احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

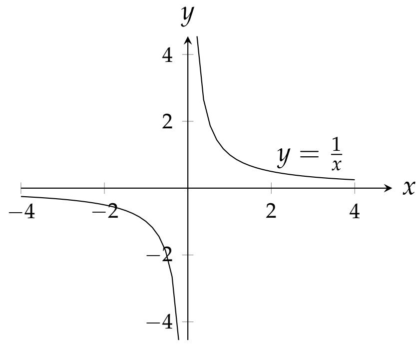
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 4.73: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \to \mp\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔

$x \to \mp\infty$ پر حد

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گھٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار بتدریج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \to \mp\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

2. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $\epsilon > \left|f(x) - L\right|$ ہو یعنی

$$x < N \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

□

لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہٰذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$x \to \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کے حد حاصل کیے۔اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کی بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$\lim_{x\to\mp\infty} k = k, \quad \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{4.7}$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

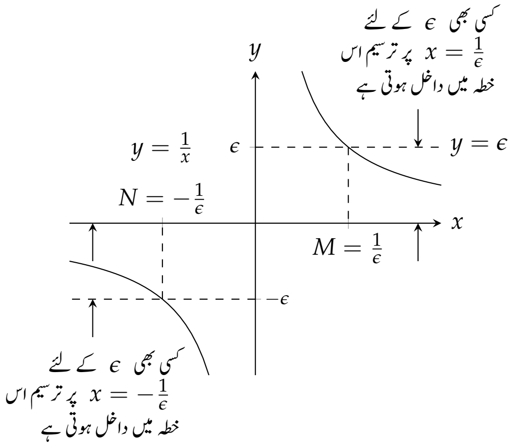
ب. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x > M, \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔



شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 4.20)

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \quad \implies \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$N = -\frac{1}{\epsilon}$ یا $-\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔

□

مساوات 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6: $x \to \mp\infty$ پر حل کے خواص
اگر $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) + g(x)] = L + M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) - g(x)] = L - M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to\mp\infty} kf(x) = kL$

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

یہ خواص بالکل مسئلہ 2.1 (صفحہ 113) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}(5+\tfrac{1}{x}) &= \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ} \\ &= 5+0=5 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

ب.

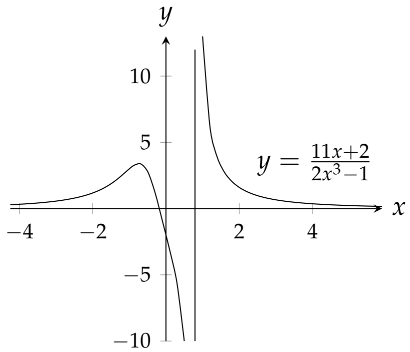
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

□

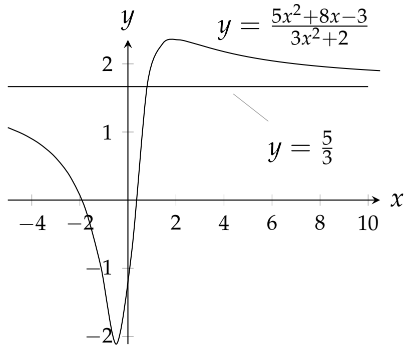
مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 4.75)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

□



شکل 4.76: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 4.23)



شکل 4.75: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 4.22)

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 4.76)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں}\\ &= \frac{0+0}{2-0} = 0\end{aligned}$$

□

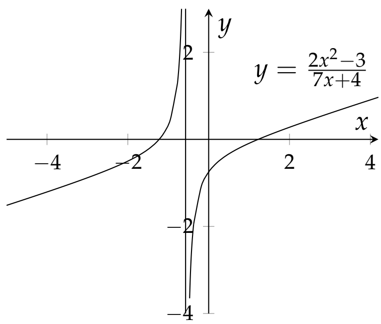
مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل 4.77

ا.

