

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	تفرق کا استعمال	4
325	4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں	
340	4.2 مسئلہ اوسط قیمت	
356	4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ	
356	4.3.1 پرکھ	
368	4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	
391	4.5 $x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء	
418	4.6 بہترین بنانا	
442	4.7 خط بندی اور تفرقات	
463	4.8 ترکیب نیوٹن	
475	تکمل	5
475	5.1 غیر قطعی کمالات	
479	ضمیمہ دوم	۱



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 5

# تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

### 5.1 غیر قطعی کمالات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق  $f(x)$  سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق  $f$  ہے۔ ان تفاعل کو  $f$  کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو  $f$  کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے موزوں تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جاسکتے ہیں۔



## الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمیل

تعریف: تفاعل  $f(x)$  کا الٹ تفرق تب  $F(x)$  ہو گا جب  $f$  کے دائرہ کار میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

$f$  کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ  $x$  کے لحاظ سے  $f$  کا غیر قطعی تکمیل<sup>1</sup> ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x) dx$$

علامت  $\int$  کو علامت تکمیل کہتے ہیں۔ تفاعل  $f$  کو متکمل<sup>2</sup> اور  $x$  کو تکمیل کا متغیر<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل  $f$  کے حاصل کردہ الٹ تفرق  $F$  اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکمیلی علامت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$(5.1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

مستقل  $C$  کو تکمیل کا مستقل<sup>4</sup> یا اختیاری مستقل<sup>5</sup> کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " $x$  کے لحاظ سے تفاعل  $f$  کا غیر قطعی تکمیل  $F(x) + C$  ہے۔"  $F(x) + C$  کے حصول کو  $f$  کے تکمیل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1:  $\int 2x dx$  تلاش کریں۔  
حل:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$2x$  کا الٹ تفرق  $x^2$  ہے اور  $C$  تکمیل کا مستقل ہے۔ کلیہ  $x^2 + C$  تفاعل  $2x$  کے تمام تفرقات دیتا ہے۔ یوں  $x^2 + 1$  ،  $x^2 - \pi$  اور  $x^2 + \sqrt{2}$  تفاعل  $2x$  کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔ جدول 5.1 میں غیر قطعی کمالات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

indefinite integral<sup>1</sup>  
integrand<sup>2</sup>  
variable of integration<sup>3</sup>  
constant of integration<sup>4</sup>  
arbitrary constant<sup>5</sup>

جدول 5.1: مکمل کے کلیات

تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے	غیر قطعی مکمل
$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$	1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, n \text{ نامطلق}$
$\frac{d}{dx} (x) = 1$	$\int dx = \int 1 dx = x + C$ (خصوصی صورت)
$\frac{d}{dx} \left( -\frac{\cos kx}{k} \right) = \sin kx$	2. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin kx}{k} \right) = \cos kx$	3. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	4. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx} (-\cot x) = \csc^2 x$	5. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	6. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx} (-\csc x) = \csc x \cot x$	7. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں  $n = 5$  لیتے ہوئے:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں  $n = -\frac{1}{2}$  لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں  $k = 2$  لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں  $k = \frac{1}{2}$  لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ مکمل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق مکمل ہو گا۔



ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

