احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 12

سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت

سرسری جائزہ جب کوئی جسم فضا میں حرکت کرتا ہو، مساوات $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ جو اس جسم کے محدد کو بطور وقت کا تفاعل دیتی ہیں، اس جسم کی راہ اور حرکت کی مقدار معلوم مساوات ہوں گی۔ سمتیہ علامتیت کی مدد سے ہم انہیں ایک مساوات $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں جو اس جسم کا مقام بطور وقت کا سمتی تفاعل دیتی ہے۔

اس باب میں ہم احصاء استعمال کرتے ہوئے حرکت پذیر اجسام کی راہ، سمتی رفتار اور اسراع پر غور کریں گے۔ ہم گولا، سیارہ اور مصنوعی سیارہ کی راہ اور حرکت کے عمومی سوالات کے جوابات جان سکے گے۔ آخر حصہ میں ہم نیوٹن کے قوانین اور تجاذب کی مدد سے سیاروں کی مدار کے قوانین کیپلر دریافت کریں گے۔

12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

فضا میں متحرک ذرہ کی حرکت جاننے کی خاطر ہم مبدا سے اس ذرہ تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ لے کر $\boldsymbol{r}$ میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔ اگر اس ذرہ کے محدد مقام وقت کے ساتھ دو بار قابل تفرق ہوں، تب $\boldsymbol{r}$ بھی ایسا ہو گا، اور ہم کسی بھی لمحہ پر وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کے تفرق لے کر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور اسراع جان سکتے ہیں۔ اگر ہمیں اس ذرہ کی سمتیہ سمتی رفتار یا سمتیہ اسراع بطور وقت کے استمراری تفاعل معلوم ہو اور ہمیں ذرے کی ابتدائی مقام اور سمتیہ رفتار کے بارے میں معقول معلومات ہو، تب ہم تکمل کی مدد سے، وقت کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ جان سکتے ہیں۔

تعریف

جب وقفہ I کے دوران ایک ذرہ فضا میں حرکت کرتا ہو، ہم اس ذرہ کے محدد جو وقت کے تفاعل ہو گے کی تعریف درج ذیل کرتے ہیں۔

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \tag{12.1}$$

نقاط $(x,y,z)=(f(t),g(t),h(t)),\ t\in I$ فضا میں وہ **منحنی** دیتے ہیں جنہیں ہم اس ذرے کی راہ[1] کہتے ہیں۔ مساوات 12.1 اس منحنی کی **مقدار معلوم روپ** ہے۔ مبدا سے ذرے کے **مقام** $N(f(t),g(t),h(t))$ تک لمحہ t پر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t)=\vec{ON}=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$$

اس ذرے کا **تعین گر سمتیہ**[2] ہے۔ تفاعل f ، g اور h تعین گر سمتیہ کے **اجزاء** ہیں۔ ذرے کی راہ سے مراد وقفہ t کے دوران $\boldsymbol{r}$ کی پیدا کردہ منحنی ہے۔

مساوات 12.1 سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی تعریف وقفہ I پر حقیقی متغیر t کی صورت میں دیتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر دائرہ کار، سلسلہ D ، پر **سمتی تفاعل**[3] یا **سمتی قیمت تفاعل**[4] سے مراد وہ قاعدہ ہو گا جو D کے ہر رکن کو فضا میں ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ موجودہ استعمال میں دائرہ کار حقیقی اعداد کے وقفوں پر مشتمل ہوں گے۔ بعد کے ایک باب میں دائرہ کار، مستوی یا فضا میں خطوں پر مشتمل ہوں گے جہاں ہم سمتی تفاعل کو سمتی میدان کہیں گے۔

ہم حقیقی قیمت تفاعل کو **غیر سمتی تفاعل**[5] کہتے ہیں تا کہ ان میں اور سمتی تفاعل میں فرق کرنا ممکن ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے اجزاء t کے غیر سمتی تفاعل ہیں۔ سمتی تفاعل کی تعریف اس کے ارکان تفاعل کی صورت میں دیتے وقت ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل کا دائرہ کار ہی ارکان کے دائرہ کار ہیں۔

