میٹر تبدیلی رونما ہو گی۔ □

لکیر پر حرکت۔ہٹاو، سمتی رفتار، رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ محوری خط (جس کو ہم s محور کہتے ہیں) پر ایک جسم یوں حرکت کرتا ہے کہ اس محور پر مقام s اور وقت t کا تعلق

$$s = f(t)$$

ہے۔دورانیہ t تا $t + \Delta t$ میں جسم کا **ہٹاو**[15]

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ہو گا (شکل 3.32) اور اس کی **اوسط سمتی رفتار**[16]

$$v_{\text{اوسط}} = \frac{\text{ہٹاو}}{\text{دورانیہ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار جاننے کی خاطر ہم $\Delta t \to 0$ کرتے ہوئے دورانیہ t تا $t + \Delta t$ پر اوسط سمتی رفتار کا حد تلاش کرتے ہیں۔یہ حد t کے لحاظ سے f کا تفرق ہے۔

تعریف: جسم کی (لمحاتی) سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے تعین گر تفاعل $s = f(t)$ کا تفرق ہو گا۔لمحہ t پر سمتی رفتار درج ذیل ہو گی۔

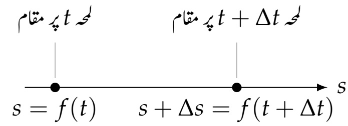
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

مثال 3.20: ایک گاڑھی کی فاصلہ (میٹر) بالمقابل وقت (سیکنڈ) ترسیم کو شکل 3.33 میں دکھایا گیا ہے۔سیکنٹ NQ کی ڈھلوان دورانیہ $t = 5\,\mathrm{s}$ تا $15\,\mathrm{s}$ کے لئے اوسط سمتی رفتار ہے جو $32.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $117\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کے برابر ہے۔لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر مماس کی ڈھلوان اس لمحہ پر لمحاتی سمتی رفتار $16.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $58.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دیتی ہے۔ □

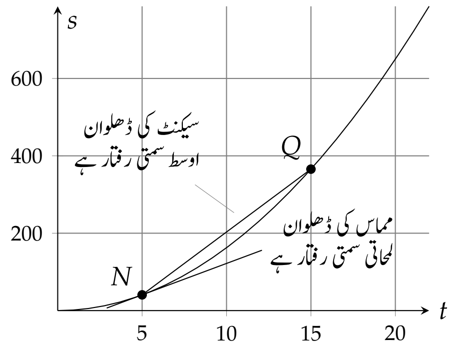
مقدار معلوم روپ

اگر x اور y دونوں متغیر t کے تفاعل ہوں تب $(x(t), y(t))$ کی ترسیم **مقدار معلوم ترسیم**[17] کہلاتی ہے۔ منحنی

displacement[15]
average velocity[16]
parametric curve[17]



شکل 3.32: محور پر حرکت کرتے جسم کا t اور $t + \Delta t$ پر مقام



شکل 3.33: فاصلہ بالمقابل وقت برائے مثال 3.20

$y = f(x)$ کی **مقدار معلوم روپ**[18] حاصل کرنے کی خاطر ہم $x = t$ اور $y = f(t)$ لیں گے۔چند منحنیات کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

تفاعل	مقدار معلوم روپ
$y = x^2$ (y متغیر x کا تفاعل ہے)	$x(t) = t, y(t) = t^2, -\infty < t < \infty$
$x^2 + y^2 = 4$ (y متغیر x کا تفاعل نہیں ہے)	$x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, 0 \le t \le 2\pi$

سمتی رفتار ہمیں فاصلہ طے کرنے کی شرح کے ساتھ ساتھ حرکت کی سمت بھی دیتی ہے۔ اگر جسم آگے (بڑھتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار مثبت ہو گا؛ اگر جسم پیچھے (گھٹے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار منفی ہو گا (شکل 3.34)۔ سمتی رفتار ایک جسم کتنا تیز فاصلہ طے کرتا ہے۔اس کے علاوہ ہمیں حرکت کرنے کی سمت کی معلومات بھی

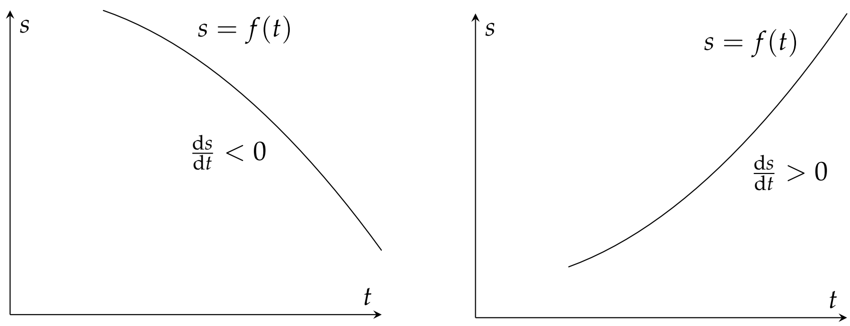
سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[19] کہتے ہیں جو مثبت مقدار ہے۔ اگر آپ اپنے گھر سے دوست کے گھر تک $60\,\mathrm{km}$ کی سمتی رفتار سے گاڑھی چلائیں اور وہاں سے واپسی پر اسی رفتار سے آئیں تو واپسی پر گاڑھی کی سمتی رفتار $-60\,\mathrm{km}$ ہو گی لیکن گاڑھی کا رفتار پیما واپسی پر بھی $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھائے گا چونکہ وہ رفتار ناپتا ہے ناکہ سمتی رفتار۔

تعریف: سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[20] کہتے ہیں۔

$$\text{رفتار} = \left|v(t)\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

---

[18] parametric representation
[19] speed
[20] speed



(ا) بڑھتا s مثبت سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ دیگا۔

(ب) گھٹتا s منفی سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ دیگا۔

شکل 3.34

جس شرح سے ایک جسم کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہے اس کو جسم کی **اسراع** کہتے ہیں۔

تعریف: وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کا تفرق **اسراع**[21] کہلاتا ہے۔اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب t پر اس جسم کی اسراع درج ذیل ہو گی۔

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے کسی بھی جسم سے اس کی وضاحت کی جا سکتی ہے۔ایسے جسم پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہے اور جسم کی حرکت کو **آزادانہ گرنا**[22] کہتے ہیں۔آزادی سے گرتا ہوا جسم دورانیہ t میں

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

فاصلہ طے کرتا ہے جہاں مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سطح زمین کے قریب کشش زمین کی بنا اسراع ہے۔خلا میں ہوا کی غیر موجودگی کی بنا ہوا کی مزاحمت نہیں پائے جاتی ہے اور ہر جسم اس کے تحت حرکت کرتی ہے۔زمین کے قریب ہوا کی موجودگی میں ہر کثیف، بھاری جسم مثلاً اینٹ، پتھر، وغیرہ کی حرکت، ابتدائی چند سیکنڈ کے لئے جب تک ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہو، اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

اسراع کی اکائی $\mathrm{m\,s^{-2}}$ میٹر فی مربع سیکنڈ پڑھی جاتی ہے۔

یہ مساوات ہمیں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی رفتار اور مقام کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔

---

[21] acceleration
[22] free fall

مثال 3.21: لمحہ $t=0$ پر ٹھوس جسم کو ساکن حال سے گرنے کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔
(ا) پہلے 2 سیکنڈوں میں جسم کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔ (ب) اس لمحہ پر جسم کی رفتار اور اسراع کتنی ہوں گی؟
حل: (ا) پہلے دو سیکنڈوں میں جسم درج ذیل فاصلہ طے کرتا ہے۔

$$s(2)=\frac{1}{2}(9.8)(2^2)=19.6\,\mathrm{m}$$

(ب) لمحہ t پر رفتار $v(t)$ اور اسراع $a(t)$

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=9.8t,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=9.8$$

ہوں گے۔یوں $t=2\,\mathrm{s}$ پر رفتار اور اسراع درج ذیل ہوں گے۔

$$v(2)=9.8(2)=19.6\,\mathrm{m},\quad a(2)=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

