

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
859	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
875	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	ہذلولی تفاعل	7.10
913	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 نکتہ بنائی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1237	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1246 . . . . .	10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا
1261 . . . . .	10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1277 . . . . .	10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1291 . . . . .	10.6 قطبی محدود
1303 . . . . .	10.7 قطبی محدود میں ترسیم
1318 . . . . .	10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1319 . . . . .	10.8.1 دائرے

1323 ا ضمیمہ اول

1325 ب ضمیمہ دوم

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

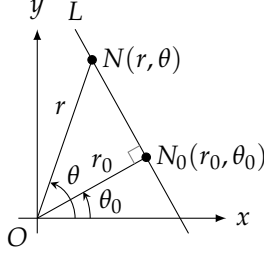
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 10.121: خط کی قطبی مساوات

## 10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات

چاند، سیارے، مصنوعی سیارے اور دم دار ستارے ترخیم، قطع مکانی اور قطع زائد پر حرکت کرتے ہیں۔ ان کی حرکت کو قطبی محدود میں ایک آسان مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے لہذا فلکیات اور فلکیاتی انجینئری میں قطبی محدود اہمیت رکھتے ہیں۔ ہم اس مساوات کو یہاں حاصل کرتے ہیں۔

خطوط

فرض کریں مبدا  $O$  سے خط  $L$  تک عمودی لکیر،  $L$  پر نقطہ  $N_0(r_0, \theta_0)$  پہنچتی ہے جہاں  $r \geq 0$  ہے (شکل 10.121)۔ اب اگر  $L$  پر  $N(r, \theta)$  کوئی دوسرا نقطہ ہو تب نقاط  $O$ ،  $N_0$  اور  $N$  ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہوں گے جس سے

$$\frac{r_0}{r} = \cos(\theta - \theta_0)$$

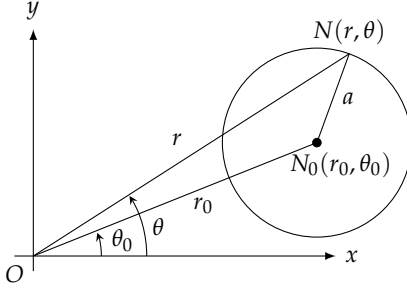
یا

$$r \cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

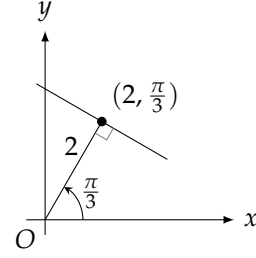
لکھا جاسکتا ہے۔ خط کی معیاری قطبی مساوات اگر مبدا سے خط  $L$  تک عمود نقطہ  $N_0(r_0, \theta_0)$  پر بیٹھتا ہو اور  $r_0 \geq 0$  ہو تب  $L$  کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$r \cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

مثال 10.38: مماثل  $\cos(A - B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$  استعمال کر کے شکل 10.122 میں دیے خط کی مساوات تلاش کریں۔



شکل 10.123: دائری کی قطبی مساوات۔



شکل 10.122: خط برائے مثال 10.38

حل:

$$\begin{aligned}
 r \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \\
 r \left( \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \\
 \frac{1}{2} r \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin \theta &= 2 \\
 \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y &= 2 \\
 x + \sqrt{3} y &= 4
 \end{aligned}$$

□

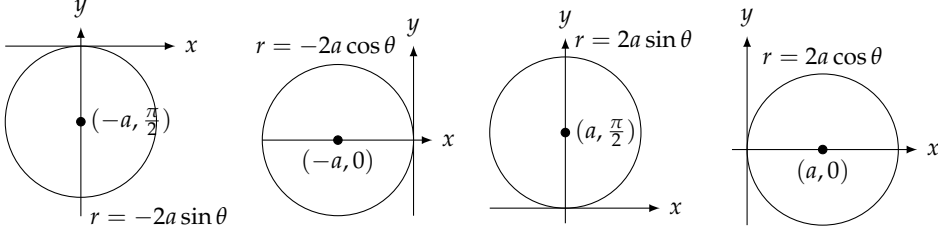
## 10.8.1 دائرے

ایک دائرہ جس کا مرکز  $N_0(r_0, \theta_0)$  اور رداس  $a$  ہو کی قطبی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم مثلث  $ON_0N$  پر قاعدہ کوسائن لاگو کرتے ہیں (شکل 10.123) جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(10.40) \quad a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos(\theta - \theta_0)$$

اگر یہ دائرہ مبدا سے گزرتا ہو تب  $r_0 = a$  ہو گا جس سے مساوات 10.40 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}
 a^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \theta_0) \quad (r_0 = a \text{ میں مساوات 10.40}) \\
 (10.41) \quad r^2 &= 2ar \cos(\theta - \theta_0) \\
 r &= 2a \cos(\theta - \theta_0)
 \end{aligned}$$



شکل 10.124: کارتیسی محور پر مرکز والے دائروں کے قطبی مساوات۔

اگر دائرے کا مرکز مثبت  $x$  محور پر پایا جاتا ہو تب مساوات 10.41 درج ذیل دے گی۔

$$(10.42) \quad r = 2a \cos \theta$$

اگر دائرے کا مرکز مثبت  $y$  محور پر پایا جاتا ہو تب  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  اور  $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta$  ہوں گے لہذا مساوات 10.41 درج ذیل دے گی۔

$$(10.43) \quad r = 2a \sin \theta$$

مساوات 10.42 اور مساوات 10.43 میں  $r$  کی جگہ  $-r$  پر کر کے ان دائروں کی مساواتیں حاصل ہوں گی جن کے مرکز منفی  $x$  محور یا منفی  $y$  محور پر ہوں (شکل 10.124)۔

مثال 10.39: مبدا سے گزرتے ہوئے دائرے

رداس	مرکز	مساوات
3	$(3, 0)$	$r = 6 \cos \theta$
2	$(2, \frac{\pi}{2})$	$r = 4 \sin \theta$
$\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$r = -\cos \theta$
1	$(-1, \frac{\pi}{2})$	$r = -2 \sin \theta$

□

ترخیم، قطع مکانی اور قطع زائد یکجا

ترخیم، قطع مکانی اور قطع زائد کے قطبی مساوات معلوم کرنے کی خاطر ہم ایک ماسکہ کو مبدا پر رکھتے ہیں اور مطابقتی ناظمہ کو مبدا کے دائیں، انتصابی لکیر  $x = k$  پر رکھتے ہیں۔ یوں

$$NF = r$$

اور

$$ND = k - FB = k - r \cos \theta$$

ہوں گے۔ یوں مخروط کی ماسکہ ناظمہ مساوات  $NF = e \cdot ND$  درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$r = e(k - r \cos \theta)$$

جس کو  $r$  کے لئے حل کرتے ہیں:

$$(10.44) \quad r = \frac{ke}{1 + e \cos \theta}$$

یہ مساوات  $0 < e < 1$  کے لئے ترخیم،  $e = 1$  کے لئے قطع مکانی اور  $e > 1$  کے لئے قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح ترخیم، قطع مکانی اور قطع زائد کو ایک ہی مساوات ظاہر کرتی ہے۔



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول





ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