مثال 12.1: پیچ دار تفاعل
تمام حقیقی متغیر t کے لئے سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$$

معین ہے اور $\boldsymbol{r}$ دائری نلکی $x^2+y^2=1$ کے گرد لپٹ کر چلتا ہے۔ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اجزاء جو $\boldsymbol{r}$ کے سر کے x اور y محدد ہیں دائری نلکی کی مساوات

$$x^2+y^2=(\cos t)^2+(\sin t)^2=1$$

کو مطمئن کرتے ہیں لٰہذا $\boldsymbol{r}$ اس نلکی پر پایا جاتا ہے۔ متغیر t بڑھنے $\boldsymbol{k}$ جزو بڑھتا ہے جس کی بنا منحنی اوپر بلند ہو گی۔ نلکی کے گرد ایک دائرہ $t=2\pi$ پر مکمل ہو گا۔ درج ذیل مساوات پیچ دار تفاعل کی مقدار معلوم مساوات ہے، جہاں وقفہ $-\infty\le t\le\infty$ ہے۔

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t$$

شکل میں دیگر پیچ دار تفاعل دیے گئے ہیں۔ □

---

[1] path
[2] position vector
[3] vector function
[4] vector-valued function
[5] scalar functions

حد اور استمرار

ہم سمتی قیمت تفاعل کے حد کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کے حد کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{r} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل اور $\boldsymbol{L}$ ایک سمتیہ ہے۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایک ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام t کے لئے

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \implies \quad \big|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{L}\big| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جب t کی قیمت t_0 کے قریب تر ہو تب $\boldsymbol{r}$ کا **حد**[6] $\boldsymbol{L}$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$$

□

اگر $\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{i} + L_2\boldsymbol{j} + L_3\boldsymbol{k}$ ہو تب $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$ ٹھیک اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t\to t_0} h(t) = L_3$$

درج ذیل مساوات سمتی تفاعل کا حد تلاش کرنے کی عملی ترکیب دیتی ہے۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \Big(\lim_{t\to t_0} f(t)\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to t_0} g(t)\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to t_0} h(t)\Big)\boldsymbol{k} \tag{12.2}$$

مثال 12.2: اگر $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} &= \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\Big)\boldsymbol{k}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

ہم سمتی تفاعل کی استمرار کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کی استمرار کی تعریف کی طرح کرتے ہیں۔

---

[6] limit

تعریف: اگر $\boldsymbol{r}(t)$ کے دائرہ کار میں نقطہ t_0 پر $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$ ہو تب $\boldsymbol{r}(t)$ اس **نقطہ پر استمراری**[7] ہو گا۔ اگر اپنے پورے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب یہ تفاعل **استمراری**[8] ہو گا۔

□

چونکہ حد کو اجزاء کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی تفاعل کو استمرار کے لئے پرکھنے کی خاطر ہم اس کے اجزاء پر نظر ڈالتے ہیں۔

ایک نقطہ پر ارکان کے استمرار کا پرکھ
نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت استمراری ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h استمراری ہوں۔

مثال 12.3: (ا) درج ذیل تفاعل اس لئے استمراری ہے کہ $\cos t$ ، $\sin t$ اور t استمراری ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

(ب) درج ذیل تفاعل ہر عدد صحیح پر عدم استمراری ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \lfloor t \rfloor \boldsymbol{k}$$

□

تفرقات اور حرکت

فرض کریں فضا میں ایک متحرک ذرہ جو ایک منحنی پر چل رہا ہو کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f ، g اور h متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ایسی صورت میں لمحات t اور $t+\Delta t$ پر اس ذرے کے مقام میں فرق

$$\Delta \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

ہو گا جس کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)\\
&= [f(t+\Delta t)\boldsymbol{i} + g(t+\Delta t)\boldsymbol{j} + h(t+\Delta t)\boldsymbol{k}] - [f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}]\\
&= [f(t+\Delta t) - f(t)]\boldsymbol{i} + [g(t+\Delta t) - g(t)]\boldsymbol{j} + [h(t+\Delta t) - h(t)]\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

---

[7] continuous at a point
[8] continuous

اب اگر Δt صفر کے قریب ہونے کی کوشش کرے تب تین اقدام بیکوقت ہوتے نظر آئیں گے۔اول، منحنی پر چلتے ہوئے Q نقطہ N تک پہنچے گا۔ دوسرا، سیکنٹ خط NQ نقطہ N پر منحنی کے تحدیدی مماسی مقام پر پہنچے گا۔ تیسرا، حاصل تقسیم $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ درج ذیل حد تک پہنچے گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} &= \Big[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{i} + \Big[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{j} \\
&\quad + \Big[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{k} \\
&= \Big[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{i} + \Big[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{j} + \Big[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

یوں ماضی کے تجربات ہمیں درج ذیل تعریف تک پہنچاتے ہیں۔

تعریف: نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h قابل تفرق ہوں۔ اس طرح اگر $\boldsymbol{r}$ اپنے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو گا۔ کسی بھی نقطہ t پر جہاں $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو، اس کا تفرق درج ذیل سمتیہ ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

اگر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری اور کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہ ہو، یعنی جب f ، g اور h کے استمراری پہلے تفرق پائے جاتے ہوں اور جو بیکوقت 0 نہ ہوں، تب جس منحنی پر $\boldsymbol{r}$ چلتا ہو وہ **ہموار**[9] ہو گی۔

□

سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ جب $\boldsymbol{0}$ سے مختلف ہو، یہ منحنی کا مماسی سمتیہ ہو گا۔ نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ پر ایک منحنی کے ***مماسی خط*** سے مراد وہ خط ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہو اور جو t_0 پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے متوازی ہو۔ ہم ہموار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \neq \boldsymbol{0}$ کی شرط رکھ کر اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ ہر نقطہ پر منحنی کا مماس استمراری طور پر مڑے گا۔ ایک ہموار منحنی پر سخت موڑ نہیں پایا جاتا ہے اور نا ہی اس پر کوئی کنگرہ پایا جاتا ہے۔

ایک منحنی جو متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو (بغیر خالی فاصلہ چھوڑے) ملا کر حاصل کی گئی ہو ***ٹکڑوں میں ہموار***[10] کہلاتی ہے۔

شکل پر ایک بار دوبارہ نظر ڈالیں۔ ہم نے اس شکل کو مثبت Δt کے لئے بنایا لہٰذا $\Delta \boldsymbol{r}$ آگے چلنے کی طرف اشارہ کرے گا۔ سمتیہ $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ (جسے دکھایا نہیں گیا ہے اور) جس کا وہی رخ ہے جو $\Delta \boldsymbol{r}$ کا ہے بھی آگے کی رخ اشارہ کرے گا۔ اگر Δt منفی ہوتا تب $\Delta \boldsymbol{r}$ چلنے کے

[9] smooth
[10] piecewise smooth

مخالف رخ اشارہ کرے گا البتہ حاصل تقسیم $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جو $\Delta \boldsymbol{r}$ کا منفی غیر سمتی مضرب ہے اب بھی چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ ہم نے دیکھا کہ $\Delta \boldsymbol{r}$ جس رخ بھی اشارہ کرتا ہو، $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرتا ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جب $\boldsymbol{0}$ نہ ہو، بھی ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ اس طرح ایک ذرہ کی سمتی رفتار کو ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ چلنے کی رخ دیتا ہے اور اس کی شرح، وقت کے لحاظ سے مقام کی تبدیلی دیتا ہے۔ ایک ہموار منحنی کے لئے سمتی رفتار کبھی بھی صفر نہیں ہو گا؛ یہ ذرہ نا کبھی رکتا ہے اور نا ہی یہ واپسی اختیار کرتا ہے۔

تعریف: اگر فضا میں ہموار منحنی پر چلتے ہوئے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

اس ذرے کی **سمتی رفتار**[11] ہو گی جو اس منحنی کو مماسی ہو گی۔ کسی بھی لمحہ t پر، $\boldsymbol{v}$ کا رخ **چلنے کا رخ** ہو گا، $\boldsymbol{v}$ کی مقدار اس ذرے کی رفتار ہو گی، اور تفرق $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ ، جب پایا جاتا ہو، اس ذرے کی **اسراع**[12] ہو گی۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

ا. مقام کا تفرق، سمتی رفتار ہو گا: $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

ب. سمتی رفتار کی مقدار، ذرے کی رفتار ہو گی: $|\boldsymbol{v}| = \text{رفتار}$

ج. سمتی رفتار کا تفرق، اسراع ہو گا: $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

د. لمحہ t پر چلنے کا رخ سمتیہ $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ دیگا۔

□

ہم متحرک ذرے کی سمتی رفتار کو اس کی رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{سمتی رفتار} = |\boldsymbol{v}| \left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right) = (\text{رفتار})(\text{رخ})$$

مثال 12.4: لمحہ t پر ایک متحرک جسم کا مقام سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$$

---

[11] velocity
[12] acceleration

دیتا ہے۔ اس جسم کی رفتار اور رخ لمحہ $t=2$ پر معلوم کریں۔ کس لمحہ پر (اگر کبھی ایسا ہو بھی) اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع آپس میں عمودی ہوں گے؟

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(3\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

لمحہ $t=2$ پر اس جسم کی رفتار اور رخ درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{v}(2)\right| &= \sqrt{(-3\sin 2)^2 + (-3\cos 2)^2 + (4)^2} = 5 && \text{رفتار}\\
\frac{\boldsymbol{v}(2)}{\left|\boldsymbol{v}(2)\right|} &= -\Big(\frac{3}{5}\sin 2\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{3}{5}\cos 2\Big)\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k} && \text{رخ}
\end{aligned}$$

جس لمحہ پر $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں اس لمحہ پر $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=0$ ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 4t = 0$$

سے $t=0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لمحہ پر سمتی رفتار اور اسراع ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔ □

قواعد تفرقات

چونکہ سمتی تفاعل کے تفرقات جزو در جزو حاصل کرنا ممکن ہے لہٰذا سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی نوعیت غیر سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی طرح ہو گی۔

سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد

قاعدہ مستقل تفاعل: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ جہاں $\boldsymbol{C}$ ایک مستقل سمتیہ ہے۔

اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں اور f متغیر t کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

قاعدہ غیر سمتی مضرب: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\boldsymbol{u}) = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ جہاں c مستقل عدد ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

قاعدہ مجموعہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ فرق: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب نقطہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب صلیبی: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ زنجیر: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ جہاں $\boldsymbol{r}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور t متغیر s کا قابل تفرق تفرق ہے۔

ہم قاعدہ ضرب اور زنجیری قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ باقی ثبوت آپ کو مشق میں پیش کرنے ہوں گے۔

ثبوت: قاعدہ ضرب نقطہ
درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_1(t)\boldsymbol{i} + u_2(t)\boldsymbol{j} + u_3(t)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{v} &= v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)\\ &= \underbrace{u_1'v_1+u_2'v_2+u_3'v_3}_{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}} + \underbrace{u_1v_1'+u_2v_2'+u_3v_3'}_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}\end{aligned}$$

□

ثبوت: قاعدہ ضرب صلیبی
ہم غیر سمتی تفاعل کے قاعدہ ضرب کی طرح اس کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کی رو سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)}{h}$$

ہو گا۔ ہم شمار کنندہ کے ساتھ $\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)$ جمع اور منفی کرتے ہیں تا کہ درج بالا کو ایسی حاصل تقسیمات کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جن میں $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے تفرقات پائے جاتے ہوں۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{h}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\Big[\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\Big]\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to 0}\boldsymbol{v}(t+h)+\lim_{h\to 0}\boldsymbol{u}(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}
\end{aligned}$$

آخری لکیر پر دونوں مساوات اس لئے ٹھیک ہیں کہ دو سمتیات کے سمتی ضرب کا حد، ان کے حدوں کا سمتی ضرب ہوتا ہے۔ چونکہ t پر $\boldsymbol{v}$ قابل تفرق لہٰذا استمراری ہے، اس لئے جیسے جیسے h کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے ویسے ویسے $\boldsymbol{v}(t+h)$ کی قیمت $\boldsymbol{v}(t)$ تک پہنچتی ہے۔ ان دو حاصل تقسیم کی قیمتیں t پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ تک پہنچتی ہیں۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

□

ثبوت : زنجیری قاعدہ

فرض کریں $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے اور t از خود کسی متغیر s کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہے۔ تب f ، g اور h متغیر s کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور حقیقی قیمت تفاعل کے زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\
&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\
&=\Big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\
&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

□

مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل

مبدا پر مرکز والے ایک کرہ پر جو جسم حرکت کرتا ہے، اس جسم کے تعین گر سمتیہ کی لمبائی اس کرہ کے رداس جتنی ہو گی۔اس کی سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ، جو حرکت کی راہ کو مماسی ہو گا، اس کرہ کو مماسی لہٰذا $\boldsymbol{r}$ کو قائمہ ہو گا۔ مستقل لمبائی والے قابل تفرق سمتی تفاعل کے لئے ہر بار ایسا ہی ہو گا۔ ایسا سمتیہ اور اس کا پہلا تفرق ایک دوسرے کو عمودی ہوں گے۔ لمبائی مستقل ہونے کی بدولت، سمتیہ میں تبدیلی درحقیقت سمتیہ کے رخ میں تبدیلی ہو گی اور رخ کی یہ تبدیلی سمتی تفاعل کے ساتھ زاویہ قائمہ پر ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہو اور اس کی لمبائی اٹل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{12.3}$$

□

یہ دیکھنے کی خاطر کہ مساوات 12.3 کیوں درست ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $|\boldsymbol{u}|$ ایک مستقل قیمت ہے۔ یوں $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{u}|^2$ ایک مستقل ہو گا اور ہم اس مساوات کی دونوں اطراف کا تفرق لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{مستقل})=0\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}&=0 &&\text{قاعدہ ضرب نقطہ میں } \boldsymbol{v}=\boldsymbol{u} \text{ لیتے ہوئے}\\
2\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}&=0 &&\text{ضرب نقطہ قابل تبادل ہے}\\
\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}&=0
\end{aligned}$$

مثال 12.5: دکھائیں کہ درج ذیل سمتیہ کی لمبائی مستقل ہے اور اس سمتیہ کا تفرق اور $\boldsymbol{u}$ آپس میں عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{u}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}$$

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(t)&=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{k}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}\\
\left|\boldsymbol{u}(t)\right|&=\sqrt{(\sin t)^2+(\cos t)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{+3}=2\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}&=(\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j}\\
\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}&=\sin t\cos t-\sin t\cos t=0
\end{aligned}$$

□

سمتی تفاعل کے تکملات

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}$ ہو تب قابل تفرق سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}(t)$، وقفہ I پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا الٹ تفرق ہو گا۔ اگر I پر $\boldsymbol{r}$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب، ایک وقت میں ایک جزو کے ساتھ کام کرتے ہوئے، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرق کی صورت $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}$ ہو گی جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہو گا۔ وقفہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرقات کا سلسلہ I پر $\boldsymbol{r}$ کا **غیر قطعی تکمل**[13] ہو گا۔

---

[13] indefinite integral

جوابات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمه د

ضمیمه چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