آپ نے دیکھا کہ اسراع a کی قیمت وقت t کا تابع نہیں ہے۔ □

مثال 3.22: ایک جسم کو $49\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ لمحہ t پر جسم کی بلندی $s=49-\frac{1}{2}gt^2$ ہو گی (شکل 3.35)۔

ا. جسم کس بلندی تک پہنچ پائے گا؟

ب. اوپر جاتے ہوئے $102.9\,\mathrm{m}$ کی بلندی پر جسم کی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ نیچے آتے ہوئے اتنی ہی بلندی پر سمتی رفتار کیا ہو گی؟

ج. حرکت کے دوران کسی بھی لمحہ t پر جسم کی اسراع کتنی ہو گی؟

د. جسم زمین پر کب گرے گا؟

حل:

ا. ہم محددی نظام یوں منتخب کرتے ہیں سطح زمین سے فاصلہ مثبت ہو۔یوں بلندی s مثبت مقدار ہو گی، ابتدائی رفتار مثبت ہو گی جبکہ اسراع جو نیچے رخ عمل کرتا ہے منفی ہو گا۔ اوپر جاتے ہوئے سمتی رفتار مثبت جبکہ نیچے گرتے ہوئے سمتی رفتار منفی ہو گی۔بلند ترین مقام پر سمتی رفتار صفر ہو گی۔ اب کسی بھی لمحہ پر سمتی رفتار

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=49-gt$$

ہو گی۔ رفتار اس لمحہ پر صفر ہو گا ی جب

$$49 - 9.8t = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{49}{9.8} = 5\,\mathrm{s}$$

ہو۔ لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر جسم کی بلندی درج ذیل ہو گی۔

$$s(5) = 49(5) - \frac{1}{2}(9.8)(5^2) = 122.5\,\mathrm{m}$$

ب. جسم کی رفتار $100\,\mathrm{m}$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم اس بلندی پر لمحہ t تلاش کرتے ہیں۔

$$102.9 = 49t - 4.9t^2, \quad \Longrightarrow \quad t = 3\,\mathrm{s},\, 7\,\mathrm{s}$$

یوں 3 سیکنڈوں میں جسم $102.9\,\mathrm{m}$ بلندی تک پہنچتا ہے جبکہ واپس گرتے ہوئے اسی بلندی پر یہ 7 سیکنڈ بعد ہوتا ہے۔ ان لمحات پر جسم کی سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$v(3) = 49 - 9.8(3) = 19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad v(7) = 49 - 9.8(7) = -19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں لمحات پر جسم کی رفتار ایک جیسی ہے۔

ج. جسم کی اسراع تلاش کرتے ہیں۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g = -9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

جسم کی اسراع مسلسل $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ رہتی ہے۔ اوپر جاتے ہوئے یہ سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے جبکہ نیچے گرتے کے دوران یہ سمتی رفتار میں اضافہ پیدا کرتا ہے۔

د. جس اس لمحہ زمین پر ہو گا جب $s = 0$ ہو یعنی:

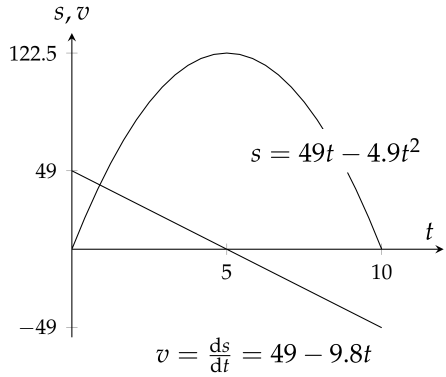
$$49t - 4.9t^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad t(49 - 4.9t) = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = 0\,\mathrm{s},\, 10\,\mathrm{s}$$

یوں ابتدائی لمحے پر جسم زمین پر ہو گا اور ٹھیک 10 سیکنڈ بعد یہ واپس زمین پر گرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر جانے کا دورانیہ اور نیچے گرنے کا دورانیہ ایک جیسے ہیں۔

□

فنیات انتصابی لکیر پر حرکت کی نقل
مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$



شکل 3.35: بلندی اور سمتی رفتار (برائے مثال 3.22)

