احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 6

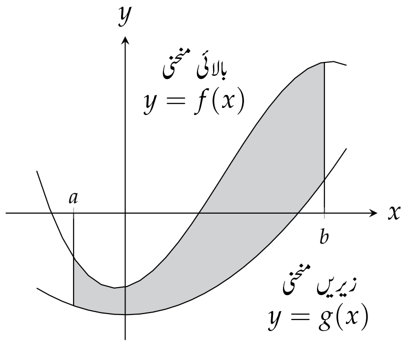
تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے بیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبے، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین پانی کی نکاسی کے لئے درکار کام، سیلاب دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدد۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریمان مجموعوں کے حد یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدوں کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکمل کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جا سکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کی طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ

محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطہ کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔



شکل 6.1: منحنیات $y = f(x)$، $y = g(x)$ اور لکیر $x = a$، $x = b$ کے بیچ خطہ۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کا حد

فرض کریں ایک خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = f(x)$ اور زیریں سرحد منحنی $y = g(x)$ ہیں جبکہ اس کا بایاں اور دایاں سرحد بالترتیب خط $x = a$ اور $x = b$ ہیں (شکل 6.1)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری f اور g کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

تکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ $[a, b]$ پر خانہ بندی $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ کے تحت خطہ کو n انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.2) جہاں k ویں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل 6.3)۔

$$\Delta S_k = \text{قد} \times \text{چوڑائی} = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$

اس کے بعد ہم خطے کے رقبہ کو تخمیناً ان n مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

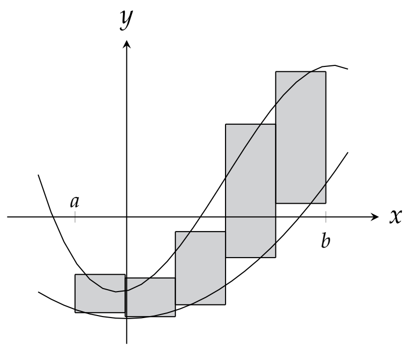
$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ f اور g استمراری ہیں لہٰذا $\|P\| \to 0$ کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ ہو گا:

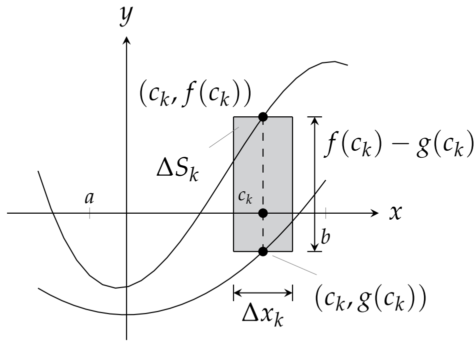
$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

تعریف: اگر پورے $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہوں اور $f(x) \geq g(x)$ ہو تب a تا b منحنیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ رقبہ a تا b متکمل $[f - g]$ کا تکمل ہو گا:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$



شکل 6.2: ہم خطہ کو تخمیناً x محور کے عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔



شکل 6.3: k ویں مستطیل کا قد $f(c_k) - g(c_k)$ اور اس کی چوڑائی Δx_k لہٰذا اس کا رقبہ $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$ ہو گا۔

□

مساوات 6.1 کو استعمال کرنے کے لئے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

دو منحنیات کے بیچ رقبے کی تلاش

1. منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔ اس سے معلوم ہو گا کہ کونسی منحنی بالائی f اور کونسی زیریں g ہے۔ اس سے تکمل کے حد تعین کرنے میں بھی مدد ملتی ہے۔

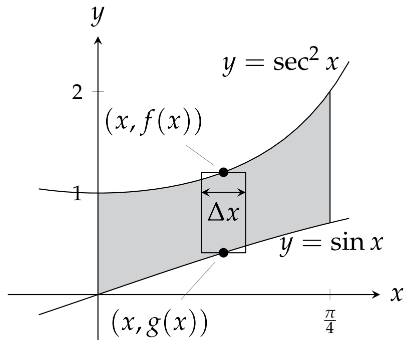
2. تکمل کے حد تلاش کریں۔

3. متکمل $f(x) - g(x)$ کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

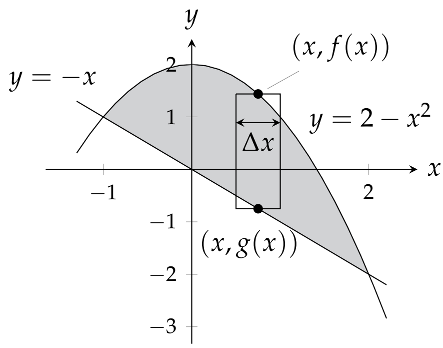
4. متکمل $[f(x) - g(x)]$ کا تکمل a تا b حاصل کریں۔ قطعی تکمل سے حاصل عدد رقبہ ہو گا۔

مثال 6.1: منحنیات $y = \sec^2 x$ اور $y = \sin x$ کے بیچ 0 تا $\frac{\pi}{4}$ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ہم منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.4)۔ بالائی قوس $f(x) = \sec^2 x$ کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس $g(x) = \sin x$ کی منحنی ہے۔
دوسرا قدم: تکمل کے حد $a = 0$ اور $b = \frac{\pi}{4}$ دیے گئے ہیں۔



شکل 6.4: خطہ برائے مثال 6.1



شکل 6.5: خطہ برائے مثال 6.2

تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = \sec^x - \sin x$
چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x)\,\mathrm{d}x = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ پایا جاتا ہو تب نقاط تقاطع سے تکمل کے حد حاصل ہوں گے۔

مثال 6.2: قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $y = -x$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل 6.5)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم $f(x) = 2 - x^2$ اور $g(x) = -x$ لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے x محدد تکمل کے حد ہوں گے۔
دوسرا قدم: تکمل کے حد جاننے کے لئے ہم $y = 2 - x^2$ اور $y = -x$ کو ایک ساتھ x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2 - x^2 &= -x && f(x) \text{ اور } g(x) \text{ کو برابر پر کریں} \\
x^2 - x - 2 &= 0 && \text{ایک جانب منتقلی} \\
(x+1)(x-2) &= 0 && \text{تجزی} \\
x = -1, \quad x &= 2 && \text{حل}
\end{aligned}$$

خطہ $x=-1$ اور $x=2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔
تیسرا قدم: $f(x)-g(x)=(2-x^2)-(-x)=2+x-x^2$
چوتھا قدم:

$$
\begin{aligned}
S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2}(2+x-x^2)\,\mathrm{d}x=\Big[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2}\\
&=\Big(4+\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\Big)-\Big(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)\\
&=6+\frac{3}{2}-\frac{9}{3}=\frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

□

فنیات   دو ترسیمات کا تقاطع
تکمل کے حصول میں بعض اوقات تکمل کے حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یا تو ایک تفاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کا نقاط تقاطع۔

مساوات $f(x)=g(x)$ حل کرنے کے لئے ہم $y=f(x)$ اور $y=g(x)$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات $f(x)-g(x)=0$ کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل 6.6)۔

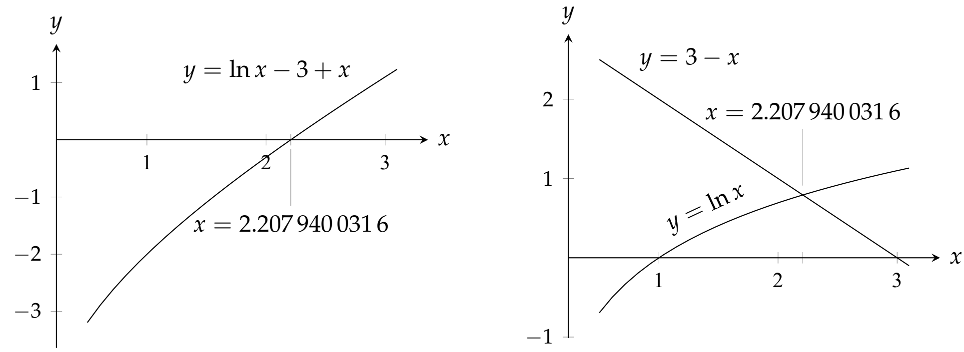
$$f(x)=\ln x,\quad g(x)=3-x$$

6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی خطے پر علیحدہ علیحدہ مساوات 6.1 کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال 6.3: ربع اول میں $y=\sqrt{x}$ کے نیچے اور $y=x-2$ کے اوپر رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: ترسیم (شکل 6.7) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد $f(x)=\sqrt{x}$ ہے جبکہ $0\le x\le 2$ پر اس کی نچلی سرحد $g(x)=0$ اور $2\le x\le 4$ پر نچلی سرحد $g(x)=x-2$ ہے (نقطہ $x=2$ پر $g(x)$ کے دونوں کلیات ایک جیسے ہیں)۔ ہم $x=2$ پر خطہ کو دو ذیلی حصوں A اور B میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لئے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔



(ا) نقطہ قطع

(ب) جذر

شکل 6.6: تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کے حل کی تلاش۔

دوسرا قدم: خطہ A میں تکمل کے حد $a=0$ اور $b=2$ ہیں۔ خطہ B کا بایاں حد $a=2$ ہے۔ اس کے دایاں حد جاننے کے لئے ہم مساوات $y=\sqrt{x}$ اور $y=x-2$ کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$$\sqrt{x}=x-2$$ $f(x)$ اور $g(x)$ کے برابر پر کریں

$$x=(x-2)^2=x^2-4x+4$$ مربع لیں

$$x^2-5x+4=0$$ ایک جانب منتقلی

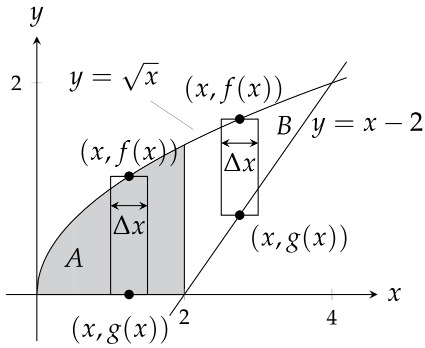
$$(x-1)(x-4)=0$$ تجزی

$$x=1, \quad x=4$$ حل

صرف $x=4$ مساوات $\sqrt{x}=x-2$ کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مربع لینے کی وجہ سے حل $x=1$ پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں دایاں حد $b=4$ ہے۔

تیسرا قدم:

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x)&=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}, && 0\le x\le 2\\
f(x)-g(x)&=\sqrt{x}-(x-2)=\sqrt{x}-x+2, && 2\le x\le 4
\end{aligned}
$$



شکل 6.7: خطہ برائے مثال 6.3

چوتھا قدم: ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (\sqrt{x}-x+2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 \\
&= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right) \\
&= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

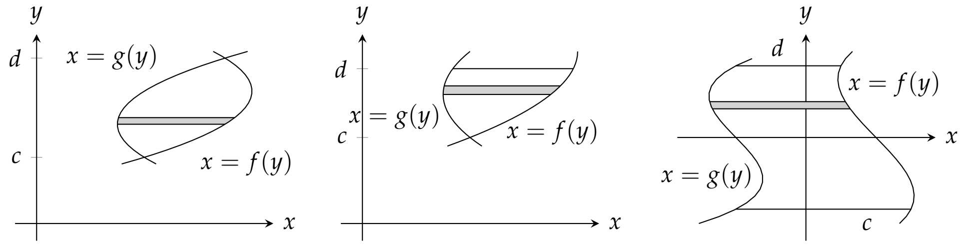
□

تکمل بلحاظ y

اگر سرحد کی مساواتیں y کی تفاعل ہوں تب تخمینی مستطیل کو انتصابی کی بجائے افقی بنایا جاتا ہے اور بنیادی کلیہ میں x کی جگہ y پایا جائے گا (شکل 6.8):

$$S = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y \tag{6.2}$$

مثال 6.4: درج بالا مثال 6.3 کو اس بار مساوات 6.2 کی مدد سے حل کریں۔



شکل 6.8: ان اشکال میں دایاں سرحد f اور بایاں سرحد g ہو گا لہٰذا $f(y) - g(y)$ غیر منفی ہو گا۔

حل: پہلا قدم: ہم خطہ ترسیم کر کے نمائندہ افقی مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.8)۔ خطے کا دایاں سرحد لکیر $x = y + 2$ ہے لہٰذا $f(y) = y + 2$ ہو گا۔ خطے کا بایاں سرحد $x = y^2$ ہے لہٰذا $g(y) = y^2$ ہو گا۔
دوسرا قدم: تکمل کا زیریں حد $y = 0$ ہے۔ تکمل کا بالائی حد جاننے کے لئے ہم $x = y + 2$ اور $x = y^2$ کو y کے لئے حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} y + 2 &= y^2 && \text{کو } g \text{ کے برابر پر کرتے ہیں } f \\ y^2 - y - 2 &= 0 && \text{ایک ہاتھ منتقلی} \\ (y+1)(y-2) &= 0 && \text{تجزی} \\ y = -1, \quad y &= 2 && \text{حل} \end{aligned}$$

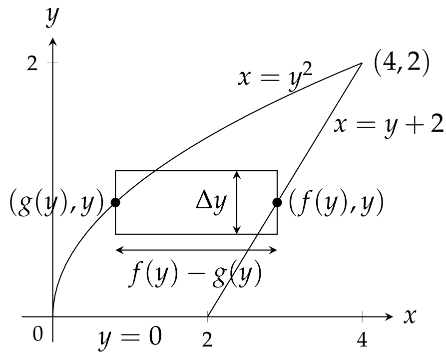
تکمل کا بالائی حد $y = 2$ ہے (چونکہ $y = -1$ افقی محور سے نیچے تفاعل کا نقطہ قطع دیتا ہے)۔
تیسرا قدم:

$$f(y) - g(y) = y + 2 - y^2 = 2 + y - y^2$$

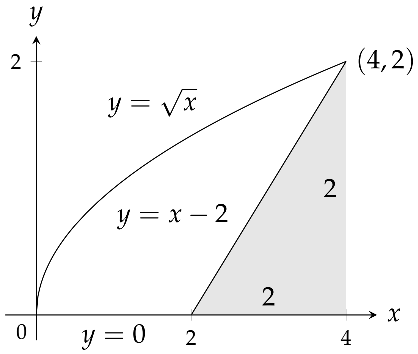
چوتھا قدم:

$$\begin{aligned} S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,\mathrm{d}y \\ &= \Big[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

یہ وہی جواب ہے جو مثال 6.3 میں حاصل کی گیا۔ مثال 6.3 میں دو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش آئی جبکہ یہاں ایک ہی تکمل سے رقبہ معلوم کرنا ممکن تھا۔ □



شکل 6.9: خطہ برائے مثال 6.4



شکل 6.10: بالائی منحنی کے نیچے خطہ سے تکون منفی کرنے سے رقبہ حاصل ہو گا۔

تکمل کے ساتھ جیومیٹریائی کلیات کا استعمال

تکمل اور جیومیٹریائی کلیات کو ملا کر رقبہ نسبتاً زیادہ جلد حاصل ہوتا ہے۔

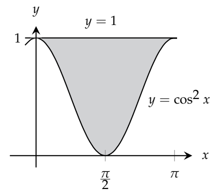
مثال 6.5: مزید ایک بار مثال 6.3 میں دیے گئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم $0 \le x \le 4$ محور x اور $y = \sqrt{x}$ کے بیچ رقبہ سے تلا 2 اور قد 2 کے تکون کا رقبہ منفی کرتے ہوئے درکار خطے کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

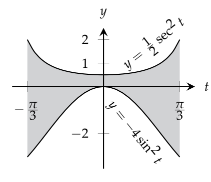
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(2)(2) \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2 \\
&= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

□

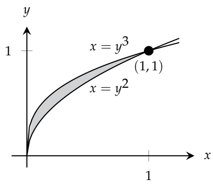
گزشتہ تین مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ دو منحنیات کے بیچ رقبہ بعض اوقات x کی بجائے y کے ساتھ تکمل لے کر نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بعض اوقات تکمل اور جیومیٹری کے کلیات کو ملا کر جلد جواب حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکمل لکھنے سے پہلے مسئلے پر غور کرنا بہتر ہو گا۔



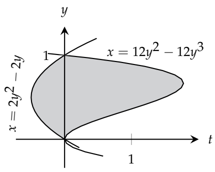
شکل 6.11



شکل 6.12



شکل 6.13



شکل 6.14

سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 1: سایہ دار خطہ شکل 6.11 جہاں سرحد $y = 1$ اور $y = \cos^2 x$ ہیں۔
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 2: سایہ دار خطہ شکل 6.12 جہاں سرحد $y = \frac{1}{2}\sec^2 t$ ، $y = -4\sin^2 t$ ، $y = -\frac{\pi}{3}$ اور $y = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔

سوال 3: سایہ دار خطہ شکل 6.13 جہاں سرحد $x = y^3$ اور $x = y^2$ ہیں۔
جواب: $\frac{1}{12}$

سوال 4: سایہ دار خطہ شکل 6.14 جہاں سرحد $x = 12y^2 - 12y^3$ اور $x = 2y^2 - 2y$ ہیں۔

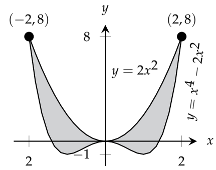
سوال 5: سایہ دار خطہ شکل 6.15 جہاں سرحد $y = 2x^2$ اور $y = x^4 - 2x^2$ ہیں۔
جواب: $\frac{128}{15}$

سوال 6: سایہ دار خطہ شکل 6.16 جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = -2x^4$ ، $x = -1$ اور $x = 1$ ہیں۔

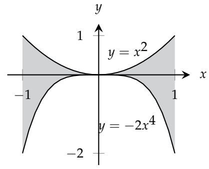
سوال 7: سایہ دار خطہ شکل 6.17 جہاں سرحد $y = 1$ ، $y = x$ اور $y = \frac{x^2}{4}$ ہیں۔
جواب: $\frac{5}{6}$

سوال 8: سایہ دار خطہ شکل 6.18 جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ اور $y = 0$ ہیں۔

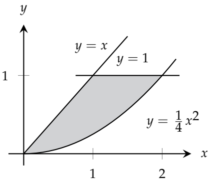
سوال 9 تا سوال 12 میں کل سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔



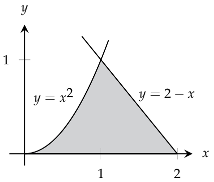
شکل 6.15



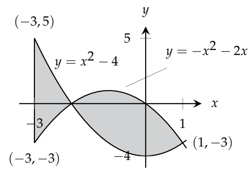
شکل 6.16



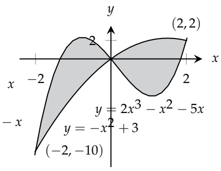
شکل 6.17



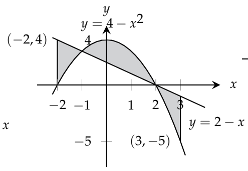
شکل 6.18



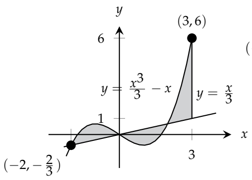
شکل 6.19



شکل 6.20



شکل 6.21



شکل 6.22

سوال 9: سایہ دار رقبہ شکل 6.19 جہاں سرحد $y=x^2-4$ ، $y=-x^2-2x$ اور $x=-3$ ہیں۔
جواب: $\frac{38}{3}$

سوال 10: سایہ دار رقبہ شکل 6.20 جہاں سرحد $y=-x^2+3x$ اور $y=2x^3-x^2-5x$ ہیں۔

سوال 11: سایہ دار رقبہ شکل 6.21 جہاں سرحد $y=4-x^2$ ، $y=2-x$ ، $x=-2$ اور $x=3$ ہیں۔
جواب: $\frac{49}{6}$

سوال 12: سایہ دار رقبہ شکل 6.22 جہاں سرحد $y=\frac{x^3}{3}-x$ ، $y=\frac{x}{3}$ اور $x=3$ ہیں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں محیط خطے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 13: $y=x^2-2, \quad y=2$
جواب: $\frac{32}{3}$

سوال 14: $y=2x-x^2, \quad y=-3$

سوال 15: $y=x^4, \quad y=8x$
جواب: $\frac{48}{5}$

سوال 16: $y = x^2 - 2x, \quad y = x$

سوال 17: $y = x^2, \quad y = -x^2 + 4x$
جواب: $\frac{8}{3}$

سوال 18: $y = 7 - 2x^2, \quad y = x^2 + 4$

سوال 19: $y = x^4 - 4x^2 + 4, \quad y = x^2$
جواب: 8

سوال 20: $y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0, \quad y = 0$

سوال 21: $y = \sqrt{|x|}, \quad 5y = x + 6$ کتنے نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں؟
جواب: $\frac{5}{3}$ تین نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں۔

سوال 22: $y = \left|x^2 - 4\right|, \quad y = \frac{x^2}{2} + 4$

سوال 23 تا سوال 30 میں دی گئی منحنیات اور لکیروں کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 23: $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$
جواب: 18

سوال 24: $x = y^2, \quad x = y + 2$

سوال 25: $y^2 - 4x = 4, \quad 4x - y = 16$
جواب: $\frac{243}{8}$

سوال 26: $x - y^2 = 0, \quad x + 2y^2 = 3$

سوال 27: $x + y^2 = 0, \quad x + 3y^2 = 2$
جواب: $\frac{8}{3}$

سوال 28: $x - y^{2/3} = 0, \quad x + y^4 = 2$

سوال 29: $x = y^2 - 1, \quad x = |y|\sqrt{1 - y^2}$
جواب: 2

سوال 30: $x = y^3 - y^2, \quad x = 2y$

سوال 31 تا سوال 34 میں محیط رقبہ تلاش کریں۔ رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔

سوال 31: $4x^2 + y = 4, \quad x^4 - y = 1$
جواب: $\frac{104}{15}$

سوال 32: $x^3 - y = 0, \quad 3x^2 - y = 4$

سوال 33: $x + 4y^2 = 4 \quad x + y^4 = 1, \quad x \geq 0$
جواب: $\frac{56}{15}$

سوال 34: $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 0$

سوال 35 تا سوال 42 میں محیط رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ رقبہ معلوم کریں۔

سوال 35: $y = 2\sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$
جواب: 4

سوال 36: $y = 8\cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

سوال 37: $y = \cos(\frac{\pi x}{2}), \quad y = 1 - x^2$
جواب: $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$

سوال 38: $y = \sin(\frac{\pi x}{2}), \quad y = x$

سوال 39: $y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 40: $x = \tan^2 y, \quad x = -\tan^2 y, \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

سوال 41: $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: 2

سوال 42: $y = \sec^2(\frac{\pi x}{3}), \quad y = x^{1/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال 43: ہوائی جہاز کے پنکھے کی طرح کا خطہ $x - y^3 = 0$ اور $x - y = 0$ گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا رقبہ دریافت کریں۔
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 44: پنکھا نما خطہ $x - y^{1/3} = 0$ اور $x - y^{1/5} = 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 45: ربع اول میں لکیر $y = x$، لکیر $x = 2$، منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔
جواب: 1

سوال 46: ربع اول میں بائیں جانب y محور اور دائیں جانب منحنیات $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ تکون نما خطہ گھیرتے ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 47: بالائی جانب لکیر $y = 4$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ میں محیط رقبہ کو افقی خط $y = c$ دو برابر ذیلی خطوں میں تقسیم کرتا ہے۔

ا. خطے کا خاکہ کھینچیں اور اس پر افقی لکیر $y = c$ اندازاً درست مقام پر بنائیں۔ قطع مکافی اور افقی لکیر جن نقطوں پر متقاطع ہیں، ان نقطوں کو c کی روپ میں دریافت کر کے خاکے پر دکھائیں۔

ب. y کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (تکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)

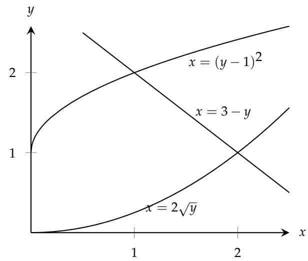
ج. x کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (اس بار بھی تکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)

جواب: (ا) $(\mp\sqrt{c}, c)$، (ب) $c = 4^{2/3}$، (ج) $c = 4^{2/3}$

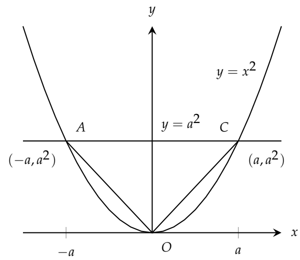
سوال 48: منحنی $y = 3 - x^2$ اور لکیر $y = -1$ کے بیچ رقبہ (ا) x کے لحاظ سے، (ب) y کے لحاظ سے تکمل لے کر معلوم کریں۔

سوال 49: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے لکیر $y = \frac{x}{4}$، بالائی بائیں منحنی $y = 1 + \sqrt{x}$ اور بالائی دائیں منحنی $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں۔
جواب: $\frac{11}{3}$

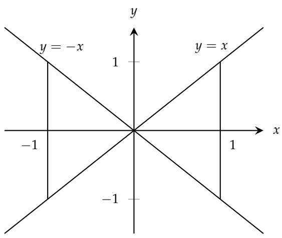
سوال 50: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے لکیر $x = 2\sqrt{y}$، بالائی بائیں منحنی $x = (y-1)^2$ اور بالائی دائیں منحنی $x = 3 - y$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں (شکل 6.23)۔



شکل 6.23: خطہ برائے سوال 50



شکل 6.24: خطہ برائے سوال 51



شکل 6.25: خطہ برائے سوال 53

سوال 51: قطع مکافی $y = x^2$ میں محصور تکون AOB شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ تکون کا بالائی ضلع لکیر $y = a^2$ ہے۔ تکون اور قطع مکافی کے رقبوں کی نسبت کی حد $a \to 0$ کر کے تلاش کریں۔
جواب: $\frac{3}{4}$

سوال 52: مثبت استمراری تفاعل f اور $a \le x \le b$ پر x محور کے بیچ رقبہ 4 ہے۔ منحنی $y = f(x)$ اور $y = 2f(x)$ کے بیچ رقبہ $x = a$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 53: درج ذیل میں سے کونسا تکمل شکل 6.25 میں دکھایا گیا رقبہ دیتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\int_{-1}^{1}(x - (-x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2x\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_{-1}^{1}(-x - (x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} -2x\,\mathrm{d}x$

جواب: کوئی نہیں

سوال 54: کیا استمراری تفاعل $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ اور انتصابی لکیروں $x = a$ اور $x = b$ جہاں $a < b$ ہے کے بیچ رقبہ درج ذیل دیتا ہے؟ درست، کبھی کبھار درست یا کبھی نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 55 تا سوال 58 میں مستوی میں منحنیات کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ جہاں منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کرنا دشوار ہو وہاں کمپیوٹر کا سہارا لیتے ہوئے درج ذیل اقدام سرانجام دیں۔

ا. منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے خطہ کی عمومی صورت دیکھیں اور نقاط تقاطع کی تعداد جانیں۔

ب. نقاط تقاطع کو اعدادی تراکیب سے تلاش کریں۔

ج. یک بعد دیگرے جوڑی نقاط تقاطع کے بیچ $\left|f(x)-g(x)\right|$ کا تکمل حل کریں۔

د. جزو-ج میں تکمل کی حاصل قیمتوں کا مجموعہ لیں۔

سوال 55: $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3},\quad g(x)=x-1$

سوال 56: $f(x)=\frac{x^4}{2}-3x^3+10,\quad g(x)=8-12x$

سوال 57: $f(x)=x+\sin(2x),\quad g(x)=x^3$

سوال 58: $f(x)=x^2\cos x,\quad g(x)=x^3-x$

6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش

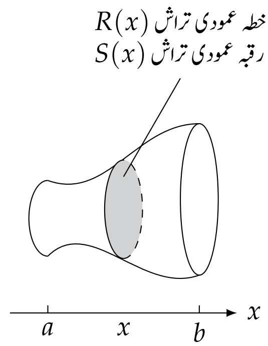
قوسی سرحد کے خطوں کے رقبہ عمودی تراش سے بیلنی حجم معلوم کرنے کے لئے رقبہ عمودی تراش کو بیلن کے قد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرز کے بیلنی حجم سے دیگر اشکال کے خطوں کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے۔

ٹکیاں

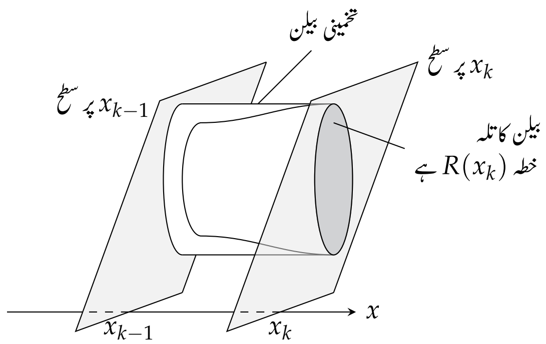
فرض کریں ہم شکل 6.26 میں دکھائے گئے ٹھوس جسم کا حجم دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ بند وقفہ $[a,b]$ کے ہر نقطہ x پر جسم کا عمودی تراش خطہ $R(x)$ ہے جس کا رقبہ $S(x)$ ہے۔ یوں S متغیر x کا حقیقی قیمت تفاعل ہو گا جو x کا استمراری تفاعل بھی ہو گا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے جسم کے حجم کی تعریف پیش کی جا سکتی ہے جس کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ہم x محور کے لحاظ سے وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی کر کے جسم کو خانہ بند نقطوں پر x محور کے عمودی، سطحوں سے مولی کی طرح چپٹا ٹکڑے کرتے ہوئے جسم کی ٹکیاں بناتے ہیں۔ یوں نقطہ x_{k-1} اور x_k پر سطحوں کے بیچ k ویں ٹکیا کا حجم تقریباً اس بیلن جتنا ہو گا جو ان سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے اور جس کا عمودی تراش خطہ $R(x_k)$ ہے (شکل 6.27)۔ اس بیلن کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}H_k &= \text{قد} \times \text{رقبہ تلہ}\\ &= S(x_k)\times(x_{k-1} \text{ اور } x_k \text{ کے بیچ فاصلہ})\\ &= S(x_k)\Delta x_k\end{aligned}$$



شکل 6.26: عمودی تراش $R(x)$ کا رقبہ $S(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم ٹھوس جسم کا حجم $x=a$ تا $x=b$ تفاعل $S(x)$ کا تکمل لے کر حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل 6.27: سطح x_{k-1} اور x_k کے بیچ ٹکیا کو بڑا کر کے دکھایا گیا ہے اور ساتھ ہی تخمینی بیلن بھی دکھایا گیا ہے۔

اس طرح تمام چھوٹے بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تخمیناً ٹھوس جسم کے حجم کے برابر ہو گا:

$$\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

یہ وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $S(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں۔ کہ جیسے جیسے $[a,b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچے ویسے ویسے یہ مجموعے اصل حجم کی بہتر سے بہتر عکاسی کریں گے۔ یوں ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف ان مجموعوں کا تحدیدی تکمل ہو گا۔

تعریف: ایسا ٹھوس جسم جس کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو، کا $x=a$ سے $x=b$ تک حجم $x=a$ تا $x=b$ تفاعل S کا تکمل ہو گا:

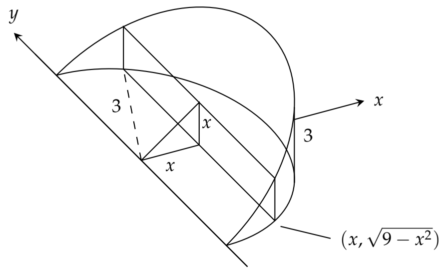
$$H=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.3}$$

□

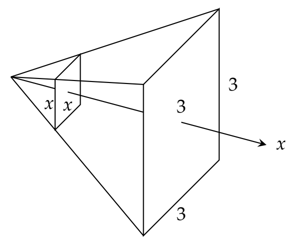
مساوات 6.3 استعمال کرنے کے لئے درج ذیل تین اقدام کرنے ہوں گے۔

ٹھوس جسم کی ٹکیوں سے حجم کی تلاش

1. ٹھوس جسم اور اس کے نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ کھینچیں۔



شکل 6.29: قوسی پچر (مثال 6.7)



شکل 6.28: اہرام (مثال 6.6)

2. رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

3. تکمل کا زیریں اور بالائی حد تلاش کریں۔

4. حجم معلوم کرنے کی خاطر $S(x)$ کا تکمل حل کریں۔

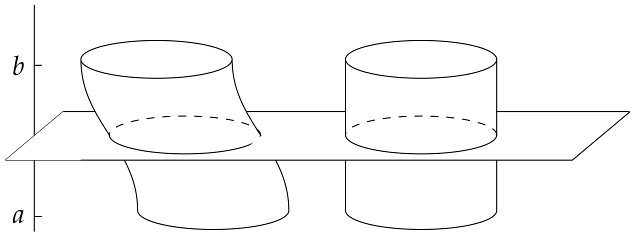
مثال 6.6: ایک اہرام کا قد $3\,\mathrm{m}$ اور اس کے چکور بنیاد کا ضلع $3\,\mathrm{m}$ ہے۔ اہرام کی چوٹی سے x میٹر نیچے اہرام کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا جس کا ضلع x میٹر ہو گا۔ اس اہرام کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم اہرام کی چوٹی کو مبدا پر رکھ کر اہرام کو x محور پر لیٹا ہوا بنا کر نمائندہ رقبہ عمودی تراش بناتے ہیں (شکل 6.28)۔
دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$۔ چونکہ چکور رقبہ عمودی تراش کا ضلع x میٹر ہے لہٰذا اس کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = x^2$ ہو گا۔
تیسرا قدم: تکمل کے حد۔ چکور $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں لہٰذا $a = 0$ اور $b = 3$ ہوں گے۔
چوتھا قدم: حجم۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

یوں اہرام کا حجم $9\,\mathrm{m}^3$ ہو گا۔ □

مثال 6.7: رداس 3 کے بیلن کو دو مستوی سے کاٹ کر قوسی پچر بنایا جاتا ہے۔ ایک مستوی بیلن کے محور کا عمودی ہے جبکہ دوسرا مستوی پہلے مستوی کو بیلن کے وسط پر 45° سے قطع کرتا ہے۔ پچر کا حجم تلاش کریں۔



شکل 6.30: ان اجسام کا حجم ایک دوسرے جیسا ہے۔ آپ سکوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

حل: پہلا قدم: خاکہ۔ ہم پچر اور نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.29)۔ عمودی تراش x محور کے عمودی ہے۔
دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$ ۔ نقطہ x پر مستطیل عمودی تراش کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = (\text{قد})(\text{چوڑائی}) = (x)(2\sqrt{9-x^2}) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

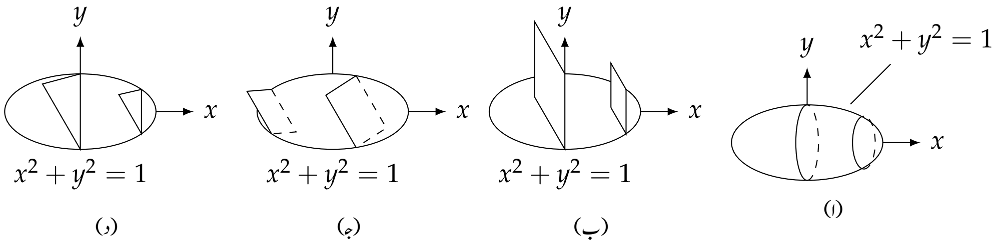
تیسرا قدم: تکمل کے حد۔ مستطیل $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں۔
چوتھا قدم: حجم۔ درج ذیل میں $u = 9 - x^2$ لہٰذا $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ لے کر تکمل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

□

مثال 6.8: مسئلہ کوالئیرے[1] محور x پر پڑے ہوئے ایسے دو اجسام جن کا ہر x پر رقبہ عمودی تراش ایک دوسرے جیسا ہو کا حجم بھی ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ یہ حقیقت مساوات 6.3 سے صاف ظاہر ہے چونکہ دونوں اجسام کا رقبہ عمودی تراش تفاعل $S(x)$ ایک دوسرے جیسا ہے (شکل 6.30)۔ □

[1] اطالوی ریاضی دان بوناونتورا کوالئیرے [1598-1647]



شکل 6.31: عمودی تراش برائے سوال 1

سوالات

رقبہ عمودی تراش
سوال 1 اور سوال 2 میں x محور کے عمودی، ٹھوس جسم کے، رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 1: ایک ٹھوس جسم $x=-1$ اور $x=1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش نصف دائرہ $y=-\sqrt{1-x^2}$ اور نصف دائرہ $y=\sqrt{1-x^2}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ب)۔

ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنا ہوتی ہے (شکل 6.31-ج)۔

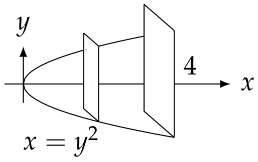
د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-د)۔

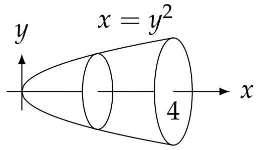
جواب: (ا) $S(x)=\pi(1-x^2)$، (ب) $S(x)=4(1-x^2)$،
(ج) $S(x)=2(1-x^2)$، (د) $S(x)=\sqrt{3}(1-x^2)$

سوال 2: ایک ٹھوس جسم $x=0$ اور $x=4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش، قطع مکافی $y=-\sqrt{x}$ اور قطع مکافی $y=\sqrt{x}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.32-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 2-ب)۔





شکل 6.32: عمودی تراش برائے سوال 2

ج۔ عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔

د۔ عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں۔

ٹکیوں سے حجم کی تلاش

سوال 3 تا سوال 12 میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 3: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش کی صورت چکور ہے جو x محور کے عمودی ہیں اور جن کے وتر قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ سے قطع مکافی $y = \sqrt{x}$ تک ہیں۔
جواب: 16

سوال 4: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر دائری اقراص ہیں جو قطع مکافی $y = x^2$ سے قطع مکافی $y = 2 - x^2$ تک ہیں۔

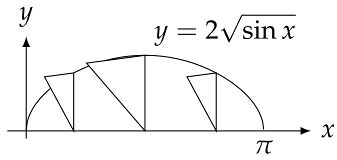
سوال 5: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے تلا کے کنارے نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 6: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے وتر نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنّا ہوتی ہے۔

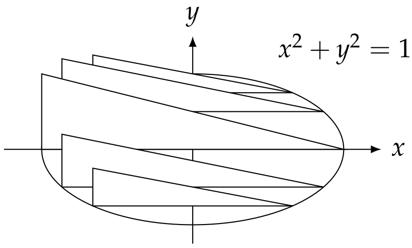
سوال 7: ایک ٹھوس جسم کا تلا منحنی $y = 2\sqrt{\sin x}$ اور x محور پر وقفہ $[0, \pi]$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی عمودی تراش درج ذیل ہیں۔

ا۔ مساوی الاضلاع مثلث جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں (شکل 6.33)۔

ب۔ انتصابی چکور جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں۔



شکل 6.33: عمودی تراش (سوال 7)



شکل 6.34: عمودی تراش (سوال 10)

جواب: (ا) $2\sqrt{3}$، (ب) 8

سوال 8: ایک ٹھوس جسم $x = -\frac{\pi}{3}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کی خواص درج ذیل ہیں۔

ا. دائری اقراص جن کے قطر $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

ب. انتصابی چکور کن کے قاعدے $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

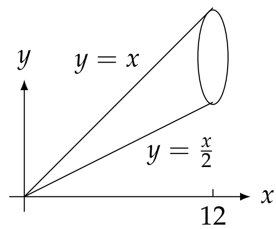
سوال 9: ایک ٹھوس جسم $y = 0$ اور $y = 2$ پر y محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے دائری عمودی تراش y محور کے عمودی ہیں جن کے قطر y محور سے قطع مکافی $x = \sqrt{5}y^2$ تک ہیں۔
جواب: 8π

سوال 10: ایک ٹھوس جسم کا تلا قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ ہے۔ عمودی تراش $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ y محور کے عمودی ہیں جو مساوی الساقین مثلث ہیں جن کا ایک ضلع قرص میں پایا جاتا ہے (شکل 6.34)۔

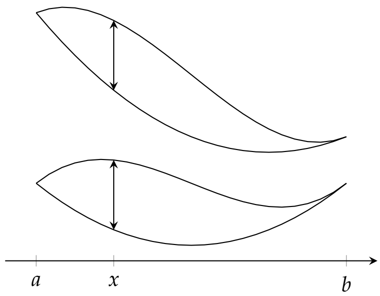
مسئلہ کوالئیرے
سوال 11: بلدار ٹھوس جسم
ایک چکور جس کا ضلع s ہے لکیر L کے عمودی مستوی میں پایا جاتا ہے۔ چکور کا ایک راس L پر پایا جاتا ہے۔ یہ چکور L پر h فاصلہ طے کرتے ہوئے ایک چکر کاٹ کر پیچ نما جسم دیتا ہے جس کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا۔

ا. اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

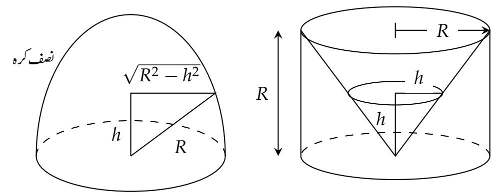
ب. اگر چکور ایک کی بجائے دو بار چکر کاٹتا تب حجم کتنا ہوتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



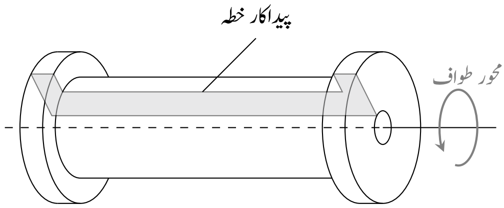
شکل 6.35: عمودی تراش (سوال 12)



شکل 6.36: وقفہ $[a, b]$ پر کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جتنی ہے (مسئلہ کوالیئرے)۔



شکل 6.37: کرہ اور بیلن سے مخروط منفی کر کے ایک جیسا حجم ملتا ہے (سوال 14)۔



شکل 6.38: مستوی خطہ کو کسی محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

جواب: (ا) s^2h ، (ب) s^2h

سوال 12: ایک ٹھوس جسم $x = 01$ اور $x = 12$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر لکیر $y = \frac{x}{2}$ سے لکیر $y = x$ تک ہیں (شکل 6.35)۔ اس جسم کا حجم کیوں اس قائمہ مخروط جتنا ہو گا جس کا قد 12 اور جس کے تلا کا رداس 3 ہو؟

سوال 13: مسئلہ کوالیئرے کی ابتدائی صورت
کوالیئرے نے طالب علمی کے دوران دریافت کیا کہ اگر دو مستوی خطوں کو x محور کے یکساں وقفہ پر یوں رکھنا ممکن ہو کہ کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جیسی ہو تب دونوں خطوں کا رقبہ ایک دوسرے جیسا ہو گا (شکل 6.36)۔ ٹھوس اجسام کے لئے یہی مسئلہ کوالیئرے نے کبھی ثابت نہیں کیا۔ اگر شکل 13 میں بالائی اور زیریں سرحدیں استمراری تفاعل ہوں تب اس مسئلے کو ثابت کریں۔

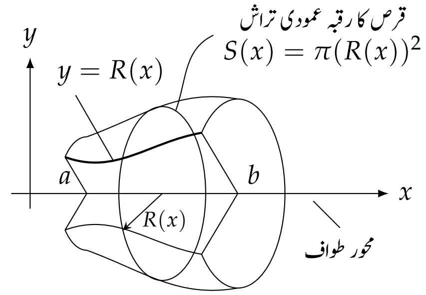
سوال 14: نصف کرہ کا حجم بذریعہ مسئلہ کوالیئرے
نصف کرہ کا حجم $H = \frac{2}{3}\pi R^3$ ہے جہاں R رداس ہے۔رداس R اور قد R کے قائمہ بیلن سے رداس R اور قد R کا قائمہ مخروط ہٹا کر نصف کرہ کا عمودی تراش حاصل ہوتا ہے۔ مخروط کو نوک کے بل رکھا تصور کریں (شکل 6.37)۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے نصف کرہ کا حجم تلاش کریں۔

6.3 اجسام طواف کے حجم۔قرص اور چھلا

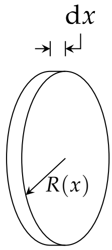
مستوی خطے کو کسی محور کے گرد گمانے سے جسم طواف[2] پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.38)۔ جسم طواف پیدا کرنے کے لئے گھمائے جانے والے مستوی خطے کو پیدا کار خطہ[3] کہتے ہیں۔ جسم طواف کا حجم ٹکیوں کی ترکیب سے نہایت خوش اسلوبی سے حاصل ہوتا ہے۔

---

[2] solid of revolution
[3] generating region



(ا) استمراری تفاعل $y = R(x)$ کو $x = a$ تا $x = b$ محور x کے گرد گھمایا گیا ہے۔



(ب) قرص کا حجم $\mathrm{d}H = \pi(R(x))^2$ ہے۔

شکل 6.39: جسم طواف کے حجم کا حصول بذریعہ ترکیب قرص۔

اگر ہم مستوی خطہ کو استمراری تفاعل $y = R(x),\ a \le x \le b$ اور x کے بیچ خطہ سے ظاہر کر سکیں اور اگر x محور گھومنے کا محور (محور طواف[4]) بھی ہو تب ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 6.39)۔

محور طواف کے لحاظ سے عمودی تراش کا رداس $R(x)$ اور رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi[R(x)]^2$$

جسم کا حجم، $x = a$ تا $x = b$ ، تفاعل S کا تکمل ہو گا۔

جسم طواف کا حجم (محور طواف x محور ہے)

استمراری تفاعل $y = R(x),\ a \le x \le b$ کو x محور کے گرد گھمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

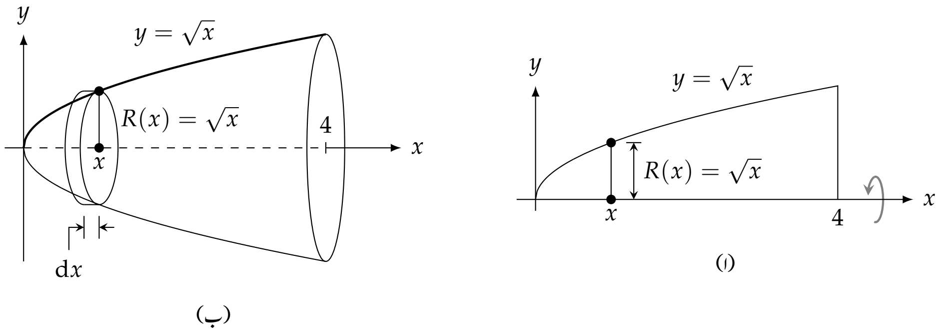
$$H = \int_a^b \pi[\text{رداس}]^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

مثال 6.9: منحنی $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ کو x محور کے گرد گھمانے سے ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ رداس بناتے ہیں (شکل 6.40)۔ حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.4}\\
&= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\,\mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x}\\
&= \pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi
\end{aligned}$$

[4] axis of revolution



شکل 6.40: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.9)

$\square$

مساوات 6.4 سے حجم حاصل کرنے کا طریقہ

ا. خطے کا خاکہ بنائیں اور رداس $R(x)$ کی نشاندہی کریں۔

ب. یوں رقبہ عمودی تراش $\pi[R(x)]^2$ ہو گا۔

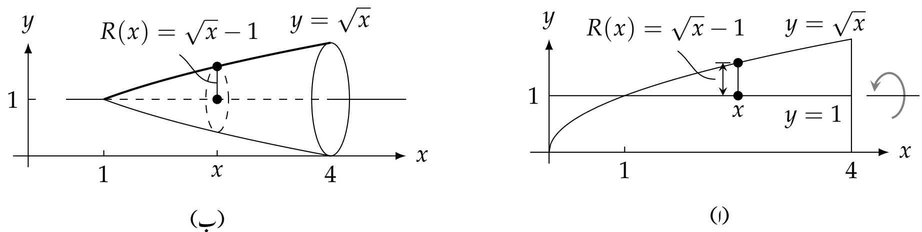
ج. رقبہ عمودی تراش کا تکمل حجم ہو گا۔

اگلے مثال میں محور طواف x محور نہیں ہے، لیکن حجم حاصل کرنے کا اصول تبدیل نہیں ہوتا: تکمل کے موزوں حد استعمال کریں۔

مثال 6.10: تفاعل $y = \sqrt{x}$، لکیر $y = 1$ اور لکیر $x = 4$ کے بیچ خطہ کو لکیر $y = 1$ کے گرد گھما کر ٹھوس جسم پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم خطہ اور نمائندہ رداس بنا کر ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.41)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2 \,\mathrm{d}x && \text{مساوات } 6.4 \\
&= \int_1^4 \pi[\sqrt{x} - 1]^2 \,\mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x} - 1 \\
&= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \Big[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x\Big]_1^4 = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$



شکل 6.41: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.10)

□

منحنی $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو y محور کے گرد گما کر ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے جس کا حجم تلاش کرتے ہوئے مساوات 6.4 میں x کی جگہ y لکھا جاتا ہے۔

جسم طواف کا حجم (محور طواف y محور ہے)
استمراری تفاعل $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو y محور کے گرد گمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_c^d \pi[\text{رداس}]^2 \,\mathrm{d}x = \int_c^d \pi[R(y)]^2 \,\mathrm{d}y \tag{6.5}$$

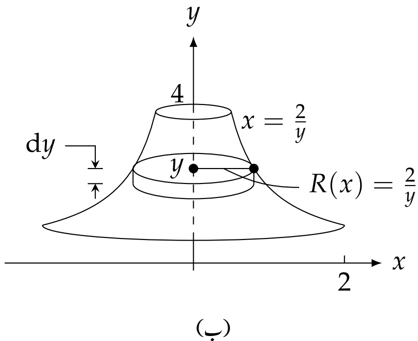
مثال 6.11: منحنی $x = \frac{2}{y},\ 1 \le y \le 4$ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔

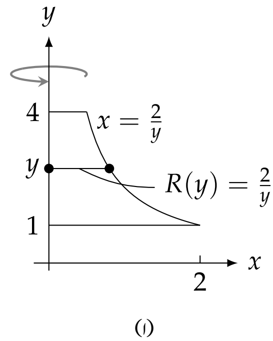
حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ قرص اور رداس بناتے ہیں (شکل 6.42)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2 \,\mathrm{d}y && \text{مساوات 6.5} \\
&= \int_1^4 \pi\Big(\frac{2}{y}\Big)^2 \,\mathrm{d}y && R(y) = \frac{2}{y} \\
&= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} \,\mathrm{d}y = 4\pi\Big[-\frac{1}{y}\Big]_1^4 = 4\pi\Big[\frac{3}{4}\Big] = 3\pi
\end{aligned}
$$

□

مثال 6.12: قطع مکافی $x = y^2 + 1$ اور لکیر $x = 3$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = 3$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔





شکل 6.42: مستوی خطہ، جسم طواف اور قرص (مثال 6.11)

حل: ہم منحنی اور لکیر کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر جسم طواف کا خاکہ بناتے ہیں اور عمودی تراش کی نمائندہ رداس کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 6.43)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

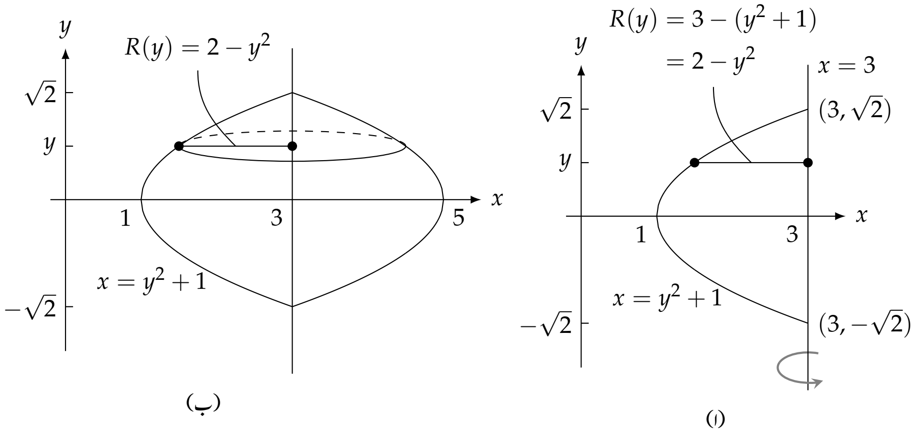
$$
\begin{aligned}
H &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2 \,\mathrm{d}y && \text{مساوات } 6.5\\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2-y^2]^2 \,\mathrm{d}y && R(y) = 3-(y^2+1)\\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4-4y^2+y^4] \,\mathrm{d}y\\
&= \pi \Big[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\\
&= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

□

ترکیب چھلا

اگر گھمائے جانے والا خطہ محور طواف کو قطع نہ کرتا ہو اور نا ہی محور طواف کو مس کرتا ہو تب جسم طواف میں سوراخ پایا جائے گا (شکل 6.44)۔ ایسے جسم کا بیرونی رداس $R(x)$ اور اندرونی رداس $r(x)$ ہو گا۔ یوں اس کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$



شکل 6.43: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.12)

حجم تلاش کرنے کا کلیہ

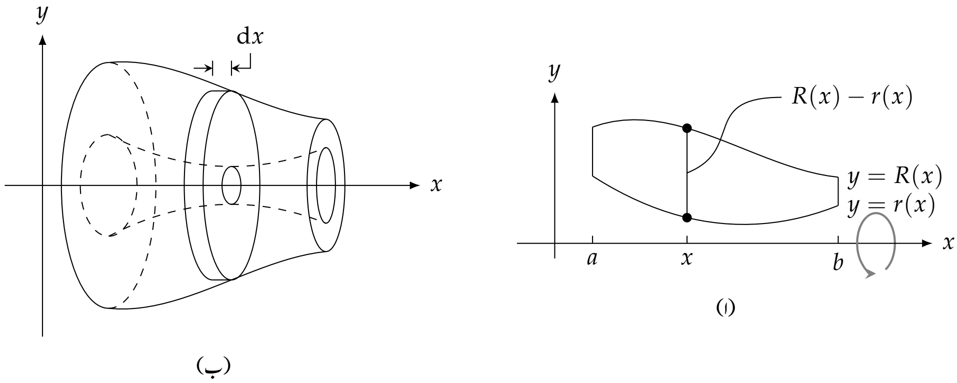
$$H = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

دھیان رہے کہ مساوات 6.6 میں تفاعل $\pi(R^2 - r^2)$ کا تکمل لیا جاتا ہے نا کہ تفاعل $\pi(R - r)^2$ کا۔ اگر پورے وقفہ $[a, b]$ پر اندرونی رداس صفر ہو تب درج بالا سے مساوات 6.4 حاصل ہوتی ہے۔ یوں ترکیب ٹکیا در حقیقت ترکیب چھلا کی مخصوص صورت ہے۔

مثال 6.13: منحنی $y = x^2 + 1$ اور لکیر $y = -x + 3$ کے بیچ خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: منحنی اور لکیر ترسیم کر کے خطے کا خاکہ بنا کر خطے پر محور طواف کے عمودی لکیر کھینچیں (شکل 6.45)۔
دوسرا قدم: نقاط تقاطع سے تکمل کے حد تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &= -x + 3 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x + 2)(x - 1) &= 0 \\
x = -2, &\quad x = 1
\end{aligned}$$



شکل 6.44: یہاں جسم طواف قرص کی بجائے چھلا نما ہے جس میں سوراخ پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ ذرہ مختلف صورت اختیار کرتا ہے۔

تیسرا قدم: بیرونی اور اندرونی رداس کی نشاندہی کریں۔

$$R(x) = -x + 3 \qquad \text{بیرونی رداس}$$
$$r(x) = x^2 + 1 \qquad \text{اندرونی رداس}$$

