

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
464	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	a^x اور $\log_a x$	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیتال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ تکونیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 تکونیاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	

1041	9 لائنائی تسلسل	
1041	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1059	9.2 ترتیب کا حد تلاش کرنے کے مسئلے	

1077	ا ضمیمہ اول	
1079	ب ضمیمہ دوم	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

حد کی تلاش
سوال 1 تا سوال 62 میں کون سی ترتیب $\{a_n\}$ مرتکز اور کون سی منفرج ہے؟ ہر مرتکز ترتیب کا حد تلاش کریں۔

سوال 1: $a_n = 2 + (0.1)^n$

سوال 2: $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

سوال 3: $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

سوال 4: $a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

سوال 5: $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

سوال 6: $a_n = \frac{n+3}{n62+5n+6}$

سوال 7: $a_n = \frac{n62-2n+1}{n-1}$

سوال 8: $a_n = \frac{1-n^3}{70-4n^2}$

سوال 9: $a_n = 1 + (-1)^n$

سوال 10: $a_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$

سوال 11: $a_n = (\frac{n+2}{2n})(1 - \frac{1}{n})$

سوال 12: $a_n = (2 - \frac{1}{2^n})(3 + \frac{1}{2^n})$

سوال 13: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

سوال 14: $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

سوال 15: $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

سوال 16: $a_n = \frac{1}{(0.9)^n}$

سوال 17: $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

سوال 18: $a_n = n\pi \cos(n\pi)$

سوال 19: $a_n = \frac{\sin n}{n}$

سوال 20: $a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$

سوال 21: $a_n = \frac{n}{2^n}$

سوال 22: $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

سوال 23: $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

سوال 24: $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$

سوال 25: $a_n = 8^{1/n}$

سوال 26: $a_n = (0.03)^{1/n}$

سوال 27: $a_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$

سوال 28: $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

سوال 29: $a_n = \sqrt[n]{10n}$

سوال 30: $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

سوال 31: $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$

سوال 32: $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

سوال 33: $a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}}$

سوال 34: $a_n = \ln n - \ln(n+1)$

$$a_n = \sqrt[n]{4^n n} \quad \text{سوال 35}$$

$$a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}} \quad \text{سوال 36}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{سوال 37 (اثر: } \frac{1}{n} \text{ کے ساتھ موازنہ کریں)}$$

$$a_n = \frac{(-4)^n}{n!} \quad \text{سوال 38}$$

$$a_n = \frac{n!}{10^{6n}} \quad \text{سوال 39}$$

$$a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n} \quad \text{سوال 40}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)} \quad \text{سوال 41}$$

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{سوال 42}$$

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n \quad \text{سوال 43}$$

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \text{سوال 44}$$

$$a_n = \left(\frac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}, \quad x > 0 \quad \text{سوال 45}$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{سوال 46}$$

$$a_n = \frac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!} \quad \text{سوال 47}$$

$$a_n = \frac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n} \quad \text{سوال 48}$$

$$a_n = \tanh n \quad \text{سوال 49}$$

$$a_n = \sinh(\ln n) \quad \text{سوال 50}$$

$$a_n = \frac{n^2}{2n-1} \sin \frac{1}{n} \quad \text{سوال 51}$$

$$a_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad \text{سوال 52}$$

$$a_n = \tan^{-1} n \quad \text{سوال 53}$$

سوال 54: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tan^{-1} n$

سوال 55: $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

سوال 56: $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

سوال 57: $a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n}$

سوال 58: $a_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

سوال 59: $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

سوال 60: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n}}$

سوال 61: $a_n = \frac{1}{n} \int_1^n \frac{dx}{x}$

سوال 62: $a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^p}, \quad p > 1$

نظریہ اور مثالیں
سوال 63: ایک ترتیب کی پہلی جزو $x_1 = 1$ ہے۔ ہر اگلا جزو گزشتہ تمام اجزاء کا مجموعہ ہے:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

ابتدائی چند اجزاء لکھ کر عمومی جزو x_n کا کلیہ $n \geq 2$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 64: مناطق اعداد کی درج ذیل ترتیب میں نسب نما ایک ترتیب، شمار کنندہ دوسری ترتیب اور ان کی نسبت تیسری ترتیب ہے۔

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}$$

x_n اور y_n کو بالترتیب n ویں نسبت $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ کا نسب نما اور شمار کنندہ تصور کریں۔

ا. $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$ اور $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ کی تصدیق کریں۔ ساتھ ہی $a^2 - 2b^2 = \mp 1$ کی صورت میں $(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = \pm 1$ کی تصدیق کریں۔

ب. n بڑھانے سے کسر $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد کیا ہے؟ (اشارہ: جزو-1 استعمال کرتے ہوئے $r_n^2 - 2 = \pm \left(\frac{1}{y_n}\right)^2$ دکھائیں اور دکھائیں کہ $y_n \geq n$ ہے۔)

سوال 65: ترکیب نیوٹن
ترکیب نیوٹن درج ذیل کلیہ کو اپنی دیتا ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

کیا یہ ترتیب مرتکز ہے؟ اگر مرتکز ہے تب کس حد کو مرتکز ہے؟ تقابل f پہچانیں جو درج ذیل ترتیب دیتا ہے۔

(الف) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

(ب) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

(ج) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

سوال 66: (الف) فرض کریں وقفہ $[0, 1]$ میں تمام x پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور $f(0) = 0$ ہے۔ ترتیب $\{a_n\}$ کو $a_n = nf(\frac{1}{n})$ پیش کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f'(0)$ ہو گا۔

جزو-الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے جزو-ب تا جزو-د میں دیے ترتیبات کے حد تلاش کریں۔ (ب) $a_n = n \tan^{-1} \frac{1}{n}$ (ج) $a_n = n \ln(1 + \frac{2}{n})$ (د) $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

سوال 67: تین کی فیثاغوری جوڑی
اگر $a^2 + b^2 = c^2$ ہو تب a, b اور c کو تین کی فیثاغوری جوڑی کہتے ہیں۔ فرض کریں a ایک طاق مثبت عدد صحیح جبکہ

$$c = \lceil \frac{a^2}{2} \rceil \quad \text{اور} \quad b = \lfloor \frac{a^2}{2} \rfloor^2$$

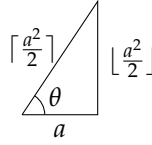
بالترتیب $\frac{a^2}{2}$ کے عدد صحیح زمین اور عدد صحیح چھت تقابل ہیں۔

ا. دکھائیں $a^2 + b^2 = c^2$ (اشارہ: $a = 2n + 1$ لے کر b اور c کو n کی صورت میں لکھیں۔)

ب. بلا واسطہ حساب سے یا شکل 9.14 کی مدد سے $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{a^2}{2} \rfloor}{\lceil \frac{a^2}{2} \rceil}$ تلاش کریں۔

سوال 68: $n!$ کا n واں جذر

ا. دکھائیں کہ $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ ہے اور تخمینہ سٹرلنگ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ n کی بڑی قیمتوں کے لئے $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$ ہو گا۔



شکل 9.14: فیثاغوری تین کی جوڑی (سوال 67)

ب. جہاں تک آپ کا کیلو لیٹر نتائج دے سکتا ہے وہاں تک $n = 40, 50, 60, \dots$ کے لئے کیلو لیٹر سے حاصل $\sqrt[n]{n!}$ کے نتائج کا جزو-الف کے کلیہ سے حاصل نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 69: (i) فرض کریں کسی بھی مثبت مستقل c کے لئے $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^c}\right) = 0$ ہے۔ اب دکھائیں $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$ ہو گا۔ (ب) کسی بھی مثبت مستقل c کے لئے ثابت کریں کہ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^c}\right) = 0$ ہو گا۔ (اشارہ: اگر $\epsilon = 0.001$ اور $c = 0.04$ ہوں تب $n > N$ کی صورت میں $\left|\frac{1}{n^c} - 0\right| < \epsilon$ کے لئے N کتنا بڑا ہونا چاہیے؟)

سوال 70: اگر $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ دونوں L پر مرکوز ہوں تب دکھائیں کہ ترتیب $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ بھی L پر مرکوز ہو گی۔

سوال 71: ثابت کریں $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

سوال 72: ثابت کریں $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1$ جہاں $x > 0$ ہے۔

سوال 73: ثابت کریں مسئلہ 9.3

سوال 74: ثابت کریں مسئلہ 9.4

ترکیب پکاغ
سوال 75 تا سوال 80 میں دیے گئے مساوات کو ترکیب پکاغ سے حل کریں۔

سوال 75: $\sqrt{x} = x$

سوال 76: $x^2 = x$

سوال 77: $\cos x + x = 0$

سوال 78: $\cos x = x + 1$

سوال 79: $x - \sin x = 0.1$

سوال 80: $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{1+x}$ (اشارہ: پہلے دونوں اطراف کا مربع لیں۔)

سوال 81: ترکیب پکڑ سے $\sqrt{x} = x$ کا حل $x = 1$ تلاش کریں جبکہ اس کے حل $x = 0$ اس ترکیب سے تلاش مت کریں۔ کیوں؟ (اشارہ: $y = x$ اور $y = \sqrt{x}$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔)

سوال 82: ترکیب پکڑ میں $|x_0| \neq 1$ لے کر $x^2 = x$ کا حل $x = 0$ تلاش کیا جاسکتا ہے جبکہ اس کے حل $x = 1$ اس ترکیب سے تلاش نہیں کیا جاسکتا ہے۔ کیوں؟ (اشارہ: $y = x$ اور $y = x^2$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔)

اکائی سے زیادہ ڈھلوان
ہم نے مثال 9.16 میں دیکھا کہ $g(x) = 4x - 12$ کے مقررہ نقطہ کو ترکیب پکڑ سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے جبکہ $g^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 3$ کا مقررہ نقطہ ترکیب پکڑ سے حاصل کیا جاسکتا ہے چونکہ کسی بھی وقفہ پر g^{-1} کے تفرق کی مطلق مقدار $\frac{1}{4}$ ہے جو 1 سے کم ہے۔ مثال 9.14 میں ہم نے دیکھا کہ g^{-1} کا مقررہ نقطہ $x = 4$ ہے جو $g(4) = 4(4) - 12 = 4$ کی بنا پر g کا بھی مقررہ نقطہ ہے۔ یوں g^{-1} کا مقررہ نقطہ تلاش کرتے ہوئے ہم نے g کا مقررہ نقطہ بھی تلاش کیا۔

ایک تفاعل اور اس کے الٹ کے مقررہ نقطے ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔ ایک تفاعل اور اس کے الٹ کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہوتے ہیں لہذا اس لکیر کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہیں۔

ہم اب دیکھتے ہیں کہ ترکیب پکڑ کا استعمال وسیع ہے۔ اب فرض کریں g ایک ایک ہے اور اس کا پہلا تفرق استراری ہے جس کی قیمت کسی ایسے بند وقفہ I پر 1 سے زیادہ ہے جس پر g کا مقررہ نقطہ پایا جاتا ہے۔ یوں g^{-1} کا تفرق جو g کا بالکس متناسب ہوگا، کی مقدار I پر 1 سے کم ہوگی۔ ترکیب پکڑ سے I پر g^{-1} کا مقررہ نقطہ تلاش کیا جاسکتا ہے جو g کا بھی مقررہ نقطہ ہوگا۔ اس عمل کو سمجھنے کی خاطر ترکیب پکڑ سے سوال 83 اور سوال 84 میں مقررہ نقطے تلاش کریں۔

سوال 83: $g(x) = 2x + 3$

سوال 84: $g(x) = 1 - 4x$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