کو کمپیوٹر پر **نقطہ ترسیم**[23] کریں جو لمحہ t پر نقطہ $(x(t), y(t))$ دکھائے گی۔نقطہ ترسیم لمحہ بالمحہ صورت حال دکھاتی ہے۔یوں اگر $f(t)$ جسم کی بلندی کو ظاہر کرتا ہو تب $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ کی لحاتی ترسیم جسم کی حقیقی حرکت دکھائے گی۔مثال 3.22 کے لئے اس لحاتی ترسیم کو پہلے $0 \leq t \leq 5$ اور بعد میں $0 \leq t \leq 10$ وقفے پر دیکھیں۔

دوسرا تجربہ کرنے کی خاطر مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = t, \quad y(t) = 49t - 4.9t^2$$

کو نقطہ ترسیم کریں۔

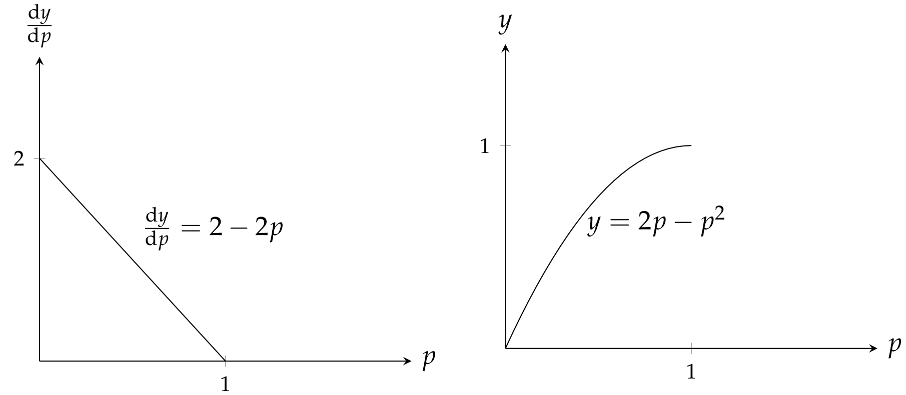
حساسیت

اگر x میں چھوٹی تبدیلی سے تفاعل $f(x)$ میں بڑی تبدیلی رونما ہوتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x میں تبدیلی کو تفاعل نسبتاً زیادہ **حساس**[24] ہے۔تفرق $f'(x)$ تفاعل کی **حساسیت**[25] کی ناپ ہے۔

مثال 3.23: تبدیلی کو حساسیت

آسٹریا کے گرگر یوہان مینڈل (1822-1884) نے مٹر پر تجربہ کرتے ہوئے **جنیات**[26] کی بنیاد ڈالی۔ان کے نتائج کے مطابق اگر ہموار جلد

[23] dot graph
[24] sensitive
[25] sensitivity
[26] genetics



(ب) حساسیت

(ا) ہموار جلد مٹروں کی تناسب $y = 2p - p^2$

شکل 3.36: مینڈل کے تجربہ نے جنیات کی بنیاد رکھی۔

والے (**غالب**[27]) مٹروں کے **جین**[28] کی تعداد p ہو (جہاں p کی قیمت 0 تا 1 ہو سکتی ہے) اور غیر ہموار جلد والے (**مغلوب**[29]) مٹروں کی جین کی تعداد $(1-p)$ ہو تب مٹروں کی آبادی میں ہموار جلد مٹروں کی تناسب

$$y = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

ہے۔

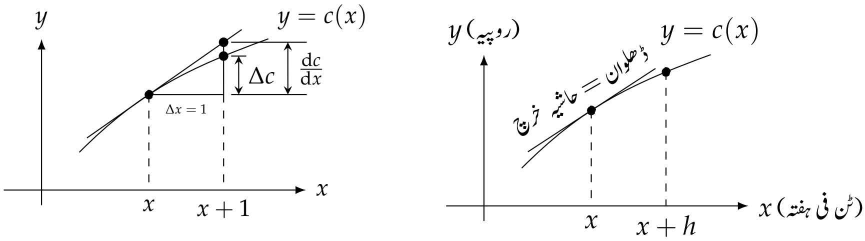
y بالمقابل p کی ترسیم کے مطابق جب p کی قیمت کم ہو تب y زیادہ حساس ہو گا (شکل 3.36-ا)۔ تفاعل y کے تفرق $\frac{dy}{dp}$ کی ترسیم سے بھی یہی ظاہر ہوتا ہے۔ جب p کی قیمت 0 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 2 کے قریب ہے اور جب p کی قیمت 1 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 0 کے قریب ہے (شکل 3.36-ب)۔ □

جیسے تفرق کی بات کرتے ہوئے سمتی رفتار اور اسراع کی اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں، اقتصادیات کی میدان میں ہم **حاشیہ**[30] کی بات کرتے ہیں۔

عمل پیداوار میں اشیاء پیدا کرنے کا خرچ $c(x)$ متغیر x کا تفاعل ہے جو پیدا کردہ اشیاء کی تعداد ہے۔ **حاشیہ خرچ پیداوار**[31] سے مراد پیداوار کے لحاظ سے خرچ کی شرح تبدیلی $\frac{dc}{dx}$ ہے۔

مثال کے طور پر ایک ہفتہ میں x ٹن[32] فولاد پیدا کرنے پر $c(x)$ روپیہ کا خرچ آتا ہے۔ اب $x+h$ ٹن فولاد پیدا کرنے پر زیادہ

dominant[27]
gene[28]
recessive[29]
marginals[30]
marginal cost of production[31]
tonne, 1000 kg[32]



(ا) ہفتہ وار پیداوار بالمقابل خرچ

(ب) $\Delta x = 1$ اضافی پیداوار کے لئے اضافی خرچ Δc تقریباً $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ کے برابر ہے۔

شکل 3.37: حاشیہ خرچ پیداوار

خرچہ آئے گا اور خرچ میں اضافہ (تبدیلی) کو h سے تقسیم کرنے سے فی ہفتہ فی ٹن خرچ میں اوسط اضافہ ہو گا۔

$$\text{ہفتہ میں } h \text{ ٹن اضافی فولاد پیدا کرنے سے خرچ میں اوسط اضافہ} = \frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

فی ہفتہ موجودہ پیداوار x ٹن ہونے کی صورت میں $h \to 0$ کرتے ہوئے اس نسبت کا حد اضافی فولاد پیدا کرنے کا حاشیہ خرچ دے گا (شکل 3.37-ا)۔

$$\text{حاشیہ خرچ پیداوار} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

بعض اوقات ہم اضافی ایک اکائی پیداوار کے اضافی خرچ

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

کو ہی حاشیہ خرچ پیداوار کہتے ہیں جو x پر $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ کی تخمین ہے۔یہ قابل قبول اس لئے ہے کہ x کے نزدیک c کی ڈھلوان میں تبدیلی زیادہ نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہاں $\Delta x = 1$ لیتے ہوئے حاصل سیکنٹ کی ڈھلوان کی قیمت حد $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ کے قیمت کے بہت قریب ہو گی۔ عملاً x کی بڑی قیمتوں کے لئے یہ تخمین قابل قبول ہو گی (شکل 3.37-ب)۔

مثال 3.24: حاشیہ خرچ فرض کریں کہ x اشیاء پیدا کرنے پر

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

روپیہ خرچہ آتا ہے جب x کی قیمت 8 تا 30 ہو۔ ابھی آپ روزانہ 10 اشیاء پیدا کرتے ہیں۔روزانہ ایک اضافی شہ پیدا کرنے پر اضافی کتنا خرچ آئے گا؟

حل: دس اشیاء بناتے ہوئے مزید ایک شہ پیدا کرنے پر تقریباً $c'(10)$ اضافی خرچ آئے گا

$$c'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

جو 195 روپیہ کے برابر ہے۔ □

اگرچہ حقیقی اعمال کے کلیات عموماً نہیں پائے جاتے ہیں، نظریہ اقتصادیات ہمیں متوقع نتائج جاننے میں مدد کرتا ہے۔ یہ نظریہ جن تفاعل کا ذکر کرتا ہے انہیں عموماً موزوں وقفہ پر کم درجے کی کثیر رکنیوں سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کعبی کثیر رکنی عموماً اس قابل ہوتی ہے کہ پیچیدہ مسئلے کو ظاہر کر سکے اور کعبی کثیر رکنی کا استعمال زیادہ مشکل بھی نہیں ہوتا ہے۔

مثال 3.25: حاشیہ شرح ٹیکس

اگر آپ نی موجودہ آمدن پر حاشیہ شرح ٹیکس $28\,\%$ ہو اور آپ کی آمدنی میں 10000 روپیہ کا اضافہ ہو تب آپ کو اضافی 2800 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ $28\,\%$ حاشیہ ٹیکس کا یہ ہرگز مطلب نہیں ہے کہ آپ کو اپنی آمدن کا $28\,\%$ بطور ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ آپ کی موجودہ آمدنی I پر آمدنی بڑھنے کے لحاظ سے ٹیکس کی شرح $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}I}=0.28$ ہے۔ آپ کو ہر اضافی ایک روپیہ کی آمدن پر 0.28 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اب ظاہر ہے کہ اگر آپ کی آمدن بہت بڑھ جائے تب آپ ٹیکس کے نئے قالب میں شامل ہوں جائیں گے جہاں حاشیہ شرح ٹیکس غالباً زیادہ ہو گا۔ □

مثال 3.26: حاشیہ اگر x ہزار مٹھائی فروخت کرنے سے

$$r(x)=x^3-3x^2+12x$$

آمدنی حاصل ہو جہاں $5\le x\le 20$ ہے تب 10 ہزار مٹھائی فروخت کرتے ہوئے حاشیہ آمدنی

$$r'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-3x^2+12x)=3x^2-6x+12$$

ہو گی۔ حاشیہ خرچ کی طرح ایک اضافی اکائی فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو حاشیہ آمدنی پیش کرتی ہے۔ اگر آپ 10 ہزار مٹھائیاں فی ہفتہ فروخت کر رہے ہوں تب فی ہفتہ 11 ہزار مٹھائیاں فروخت کرنے سے آپ کی آمدنی میں درج ذیل روپیہ اضافہ متوقع ہو گا۔

$$r'(10)=3(100)-6(10)+12=252$$

□

سوالات

محددی لکیر پر حرکت

سوال 1 تا سوال 6 میں $a \le t \le b$ کے لئے $s = f(t)$ محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام دیتی ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔

ا. دیے گئے وقفے پر جسم کا ہٹاو اور سمتی رفتار حاصل کریں۔

ب. اس وقفے کے آخری سروں پر جسم کی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

ج. جسم کب حرکت کی سمت تبدیل کرتا ہے (اگر ایسا کرتا ہو)؟

سوال 1: چاند پر آزادانہ گرنا $s = 0.8t^2, \quad 0 \le t \le 10$

سوال 2: مریخ پر آزادانہ گرنا $s = 1.86t^2, \quad 0 \le t \le 0.5$

سوال 3: $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$

سوال 4: $s = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 2$

سوال 5: $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$

سوال 6: $s = \frac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

سوال 7: s محور پر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ ہے۔ (ا) ان نقطوں پر اس جسم کی اسراع تلاش کریں جن پر جسم کی سمتی رفتار صفر ہو گی۔ (ب) جب جسم کی اسراع صفر ہو اس لمحے پر اس جسم کی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = 0$ تا $t = 2$ کے دوران یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔

سوال 8: وقت $t \ge 0$ پر s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = t^2 - 4t + 3$ ہے۔ (ا) جسم کی اسراع وہاں تلاش کریں جہاں جسم کی سمتی رفتار صفر ہے۔ (ب) جسم کب آگے رخ اور کب پیچھے رخ حرکت کرتی ہے؟ (ج) جسم کی سمتی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

آزادانہ گرنا

سوال 9: مریخ اور مشتری کی سطح کے قریب آزادانہ گرنے کے مساوات بالترتیب $s = 1.86t^2$ اور $s = 11.44t^2$ ہیں جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ ساکن حال سے گرتے ہوئے کتنے وقت میں (مریخ اور مشتری میں) ایک جسم کی رفتار $27.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی تقریباً $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو گی؟

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم