احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. یک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **بائیں ہاتھ حد**[7] حاصل ہو گا۔اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **دائیں ہاتھ حد**[8] حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

یک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔اسی لئے عام حد کو بعض اوقات **دو طرفہ حد**[9] بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر یک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

تعریف: **دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف**
فرض کریں کہ وقفہ (a, b)، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **دائیں ہاتھ حد** L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

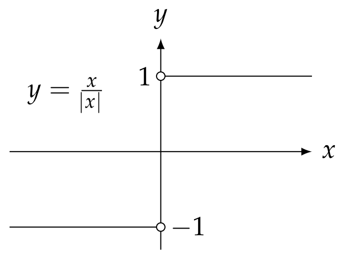
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

فرض کریں کہ وقفہ (c, a)، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **بائیں ہاتھ حد** M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھاتے ہیں۔

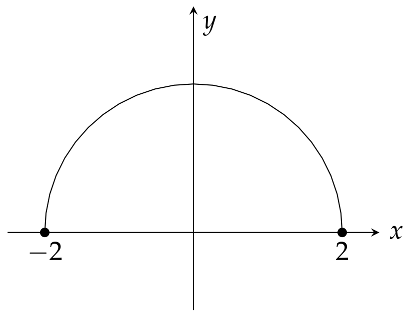
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

---

left-handed limit[7]
right-handed limit[8]
two-sided limit[9]



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔



شکل 2.43: تفاعل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔

شکل 2.42 میں تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -1$$

$x \to a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔اسی طرح $x \to a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا دائرہ کار $[-2, 2]$ ہے۔تفاعل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

نقطہ $x = -2$ پر تفاعل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔اسی طرح $x = 2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x = -2$ اور $x = 2$ پر تفاعل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ □

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔دو تفاعل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تفاعل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: **یک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد**
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$ پر: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$ پر: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔(دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$ پر: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(2) = 2$ ہے۔

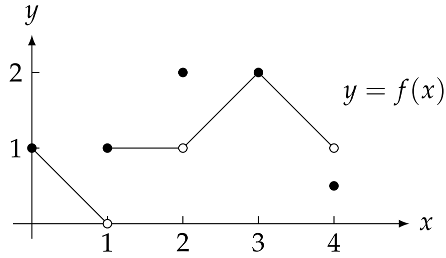
$x = 3$ پر: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

$x = 4$ پر: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔(نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

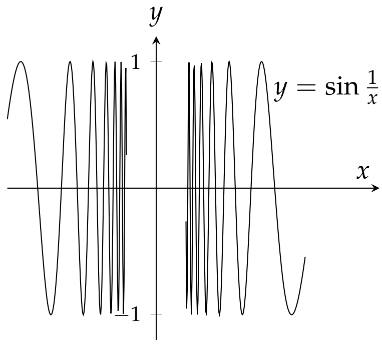
اس کے علاوہ $[0,4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ □

اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا یک طرفہ حد موجود تھا۔درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نا ہی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin\frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔
حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ایسا کوئی یکتا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔یوں $x = 0$ پر $\sin\frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نا کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔
□



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26

لامتناہی حد

آئیں تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔جیسے جیسے $x\to 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔یوں $x\to 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x\to 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

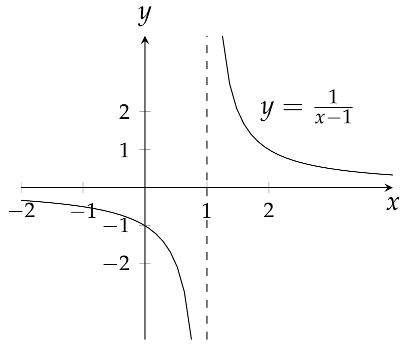
یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x\to0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x\to0^-$ کرنے سے $f(x)=\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

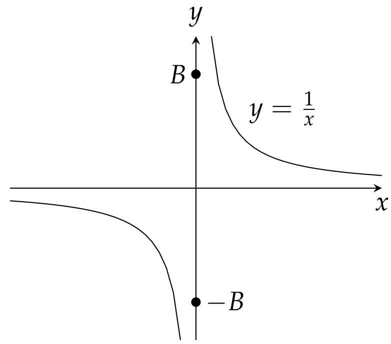
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x\to0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: یک طرفہ حد
$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27



شکل 2.46: تفاعل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔

حل: **ترسیمی حل:** تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x - 1$ اور اس کے بالعکس متناسب پر غور کریں۔ $x \to 1^+$ کرنے سے $(x-1) \to 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \to \infty$ ملتے ہیں۔ $x \to 1^-$ کرنے سے $(x-1) \to 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ ملتے ہیں۔ □

مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد

(ا) $x = 0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x = -3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔

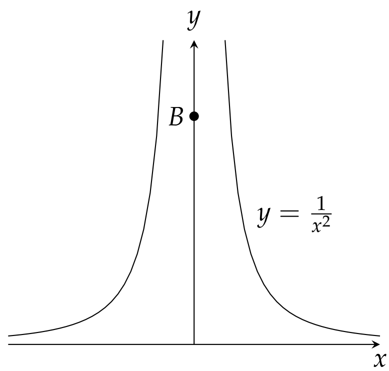
حل: (ا) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

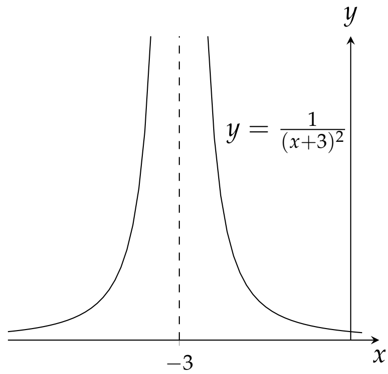
(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.48: تفاعل $f(x)=\frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.49: تفاعل $g(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x\to 0$ کرنے سے تفاعل $y=\frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x\to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}\to\infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x\to 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x}\to-\infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔اس کے برعکس تفاعل $y=\frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2}\to\infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ ہے۔

مثال 2.29: ناطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=0 \tag{ا}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4} \tag{ب}$$

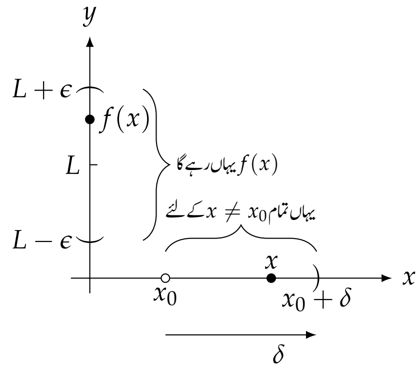
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=-\infty \tag{ج}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=\infty \tag{د}$$

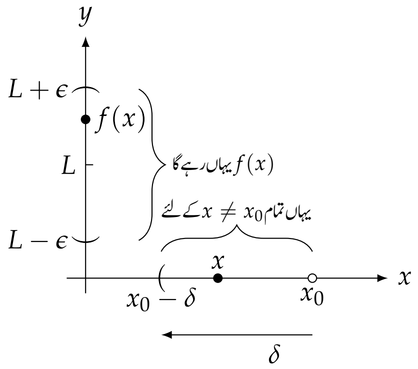
$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}\ \text{موجود نہیں} \tag{و}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty \tag{ہ}$$

جزو (ا) اور (ب) میں $x=2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہٰذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔جزو (ہ) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جا سکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.1}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

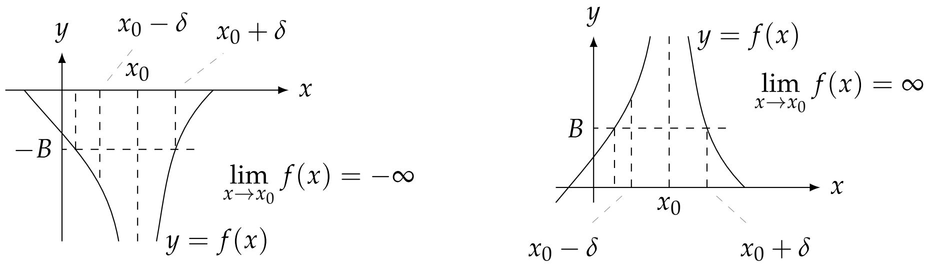
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

بائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.2}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$



شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$0 < x - x_0 < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.3}$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\delta < x - x_0 < 0 \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.4}$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$0 < \left|x - x_0\right| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.5}$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبدا سے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: **لامتناہی حد**
(ا) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $0 < \delta$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

ج. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

د. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ہ. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے۔

و. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ز. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

ح. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

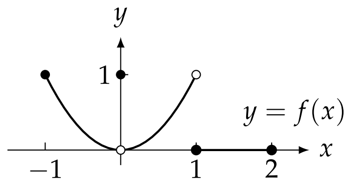
ط. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

ي. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

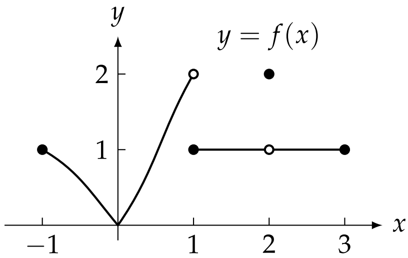
يا. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ غیر موجود ہے۔

يب. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

سوال 2: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تفاعل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔



شکل 2.53: تفاعل برائے سوال 1



شکل 2.54: تفاعل برائے سوال 2

ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim_{x\to 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

د. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

ہ. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

و. $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ز. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

ح. کھلے وقفہ $(-1,1)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

ط. کھلے وقفہ $(1,3)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

ي. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$

یا. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ غیر موجود ہے۔

سوال 3: درج ذیل تفاعل کو شکل 3 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

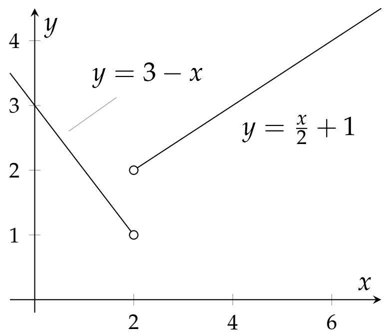
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔

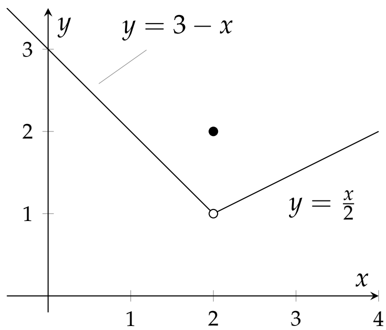
ب. کیا $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود ہے۔اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تا نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.55: تفاعل برائے سوال 3



شکل 2.56: تفاعل برائے سوال 4

سوال 4: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

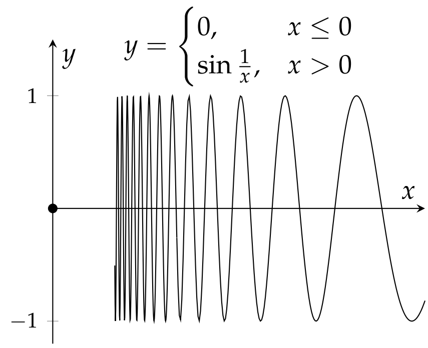
د. کیا $\lim_{x \to -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

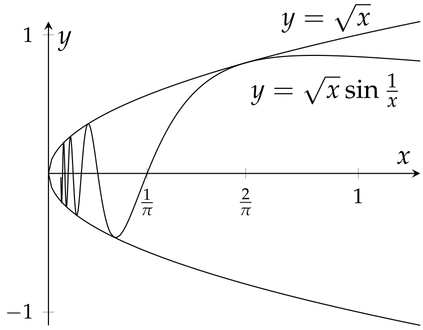
$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

ا. کیا $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 5



شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 6

ج. کیا $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 8:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9 اور سوال 10 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

سوال 9: $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 0\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

سوال 10: $$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0 \text{ یا } 0<x\le 1\\ 1, & x=0\\ 0, & x<-1 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 11 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

سوال 11: $$\lim_{x\to -0.5^-}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$$

سوال 12: $$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

سوال 13: $$\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$$

سوال 14: $$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$$

سوال 15: $$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$$

سوال 16: $\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

سوال 17: (ا) $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$ (ب) $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

سوال 18: (ا) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 19: (ا) $\lim_{\theta\to 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta\to 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$

سوال 20: (ا) $\lim_{t\to 4^+} (t-|t|)$ (ب) $\lim_{t\to 4^-} (t-|t|)$

لامتناہی حد: سوال 21 تا سوال 32 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}$

سوال 22: $\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 23: $\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$

سوال 24: $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 25: $\lim_{x\to -8^+} \frac{2x}{x+8}$

سوال 26: $\lim_{x\to -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 27: $\lim_{x\to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

سوال 28: $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 29: (ا) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

سوال 30: (ا) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

سوال 31: $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$

سوال 32: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 33 تا سوال 36 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x$

سوال 34: $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 35: $\lim_{\theta\to 0^-} (1+\csc\theta)$

سوال 36: $\lim_{\theta\to 0}(2-\cot\theta)$

مزید حساب: سوال 37 تا سوال 42 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 37: $\lim \frac{1}{x^2-4}$

ا. $x\to 2^+$ ب. $x\to 2^-$ ج. $x\to -2^+$ د. $x\to -2^-$

سوال 38: $\lim \frac{x}{x^2-1}$

ا. $x\to 1^+$ ب. $x\to 1^-$ ج. $x\to -1^+$ د. $x\to -1^-$

سوال 39: $\lim(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x})$

ا. $x\to 0^+$ ب. $x\to 0^-$ ج. $x\to \sqrt[3]{2}$ د. $x\to -1$

سوال 40: $\lim \frac{x^2-1}{2x+4}$

ا. $x \to -2^+$ ب. $x \to -2^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 0^-$

سوال 41: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 2^+$ ج. $x \to 2^-$ د. $x \to 2$

سوال 42: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

ا. $x \to 2^+$ ب. $x \to -2^+$ ج. $x \to 0^-$ د. $x \to 1^+$

سوال 43 تا سوال 46 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

سوال 43: $\lim(2 - \frac{3}{t^{1/3}})$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

سوال 44: $\lim(\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

سوال 45: $\lim(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

سوال 46: $\lim(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x\to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x\to a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x\to c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

یک طرفہ حد کی با ضابطہ تعریف

سوال 51: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5+\delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟

سوال 52: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4-\delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 53 اور سوال 54 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 53: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$

سوال 54: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

سوال 55: (ا) $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 56: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔ (ا) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے فقروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

سوال 57: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

سوال 58: $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

سوال 59: $\lim_{x\to 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty$

سوال 60: $\lim_{x\to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

یک طرفہ لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لا متناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to x_0^+} = \infty$$

سوال 61: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

ا. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

ب. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

ج. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

یک طرفہ لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 62 تا سوال 67 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 62: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

سوال 63: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

سوال 64: $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

سوال 65: $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

سوال 66: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$

سوال 67: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے ناکہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اتنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاہد ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مالیکیول میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی در حقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے ناکہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

عملاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی **اندرونی نقطے**[10] (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، **بائیں سر نقطے**[11] اور **دائیں سر نقطے**[12]۔

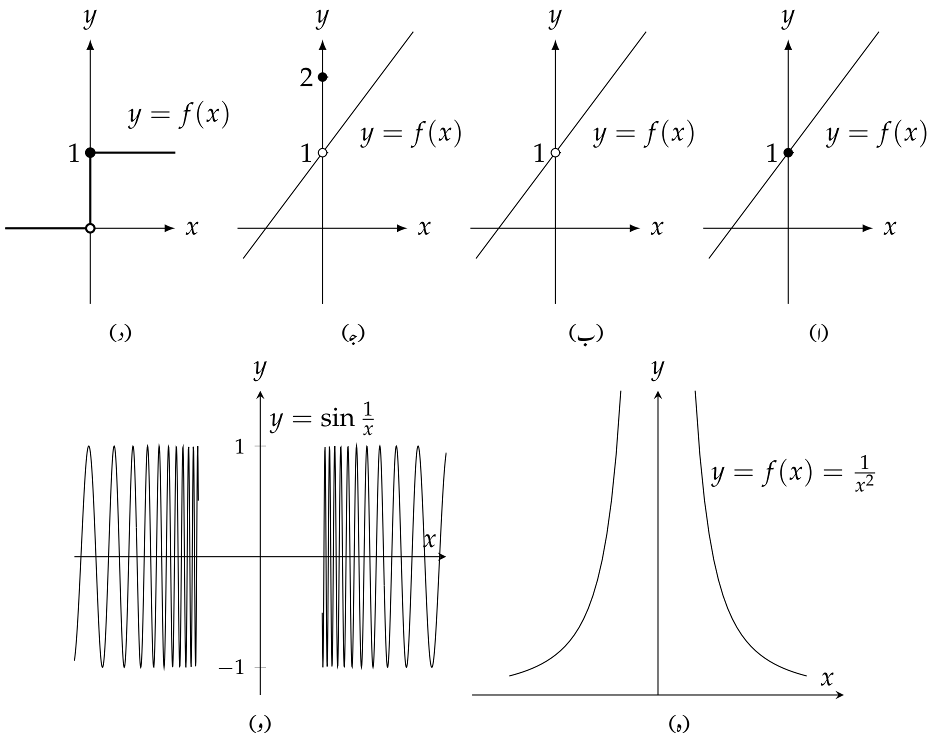
تعریف: **اندرونی نقطہ پر استمرار**
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ $x = c$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر f استمراری ہو گا۔

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

شکل 2.59 میں $x = 0$ پر (ا) استمراری ہے۔اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کی بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔انہیں **قابل ہٹاو**[13] عدم استمرار کہتے ہیں۔ان دونوں میں $x \to 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے۔

---

[10] interior points
[11] left endpoints
[12] right endpoints
[13] removable



شکل 2.59: $x = 0$ پر تفاعل (ا) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (و) غیر استمراری ہیں۔

شکل 2.59 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تشویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں لہٰذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جا سکتی ہے۔ (د) میں **چھلانگ عدم استمرار**[14] پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (ہ) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا **لا متناہی عدم استمرار**[15] پایا جاتا ہے۔ ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لئے غیر استمراری ہے کہ $x \to 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں **ارتعاشی عدم استمرار**[16] پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔ کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔ عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

تعریف: **بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار**
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔ اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

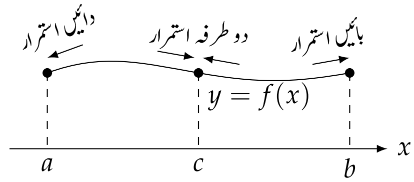
ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔

عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل **دائیں استمراری**[17] ہو گا۔ اسی طرح تفاعل f اس صورت **بائیں استمراری**[18] ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔ یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.60)۔

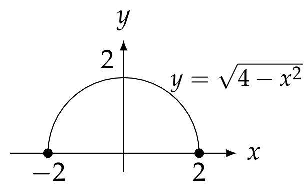
مثال 2.30: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل 2.61)۔

---

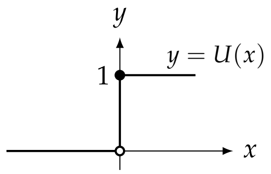
[14] jump discontinuity
[15] infinite discontinuity
[16] oscillating discontinuity
[17] right-continuous
[18] left-continuous



شکل 2.60: نقطہ a ، b اور c پر استمرار



شکل 2.61: پورے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری



شکل 2.62: یہ تفاعل مبدا پر دائیں استمراری ہے

□

مثال 2.31: شکل 2.62 میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ نا بائیں استمراری ہے اور نا ہی استمراری ہے۔ □

ہم نقطے پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

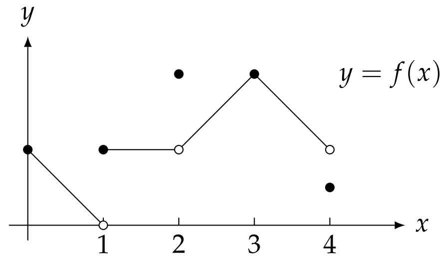
پرکھ استمرار
نقطہ $x = c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

1. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے ($x \to c$ پر f کا حد پایا جاتا ہے)
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

یک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.63 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔نقطہ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔



شکل 2.63: تفاعل f بند وقفہ $[0,4]$ پر معین ہے۔یہ تفاعل $x = 1,2,4$ پر غیر استمراری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استمراری ہے۔

ا. $x = 0$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(0)$ موجود ہے $(f(0) = 1)$
2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)
3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں)

ب. چونکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے لہٰذا $x = 1$ پر f غیر استمراری ہے۔پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استمراری ہے چونکہ

1. $f(1)$ موجود ہے ($f(1) = 1$)
2. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ (نقطہ $x = 1$ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)
3. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ (دائیں ہاتھ حد اور تفاعل کی قیمتیں برابر ہیں۔)

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ کی بنا $x = 2$ پر f غیر استمراری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

د. $x = 3$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(3)$ موجود ہے ($f(3) = 2$)
2. $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ (نقطہ $x = 2$ پر حد موجود ہے۔)
3. $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)

ہ. چونکہ $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ ہے لہٰذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استمراری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار
اگر نقطہ $x=c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x=c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

1. $f+g$ اور $f-g$
2. fg
3. kf، جہاں k کوئی عدد ہے
4. $\frac{f}{g}$ (بشرطیکہ $g(c)\neq 0$ ہو)
5. $(f(x))^{m/n}$ (بشرطیکہ $(f(x))^{m/n}$ اس وقفے پر معین ہو جس پر c پایا جاتا ہے، اور m اور n عدد صحیح ہیں۔)

درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

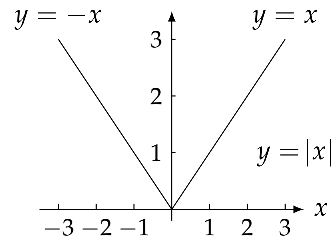
مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار
حقیقی خط کے ہر نقطہ پر ہر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال 2.33: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x)=x^4+20$ اور $g(x)=5x(x-2)$ استمراری ہیں۔تفاعل

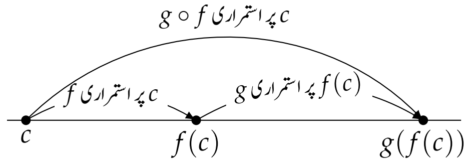
$$r(x)=\frac{x^2+20}{5x(x-2)}$$

ماسوائے $x=0$ اور $x=2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔ □

مثال 2.34: $f(x)=|x|$ کی استمرار
x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x)=|x|$ استمراری ہے (شکل 2.64)۔ $x>0$ کے لئے $f(x)=x$ ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔اسی



شکل 2.64: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔



شکل 2.65: مرکب تفاعل کی استمرار۔

طرح $x < 0$ کے لئے $f(x) = -x$ ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔آخر میں مبدا پر $\lim_{x \to 0}|x| = 0 = |0|$ ہے۔
□

مثال 2.35: **تکونیاتی تفاعل کی استمرار**
اگلے باب میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استمراری ہے لہٰذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

□

مسئلہ 2.8: **مرکبات کی استمرار**
اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استمراری ہوں تب c پر $g \circ f$ استمراری ہو گا (شکل 2.65)۔

مرکب کی استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

(ا) $y = \sqrt{x}$ — مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت)

(ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ — مسئلہ 2.7 اور مسئلہ 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب)

(ج) $y = \dfrac{x \cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$ — مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی)

(د) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 2}\right|$ — مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حتمی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب)

□

نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔اگر $f(c)$ غیر معین ہو لیکن $\lim_{x\to c} f(x)=L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x=c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل F نقطہ $x=c$ پر بھی استمراری ہو گا۔اس کو f کی نقطہ $x=c$ تک **استمراری توسیع**[19] کہتے ہیں۔ناطق تفاعل f کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا $x=2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$$

حل: اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x\neq 2$ پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل $x\neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x=2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x)=\frac{x+3}{x+2}$$

یوں f کی نقطہ $x=2$ تک توسیع تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{5}{4}$$

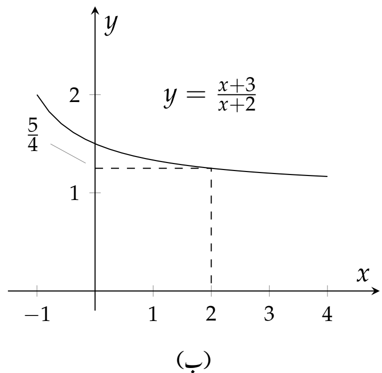
تفاعل f کی ترسیم شکل 2.66 میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی یہی ترسیم ہے مگر اس میں $(2,\frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

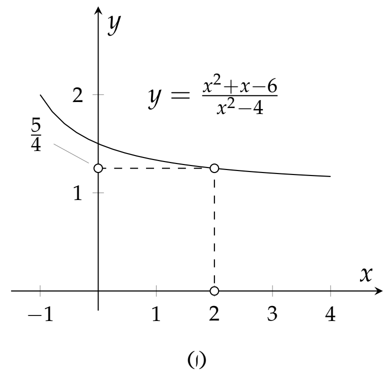
$$F=\begin{cases} f, & x\neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x=2 \end{cases}$$

□

---

[19] continuous extension





شکل 2.66: تفاعل $f(x)$ اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تفاعل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ایسا تفاعل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تفاعل کی قیمت برابر ہوں تب f **وقفہ پر استمراری**[20] کہلائے گا۔جو تفاعل I پر استمراری ہو یہ تفاعل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

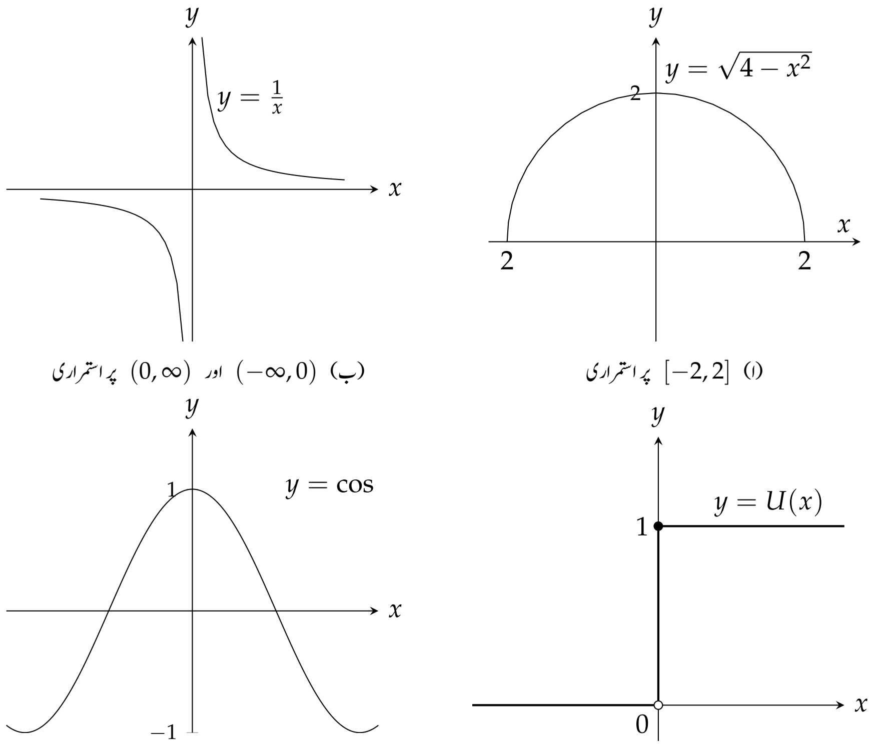
مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تفاعل
شکل 2.67 میں وقفوں پر استمراری تفاعل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔ □

وقفوں پر استمراری تفاعل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ان میں ایک **متوسط قیمت خاصیت**[21] ہے۔ اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تفاعل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تفاعل **متوسط قیمت خاصیت** رکھتا ہے۔

مسئلہ 2.9: **مسئلہ متوسط قیمت**
فرض کریں کہ تفاعل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ تب اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا کہ $f(c) = y_0$ ہو (شکل 2.68)۔

---

[20] continuous on interval
[21] intermediate value property



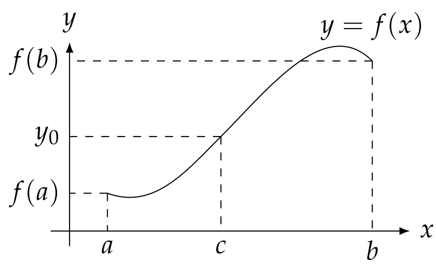
(ا) $[-2,2]$ پر استمراری

(ب) $(-\infty,0)$ اور $(0,\infty)$ پر استمراری

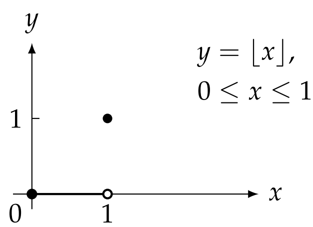
(ج) $(-\infty,0)$ اور $[0,\infty)$ پر استمراری

(د) $(-\infty,\infty)$ پر استمراری

شکل 2.67: وقفوں پر استمراری تفاعل (مثال 2.38)



شکل 2.68: وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ ہر قیمت رکھتا ہے



شکل 2.69: تفاعل $y=\lfloor x\rfloor, 0\le x\le 1$ کوئی بھی قیمت $f(0)=0$ اور $f(1)=1$ کے بیچ قبول نہیں کرتا ہے۔

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کی استمرار ضروری ہے۔اگر I میں صرف ایک نقطے پر بھی f غیر استمراری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔اس کی ایک مثال شکل 2.69 میں دی گئی ہے۔

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ I پر استمراری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔اس میں عددی صحیح زینہ تفاعل $\lfloor x \rfloor$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نا ہی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

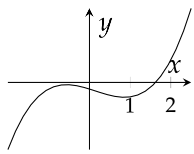
تلاش جذر

مساوات $f(x) = 0$ کے حل کو $f(x)$ کا **صفر**[22] یا **جذر**[23] کہتے ہیں۔مسئلہ 2.9 کے تحت استمراری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت $(\pm)$ تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

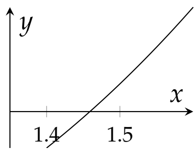
اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں f استمراری ہے)۔ مساوات کی ترسیم x محور کو f کی جذر پر قطع کرتی ہے۔ہم $y = f(x)$ کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ یہ کہاں x محور کو قطع کرتی ہے۔ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت دیکھتے ہیں۔اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک کا جذر تلاش کیا جا سکتا ہے۔شکل 2.70 میں، قدم با قدم، اس عمل سے $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

---

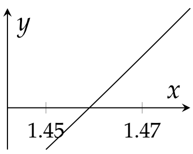
[22] zero
[23] root



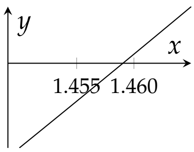
(ا) جذر (صفر) 1 اور 2 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



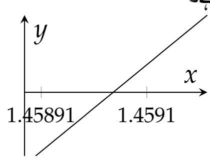
(ب) جذر (صفر) 1.4 اور 1.5 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



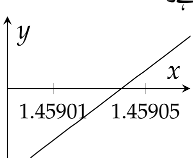
(ج) جذر (صفر) 1.45 اور 1.47 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(د) جذر (صفر) 1.455 اور 1.460 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(ہ) جذر (صفر) 1.45891 اور 1.4591 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(و) جذر (صفر) 1.45901 اور 1.45905 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

شکل 2.70: ترسیم کے ذریعہ $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کے جذر کا قدم با قدم حصول۔

ضمیمه ا

ضمیمه دوم