احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھیان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقناطیسی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلٰی احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔اس حصے میں چھ تکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin\theta|\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہٰذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہو گی۔چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہٰذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہٰذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہٰذا

$$\sin^2\theta < \theta^2, \quad (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جا سکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

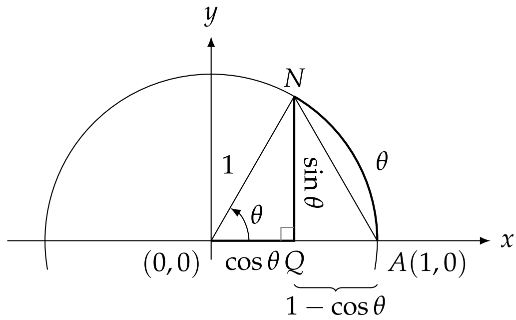
$$|\sin\theta| < |\theta|, \quad |1-\cos\theta| < |\theta|$$

یعنی

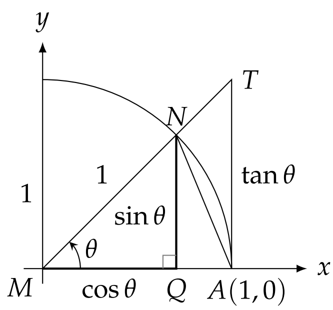
$$-|\theta| < \sin\theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

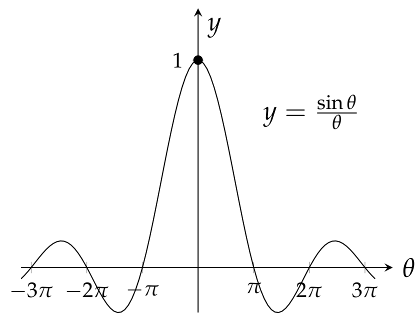
$\square$



شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $\theta > 0$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ لکھی جا سکتی ہے۔



شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4



شکل 3.45: تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مثال 3.27: دکھائیں کہ $\theta = 0$ پر $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0, \quad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

حل: $\theta \to 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $-|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ بیچ سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔ □

تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta = 0$ پر قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta\to 0} f(\theta) = 1$ ہو گا۔

مسئلہ 3.4:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (\text{کی پیمائش ریڈیئن میں ہے } \theta) \tag{3.4}$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{رقبہ}\,\Delta MAN < \text{رقبہ خطہ}\,MAN < \text{رقبہ}\,\Delta MAT$$

ہے۔ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ}\,\Delta MAN &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\\
\text{رقبہ خطہ}\,MAN &= \frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}(1)^2\theta=\frac{\theta}{2}\\
\text{رقبہ}\,\Delta MAT &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta
\end{aligned}$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$$

جس کو $\frac{1}{2}\sin\theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

حاصل ہو گا۔اس کا بالعکس تناسب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$$

چونکہ $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta=1$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin\theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہٰذا $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم y محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔اس تشاکلی کی بنا بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=1=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 148 پر مسئلہ 2.5 کے تحت $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم تکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر تکونیاتی حد تلاش کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ہے۔
حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے $\cos h = 1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} -\frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\
&= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \sin\theta \qquad (\theta = \frac{h}{2}) \\
&= -(1)(0) = 0
\end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل $y = \sin\theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\
&= \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کوسائن تفاعل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$y = x^2 - \sin x : \quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق}) \\ &= 2x - \cos x \end{aligned}$$

ب.

$$y = x^2 \sin x : \quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) + 2x \sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x \end{aligned}$$

ج.

$$y = \frac{\sin x}{x} : \quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیائش ریڈیئن میں ہو تب $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہوتا ہے اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہوتا ہے۔یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(\cos x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad \text{(تفرق کی تعریف)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}\\
&= \lim_{g\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \qquad \text{(مثال 3.28 اور مسئلہ 3.4)}\\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

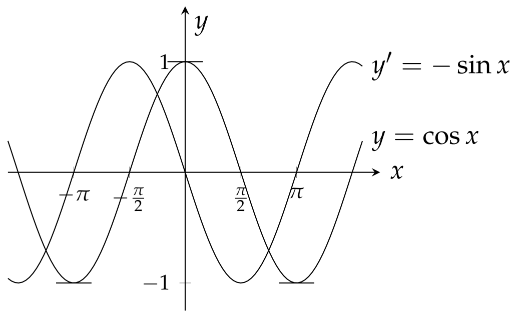
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x = -\pi, 0, \pi$) وہاں اس کا تفرق یعنی $y' = -\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

ا.

$$\begin{aligned}
y &= 5x + \cos x\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x)\\
&= 5 - \sin x
\end{aligned}$$



شکل 3.47: تفاعل $y = \cos x$ کی ڈھلوان تفاعل $y' = -\sin x$ دیتی ہے۔

ب.

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x \cos x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) + \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}
$$

ج.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{(1 - \sin x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) - \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\
&= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
&= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \qquad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= \frac{1}{1 - \sin x}
\end{aligned}
$$

□

سادہ ہارمونی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونی حرکت کی ایک مثال ہے۔اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5\cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔
حل:

$$s = 5\cos t \qquad \text{ہم مقام}$$
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\cos t) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t) = -5\sin t \qquad \text{سے سمتی رفتار}$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\sin t) = -5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t) = -5\cos t \qquad \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں}$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ s محور پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا حیطہ 5 ہے جبکہ اس کی تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کی تعدد ہے۔

2. تفاعل $\sin t$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو گا۔یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

   جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \mp 1$ ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع $a = -5\cos t$ اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\cos t = 0$ ہو گا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہو گا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہو گا۔اسراع کی مطلق قیمت مبدا سے دور ترین نقطے پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $\cos t = \mp 1$ ہو گا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{d^3 s}{dt^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو **جھٹکا**[33] کہتے ہیں۔اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب لمحہ t پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}$$

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{dg}{dt} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j &= \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5\cos t) \\ &= 5\sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\sin t = \mp 1$ ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

jerk[33]

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہٰذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \sec^2 x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) &= -\csc^2 x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) &= \sec x \tan x\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) &= -\csc x \cot x
\end{aligned} \tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔سوال میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم})\\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر $y = \sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔
حل:

$$
\begin{aligned}
y &= \sec x \\
y' &= \sec x \tan x && \text{(مساوات 3.5)} \\
y'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x \tan x) \\
&= \sec x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) + \tan x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}
$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x + \cot x) = 3 + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\csc x) = 2\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) \\
&= 2(-\csc x \cot x) = -2\csc x \cot x
\end{aligned}
$$

□

تکونیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکونیات تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہٰذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x

کی قیمت π کا عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تفاعل کے لئے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x\to c} f(x) = f(x)$ ہو گا۔ نتیجتاً ہم تکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 3.36: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ □

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ مطمئن ہو گی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \theta = x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1,\ \theta = 7x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1,\ \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں $x \to 0$ کرنا $\theta \to 0$ کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 3.37:

ا.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x} \\ &= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \\ &= \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

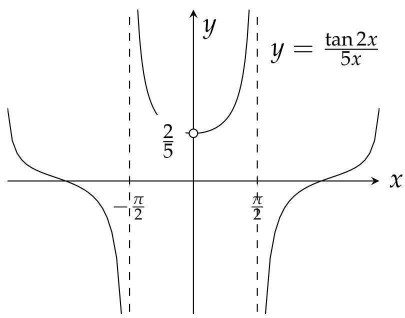
(تفاعل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے)

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin 2x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\Big) \\ &= \Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}\Big)\Big(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\Big) \\ &= \Big(\frac{2}{5}\Big)\Big(\frac{1}{\cos 0}\Big) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$(\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x})$

شکل 3.48 سے رجوع کریں۔ □



شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم