

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	تفاعل کی انتہائی قیمتیں	4.1
340	مسئلہ اوسط قیمت	4.2
356	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	4.3
356	4.3.1 پرکھ	
368	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم	4.4
391	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	4.5
418	بہترین بنانا	4.6
442	خط بندی اور تفرقات	4.7
463	ترکیب نیوٹن	4.8
475	تکمل	5
475	غیر قطعی کمالات	5.1
487	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضاتی نمونہ کشی	5.2
503	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق	5.3
514	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	5.4
532	ریمان مجموعے اور قطعی کمالات	5.5
559	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	5.6
576	بنیادی مسئلہ	5.7
597	قطعی تکمل میں بدل	5.8
603	اعدادی تکمل	5.9
603	قاعدہ ڈورنقہ	5.10
623	تکمل کا استعمال	6
623	منحنیات کے بیچ رقبہ	6.1
627	6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد	
638	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش	6.2
646	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا	6.3
661	تکلی چھلے	6.4
674	مستوی منحنیات کی لمبائیاں	6.5
685	سطح طواف کا رقبہ	6.6
697	معیار اثر اور مرکز کمیت	6.7
709	6.7.1 وسطانی مرکز	
714	کام	6.8
729	فشار سیال اور قوت سیال	6.9
735	ضمیمہ اول	ا
737	ضمیمہ دوم	ب

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

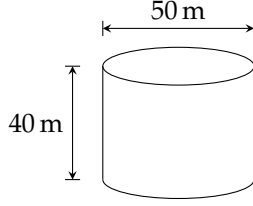
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

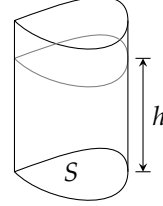
میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 6.124: بیلی حوض برائے مثال 6.37



شکل 6.123: فشار سیال۔

6.9 فشار سیال اور قوت سیال

فشار p سے مراد وہ قوت ہے جو اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہو۔ یوں اگر رقبہ S پر قوت F عمل کرتی ہو تب فشار p درج ذیل ہو گا۔

$$p = \frac{F}{S} \quad (6.33)$$

مستقل گہرائی پر قوت سیال اور فشار سیال

شکل 6.123 میں ساکن سیال کو ایک برتن میں دکھایا گیا ہے جہاں تھلا کا رقبہ S ، سیال کی گہرائی h اور سیال کی کثافت ρ ہے۔ یوں سیال کا حجم Sh ، کثیت ρSh اور وزن $g\rho Sh$ ہو گا۔ سیال کے وزن کے برابر قوت $F = g\rho Sh$ رقبہ S پر عمل کرے گی۔ یوں اکائی رقبہ پر قوت $g\rho h$ ہو گی جس کو فشار p یاد دباؤ کہتے ہیں۔

$$p = \rho gh \quad (6.34)$$

فشار کی اکائی نیوٹن فی مربع میٹر Nm^{-2} ہے۔ آپ نے دیکھا کہ سیال کی قیمت پر برتن کی صورت کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مستقل گہرائی کے رقبہ S پر درج ذیل قوت پائی جائے گی۔

$$F = pS \quad (6.35)$$

سیال میں h گہرائی پر کسی بھی رخ فشار کی قیمت مساوات 6.34 دیتی ہے۔ یوں کسی بھی گہرائی پر افقی اور انتہائی دیواروں پر فشار کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔

مثال 6.37: ایک بیلنی حوض میں پانی کی گہرائی 40 m ہے جبکہ حوض کا رداس 25 m ہے (شکل 6.124)۔ حوض کے اطراف کی دیوار کی چلی 1 m پٹی پر فشار سیال اور قوت سیال کتنا ہو گا؟ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ لیں۔)

حل: اس ایک میٹر چوڑی پٹی کے نیچے کنارے پر فشار درج ذیل ہو گا۔

$$p = \rho gh = (1000)(9.8)(40) = 392000 \text{ N m}^{-2}$$

ایک میٹر پٹی کا رقبہ

$$S = 2\pi rh = 2\pi(25)(1) = 50\pi \text{ m}^2$$

ہے لہذا اس پر کل قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = pS = (392000)(50\pi) = 61575216.01 \text{ N}$$

□

اس مثال میں پٹی کے نیچے حصے کی گہرائی 40 m اور بالائی حصے کی گہرائی 39 m تھی لہذا ان پر فشار پر مختلف ہو گا۔ ہم نے اس حقیقت کو نظر انداز کیا۔ آئیں متغیر گہرائی کی صورت میں فشار پر غور کریں۔

متغیر گہرائی پر فشار

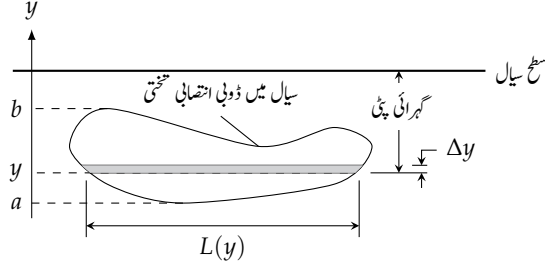
فرض کریں ہم کثافت ρ کی سیال میں ڈوبے ہوئے انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال جاننا چاہتے ہیں۔ ہم تختی کو xy مستوی میں خطہ $y = a$ تا $y = b$ تصور کرتے ہیں (شکل 6.125)۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہیں۔ ہم اس خطہ کو نقاط خانہ بندی پر محور y کے عمودی فرضی سطحوں سے باریک افقی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ایک نمائندہ پٹی جو y سے $y + \Delta y$ تک ہو کی چوڑائی Δy ہو گی جبکہ اس پٹی کے چلی ضلع کی لمبائی $L(y)$ ہو گی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ متغیر y کا استمراری تفاعل ہے۔

نیچے سے اوپر چلتے ہوئے گہرائی کی تبدیلی سے پٹی پر فشار تبدیل ہوتا ہے۔ اب اگر پٹی کی چوڑائی بہت کم ہو تب فشار کی اس تبدیلی کو رد کیا جاسکتا ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ پٹی پر ہر جگہ فشار وہی ہو گا جو پٹی کی چلی کنارے پر ہے۔ یوں پٹی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{پٹی کے نیچے کنارے پر فشار}) \\ &= \rho g (\text{گہرائی پٹی}) L(y) \Delta y \end{aligned}$$

پورے تختی پر قوت تخمیناً

$$(6.36) \quad \sum_a^b \Delta F = \sum_a^b \rho g (\text{گہرائی پٹی}) L(y) \Delta y$$



شکل 6.125: ایک پتلی پٹی پر قوت سیال۔

ہو گی جو $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کا ریماں مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ ہم ان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تختی پر قوت کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: تکمیل برائے قوت سیال
فرض کریں محور y پر $y = a$ سے $y = b$ تک کا خط، سیال میں ڈوبے ہوئی ایک تختی کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ y پر اس تختی کی سطح پر افقی پٹی کی بائیں سے دائیں لمبائی $L(y)$ ہے۔ اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال درج ذیل ہو گا۔

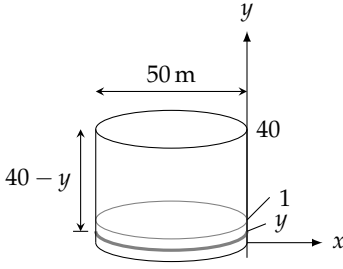
$$F = \int_a^b \rho g \cdot (\text{گہرائی پٹی}) \cdot L(y) dy \quad (6.37)$$

□

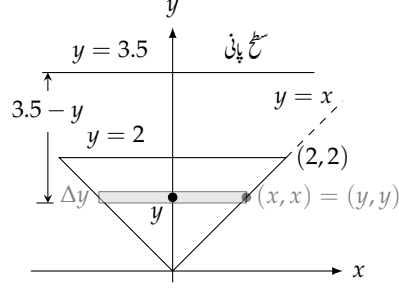
مثال 6.38: ایک مساوی الساقین مثلث تختی جس کا تالا 4 m اور قد 2 m ہے ایک پانی کے تالاب میں یوں ڈوبا ہوا ہے کہ اس کا تالا اوپر ہو۔ تالا پر پانی کی گہرائی 1.5 m ہے۔ تختی کے ایک طرف پر قوت تلاش کریں۔ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ لیں۔)

حل: ہم تختی کی چُلی راس کو محدود کے مبداء پر تصور کرتے ہیں (شکل 6.126)۔ یوں سطح پانی $y = 3.5$ پر ہو گا جبکہ تختی کا بالائی کنارہ $y = 2$ پر ہو گا۔ تختی کا دایاں کنارہ $y = x$ اور بائیں کنارہ $y = -x$ ہو گا۔ یوں y پر پٹی کی لمبائی

$$L(y) = 2x = 2y$$



شکل 6.127: بیلی حوض برائے مثال 6.39



شکل 6.126: تختی پر قوت پانی (مثال 6.38)

اور پانی کی گہرائی $(3.5 - y)$ ہوگی۔ تختی کی ایک طرف پر پانی کی قوت درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned}
 F &= \int_a^b \rho g (\text{گہرائی پٹی}) L(y) dy \\
 &= \int_0^2 9800(3.5 - y)2y dy \\
 &= 9800 \int_0^2 (7y - 2y^2) dy \\
 &= 9800 \left[\frac{7y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \right]_0^2 = 84933 \text{ N}
 \end{aligned}$$

□

قوت سیال کا حصول

کسی بھی محدود نظام میں سیال میں ڈوبے ہوئے انتظامی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال حاصل کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. نمائندہ افقی پٹی کی لمبائی اور گہرائی کی عمومی کلیہ تلاش کریں۔

ب. انہیں آپس میں ضرب دے کر سیال کی کثافت اور ثقلی مستقل $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ سے ضرب دے کر مکمل کو موزوں حدود کے بیچ حل کریں۔

مثال 6.39: ہم اب مثال 6.37 میں بیلی حوض کی چلی ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت سیال کی بالکل ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

ہم حوض کی تلا کو $y = 0$ پر رکھتے ہیں (شکل 6.127) جبکہ محدود y کو اوپر کے رخ رکھتے ہیں۔ ہم y پر نمائندہ افقی پٹی کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

ا. گہرائی پٹی: $40 - y$

ب. لمبائی پٹی: 50π

یوں ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \rho g (\text{گہرائی}) (\text{لمبائی}) \, dy = \int_0^1 \rho g (40 - y) (50\pi) \, dy \\ &= 9800(50\pi) \int_0^1 (40 - y) \, dy = 60\,805\,525.81 \, \text{N} \end{aligned}$$

□

اس مثال میں حاصل قوت مثال 6.37 سے کچھ کم ہے جو متوقع تھا۔

قوت سیال اور وسطانی مرکز

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

