

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا کتابی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1424	11.7	تنگی اور کروہ محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولا کی حرکت کی نمونہ کشی
1468	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1476	12.4	انحنا، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استتار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1559		جوابات
1561	ا	ضمیمہ اول
1563	ب	ضمیمہ دوم
1565	ج	ضمیمہ تین
1567	د	ضمیمہ چار

1569	ھ ضمیمہ پانچ
1571	و ضمیمہ چھ
1573	ز ضمیمہ سات
1575	ح ضمیمہ آٹھ
1577	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

یکے مرتبہ دو دو فرقہ کے تلاش
سوال 1 تا سوال 22 میں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$

سوال 2: $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

سوال 3: $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$

سوال 4: $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

سوال 5: $f(x, y) = (xy - 1)^2$

سوال 6: $f(x, y) = (2x - 3y)^3$

سوال 7: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 8: $f(x, y) = (x^3 + y/2)^{2/3}$

سوال 9: $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

سوال 10: $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

سوال 11: $f(x, y) = \frac{x+y}{xy-1}$

سوال 12: $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13: $f(x, y) = e^{x+y+1}$

سوال 14: $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + y)$

سوال 15: $f(x, y) = \ln(x + y)$

سوال 16: $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

سوال 17: $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$

سوال 18: $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$

سوال 19: $f(x, y) = x^y$

سوال 20: $f(x, y) = \log_y x$

سوال 21: $f(x, y) = \int_x^y g(t) dt$ جہاں g متتابعہ ہے

سوال 22: $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \quad (|xy| < 1)$

سوال 23 تا سوال 34 میں f_x ، f_y اور f_z تلاش کریں۔

سوال 23: $f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

سوال 24: $f(z, y, z) = xy + yz + xz$

سوال 25: $f(z, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

سوال 26: $f(z, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

سوال 27: $f(z, y, z) = \sin^{-1}(xyz)$

سوال 28: $f(z, y, z) = \sec^{-1}(x + yz)$

سوال 29: $f(z, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

سوال 30: $f(z, y, z) = yz \ln(xy)$

سوال 31: $f(z, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$

سوال 32: $f(z, y, z) = e^{-xyz}$

سوال 33: $f(z, y, z) = \tanh(x + 2y + 3z)$

سوال 34: $f(z, y, z) = \sinh(xy - z^2)$

سوال 35 تا سوال 40 میں ہر متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا جزوی تفرق تلاش کریں۔

$$f(t, \alpha) = \cos(2\pi t - \alpha) \quad \text{سوال 35:}$$

$$g(u, v) = v^2 e^{2u/v} \quad \text{سوال 36:}$$

$$h(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta \quad \text{سوال 37:}$$

$$g(r, \theta, z) = r(1 - \cos \theta) - z \quad \text{سوال 38:}$$

$$\text{سوال 39: قلب کا کام}$$

$$W(P, H, \delta, v, g) = PV + \frac{H\delta v^2}{2g}$$

$$A(c, h, k, m, q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2} \quad \text{سوال 40:}$$

دو متغیر جزوی تفرق کا اصول

سوال 41 تا سوال 46 میں تفاعل کے تمام دو مرتبہ جزوی تفرقات تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x + y + xy \quad \text{سوال 41:}$$

$$f(x, y) = \sin xy \quad \text{سوال 42:}$$

$$g(x, y) = x^2 y + \cos y + y \sin x \quad \text{سوال 43:}$$

$$h(x, y) = x e^y + y + 1 \quad \text{سوال 44:}$$

$$r(x, y) = \ln(x, y) \quad \text{سوال 45:}$$

$$s(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{سوال 46:}$$

مدغم جزوی تفرقات

سوال 47 تا سوال 50 میں $w_{xy} = w_{yx}$ کی تصدیق کریں۔

$$w = \ln(2x + 3y) \quad \text{سوال 47:}$$

$$w = e^x + x \ln y + y \ln x \quad \text{سوال 48:}$$

$$w = xy^2 + x^2 y^3 + x^3 y^4 \quad \text{سوال 49:}$$

$$w = x \sin y + y \sin x + xy \quad \text{سوال 50:}$$

سوال 51: بغیر قلم اٹھائے بتائیں کہ درج ذیل میں x کے لحاظ سے پہلے اور y کے لحاظ سے بعد میں یا اس کے الٹ حل کرتے ہوئے f_{xy} زیادہ جلدی حاصل ہو گا۔

$$f(x, y) = x \sin y + e^y \quad \text{ا.}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad \text{ب.}$$

$$f(x, y) = y + \frac{x}{y} \quad \text{ج.}$$

$$f(x, y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1) \quad \text{د.}$$

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x \quad \text{ه.}$$

$$f(x, y) = x \ln xy \quad \text{و.}$$

سوال 52: درج ذیل میں تمام کا پانچ رقبی جزوی تفرق $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$ صفر کے برابر ہے۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر آپ کس متغیر کے لحاظ سے پہلے جزوی تفرق لیں گے؟ بغیر کچھ لکھے جواب دینے کی کوشش کریں۔

$$f(x, y) = y^2 x^4 e^x + 2 \quad \text{ا.}$$

$$f(x, y) = y^2 + y(\sin x - x^4) \quad \text{ب.}$$

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x \quad \text{ج.}$$

$$f(x, y) = x e^{y^2/2} \quad \text{د.}$$

جزوی تفرق کے تعریف کا استعمال

سوال 53 اور سوال 54 میں جزوی تفرق کی تعریف بذریعہ حد استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ پر تقابل کا جزوی تفرق حاصل کریں۔

$$f(x, y) = 1 - x + y - 3x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (1, 2) \quad \text{سوال 53}$$

$$f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (-2, 1) \quad \text{سوال 54}$$

سوال 55: فرض کریں $w = f(x, y, z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تقابل ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial z}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(1, 2, 3)$ پر $f(x, y, z) = x^2yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

سوال 56: فرض کریں $w = f(x, y, z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تقابل ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(-1, 0, 3)$ پر $f(x, y, z) = -2xy^2 + yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

نئی جزوی تفرقات

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