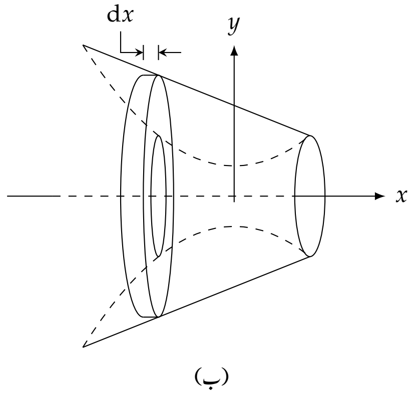
چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کریں۔

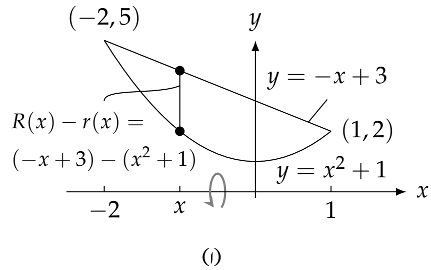
$$\begin{aligned}
H &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \pi([-x+3]^2 - [x^2+1]^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1} \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\Big[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}
\end{aligned}$$

□

ترکیب چھلا سے حجم کی تلاش

ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع کھینچیں۔ خطہ کو محور طواف کے گرد گھمانے سے یہ قطع نمائندہ عمودی تراش دے گا۔





شکل 6.45: مستوی خطہ اور چھلا نما جسم طواف (مثال 6.13)

ب. تکمل کے حد دریافت کریں۔

ج. عمودی تراش کا بیرونی اور اندرونی رداس کو لکیری قطع سے حاصل کریں۔

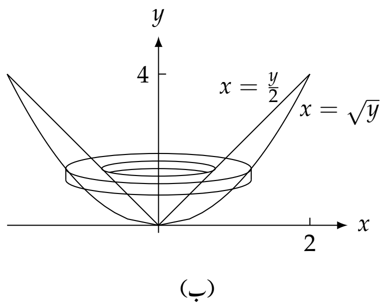
د. تکمل کی ذریعہ حجم حاصل کریں۔

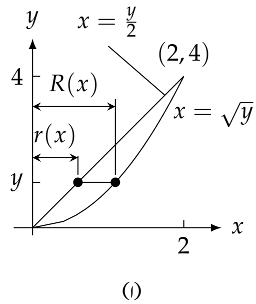
اگر خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب درج بالا اقدام استعمال کرتے ہوئے x کی بجائے y کے ساتھ تکمل لیں۔

مثال 6.14: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ کھینچ کر خطہ پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع بنائیں (شکل 6.46)۔ یہاں محور طواف y محور ہے۔
دوسرا قدم: قطع مکافی اور لکیر ایک دوسرے کو $y = 0$ اور $y = 4$ پر قطع کرتے ہیں لٰہذا تکمل کے حد $c = 0$ اور $d = 4$ ہوں گے۔
تیسرا قدم: رقبہ عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \sqrt{y}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{y}{2}$ ہے۔
چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \pi\Big([\sqrt{y}]^2 - [\tfrac{y}{2}]^2\Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \pi\int_0^4 \Big(y - \frac{y^2}{4}\Big)\,\mathrm{d}y = \pi\Big[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\Big]_0^4 = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$





شکل 6.46: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.14)

□

مثال 6.15: ربع اول میں قطع مکافی $y=x^2$، لکیر $y=1$ اور y محور کے بیچ خطہ کو لکیر $x=\frac{3}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم دریافت کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کے خاکہ پر محور طواف $x=\frac{3}{2}$ کے عمودی، لکیری قطع بنائیں (شکل 6.47)۔
دوسرا قدم: تکمل کے حد $y=0$ اور $y=1$ ہیں۔
تیسرا قدم: عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y)=\frac{3}{2}$ اور اندرونی رداس $r(y)=\frac{3}{2}-\sqrt{y}$ ہے۔
چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

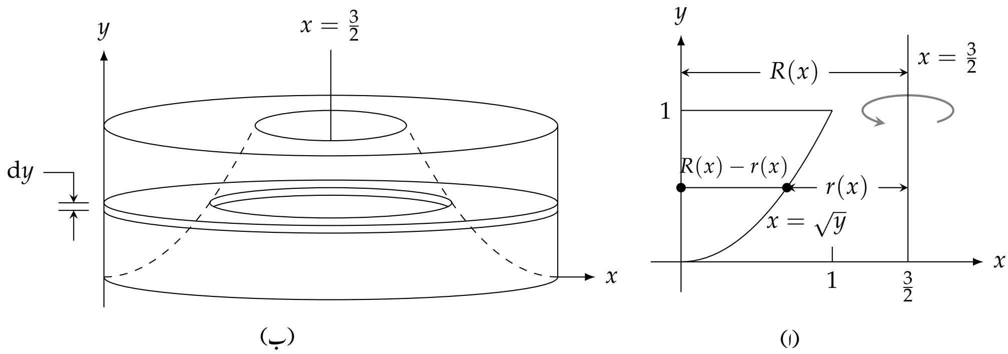
$$\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2-[r(y)]^2)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \pi([\tfrac{3}{2}]^2-[\tfrac{3}{2}-\sqrt{y}]^2)\,\mathrm{d}y\\
&= \pi\int_0^1 (3\sqrt{y}-y)\,\mathrm{d}y = \pi\Big[2y^{3/2}-\tfrac{y^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

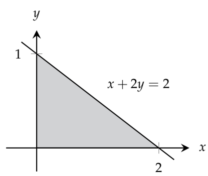
سوالات

حجم بذریعہ ترکیب ٹکیا

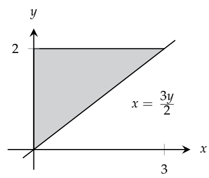
سوال 1 تا سوال 4 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔



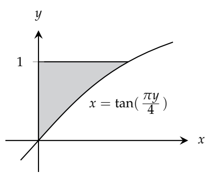
شکل 6.47: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.15)



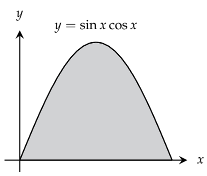
شکل 6.48



شکل 6.49



شکل 6.50



شکل 6.51

سوال 1: سایہ دار خطہ شکل 6.48 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x+2y=2$ ہے۔
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 2: سایہ دار خطہ شکل 6.49 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x=\frac{3y}{2}$ ہے۔

سوال 3: سایہ دار خطہ شکل 6.50 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x=\tan(\frac{\pi y}{4})$ ہے۔
جواب: $4-\pi$

سوال 4: سایہ دار خطہ شکل 6.51 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $y=\sin x\cos x$ ہے۔

سوال 5 تا سوال 10 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 5: $y=x^2,\quad y=0,\quad x=2$
جواب: $\frac{32\pi}{5}$

سوال 6: $y=x^3,\quad y=0,\quad x=2$

سوال 7: $y=\sqrt{9-x^2},\quad y=0$
جواب: 36π

سوال 8: $y=x-x^2,\quad y=0$

سوال 9: $y=\sqrt{\cos x},\quad 0\le x\le \frac{\pi}{2},\quad x=0,\quad y=0$
جواب: π

سوال 10: $y=\sec x,\quad y=0,\quad x=-\frac{\pi}{4},\quad x=\frac{\pi}{4}$

سوال 11 اور سوال 12 میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

سوال 11: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y=\sqrt{2}$ ، زیریں سرحد منحنی $y=\sec x\tan x$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y=\sqrt{2}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: $\pi\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-\frac{11}{3}\right)$

سوال 12: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y=2$ ، زیریں سرحد منحنی $y=\sec x\tan x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y=2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 13 تا سوال 18 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم دریافت کریں۔

سوال 13: $x=\sqrt{5}y^2,\quad x=0,\quad y=-1,\quad y=1$
جواب: 2π

سوال 14: $x=y^{3/2},\quad x=0,\quad y=2$

سوال 15: $x=\sqrt{2\sin 2y},\quad 0\le y\le\frac{\pi}{2},\quad x=0$
جواب: 2π

سوال 16: $x=\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}},\quad -2\le y\le 0,\quad x=0$

سوال 17: $x=\frac{2}{y+1},\quad x=0,\quad y=0,\quad y=3$
جواب: 3π

سوال 18: $x=\frac{\sqrt{2y}}{y^2+1},\quad x=0,\quad y=1$

حجم بذریعہ ترکیب چھلا

سوال 19 اور سوال 19 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

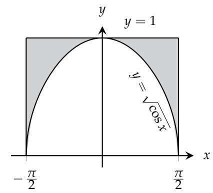
سوال 19: خطہ شکل 6.52 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\pi^2-2\pi$

سوال 20: خطہ شکل 6.53 میں دکھایا گیا ہے۔

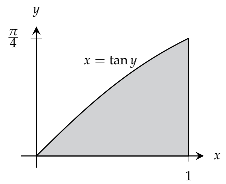
سوال 21 تا سوال 28 میں دیے منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو x محور گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 21: $y=x,\quad y=1,\quad x=0$
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 22: $y=2x,\quad y=x,\quad x=1$



شکل 6.52



شکل 6.53

سوال 23: $\quad y=2\sqrt{x}, \quad y=2, \quad x=0$
جواب: $\quad 2\pi$

سوال 24: $\quad y=-\sqrt{x}, \quad y=-2, \quad x=0$

سوال 25: $\quad y=x^2+1, \quad y=x+3$
جواب: $\quad \frac{117\pi}{5}$

سوال 26: $\quad y=4-x^2, \quad y=2-x$

سوال 27: $\quad y=\sec x, \quad y=\sqrt{2}, \quad -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$
جواب: $\quad \pi(\pi-2)$

سوال 28: $\quad y=\sec x, \quad y=\tan x, \quad x=0, \quad x=1$

سوال 29 تا سوال 34 میں خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

سوال 29: مثلث میں محیط خطہ جہاں مثلث کی راسیں $(1,0)$ ، $(2,1)$ اور $(1,1)$ ہیں۔
جواب: $\quad \frac{4\pi}{3}$

سوال 30: مثلث جس کی راسیں $(0,1)$ ، $(1,0)$ اور $(1,1)$ ہیں میں محیط خطہ۔

سوال 31: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد قطع مکافی $y=x^2$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد لکیر $x=2$ ہے۔
جواب: $\quad 8\pi$

سوال 32: خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y=\sqrt{x}$ اور زیریں سرحد لکیر $y=x$ ہے۔

سوال 33: ربع اول میں خطہ جس کا بایاں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 3$ ، دایاں سرحد لکیر $x = \sqrt{3}$ اور بالائی سرحد لکیر $y = \sqrt{3}$ ہے۔
جواب: $\sqrt{3}\pi$

سوال 34: خطے کی بائیں سرحد لکیر $x = 4$ اور دائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ہے۔

سوال 35 اور سوال 36 میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 35: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = x^2$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد لکیر $x = 1$ ہیں۔ خطے کو لکیر $x = -1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: $\frac{7\pi}{6}$

سوال 36: ربع دوم میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = -x^3$ ، زیریں سرحد محور x اور بایاں سرحد لکیر $x = -1$ ہے۔ خطے کو لکیر $x = -2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جسم طواف کے حجم

سوال 37: ایک خطہ جس کی سرحدیں $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ اور $x = 0$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ٹھوس جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

ا. محور x ؛

ب. محور y ؛

ج. لکیر $y = 2$ ؛

د. لکیر $x = 4$

جواب: (ا) 8π ، (ب) $\frac{32\pi}{5}$ ، (ج) $\frac{8\pi}{3}$ ، (د) $\frac{224\pi}{15}$

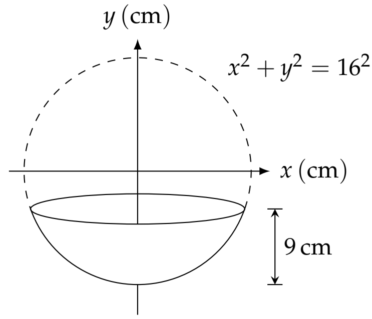
سوال 38: ایک تکونی خطہ جس کی سرحدیں $y = 2x$ ، $y = 0$ اور $x = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $x = 1$ ؛

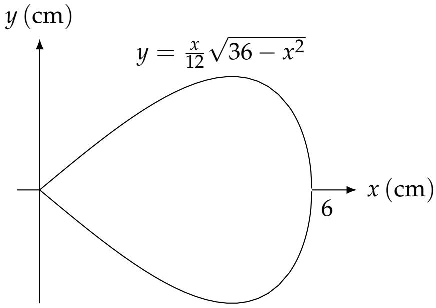
ب. لکیر $x = 2$

سوال 39: ایک خطہ جس کی سرحدیں قطع مکافی $y = x^2$ اور $y = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $y = 1$ ؛



شکل 6.54: کروی برتن (سوال 41)



شکل 6.55: ناشپاتی نما گولہ (سوال 42)

ب. لکیر $y = 2$ ؛

ج. لکیر $y = -1$

جواب: (ا) $\frac{16\pi}{15}$ ، (ب) $\frac{56\pi}{15}$ ، (ج) $\frac{64\pi}{15}$

سوال 40: ایک مثلث جس کی راسیں $(0,0)$ ، $(b,0)$ اور $(0,h)$ ہیں میں محیط خطے کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

ا. محور x ؛

ب. محور y

سوال 41: ایک برتن کو رداس $16\,\text{cm}$ کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ برتن کی گہرائی $9\,\text{cm}$ ہے۔ برتن کا حجم تکمل کی مدد سے دریافت کریں (شکل 6.54)۔
جواب: $H = 1053\pi\,\text{cm}^3$

سوال 42: منحنی $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2},\ 0 \le x \le 6\,\text{cm}$ کو x محور کے گرد گھما کر ناشپاتی نما پیتل کا گولہ بنایا جاتا ہے (شکل 6.55)۔ پیتل کی کثافت $8.5\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}$ لیں۔ گولے کی کمیت کتنی ہو گی؟

سوال 43: منحنی $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi x$ کو لکیر $y = c$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں $0 \le c \le 1$ ہے۔

ا. ٹھوس جسم کی کم سے کم حجم c کی کتنی قیمت پر حاصل ہو گی؟ اس کم سے کم حجم کو تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0,1]$ میں c کی کونسی قیمت زیادہ سے زیادہ حجم دے گی؟

ج. ٹھوس جسم کا حجم بالمقابل c کو پہلے $0 \leq c \leq 1$ کے لئے اور بعد میں بڑی قیمتوں کے لئے ترسیم کریں۔ جیسے جیسے c کی قیمت وقفہ $[0,1]$ سے دور ہوتی جاتی ہے، جسم کے حجم کو کیا ہوتا ہے؟ کیا اس کا طبعی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $c = \frac{2}{\pi}$، (ب) $c = 0$

سوال 44: ہیلی کاپٹر کی پہنچ بڑھانے کی خاطر اس کے نیچے تیل کا اضافی حوض نسب کرنا مطلوب ہے۔ منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3}$, $-1 \leq x \leq 1$ کو x محور کے گرد گھما کر حوض بنایا جاتا ہے۔ اس حوض میں کتنے لٹر تیل آئے گا؟

سوال 45: اندرسہ کا حجم
دائری قرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو لکیر $y = b\,(b > a)$ کے گرد گھما کر اندرسہ[5] پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔
(اشارہ۔ $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{2}$ ہو گا چونکہ یہ رداس a کے نصف دائرے کا رقبہ ہے۔)
جواب: $H = 2a^2 b\pi^2$

سوال 46: (ا) نصف کروی برتن جس کا رداس a ہے میں پانی کی گہرائی h ہے۔ پانی کی مقدار معلوم کریں۔ (ب) نصف کروی حوض جس کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے میں پانی داخل ہونے کی شرح $0.2\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہو، اس لمحہ گہرائی بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟

سوال 47: اس حصہ میں حجم کے تمام تعریف جیومیٹریائی تعریف کے عین مطابق ہیں۔

ا. نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ حاصل ہوتا ہے۔ قرص کے حجم کا کلیہ مساوات 6.4 استعمال کرتے ہوئے کرہ کے حجم کا کلیہ $H = \frac{4}{3}\pi a^3$ حاصل کریں۔

ب. رداس r اور قد h کا قائمہ مخروط کا حجم احصاء کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: (ب) $H = \frac{\pi r^2 h}{3}$

6.4 نلکی چھلے

اجسام طواف کا حجم تلاش کرتے ہوئے بعض اوقات چھلا کی بجائے نلکی خول استعمال کرنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے (شکل 6.56)۔

---

[5] torus

(ا) (ب)

شکل 6.56: نلکی جسم طواف

نلکی کلیہ

فرض کریں ہم x محور اور وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے پیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کرتے ہیں۔ ہمیں جسم طواف کا حجم درکار ہے۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P پر منحصر مستطیلوں کو خطے کا تخمینی رقبہ لے سکتے ہیں۔ ایک نمائندہ مستطیل کی چوڑائی Δx_k اور قد $f(c_k)$ ہو گا، جہاں نمائندہ مستطیل کے قاعدے کا وسط c_k ہے (شکل 6.57)۔ ہم جیومیٹری سے جانتے ہیں کہ ایسے مستطیل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم

$$\Delta H_k = 2\pi \times \text{خول کا اوسط رداس} \times \text{خول کا قد} \times \text{موٹائی}$$

ہو گا جو موجودہ صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta H_k = 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k$$

ہم P پر منحصر n مستطیلوں کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل حجم کے مجموعہ کو تخمیناً جسم طواف کا حجم لیتے ہیں۔

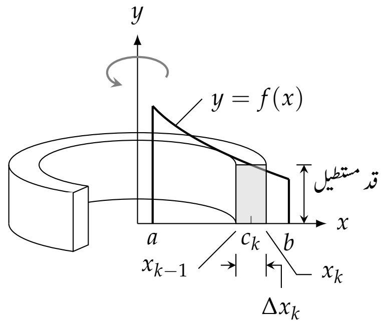
$$H \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

$\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے اس مجموعہ کا حد ٹھوس جسم کا حجم ہو گا:

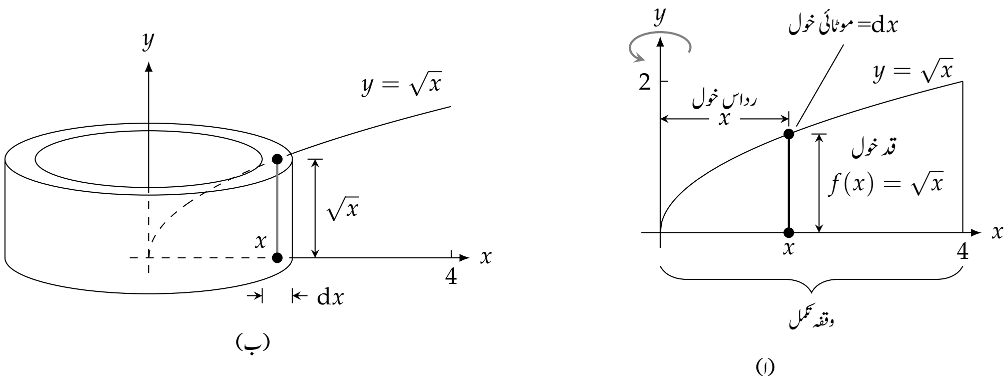
$$H = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) \, \mathrm{d}x$$

کلیہ خول برائے y محور کے گرد طواف

استمراری تفاعل $y = f(x),\ 0 \le a \le x \le b$ اور محور x کے پیچ خطے کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا



شکل 6.57: kویں مستطیل کو گھمانے سے حاصل نلکی خول۔



شکل 6.58: نلکی خول (مثال 6.16)

حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.7}$$

مثال 6.16: منحنی $y = \sqrt{x}$، لکیر $x = 4$ اور x محور کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ بنا کر محور گردش کے متوازی اس پر قطع دکھائیں۔ قطع کا قد (خول کا قد) اور محور گردش سے قطع کے فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی چوڑائی $\mathrm{d}x$ خول کی چوڑائی ہو گی۔ ہم نے شکل 6.58 میں خول دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی

ضرورت نہیں ہے۔
دوسرا قدم: تکمل کے حد معلوم کریں۔ خطہ میں x کی قیمت a تا b تبدیل ہوتی ہے لہٰذا تکمل کے حد a اور b ہوں گے۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.7} \\ &= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں} \\ &= 2\pi\int_0^4 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\Big[\frac{2}{5}x^{5/2}\Big]_0^4 = \frac{128\pi}{5} \end{aligned}$$

□

محور y کے گرد خطہ گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم مساوات 6.7 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر ہم خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کریں تب حجم تلاش کرنے کی خاطر مساوات 6.7 میں x کی جگہ y استعمال کیا جائے گا۔

کلیہ خول برائے x محور کے گرد طواف

$$H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi y f(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.8}$$

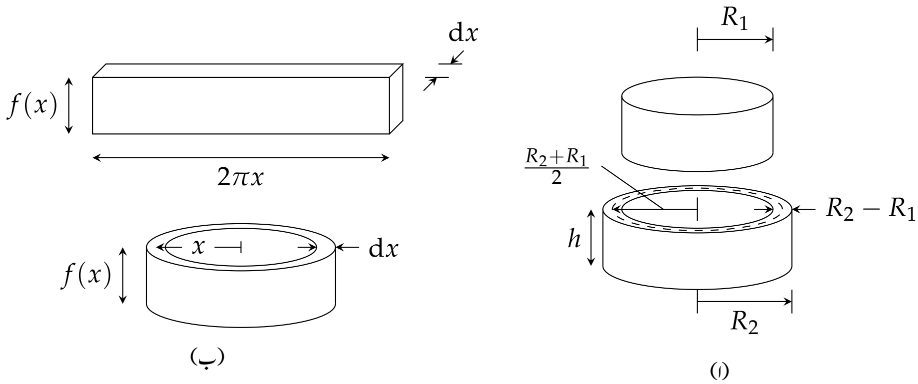
درج بالا مساوات میں $f(y) > 0$ اور $0 \le c \le y \le d$ ہیں۔

خول کا جیومیٹریائی حجم

ایک ٹھوس بیلن جس کا رداس R_2 اور قد h ہو کا حجم $\pi R_2^2 h$ ہو گا۔اگر اس جسم سے رداس R_1 کا ٹھوس بیلن کاٹا جائے تب حاصل خول کا حجم $\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h$ ہو گا (شکل 6.59-ا) جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} \text{حجم خول} &= \pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h \\ &= \pi(R_2^2 - R_1^2)h \\ &= \pi(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)h && R_2^2 - R_1^2 = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) \\ &= 2\pi\big(\tfrac{R_2+R_1}{2}\big)(R_2 - R_1)h && \text{2 سے ضرب اور تقسیم} \\ &= 2\pi(\text{رداس خول})(\text{موٹائی خول})(\text{قد خول}) \end{aligned}$$

جہاں خول کا اوسط رداس $\frac{R_2+R_1}{2}$ ہے، خول کی موٹائی $R_2 - R_1 r$ ہے اور خول کا قد h ہے۔



شکل 6.59: خول کا حجم۔

ایک خول جس کا اوسط رداس x ، موٹائی $\mathrm{d}x$ اور قد $f(x)$ ہو کو شکل 6.59-ب میں کھول کر پٹی کی شکل دی گئی ہے۔ اس پٹی کا حجم درج ذیل ہو گا جو خول کے حجم کا کلیہ ہے (مساوات 6.7 اور مساوات 6.8 کو یاد رکھنے کا یہ بہترین طریقہ ہے)۔

$$H = 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$

مثال 6.17: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $x = 4$ اور x محور کے بیچ خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

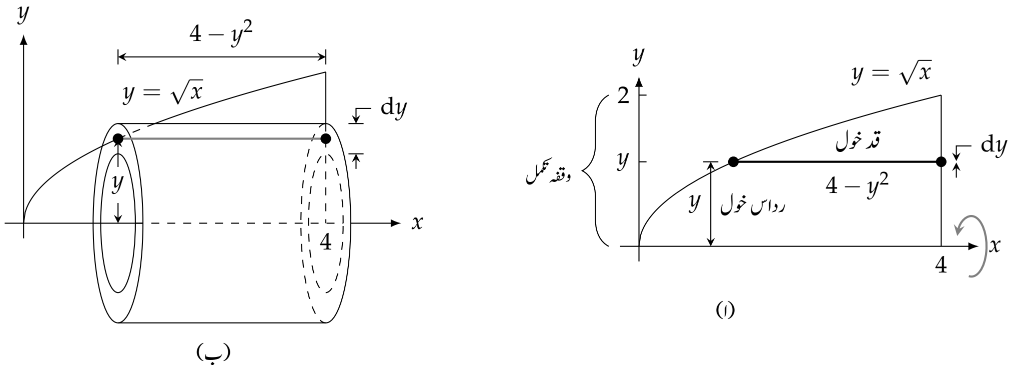
حل: پہلا قدم: خطے کا خاکہ بنائیں اور اس پر محور گردش کے متوازی قطع دکھائیں۔ قطع کی لمبائی (قد خول) اور محور طواف سے اس کا فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی موٹائی، خول کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہو گی۔ ہم نے شکل 6.60 میں y محور کے گرد بیلن دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا بنانے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: تکمل کے حد معلوم کریں۔ چونکہ خطہ میں y کی قیمت $c = 0$ تا $d = 2$ ہو سکتی ہے لہٰذا یہی اس کے حد ہیں۔

تیسرا قدم:

$$\begin{aligned}
H &= \int_c^d 2\pi()()\,\mathrm{d}y && \text{مساوات 6.8}\\
&= \int_0^2 2\pi(y)(4-y^2)\,\mathrm{d}y && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں}\\
&= 2\pi\Big[2y^2 - \frac{y^4}{4}\Big]_0^2 = 8\pi
\end{aligned}$$

یہ نتیجہ مثال 6.9 میں ترکیب قرص سے حاصل جواب کے عین مطابق ہے۔ □



شکل 6.60: محور x کے گرد طواف (مثال 6.17)

ترکیب خول کا استعمال

محور طواف (افقی یا انتصابی) جیسا بھی ہو ترکیب خول کے اقدام درج ذیل ہوں گے۔

ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس میں محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد یا لمبائی (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موٹائی (چوڑائی خول) کی نشاندہی کریں۔

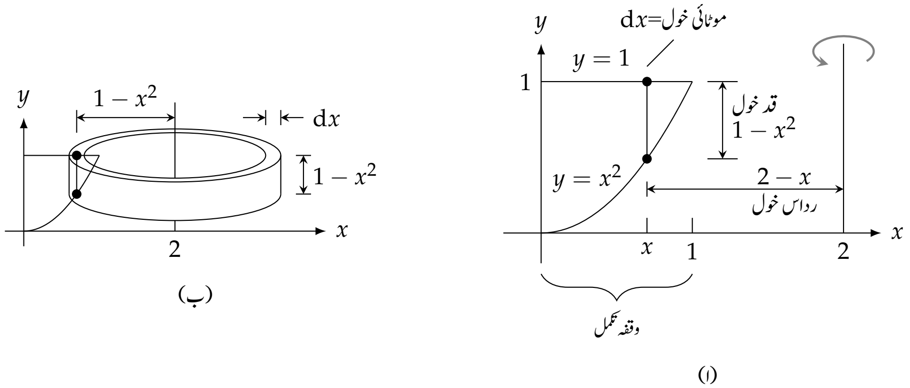
ب. تکمل کے حد معلوم کریں

ج. متکمل (2π)(رداس خول)(قد خول) کا موزوں متغیر (x یا y) کے ساتھ تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے حجم دریافت کریں۔

اگلی مثال میں محور طواف افقی لکیر $x = 2$ ہے۔

مثال 6.18: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$ ، لکیر $y = 1$ اور y محور کے بیچ خطے کو محور طواف $x = 2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: خطے پر محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موٹائی (چوڑائی خول $\mathrm{d}x$) کی نشاندہی کریں (شکل 6.61)۔ہم نے خول بھی بنایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔



شکل 6.61: خطہ اور خول (مثال 6.18)

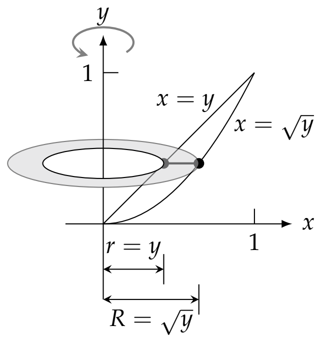
دوسرا قدم: تکمل کے حد $a = 0$ اور $b = 1$ ہیں۔
تیسرا قدم:

$$
\begin{aligned}
H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.7}\\
&= \int_0^1 2\pi(2-x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں}\\
&= 2\pi\int_0^1 (2-x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{13\pi}{6}
\end{aligned}
$$

□

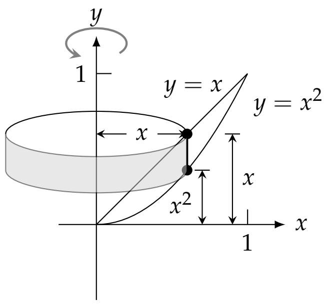
تفاعل $y = x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطہ کو مثال بناتے ہوئے شکل 6.62 میں ترکیب چھلا اور ترکیب خول دونوں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-6.62-ا اور ب میں y محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے جبکہ شکل-ج اور د میں x محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے۔ دونوں صورتوں میں حجم کو ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے حل کیا گیا ہے۔ اس مخصوص خطے کے لئے دونوں محور طواف کے لئے دونوں تراکیب کارآمد ہیں لیکن ایسا ہر صورت میں نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر y محور کے گرد گھماتے ہوئے ترکیب چھلا میں ہمیں y کے لحاظ سے تکمل حل کرنا ہو گا۔ البتہ عین ممکن ہے کہ متکمل کو y کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔ ایسی صورت میں ہمیں ترکیب خول استعمال کرنی ہو گی جو ہمیں x کے لحاظ سے تکمل لینے کی اجازت دیگا۔

ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے ہر صورت ایک جیسے حجم حاصل ہوں گے۔



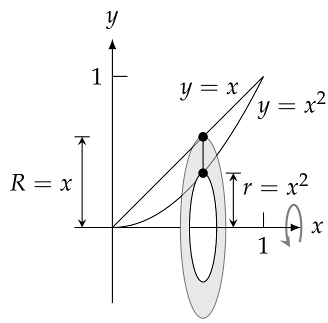
$$H = \int_{y=0}^{y=1} \pi[(\sqrt{y})^2 - (y)^2] \, dy = \frac{\pi}{6}$$

(ا)



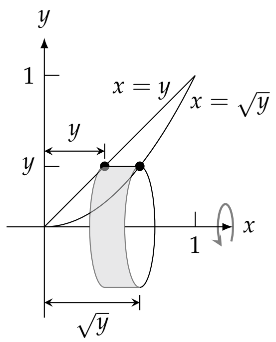
$$H = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi(x)(x - x^2) \, dx = \frac{\pi}{6}$$

(ب)



$$H = \int_{x=0}^{x=1} \pi[(x)^2 - (x^2)^2] \, dx = \frac{2\pi}{15}$$

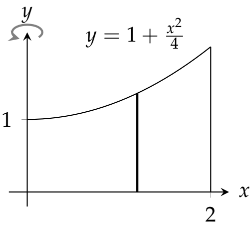
(ج)



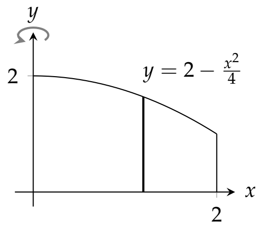
$$H = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi(y)(\sqrt{y} - y) \, dy = \frac{2\pi}{15}$$

(د)

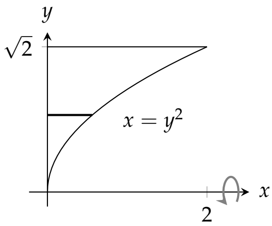
شکل 6.62



شکل 6.63



شکل 6.64



شکل 6.65

سوالات

سوال 1 تا سوال 6 میں خطے کو دکھائے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔حاصل جسم طواف کا حجم ترکیب خول سے دریافت کریں۔

سوال 1: خطہ شکل 6.63 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: 6π

سوال 2: خطہ شکل 6.64 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3: خطہ شکل 6.65 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: 2π

سوال 4: خطہ شکل 6.66 میں دکھایا گیا ہے۔

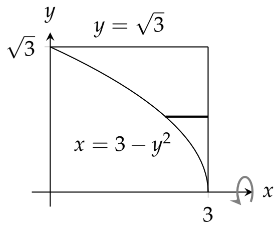
سوال 5: خطہ شکل 6.67 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\frac{14\pi}{3}$

سوال 6: خطہ شکل 6.68 میں دکھایا گیا ہے۔

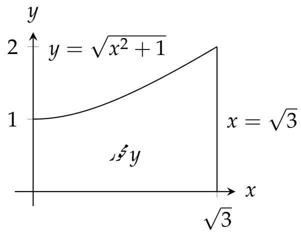
سوال 7 تا سوال 14 میں دیے منحنیات اور لکیروں میں محیط خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس جسم کا حجم ترکیب خول سے تلاش کریں۔

سوال 7: $y = x, \quad y = -\frac{x}{2}, \quad x = 2$
جواب: 8π

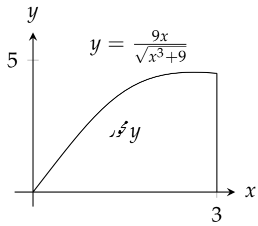
سوال 8: $y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad x = 1$



شکل 6.66



شکل 6.67



شکل 6.68

سوال 9: $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0, (x \geq 0)$
جواب: $\frac{5\pi}{6}$

سوال 10: $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

سوال 11: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$
جواب: $\frac{128\pi}{5}$

سوال 12: $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

سوال 13: $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2$
جواب: 3π

سوال 14: $y = \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

سوال 15 تا سوال 22 میں طواف جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔ منحنیات اور لکیروں میں محیط رقبہ کو y محور کے گرد گھمایا گیا ہے۔

سوال 15: $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$
جواب: $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$

سوال 16: $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2$

سوال 17: $x = 2y - y^2, \quad x = 0$
جواب: $\frac{8\pi}{3}$

سوال 18: $x = 2y - y^2, \quad x = y$

سوال 19: $y = |x|, \quad y = 1$
جواب: $\frac{4\pi}{3}$

سوال 20: $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

سوال 21: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$
جواب: $\frac{16\pi}{3}$

سوال 22: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

سوال 23 اور سوال 24 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔

سوال 23: خطے کو شکل 6.69 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. محور x کے گرد،

ب. محور طواف لکیر $y = 1$ ہے،

ج. محور طواف لکیر $y = \frac{8}{5}$ ہے،

د. لکیر $y = -\frac{2}{5}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جواب: (ا) $\frac{6\pi}{5}$، (ب) $\frac{4\pi}{5}$، (ج) 2π، (د) 2π

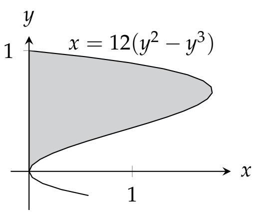
سوال 24: خطے کو شکل 6.70 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. محور x کے گرد،

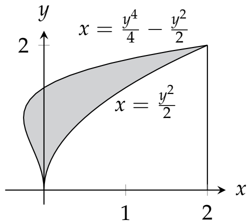
ب. محور طواف لکیر $y = 2$ ہے،

ج. محور طواف لکیر $y = 5$ ہے،

د. لکیر $y = -\frac{5}{8}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔



شکل 6.69



شکل 6.70

سوال 25 تا سوال 25 میں خطوں کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔ آپ ترکیب چھلا یا ترکیب خول استعمال کر سکتے ہیں۔

سوال 25: تکون جس کے راس $(1,1)$ ، $(1,2)$ اور $(2,2)$ ہیں۔ (ا) x محور کے گرد، (ب) y محور کے گرد، (ج) لکیر $x = \frac{10}{3}$ کے گرد، اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد۔
جواب: (ا) $\frac{5\pi}{3}$ ، (ب) $\frac{4\pi}{3}$ ، (ج) 2π ، (د) $\frac{2\pi}{3}$

سوال 26: ربع اول میں منحنی $x = y - y^3$ اور y محور میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے

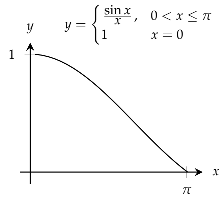
سوال 27: ربع اول میں $x = y - y^3$ ، $x = 1$ اور $y = 1$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 1$ ، اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (ا) $\frac{11\pi}{15}$ ، (ب) $\frac{97\pi}{105}$ ، (ج) $\frac{121\pi}{210}$ ، (د) $\frac{23\pi}{30}$

سوال 28: تکونی خطہ جس کے سرحد لکیر $2y = x + 4$ ، $y = x$ ، اور $x = 0$ ہیں کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 4$ ، اور (د) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

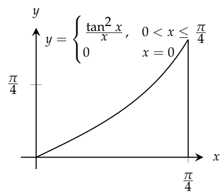
سوال 29: ربع اول میں $y = x^3$ ، $y = 4x$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور x ، اور (ب) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (ا) $\frac{512\pi}{21}$ ، (ب) $\frac{832\pi}{21}$

سوال 30: سرحد $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{x^2}{8}$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x اور (ب) محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

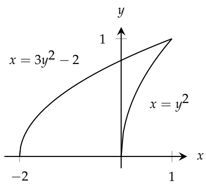
سوال 31: سرحد $y = 2x - x^2$ اور $y = x$ میں محیط خطہ کو (ا) محور y اور (ب) لکیر $x = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (ا) $\frac{\pi}{6}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$



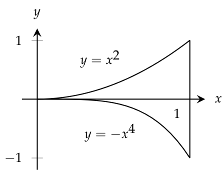
شکل 6.71



شکل 6.72



شکل 6.73



شکل 6.74

سوال 32: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $y = 2$ اور $x = 0$ کے بیچ خطہ کو (ا) x محور، (ب) y محور، (ج) لکیر $x = 4$ ، (د) لکیر $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 33: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = x^{-1/4}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{16}$ ، اور نیچے جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے کو x محور کے گرد گھما کو جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔
جواب: $\frac{9\pi}{16}$

سوال 34: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = \sqrt{x}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{4}$ ، اور نیچے جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے کو y محور کے گرد گھما کو جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔

سوال 35: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل 6.71)۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \sin x, 0 \le x \le \pi$ ہو گا۔

ب. اس تفاعل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

جواب: (ب) 4π

سوال 36: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل 6.72)۔

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \tan x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ہو گا۔

ب. اس تفاعل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 37: محور x کے گرد شکل 6.73 میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: قرص: دو تکمل؛ چھلا: دو تکمل؛ خول: ایک تکمل

سوال 38: محور y کے گرد شکل 6.74 میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 39: فرض کریں وقفہ $x \geq 0$ پر تفاعل $f(x)$ غیر منفی اور استمراری ہے۔ منحنی f ، لکیر $x = b$ اور کارتیسی محدد کے بیچ خطہ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں b کوئی مثبت عدد ہے۔ اس جسم طواف کا حجم $2\pi b^3$ ہے۔تفاعل $f(x)$ دریافت کریں۔
جواب: $3x$

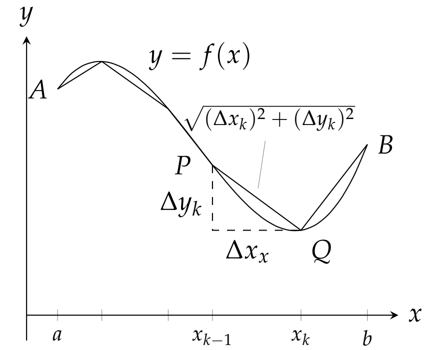
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں

نقشہ پر سڑک کی لمبائی جاننے کی خاطر ہم فیتہ استعمال کرتے ہوئے نقشہ پر سڑک کی منحنی پر قریب قریب نقطوں کے مابین قطعات کو سیدھا تصور کرتے ہوئے ان کی لمبائیوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اس طرح اندازاً لمبائی کی درستگی کی حد قطعات کی تعداد اور ناپنے کی درستگی پر منحصر ہو گی۔

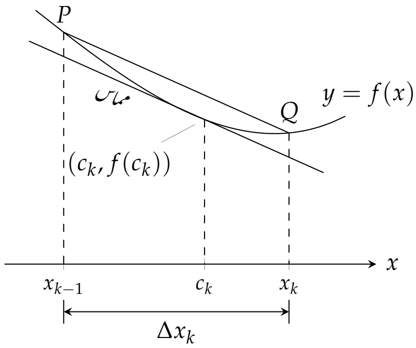
احصاء کو استعمال کرتے ہوئے ہم نقطوں کو قریب سے قریب رکھ کر بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔ ان نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع حاصل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ قطعات لینے سے کثیر الاضلاع کی لمبائی، اصل منحنی کی لمبائی کے زیادہ قریب ہو گی۔ کثیر الاضلاع کی لمبائی کی حد کو تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم $x = a$ سے $x = b$ تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی جاننا چاہتے ہیں۔ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی عام طریقہ سے کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع بناتے ہیں جو اصل منحنی کو تخمیناً ظاہر کرتا ہے (شکل 6.75)۔ اگر ہم کثیر الاضلاع کی لمبائی کا کلیہ تلاش کر سکیں ہم اسی کلیہ کو منحنی کی لمبائی کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔



شکل 6.75: منحنی AB کے قطع PQ کی لمبائی $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ہو گی۔



شکل 6.76: نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پر ماس اور قطع متوازی ہیں۔

قطع PQ کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ ہو گی (شکل 6.75)۔ یوں منحنی کی لمبائی تخمیناً درج ذیل مجموعہ ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{6.9}$$

وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی باریک کرنے سے حاصل مجموعہ تخمیناً زیادہ بہتر ہو گا۔ ہم دکھانا چاہیں گے کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.9 کا مجموعہ قابل معلوم حد دیگا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم مساوات 6.9 کو ایسی روپ میں لکھتے ہیں کہ اس پر مسئلہ 5.1 (صفحہ 538) کا اطلاق ممکن ہو۔ ہم تفرق کے مسئلہ اوسط قیمت سے شروع کرتے ہیں۔

تعریف: ایسا تفاعل جس کا پہلا تفرق استمراری ہو ہموار[6] کہلاتا ہے اور اس کی منحنی کو ہموار منحنی[7] کہتے ہیں۔

□

اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ منحنی پر ایک ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پایا جائے گا جہاں منحنی کا مماس قطع PQ کا متوازی ہو گا (شکل 6.76)۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \quad \implies \Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

---

[6] smooth
[7] smooth curve

مساوات 6.9 میں Δy_k کی اس قیمت کو پر کرنے سے درج ذیل روپ ملتا ہے۔

$$\text{ریمان مجموعہ} \qquad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k$$

چونکہ $[a,b]$ پر $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ استمراری ہے للذا خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد $\int_a^b \sqrt{a+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔ منحنی کی لمبائی کی تعریف اس قطعی تکمل کی قیمت ہے۔

تعریف: اگر $[a,b]$ پر f ہموار ہو تب a سے b تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.10}$$

□

مثال 6.19: درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \le x \le 1$$

حل: ہم $a = 0$ ، $b = 1$ اور

$$\begin{aligned}
y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2}\\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x
\end{aligned}$$

لیتے ہوئے مساوات 6.10 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6}
\end{aligned}$$

□

تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ میں عدم استمرار

کبھی کبھار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ غیر موجود لیکن $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ موجود ہو گا اور ہم x کو y کا تفاعل لکھ کر منحنی کی لمبائی مساوات 6.10 کی درج ذیل مشابہ سے حاصل کر پاتے ہیں۔

منحنی $x = g(y),\ c \le y \le d$ کی لمبائی کا کلیہ:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.11}$$

مثال 6.20: منحنی $y = (\frac{x}{2})^{2/3}$ کی لمبائی $x = 0$ تا $x = 2$ معلوم کریں۔

حل: منحنی کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین یعنی غیر موجود ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی حاصل کرنے کے لئے مساوات 6.10 نا قابل استعمال ہے۔

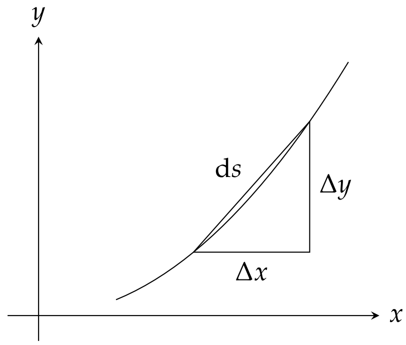
ہمیں x کو y کی صورت میں لکھنا ہو گا (شکل 6.77):

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \\ y^{3/2} &= \frac{x}{2} \\ x &= 2y^{3/2} \end{aligned}$$

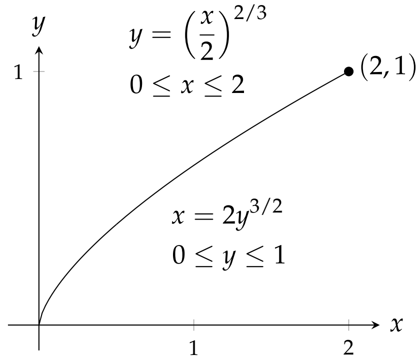
یوں ہم دیکھتے ہیں کہ درکار منحنی کو تفاعل $x = 2y^{3/2}$ سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں منحنی کے سر $y = 0$ اور $y = 1$ پر ہوں گے۔

اس کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$



شکل 6.78: تعلق $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کا حصول۔



شکل 6.77: منحنی برائے مثال 6.20

وقفہ $[0, 1]$ پر استمراری ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی کی خاطر مساوات 6.11 قابل استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1 \\
&= \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1) \approx 2.27
\end{aligned}$$

□

مختصر تفریقی کلیہ

لمبائی معلوم کرنے کی مساوات

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.12}$$

کو عموماً تفرق کی بجائے تفریقی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ایسا باضابطہ طور پر کرنے کے لئے تفرق کو تفریقوں کا حاصل تقسیم تصور کریں۔ یوں پہلے تکمل میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

دوسرے تکمل میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\mathrm{d}y^2+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}y^2}=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$

اس طرح مساوات 6.12 میں دیے دونوں تکمل درج ذیل ایک تفریقی کلیہ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$L=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \tag{6.13}$$

ظاہر ہے کہ $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ کو ایک جیسا متغیر کی صورت میں لکھنا ضروری ہے اور مساوات 6.13 میں دیا تکمل حل کرنے کے لئے تکمل کے موزوں حد بھی جاننا ضروری ہیں۔

ہم مساوات 6.13 کو مزید چھوٹا کر سکتے ہیں۔ $\mathrm{d}x^2$ اور $\mathrm{d}y^2$ کو ایک چھوٹے مثلث کے اضلاع تصور کریں۔مسئلہ فیثا غورث سے اس مثلث کا وتر $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ ہو گا (شکل 6.78)۔ تفریق $\mathrm{d}s$ کو اب قوس کی تفریقی لمبائی تصور کیا جا سکتا ہے جس کا موزوں حدود کے بیچ تکمل لے کر قوس کی لمبائی دریافت کی جا سکتی ہے۔ مساوات 6.13 میں $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}s$ لکھنے سے مساوات کو $\mathrm{d}s$ کا تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

تعریف : تفریقی لمبائی قوس اور لمبائی قوس کا تفریقی کلیہ درج ذیل ہیں۔

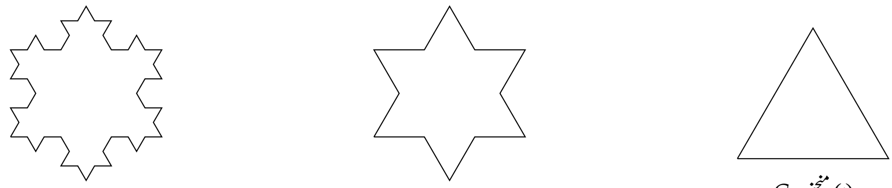
$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \qquad \text{تفریقی لمبائی قوس}$$

$$L=\int \mathrm{d}s \qquad \text{لمبائی قوس کا تفریقی کلیہ}$$

□

لا متناہی لمبائی کے قوسین

برف کی روئی پر صفحہ 299 پر غور کیا گیا۔ لا متناہی تکونی کثیر الاضلاع کی ترتیب $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ کی تحدیدی صورت کو برف کی روئی K کہتے ہیں۔ شکل 6.79 میں اس ترتیب کی پہلی تین صورتیں دکھائی گئی ہیں۔ بناوٹ کے دوران ہر نیا متعارف کردہ راس بعد کے تمام منحنیات میں بطور راس پایا جاتا ہے اور تحدیدی منحنی K میں بطور نقطہ نظر آتا ہے۔ یوں ہر منحنی C از خود منحنی K کی تخمینی صورت ہو گی۔ یوں K کی لمبائی منحنیات C_n کی تحدیدی لمبائی کے برابر ہو گی۔ ہموار منحنیات کی لمبائی کی تعریف کے تحت کم از کم ایسا ہی ہونا چاہیے۔



(ا) منحنی C_1 (ب) منحنی C_2 (ج) منحنی C_3

شکل 6.79: برف کی روئی۔

آئیں C_n کی تحدیدی لمبائی تلاش کریں۔ اگر ابتدائی مثلث الاضلاع کے ضلع کی لمبائی 1 ہو تب C_1 کی کل لمبائی 3 ہو گی۔ C_1 سے C_2 حاصل کرتے ہوئے ہم C_1 کے ہر ضلع کی جگہ چار اضلاع بناتے ہیں جہاں ہر ضلع ابتدائی ضلع کا $\frac{1}{3}$ واں حصہ ہے۔ یوں C_2 کی کل لمبائی $3 \times 4 \times \frac{1}{3} = 3\left(\frac{4}{3}\right)$ ہو گی۔ اسی طرح C_3 کی لمبائی حاصل کرنے کی خاطر ہمیں C_2 کی لمبائی کو $\frac{4}{3}$ سے ضرب دینا ہو گا۔ یہی عمل دہراتے ہوئے C_n کی کل لمبائی $3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ حاصل ہوتی ہے۔ ان نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

شمار منحنی	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
کل لمبائی	3	$3\left(\frac{4}{3}\right)$	$3\left(\frac{4}{3}\right)^2$	$\cdots$	$3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$	$\cdots$

منحنی C_{10} کی لمبائی تقریباً 40 ہے جبکہ C_{100} کی لمبائی 7 000 000 000 000 سے زیادہ ہے۔ لمبائی اتنی تیزی سے بڑھتی ہے کہ اس کی تحدیدی قیمت متناہی نہیں ہو سکتی ہے۔ یوں برف کی روئی کی لمبائی نہیں پائی جاتی ہے، یعنی، اس کی لمبائی لامتناہی ہے۔

لمبائی کی تعریف ہموار منحنیات کے لئے پیش کی گئی تھی جن کا ہر نقطہ پر مماس استمراری مڑتا ہے۔ برف کی روئی اتنی ناہموار ہے کہ لمبائی کا کلیے کا اس پر اطلاق کرنا ممکن نہیں ہے۔

بنوا منڈلبرا کا نظریہ گنج غیر ہموار منحنیات[8] ایسے متعدد منحنیات پیش کرتا ہے جن کی لمبائی لامتناہی ہے۔ ایسی منحنیات کو بڑا کر کے دیکھنے سے یہ اتنی ہی غیر ہموار نظر آتی ہیں جتنی بغیر بڑا کئے نظر آتی ہیں۔ سمندر کے ساحل کی طرح، ان منحنیات کو بڑا کر کے ہموار نہیں بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

لمبائی قوس کے تکمل کا حصول
سوال 1 تا سوال 8 میں

[8]fractals

ا. لمبائی قوس کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی ترسیم کر کے دیکھیں کیسی لگتی ہے۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 1: $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$
جواب: (ا) $\int_{-1}^{2} \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 6.13

سوال 2: $y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le 0$

سوال 3: $x = \sin y, \quad 0 \le y \le \pi$
جواب: (ا) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 3.82

سوال 4: $x = \sqrt{1-y^2}, \quad -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

سوال 5: $y^2 + 2y = 2x + 1$ نقطہ $(-1,-1)$ سے $(7,3)$ تک۔
جواب: (ا) $\int_{-1}^{3} \sqrt{1+(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 9.29

سوال 6: $y = \sin x - x\cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال 7: $y = \int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$
جواب: (ا) $\int_0^{\pi/6} \sec x\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 0.55

سوال 8: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1}\,\mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{3} \le y \le \frac{\pi}{4}$

لمبائی قوس کا حصول

سوال 9 تا سوال 18 میں قوس کی لمبائی تلاش کریں۔ بہتر ہو گا کہ منحنیات کو ترسیم کر کے دیکھیں۔

سوال 9: $x = 0$ سے $x = 3$ تک، $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$
جواب: 12

سوال 10: $x = 0$ سے $x = 4$ تک، $y = x^{3/2}$

سوال 11: $y = 1$ سے $y = 3$ تک، $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$ (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)
جواب: $\frac{53}{6}$

سوال 12: $y=1$ سے $y=9$ تک، $x=\frac{y^{3/2}}{3}-y^{1/2}$ (اشارہ۔ $1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

سوال 13: $y=1$ سے $y=2$ تک، $x=\frac{y^4}{4}+\frac{1}{8y^2}$ (اشارہ۔ $1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)
جواب: $\frac{123}{32}$

سوال 14: $y=2$ سے $y=3$ تک، $x=\frac{y^3}{6}+\frac{1}{2y}$ (اشارہ۔ $1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

سوال 15: $y=\frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{3}{8}x^{2/3}+5, \quad 1\le x\le 8$
جواب: $\frac{99}{8}$

سوال 16: $y=\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{4x+4}, \quad 0\le x\le 2$

سوال 17: $x=\int_0^y \sqrt{\sec^4 t-1}\,\mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$
جواب: 2

سوال 18: $y=\int_{-2}^x \sqrt{3t^4-1}\,\mathrm{d}t, \quad -2\le x\le -1$

سوال 19: (ا) نقطہ $(1,1)$ میں سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات 6.10)۔

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x$$

(ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ا) $y=\sqrt{x}$ یا $y=-\sqrt{x}+2$ ، (ب) دو

سوال 20: (ا) نقطہ $(0,1)$ میں سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات 6.11)۔

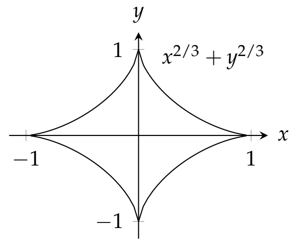
$$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{y^4}}\,\mathrm{d}y$$

(ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

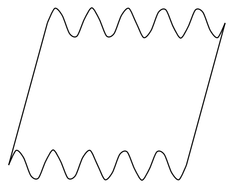
سوال 21: $x=0$ سے $x=\frac{\pi}{4}$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y=\int_0^x\sqrt{\cos 2t}\,\mathrm{d}t$$

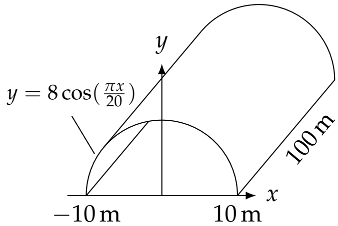
جواب: 1



شکل 6.80: ستارہ نما۔



شکل 6.81: نالیدار چادر۔



شکل 6.82: سرنگ۔

سوال 22: ستارہ نما کی لمبائی
مساوات $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ خطوط کی ایک ایسی نسل کو ظاہر کرتی ہے جس کو ستارہ نما کہتے ہیں (شکل 6.80)۔ نصف ربع اول میں قوس کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دے کر کل لمبائی حاصل ہو گی۔ یوں $\frac{\sqrt{2}}{4}\le x\le 1$ پر منحنی $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$ کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دیں۔

اعدادی تکمل

آپ سوچ رہے ہوں گے کہ کیوں اب تک لمبائی قوس میں زیادہ تر منحنیات کی مساواتیں پیچیدہ تھیں۔ اس کی وجہ لمبائی قوس کے تکمل میں $\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}$ ہے جو عموماً مکمل مربع نہیں ہوتا ہے اور جس کی بنا متکمل کا الٹ تفرق ہم حاصل نہیں کر پاتے ہیں۔ حقیقت میں عموماً یہی جذر غیر بنیادی تکمل کا باعث بنتا ہے۔ اسی لئے، سوال 23 اور سوال 24 کی طرح، لمبائی قوس اور سطحی رقبہ کے تکمل عموماً اعدادی طریقوں سے حل کئے جاتے ہیں۔

سوال 23: آپ کا ادارہ چھتوں کے لئے لوہے کی نالیدار چادریں بناتا ہے۔ نالیدار چادروں کا عمودی تراش درج ذیل کے مطابق درکار ہے (شکل 6.81)۔

$$y=\sin\frac{3\pi}{50}x,\quad 0\le x\le 50\,\text{cm}$$

مستوی چادر سے نالیدار چادر بناتے ہوئے چادر کی چوڑائی یا لمبائی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ درکار مستوی چادر کی چوڑائی معلوم کریں۔ اعدادی تراکیب استعمال کرتے ہوئے سائن نما چادر کی لمبائی تین اعشاریہ تک تلاش کریں۔
جواب: $50.44\,\text{cm}$

سوال 24: آپ کے انجینئری ادارے کو سرنگ بنانے کا کام ملا ہے۔ سرنگ کی لمبائی $100\,\text{m}$ جبکہ اس کی چوڑائی $20\,\text{m}$ ہے (شکل 6.82)۔ سرنگ کا عمودی تراش $y=8\cos(\frac{\pi x}{20})$ کے مطابق ہے۔ مکمل ہونے کے بعد سرنگ کو اندر سے پن روک مسالہ کیا جائے گا جس پر 2000 روپیہ فی مربع میٹر لاگت متوقع ہے۔ مسالہ کرنے پر کل کتنا لاگت آئے گا؟ (اشارہ۔ اعدادی طریقہ سے کوسائن تفاعل کی لمبائی دریافت کریں۔)

نظریہ اور مثالیں

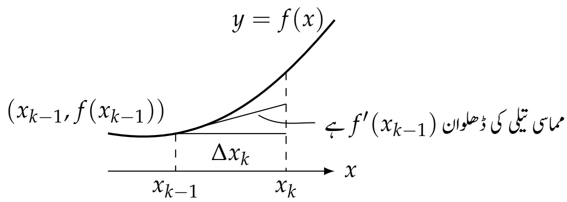
سوال 25: کیا ایسی ہموار منحنی $y = f(x)$ ہو سکتی ہے جس کی وقفہ $0 \le x \le a$ پر لمبائی $\sqrt{2}a$ ہو۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 26: مماسی تیلیوں سے لمبائی قوس کے کلیہ کا حصول۔
فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں۔ ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں نقطہ $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ پر مماسی تیلی بنائیں (نیچے شکل دیکھیں)۔

ا. دکھائیں کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر k ویں مماسی تیلی کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ب. دکھائیں کہ a تا b منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی L درج ذیل ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{ویں تیلی کی لمبائی } k) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$



کمپیوٹر کا استعمال

سوال 27 تا سوال 32 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. منحنی ترسیم کریں۔ خانہ بندی کے نقطے $n = 2, 4, 8$ لیتے ہوتے تخمینی کثیر الاضلاع ترسیم کریں۔

ب. مطابقتی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ لے کر قوس کی تخمینی لمبائی معلوم کریں۔

ج. تکمل سے قوس کی اصل لمبائی تلاش کریں۔ اصل لمبائی اور $n = 2, 4, 8$ لے کر حاصل تخمینی لمبائیوں کا موازنہ کریں۔ n بڑھانے سے تخمینی لمبائی اور اصل لمبائی کا مقابلہ کریں۔ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

سوال 27: $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

سوال 28: $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال 29: $f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

سوال 30: $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال 31: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad -\frac{1}{2} \le x \le 1$

سوال 32: $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$

6.6 سطح طواف کا رقبہ

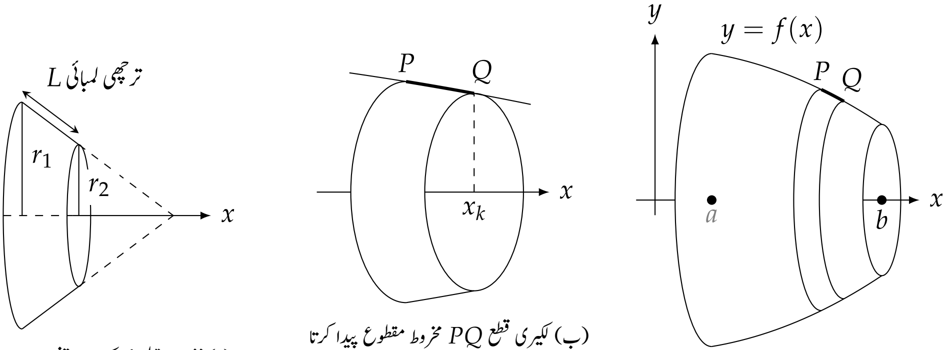
بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسی گھماتے ہوئے رسی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو سطح طواف[9] کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسی کی لمبائی اور رسی کے ہر حصے کی جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کا رقبہ اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔زیادہ پیچیدہ سطحوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل $y = f(x),\ a \le x \le b$ کو x محور کے گرد گھما کر پیدا سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل 6.83-ا میں نمائندہ حصہ PQ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

قوس PQ محور x کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے جس کو بڑا کر کے شکل 6.83-ب میں دکھایا گیا ہے۔ محور x اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو مخروط مقطوع[10] کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبہ کا تخمین ہو گا۔

[9] surface of revolution
[10] frustum



(ا) غیر منفی تفاعل کا ترسیم کو محور x کے گرد گھمانے سے سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

(ب) لکیری قطع PQ مخروط مقطوع پیدا کرتا ہے۔

(ج) مخروط مقطوع کے اہم متغیرات۔

شکل 6.83: سطح طواف کو قوس PQ سے پیدا پٹیوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مخروط مقطوع (شکل 6.83-ج) کا سطحی رقبہ 2π ضرب دونوں سروں کے رداس کا اوسط ضرب ترچھا قد کے برابر ہو گا۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

قطع PQ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع (شکل 6.84) کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کی پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

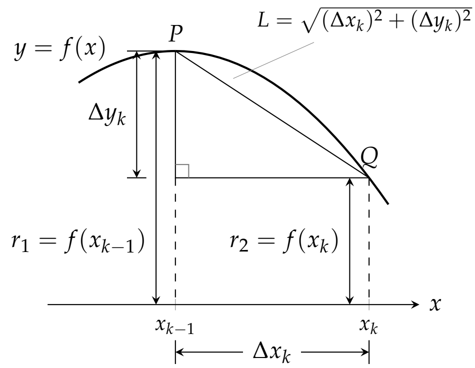
$$\sum_{k=1}^{n} \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{6.14}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے مساوات 6.14 میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

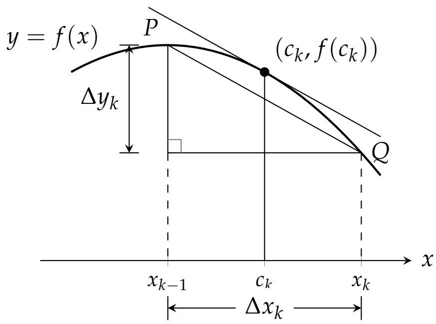
یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات 6.14 کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تفاعل کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفرقات کے مسئلہ اوسط قیمت کی طرف دیکھتے ہیں۔

اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطع PQ کے متوازی ہو گا (شکل 6.85)۔اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$
$$\Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$



شکل 6.84: لکیر اور قوس PQ کے ساتھ وابستہ متغیرات۔



شکل 6.85: خط مستقیم PQ اور نقطہ c_k پر مماس متوازی ہیں۔

مساوات 6.14 میں درج بالا Δy_k پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2} \\ = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\Delta x_k\end{aligned} \tag{6.15}$$

اب یہاں ایک بری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بری خبر یہ ہے کہ مساوات 6.15 میں x_{k-1} ، x_k اور c_k ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک دوسرے جیسا کسی صورت نہیں بنایا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔ اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔ اعلٰی احصاء کا مسئلہ بلس کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل کو مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

جو ہم چاہتے ہیں۔یوں a تا b تفاعل f کی ترسیم کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی تکمل کو لیتے ہیں۔

تعریف: محور x کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تفاعل $y = f(x)$ کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

□

مساوات 6.16 میں جذر وہی ہے جو پیدا کار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیہ میں پایا جاتا ہے۔

مثال 6.21: محور x کے گرد منحنی $2 \le x \le 1$, $y = 2\sqrt{x}$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.86)۔اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہوئے

$$a = 1,\ b = 2,\ y = 2\sqrt{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\\ &= \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

مساوات 6.16 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}S &= \int_1^2 2\pi\cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= 4\pi\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\end{aligned}$$

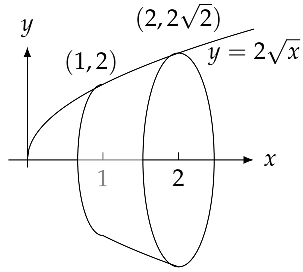
□

محور y کے گرد سطح طواف

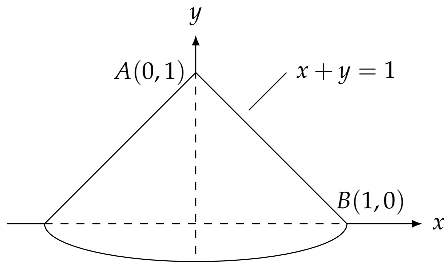
محور y کے گرد سطح طواف کے لئے ہم مساوات 6.16 میں x اور y کی جگہیں تبدیل کرتے ہیں۔

محور y کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ
اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \ge 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.17}$$



شکل 6.86: سطح طواف برائے مثال 6.21



شکل 6.87: سطح طواف برائے مثال 6.22

مثال 6.22: لکیری قطع $x = 1 - y,\ 0 \le y \le 1$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے (شکل 6.87)۔ اس کا رقبہ پہلو تلاش کریں۔

حل: اس رقبہ کو جیومیٹری سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

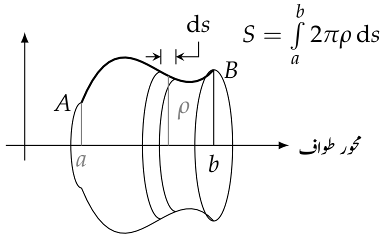
آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0,\ d = 1,\ x = 1 - y,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -1$$
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

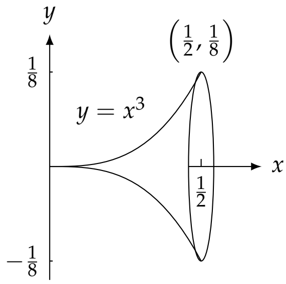
مساوات 6.17 سے اس رقبہ کا حاصل کریں۔

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi\sqrt{2}$$

دونوں نتائج ایک جیسے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □



شکل 6.88: قوس AB کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کا رقبہ $\int_a^b 2\pi\rho\, ds$ ہو گا۔



شکل 6.89: قوس $y = x^3$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

مختصر تفریقی روپ

درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

کو عموماً تفریقی لمبائی قوس $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے:

$$S = \int_a^b 2\pi y\, ds \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x\, ds$$

بایاں مساوات میں x محور سے قطع ds تک فاصلہ y ہے۔ دایاں مساوات میں y محور سے قطع ds کا فاصلہ x ہے۔ ان دونوں کلیوں کو

$$S = \int 2\pi(\text{رداس})(\text{چوڑائی پٹی}) = \int 2\pi\rho\, ds$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں رکن لمبائی قوس ds تک محور طواف سے فاصلہ ρ ہے (شکل 6.88)۔

مختصر تفریقی روپ

$$S = \int 2\pi\rho\, ds$$

کسی مخصوص مسئلے میں آپ رکن لمبائی قوس ds اور رداس ρ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر تکمل کے حدود بھی اسی متغیر کی روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال 6.23: منحنی $y = x^3, 0 \le x \le \frac{1}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.89)۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم مختصر تفریقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \int 2\pi\rho \,\mathrm{d}s \\
&= \int 2\pi y \,\mathrm{d}s \\
&= \int 2\pi y \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \qquad\qquad \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}
\end{aligned}$$

ہم نے یہاں فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا $\mathrm{d}s$ کو $\mathrm{d}x$ یا $\mathrm{d}y$ کی روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات $y = x^3$ سے $\mathrm{d}y$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہٰذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3,\ \mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x,\ \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + (3x^2\,\mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے تکمل کا متغیر x ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \\
&= \int_0^{1/2} 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi(\tfrac{1}{36})(\tfrac{2}{3})(1 + 9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2} \\
&= \tfrac{\pi}{27}[(1 + \tfrac{9}{16})^{3/2} - 1] \\
&= \tfrac{\pi}{27}[(\tfrac{25}{16})^{3/2} - 1] \\
&= \tfrac{\pi}{27}(\tfrac{125}{64} - 1) \\
&= \tfrac{61\pi}{1728}
\end{aligned}$$

$\square$

سوالات

سطحی رقبہ کے تکمل

سوال 1 تا سوال 8 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ کو بھی ترسیم کریں۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 1: محور x ؛ $y=\tan x,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{4}$
جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/4}\tan x\sqrt{1+\sec^4 x}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 3.84

سوال 2: محور x ؛ $y=x^2,\quad 0\le x\le 2$

سوال 3: محور y ؛ $xy=1,\quad 1\le y\le 2$
جواب: (ا) $2\pi\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 5.02

سوال 4: محور y ؛ $x=\sin y,\quad 0\le y\le \pi$

سوال 5: محور x ؛ $x^{1/2}+y^{1/2}=3,$ نقطہ $(4,1)$ سے $(1,4)$ تک
جواب: (ا) $2\pi\int_0^4(3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 63.37

سوال 6: محور y ؛ $y+2\sqrt{y}=x,\quad 1\le y\le 2$

سوال 7: محور y ؛ $x=\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t,\quad 0\le y\le \frac{\pi}{3}$
جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/3}(\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t)\sec y\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 2.08

سوال 8: محور x ؛ $y=\int_1^x\sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t,\quad 1\le x\le \sqrt{5}$

سطحی رقبہ کا حصول

سوال 9: لکیری قطع $y=\frac{x}{2},\ 0\le x\le 4$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ= $\frac{1}{2}$ (محیط تلہ)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $4\pi\sqrt{5}$

سوال 10: لکیری قطع $y=\frac{x}{2},\ 0\le x\le 4$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 11: لکیری قطع $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\ 1\le x\le 3$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع= π (r_1+r_2)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $3\pi\sqrt{5}$

سوال 12: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},\ 1 \le x \le 3$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع= π ($r_1 + r_2$)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 13 تا سوال 22 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال 13: x محور $\quad y = \frac{x^3}{9}, \quad 0 \le x \le 2,$
جواب: $\frac{98\pi}{81}$

سوال 14: x محور $\quad y = \sqrt{x}, \quad \frac{3}{4} \le x \le \frac{15}{4},$

سوال 15: x محور $\quad y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0.5 \le x \le 1.5,$
جواب: 2π

سوال 16: x محور $\quad y = \sqrt{x+1}, \quad 1 \le x \le 5,$

سوال 17: y محور $\quad x = \frac{y^3}{3}, \quad 0 \le y \le 1,$
جواب: $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

سوال 18: y محور $\quad x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \le y \le 3,$

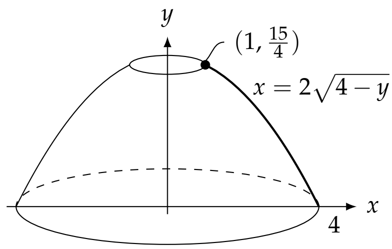
سوال 19: y محور $\quad x = 2\sqrt{4-y}, \quad 0 \le y \le \frac{15}{4},$ (شکل 6.90)
جواب: $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

سوال 20: y محور $\quad x = \sqrt{2y-1}, \quad \frac{5}{8} \le y \le 1,$ (شکل 6.91)

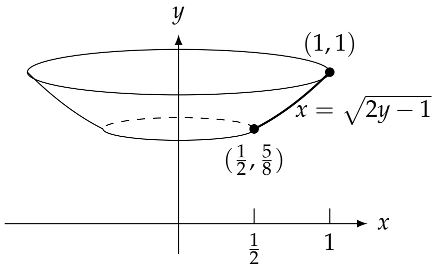
سوال 21: x محور $\quad x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}, \quad 1 \le y \le 2,$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi y \, \mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)
جواب: $\frac{253\pi}{20}$

سوال 22: y محور $\quad y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}, \quad 0 \le x \le \sqrt{2},$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi x \, \mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

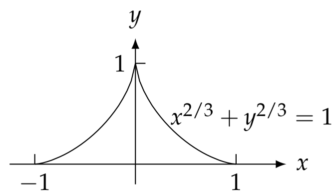
سوال 23: نئی تعریف کی پرکھ
تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ -a \le x \le x$ کو x محور کے گرد گھمانے سے کروی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات 6.16 سے بھی رداس a کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔



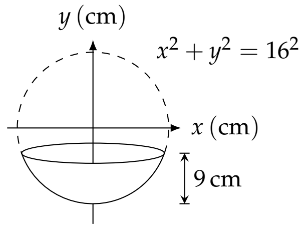
شکل 6.90



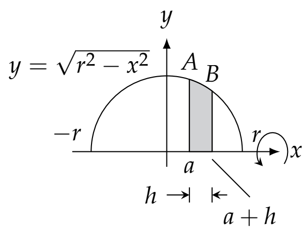
شکل 6.91



شکل 6.92



شکل 6.93



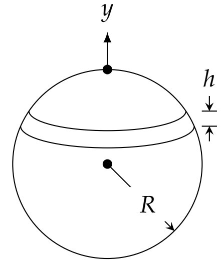
شکل 6.94

سوال 24: نئی تعریف کی پرکھ
لکیری قطع $y = \frac{r}{h}x,\ 0 \le x \le h$ کو x محور کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد h اور اس کے تلا کا رداس r ہے لہٰذا اس کے ترچھا قد $\sqrt{r^2 + h^2}$ ہو گا۔ تکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ دریافت کر کے اس کلیہ کی تصدیق کریں۔

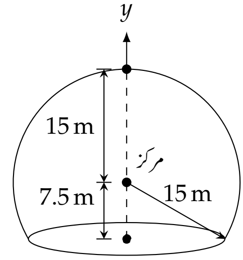
سوال 25: (ا) منحنی $y = \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف کے رقبہ کا تکمل لکھیں جس کو حل کرنا بعد میں سکھایا جائے گا۔ (ب) اس سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔
جواب: (ا) $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)\sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx$ ، (ب) ≈ 14.4236

سوال 26: ستارہ نما کا سطحی رقبہ
ستارہ نما $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ کا وہ حصہ جو x محور سے اوپر پایا جاتا ہے کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.92)۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ۔ ربع اول میں منحنی کے حصہ $y = (1 - x^{2/3})^{3/2},\ 0 \le x \le 1$ کو x محور کے گرد گھما کر نتیجہ کو دگنا کریں۔)

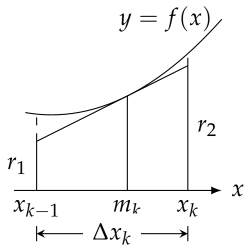
سوال 27: رنگ
ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 6.93)۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے



شکل 6.95



شکل 6.96



شکل 6.97

رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی $0.5\,\mathrm{mm}$ موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لئے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔
جواب: $452.4\,\mathrm{L}$

سوال 28: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ
ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروی ڈبل روٹی کے ایک جتنی موٹے ٹکڑوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے (شکل 6.94)؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور x پر وقفہ h کے اوپر نصف دائرے کا قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو x محور کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبہ کی قیمت h کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ (کرارا رقبہ کی قیمت h پر منحصر ہو گی۔)

سوال 29: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ h ہے رداس R کے کروی سطح سے ایک پٹی کاٹتے ہیں (شکل 6.95)۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہو گا۔

سوال 30: موسمیاتی ریڈار کو شکل 6.96 میں دکھائے گئے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہو گا؟ (تلا کو شامل نہ کریں۔)

سوال 31: محور طواف کو قطع کرنے والے منحنیات سے حاصل سطح طواف
وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل f کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات 6.16 اخذ کی گئی۔ جہاں تفاعل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات 6.16 کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$S=\int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s=\int 2\pi\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}s \tag{6.18}$$

تفاعل $y=\frac{x^3}{9}-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرا مخروط کا سطحی رقبہ مساوات 6.18 استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔
جواب: $5\sqrt{2}\pi$

سوال 32: قوس $y=\frac{x^3}{9}-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات 6.18 میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہو گا؟

اعدادی تکمل
سوال 33 تا سوال 33 میں محور x کے گرد دیے گئے منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گے۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درستگی تک معلوم کریں۔

سوال 33: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$
جواب: 14.4

سوال 34: $y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال 35: $y = x + \sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$
جواب: 54.9

سوال 36: $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \le x \le 6$

سوال 37: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ
فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں اور k ویں ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کے وسطی نقطہ $m_k = \left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$ پر منحنی کی مماس لکیر بنائیں (شکل 6.97)۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ k ویں ذیلی وقفہ میں مماسی قطع کی لمبائی $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطع کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ کو محور x گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

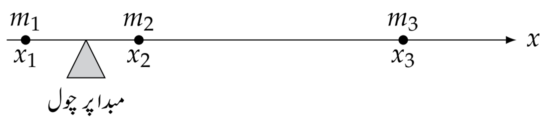
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(k \text{ ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو}) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

6.7 معیاراثراور مرکز کمیت

بہت سارے ساخت اور میکانی نظام کا رویہ ایسا ہوتا ہے جیسا ان کی کمیت ایک نقطہ میں سموئی ہو جس کو مرکز کمیت کہتے ہیں۔ اس نقطہ کا مقام جاننا اہم ہے جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں یک بعدی اور دو بعد چیزوں پر توجہ دی جائے گی۔ تین بعدی چیزوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

لکیر پر کمیت

ہم اپنا ریاضی نمونہ بتدریج تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی منزل میں ہم محور x جس کا مبدا اس کا چول ہو، پر کمیت m_1 ، m_2 اور m_3 تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دارومدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر منحصر ہے۔



ہر کمیت m_k پر نیچے رخ قوت $m_k g$ عمل کرتا ہے جہاں g ثقلی اسراع ہے (قوت $m_k g$ کو کمیت k_k کا وزن کہتے ہیں)۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو قوت مروڑ[11] کہتے ہیں۔ قوت $m_k g$ کو مبدا سے فاصلہ x_k سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کمیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے جبکہ مبدا سے دائیں جانب کمیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام گھومنے کے رجحان کا ناپ ہے۔ اس مجموعہ کو نظام کی قوت مروڑ[12] کہتے ہیں۔

$$\text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{6.19}$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}}\ \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں g اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے جبکہ عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ نظام کی خاصیت ہے جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

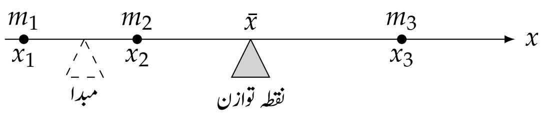
---

[11] torque
[12] system torque

عدد $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ کو مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر کہتے ہیں جو انفرادی کمیت کے معیار اثر m_1x_1 ، m_2x_2 اور m_3x_3 کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر} = \sum m_k x_k$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ $\bar{x}$ پر رکھنے سے نظام کا قوت مروڑ صفر ہو گا۔



اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے ہر کمیت کا قوت مروڑ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ کے لحاظ سے } m_k \text{ کا معیار اثر} &= (m_k \text{ سے } \bar{x} \text{ کا فاصلہ})(\text{نیچے رخ قوت}) \\ &= (x_k - \bar{x}) m_k g \end{aligned}$$

ان معیار اثر کے مجموعہ کو صفر کے برابر پر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم $\bar{x}$ کے لئے حل کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} \sum (x_k - \bar{x}) m_k g &= 0 && \text{معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے} \\ g \sum (x_k - \bar{x}) m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب} \\ \sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) &= 0 && g \text{ سے تقسیم اور } m_k \text{ پھیلایا گیا ہے} \\ \sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ فرق} \\ \sum m_k x_k &= \bar{x} \sum m_k && \text{مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی} \\ \bar{x} &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} && \bar{x} \text{ کے لئے حل} \end{aligned}$$

یہ آخری مساوات کہتی ہے کہ $\bar{x}$ معلوم کرنے کے لئے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کمیت سے تقسیم کریں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

نقطہ $\bar{x}$ کو نظام کا مرکز کمیت[13] کہتے ہیں۔

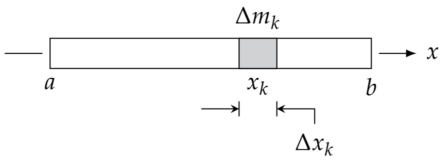
---

[13] center of mass

تار اور پتلے سلاخ

بہت سارے موقعوں پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کی کمیت کا مرکز مطلوب ہوتا ہے۔ایسی صورتوں میں اگر ہم تقسیم کمیت کو استمراری تفاعل کی صورت میں لکھ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کی بجائے تکمل ہو گا جیسے نیچے سمجھایا گیا ہے۔

فرض کریں ایک لمبی پٹی $x = a$ تا $x = b$ محور x پر پڑی ہے۔ ہم $[a, b]$ اس پٹی کی خانہ بندی کرتے ہوئے اس کو Δm_k کمیت کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ k ویں ٹکڑے کی لمبائی Δx_k ہے اور یہ مبدا سے تقریباً x_k فاصلے پر پایا جاتا ہے۔اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔



اول، پٹی کا مرکز کمیت $\bar{x}$ اور نقطہ x_k پر کمیت Δm_k رکھنے سے حاصل نظام کا مرکز کمیت تقریباً ایک ہی مقام پر ہوں گے:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

دوم، مبدا کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً $x_k \Delta m_k$ ہو گا لہٰذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام $x_k \Delta m_m$ کا مجموعہ ہو گا:

$$\text{نظام کا معیار اثر} \approx \sum x_k \Delta m_k$$

سوم، اگر x_k پر پٹی کی کثافت $\delta(x_k)$ ہو جہاں δ استمراری ہے (اور کثافت کی پیمائش کمیت فی لمبائی ہے) تب Δm_k تخمیناً $\delta(x_k)\Delta x_k$ ہو گا:

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k} \tag{6.20}$$

مساوات 6.20 کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل $x\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفہ پر تفاعل $\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات 6.20 میں تخمین بہتر ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x}$$

ہم $\bar{x}$ کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

محور x پر کثافتی تفاعل $\delta(x)$ کے سلاخ یا پٹی کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{مبدا کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{کمیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کمیت} \end{aligned} \tag{6.21}$$

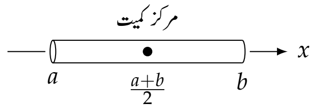
مساوات 6.21 کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور کثافت سے مراد کمیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیمائش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔ یوں تار، سلاخ اور پٹی کے لئے ہم کمیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں جبکہ مستوی سطحوں کے لئے کمیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

مثال 6.24: مستقل کثافت کا سلاخ یا پٹی
مستقل کثافت والے سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

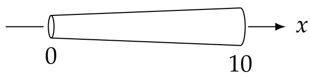
حل: ہم محور x پر $x=a$ سے $x=b$ کو سلاخ تصور کرتے ہیں (شکل 6.98)۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b \delta x\,\mathrm{d}x = \delta\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \delta\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2-a^2) \\ M &= \int_a^b \delta\,\mathrm{d}x = \delta\int_a^b \mathrm{d}x = \delta[x]_a^b = \delta(b-a) \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2-a^2)}{\delta(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کمیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطہ پر ہو گا۔ □



شکل 6.98: مستقل کثافت کے پتلے سیدھے سلاخ کا مرکز کمیت دونوں سروں کے وسطی نقطہ پر ہو گا۔



شکل 6.99: متغیر موٹائی کے سیدھے سلاخ کو متغیر کثافت کا سیدھا سلاخ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 6.25: متغیر کثافت
ایک سلاخ جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹا ہوتا ہے (شکل 6.99) لہٰذا اس کی کثافت مستقل ہونے کی بجائے $\delta(x) = 1 + \frac{x}{10}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ سلاخ کا مرکز کمیت معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات 6.21 استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_0^{10} x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} x\Big(1 + \frac{x}{10}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} \Big(x + \frac{x^2}{10}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\Big]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}\,\mathrm{kg\,m}
\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی $\mathrm{kg\,m}$ ہے۔ سلاخ کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int_0^{10} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} \Big(1 + \frac{x}{10}\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[x + \frac{x^2}{20}\Big]_0^{10} 10 + 5 = 15\,\mathrm{kg}$$

مرکز کمیت درج ذیل ہو گا۔

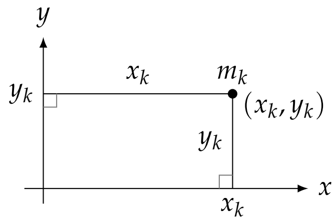
$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\,\mathrm{m}$$

□

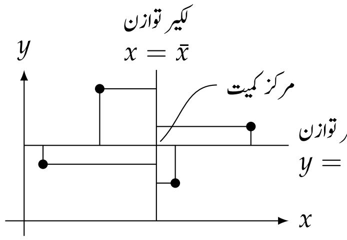
مستوی پر تقسیم کمیت

فرض کریں ایک مستوی میں متناہی تعداد میں کمیت پائے جاتے ہیں۔ یوں نقطہ (x_k, y_k) پر کمیت m_k ہو گا (شکل 6.100)۔ اس نظام کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \sum m_k \qquad \text{نظام کی کمیت}$$



شکل 6.100: ہر کمیت m_k کا ہر انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔



شکل 6.101: دو بعدی کمیتوں کا جھرمٹ اپنے مرکز کمیت پر متوازن ہو گا۔

ہر کمیت m_k کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور x کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k y_k$ ہو گا جبکہ محور y کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k x_k$ ہو گا۔دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \sum m_k y_k \qquad \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$
$$M_y = \sum m_k x_k \qquad \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$

نظام کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{6.22}$$

یک بعدی صورت کی طرح $\bar{x}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $x = \bar{x}$ پر توازن میں ہو گا (شکل 6.101)۔

نظام کے مرکز کمیت کا y محدد درج ذیل ہو گا۔

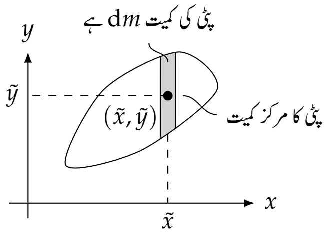
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{6.23}$$

یک بعدی صورت کی طرح $\bar{y}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $y = \bar{y}$ پر توازن میں ہو گا۔ لکیر $y = \bar{y}$ کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو منسوخ کر کے صفر قوت مروڑ پیدا کرتے ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ اس نظام کی پوری کمیت نقطہ $(\bar{x}, \bar{y})$ میں پائی جاتی ہے۔ اس نقطہ کو نظام کی کمیت کا مرکز[14] کہتے ہیں۔

پتلی مستوی چادر

کئی بار ہمیں پتلی مستوی چادر کا مرکز کمیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کمیت کی تقسیم استمراری ہے لہٰذا $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں متناہی مجموعوں کی بجائے تکمل پائے جاتے ہیں۔آئیں اس پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں xy مستوی میں ایک پتلی چادر پائی جاتی

[14] center of mass



شکل 6.102: چادر کو انتصابی پتلی پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ نمائندہ پٹی کا کسی ایک انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر وہی ہو گا جو پٹی کی کمیت $\mathrm{d}m$ کو پٹی کی مرکز کمیت پر منجمد کرنے سے حاصل ہو گا۔

ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک پٹیوں میں تقسیم کریں (شکل 6.102 میں پٹیاں محور y کے متوازی ہیں)۔ کسی ایک نمائندہ پٹی کی کمیت کا مرکز $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ہو گا۔ ہم پٹی کی کمیت Δm کو نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر منجمد تصور کرتے ہیں۔ یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{x}\Delta m$ ہو گا جبکہ محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{y}\Delta m$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 6.22 اور مساوات 6.23 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m}$$

یک بعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریمان مجموعے پائے جاتے ہیں جن کی قیمتیں، پٹی کی چوڑائی کم سے کم کرنے سے قطعی تکملات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان تکملات کو علامت طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

مستوی میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M_y &= \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M &= \int \mathrm{d}m && \text{کمیت}\\
\bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کمیت}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

ان تکملات کی حصول کے لئے ہم چادر کو محددی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدد کے متوازی ایک نمائندہ پٹی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پٹی کی کمیت اور مرکز کمیت کے محدد $(\tilde{x}, \tilde{y})$ کو x اور y کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد محددی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے بیچ $\tilde{y}\,\mathrm{d}m$ ، $\tilde{x}\,\mathrm{d}m$ اور $\mathrm{d}m$ کے تکملات لیتے ہیں۔

مثال 6.26: ایک تکونی چادر جس کو شکل 6.103-ا میں دکھایا گیا ہے کی مستقل کثافت $\delta = 3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے۔ (ا) محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر M_y معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کمیت M معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کمیت کے مرکز کا $\bar{x}$ محدد معلوم کریں۔

حل: پہلی ترکیب: انتصابی پٹیاں (شکل 6.103-ب)
(ا) نمائندہ پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$ چوڑائی: $\mathrm{d}x$

لمبائی: $2x$ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A = 3 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x$

رقبہ: $\mathrm{d}S = 2x\,\mathrm{d}x$ مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = x$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = x \cdot 6x\,\mathrm{d}x = 6x^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہٰذا پوری چادر کا محور y کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x = 2x^3\Big]_0^1 = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^1 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2\Big]_0^1 = 3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}, \mathrm{cm}$$

دوسری ترکیب: افقی پٹیاں (شکل 6.103-ج)
(ا) نمائندہ انتصابی پٹی کے مرکز کمیت کا y محدد y ہو گا:

$$\tilde{y} = y$$

پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں x محدد پایا جائے گا:

$$\tilde{x} = \frac{\frac{y}{2} + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

لمبائی: $1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

چوڑائی: $\mathrm{d}y$

رقبہ: $\mathrm{d}S = \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$ مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y$$

ہو گا اور محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کی مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$$

ہم اسی طرح M_x اور $\bar{y}$ بھی تلاش کر سکتے ہیں۔ □

اگر پتلی چادر میں کمیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب کمیت کا مرکز محور تشاکل پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کمیت دونوں محور کے نقطہ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

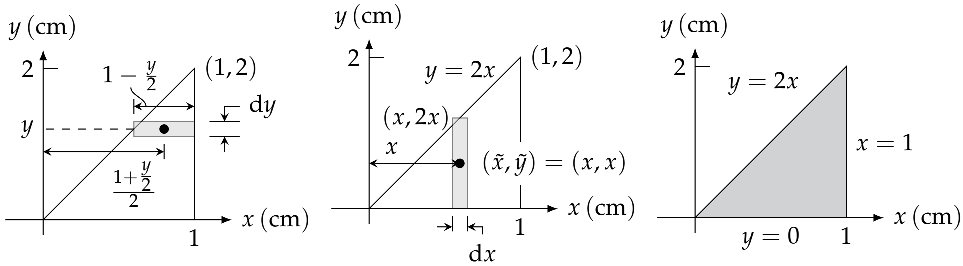
مثال 6.27: مستقل کثافت ایک پتلا مستوی خطہ جس کی کثافت مستقل δ ہے کو بالائی طرف سے قطع مکافی $y = 4 - x^2$ اور زیریں طرف سے محور x گھیرتا ہے (شکل 6.104)۔ اس خطے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ خطے کی کثافت مستقل ہے اور تقسیم کمیت محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا مرکز کمیت محور y پر پایا جائے گا۔ یوں $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ ہمیں صرف $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ معلوم کرنا ہے۔

افقی پٹیاں لینے سے درج ذیل مشکل تکمل پیدا ہوتا ہے

$$M_x = \int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$$

لہٰذا ہم انتصابی پٹیاں لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ نمائندہ انتصابی پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔



(ا) تکونی چادر۔ (ب) انتصابی پٹیاں۔ (ج) افقی پٹیاں۔

شکل 6.103: چادر برائے مثال 6.26

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$

لمبائی: $4 - x^2$

چوڑائی: $\mathrm{d}x$

رقبہ: $\mathrm{d}S = (4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = \delta(4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$

محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{y}\,\mathrm{d}m = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہذا محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)\,\mathrm{d}x \tag{6.25}$$

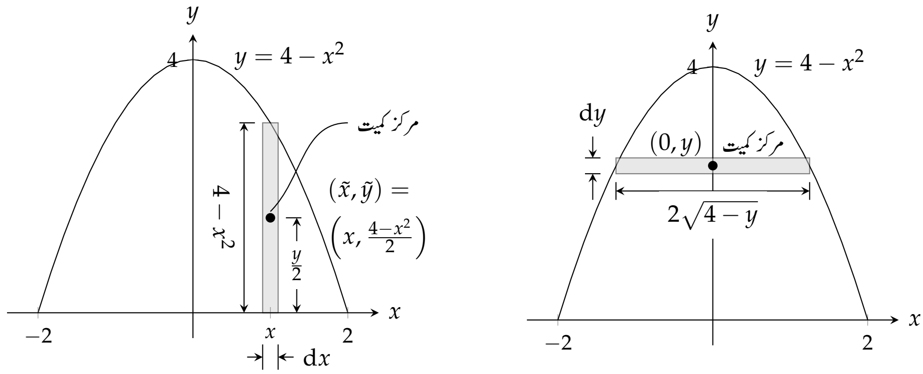
$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}\delta \tag{6.26}$$

چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\delta \tag{6.27}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{15}\delta}{\frac{32}{3}\delta} = \frac{8}{5}$$



(ا) افقی پٹیوں سے حاصل تکمل مشکل ثابت ہوتا ہے۔

(ب) انتصابی پٹیاں۔

شکل 6.104: چادر برائے مثال 6.27

چادر کی کمیت کا مرکز درج ذیل نقطہ ہو گا۔

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{8}{5}\right)$$

□

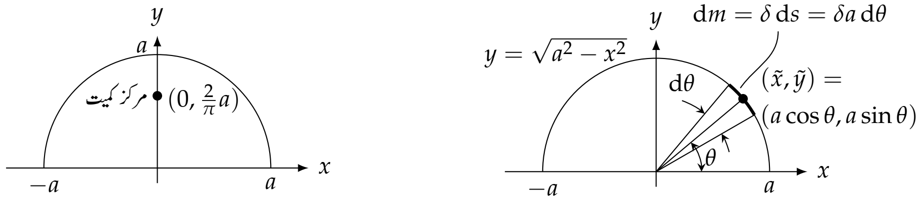
مثال 6.28: متغیر کثافت نقطہ (x,y) پر مثال 6.27 کی چادر کی کثافت $\delta=2x^2$ لیتے ہوئے چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: کمیت اب بھی محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x}=0$ ہو گا۔ یوں $\delta=2x^2$ کے لئے مساوات 6.25 اور مساوات 6.27 درج ذیل صورت اختیار کریں گے۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m=\int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}x^2(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{2}(16x^2-8x^4+x^6)\,\mathrm{d}x=\frac{2048}{105}\\
M &= \int \mathrm{d}m=\int_{-2}^{2}\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}2x^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{2}(8x^2-2x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{256}{15}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{2048}{105}\cdot\frac{15}{256}=\frac{8}{7}$$



(ب) مرکز کمیت تار پر نہیں پایا جاتا ہے۔ (ا) مرکز کمیت کے حصول میں مستعمل متغیرات۔

شکل 6.105: نصف دائری تار (مثال 6.29)

چادر کی کمیت کا نیا مرکز درج ذیل ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

□

مثال 6.29: ایک تار جس کی کثافت δ مستقل ہے سے رداس a کا نصف دائرہ بنایا جاتا ہے۔ اس کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم نصف دائرے کو تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 6.105)۔ کمیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ ہم تصور میں تار کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے $\bar{y}$ تلاش کرتے ہیں۔ نمائندہ قطع کے لئے درج ذیل ہو گا۔

لمبائی: $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\theta$ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = a\sin\theta$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}s = \delta a\,\mathrm{d}\theta$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^\pi a\sin\theta \cdot \delta a\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi \delta a\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\delta a^2[-\cos\theta]_0^\pi}{\delta a\pi} = \frac{2}{\pi}a$$

مرکز کمیت $(0, 2a/\pi)$ ہو گا جو مبدا سے تقریباً $\frac{2}{3}$ اوپر ہے۔ □

6.7.1 وسطانی مرکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کی کلیات میں نسب نما اور شمار کنندہ میں پائے جانے والے δ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔یوں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کی نقطہ نظر سے δ کو شروع سے اکائی تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستقل کثافت کی صورت میں کسی چیز کی کمیت کا مرکز اس چیز کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نا کہ اس مادے پر جس سے یہ چیز بنی ہو۔ایسی صورت میں مرکز کمیت کو عموماً وسطانی مرکز[15] کہتے ہیں۔ یوں اگر آپ سے کہا جائے کہ تکون، مخروط یا کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کو معیار اثر تقسیم کمیت سے معلوم کرتے ہوئے $\delta = 1$ لیں۔

سوالات

پتلے سلاخ

سوال 1: ایک بچہ جس کی کمیت $40\,\mathrm{kg}$ اور دوسرا بچہ جس کی کمیت $50\,\mathrm{kg}$ ہے ہنڈولا پر جھول رہے ہیں۔ اگر $40\,\mathrm{kg}$ بچہ چول سے $2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو تب ہنڈولا کو متوازن رکھنے کی خاطر دوسرا بچہ چول سے دوسری جانب کتنے فاصلے پر ہو گا؟
جواب: $\frac{8}{5}\,\mathrm{m}$

سوال 2: ایک شہتیر کے سروں کو دو ترازوؤں پر رکھا جاتا ہے جو $100\,\mathrm{kg}$ اور $20\,\mathrm{kg}$ کی پیمائش دیتے ہیں۔ شہتیر کی کمیت کا مرکز کہاں ہو گا؟

سوال 3: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو وسط سے $90°$ زاویہ پر موڑ پر فریم بنایا جاتا ہے (شکل 6.106)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی حصے کا مرکز کمیت کہاں ہو گا؟)
جواب: $\left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4}\right)$

سوال 4: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو $90°$ پر موڑ کر فریم بنایا جاتا ہے جہاں ایک بازو کی لمبائی دوسرے بازو کی لمبائی سے دگنی ہے (شکل 6.107)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کی کمیت کے مراکز کہاں ہوں گے؟)

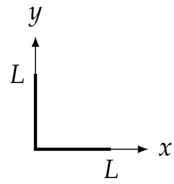
سوال 5 تا سوال 12 میں محور x کے مختلف وقفوں پر پڑی ہوئی پتلی سلاخ کی کثافتی تفاعل دیے گئے ہیں۔ مساوات 6.21 استعمال کرتے ہوئے مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 5: $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$
جواب: $M_0 = 8, M = 8, \bar{x} = 1$

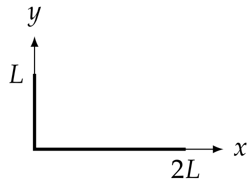
سوال 6: $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$

---

[15] centroid



شکل 6.106: لوہے کا فریم برائے سوال 3



شکل 6.107: فریم برائے سوال 4

سوال 7: $\delta(x) = 1 + \frac{x}{3}, \quad 0 \le x \le 3$
جواب: $M_0 = \frac{15}{2},\ M = \frac{9}{2},\ \bar{x} = \frac{5}{3}$

سوال 8: $\delta(x) = 2 - \frac{x}{4}, \quad 0 \le x \le 4$

سوال 9: $\delta(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \le x \le 4$
جواب: $M_0 = \frac{73}{6},\ M = 5,\ \bar{x} = \frac{73}{30}$

سوال 10: $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$

سوال 11: $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
جواب: $M_0 = 3,\ M = 3,\ \bar{x} = 1$

سوال 12: $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

مستقل کثافت والے پتلی چادریں
سوال 13 تا سوال 24 میں وہ خطہ دیا گیا ہے جہاں مستقل کثافت δ والی پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

سوال 13: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 4$ میں محیط خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{12}{5}$

سوال 14: قطع مکافی $y = 25 - x^2$ اور محور x میں محیط خطہ۔

سوال 15: قطع مکافی $y = x - x^2$ اور لکیر $y = -x$ میں محیط خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 1,\ \bar{y} = -\frac{3}{5}$

سوال 16: قطع مکافی $y = x^2 - 3$ اور $y = -2x^2$ میں محیط خطہ۔

سوال 17: محور y اور قطع مکافی $x = y - y^3, 0 \leq y \leq 1$ کے بیچ خطہ۔
جواب: $\bar{x} = \frac{16}{105}, \bar{y} = \frac{8}{15}$

سوال 18: قطع مکافی $x = y^2 - y$ اور لکیر $y = x$ میں محیط خطہ۔

سوال 19: محور x اور منحنی $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

سوال 20: محور x اور منحنی $y = \sec^2 x, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ۔

سوال 21: قطع مکافی $y = 2x^2 - 4x$ اور $y = 2x - x^2$ میں محیط خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 1, \bar{y} - \frac{2}{5}$

سوال 22: (ا) ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے اندر خطہ۔ (ب) محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{9 - x^2}$ کے بیچ خطہ۔ جزو-ا کے نتیجہ کے ساتھ جواب کا موازنہ کریں۔

سوال 23: (ا) ربع اول میں لکیر $x = 3$ ، لکیر $y = 3$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے بیچ تکونی خطہ۔ (اشارہ۔ رقبے کو جیومیٹری کی مدد سے حاصل کریں۔)
جواب: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4-\pi}$

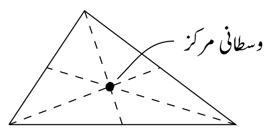
سوال 24: وہ خطہ جس کا بالائی سرحد $y = \frac{1}{x^3}$ ، زیریں سرحد $y = -\frac{1}{x^3}$ ، بایاں سرحد $x = 1$ اور دایاں سرحد $x = a > 1$ ہوں۔ اس کے علاوہ $\lim_{a\to\infty} \bar{x}$ بھی معلوم کریں۔

متغیر کثافت والے پتلی چادریں

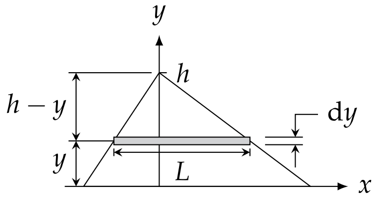
سوال 25: محور x اور منحنی $y = \frac{2}{x^2}, 1 \leq x \leq 2$ کے بیچ چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = x^2$ ہے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{1}{2}$

سوال 26: لکیر $y = x$ سے نیچے اور قطع مکافی $y = x^2$ سے اوپر پتلی چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = 12x$ ہے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 27: لکیر $x = 1$ ، لکیر $x = 4$ اور منحنی $y = \mp\frac{4}{\sqrt{x}}$ کے بیچ چادر کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{1}{x}$ ہو تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔
جواب: (الف) $\frac{224\pi}{3}$ ، (ب) $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$



(ا) تکون کا وسطانی مرکز۔



(ب) مرکز کمیت معلوم کرنے میں مستعمل متغیرات۔

شکل 6.108: تکون برائے سوال 29

سوال 28: منحنی $y=\frac{2}{x}$ اور محور x پر $x=1$ تا $x=4$ کے بیچ چادر کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x,y) پر چادر کی کثافت $\delta(x)=\sqrt{x}$ ہو تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

تکون کے وسطانی مراکز

سوال 29: تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا۔
تکون کی راس سے مخالف ضلع کی وسط تک قطع کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ ضلع سے $\frac{1}{3}$ فاصلہ پر وسطانیے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل 6.108)۔ دکھائیں کہ تکون کا وسطانی مرکز بھی اسی نقطہ پر پایا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تکون کے کسی ایک ضلع کو محور x پر رکھ کر اس میں نمائندہ افقی پٹی L لیں۔ کمیت $\mathrm{d}m$ کو L اور $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. تشابہ مثلثات کی مدد سے $L=\frac{b}{h}(h-y)$ لکھ کر $\mathrm{d}m$ کے کلیہ میں ڈالیں۔

ج. دکھائیں کہ $\bar{y}=\frac{h}{3}$ ہو گا۔

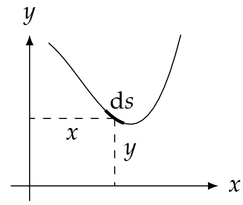
د. اسی دلیل کو باقی دو وسطانیوں پر بھی لاگو کریں۔

سوال 30 تا سوال 34 مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ سوال 29 کا نتیجہ استعمال کر کر مثلث کا وسطانی مرکز دریافت کریں۔

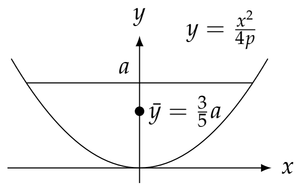
سوال 30: $(-1,0),\ (1,0),\ (0,3)$

سوال 31: $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$
جواب: $\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{3}$

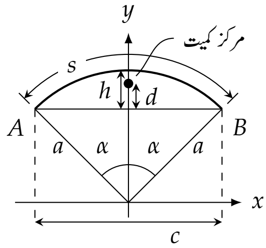
سوال 32: $(0,0),\ (a,0),\ (0,a)$



شکل 6.109: برائے سوال 39



شکل 6.110: برائے سوال 40



شکل 6.111: برائے سوال 41

سوال 33: $(0,0),\ (a,0),\ (0,b)$
جواب: $\bar{x} = \frac{a}{3},\ \bar{y} = \frac{b}{3}$

سوال 34: $(0,0),\ (a,0),\ (\frac{a}{2},b)$

پتلی تار

سوال 35: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = \sqrt{x}$ پر $x = 0$ سے $x = 2$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $\frac{13\delta}{6}$

سوال 36: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = x^3$ پر $x = 0$ سے $x = 1$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 37: کثافت $\delta = k \sin\theta$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔
جواب: $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

سوال 38: کثافت $\delta = 1 + k\lvert\cos\theta\rvert$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔

کلیات انجینئری

سوال 39 تا سوال 42 میں دیے گئے فقروں اور کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال 39: قابل تفرق مستوی منحنی کے وسطانی مراکز کے محدد درج ذیل ہوں گے (شکل 6.109)۔

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}$$

سوال 40: قوس $y = \frac{x^2}{4p}$ میں $p > 0$ کی قیمت جو بھی ہو، شکل 6.110 میں دکھائے گئے قطع مکافی خطے کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{3}{5}a$ ہو گا۔

سوال 41: مستقل کثافت کی باریک تار سے، محور y کے لحاظ سے تشاکلی، دائری قوس بنایا جاتا ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے (شکل 6.111)۔ اس کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$ ہو گا۔

سوال 42: گزشتہ سوال کو جاری رکھا گیا ہے
دکھائیں کہ جب α کی قیمت کم ہو تب وسطانی مرکز سے قطع AB تک فاصلہ d تقریباً $\frac{2h}{3}$ ہو گا۔ایسا درج ذیل اقدام سے ہو گا۔

ا. 1. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha} \tag{6.28}$$

2. درج ذیل تفاعل کو

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

کمپیوٹر پر ترسیم کر کے بڑا کر کے دکھائیں کہ $\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$ ہو گا۔

ب. آپ $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ لے کر مساوات 6.28 کا دایاں ہاتھ حل کر کے دیکھیں کہ 45° سے بڑے زاویوں کے لئے بھی خلل (یعنی d اور $\frac{2}{3}$ میں فرق) بہت کم ہے۔

6.8 کام

روزمرہ زندگی میں کام سے مراد وہ عمل ہے جو جسمانی یا ذہنی قوت سے سر انجام دیا جائے۔ سائنس میں کام کی تعریف اس سے مختلف ہے۔ اس حصہ میں کام کی سائنسی تعریف پیش کی جائے گی اور کام کی قیمت کا حصول سکھایا جائے گا۔

مستقل قوت اور کام

جب کوئی جسم جس پر مستقل قوت F عمل کرتی ہو، قوت کی سمت میں سیدھی لکیر پر فاصل d حرکت کرے تب ہم (سائنسی طور پر) کہتے ہیں کہ قوت F اس جسم پر کام W کرتی ہے:

$$W = Fd \tag{6.29}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائنس میں لفظ کام کی معنی روزمرہ زندگی میں استعمال معنی سے مختلف ہے۔ اگر آپ کسی گاڑی کو سڑک پر دکھا لگا کر ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کریں تب آپ کی روزمرہ خیال کے مطابق آپ نے کام کیا اور مساوات 6.29 کے تحت بھی آپ نے کام کیا۔ اس کے برعکس اگر آپ پورا دن گاڑی کو دکھا لگاتے رہیں لیکن گاڑی اپنی جگہ سے حرکت نہ کرے تب اگرچہ آپ کا خیال ہو گا کہ آپ نے بہت کام کیا لیکن مساوات 6.29 کے تحت آپ نے کوئی کام نہیں کیا۔

مساوات 6.29 سے واضح ہے کہ قوت کی اکائی کو فاصلہ کی اکائی سے ضرب دینے سے کام کی اکائی حاصل ہو گی۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں قوت کی اکائی نیوٹن N اور فاصلہ کی اکائی میٹر m ہے لہٰذا اس نظام میں کام کی اکائی نیوٹن میٹر $\mathrm{N \cdot m}$ ہو گی جس کو خصوصی نام جاول[16] دیا گیا ہے اور جس کو J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 6.30: فرض کریں آپ $80\,\mathrm{kg}$ کمیت کو $30\,\mathrm{cm}$ بلندی تک اٹھاتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے آپ درج ذیل کام کرتے ہیں۔

$$W = Fd = (80)(9.8)(0.3) = 235.2\,\mathrm{J}$$

□

متغیر قوت اور کام

اگر آپ پانی کی ایسی بالٹی کو اٹھائیں جس سے پانی ٹپکتا ہو تب لاگو قوت کی قیمت بلندی کے ساتھ تبدیل ہو گی۔ایسی صورت میں قوت کا کلیہ $W = Fd$ تبدیل کرتے ہوئے تکمل کا استعمال ضروری ہو گا جو قوت کی تبدیلی کا حساب رکھ سکے۔

فرض کریں کہ محور x سے اس لکیر کو ظاہر کرنا ممکن ہے جس پر قوت عمل کرتی ہے اور قوت کی مقدار F کو فاصلہ x کا استمراری تفاعل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم وقفہ $x = a$ تا $x = b$ پر قوت کے کام کو معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ اگر ذیلی وقفہ چھوٹا ہو تب x_{k-1} سے x_k تک کے فاصلہ

---

[16] joule

میں استمراری قوت F کی تبدیلی (استمراری ہونے کی بنا) بہت کم ہو گی جس کو رد کیا جا سکتا ہے۔یوں x_{k-1} سے x_k تک حرکت کے دوران کام کی قیمت تخمیناً $F(c_k)\Delta x_k$ ہو گی۔یوں درج ذیل ریمان مجموعہ $x = a$ سے $x = b$ تک قوت F کا کام دے گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k \tag{6.30}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہو ویسے ویسے یہ تخمین مزید بہتر ہو گی لہٰذا ہم $x = a$ سے $x = b$ تک F کے تکمل کو a سے b تک قوت F کے کام کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: محور x پر $x = a$ سے $x = b$ تک لاگو متغیر قوت $F(x)$ درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.31}$$

□

کام کی اکائی جاول J ہے۔

مثال 6.31: قوت $F(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{N}$ محور x پر $x = 1\,\mathrm{m}$ تا $x = 10\,\mathrm{m}$ عمل کرتی ہے۔ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9\,\mathrm{J}$$

□

مثال 6.32: گاؤں میں کنواں سے پانی نکالنے کے لئے بوکا استعمال کیا جاتا ہے۔ کھوہ کی گہرائی $20\,\mathrm{m}$ ، خالی بوکا کی کمیت $2\,\mathrm{kg}$ اور رسی کی کمیت $0.1\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ بوکا میں ابتدائی طور پر $10\,\mathrm{L}$ پانی ہوتا ہے۔چونکہ بوکا سے پانی رستا ہے لہٰذا جتنی دیر میں بوکے کو نیچے سے اوپر کھینچا جاتا ہے اتنی دیر میں بوکا خالی ہو جاتا ہے۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔ درج ذیل کام معلوم کریں۔

ا. صرف پانی بلند کرنے کا کام۔

ب. پانی اور بوکا بلند کرنے کا کام۔

ج. پانی، بوکا اور رسی بلند کرنا کا کام۔

حل:

ا. صرف پانی: پانی اٹھانے کے لئے درکار قوت پانی کے وزن جتنا ہو گا جو ابتدا میں $(10)(9.8) = 98\,\mathrm{N}$ اور آخر میں صفر ہے۔یوں مبدا کو کنواں کی تہہ میں رکھتے ہوئے قوت کو

$$F(x) = \underbrace{98}_{\text{ابتدائی وزن}} \underbrace{\left(\frac{20-x}{20}\right)}_{\text{اونچائی } x \text{ پر باقی تناسب}} = 98\left(1-\frac{x}{20}\right) = 98 - 4.9x\,\mathrm{N}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{20} (98-4.9x)\,\mathrm{d}x = \left[98x - \frac{4.9x^2}{2}\right]_0^{20} = 1960 - 980 = 980\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

ب. صرف بوکا: صرف بوکا اٹھانے کے لئے درکار کام مساوات 6.29 کے تحت $392\,\mathrm{J} = (20)(9.8)(2)$ ہو گا۔یوں پانی اور بوکا دونوں کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 = 1372\,\mathrm{J}$$

ج. پانی، بوکا اور رسی: مبدا سے x بلندی پر پانی، بوکا اور رسی کی کمیت کو $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل درکار قوت حاصل ہوتی ہے۔

$$F(x) = \underbrace{(98-4.9x)}_{\text{پانی کا متغیر وزن}} + \underbrace{(19.6)}_{\text{بوکا کا مستقل وزن}} + \underbrace{(0.1)(9.8)(20-x)}_{\text{رسی کا متغیر وزن}}$$

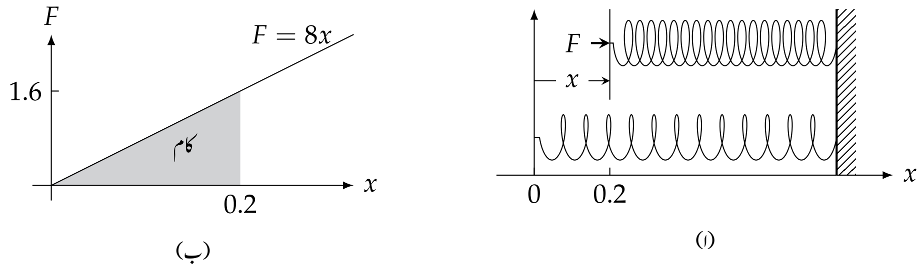
صرف رسی کو اوپر کھینچنے کا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{20} (0.1)(9.8)(20-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} (19.6 - 0.98x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[19.6x - \frac{0.98x^2}{2}\right]_0^{20} = 392 - 196 = 196\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

یوں پانی، بوکا اور رسی تینوں کو کھینچنے کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 + 196 = 1568\,\mathrm{J}$$

□



شکل 6.112: اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی اور قوت راست تناسب ہیں۔

قانون ہک برائے اسپرنگ

قانون ہک[17] کے تحت کسی بھی اسپرنگ کی قدرتی لمبائی کو تان کر یا دبا کر x اکائیاں تبدیل کرنے کے لئے درکار قوت لمبائی x کے راست متناسب ہو گی:

$$F = kx \tag{6.32}$$

مستقلہ اسپرنگ k جو اسپرنگ کی خاصیت ہے کو مقیاس لچک[18] کہتے ہیں۔ مقیاس لچک کو قوت فی اکائی لمبائی میں ناپا جاتا ہے۔ جب تک لاگو قوت اسپرنگ کی دھاتی تار کو بگاڑ نہ دے قانون ہک (مساوات 6.32) بہترین نتائج دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ لاگو قوت اسپرنگ کو خراب نہیں کرتی ہے۔

مثال 6.33: ایک اسپرنگ جس کا مقیاس لچک $k = 8\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے کی لمبائی کو $1\,\mathrm{m}$ سے تبدیل کر کے $0.8\,\mathrm{m}$ کیا جاتا ہے۔ درکار کام تلاش کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کو محور x پر پڑا ہوا تصور کرتے ہیں (شکل 6.112)۔ اسپرنگ کا ایک سر مبدا پر ہے جبکہ اس کا دوسرا سر $x = 1$ پر باندھا ہوا ہے۔ یوں ہم قوت کو $F = 8x$ لکھ سکتے ہیں جہاں x کی قیمت 0 تا $0.2\,\mathrm{m}$ ہو گی۔ درکار کام درج ذیل ہو گا۔

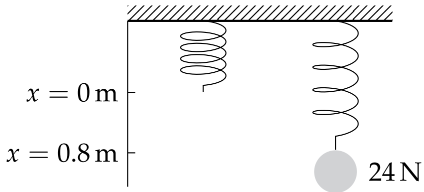
$$W = \int_0^{0.2} 8x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^{0.2} = 0.16\,\mathrm{J}$$

□

مثال 6.34: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $1\,\mathrm{m}$ ہے کو $24\,\mathrm{N}$ قوت سے تان کر $1.8\,\mathrm{m}$ لمبا کیا جاتا ہے۔

ا. مقیاس لچک k تلاش کریں۔

[17] Hooke's law
[18] spring constant



شکل 6.113: قوت نے اسپرنگ کی لمبائی کو بڑھایا ہے۔

ب. اسپرنگ کی لمبائی کو $2\,\mathrm{m}$ تبدیل کرنے کے لئے درکار کام تلاش کریں۔

ج. اسپرنگ کی لمبائی میں $45\,\mathrm{N}$ کی قوت کتنی تبدیلی پیدا کرے گی؟

حل:

ا. مقیاس لچک: قیاس لچک کو مساوات 6.32 سے حاصل کرتے ہیں۔ اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی $0.8\,\mathrm{m}$ ہے۔

$$24 = k(0.8) \quad \implies k = \frac{24}{0.8} = 30\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

ب. کام: ہم اسپرنگ کو چھت سے یوں آویزاں تصور کرتے ہیں کہ اس کا آزاد سر $x = 0$ پر ہو (6.113)۔اسپرنگ کی لمبائی کو اس کی قدرتی لمبائی سے x میٹر زیادہ کرنے کے لئے درکار قوت $F = kx$ ہو گی جو اسپرنگ کو نیچے رخ کھینچے گی۔یوں $x = 0$ سے $x = 2\,\mathrm{m}$ تک کھینچنے کے لئے کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^2 30x\,\mathrm{d}x = \frac{30x^2}{2}\bigg]_0^2 = 60\,\mathrm{J}$$

ج. لمبائی میں تبدیلی: ہم مساوات $F = 30x$ میں $F = 45$ ڈال کر x تلاش کرتے ہیں۔

$$45 = 30x \quad \implies x = \frac{45}{30} = 1.5\,\mathrm{m}$$

یوں اسپرنگ کی کل لمبائی $1 + 1.5 = 2.5\,\mathrm{m}$ ہو گی۔

□

پانی کی نکاسی

کسی برتن یا حوض سے پانی کی نکاسی کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ ہم پانی کو افقی تہوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک تہہ کو برتن سے باہر نکالتے ہیں۔یوں اگر تہہ کی موٹائی $\mathrm{d}y$ اور اس کے سطحی رقبہ S ہو تب اس کی کمیت $\rho S\,\mathrm{d}y$ اور وزن $\rho Sg\,\mathrm{d}y$ ہو گا جہاں پانی کی کثافت کو ρ اور کشش ثقل کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس تہہ کو بلندی h تک منتقل کرنے کے لئے $\mathrm{d}W = Fh = \rho Sgh\,\mathrm{d}y$ کام کرنا ہو گا۔یوں تمام تہوں کو نکالنے کے لئے تکمل حل کرنا ہو گا۔ اگلے مثال میں ایک ٹھوس مثال پیش کی گئی ہے۔

مثال 6.35: پانی سے بھرے ہوئے ایک بیلنی حوض کا رداس $5\,\mathrm{m}$ اور قد $h = 10\,\mathrm{m}$ ہے۔ پانی کو $14\,\mathrm{m}$ بلندی پر منتقل کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

حل: ہم حوض کو کارتیسی محدد پر تصور کرتے ہوئے وقفہ $[0, 10]$ کی خانہ بندی کر کے پانی کو تہہ در تہہ تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.114)۔ سطح y اور سطح $y + \mathrm{d}y$ کے بیچ پانی کا حجم

$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi(5)^2\Delta y = 25\pi\Delta y\,\mathrm{m}^3$$

اور کمیت

$$\mathrm{d}M = (\rho)(\Delta H) = (1000)(25\pi\Delta y) = 25\,000\pi\Delta y\,\mathrm{kg}$$

ہو گی جہاں پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ اس تہہ پر کشش ثقل کی وجہ سے نیچے رخ قوت عمل کرے گی لہٰذا اس تہہ کو اٹھانے کی خاطر تہہ کی وزن کے برابر قوت F درکار ہو گی:

$$F = (g)(\mathrm{d}M) = (9.8)(25\,000\pi\Delta y) = 245\,000\pi\Delta y\,\mathrm{N}$$

یوں اس تہہ کو y کی بلندی سے $14\,\mathrm{m}$ کی بلندی تک اٹھانے کے لئے درج ذیل کام کرنا ہو گا۔

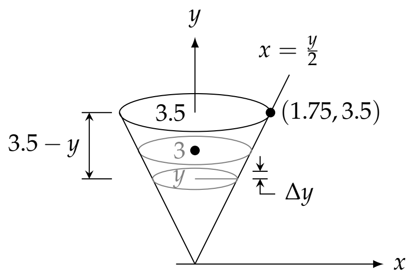
$$\mathrm{d}W = (\text{قوت})(\text{فاصلہ}) = (245\,000\pi)(14 - y)\Delta y\,\mathrm{J}$$

تمام پانی کو اس بلندی تک اٹھانے کے لئے تخمیناً

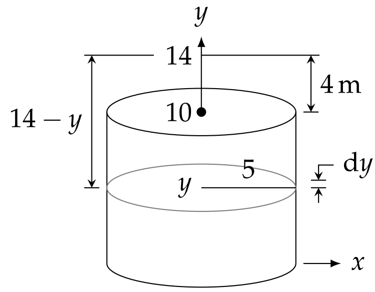
$$W \approx \sum_{0}^{10}\Delta W = \sum_{0}^{10}\Delta y\,\mathrm{J}$$

کام کرنا ہو گا جو وقفہ $0 \le y \le 10$ پر تفاعل $245\,000\pi(14 - y)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ حوض خالی کرنے کے لئے درکار کام $\|P\| \to 0$ کی صورت میں اس ریمان مجموعے کا حد ہو گا:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} 245\,000\pi(14 - y)\,\mathrm{d}y = 245\,000\pi\int_0^{10}(14 - y)\,\mathrm{d}y \\ &= 245\,000\pi\Big[14y - \frac{y^2}{2}\Big]_0^{10} = 245\,000\pi[90] \approx 69.3 \times 10^6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$



شکل 6.115: زیتون تیل کی مخروط حوض (مثال 6.36)



شکل 6.114: بیلنی حوض (مثال 6.35)

ایک کلو واٹ طاقت کا بجلی کا پمپ ایک سیکنڈ میں $1000\,\mathrm{J}$ کام کرتا ہے۔اس پمپ کو یہ حوض خالی کرنے کے لئے تقریباً 19 گھنٹے اور 15 منٹ کا وقت درکار ہو گا۔ $\square$

مثال 6.36: ایک مخروط حوض جس کو شکل 6.115 میں دکھایا گیا ہے کنارے سے $0.5\,\mathrm{m}$ نیچے تک زیتون کی تیل سے بھرا ہوا ہے۔ زیتون کی تیل کی کثافت $\rho = 930\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

حل: ہم وقفہ $[0, 3]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے خانہ بندی کے نقطوں پر افقی سطحیں تصور کرتے ہوئے تیل کو باریک تہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ سطح y اور سطح $y + \Delta y$ کے بیچ تہہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2\Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\Delta y\,\mathrm{m^3}$$

اس تہہ کو اٹھانے کے لئے اس تہہ کی وزن کے برابر قوت $F(y)$ درکار ہو گا:

$$F(y) = \rho g \Delta H = (930)(9.8)\left(\frac{\pi}{4}y^2\Delta y\right) = \frac{9114\pi}{4}y^2\Delta y\,\mathrm{N}$$

حوض کے کنارے سے اس تہہ تک کا فاصلہ $3.5 - y$ ہے لہٰذا اس تہہ کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لئے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$\Delta W = \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

$y = 0$ سے $y = 3$ تک تمام تہوں کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لئے تخمیناً

$$W \approx \sum_0^3 \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

کام درکار ہو گا جو وقفہ $[0,3]$ پر تفاعل $\frac{9114\pi}{4}(3.5-y)y^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے درکار کام، خانہ بندی کا معیار صفر تک کرنے سے حاصل، ریمان مجموعے کا حد ہو گا:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^3 \frac{9114\pi}{4}(3.5-y)y^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{9114\pi}{4}\int_0^3 (3.5y^2-y^3)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{9114\pi}{4}\Big[\frac{3.5y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\Big]_0^3 \approx 80\,529\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

□

سوالات

متغیر قوت کا کام

سوال 1: اگر مثال 6.32 میں بوکا کا حجم $20\,\mathrm{L}$ ہو لیکن اس میں سوراخ بھی بڑا ہو تا کہ اب بھی بوکا کو کنواں سے نکالتے ہوئے بوکا خالی ہو جاتا ہو۔ بوکا اور رسی کی کمیت کو شامل نہ کرتے ہوئے ایک بار بوکا نکالنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔
جواب: $1960\,\mathrm{J}$

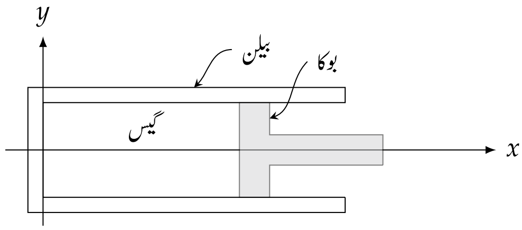
سوال 2: فرض کریں کہ مثال 6.32 میں بوکا کو اس رفتار سے اوپر کھینچا جاتا ہے کہ آخر میں بوکا میں $4\,\mathrm{L}$ پانی ہوتا ہے۔ پانی نکالنے میں کتنا کام درکار ہو گا؟ بوکا اور رسی کی کمیت کو شامل نہ کریں اور بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔

سوال 3: ایک کوہ پیما چٹان سے لٹکی ہوئی $50\,\mathrm{m}$ رسی کو اوپر کھینچتا ہے۔ رسی کی کثافتی وزن $0.624\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے۔ کتنا کام درکار ہو گا؟
جواب: $780\,\mathrm{J}$

سوال 4: ریت کو تھیلے میں ڈال کر $6\,\mathrm{m}$ بلند چھت تک برقرار رفتار سے کھینچ کر پہنچایا جاتا ہے۔ تھیلے میں سوراخ سے ریت کا اخراج ہوتا ہے جس کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ابتدائی طور پر تھیلا میں $50\,\mathrm{kg}$ ریت ہوتی ہے جو آخر میں آدھی رہ جاتی ہے۔ رسی اور تھیلا کی کمیت کو نظر انداز کرتے ہوئے درکار کام معلوم کریں۔

سوال 5: آج کل بالخصوص بلند عمارتوں میں سیڑھیوں کے ساتھ ساتھ مصعد[19] بھی پائے جاتے ہیں۔ مصعد کو چھت پر رکھے ہوئے موٹر کی طاقت سے چلایا جاتا ہے۔ کئی لڑیوں پر مشتمل رسی کی کثافت $6\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہونے کی صورت میں صرف رسی کو زمین سے $60\,\mathrm{m}$

[19] lift



شکل 6.116: گاڑی کا انجن ایک بیلن جس میں بوکا چلتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ بوکے کی حرکت سے گیس کا حجم اور دباو تبدیل ہوتے ہیں (سوال 7)۔

بلند عمارت کی چھت تک اٹھانے میں موٹر کتنا کام کرے گی؟
جواب: $1764\,\mathrm{J}$

سوال 6: نقطہ $(x, 0)$ پر پائے جانے والے ذرہ جس کی کمیت m ہے پر قوت $F = \frac{k}{x^2}$ عمل کرتی ہے جہاں k مستقل ہے۔ یہ ذرہ ساکن حال سے شروع ہو کر نقطہ b سے نقطہ a پہنچتا ہے جہاں $0 < a < b$ ہیں۔ اس ذرہ پر کتنا کام ہوا؟

سوال 7: ایک بیلن جس کا رقبہ عمودی تراش S ہے میں موجود گیس پر میکانی دباو ڈالا جاتا ہے (شکل 6.116)۔ اگر گیس کا حجم V اور اس کا دباو p ہو تب دکھائیں کہ گیس کو (p_1, V_1) حال سے (p_2, V_2) حال تک پہنچانے میں درج ذیل کام درکار ہو گا؟

$$W = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p \, \mathrm{d}V$$

(اشارہ: شکل 6.116 کو دیکھ کر بوکا پر قوت کو $F = pS$ اور چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x$ لکھا جا سکتا ہے۔)

سوال 8: اگر گیس کا ابتدائی حجم $V_1 = 1500\,\mathrm{cm^3}$ ، ابتدائی دباو $103\,360\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ اور اختتامی حجم $200\,\mathrm{cm^3}$ ہو تب سوال 7 کے تکمل سے کام دریافت کریں۔ یہاں آپ فرض کریں کہ گیس کا دباو ایک حرارت نا گزر عمل[20] ہے جس میں حراری توانائی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ حرارت نا گزر عمل کے قانون کے تحت $pV^{1.4} = c$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔

اسپرنگ
سوال 9: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $2\,\mathrm{m}$ ہے کی لمبائی کو $5\,\mathrm{m}$ بنانے کے لئے درکار کام $1800\,\mathrm{J}$ ہے۔ اس اسپرنگ کا مقیاس لچک تلاش کریں۔
جواب: $400\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

---

[20] adiabatic process

سوال 10: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $30\,\mathrm{cm}$ ہے پر $400\,\mathrm{N}$ قوت لاگو کرتے ہوئے اس کو کھینچ کر $45\,\mathrm{cm}$ لمبائی تک پہنچایا جاتا ہے۔ (ا) مقیاس لچک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کی لمبائی کو $35\,\mathrm{cm}$ کرنے کے لئے کتنی قوت درکار ہو گی؟ (ج) قدرتی لمبائی سے $600\,\mathrm{N}$ قوت اسپرنگ کی لمبائی کو کتنا زیادہ کرتی ہے؟

سوال 11: ایک ربڑی پٹی کی لمبائی کو $2\,\mathrm{N}$ کی قوت $2\,\mathrm{cm}$ بڑھاتی ہے۔ ربڑی پٹی پر قانون ہک کا اطلاق ہوتا ہے۔ ربڑی پٹی کی لمبائی کو $4\,\mathrm{N}$ کی قوت کتنا بڑھائے گی اور یہ قوت کتنا کام کرے گی؟

جواب: $4\,\mathrm{cm}$ ، $0.08\,\mathrm{J}$

سوال 12: اگر $90\,\mathrm{N}$ کی قوت اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے $1\,\mathrm{m}$ زیادہ کرتی ہو تب اسپرنگ کی قدرتی لمبائی سے اس کی لمبائی کو $5\,\mathrm{m}$ زیادہ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال 13: ریل گاڑی کے ڈبوں پر نسب اسپرنگ ان ڈبوں کو ایک دوسرے سے دور رکھتے ہیں اور ان کی ٹکراؤ کو محفوظ بناتے ہیں۔ ایسا ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $20\,\mathrm{cm}$ ہے پر $100\,000\,\mathrm{N}$ کی قوت لاگو کرنے سے اسپرنگ کی کم سے کم لمبائی $12\,\mathrm{cm}$ حاصل ہوتی ہے۔ (ا) اسپرنگ کا مقیاس لچک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کو پہلا cm دبانے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا۔ اس کو دوسرا سنٹی میٹر دبانے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

جواب: (ا) $1.25\times10^{6}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ، (ب) $62.5\,\mathrm{J}$ ، $187.5\,\mathrm{J}$

سوال 14: گھریلو استعمال کے ترازو پر $74\,\mathrm{kg}$ کا شخص کھڑا ہونے سے ترازو $1.5\,\mathrm{mm}$ دبتا ہے۔ فرض کریں کہ یہ ترازو قانون ہک کے تحت کام کرتا ہے۔ ایک شخص، جس کا ترازو پر کھڑا ہونے سے ترازو $3\,\mathrm{mm}$ دبتا ہو، کا وزن کتنا ہو گا؟

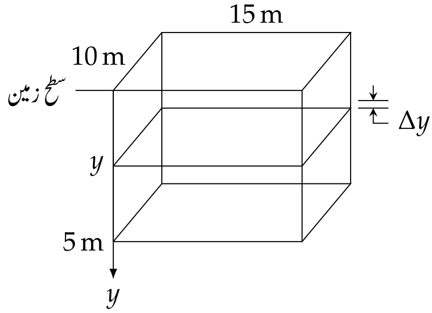
پانی کی نکاسی

ثقلی اسراع کی قیمت کو عموماً $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیا جاتا ہے۔ حقیقت میں سطح سمندر پر اس کی قیمت قطبین پر $9.832\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور عرضی خط استوا پر $9.780\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ان دو قیمتوں میں فرق تقریباً $0.5\,\%$ ہے۔

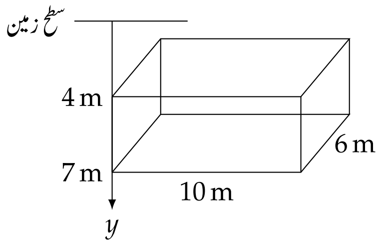
سوال 15: بارانی علاقوں میں بارش کے پانی کو زیر زمین حوض میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ زیر زمین حوض جس کو شکل 6.117 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔(ا) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) $0.25\,\mathrm{kW}$ کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) دکھائیں کہ ابتدائی 5 گھنٹوں میں تقریباً آدھا حوض خالی ہو جائے گا۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟

جواب: (ا) $18.375\times10^{6}\,\mathrm{J}$ ، (ب) 20 گھنٹے اور 25 منٹ۔ (د) 20 گھنٹے اور 22.5 منٹ، 20 گھنٹے اور 29 منٹ۔

سوال 16: زیر زمین حوض جس کو شکل 6.118 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کا کنارہ سطح زمین سے $4\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔(ا) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) $0.25\,\mathrm{kW}$ کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) آدھا حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟ (پورا حوض خالی کرنے کے نصف دورانیہ سے کم وقت درکار ہو گا)۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟



شکل 6.117: زیر زمین حوض (سوال 15)



شکل 6.118: زیر زمین حوض (سوال 16)

سوال 17: اگر حوض کے کنارے سے $4\,\mathrm{m}$ بلند کی بجائے حوض کے کنارے تک پانی کو اٹھایا جائے تب مثال 6.35 میں کتنا کام درکار ہو گا؟
جواب: $38\,484\,510\,\mathrm{J}$

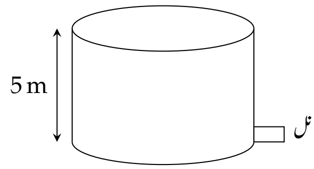
سوال 18: اگر مثال 6.35 میں حوض آدھا بھرا ہو تب حوض کے کنارے سے $4\,\mathrm{m}$ بلندی تک پانی کو پہنچانے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال 19: ایک بیلنی حوض جس کا رداس $4\,\mathrm{m}$ اور قد $10\,\mathrm{m}$ ہے مٹی کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ مٹی کے تیل کی کثافت $0.81\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ ہے۔ تمام تیل کو حوض کے بالائی کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: $19.95 \times 10^6\,\mathrm{J}$

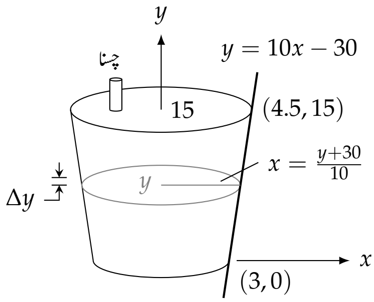
سوال 20: ایک حوض جس کا قد $5\,\mathrm{m}$ ہے سطح زمین پر پڑا ہوا ہے (شکل 6.119)۔ قدرتی پانی سطح زمین سے $7\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ حوض کو اس پانی سے دو طرح بھرا جا سکتا ہے۔ (ا) پمپ کے خارجی پائپ کو حوض کے کنارے پر رکھ کر حوض کو بھرا جا سکتا ہے۔ (ب) حوض کے نچلی سر پر موجود نل کے ذریعہ پانی کو حوض تک منتقل کیا جا سکتا ہے۔ دنوں تراکیب میں کونسا بہتر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 21: ایک مشروب جس کی کثافت $0.769\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے سے مخروط مقطوع ڈبیا بھرا ہوا ہے (6.120)۔ اس ڈبیا کا بالائی رداس $4.5\,\mathrm{cm}$، زیریں رداس $3\,\mathrm{cm}$ اور گہرائی $15\,\mathrm{cm}$ ہے۔ مشروب کو چسنا کے ذریعہ پیا جاتا ہے جو ڈبیا کی بالائی سطح سے $2.5\,\mathrm{cm}$ باہر نکلا ہوا ہے۔ پورا مشروب پینے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا۔
جواب: $0.43\,\mathrm{J}$

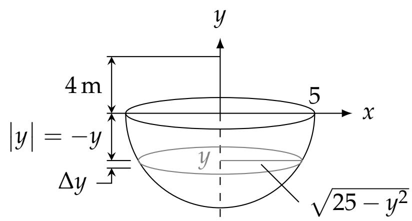
سوال 22: فرض کریں مثال 6.36 میں مخروط حوض دودھ سے بھرا ہوا ہے جس کی کثافت $1032\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ (ا) دودھ کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ (ب) دودھ کو حوض کے کنارے سے $1\,\mathrm{m}$ بلندی تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟



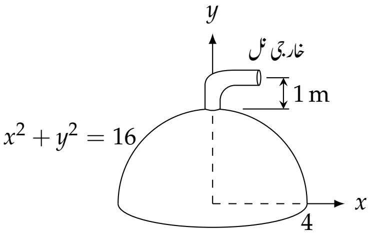
شکل 6.119: بیلنی حوض (سوال 20)



شکل 6.120: مخروط مقطوع ڈبیا (پیمائش سنٹی میٹروں میں ہے۔)



شکل 6.121: نصف کروی حوض (سوال 24)



شکل 6.122: نصف کروی حوض (سوال 25)

سوال 23: بے زنگ فولاد[21] کا بڑا حوض بنانے کے لئے آپ منحنی $y = x^2, 0 \le x \le 4\,\mathrm{m}$ کو محور y کے گرد گھماتے ہو۔ یہ حوض سمندری پانی سے بھرا ہوا ہے جس کی کثافت $10\,000\,\mathrm{N\,m^{-3}}$ ہے۔ حوض کو خالی کرنے کی خاطر اس پانی کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: $21\,446\,605.9\,\mathrm{J}$

