

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1344 . . . . .	11.2	کار تیمی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423 . . . . .	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1475 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1497 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1543 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1560 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1592 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1638 . . . . .	13.9	لیگریٹھ ضاربین
1649 . . . . .		جوابات

1651	ا ضمیمہ اول
1653	ب ضمیمہ دوم
1655	ج ضمیمہ تین
1657	د ضمیمہ چار
1659	ه ضمیمہ پانچ
1661	و ضمیمہ چھ
1663	ز ضمیمہ سات
1665	ح ضمیمہ آٹھ
1667	ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

دو شرائط کے ساتھ لیگرینج ضاربین

متعدد مسائل میں ہمیں قابل تفرق تفاعل  $f(x, y, z)$  کی انتہائی قیمتیں اس صورت درکار ہوتی ہیں جہاں تفاعل کے متغیرات دو شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔ اگر یہ شرائط

$$g_2(x, y, z) = 0, \quad \text{اور} \quad g_1(x, y, z) = 0$$

ہوں اور  $g_1$ ،  $g_2$  قابل تفرق ہوں اور ساتھ ہی  $\nabla g_1$  اور  $\nabla g_2$  آپس میں متوازی نہ ہوں تب ہم  $f$  کی مشروط مقامی زیادہ سے زیادہ اور مقامی کم سے کم قیمت نقاط تلاش کرنے کی خاطر دو لیگرینج مستقل  $\lambda$  اور  $\mu$  (جس کا تلفظ "میو" ہے) متعارف کرتے ہیں۔ اس طرح  $f$  کی انتہائی قیمت نقاط تلاش کرنے کی خاطر ہم  $x$ ،  $y$ ،  $z$ ،  $\lambda$  اور  $\mu$  کی وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو بیک وقت مطمئن کرتے ہوں۔

$$(13.56) \quad \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \quad g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0$$

درج بالا (مساوات 13.56) کا ایک خوبصورت جیومیٹریائی مطلب ہے۔ سطح  $g_1 = 0$  اور سطح  $g_2 = 0$  (عموماً) ایک ہموار منحنی میں، جسے ہم  $C$  کہیں گے، ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں اور اس منحنی پر چلتے ہوئے ہم وہ نقاط تلاش کرنا چاہتے ہیں جہاں  $C$  پر  $f$  کی دیگر قیمتوں کے لحاظ سے  $f$  کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمت پائی جاتی ہوں۔ جیسا ہم مسئلہ 13.9 سے جانتے ہیں، ان نقاط پر  $\nabla f$  منحنی  $C$  کو عمودی ہو گا۔ لیکن ان نقاط پر چونکہ منحنی  $C$ ، سطح  $g_1 = 0$  اور سطح  $g_2 = 0$  میں پائی جاتی ہے لہذا  $\nabla g_1$  اور  $\nabla g_2$  بھی  $C$  کو عمودی ہوں گے۔ یوں  $\nabla f$  اس مستوی میں پایا جائے گا جسے  $\nabla g_1$  اور  $\nabla g_2$  تعین کرتے ہیں لہذا  $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$  ہو گا جہاں  $\lambda$  اور  $\mu$  کوئی مستقل ہوں گے۔ چونکہ مطلوبہ نقاط بھی ان دونوں سطحوں میں پائے جاتے ہیں لہذا ان کے محدود مساوات  $g_1(x, y, z) = 0$  اور  $g_2(x, y, z) = 0$  کو لازماً مطمئن کریں گے جو مساوات 13.56 کے باقی شرائط ہیں۔

مثال 13.58: مستوی  $x + y + z = 1$  پیلن  $x^2 + y^2 = 1$  کو ایک ترخیم میں قطع کرتا ہے۔ اس ترخیم پر وہ نقاط تلاش کریں جو مہدا سے دور تر اور نزدیک تر ہوں۔

حل: ہم (مہدا سے نقطہ  $(x, y, z)$  کے فاصلے کے مربع)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

کی وہ انتہائی قیمتیں معلوم کرتے ہیں جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتی ہوں۔

$$(13.57) \quad g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(13.58) \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

یوں مساوات 13.56 میں ڈھلوان کی مساوات

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

مساوات 13.56

$$2xi + 2yj + 2zk = \lambda(2xi + 2yj) + \mu(i + j + k)$$

$$2xi + 2yj + 2zk = (2\lambda x + \mu)i + (2\lambda y + \mu)j + \mu k$$

یعنی

$$(13.59) \quad 2x = 2\lambda x + \mu, \quad 2y = 2\lambda y + \mu, \quad 2z = \mu$$

دے گی۔ غیر سستی مساوات 13.59 ہمیں درج ذیل دیتی ہیں۔

$$(13.60) \quad \begin{aligned} 2x &= 2\lambda x + 2z & \implies & (1 - \lambda)x = z \\ 2y &= 2\lambda y + 2z & \implies & (1 - \lambda)y = z \end{aligned}$$

مساوات 13.60 بیک وقت اس صورت مطمئن ہوں گی جب یا  $\lambda = 1$  اور  $z = 0$  ہوں یا  $\lambda \neq 1$  اور  $x = y = \frac{z}{1-\lambda}$  ہوں۔

اگر  $z = 0$  ہو تب مساوات 13.57 اور مساوات 13.58 کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے ترخیم پر مطابقتی نقاط  $(1, 0, 0)$  اور  $(0, 1, 0)$  حاصل ہوتے ہیں جو شکل کو دیکھ کر معنی خیز نظر آتے ہیں۔

اگر  $x = y$  ہو تب مساوات 13.57 اور مساوات 13.58 درج ذیل دیں گے۔

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 1 &= 0 & x + x + z - 1 &= 0 \\ 2x^2 &= 1 & z &= 1 - 2x \\ x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} & z &= 1 \mp \sqrt{2} \end{aligned}$$

ترخیم پر مطابقتی نقاط

$$N_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2} \right) \quad \text{اور} \quad N_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2} \right)$$

ہوں گے۔ یہاں احتیاط کی ضرورت ہے۔ اگرچہ  $N_1$  اور  $N_2$  دونوں ترخیم پر  $f$  کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتیں دیتے ہیں، نقطہ  $N_2$  مبدا سے زیادہ دور ہے۔

□ ترخیم پر مبدا کے قریب تر نقاط  $(1, 0, 0)$  اور  $(0, 1, 0)$  ہیں۔ ترخیم پر مبدا سے دور تر نقطہ  $N_2$  ہے۔

جوابات





ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم



ضمیمہ ج

ضمیمہ تین



ضمیمہ د

ضمیمہ چار





ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چ



ضمیمہ ز

ضمیمہ سات



ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ





ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

