احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

13.9 لیگرینج ضاربین

جیسا ہم حصہ 13.8 میں دیکھ چکے، بعض اوقات ہمیں تفاعل کی انتہائی قیمت ایسی صورت درکار ہو گی جب اس کے دائرہ کار کو مستوی کے کسی مخصوص ذیلی حصہ، مثلاً قرص یا بند تکونی خطہ، پر رہنے کا پابند بنایا گیا ہو۔ لیکن جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایک تفاعل پر دیگر پابندیاں بھی عائد کی جا سکتی ہیں۔

اس حصہ میں ہم پابند تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کرنے کے ایک طاقتور ترکیب پر غور کریں گے جس کو لیگرینج ضاربین کی ترکیب کہتے ہیں۔ جیومیٹری کے انتہا قیمت مسائل حل کرتے ہوئے یوسف لوئی لیگرینج نے 1755 میں اس ترکیب کو دریافت کیا۔ موجودہ دور میں اس کا استعمال اقتصادیات، انجینئری (جہاں کثیر المراحل راکٹ کی تخلیق میں اسے استعمال کیا جاتا ہے) اور ریاضیات میں پایا جاتا ہے۔

جبری پابند تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت نقاط اور کم سے کم قیمت نقاط

مثال 13.55: مبدا کے قریب ترین نقطہ $N(x, y, z)$ مستوی $2x + y - z = 0$ پر تلاش کریں۔

حل: ہمیں تفاعل

$$\left|\vec{ON}\right| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

کی کم سے کم قیمت درج ذیل پابندی کے تحت تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$2x + y - z - 5 = 0$$

چونکہ جب بھی تفاعل

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

کی قیمت کم سے کم ہو، $\vec{ON}$ کی قیمت بھی کم سے کم ہوتی ہے لہٰذا ہم $2x + y - z - 5 = 0$ کی پابندی میں رہتے ہوئے $f(x, y, z)$ کی کم سے کم قیمت تلاش کر کے اس مسئلہ کو حل کر سکتے ہیں۔ اس مساوات میں x اور y کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے z کو

$$z = 2x + y - 5$$

لکھ کر ہمیں وہ نقطہ (x, y) تلاش کرنا ہو گا جس پر تفاعل

$$h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$$

کی قیمت کم سے کم ہو۔ چونکہ پورا xy مستوی h کا دائرہ کار ہے لہٰذا ایک رتبی تفرقی پرکھ کے تحت h کی کم سے کم قیمت ان نقاط پر پائی جائے گی جن پر

$$h_x = 2x + 2(2x + y - 5)(2) = 0, \quad h_y = 2y + 2(2x + y - 5) = 0$$

ہو۔ان سے

$$10x + 4y = 20, \quad 4x + 4y = 10$$

یعنی

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{5}{6}$$

حاصل ہو گا۔ ہم دو رتبی تفرقی پرکھ کے ساتھ ساتھ جیومیٹریائی دلیل دیتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ان قیمتوں پر h کی قیمت کم سے کم ہو گی۔ مستوی $z = 2x + y - 5$ پر مطابقتی z محدد

$$z = 2\Big(\frac{5}{3}\Big) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}$$

ہو گا۔یوں مطلوبہ نقطہ

$$N\Big(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\Big)$$

ہو گا جو مبدا سے $\frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2.04$ فاصلہ پر ہو گا۔ $\square$

ہم نے مثال 13.55 میں پابندی کے شرط کی قیمتیں پر کرتے ہوئے کم سے کم قیمت نقطہ تلاش کیا۔ یہ ترکیب بعض اوقات ہمیں آسانی سے جواب نہیں دے پاتی۔یہی وجہ ہے کہ اس حصہ میں نئی ترکیب متعارف کی جائے گی۔

مثال 13.56: درج ذیل قطع زائد بیلن پر مبدا کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

پہلا حل: بیلن کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ہمیں اس بیلن پر مبدا کے قریب ترین نقاط تلاش کرنے ہیں۔یہ وہ نقاط ہوں گے جو $x^2 - z^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتے ہوئے تفاعل

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{فاصلے کا مربع}$$

کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں۔ اگر ہم مشروط مساوات میں x اور y کو غیر تابع متغیرات تصور کریں تب

$$z^2 = x^2 - 1$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں بیلن پر نقاط کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

بیلن پر ان نقاط کے محدد جو f کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں تلاش کرنے کی خاطر ہمیں xy مستوی میں وہ نقاط معلوم کرنے ہوں گے جن پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ h کی انتہائی قیمتیں صرف ان نقاط پر ممکن ہیں جن پر

$$h_x = 4x = 0, \quad h_y = 2y = 0$$

ہو، یعنی، نقطہ $(0,0)$ لیکن بیلن پر ایسا کوئی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جہاں x اور y بیکوقت صفر ہوں۔ ایسا کیوں کر ہوا؟