سوال 24: نصف کروی حوض جس کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے پانی سے بھرا ہوا ہے (شکل 6.121)۔ پانی کو حوض کے بالائی کنارے سے $4\,\mathrm{m}$ بلندی تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ پانی کی کثافت کو $9800\,\mathrm{N\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال 25: نصف کروی حوض جس کا رداس $4\,\mathrm{m}$ ہے کو شکل 6.122 میں دکھایا گیا ہے جو بنزین[22] سے بھرا ہوا ہے۔ بنزین کی کثافت $876\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ حوض کو خارجی نل، جو حوض کے بالائی سطح سے $1\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے، کے ذریعہ خارج کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: $4\,027\,512\,\mathrm{J}$

---

[21] stainless steel
[22] benzene

سوال 26: آپ کے گاؤں میں پانی کی فراہمی کے لئے $8\,\mathrm{m}$ قد کا ایک حوض تعمیر کیا جاتا ہے جس کا تلا زمین سے $20\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔زیر زمین پانی کی سطح $100\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ پانی کو $10\,\mathrm{cm}$ رداس کے پائپ سے $3\,\mathrm{kW}$ پمپ کی مدد سے حوض کی تلا میں نل کے ذریعہ بھرا جاتا ہے۔ خالی حوض کتنی دیر میں بھرے گا؟ (پائپ کو پانی سے بھرنے کے لئے درکار وقت کو نظر انداز کریں۔)

دیگر استعمال

سوال 27: مصنوعی سیارے کا خلائی مدار میں بھیجنا
کشش ثقل کی قیمت زمین کے مرکز سے فاصلہ r پر منحصر ہوتا ہے۔کمیت m کے مصنوعی سیارے پر کشش ثقل درج ذیل ہو گا

$$F=\frac{GMm}{r^2}$$

جہاں زمین کی کمیت $M=5.975\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ ہے جبکہ تجاذبی مستقل $G=6.6720\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہے۔ زمین کا رداس $6\,370\,000\,\mathrm{m}$ ہے۔ یوں زمین سے $35\,780\,\mathrm{km}$ بلندی پر مدار تک $1000\,\mathrm{kg}$ مصنوعی سیارے کو منتقل کرنے کے لئے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$W=\int_{6\,370\,000}^{35\,780\,000}\frac{1000MG}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

حقیقت میں مصنوعی سیارہ ایک راکٹ پر نسب ہو گا جس کو یہاں نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ تکمل کا زیریں حد سطح زمین کو ظاہر کرتا ہے جہاں سے سیارہ روانہ ہو گا۔
جواب: $5.144\times10^{10}\,\mathrm{J}$

سوال 28: منفی برقیوں (الیکٹرانوں) کو ایک دوسرے کے قریب ہونے پر مجبور کرنا۔ دو منفی برقیے جن کے بیچ فاصلہ r ہو کے مابین درج ذیل قوت دفع پائی جاتی ہے جہاں $\epsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ برقی مستقل ہے اور $e=-1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ منفی برقیہ[23] کا بار[24] ہے۔

$$F=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ا. فرض کریں کہ ایک منفی برقیہ نقطہ $(1,0)$ پر واقع ہے جبکہ دوسرے برقیے کو محور x پر نقطہ $(-1,0)$ سے مبدا تک منتقل کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

ب. فرض کریں ایک برقیہ $(1,0)$ اور دوسرا $(-1,0)$ پر واقع ہیں۔ تیسرے ابرقیے کو $(5,0)$ سے $(3,0)$ تک منتقل کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

---

[23] electron
[24] charge

کام اور حرکی توانائی

سوال 29: اگر متغیر قوت $F(x)$ ایک جسم جس کی کمیت m ہو کو محور x پر x_1 سے x_2 تک منتقل کرتی ہے۔ جسم کی سمتی رفتار v کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ لکھا جا سکتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ اور زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کو استعمال کرتے ہوئے دکھائی کہ اس جسم کو x_1 سے x_2 منتقل کرنے میں درج ذیل کام درکار ہو گا

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

جہاں x_1 پر جسم کی رفتار v_1 اور x_2 پر اس کی رفتار v_2 ہے۔ طبیعیات میں $\frac{1}{2}mv^2$ کو رفتار v پر چلنے والے جسم کی حرکی توانائی[25] کہتے ہیں۔ یوں کسی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اس جسم پر کیے گئے کام کے برابر ہو گی۔

سوال 30 تا سوال 36 میں سوال 29 کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال 30: ٹینس کا کھیل
ایک کھلاڑی $58\,\mathrm{g}$ کمیت کی گیند کو زور سے مار کر $175\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال 31: ایک گیند جس کی کمیت $145\,\mathrm{g}$ ہو کو کھلاڑی $145\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟
جواب: $117.6\,\mathrm{J}$

سوال 32: ایک سائکل سوار بمع سائکل کی کمیت $80\,\mathrm{kg}$ ہے۔ ساکن حال سے $40\,\mathrm{km}$ کی رفتار تک پہنچنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

سوال 33: ایک گاڑی جس کی کمیت $880\,\mathrm{kg}$ ہے کی رفتار $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ کر $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟
جواب: $67\,901\,\mathrm{J}$

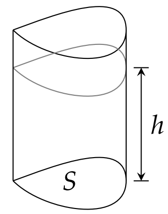
سوال 34: فٹ بال
ایک فٹ بال جس کی کمیت $430\,\mathrm{g}$ ہے کو لات سے مار کر $95\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچایا جاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال 35: ایک کھلاڑی بازو کے زور سے $180\,\mathrm{g}$ کمیت کی گیند کو $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟
جواب: $56.25\,\mathrm{J}$

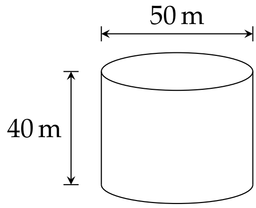
سوال 36: ایک اینٹ جس کی کمیت $3.5\,\mathrm{kg}$ ہے $4\,\mathrm{m}$ بلند چھت سے گرتی ہے۔ زمین پر پہنچنے کے لمحے پر اس کی حرکی توانائی کتنی ہو گی؟

---

[25] kinetic energy



شکل 6.123: فشار سیال۔



شکل 6.124: بیلنی حوض برائے مثال 6.37

6.9 فشار سیال اور قوت سیال

فشار p سے مراد وہ قوت ہے جو اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہو۔ یوں اگر رقبہ S پر قوت F عمل کرتی ہو تب فشار p درج ذیل ہو گا۔

$$p = \frac{F}{S} \tag{6.33}$$

مستقل گہرائی پر قوت سیال اور فشار سیال

شکل 6.123 میں ساکن سیال کو ایک برتن میں دکھایا گیا ہے جہاں تلا کا رقبہ S ، سیال کی گہرائی h اور سیال کی کثافت ρ ہے۔ یوں سیال کا حجم Sh ، کمیت ρSh اور وزن $g\rho Sh$ ہو گا۔ سیال کے وزن کے برابر قوت $F = g\rho Sh$ رقبہ S پر عمل کرے گی۔ یوں اکائی رقبہ پر قوت $g\rho h$ ہو گی جس کو فشار[26] p یا دباو کہتے ہیں۔

$$p = \rho g h \tag{6.34}$$

فشار کی اکائی نیوٹن فی مربع میٹر $\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہے۔ آپ نے دیکھا کہ سیال کی قیمت پر برتن کی صورت کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مستقل گہرائی کے رقبہ S پر درج ذیل قوت پائی جائے گی۔

$$F = pS \tag{6.35}$$

سیال میں h گہرائی پر کسی بھی رخ فشار کی قیمت مساوات 6.34 دیتی ہے۔ یوں کسی بھی گہرائی پر افقی اور انتصابی دیواروں پر فشار کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔

---

pressure[26]

مثال 6.37: ایک بیلنی حوض میں پانی کی گہرائی $40\,\mathrm{m}$ ہے جبکہ حوض کا رداس $25\,\mathrm{m}$ ہے (شکل 6.124)۔ حوض کے اطراف کی دیوار کی نچلی $1\,\mathrm{m}$ پٹی پر فشار سیال اور قوت سیال کتنا ہو گا؟ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

حل: اس ایک میٹر چوڑی پٹی کے نچلے کنارے پر فشار درج ذیل ہو گا۔

$$p = \rho g h = (1000)(9.8)(40) = 392\,000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$$

ایک میٹر پٹی کا رقبہ

$$S = 2\pi r h = 2\pi(25)(1) = 50\pi\,\mathrm{m^2}$$

ہے لہٰذا اس پر کل قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = pS = (392000)(50\pi) = 61\,575\,216.01\,\mathrm{N}$$

□

اس مثال میں پٹی کے نچلے حصے کی گہرائی $40\,\mathrm{m}$ اور بالائی حصے کی گہرائی $39\,\mathrm{m}$ تھی لہٰذا ان پر فشار پر مختلف ہو گا۔ ہم نے اس حقیقت کو نظر انداز کیا۔ آئیں متغیر گہرائی کی صورت میں فشار پر غور کریں۔

متغیر گہرائی پر فشار

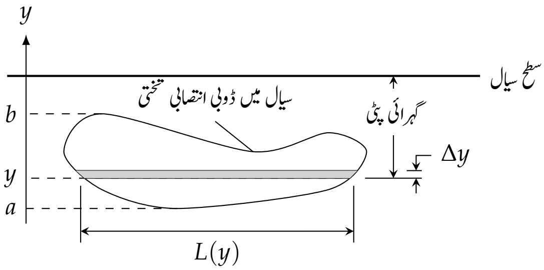
فرض کریں ہم کثافت ρ کی سیال میں ڈوبے ہوئے انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال جاننا چاہتے ہیں۔ ہم تختی کو xy مستوی میں خطہ $y = a$ تا $y = b$ تصور کرتے ہیں (شکل 6.125)۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہیں۔ ہم اس خطہ کو نقاط خانہ بندی پر محور y کے عمودی فرضی سطحوں سے باریک افقی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ایک نمائندہ پٹی جو y سے $y + \Delta y$ تک ہو کی چوڑائی Δy ہو گی جبکہ اس پٹی کے نچلی ضلع کی لمبائی $L(y)$ ہو گی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ متغیر y کا استمراری تفاعل ہے۔

نیچے سے اوپر چلتے ہوئے گہرائی کی تبدیلی سے پٹی پر فشار تبدیل ہوتا ہے۔ اب اگر پٹی کی چوڑائی بہت کم ہو تب فشار کی اس تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ پٹی پر ہر جگہ فشار وہی ہو گا جو پٹی کی نچلی کنارے پر ہے۔ یوں پٹی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\Delta F &= (\text{پٹی کے نچلے کنارے پر فشار})(\text{رقبہ پٹی})\\ &= \rho g(\text{گہرائی پٹی})L(y)\Delta y\end{aligned}$$

پورے تختی پر قوت تخمیناً

$$\sum_a^b \Delta F = \sum_a^b \rho g(\text{گہرائی پٹی})L(y)\Delta y \tag{6.36}$$



شکل 6.125: ایک پتلی پٹی پر قوت سیال۔

ہو گی جو $[a,b]$ پر استمراری تفاعل کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ ہم ان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تختی پر قوت کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: تکمل برائے قوت سیال
فرض کریں محور y پر $y=a$ سے $y=b$ تک کا خطہ، سیال میں ڈوبے ہوئی ایک تختی کو ظاہر کرتا ہے۔مزید فرض کریں کہ y پر اس تختی کی سطح پر افقی پٹی کی بائیں سے دائیں لمبائی $L(y)$ ہے۔ اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال درج ذیل ہو گا۔

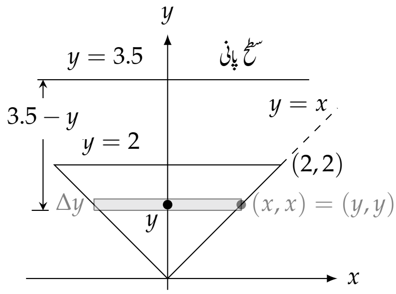
$$F=\int_a^b \rho g\cdot(\text{گہرائی پٹی})\cdot L(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.37}$$

□

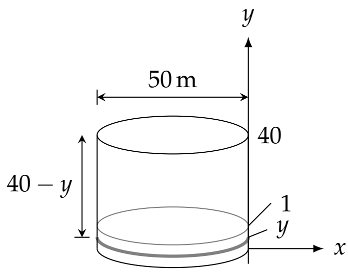
مثال 6.38: ایک مساوی الساقین مثلث تختی جس کا تلا $4\,\mathrm{m}$ اور قد $2\,\mathrm{m}$ ہے ایک پانی کے تالاب میں یوں ڈوبا ہوا ہے کہ اس کا تلا اوپر ہو۔ تلا پر پانی کی گہرائی $1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ تختی کے ایک طرف پر قوت تلاش کریں۔ (پانی کی کثافت کو $\rho=1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

حل: ہم تختی کی نچلی راس کو محدد کے مبدا پر تصور کرتے ہیں (شکل 6.126)۔ یوں سطح پانی $y=3.5$ پر ہو گا جبکہ تختی کا بالائی کنارہ $y=2$ پر ہو گا۔ تختی کا دایاں کنارہ $x=y$ اور بایاں کنارہ $x=-y$ ہو گا۔ یوں y پر پٹی کی لمبائی

$$L(y)=2x=2y$$



شکل 6.126: تختی پر قوت پانی (مثال 6.38)



شکل 6.127: بیلنی حوض برائے مثال 6.39

اور پانی کی گہرائی $(3.5 - y)$ ہو گی۔ تختی کی ایک طرف پر پانی کی قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho g(\text{گہرائی پٹی})L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 9800(3.5-y)2y\,\mathrm{d}y \\
&= 9800\int_0^2 (7y-2y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= 9800\left[\frac{7y^2}{2}-\frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = 84\,933\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

□

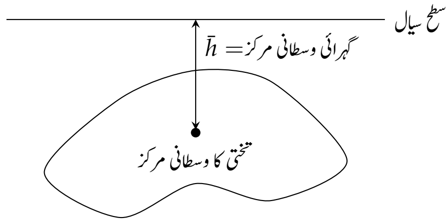
قوت سیال کا حصول
کسی بھی محددی نظام میں سیال میں ڈوبے ہوئے انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال حاصل کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. نمائندہ افقی پٹی کی لمبائی اور گہرائی کی عمومی کلیہ تلاش کریں۔

ب. انہیں آپس میں ضرب دے کر سیال کی کثافت اور ثقلی مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ سے ضرب دے کر تکمل کو موزوں حدود کے بیچ حل کریں۔

مثال 6.39: ہم اب مثال 6.37 میں بیلنی حوض کی نچلی ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت سیال کی بالکل ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

ہم حوض کی تلا کو $y = 0$ پر رکھتے ہیں (شکل 6.127) جبکہ محدد y کو اوپر کے رخ رکھتے ہیں۔ ہم y پر نمائندہ افقی پٹی کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔



شکل 6.128: قوت سیال اور وسطانی مرکز۔

ا. گہرائی پٹی: $40 - y$

ب. لمبائی پٹی: 50π

یوں ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^1 \rho g (\text{گہرائی})(\text{لمبائی})\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \rho g (40 - y)(50\pi)\,\mathrm{d}y \\
&= 9800(50\pi) \int_0^1 (40 - y)\,\mathrm{d}y = 60\,805\,525.81\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

□

اس مثال میں حاصل قوت مثال 6.37 سے کچھ کم ہے جو متوقع تھا۔

قوت سیال اور وسطانی مرکز

اگر ہمیں سیال میں ڈوبے انتصابی تختی کا وسطانی مرکز معلوم ہو تب ہم اس تختی کے ایک طرف پر قوت سیال با آسانی معلوم کر سکتے ہیں (شکل 6.128)۔ مساوات 6.37 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho g \times (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \rho g \int_a^b (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \rho g \times (\text{تختی کے خطے کا سطح سیال پر لکیر کے لحاظ سے معیار اثر}) \\
&= \rho g \times (\text{تختی کا رقبہ}) \times (\text{تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی})
\end{aligned}
$$

قوت سیال اور وسطانی مرکز
سیال میں ڈوبی انتصابی تختی کے ایک طرف پر قوت سیال F معلوم کرنے کی لئے ρg ، تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی $\bar{h}$ اور تختی کے رقبہ S کا حاصل ضرب لیں۔

$$F = \rho g \bar{h} S \tag{6.38}$$

مثال 6.40: ایک مثلث تختی پر قوت سیال کو مثال 6.38 میں تلاش کیا گیا۔ مساوات 6.38 استعمال کرتے ہوئے اس کو دوبارہ تلاش کریں۔

حل: مثلث کا وسطانی مرکز محدد y پر تلا سے راس کی جانب ایک تہائی فاصلہ پر پایا جاتا ہے(شکل 6.126) لہٰذا $\bar{h} = 1.5 + 2/3 = \frac{13}{6}$ ہو گا۔ مثلث کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$S = \frac{1}{2}(\text{قاعدہ})(\text{قد}) = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

یوں تختی کے ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گا۔

$$F = \rho g \bar{h} S = (1000 \times 9.8)\left(\frac{13}{6}\right)(4) = 84\,933\,\mathrm{N}$$

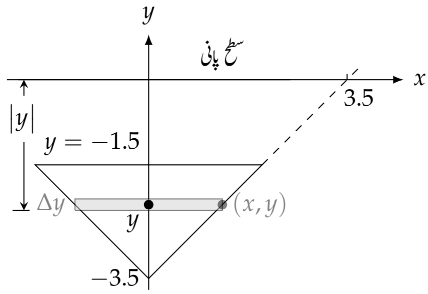
□

مساوات 6.38 کہتی ہے کہ سیال میں ڈوبی انتصابی تختی پر قوت سیال وہی ہو گا جو تختی کے پورے رقبے کو تختی کے وسطانی مرکز، جو $\bar{h}$ گہرائی پر ہے، منتقل کرنے سے حاصل ہو گا۔ عموماً اشکال کا وسطانی مرکز جدول سے دیکھا جا سکتا ہے اور یوں مساوات 6.38 قوت سیال معلوم کرنے کا ایک آسان ذریعہ بنتا ہے۔ ظاہر ہے کہ وسطانی مرکز حاصل کرتے ہوئے کسی نے مساوات 6.37 کی طرح کا تکمل حل کرتے ہوئے وسطانی مرکز حاصل کیا ہو گا۔ چونکہ اس وقت آپ سیکھ رہے ہیں لہٰذا فی الحال قوت سیال دریافت کرنے کے لئے مسئلے کا خاکہ بنائیں اور مساوات 6.37 استعمال کریں۔

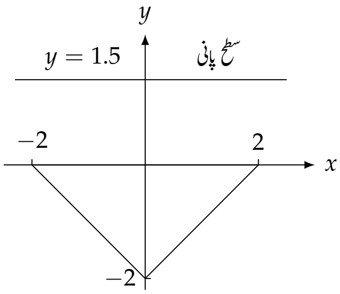
سوالات

سوال 1: حوض کی اندرونی سطح پر مثال 6.37 میں کل کتنی قوت سیال ہو گی؟
جواب: $1.23 \times 10^9\,\mathrm{N}$

سوال 2: اگر مثال 6.37 میں حوض نصف بھرا ہو تب نچلی ایک میٹر پٹی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟
جواب: $6.08 \times 10^7\,\mathrm{N}$



شکل 6.129: مثلث تختی (سوال 3)



شکل 6.130: مثلث تختی (سوال 4)

سوال 3: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال 6.38 میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل 6.129 کا محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال 4: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال 6.38 میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل 6.130 کا محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال 5: اگر مثال 6.38 میں تختی کو مزید دو میٹر نیچے منتقل کیا جائے تب اس کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟
جواب: $163\,333\,\mathrm{N}$

سوال 6: اگر مثال 6.38 میں تختی کو اتنا اوپر منتقل کیا جائے کہ اس کا تلا سطح پانی پر ہو تب اس کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟

سوال 7: مساوی الساقین مثلث تختی کو شکل 6.131 میں دکھایا گیا ہے جس کا تلا سطح پانی سے $1\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔

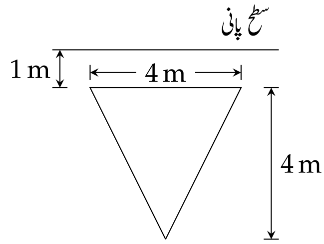
ا. تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. اگر صاف پانی کی بجائے سمندری پانی ہو تب قوت سیال کتنی ہو گی؟ سمندری پانی کی کثافت $1029\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔

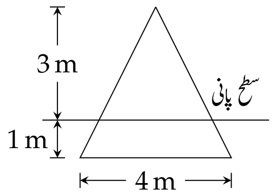
جواب: (ا) $182\,933\,\mathrm{N}$ ، (ب) $188\,238\,\mathrm{N}$

سوال 8: اگر گزشتہ سوال میں تختی کو تلا کے گرد آدھا چکر گھمایا جائے تب اس کا کچھ حصہ پانی سے باہر ہو گا (شکل 6.132)۔ اب تختی کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟

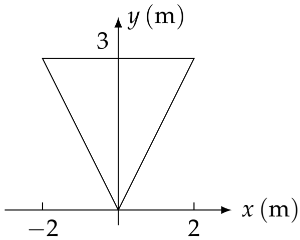
سوال 9: ایک حوض کے سر مساوی الساقین مثلث ہیں (شکل 6.133)۔



شکل 6.131: مثلث الساقین (سوال 7)



شکل 6.132: مثلث الساقین (سوال 8)



شکل 6.133: مثلث الساقین (سوال 9)

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کے سر پر قوت کو آدھا کرنے کے لئے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

ج. کیا حوض کی لمبائی سے حوض کے سر پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $58\,800\,\mathrm{N}$ ، (ب) $61.9\,\mathrm{cm}$ ، (ج) چونکہ فشار صرف گہرائی پر منحصر ہے لہٰذا لمبائی کا قوت سیال پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

سوال 10: پانی کے حوض کے سر چکور ہیں جہاں چکور کا ضلع $2\,\mathrm{m}$ ہے۔

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کے سر پر قوت کو آدھا کرنے کے لئے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

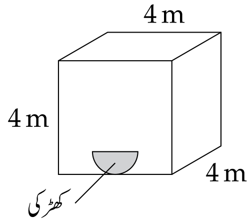
ج. کیا حوض کی لمبائی سے حوض کے سر پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11: مچھلیاں دیکھنے کے لئے ایک مچھلی گھر کی دیوار میں $2\,\mathrm{m}$ چوڑا اور $1\,\mathrm{m}$ اونچا شیشہ نسب ہے۔ شیشے کا تلا سطح پانی سے $1.25\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ اس شیشے پر قوت پانی کتنی ہو گا۔ (سمندری پانی کی کثافت $1029\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔)
جواب: $15\,126.3\,\mathrm{N}$

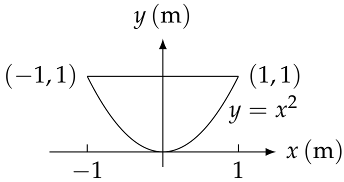
سوال 12: مچھلیوں کے حوض کا تلا $1.5 \times 0.5\,\mathrm{m}$ اور اس کی گہرائی $0.75\,\mathrm{m}$ ہے۔ پانی کی سطح بالائی کنارے سے $5\,\mathrm{cm}$ نیچے ہے۔

ا. حوض کے اطراف پر قوت سیال دریافت کریں۔

ب. حوض کی تلا پر قوت سیال دریافت کریں۔

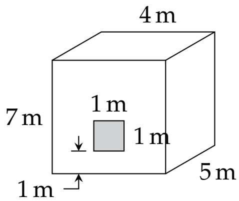


(ا) حوض میں کھڑکی۔



(ب) قطع مکافی کھڑکی کی تفصیل۔

شکل 6.134: حوض میں قطع مکافی کھڑکی (سوال 17)



شکل 6.135: حوض میں چکور کھڑکی (سوال 18)۔

سوال 13: دودھ کے ڈبے کا تلا $10 \times 10\,\mathrm{cm}$ اور اس کا قد $20\,\mathrm{cm}$ ہے۔ دودھ سے بھرے ہوئے ڈبے کی ایک طرف پر قوت سیال معلوم کریں۔ کثافت دودھ کو $1032\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔
جواب: $20.2\,\mathrm{N}$

سوال 14: زیتون کی تیل کے ڈبے کا تلا $14 \times 12\,\mathrm{cm}$ اور قد $26.5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ بھرے ہوئے ڈبے کی تلا اور ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔ زیتون کی تیل کی کثافت $930\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال 15: ایک دائری تختی کا آدھا حصہ پانی میں انتصابی ڈوبا ہے۔ تختی کا رداس $0.25\,\mathrm{m}$ ہے۔ تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔
جواب: $102.08\,\mathrm{N}$

سوال 16: دودھ کی فراہمی کے لئے ٹرک پر نسب $2\,\mathrm{m}$ قطر کا افقی بیلنی حوض استعمال کیا جاتا ہے۔ آدھے بھرے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

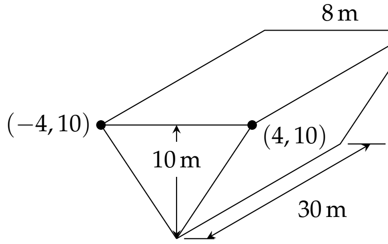
سوال 17: ایک مکعب حوض کی دیوار میں قطع مکافی کھڑکی دی گئی ہے جو $150\,000\,\mathrm{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل 6.134)۔ اس حوض میں $25\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ کثافت کا سیال بھرا جائے گا۔

ا. جب حوض میں سیال کی گہرائی $1.25\,\mathrm{m}$ ہو تب کھڑکی پر قوت سیال کتنا ہو گا؟

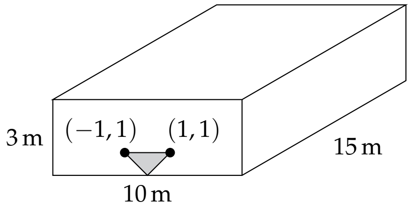
ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

جواب: (ا) $22\,827\,\mathrm{N}$، (ب) $2.6544\,\mathrm{m}$

سوال 18: پانی کی ایک مکعب حوض کی دیوار میں $1 \times 1\,\mathrm{m}$ چکور کھڑکی دی گئی ہے جو $40\,000\,\mathrm{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل 6.135)۔



شکل 6.136: حوض کے آخری سر تکونی ہیں (سوال 19)۔



شکل 6.137: پانی کا مستطیل تالاب (سوال 20)

ا. اگر حوض میں پانی کی گہرائی $3\,\text{m}$ ہو تب کھڑکی پر قوت سیال کتنا ہو گا؟

ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

سوال 19: پانی کے حوض کو شکل 6.136 میں دکھایا گیا ہے۔ حوض کے آخری تکونی سر $1\,200\,000\,\text{N}$ قوت برداشت کر سکتے ہیں۔ حوض میں پانی کی وہ حجم تلاش کریں جس پر حوض کے تکونی سر اپنی برداشت کی حد پر ہوں گے۔
جواب: $1133.77\,\text{m}^3$

سوال 20: ایک مستطیل تالاب شکل 6.137 میں دکھایا گیا ہے جس کی ایک طرف میں تکونی کھڑکی دی گئی ہے جو $62\,000\,\text{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے۔ اس خالی تالاب میں $10\,\text{m}^3\,\text{h}^{-1}$ سے پانی بھرا جا رہا ہے۔ تکونی کھڑکی کتنی دیر میں اپنی برداشت کے حد پر ہو گی؟

سوال 21: ایک انتصابی تختی جس کا قد a اور چوڑائی b ہے کو کثافت ρ کے سیال میں ڈبویا جاتا ہے۔ تختی کا بالائی کنارہ سطح سیال پر ہے۔ تختی کے کے لمبے کنارے پر اوسط فشار سیال کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 22: دکھائیں کہ سوال 21 میں تختی کی ایک طرف پر قوت کی مقدار سوال 21 میں حاصل اوسط فشار ضرب تختی کا رقبہ ہو گا۔

6.10 بنیادی نقشہ اور دیگر نمونی استعمال

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم