

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$a^x$ اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیتال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ تکونیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 تکونیاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لاقتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کا حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لاقتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے پرکھ موازنہ	

1111	ا ضمیمہ اول	
1113	ب ضمیمہ دوم	



## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے پرکھ موازنہ

گزشتہ حصہ کے ضمنی نتیجہ 9.1 کی استعمال میں اصل سوال یہ معلوم کرنا ہے کہ  $s_n$  اوپر سے محدود ہے۔ بعض اوقات ہم دکھا پاتے ہیں کہ چونکہ دیے گئے تسلسل کا ہر جزوی مجموعہ  $s_n$  کسی مرتکز تسلسل کے مطابق جزوی مجموعہ سے کم ہے لہذا دیا گیا تسلسل مرتکز ہے۔

مثال 9.31: درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

اس لئے مرتکز ہے کہ اس کے تمام اجزاء مثبت اور درج ذیل تسلسل کے مطابق اجزاء سے کم ہیں۔

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ تعلق  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  کے جزوی مجموعات کو کیسے اوپر سے محدود بناتا ہے۔ درج ذیل فرض کر کے

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر  $n$  کے لئے

$$s_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3$$

ہو گا۔ یوں  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  کے تمام جزوی مجموعات 3 سے کم ہیں لہذا  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  مرتکز ہو گا۔

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  کے جزوی مجموعات کی بالائی حد بندی 3 ہونے کا یہ مطلب نہیں کہ یہ تسلسل 3 پر مرتکز ہو گا۔ جیسا ہم آگے اس باب میں دیکھیں گے یہ تسلسل  $e$  پر مرتکز ہے۔ □

بلا واسطہ پرکھ موازنہ

ہم نے مثال 9.31 میں ارتکاز کو پرکھ موازنہ سے ثابت کیا۔ ہم نے دیے گئے تسلسل کے اجزاء کا ایک مرتکز تسلسل کے مطابق اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ایسا کیا۔ اس طریقہ کار سے کئی تراکیب حاصل کئے جاسکتے ہیں جنہیں پرکھ موازنہ<sup>29</sup> کہتے ہیں۔

غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا بلا واسطہ پرکھ موازنہ  
فرض کریں  $\sum a_n$  ایک ایسا تسلسل ہے جس میں کوئی منفی جزو نہیں پایا جاتا ہے۔

ا. اگر ایسا مرکب تسلسل  $\sum c_n$  پایا جاتا ہو کہ تمام  $n > N$ ، جہاں  $N$  کوئی عدد صحیح ہے، کے لئے  $a_n \leq c_n$  ہو تب تسلسل  $\sum a_n$  مرکب ہو گا۔

ب. اگر غیر منفی اجزاء کا ایسا منفرج تسلسل  $\sum d_n$  پایا جاتا ہو کہ تمام  $n > N$ ، جہاں  $N$  کوئی عدد صحیح ہے، کے لئے  $a_n \geq d_n$  ہو تب تسلسل  $\sum a_n$  منفرج ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ: جزو-الف میں جزوی مجموعات  $\sum a_n$  کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا ہے

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

لہذا یہ غیر گھٹتا ترتیب دیتے ہیں جس کا حد  $L \leq M$  ہے۔

جزو-ب میں جزوی مجموعات  $\sum a_n$  اوپر سے محدود نہیں ہیں۔ اگر یہ اوپر سے محدود ہوتے تب جزوی مجموعہ  $\sum d_n$  کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا

$$M' = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

اور  $\sum d_n$  کو انفرج کی بجائے مرکب ہونا ہوتا۔

□

بلا واسطہ پرکھ موازنہ کو تسلسل پر لاگو کرنے کے لئے ہمیں تسلسل کے ابتدائی اجزاء شامل کرنے ہوں گے۔ ہم کسی بھی اشاریہ  $N$  سے پرکھ شروع کر سکتے ہیں جب تک ہم اس کے بعد کے تمام اجزاء شامل کریں۔

مثال 9.32: کیا درج ذیل تسلسل مرکب ہے؟

$$5 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

حل: ہم ابتدائی چار اجزاء نظر انداز کر کے باقی اجزاء کا مرکب ہندسی تسلسل  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  کے اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل دیکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

□

یوں دیا گیا تسلسل بلا واسطہ پرکھ موازنہ کے تحت مرکب ہو گا۔

بلا واسطہ پرکھ موازنہ استعمال کرنے کی خاطر ہمارے پاس مرکب اور منفرج تسلسل کی فہرست ہونی چاہیے۔ اب تک ہم درج ذیل جانتے ہیں:

منفرج تسلسل	مرکنز تسلسل
ہندی تسلسل جس میں $ r  \geq 1$ ہو	ہندی تسلسل جس میں $ r  < 1$ ہو
ہارمونی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	دوربنی تسلسل مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
کوئی بھی تسلسل $\sum a_n$ جس کے لئے $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ غیر موجود ہو یا $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ہو	تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
$p$ تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p \leq 1$ ہو	$p$ تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p > 1$ ہو

پہلے موازنہ حد

ہم اب ایسے پہلے موازنہ پر غور کرتے ہیں جس کا استعمال ان تسلسل میں بالخصوص آسان ثابت ہوتا ہے جن میں  $a_n$  اشاریہ  $n$  کا مطلق تعلق ہو۔

فرض کریں ہم درج ذیل تسلسل کے ارتکاز پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^3 + 100n^2 + 1000}{2n^6 - n + 5} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2 - n + 1} \quad (\text{الف})$$

ارتکاز یا انفراج جاننے میں صرف دم کار آمد ہوتی ہے۔ جب  $n$  بہت بڑا ہو تب نسبت نما اور شمار کنندہ میں  $n$  کی بلند ترین طاقت سب سے زیادہ اہم ہوں گے۔ یوں (الف) میں بڑے  $n$  کے لئے

$$a_n = \frac{2n}{n^2 - n + 1}$$

کا رویہ  $\frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$  کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ  $\sum \frac{1}{n}$  منفرج ہے لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ  $\sum a_n$  بھی منفرج ہو گا۔

اسی طرح (ب) میں بڑے  $n$  کے لئے

$$\frac{8n^3 + 100n^2 + 1000}{2n^6 - n + 5}$$

کا رویہ  $\frac{8n^3}{2n^6} = \frac{4}{n^3}$  کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ  $\sum \frac{4}{n^3}$  مرکنز ہے (یہ مرکنز  $p$  تسلسل کا چارگنا ہے) لہذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تسلسل  $\sum a_n$  بھی مرکنز ہو گا۔

درج ذیل پہلے کے تحت ہماری توقعات دونوں صورتوں میں درست ہیں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



