

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیت
1344	11.2	کار تیمی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تنگی اور کروی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیت T
1475	12.4	انحناء، مروڑ اور TNB چھوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنجی تفرقات، سمتیت ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629	13.8.1	نتیجہ
1638	13.9	لیگریٹھ ضاربین
1657		جوابات

1659	ا ضمیمہ اول
1661	ب ضمیمہ دوم
1663	ج ضمیمہ تین
1665	د ضمیمہ چار
1667	ه ضمیمہ پانچ
1669	و ضمیمہ چھ
1671	ز ضمیمہ سات
1673	ح ضمیمہ آٹھ
1675	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

دو غیر تابع متغیرات اور ایک شرط

سوال 1: ترخیم $x^2 + 2y^2 = 1$ پر وہ نقاط تلاش کریں جن پر $f(x, y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہوں۔سوال 2: تفاعل $f(x, y) = xy$ کی شرطی مساوات $g(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$ کے لحاظ سے مشروط انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔سوال 3: لکیر $x + 3y = 10$ پر چلتے ہوئے تفاعل $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔سوال 4: خط $x + y = 3$ پر $f(x, y) = x^2y$ کی مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔سوال 5: منحنی $xy^2 = 54$ پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کریں۔سوال 6: منحنی $x^2y = 2$ پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کریں۔

سوال 7: ترکیب لیگرینج ضاربین کی مدد سے

ا. $x + y$ کی مشروط کم سے کم قیمت $xy = 16, x > 0, y > 0$ پر پورا اترتے ہوئے تلاش کریں۔ب. xy کی زیادہ سے زیادہ قیمت شرط $x + y = 16$ کے لحاظ سے تلاش کریں۔سوال 8: مستوی xy میں رہتے ہوئے منحنی $x^2 + xy + y^2 = 1$ پر مبدا سے دور تر اور نزدیک تر نقاط تلاش کریں۔سوال 9: ایک بند دائری قائمہ بیلن کا حجم $16\pi, \text{cm}^3$ ہے۔ اس کی وہ جسامت تلاش کریں جس سے اس بیلن کا سطحی رقبہ کم سے کم ہو۔سوال 10: رداس a کے کرہ میں محصور زیادہ سے زیادہ سطح کا ایک کھلا دائری قائمہ بیلن بنایا جاتا ہے۔ اس بیلن کا سطحی رقبہ کتنا ہوگا؟سوال 11: ترکیب لیگرینج ضاربین استعمال کرتے ہوئے ترخیم $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ میں محصور زیادہ سے زیادہ محیط کا ایسا مستطیل تلاش کریں جس کے اضلاع محدودی محور کے متوازی ہوں۔ اس مستطیل کا محیط کتنا ہوگا؟سوال 12: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ میں محصور زیادہ سے زیادہ محیط کا مستطیل جس کے اضلاع محدودی محور کے متوازی ہوں کے اضلاع تلاش کریں۔ اس مستطیل کا محیط کتنا ہوگا؟سوال 13: شرط $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ پر پورا اترتے ہوئے $x^2 + y^2$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 14: شرط $x^2 + y^2 = 4$ کے لحاظ سے $3x - y + 6$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 15: ایک دھاتی چادر کے نقطہ (x, y) پر درجہ حرارت $T(x, y) = 4x^2 - 4xy$ ہے۔ ایک چپوٹی رداس 5 کے دائرہ پر، جس کا مرکز مبدا پر ہے، حرکت کرتی ہے۔ اس چپوٹی کو زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنے درجہ حرارت کا سامنا کرنا ہو گا؟

سوال 16: آپ کو تیل ذخیرہ کرنے کے لئے حوض بنانے کو کہا گیا ہے۔ یہ حوض بیلی ہو گا جس کے آخری سر نصف کروی ہوں گے۔ اس کا حجم 8000 m^3 ہو گا۔ آپ کو کم سے کم چادر استعمال کر کے حوض بنانا ہے۔ اس حوض کا رداس اور قد کتنا ہو گا؟

تین متغیرات اور ایک شرط

سوال 17: مستوی $x + 2y + 3z = 13$ پر $(1, 1, 1)$ کو نزدیک تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 18: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ پر وہ نقطہ تلاش کریں جو $(1, -1, 1)$ سے دور تر ہو۔

سوال 19: مبدا سے سطح $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ کا کم تر فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 20: سطح $z = xy + 1$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 21: سطح $z^2 = xy + 4$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 22: سطح $xyz = 1$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 23: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ پر $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 24: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ پر وہ نقاط تلاش کریں جن پر $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں پائی جاتی ہوں۔

سوال 25: تین ایسے حقیقی اعداد تلاش کریں جن کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہو۔

سوال 26: اگر $x + y + z^2 = 16$ ہو تب مثبت اعداد x ، y اور z کا زیادہ سے زیادہ حاصل ضرب کتنا ہو گا؟

سوال 27: اکائی کرہ میں محصور زیادہ سے زیادہ حجم کے بند مستطیلی ڈبہ کے اضلاع تلاش کریں۔

سوال 28: ربع اول میں زیادہ سے زیادہ حجم کے ایسے بند مستطیلی ڈبہ کا حجم تلاش کریں جس کی دیواریں مستوی سطحوں میں ہوں اور جس کا راس $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ، جہاں $a > 0, b > 0, c > 0$ ہے، کو چھوتا ہو۔

سوال 29: خلائی تحقیق کے اختتام پر ترقیبی صورت

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

کا خلائی جہاز زمینی ہوا میں داخل ہوتے ہی گرم ہونا شروع ہوتا ہے۔ ایک گھنٹہ بعد خلائی جہاز کے نقطہ (x, y, z) پر درجہ حرارت

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

ہے۔ اس جہاز کی سطح پر گرم ترین نقطہ تلاش کریں۔

سوال 30: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کے سطحی نقطہ (x, y, z) پر درجہ حرارت $T(x, y, z) = 400xyz^2$ سیلسیئس ہے۔ اس کرہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال 31: اقتصادیات سے ایک مثال

دو اشیاء G_1 اور G_2 کی تعداد x اور y کی افادیت کو بعض اوقات تفاعل $U(x, y)$ سے ناپا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر G_1 اور G_2 وہ دو کیمیا ہو سکتے ہیں جن کی مختلف مقداریں استعمال کرتے ہوئے دواساز ادارہ مختلف ترکیب استعمال کرتے ہوئے دوائی تیار کرتا ہو اور مطابقتی منافع $U(x, y)$ ہو۔ اگر G_1 پر a اور G_2 پر b روپیہ فی کلوگرام لاگت آتی ہو اور ان دونوں کی خریداری کے لئے c روپیہ مختص کیے گئے ہوں تب ادارے کا سربراہ $ax + by = c$ کی زیر شرط $U(x, y)$ کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بنانا چاہے گا جو ترکیب لیکریٹن صارفین سے حاصل کرنا ممکن ہو گا۔

فرض کریں

$$U(x, y) = xy + 2x \quad ax + by = c = 2x + y = 30$$

ہوں تب U کی مشروط زیادہ سے زیادہ قیمت اور مطابقتی x اور y تلاش کریں۔

سوال 32: یہ سیارہ پر آپ خلل اندازی کو کم سے کم رکھنے کی خاطر ریڈیائی دوربین کو اس مقام پر نسب کرنا چاہتے ہو جہاں سیارہ کی مقناطیسی میدان کمزور ترین ہو۔ اس سیارہ کا رداس 6 اکائیاں ہے۔ محدود نظام کے مبداء کو سیارہ کے مرکز پر رکھتے ہوئے، سیارہ کا مقناطیسی میدان $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$ ہے۔ آپ ریڈیائی دوربین کو کہاں نسب کریں گے؟

لیکریٹن صارفین مع دو شرائط

سوال 33: تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ کی قیمت کو زیر شرائط $2x - y = 0$ اور $y + z = 0$ زیادہ سے زیادہ بنائیں۔

سوال 34: تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی قیمت کو زیر شرائط $x + 2y + 3z = 6$ اور $x + 3y + 9z = 0$ سے کم بنائیں۔

سوال 35: سطح $y + 2z = 12$ اور سطح $x + y = 6$ کی تقاطع پر مبداء کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 36: سطح $2x - y = 0$ اور سطح $y + z = 0$ کی منحنی تقاطع پر $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

سوال 37: مستوی $z = 1$ اور کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ کے تقاطع پر $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 38: (i) سطح $x + y + z = 40$ اور سطح $x + y - z = 0$ کی خط تقاطع پر $w = xyz$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔ (ب) جیومیٹریکی دلیل دیتے ہوئے ثابت کریں کہ آپ نے w کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کی ہے تاکہ اس کی کم سے کم قیمت۔

سوال 39: مستوی $y - x = 0$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کو ایک دائرہ میں قطع کرتا ہے۔ اس دائرہ پر $f(x, y, z) = xy + z^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 40: مستوی $2y + 4z = 5$ اور مخروط $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ کے تقاطع پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 41: $\nabla f = \lambda \nabla g$ کافی نہیں ہے۔

اگرچہ زیر شرط $g(x, y) = 0$ تقابل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمتوں کے ہونے کے لئے $\nabla f = \lambda \nabla g$ لازمی ہے، یہ ازخود اس بات کی ضمانت نہیں دیتی کہ اس تقابل کی انتہائی قیمتیں موجود ہوں گی۔ مثال کے طور پر زیر شرط $xy = 16$ ترکیب لیگرنگ ضاربین کی مدد سے $f(x, y) = x + y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ یہ ترکیب آپ کو دو نقاط $(4, 4)$ اور $(-4, -4)$ دے گی جن پر توقع کی جاسکتی ہے کہ f کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو۔ اس کے باوجود قطع زائد $xy = 16$ پر $x + y$ کی کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ آپ ربع اول میں مبدا سے چٹنے دور چلتے ہیں، f کی قیمت اتنی زیادہ ہوگی۔

سوال 42: کٹر مربعی مستوی

مستوی $z = Ax + By + C$ کو درج ذیل نقاط (x_k, y_k, z_k) پر بٹھانا مقصود ہے۔

$$(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)$$

مستقل A ، B اور C کی وہ قیمتیں تلاش کریں جو انحرافات کے مربع کے مجموعہ

$$\sum_{k=1}^4 (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں۔

سوال 43: (i) کارتیسی محدودی abc نظام کے مبدا پر رداں r کا کرہ رکھا گیا ہے۔ دکھائیں کہ اس کرہ پر $a^2b^2c^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $(\frac{r^2}{3})^3$ ہوگی۔ (ب) جزو-استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ غیر منفی اعداد a ، b اور c کے لئے

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

ہو گا، یعنی، تین اعداد کا ہندسی اوسط اس کے حسابی اوسط جتنا یا اس سے کم ہو گا۔

سوال 44: فرض کریں a_1, a_2, \dots, a_n مثبت n اعداد ہیں۔ زیر شرط $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ مجموعہ $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 45 تا سوال 50 میں کمپیوٹر کی مدد سے ترکیب لیکریٹھ صارفین استعمال کرتے ہوئے مشروط انتہائی قیمتیں دریافت کریں۔

ا. تقابل f ، جس کی قیمت کو زیر شرائط $g_1 = 0$ اور $g_2 = 0$ بہتر بنانا مقصود ہے، سے تقابل $h = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ حاصل کریں۔

ب. بشمول λ_1 اور λ_2 کے لحاظ سے، h کی تمام جزوی یک رتبی تفرقات حاصل کر کے 0 کے برابر رکھیں۔

ج. جزو-ب میں حاصل نظام مساوات کو، بشمول λ_1 اور λ_2 ، تمام متغیرات کے لئے حل کریں۔

د. جزو-ج میں ہر نقطہ حل پر f کی قیمت حاصل کر کے مشروط انتہائی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال 45: زیر شرائط $x^2 + y^2 - 2 = 0$ اور $x^2 + z^2 - 2 = 0$ تقابل $f(x, y, z) = xy + yz$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 46: زیر شرائط $x^2 + y^2 - 1 = 0$ اور $x - z = 0$ تقابل $f(x, y, z) = xyz$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 47: زیر شرائط $2y + 4z - 5 = 0$ اور $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ تقابل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

سوال 48: زیر شرائط $x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0$ اور $x^2 + y^2 - 1 = 0$ تقابل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 49: زیر شرائط $2x - y + z - w - 1 = 0$ اور $x + y - z + w - 1 = 0$ تقابل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 50: لکیر $y = x + 1$ سے قطع مکانی $y^2 = x$ تک فاصلہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فرض کریں لکیر پر (x, y) ایک نقطہ ہے اور (w, z) قطع مکانی پر ایک نقطہ ہے۔ آپ $(x - w)^2 + (y - z)^2$ کی قیمت کم سے کم چاہتے ہیں۔)

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

