احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفز. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

### عنوان

Vii																										,	يباچ	,
ix																						4	یبادٍ	، کا د	ناب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	•
1																							٠	لمومات	، مع	ابتدائی	1	L
1																		خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																										1.2		
32																							Ĺ	تفاعل		1.3		
54																					غلى	انمذ	م کی	ترسيم		1.4		
74																					بل	نفاء	انی اِنی	بنكوني		1.5		
95																								/		حدود ا	2	)
95																										2.1		
113															٠.		عد	قواه	کے	ئے ۔	_,	پ کر	لاثر	פנ "		2.2		
126																										2.3		
146																										2.4		
165																							ار	استمر		2.5		
184	١.																					Į	ی ز	مماسح		2.6		
199	)																									تفرق	3	Ł
199	)																				<b>ت</b> ,	تف	K,	تفاعل		3.1	-	
221																					رں	, زق	ی ہ ِ تفر	عا ر قواعد		3.2		
240																										3.3		
257																										3.4		
277																										3.5		
294																										3.6		
310	) .																			ىلى	تبد	ح .	شرر	د گیر		3.7		

عـــنوان

<ul> <li>325</li> <li>340</li> <li>340</li> <li>341</li> <li>340</li> <li>341</li> <li>352</li> <li>363</li> <li>364</li> <li>374</li> <li>385</li> <li>386</li> <li>387</li> <li>391</li> <li>44</li> <li>391</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>53</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>58</li> <li>58</li> <li>59</li> <li>605</li> <li>605</li> <li>605</li> <li>70</li> <li>7</li></ul>		تفرق کا استعال	4
<ul> <li>356</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>37</li> <li>40</li> <li>44</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>30</li> <li>30<td></td><td></td><td></td></li></ul>			
<ul> <li>356</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>37</li> <li>40</li> <li>44</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>30</li> <li>30<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td></li></ul>	اوسط قیمت	4.2 متله	
<ul> <li>356</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>368</li> <li>37</li> <li>40</li> <li>44</li> <li>45</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>46</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>47</li> <li>48</li> <li>51</li> <li>52</li> <li>54</li> <li>55</li> <li>55</li> <li>56</li> <li>57</li> <li>57</li> <li>30</li> <li>30<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td></li></ul>	) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
<ul> <li>391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر</li></ul>	356	3.1	
418       بیترین بنان       4.6         442       خط بخد کی اور تنو تات         47       خط بخد کی اور تر تات         47       خط بخد کی اور ریانسان نموند کئی       5         477       کسی محلت       5.1         489       کسی محلت       5.2         505       تعلق محلوات، ابتدائی قیت سخلے، اور ریانسانی نموند کئی       5.3         505       تعلی محلی برایم ترکیب بدل نر نیج ترکیب بدل نرتجی تات و تعلق محلیات       5.6         534       نمارن مجموع اور افعلی محلیات       5.5         551       نمارن محبوع اور اوسط قیت سخل       5.7         599       نماری محلی       5.8         605       نماری محلی       5.9         605       نماری محلی       5.10         625       تعلی می بدل       6.2         626       محلی و است محلی اور تح کلیات و الا مرحد         627       کسی اس است محلی اور تح کلیات و الا مرحد         628       کسی اس	اور $y''$ کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442       غط بدی کا اور تو تات         465       خیر توشی کلداد         477       4.8         477       5.1         477       5.1         489       5.1         5.2       تقری ساوات، ابتدائی تیب سنت، اور ریافسیاتی موند شی         5.3       5.2         5.5       کلی بدر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بید بیر بید ترایی بیر بیر بید ترایی بیر بیر بید بیر بید بیر بید بیر بیر بیر بید بیر			
465       ریب نیوش       4.8         477       کل       کا         477       خیر تطبی محملات       5.1         489       خیر تطبی محملات       5.2         5.2       تفری براید ترکیب بدل ر تیجری تامیده کا الت اطارت       5.3         5.6       کل       کل         5.6       کل       کل         5.6       کل       کل         5.6       کل       کل         5.7       نیادی متلد       5.8         5.8       کل       کل         605       کا       کا         606       کا       کا         607       کا       کا         608       کا       کا         609       کا       کا         600       کا       کا         600       کا       کا         600       کا       کا <td< td=""><td></td><td></td><td></td></td<>			
477       گل       قریق الطاق الله       5.1         489       قریق ساوات، ابتدائی آیت سئط، اور ریاضیاتی موند آشی       5.2         505       تغیلی سرایید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق       5.3         516       تغیلی شریعید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق       5.4         54       اندازه بذر اید شای گموید       5.5         561       تغیادی مسئلد       5.6         578       تغیادی مسئلد       5.7         599       تغیادی مسئلد       5.8         605       تغیادی مسئلد       5.9         605       تغیادی مسئل       5.9         605       تغیادی مسئل       6.1         625       تغیادی مسئل       6.1         629       تغیادی وزاند       6.2         640       مینان کارتج کی کات والا سرحد       6.2         648       تغیال کات کر جم کی حال ال سرح الحال المراح و المراح المراح و الحال المراح و المراح المراح المراح و المراح المراح المراح و المراح المراح و المراح المراح المراح و المراح المراح المراح و المراح			
477       غیر تطعی محملات       5.1         489       ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی       5.2         505       تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق       5.3         516       بخیری تعلی محمید       5.4         54       بخیری قاعده کا الت الت التی محمید       5.5         561       بخیری محمید       5.6         562       بخیری محمید       5.6         578       بخیری محمید       5.7         599       بخیری محمید       5.8         605       بخیری محمیل       5.9         605       بخیری محمیل       5.0         605       بخیری محمیل       6.1         625       بخیری محمیل       6.1         626       بخیری محمیل       6.2         627       بخیری محمیل       6.3         628       بخیری محمیل       6.3         640       بخیری محمیل       6.3         640       بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت       6.5         6.6       بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت       6.6         6.7       بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت       6.7         71       بادی کشور استمال اور قوت بیالی افتراد کر محمیل استمال اور قوت بیالی انتخال الحمیلی استمال       6.8         740	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477       غیر تطعی محملات       5.1         489       ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی       5.2         505       تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق       5.3         516       بخیری تعلی محمید       5.4         54       بخیری قاعده کا الت الت التی محمید       5.5         561       بخیری محمید       5.6         562       بخیری محمید       5.6         578       بخیری محمید       5.7         599       بخیری محمید       5.8         605       بخیری محمیل       5.9         605       بخیری محمیل       5.0         605       بخیری محمیل       6.1         625       بخیری محمیل       6.1         626       بخیری محمیل       6.2         627       بخیری محمیل       6.3         628       بخیری محمیل       6.3         640       بخیری محمیل       6.3         640       بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت       6.5         6.6       بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت       6.6         6.7       بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت       6.7         71       بادی کشور استمال اور قوت بیالی افتراد کر محمیل استمال اور قوت بیالی انتخال الحمیلی استمال       6.8         740	477	کیل .	5
489       ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی         505       تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3         516       ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.4         534       ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.5         551       5.6         562       نصوعیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 5.7         578       نیادی سئلہ 5.8         579       5.8         605       5.8         605       5.9         605       تعدادی محملہ 6.5         605       تعدادی محملہ 6.5         625       تعدادی وزرنقہ 6.1         626       منحنیات کے فتی رتب         627       کمیل کا استعمال 6.1         640       منحنیات والا سرحم         640       کمیل سیل کا الے کر قبم کی سائل 7.5         640       کمیل سیل کی سیل کی سیل الے کہ اللے الیاں محملہ اللے الیاں اللے اللے اللے اللے اللے اللے اللے ال		•	5
505       کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق       5.3         516       امدازہ بذراید متاباتی تجویم       5.4         54       امدازہ بذراید متاباتی تجویم       5.5         55       ریمان تجویم اور قطعی تحملیت       5.6         56       محمل کا سرا برا اور اصطفی تحمل میں بدل       5.8         605       نظمی تحمل میں بدل       5.9         605       اعدادی تحمل کا استعمال       6.1         625       محمل کا استعمال       6.1         626       محمل کا استعمال       6.1         640       مستحدی تحمل میں اور چھلا       6.2         648       محمل کا سرا ہو تے کلیات والا سرحد       6.3         663       اجسام طواف کے تجم۔ قرص اور چھلا       6.3         665       محمدی متحدیات کی لمبائیاں       6.5         670       معیاد اثر اور مرکز کہتے       6.7         671       معیاد اثر اور مرکز کہتے       6.7         671       فضل مرکز کہتے       6.8         731       بادی قش اور دیگر نمونی استعمال       6.9         740       افرائی قاعل       6.10	ر با		
516       اندازه بذرایید تثانای مجموعها         534       5.5       5.6       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.5       5.6       5.6       5.6       5.6       5.6       5.6       5.6       5.7       5.8       5.8       5.8       5.8       5.9       5.9       5.9       5.0       605       606       605       606			
534       ريمان مجموع اور قطعي تحمالت       5.5         561       خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله       5.6         578       خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله       5.7         579       5.8         605       5.8         605       5.9         605       6.05         605       6.05         605       6.05         605       6.05         605       6.06         626       6.1         627       6.1         640       معنیات کے قی رقب         640       معنیات کے قبلیت والا مرحد         640       معنیات کے قبلیت والا اور چھلا         648       معنیات کی البائیاں         650       معنیات کی البائیاں         661       معنیات کی البائیاں         662       معنیات کی البائیاں         663       معنیات کی البائیات البائی اور قیت سیال اور قیت البائی البائی البائی البائی البائی البائی البائی البائی البائی			
561       فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل       5.6         578       5.7       5.7         579       5.8       5.8         605       5.9       5.9         605       5.0       5.10         625       605       6.1         626       6.2       6.1         627       6.2       6.2         640       6.2       6.3         640       6.3       6.3         663       6.4       6.5         664       6.5       6.5         665       6.6       6.6       6.6         670       6.2       6.4         687       6.3       6.4         688       6.5       6.6         689       6.6       6.7         710       6.8       6.8         731       6.8       6.9         740       6.10       6.5         755       7       10       6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578       بنیادی سئلد       5.7       5,10       5.8       5.8       5.8       5.8       6.0       5.8       6.0       5.9       5.9       6.0       5.9       6.0       5.0       6.0       6.0       6.0       6.0       6.0       6.1       6.2       6.2       6.2       6.1       6.2       6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599       قطع کمل میں برل       5.8         605       5.9         605       5.9         605       5.10         625       5.10         625       6.1         629       6.1         640       7         6.2       6.2         6.3       6.2         6.4       6.3         6.5       6.4         6.6       6.5         6.6       6.9         6.7       6.7         70       6.8         71       6.8         731       6.9         740       6.10         755       6.10			
605       اعدادی گلل       5.9         605       تاعدہ و و و زفتہ       5.10         625       تاعدہ و و و زفتہ       6.1         625       مخدیات کے ختی رقبہ       6.1         629       مخدیات کے ختی کلیات والا سرحد         640       شایل کاٹ کر تیم کی طائ         640       گایاں کاٹ کر تیم کی طائ         648       اجماع طواف کے تیم حقومی اور چھل         648       کم متعدی مخدیات کی لمبائیاں         650       معدی اثر اور مرکز کیت         667       معدی اثر اور مرکز کیت         670       معدی اثر اور مرکز کیت         671       اللہ میل اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت			
605       اعدادی گلل       5.9         605       تاعدہ و و و زفتہ       5.10         625       تاعدہ و و و زفتہ       6.1         625       مخدیات کے ختی رقبہ       6.1         629       مخدیات کے ختی کلیات والا سرحد         640       شایل کاٹ کر تیم کی طائ         640       گایاں کاٹ کر تیم کی طائ         648       اجماع طواف کے تیم حقومی اور چھل         648       کم متعدی مخدیات کی لمبائیاں         650       معدی اثر اور مرکز کیت         667       معدی اثر اور مرکز کیت         670       معدی اثر اور مرکز کیت         671       اللہ میل اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت	<sup>ت</sup> کمل میں بدل	5.8 قطعی	
<ul> <li>5.10 تاعدہ ذوزنقہ</li> <li>5.10 تاعدہ ذوزنقہ</li> <li>625 تاعدہ ذوزنقہ</li> <li>6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ</li> <li>6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ</li> <li>6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد</li> <li>6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش</li> <li>6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا</li> <li>6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں</li> <li>6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں</li> <li>6.6 میار اثر اور مرکز کمیت</li> <li>6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت</li> <li>6.8 میار اثر اور مرکز کمیت</li> <li>6.9 وسطانی مرکز</li> <li>6.7 میار اثر اور قوت سیال اور قوت سیال</li> <li>6.10 میادرائی تفاعل</li> </ul>			
625       متخدیات کے نی رقبہ       6.1         629       متخدیات کے اگر رقبہ       6.1.1         640       تدیل ہوتے کلیات والا سرحد       6.2         640       شکل کا کٹر جم کی طاش       6.3         648       باب کوس اور چھلا       6.4         650       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.5         687       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.6         699       معیار اثر اور مرکز کمیت       6.7         711       وسطانی مرکز       6.8         731       وسطانی مرکز       6.8         731       فشار سیال اور قوت سیال       6.9         740       بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال       7         7 ماورائی نقاعل       7			
625       متخدیات کے نی رقبہ       6.1         629       متخدیات کے اگر رقبہ       6.1.1         640       تدیل ہوتے کلیات والا سرحد       6.2         640       شکل کا کٹر جم کی طاش       6.3         648       باب کوس اور چھلا       6.4         650       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.5         687       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.6         699       معیار اثر اور مرکز کمیت       6.7         711       وسطانی مرکز       6.8         731       وسطانی مرکز       6.8         731       فشار سیال اور قوت سیال       6.9         740       بنیادی نقش اور ویگر نمونی استعال       7         7 ماورائی نقاعل       7		کا ب	_
629       تدريل ہوتے کليات والا سرحد         640       6.2         640       6.2         6.3       6.4         6.4       6.5         6.5       6.6         6.6       6.6         6.7       6.6         6.8       6.7         711       6.8         731       6.8         740       6.0         755       6.0	0_0		6
640       گیاں کاٹ کر قجم کی طاش         648       اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا         65       اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا         65       6.4         676       شوی متحدیات کی لمبائیاں         687       6.6         689       6.7         70       معیاد اثر اور مرکز کمیت         67       6.71         711       0.71         68       6.71         716       وسطانی مرکز         6.8       مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال         740       مادرائی نقاعل			
648       اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا       6.3         663       شکلی چھلے       6.4         676       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.5         687       6.6       6.6         699       6.7       6.7         711       6.7       7         688       7.1       6.8         731       6.8       7         740       بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال       6.10         755       ماورائی نقاعل       7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663       بکی چیلے       6.4         676       مستوی منحنیات کی لمبائیاں       6.5         687       6.6       6.6         699       6.7       6.7         711       6.7       7         711       6.8       7         716       6.8       7         731       9       6.7         740       6.10       6.10         755       ماورائی تفاعل       7	) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676       مستوی منحنیات کی لمبائیاں         687       6.5         688       6.6         699       6.7         70       معیاد اثر اور مرکز کمیت         6.7       6.7.1         70       6.8         731       8         740       6.10         755       ماورائی تفاعل	•		
687       شطح طواف کا رقبہ         699       6.7         711       6.7         711       6.7.1         716       9         6.8       731         700       6.10         701       6.10         702       6.10         703       6.10         704       6.10         705       6.10         706       6.10         707       6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.7 معیار اثر قبل اور قب سیال 6.9 فشار سیال اور قب سیال 6.9 نشار سیال اور دیگر نمونی استعال 6.10 ماورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.7 معیار اثر قبل اور قب سیال 6.9 فشار سیال اور قب سیال 6.9 نشار سیال اور دیگر نمونی استعال 6.10 ماورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

عـــنوان

قىدرتى لوگار كقم	7.2	
قوت نمائی تفاعلٰ	7.3	
807 $\log_a x$ log <sub>a</sub> $x$	7.4	
	7.5	
قاعدُه لَهُوبِيبُال ُ	7.6	
اضافی شرح نمو	7.7	
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش		
اك تكونياتى تفاعل	7.8	
الٹ تکوئیاتی تفاعل ۔	7.9	
يذلولي تفاعل	7.10	
يک ِرتِي تَفْرقَى مِساوات	7.11	
ير كي اعداد كي تركيب؛ ميدان و هلوان	7.12	
9.40	کمل کے	0
		8
تحمل کے بنیادی کلیات	8.1	
تحمل بالحصص	8.2	
8.2.1 باربار استعال		
جِزوي کسرِ	8.3	
تكونياتي بدل	8.4	
جدول تلمل اور کمپيوٹر	8.5	
غير مناسب كلمل	8.6	
	i	_
لسکسل اعداد کی ترتب کی حد	لامتنابی 9.1	9
اعداد فی ترتیب می حد	9.1 9.2	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	9.2	
غیر منفی اجزاء والے نشکسل کا تکملی پر کھی	9.4	
غیر منفی اجزاء کے تشکسل کے تقابل پر کھ	9.5	
غیر منفی اجزاء کے تشکسل کا تناسجی اور جذری پر کھ	9.6	
بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	9.7	
طاقتی شلسل	9.8	
شکر اور مکلارن کسکسل	9.9	
ٹیر نسلسل کا ارکاز؛ قلل کے اندازے	9.10	
طاقتی شکس کے استعال کے استعال کی استعال کی استعال کے استعال کے استعال کی است	9.11	
حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محد د	ي طي	10
ھے، کی عدار سوم اور من عدد مخروطی ھے اور دو قدری مساواتیں	10.1	10
مرون کے اور دو مدرق مساوا میں	10.1	
1219	ضميمه اول	1

ب ضميمه دوم

### ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$ 

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

# میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے بھٹیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كي

2011 كتوبر \_2011

#### باب10

# مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محد د

جائزه

حرکت پر غور احصاء کی مدد سے کیا جا سکتا ہے۔ اس حصہ میں ہم وقت کے ساتھ ایک ذرے کے بدلتے مقام پر غور کریں گے۔ ہم مخروطی حصوں کی مساوات سے شروع کرتے ہیں چونکہ بالعکس مرلع قوت کی بناسیارے، مصنوعی سیارے، اور دیگر اجسام مخروطی راہ پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک جمم مخروطی راہ پر حرکت کر رہا ہے تب ہم اس کی رفتار اور اس پر عمل کرنے والی قوت دریافت کر سکتے ہیں۔ قطبی محدد سیاروں کی حرکت پر غور کو بہت آسان بناتا ہے لہذا ہم اس نئے محدد میں منحنیات، تفرق اور تکمل پر بھی غور کریں گے۔

#### 10.1 مخروطی حصے اور دوقدری مساواتیں

اں حصہ میں دکھایا جائے گا کہ مخروطی حصوں کو کس طرح محددی سطح پر بطور دو قدری مساوات بیش کیا جاتا ہے۔ دوہرے مخروط کو سطح سے کاٹ کر مخروطی منحنیات پیدا کی جاتی ہیں اور اس کی بنا مخروطی حصہ کی اصطلاح پیدا ہوئی۔

دائره

تعریف: ایک متوی میں رہتے ہوئے اس متوی میں کی مقررہ نقط سے متعقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو دائرہ  $^1$  کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقط کو دائرے کا مرکز  $^2$  کہتے ہیں جبکہ اس متعقل فاصلہ کو رداس  $^3$  کہتے ہیں۔

وائرے کے معیاری مساوات جنہیں حصہ 1.4 میں فاصلہ کی مساوات  $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$  سے اخذ کیا گیا درج ذیل ہیں۔

$$x^2 + y^2 = a^2$$
 (0,0) روای  $a$  اور برکز (x - h)^2 + (y - k)^2 =  $a^2$  (h, k) روای  $a$  اور برکز

قطع مكافى

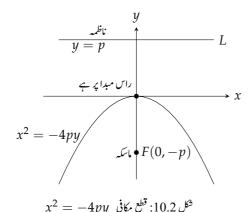
تعریف: ایک سطح میں رہتے ہوئے کی مقررہ سید هی لکیر اور مقررہ نقطہ (جو اس مقررہ سید هی لکیر پر نہیں پایا جاتا ہو) سے مستقل فاصلہ پر پائے جانے والے تمام نقطوں کے سلسلہ کو قطع مکافی <sup>4</sup> کہتے ہیں۔مقررہ نقطے کو قطع مکافی کا <sup>5</sup> کہتے ہیں جبکہ مقررہ لکیر کو ناظمہ <sup>6</sup> کہتے ہیں۔

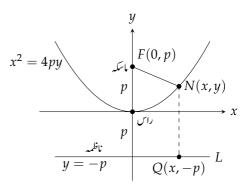
جب ماسکہ کسی محددی محور پر ہو اور ناظمہ اس محددی محور کے متوازی ہو تب قطع مکافی کی مساوات سادہ ترین ہوتی ہے۔مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ماسکہ y محور پر نقطہ f(0,p) پر پایا جاتا ہے اور لکیر y=-p ناظمہ (شکل 10.1) ہے۔ یوں شکل 10.1 میں نقطہ N(x,y) مرف اور صوف اس صورت اس قطع مکافی پر پایا جائے گا جب NF=NQ ہو۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$NF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$NQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

circle<sup>1</sup> center<sup>2</sup> radius<sup>3</sup> parabola<sup>4</sup> focus<sup>5</sup> directrix<sup>6</sup>





شکل 10.1: قطع مکافی  $x^2=4py$  ؛ راس کا فاصل ماسکہ اور ناظمہ سے ایک جیہا ہے۔

کھھا جا سکتا ہے۔ ان مباوات کو ایک دوسرے کے برابر پر کر کے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y = \frac{x^2}{4p} \implies x^2 = 4py$$
 عياري روپ

اس ماوات سے قطع مکانی کی y محور کے لحاظ سے تشاکلی واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ محور y اس قطع مکانی کا محور تشاکلی ہے جس کو عوماً چھوٹا کر کے صرف محور <sup>7</sup> پکارا جاتا ہے۔

وہ نقطہ جس پر قطع مکافی اپنے محور کو قطع کرتا ہو راس 8 کہلاتا ہے۔ قطع مکافی  $x^2=4py$  کا راس مبدا پر پایا جاتا ہے (شکل 10.1)۔ شبت عدد y کو قطع مکافی کا طول ماسکہ 9 کہتے ہیں۔

اگر قطع مکافی نیجے رخ کھاتا ہو اور اس کا ماسکہ (0,-p) جبکہ ناظمہ لکیر y=p ہو تب مساوات 10.1 درج ذیل روپ اختیار کرے گر شکل (10.2)۔

$$y = -\frac{x^2}{4p} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -4py$$

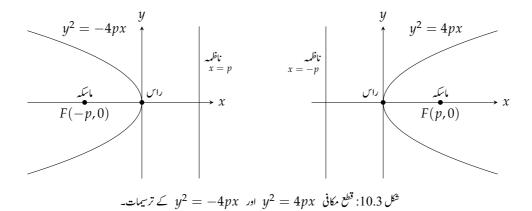
ہم ای طرح کے مساوات ہم دائیں اور بائیں کھلنے والے قطع مکانی کے لئے حاصل کر سکتے ہیں (جدول 10.1 اور شکل 10.3)۔

مثال 10.1: قطع مكافى  $y^2=10x$  كا ماسكه اور ناظمه تلاش كريں۔

 $\begin{array}{c} {\rm axis}^7 \\ {\rm vertex}^8 \\ {\rm focal~length}^9 \end{array}$ 

جدول 10.1: مبدایر راس والے قطع مکانی کے معیاری مساوات ( p>0

کھلنے کا رخ	محور	ناظمه	ماسكه	مساوات
اوپر	محور ہا	y = -p	(0, p)	$x^2 = 4py$
ينج	محور y	y = p	(0, -p)	$x^2 = -4py$
وائين	محور 🗴	x = -p	(p, 0)	$y^2 = 4px$
بائتين	محور 🗴	x = p	(-p, 0)	$y^2 = -4px$



 $y^2=4px$  على: ہم معیاری مساوات  $y^2=4px$  علی  $y^2=4px$ 

$$4p = 10 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

اس کے بعد ہم حاصل کردہ p کے لئے ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرتے ہیں۔

جدول 10.1 کے کلیات پر حصہ 1.4 میں دیے گئے منتقلی کے کلیات لاگو کرتے ہوئے دیگر مقامات پر واقع قطع مکافی کے مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

ترخيم

تعریف: ایک مستوی پر رہتے ہوئے، مستوی پر دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو، ان کے سلسلہ کو ترخیم 10 کتب ہیں۔ ان دو مقررہ نقطوں کو ترخیم کے مسلمے کہتے ہیں (شکل 10.4)۔

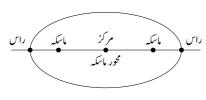
ترخیم کو اس کی تعریف استعال کرتے ہوئے بہت جلد ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ مقررہ نقطوں  $F_1$  اور  $F_2$  پر ڈوری باندھیں۔ ڈوری کو قلم سے کھنچ کر رکھتے ہوئے قلم کو بند دائری حرکت دیں۔ چونکہ ڈوری کی لمبائی مستقل ہے المذا قلم ترخیم کو ترسیم کرے گا (شکل 10.4)۔

 $NF_1 + NF_2$  اور  $F_2(c,0)$  ہوں (شکل 10.6) اور فاصلہ  $F_1(-c,0)$  کو  $F_1(-c,0)$  اگر مانکے N(x,y) ورتی ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

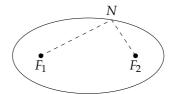
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذری جزو کو دائیں منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذری جزو کو ایک ہاتھ رکھتے ہوئے دوبارہ مربع لیتے ہیں۔ نتیجناً درج ذیل حاصل ہو گا۔

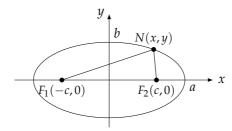
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$



شكل 10.5: ترخيم پر اہم نقطے۔



شکل 10.4: رونوں ماسکوں (  $F_1$  اور  $F_2$  ) ہے کسی بھی نقط N تک فاصلوں کا مجموعہ (نقطہ دار لکیر) ایک مستقل ہے۔



شکل 10.6: ترخیم کی تعریف سے اس کی مساوات کا حصول۔

چونکہ  $NF_1+NF_2$  کی لمبائی  $F_1F_2$  کی لمبائی سے زیادہ ہے (شکون  $NF_1F_2$  کے لئے شکونی عدم مساوات) للذا عدد a>c عدد a>c کی بیا ہو گا۔ یوں a>c ہو گا للذا مساوات a>c میں ایس میں میں جو گا۔

ہم مساوات 10.2 حاصل کرنے کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ جو مساوات 10.2 کو c < a کے لئے مطمئن کرتا ہو  $NF_1 + NF_2 = 2a$  کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت ترخیم پر پایا جائے گا اگر وہ مساوات 10.2 کو مطمئن کرتا ہو۔

اگر

$$(10.3) b\sqrt{a^2-c^2}$$

ہو تب  $a^2-c^2=b^2$  ہو گا اور مساوات 10.2 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مساوات 10.4 کے تحت مبدا اور دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ یہ  $x=\pm a$  اور  $y=\pm b$  کلیروں میں بند مستطیل کے اندر پایا جاتا ہے۔ یہ محوروں کو نقطہ  $(\pm a,0)$  اور  $(\pm a,0)$  پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

کی قیمت x=0 پر صفر اور y=0 پر لا شناہی ہے المذا  $(\pm a,0)$  اور  $(\pm a,0)$  پر مماثل محوروں کو عمودی ہوں گے۔

ترخيم كااكبر اور اصغر محور

ضمیمها ضمیمه اول

ضمیمه د وم