کیا ہوا کہ یک رتبی تفرقی پرکھ سے ہم نے (درست طور پر) h کے دائرہ کار میں وہ نقطہ معلوم کیا جس پر h کی قیمت کم سے کم تھی جبکہ ہمیں بیلن پر وہ نقطہ درکار تھا جس پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ اگرچہ h کا دائرہ کار مکمل xy ہے، ہمیں مستوی xy میں بیلن کے سایہ کو دائرہ کار لیتے ہوئے نقطہ (x, y, z) کے پہلے دو محدد تلاش کرنے تھے۔ بیلن کے سایہ میں خطوط $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ خطہ شامل نہیں ہے۔

ہم (x اور y کی بجائے) y اور z کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے اس پریشانی سے نجات حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں

$$x^2 = z^2 + 1$$

لکھ کر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ سے

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

حاصل ہو گا۔ اب ہم وہ نقاط تلاش کرتے ہیں جن پر k کی قیمت کم سے کم ہو۔ اب yz مستوی میں k کے دائرہ کار میں وہ حصہ جس میں y اور z دریافت کئے جاتے ہیں، بیلن پر اس دائرہ کار جس پر (x, y, z) مطلوب ہے، ایک دوسرے جیسے ہیں۔ یوں جو نقاط k کی قیم کو کم سے کم بناتے ہوں، بیلن پر مطابقتی نقاط دیں گے۔ اب k کی کم سے کم قیمت ان نقطوں پر ہو گی جہاں

$$k_y = 2y = 0, \quad k_z = 4z = 0$$

یعنی $y = z = 0$ ہو۔ یوں

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \mp 1$$

ہو گا۔ بیلن پر مطابقتی نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہوں گے۔ ہم عدم مساوات

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

سے دیکھ سکتے ہیں کہ نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہمیں k کی کم سے کم قیمت دیں گے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا سے بیلن کا کم سے کم فاصلہ 1 ہو گا۔

دوسرا حل: مبدا سے بیلن تک کم ترین فاصلہ یوں بھی تلاش کیا جا سکتا ہے کہ آپ مبدا پر ایک بلبلا تصور کریں۔ اس بلبلا میں اتنی ہوا بھریں کہ یہ بیلن کو بس چھوئے۔ جس نقطہ پر یہ بلبلا بیلن کو چھوتا ہے اس نقطہ پر بلبلے اور بیلن کا ایک ہی مماسی مستوی اور ایک ہی عمودی خط ہو گا۔ یوں اگر

$$g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1 \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

کو 0 کے برابر رکھ کر حاصل ہم قد منحنیات کو بلبلا اور بیلن تصور کیا جائے تب ڈھلوان ∇f اور ∇g اس نقطہ پر متوازی ہوں گے جہاں یہ سطحیں ایک دوسرے کو چھوتی ہیں۔ یوں نقطہ مس پر ہم ایسا غیر سمتی λ تلاش کر سکتے ہیں جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

یعنی

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{k})$$

کو مطمئن کرتا ہو۔اس طرح نقطہ مماس پر x ، y اور z محدد درج ذیل تین مساوات کو مطمئن کریں گے۔

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z \tag{13.55}$$

نقطہ (x, y, z) جس کے محدد مساوات 13.55 کو مطمئن کرتے ہوں λ کی کس قیمت کے لئے سطح $x^2 - z^2 - 1 = 0$ پر پائے جائیں گے؟ اس کا جواب دینے کی خاطر ہم اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ اس سطح پر کسی بھی نقطہ کا x محدد صفر نہیں ہے، فیصلہ کرتے ہیں کہ مساوات 13.55 کی پہلی مساوات میں $x \neq 0$ ہو گا۔یوں $2x = 2\lambda x$ صرف

$$2 = 2\lambda \quad \text{یعنی} \quad \lambda = 1$$

کی صورت میں ممکن ہو گا۔اب $\lambda = 1$ لیتے ہوئے مساوات $2z = -2\lambda z$ سے $2z = -2z$ حاصل ہو گا جس کو صرف $z = 0$ مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی مساوات $2y = 0$ سے $y = 0$ حاصل ہو گا۔ ان معلومات سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ نقطہ کا روپ درج ذیل ہو گا۔

$$(x, 0, 0)$$

سطح $x^2 - z^2 = 1$ پر کن نقاط کے محدد کا یہی روپ ہے؟ ان نقاط پر

$$x^2 - (0)^2 = 1, \quad x^2 = 1, \quad x = \mp 1$$

ہو گا۔بیلن پر مبدا کے قریب ترین نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہوں گے۔ □

لیگرینج ضاربین

ہم نے مثال 13.56 کا دوسرا حل **لیگرینج ضاربین**[49] کی ترکیب سے حاصل کیا۔ عمومی طور پر یہ ترکیب کہتی ہے تفاعل $f(x, y, z)$ ، جس کے متغیرات پر شرط $g(x, y, z) = 0$ لاگو کی گئی ہو، کی انتہائی قیمتیں، سطح $g = 0$ پر ان نقاط پر پائی جائیں گی جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

[49] method of Lagrange multipliers

کو کسی غیر سمتی مستقل λ (جس کو **لیگرینج ضارب**[50] کہتے ہیں) کے لئے مطمئن کرتے ہوں۔

اس ترکیب کو مزید جاننے کے لئے اور یہ دیکھنے کی خاطر کہ یہ ترکیب کیوں کام کرتی ہے، ہم درج ذیل مشاہدہ کرتے ہیں جس کو ایک مسئلہ کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔

مسئلہ 13.9: **عمودی ڈھلوان کا مسئلہ**
فرض کریں $f(x, y, z)$ ایک ایسے خطہ میں قابل تفرق ہے جس کی اندرون میں ہموار منحنی

$$C: \quad \boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$$

پائی جاتی ہے۔ اگر C پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہو جہاں C کی نسبت f کی مقامی زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم قیمت ہو تب N_0 پر ∇f منحنی C کو عمودی ہو گا۔

ثبوت: ہم دکھاتے ہیں کہ N_0 پر منحنی کہ سمتیہ رفتار کو ∇f عمودی ہو گا۔ منحنی C پر f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیتا ہے جس کا t کے لحاظ سے تفرق

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}$$

ہو گا ایک نقطہ N_0 جس پر f کی منحنی پر قیمت کی نسبت سے مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت ہو، $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$ للہذا

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

ہو گا

ہم مسئلہ 13.9 میں جزو z کو حذف کر کے دو متغیری تفاعل کے لئے اسی طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

□

ضمنی نتیجہ 13.2: برائے مسئلہ 13.9
ہموار منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j}$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x, y)$ کی قیمتوں کی نسبت جن نقاط پر f کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمتیں ہوں وہاں $\nabla f \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہو گا۔

ترکیب لیگرینج ضاربین کا انحصار مسئلہ 13.9 ہے فرض کریں $f(x, y, z)$ اور $g(x, y, z)$ قابل تفرق ہیں اور سطح $g(x, y, z) = 0$ پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہے جہاں سطح پر دیگر قیمتوں کے لحاظ سے f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

[50] Lagrange!multiplier

تب سطح $g(x,y,z)=0$ پر N_0 سے گزرتی ہوئی ہر قابل تفرق منحنی پر f کی قیمتوں کے لحاظ سے N_0 پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی۔ یوں N_0 سے گزرتی ہوئی ایسی ہر قابل تفرق منحنی کے سمتیہ رفتار کو ∇f عمودی ہو گا۔ لیکن ∇g (جیسا ہم حصہ 13.7 میں دیکھ چکے ہیں ∇g ہم قد سطح $g=0$ کو عمودی ہو گا) بھی ان سمتیات رفتار کو عمودی ہے لہٰذا N_0 پر ∇g اور غیر سمتی λ کا حاصل ضرب ∇f کے برابر ہو گا۔

لیگرینج ضارب کی ترکیب فرض کریں $f(x,y,z)$ اور $g(x,y,z)$ قابل تفرق ہیں۔ شرط $g(x,y,z)=0$ پر پورا اترتے ہوئے f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت تلاش کرنے کی خاطر x ، y ، z اور λ کی ایسی قیمتیں معلوم کریں جو درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f=\lambda\nabla g,\quad g(x,y,z)=0$$

دو متغیری تفاعل کے لئے موزوں مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$\nabla f=\lambda\nabla g,\quad g(x,y)=0$$

====================%

مثال 13.57: ترخیم

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

پر درج ذیل تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x,y)=xy$$

حل: ہم $f(x,y)=xy$ کی انتہائی قیمتیں درج ذیل شرط پر پورا اترتے ہوئے تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم پہلے x ، y اور λ کی وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f=\lambda\nabla g,\quad g(x,y)=0$$

مساوات ڈھلوان ہمیں

$$y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}=\frac{\lambda}{4}x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}$$

دیتی ہے جس سے

$$y = \frac{\lambda}{4}x, \quad x = \lambda y, \quad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $y = 0$ یعنی $\lambda = \mp 2$ ہو گا۔ ہم اب درج ذیل دو صورتوں پر غور کرتے ہیں۔
پہلی صورت: اگر $y = 0$ ہو تب $x = y = 0$ ہو گا۔ لیکن $(0,0)$ ترخیم پر نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا $y \neq 0$ ہو گا۔
دوسری صورت: اگر $y \neq 0$ ہو تب $\lambda = \mp 2$ اور $x = \mp 2y$ ہو گا۔ انہیں مساوات $g(x,y) = 0$ میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{(\mp 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad 4y^2 + 4y^2 = 8, \quad y = \mp 1$$

یوں ترخیم پر تفاعل $f(x,y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں چار نقطوں $(\mp 2, 1)$ ، $(\mp 2, -1)$ پر پائی جائیں گی۔ یہ انتہائی قیمتیں $f(x,y) = xy = 2$ اور $f(x,y) = xy = -2$ ہوں گی۔ □

جوابات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