احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

(جلد اول)

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

15.3 راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کمیت یا بار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے نا کہ منتقلی کی راہ پر۔اس حصہ میں تکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں تکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ D پر معین میدان $\boldsymbol{F}$ ایک ذرہ کو D میں نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتا ہے۔ عموماً تکمل کام $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہو گی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں تکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر D میں تمام A اور B کے لئے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ D میں $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ راہ سے آزاد ہے اور D پر $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ D پر $\boldsymbol{F}$ کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ D میں ہر دو نقطوں A اور B کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر تکمل کام $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت ایک جیسی ہے۔ تب تکمل $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ خطہ D میں **راہ سے آزاد**[7] ہو گا اور میدان $\boldsymbol{F}$ خطہ D پر **بقائی**[8] ہو گا۔

□

عملی زندگی میں عموماً میدان $\boldsymbol{F}$ صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب D پر $\boldsymbol{F}=\nabla f$ ہو جہاں f ایک غیر سمتی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل f کو $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر D پر میدان $\boldsymbol{F}$ معین ہو اور $\boldsymbol{F}=\nabla f$ ہو جہاں f خطہ D پر ایک غیر سمتی تفاعل ہو تب f کو $\boldsymbol{F}$ کا **مخفی قوہ تفاعل**[9] کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل f جاننے کے بعد $\boldsymbol{F}$ کی دائرہ کار میں تمام تکملات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=f(B)-f(A) \tag{15.10}$$

---

[7] path independent
[8] conservative
[9] potential function

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق f' کی طرح ∇f کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لئے فرض کریں تب مساوات 15.10 کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

کا مطابقتی سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً، D پر بقائی $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں D میں ہر بند راہ پر تکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات 15.10 اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل منحنی، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **ٹکڑوں میں ہموار**[10] ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ 12.1 کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرقات پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد $\boldsymbol{F} = \nabla f$ کی صورت میں مخفی قوہ تفاعل f کے مدغم تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کے خواص پر غور کے دوران آفشاں انگیز ثابت ہو گا۔

ہم فضا میں D کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں D میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ D **تعلق (دار)**[11] خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جا سکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

بقائی میدان میں لکیری تکملات

بقائی میدان میں لکیری تکملات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اس نتیجہ کے تحت تکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ 15.1: ***لکیری تکملات کا بنیادی مسئلہ***

1. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ D میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے اجزاء استمراری ہیں۔ تب صرف اور صرف اس صورت جب D میں تمام نقاط A اور B کے لئے تکمل $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت، D کے اندر رہتے ہوئے A اور B کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل f موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\boldsymbol{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

---

[10] piecewise smooth
[11] connected

2. اگر تکمل کی قیمت A اور B کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: کہ $\boldsymbol{F} = \nabla f$ سے مراد تکمل کی قیمت کا راہ سے آزاد ہونا ہے

فرض کریں D میں A اور B دو نقطے ہیں اور D میں A سے B تک ہموار راہ درج ذیل ہے۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

منحنی کی ہمراہ t کے لحاظ سے C قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} && \text{زنجیری قاعدہ} \\ &= \nabla f\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right) = \nabla f\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{15.11}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && \text{مساوات 15.11} \\ &= f(g(t),h(t),k(t))\Big]_a^b = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

اس طرح تکمل کام کی قیمت A اور B پر f کی قیمتوں پر منحصر ہو گی نا کہ ان کے بیچ راہ پر۔ یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔

□

مثال 15.10: نقاط $(-1,3,9)$ اور $(1,6,-4)$ کے بیچ ہموار منحنی C پر چلتے ہوئے درج ذیل بقائی میدان کا کم تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k} = \nabla(xyz)$$

حل: $f(x,y,z) = xyz$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_A^B \nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} && \boldsymbol{F} = \nabla f \\ &= f(B) - f(A) && \text{مسئلہ 15.1 کا جزو دوم} \\ &= xyz\big|_{(1,6,-4)} - xyz\big|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3 \end{aligned}$$

$\square$

مسئلہ 15.2: درج ذیل فقرے معادل ہیں۔

ا. خطہ D میں ہر بند راہ پر $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$ ہے۔

ب. خطہ D پر میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

ثبوت: جزو-ا
ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ D میں کسی بھی دو نقاط A اور B کے بیچ کسی بھی دو راہوں C_1 اور C_2 پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کے تکملات کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ ہم شکل میں C_2 کا رخ الٹ کر کے B سے A تک راہ کو $-C_2$ لکھتے ہیں۔ راہ C_1 اور راہ $-C_2$ مل کر بند راہ C دیتے ہیں۔ اب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{-C_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{C}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

یوں C_1 اور C_2 پر تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔

$\square$

ثبوت: جزو-ب
ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ ہر بند راہ C پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کا تکمل صفر ہے۔ ہم C پر کسی دو نقطوں A اور B کا انتخاب کر کے C کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں: نقطہ A سے B تک ٹکڑے کو C_1 اور نقطہ B سے A تک ٹکڑے کو C_2 لیتے ہوئے خلاف گھڑی تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_{C}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{A}^{B}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{B}^{A}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

$\square$

مسئلہ 15.1 اور مسئلہ 15.2 کے نتائج کو یکجا کرتے ہیں۔

$$D \text{ پر } \boldsymbol{F}=\nabla f \quad\Leftrightarrow\quad D \text{ پر } \boldsymbol{F} \text{ بقائی ہے} \quad\Leftrightarrow\quad D \text{ میں کسی بھی بند راہ پر } \oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

یہ جانتے ہوئے کہ بقائی میدان میں لکیری تکملات کا حل کتنا آسان ہے، دو سوالات پیدا ہوتے ہیں:

1. ہمیں کیسے جان سکتے ہیں کہ میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے؟

2. بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کا مطابقتی مخفی قوہ تفاعل f کیسے دریافت کیا جا سکتا ہے (جہاں $\boldsymbol{F}=\nabla f$ ہو گا)۔

بقائی میدان کا مخفی قوہ تفاعل کا حصول

بقائی میدان کا پرکھ درج ذیل ہے۔

بقائی میدان کا اجزائی پرکھ

میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ جس کے اجزائی تفاعل کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{15.12}$$

□

ثبوت پرکھ: ہم دکھاتے ہیں کہ بقائی $\boldsymbol{F}$ کے لئے مساوات 15.12 ہر صورت مطمئن ہو گا۔ایسا مخفی قوہ تفاعل f پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} && \text{استمراری ہونے کی بدولت مدغم جزوی تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial N}{\partial z}
\end{aligned}$$

مساوات 15.12 کے باقی دو اجزاء بھی اسی طرح ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

ثبوت کا دوسرا حصہ، جس سے مراد لیا جا سکتا ہے کہ مساوات 15.12 کہتی ہے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہو گا، مسئلہ سٹوکس کا نتیجہ ہے۔

□

یہ جانتے ہوئے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے، ہم عموماً مخفی قوہ تفاعل f دریافت کرنا چاہیں گے جو مساوات $\nabla f = \boldsymbol{F}$ یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$$

کو f کے لئے حل کرنے سے حاصل ہو گا۔ ہم درج ذیل تین مساوات کا تکمل لے کر ایسا کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

مثال 15.11: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y + yz)\boldsymbol{i} + (xz - e^x \sin y)\boldsymbol{j} + (xy + z)\boldsymbol{k}$ بقائی ہے اور اس کا مخفی قوہ تفاعل f تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ کا اطلاق

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یہ مساوات مل کر ہمیں بتاتے ہیں کہ ایسا f پایا جاتا ہے جو $\nabla f = \boldsymbol{F}$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ہم درج ذیل مساواتوں کے تکملات سے f کو تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{15.13}$$

ہم بائیں سے شروع کرتے ہوئے y اور z کو مستقل تصور کر کے پہلی مساوات کا تکمل x کے لحاظ سے لیتے ہیں:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z) \tag{15.14}$$

ہم نے تکمل کے مستقل کو $g(y, z)$ لکھا ہے چونکہ اس کی قیمت y اور z کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ کے برابر پر کرتے ہیں:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

یوں $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ہو گا لہٰذا g کی قیمت صرف z پر منحصر ہو گی۔اس طرح مساوات 15.14 درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial z}$ معلوم کر کے مساوات 15.13 میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial z}$ کے برابر پر کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} &= xy + z \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} &= z \quad \text{یعنی}
\end{aligned}
$$

متغیر z کے ساتھ تکمل لیتے ہیں:

$$h(z) == \frac{z^2}{2} + C$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

یوں مستقل C کی لامتناہی ممکنہ منفرد قیمتیں منتخب کر کے $\boldsymbol{F}$ کے لامتناہی تعداد کے مخفی قوہ تفاعل حاصل ہوں گے۔ □

مثال 15.12: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (2x - 3)\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (\cos z)\boldsymbol{k}$ غیر بقائی ہے۔

حل: ہم مساوات 15.12 میں دی گئی پرکھ استعمال کر کے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

حاصل کرتے ہیں۔یہ قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{F}$ غیر بقائی ہو گا۔ پرکھ کے باقی اجزاء کو دیکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔ □

قطعی تفرقی روپ

جوابات