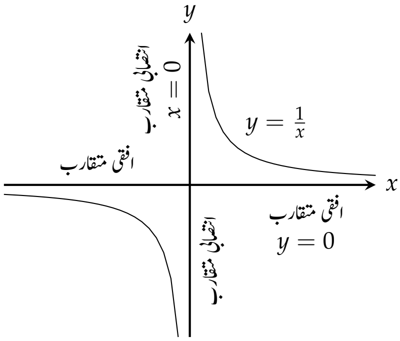
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{7x+4} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}\\ &= \frac{\infty}{2} = \infty\end{aligned}$$



شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 4.24



شکل 4.78: محددی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے متقارب ہیں۔

□

مثال 4.22 تا مثال 4.24 سے $x \to \mp\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mp\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انتصابی متقارب

اگر مبدا سے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصل صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا متقارب[12] کہتے ہیں۔

مثال 4.25: محددی محور تفاعل $y=\frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل 4.78)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

ہیں لہٰذا x محور $y=\frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

ہیں لہٰذا y محور بھی $y=\frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

یاد رہے کہ $x=0$ پر نسب نما صفر ہے لہٰذا تفاعل غیر معین ہے۔ □

تعریف: تفاعل $y=f(x)$ کا خط $y=b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b$$

ہو۔

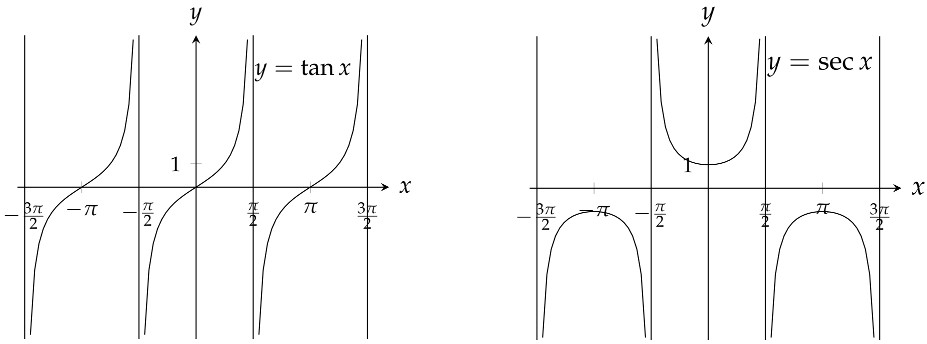
تفاعل $y=f(x)$ کا خط $x=a$ اس صورت انتصابی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\mp\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\mp\infty$$

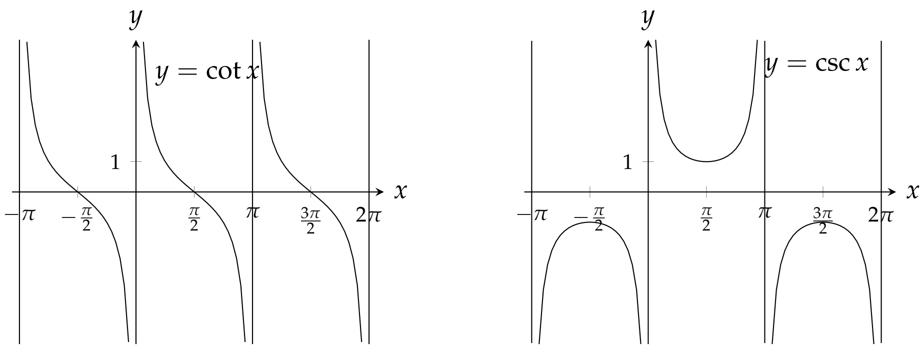
ہو۔

□

[12] asymptote



شکل 4.79: انتصابی متقارب (مثال 4.26)



شکل 4.80: انتصابی متقارب (مثال 4.26)

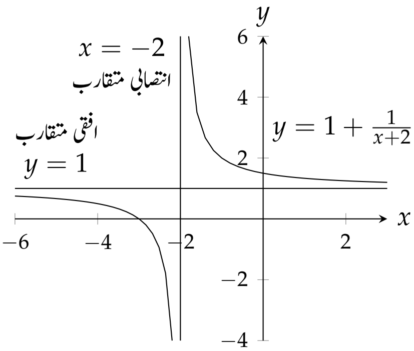
مثال 4.26: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.79)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

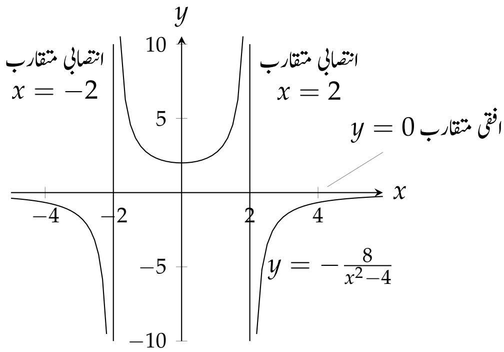
π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.80)۔

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

□



شکل 4.81: انتصابی متقارب (مثال 4.27)



شکل 4.82: انتصابی متقارب (مثال 4.28)

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے $x + 3$ اور $x + 2$ سے تقسیم کر کے

$$y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہو گی۔یوں محددی محور کی بجائے خط $y = 1$ اور خط $x = -2$ متقارب خط ہوں گے۔

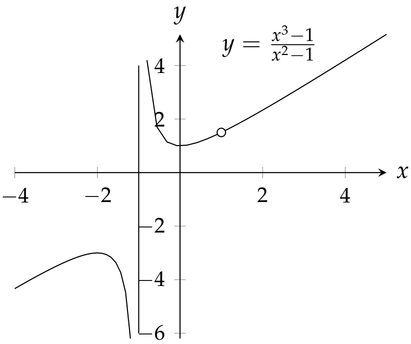
□

مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا متقارب تلاش کریں۔

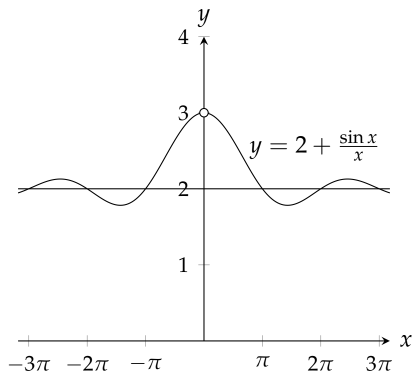
$$y = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ اور $x - \mp 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

چونکہ $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$ لہٰذا افقی متقارب خط $y = 0$ ہے (شکل 4.82)۔ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ سے $x = 2$ متقاربی خط حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $x = -2$ بھی متقاربی خط حاصل ہو گا۔
□



شکل 4.83: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x = 1$ پر عدم استمرار قابل ہٹاو ہے لہٰذا اس کی صرف $x = -1$ پر متقاربی خط ہو گا۔



شکل 4.84: منحنی اپنے متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کر سکتی ہے (مثال 4.30)۔

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاو عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

کا $x = -1$ پر انتصابی متقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا عدم استمرار قابل ہٹاو ہے اور $x \to 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل 4.83)۔ □

مسئلہ 2.4 (صفحہ 119 مسئلہ بیچ) بھی $x \to \mp\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال 4.30: مسئلہ بیچ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم $x \to 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \to \mp\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہٰذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

اور $\lim_{x\to\mp\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔یوں

$$\lim_{x\to\mp\infty}(2+\frac{\sin x}{x}) = 2+0 = 2$$

ہو گا لہٰذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط $y = 2$ ہو گا (شکل 4.84)۔ □

ترچھے متقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نا افقی اور نا انتصابی ہو گا۔

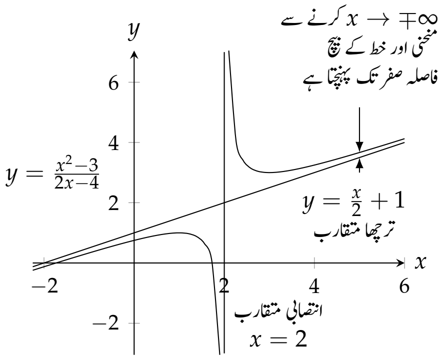
مثال 4.31: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ x^2-3 کو $2x-4$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x^2-3}{2x-4} = \frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x-4}$$

چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ ہیں لہٰذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔ $x \to \mp\infty$ پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \to \frac{x}{2}+1$ تک پہنچتی ہے۔یوں $y = \frac{x}{2}+1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل 4.85)۔ □



شکل 4.85: ترچھا متقارب (مثال 4.31)

متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{کی بڑی قیمتوں کے لئے } x$$
$$f(x) = \frac{1}{2x-4} \qquad \text{کے قریب } x \text{ کی قیمتوں کے لئے } 2$$

بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہٰذا $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا غلبہ[13] ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ غالب[14] ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

[13] dominates
[14] dominant

مثال 4.32: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3+1}{x}$$

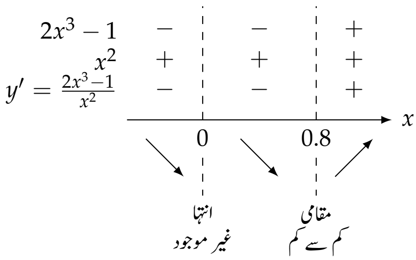
حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاو، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔
پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔
دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \tag{8.4}$$

$|x|$ کی بڑی قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات 4.8 میں $x = 0$ پر انتصابی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔
تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاو۔ یک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔

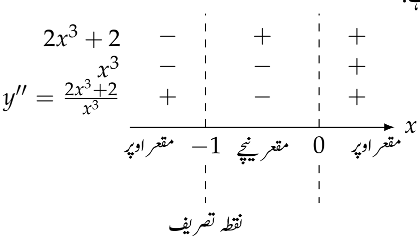


$$\begin{aligned}
2x - \frac{1}{x^2} &= 0\\
2x^3 - 1 &= 0\\
x^3 &= \frac{1}{2}\\
x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8
\end{aligned}$$

چوتھا قدم: مقعر۔ دو رتبی تفرق

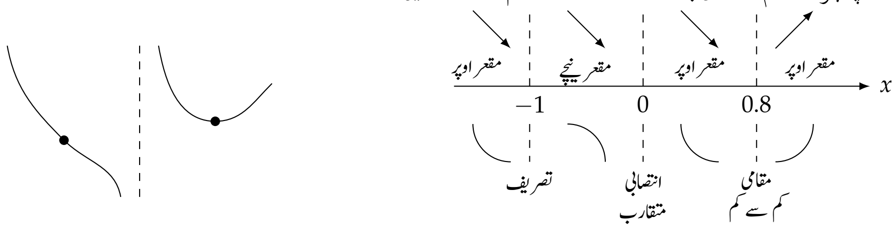
$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

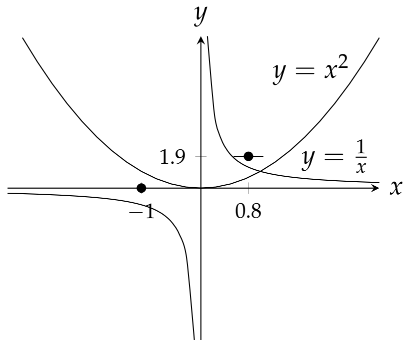


$$\begin{aligned}
2 + \frac{2}{x^3} &= 0\\
2x^3 + 2 &= 0\\
x^3 &= -1\\
x &= -1
\end{aligned}$$

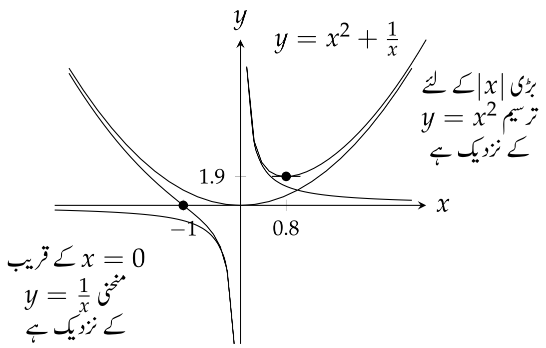
پانچواں قدم: درج بالا معلومات کو اکٹھا کر کے ترسیم کا خاکہ بناتے ہیں۔



چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تشاکل کی نشاندہی کریں۔
کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟

3. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔

4. متقارب خطوط اور قابل ہٹاو عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
$x \to \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

5. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاو دریافت کریں۔

6. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔

7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدد، پر f کی قیمت تلاش کریں۔

9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

$x \to \mp\infty$ پر حد کا حساب
سوال 1 تا سوال 1 میں (ا) $x \to \infty$ پر (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 1: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم