

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	نکونائی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
164	استمرار	2.5
182	مماسی خط	2.6
197	ضمیمہ دوم	1

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. ایک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب بائیں ہاتھ حد⁷ حاصل ہو گا۔ اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب دائیں ہاتھ حد⁸ حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

ایک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔ اسی لئے عام حد کو بعض اوقات دو طرفہ حد⁹ بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر ایک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔ اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

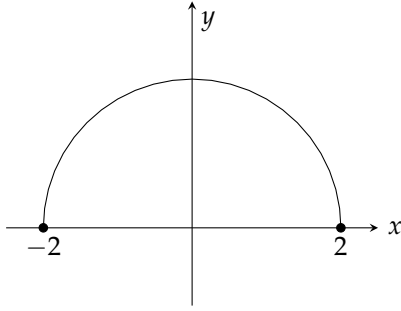
تعریف: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) ، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

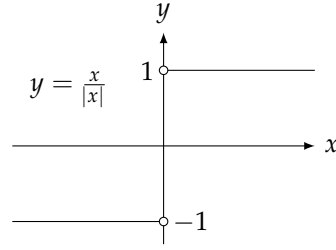
فرض کریں کہ وقفہ (c, a) ، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

left-handed limit⁷
right-handed limit⁸
two-sided limit⁹



شکل 2.43: تقابل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔

شکل 2.42 میں تقابل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$$

$x \rightarrow a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x \rightarrow a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تقابل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا دائرہ کار $[-2, 2]$ ہے۔ تقابل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

نقطہ $x = -2$ پر تقابل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = 2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x = -2$ اور $x = 2$ پر تقابل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ □

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تقابل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تقابل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تقابل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ پتچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: ایک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ اور } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$ پر: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔
($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$ پر: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔ (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$ پر: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ
 $f(2) = 2$ ہے۔

$x = 3$ پر: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

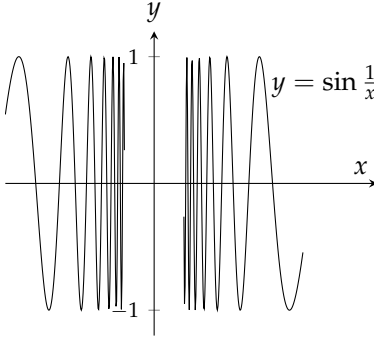
$x = 4$ پر: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔ (نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ $[0, 4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ □

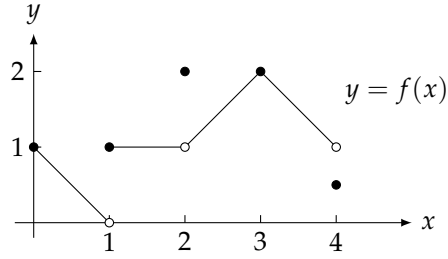
اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا ایک طرفہ حد موجود تھا۔ درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نہ بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin \frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔

حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا پر $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ ایسا کوئی کتنا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔ یوں $x = 0$ پر $\sin \frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نہ کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ □



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

لا متناہی حد

آئیں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے $x \rightarrow 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔ یوں $x \rightarrow 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

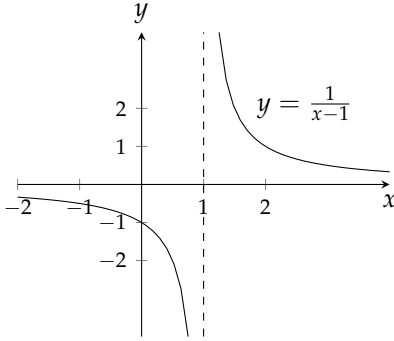
یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

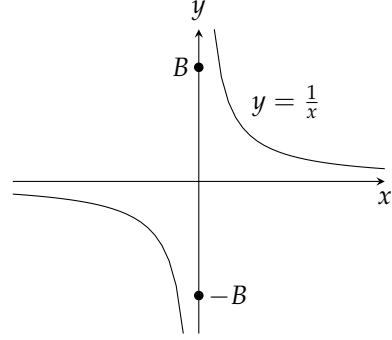
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: ایک طرفہ حد
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27



شکل 2.46: تقابل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔

حل: ترسیمی حل: تقابل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x-1$ اور اس کے بالکل متناسب پر غور کریں۔ $x \rightarrow 1^+$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$ ملتے ہیں۔ $x \rightarrow 1^-$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$ ملتے ہیں۔ □

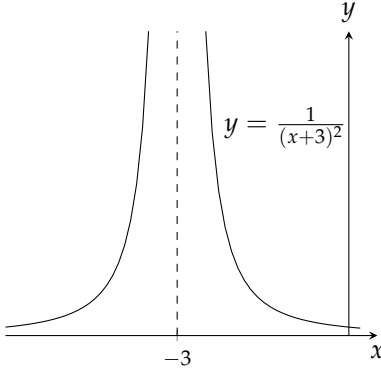
مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد (i) $x=0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x=-3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔
حل: (i) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

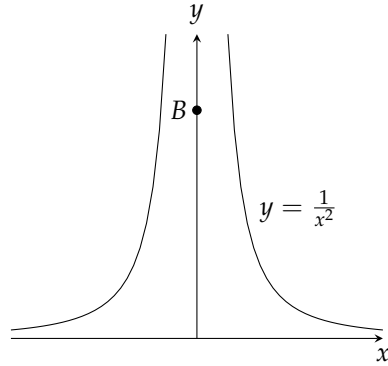
(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.49: $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.48: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \rightarrow 0$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔ اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔ صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: نااطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \quad (ب)$$

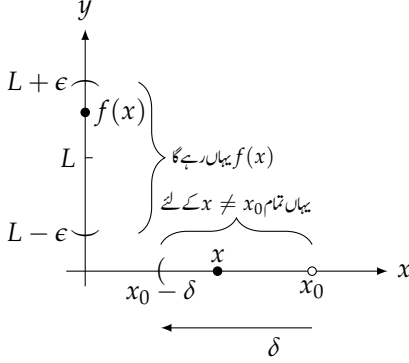
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \quad (د)$$

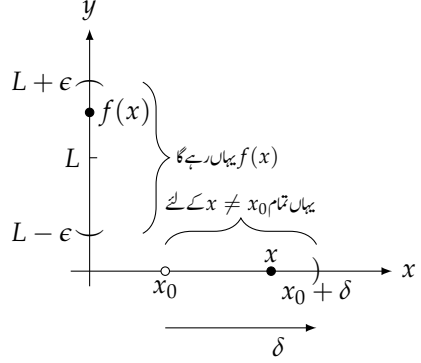
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \quad (ه)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \quad (و)$$

جزو (i) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔ جزو (ه) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جاسکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$(2.1) \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

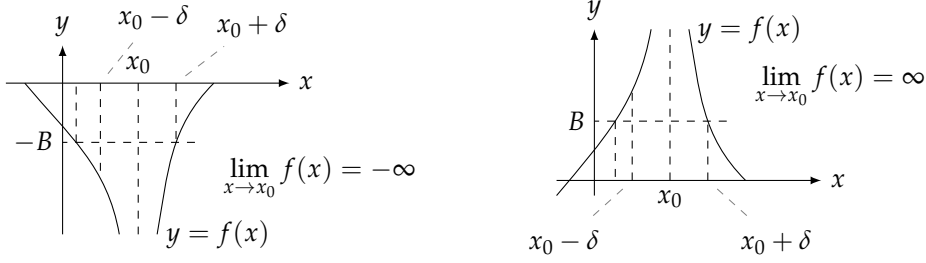
بائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$(2.2) \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$



شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.3) \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.4) \quad -\delta < x - x_0 < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$(2.5) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبداسے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔ اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لامتناہی حد

(i) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

ایک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔ اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{ه.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{و.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad \text{ز.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{ح.}$$

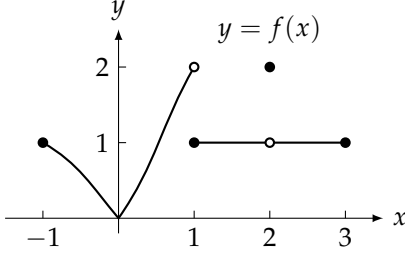
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{ط.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے۔} \quad \text{ث.}$$

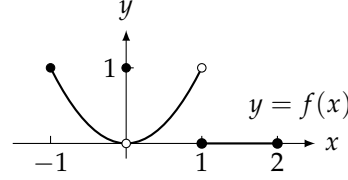
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \quad \text{ی.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{ک.}$$

سوال 2: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تفاعل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔



شکل 2.54: تقابل برائے سوال 2



شکل 2.53: تقابل برائے سوال 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{ن.}$$

ج. کھلے وقفہ $(-1, 1)$ میں ہر c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔

ط. کھلے وقفہ $(1, 3)$ میں ہر c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \quad \text{ی.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{یا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ا.}$$

ب. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{ه.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{و.}$$

سوال 3: درج ذیل تقابل کو شکل 3 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

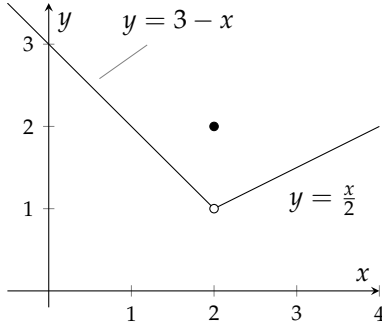
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔

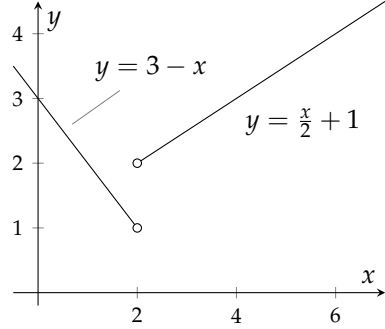
ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود ہے۔ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.56: تقابل برائے سوال 4



شکل 2.55: تقابل برائے سوال 3

سوال 4: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

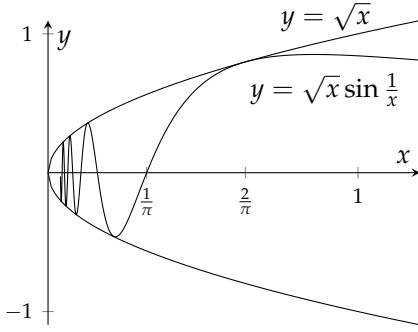
د. کیا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5: درج ذیل تقابل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

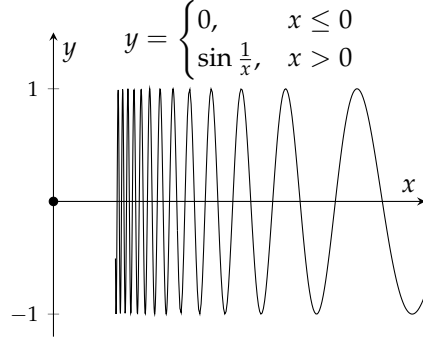
$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 6



شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 5

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 8:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9 اور سوال 10 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases} \quad \text{سوال 9:}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \text{ یا } 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \quad \text{سوال 10:}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 11 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \quad \text{سوال 11:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \quad \text{سوال 12:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{2x+5}{x^2+x} \right) \quad \text{سوال 13:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\frac{x+6}{x} \right) \left(\frac{3-x}{7} \right) \quad \text{سوال 14:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} \quad \text{سوال 15:}$$

سوال 16: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$

سوال 17: (i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$

سوال 18: (i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 19: (i) $\lim_{\theta \rightarrow 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta \rightarrow 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$

سوال 20: (i) $\lim_{t \rightarrow 4^+} (t - |t|)$ (ب) $\lim_{t \rightarrow 4^-} (t - |t|)$

لامتناہی حد: سوال 21 تا سوال 32 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x}$

سوال 22: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 23: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$

سوال 24: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 25: $\lim_{x \rightarrow -8^+} \frac{2x}{x+8}$

سوال 26: $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 27: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

سوال 28: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 29: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

سوال 30: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

سوال 31: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^{2/5}}$

سوال 32: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 33 تا سوال 36 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x$

سوال 34: $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 35: $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (1 + \csc \theta)$

سوال 36: $\lim_{\theta \rightarrow 0} (2 - \cot \theta)$

مزید حساب: سوال 37 تا سوال 42 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 37: $\lim_{x^2 \rightarrow 4} \frac{1}{x^2 - 4}$

ا. $x \rightarrow 2^+$ ب. $x \rightarrow 2^-$ ج. $x \rightarrow -2^+$ د. $x \rightarrow -2^-$

سوال 38: $\lim_{x^2 \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$

ا. $x \rightarrow 1^+$ ب. $x \rightarrow 1^-$ ج. $x \rightarrow -1^+$ د. $x \rightarrow -1^-$

سوال 39: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right)$

ا. $x \rightarrow 0^+$ ب. $x \rightarrow 0^-$ ج. $x \rightarrow \sqrt[3]{2}$ د. $x \rightarrow -1$

سوال 40: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

$$ا. \quad x \rightarrow -2^+ \quad ب. \quad x \rightarrow -2^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 41:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 2^+ \quad ج. \quad x \rightarrow 2^- \quad د. \quad x \rightarrow 2$$

$$\text{سوال 42:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$$

$$ا. \quad x \rightarrow 2^+ \quad ب. \quad x \rightarrow -2^+ \quad ج. \quad x \rightarrow 0^- \quad د. \quad x \rightarrow 1^+$$

سوال 43 تا سوال 46 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

$$\text{سوال 43:} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (2 - \frac{3}{t^{1/3}})$$

$$ا. \quad t \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad t \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 44:} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$$

$$ا. \quad t \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad t \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 45:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\text{سوال 46:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

یک طرفہ حد کی با ضابطہ تعریف

سوال 51: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5 + \delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟

سوال 52: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4 - \delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 53 اور سوال 54 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \quad \text{سوال 53}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1 \quad \text{سوال 54}$$

سوال 55: (ا) $\lim_{x \rightarrow 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x \rightarrow 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 56: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔ (ا) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے فقروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{سوال 57}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \quad \text{سوال 58}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty \quad \text{سوال 59}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty \quad \text{سوال 60}$$

ایک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لامتناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطلق عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} = \infty$$

سوال 61: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ب.}$$

ایک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 62 تا سوال 67 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{سوال 62}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{سوال 63}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{سوال 64}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{سوال 65}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \quad \text{سوال 66}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty \quad \text{سوال 67}$$

2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے ناکہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اسٹن زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاہد ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مالیکیول میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی درحقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے ناکہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔ استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

عملاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔ یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی اندرونی نقطے¹⁰ (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، بائیں سر نقطے¹¹ اور دائیں سر نقطے¹²۔

تعریف: اندرونی نقطہ پر استمرار

اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ $c = x$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر f استمراری ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

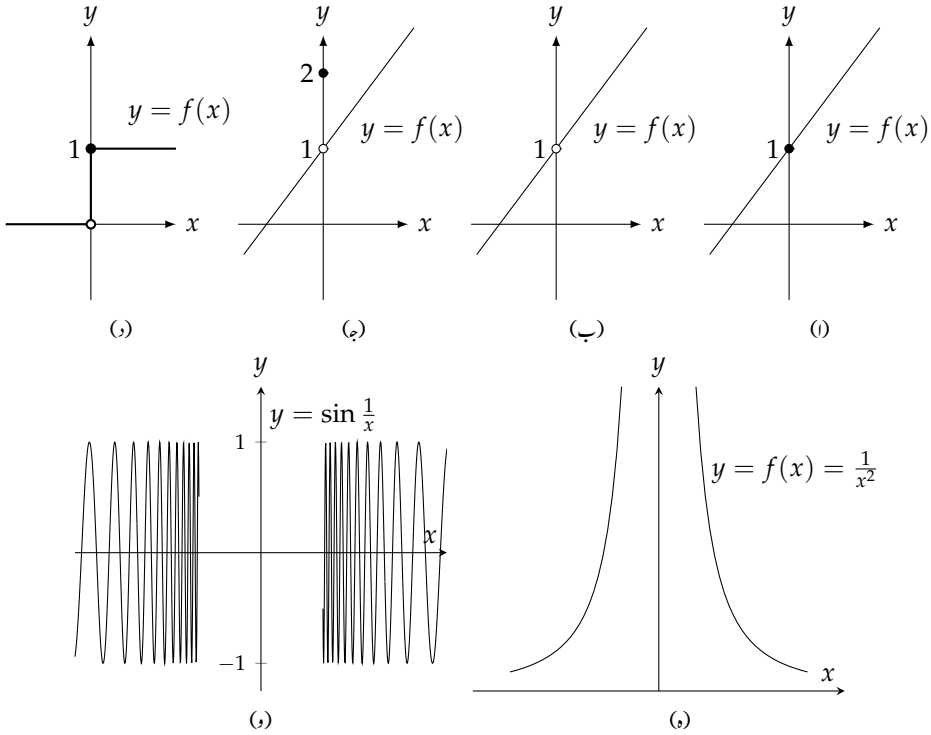
شکل 2.59 میں $x = 0$ پر (0) استمراری ہے۔ اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کی بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔ انہیں قابل ہٹاؤ¹³ عدم استمرار کہتے ہیں۔ ان دونوں میں $x \rightarrow 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر پر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جاسکتا ہے۔

interior points¹⁰

left endpoints¹¹

right endpoints¹²

removable¹³



شکل 2.59: $x = 0$ پر تقابل (i) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (د) غیر استمراری ہیں۔

شکل 2.59 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تفویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں لہذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جاسکتی ہے۔ (د) میں چھلانگ عدم استمرار¹⁴ پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (ه) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا لا متناہی عدم استمرار¹⁵ پایا جاتا ہے۔ ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لئے غیر استمراری ہے کہ $x \rightarrow 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں ارتعاشی عدم استمرار¹⁶ پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔ کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔ عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

تعریف: بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔ اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔

عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل دائیں استمراری¹⁷ ہو گا۔ اسی طرح تفاعل f اس صورت بائیں استمراری¹⁸ ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔ یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.60)۔

مثال 2.30: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل 2.61)۔

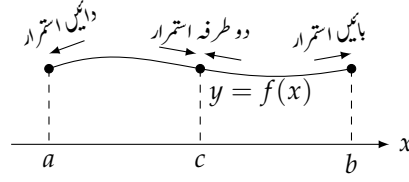
¹⁴ jump discontinuity

¹⁵ infinite discontinuity

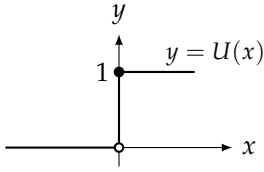
¹⁶ oscillating discontinuity

¹⁷ right-continuous

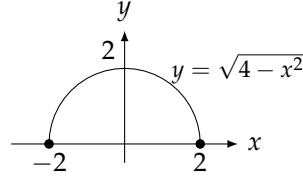
¹⁸ left-continuous



شکل 2.60: نقطہ a ، b اور c پر استمرار



شکل 2.62: یہ تفاعل مہدا پر دائیں استمراری ہے



شکل 2.61: پورے دائرہ کار کے پر نقطہ پر استمراری

□

مثال 2.31: شکل 2.62 میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ بائیں استمراری ہے اور نا ہی استمراری ہے۔

□

ہم نقطے پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

پرکھ استمرار

نقطہ $x = c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

1. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)

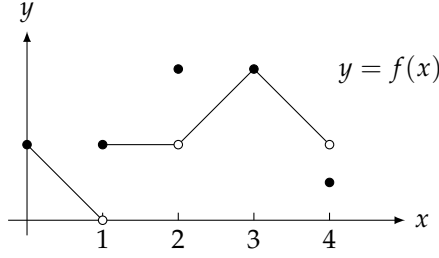
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے ($x \rightarrow c$ پر f کا حد پایا جاتا ہے)

3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

ایک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.63 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔ نقطہ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔



شکل 2.63: تقابل f بند وقفہ $[0, 4]$ پر معین ہے۔ یہ تقابل $x = 1, 2, 4$ پر غیر استمراری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استمراری ہے۔

ا. $x = 0$ پر f استمراری ہے چونکہ

$$1. f(0) \text{ موجود ہے } (f(0) = 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ (تقابل کی قیمت اور حد برابر ہیں)}$$

ب. چونکہ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غیر موجود ہے لہذا $x = 1$ پر f غیر استمراری ہے۔ پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استمراری ہے چونکہ

$$1. f(1) \text{ موجود ہے } (f(1) = 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ (نقطہ } x = 1 \text{ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ (دائیں ہاتھ حد اور تقابل کی قیمتیں برابر ہیں)}$$

ج. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ کی بنا $x = 2$ پر f غیر استمراری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

د. $x = 3$ پر f استمراری ہے چونکہ

$$1. f(3) \text{ موجود ہے } (f(3) = 2)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \text{ (نقطہ } x = 2 \text{ پر حد موجود ہے)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{ (تقابل کی قیمت اور حد برابر ہیں)}$$

ہ. چونکہ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$ ہے لہذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استمراری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار

اگر نقطہ $x = c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x = c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

$$1. f + g \text{ اور } f - g$$

$$2. fg$$

$$3. kf, \text{ جہاں } k \text{ کوئی عدد ہے}$$

$$4. \frac{f}{g} \text{ (بشرطیکہ } g(c) \neq 0 \text{ ہو)}$$

$$5. (f(x))^{m/n} \text{ (بشرطیکہ } (f(x))^{m/n} \text{ اس وقت پر معین ہو جس پر } c \text{ پایا جاتا ہے، اور } m \text{ اور } n \text{ عدد صحیح ہیں۔)}$$

درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار

حقیقی خط کے ہر نقطہ پر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال 2.33: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = x^4 + 20$ اور $g(x) = 5x(x - 2)$ استمراری ہیں۔ تفاعل

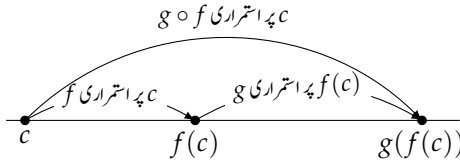
$$r(x) = \frac{x^2 + 20}{5x(x - 2)}$$

□

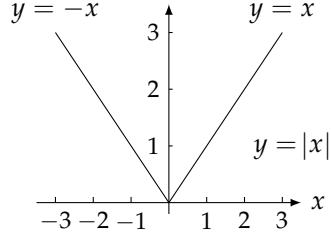
ماسوائے $x = 0$ اور $x = 2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔

مثال 2.34: $f(x) = |x|$ کی استمرار

x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = |x|$ استمراری ہے (شکل 2.64)۔ $x > 0$ کے لئے $f(x) = x$ ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔ اسی



شکل 2.65: مرکب تفاعل کی استمرار۔



شکل 2.64: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔

طرح $x < 0$ کے لئے $f(x) = -x$ ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔ آخر میں مباد پر $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$ ہے۔ □

مثال 2.35: تکنیکی تفاعل کی استمرار
اگلے باب میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استمراری ہے لہذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

□

مسئلہ 2.8: مرکبات کی استمرار
اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استمراری ہوں تب c پر $g \circ f$ استمراری ہو گا (شکل 2.65)۔

مرکب کی استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

- | | |
|--|---|
| (ا) $y = \sqrt{x}$ | مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت) |
| (ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ | مسئلہ 2.7 اور 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب) |
| (ج) $y = \frac{x \cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$ | مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی) |
| (د) $y = \left \frac{x - 2}{x^2 - 2} \right $ | مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حقیقی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب) |

□

نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔ اگر $f(c)$ غیر معین ہو لیکن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل F نقطہ $x = c$ پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو f کی نقطہ $x = c$ تک استمراری توسیع¹⁹ کہتے ہیں اور توسیع شدہ تفاعل کو وسیع تفاعل²⁰ کہتے ہیں۔ ناطق تفاعل f کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا $x = 2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

حل: اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x \neq 2$ پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل $x \neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x = 2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

یوں f کی نقطہ $x = 2$ تک توسیع تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

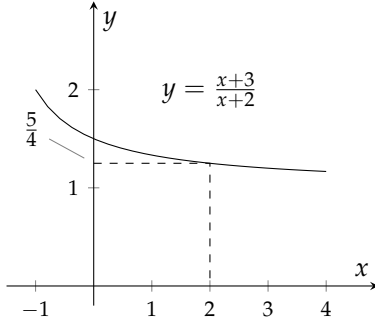
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

تفاعل f کی ترسیم شکل 2.66 میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی یہی ترسیم ہے مگر اس میں $(2, \frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

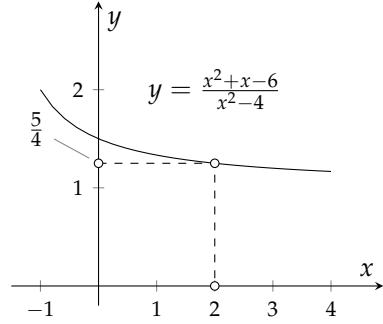
$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

□

continuous extension¹⁹
extended function²⁰



(ب)



(i)

شکل 2.66: $f(x)$ تقابل اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تقابل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ ایسا تقابل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تقابل کی قیمت برابر ہوں تب f وقفہ پر استمراری²¹ کہلائے گا۔ جو تقابل I پر استمراری ہو یہ تقابل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔ کثیر رکنی اور ناظم تقابل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تقابل

شکل 2.67 میں وقفوں پر استمراری تقابل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔

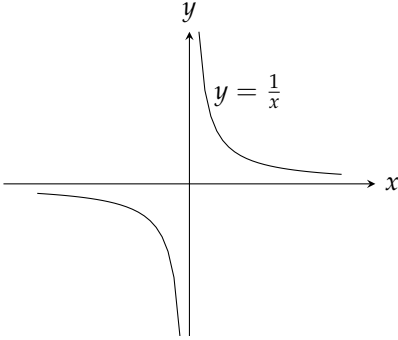
□

وقفوں پر استمراری تقابل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ ان میں ایک متوسط قیمت خاصیت²² ہے۔ اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تقابل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تقابل متوسط قیمت خاصیت رکھتا ہے۔

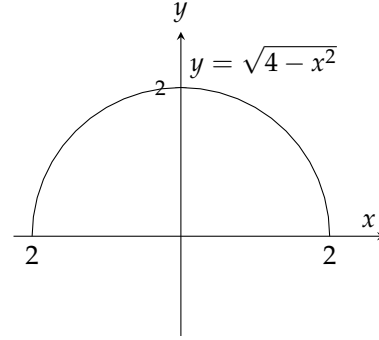
مسئلہ 2.9: مسئلہ متوسط قیمت

فرض کریں کہ تقابل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ تب اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا کہ $f(c) = y_0$ ہو (شکل 2.68)۔

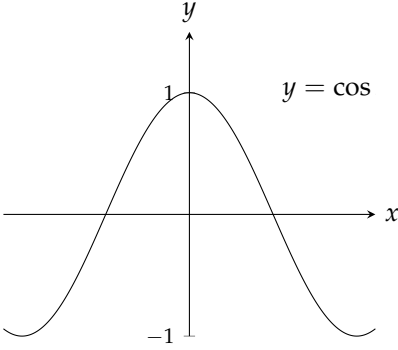
²¹continuous on interval
²²intermediate value property



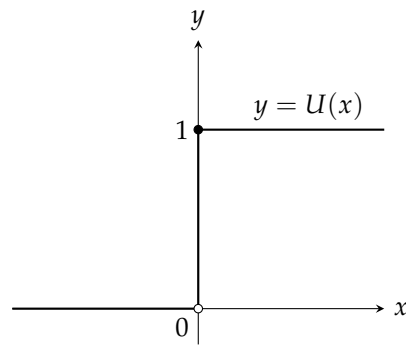
(ب) $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر استمراری



(د) $[-2, 2]$ پر استمراری

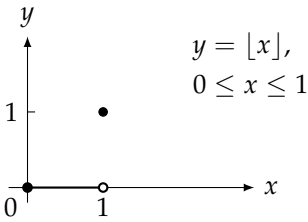


(د) $(-\infty, \infty)$ پر استمراری

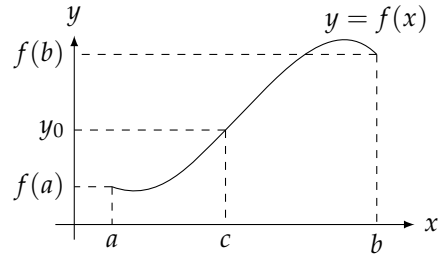


(ج) $(-\infty, 0)$ اور $[0, \infty)$ پر استمراری

شکل 2.67: وقفوں پر استمراری تقاض (مثال 2.38)



شکل 2.69: $y = [x], 0 \leq x \leq 1$ تقاض کوئی بھی قیمت $f(0) = 0$ اور $f(1) = 1$ کے تقاض قبول نہیں کرتا ہے۔



شکل 2.68: وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تقاض $f(a)$ اور $f(b)$ کے تقاض ہر قیمت رکھتا ہے

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کی استمرار ضروری ہے۔ اگر I میں صرف ایک نقطے پر بھی f غیر استمراری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔ اس کی ایک مثال شکل 2.69 میں دی گئی ہے۔

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ I پر استمراری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔ اس میں عددی صحیح زمین تفاعل $[x]$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نائی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

تلاش جذر

مساوات $f(x) = 0$ کے حل کو $f(x)$ کا صفر²³ یا جذر²⁴ کہتے ہیں۔ مسئلہ 2.9 کے تحت استمراری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت (\pm) تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں f استمراری ہے)۔ مساوات کی ترسیم x محور کو f کی جذر پر قطع کرتی ہے۔ ہم $y = f(x)$ کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ یہ کہاں x محور کو قطع کرتی ہے۔ ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت دیکھتے ہیں۔ اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔ اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک کا جذر تلاش کیا جاسکتا ہے۔ شکل 2.70 میں، قدم با قدم، اس عمل سے $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

ترسیم سے مساوات کو حل کرتے ہوئے تفاعل کے جذر حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ اس سے کم دورانیے میں جذر کو بذریعہ اعدادی تراکیب حاصل کیا جاسکتا ہے جن پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

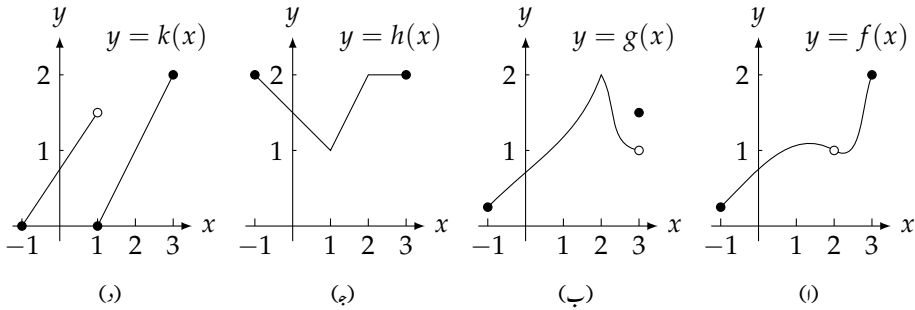
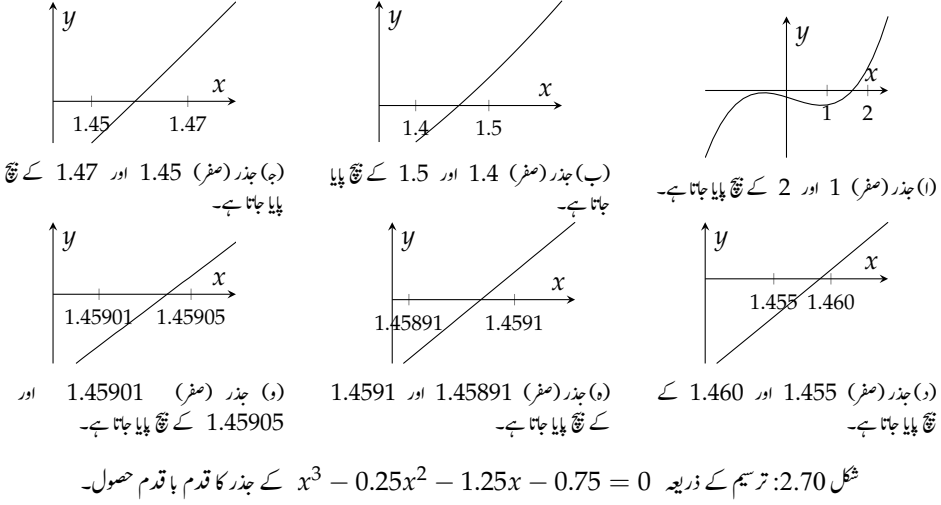
سوالات

استمرار بذریعہ ترسیم

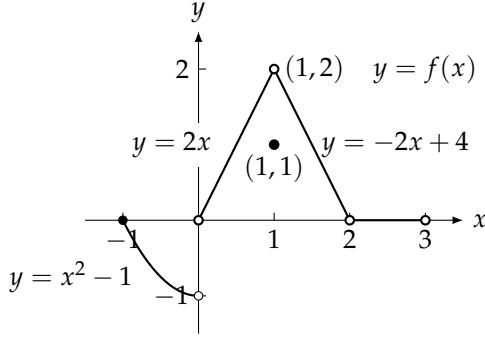
سوال 1 تا سوال 4 میں دریافت کریں کہ آیا تفاعل وقفہ $[-1, 3]$ پر استمراری ہے۔ نا ہونے کی صورت میں کہاں تفاعل غیر استمراری ہے اور ایسا کیوں ہے؟

سوال 1: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.71-ا میں دکھایا گیا ہے۔

zero²³
root²⁴



شکل 2.71: اشکال برائے سوال 1 تا سوال 4



شکل 2.72: ترسیم برائے سوال 5 تا سوال 10

سوال 2: تفاعل $y = g(x)$ جسے شکل 2.71-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3: تفاعل $y = h(x)$ جسے شکل 2.71-ج میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 4: تفاعل $y = k(x)$ جسے شکل 2.71-د میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5 تا سوال 10 درج ذیل تفاعل کے بارے میں ہیں جس کو شکل 2.72 میں ترسیم کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

سوال 5: (i) کیا $f(-1)$ موجود ہے؟

(ب) کیا $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ موجود ہے؟

(ج) کیا $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$ ہے؟

(د) کیا $x = -1$ پر $f(x)$ استمراری ہے؟

سوال 6: (i) کیا $f(x)$ موجود ہے؟

(ب) کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟

(ج) کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ہے؟

(د) کیا $x = 1$ پر f استمراری ہے؟

سوال 7: (i) کیا $x = 2$ پر f معین ہے؟

(ب) کیا $= 2$ پر f استمراری ہے؟

سوال 8: x کی کس قیمت پر f استمراری ہے؟

سوال 9: $x = 2$ پر توسیع کردہ تفاعل کو استمراری بنانے کی خاطر $f(2)$ کی کیا قیمت ہونی چاہیے؟

سوال 10: $f(1)$ کی کیا قیمت غیر استمرار کو ختم کرے گی؟

پرکھ استمرار کا استعمال

کن نقطوں پر سوال 11 اور سوال 12 میں دیے گئے تفاعل غیر استمراری ہیں۔ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم کیا جاسکتا ہے؟ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم نہیں کیا جاسکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11: حصہ 2.4 میں سوال 1 کے تفاعل۔

سوال 12: حصہ 2.4 سوال 2 میں کے تفاعل۔

سوال 13 تا سوال 28 میں کن نقطوں پر تفاعل استمراری ہیں۔

سوال 13: $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

سوال 14: $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

سوال 15: $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$

سوال 16: $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$

سوال 17: $y = |x - 1| + \sin x$

سوال 18: $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$

سوال 19: $y = \frac{\cos x}{x}$

سوال 20: $y = \frac{x+2}{\cos x}$

سوال 21: $y = \csc x$

سوال 22: $y = \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 23: $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$

سوال 24: $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

سوال 25: $y = \sqrt{2x+3}$

سوال 26: $y = \sqrt[4]{3x-1}$

سوال 27: $y = (2x-1)^{1/3}$

سوال 28: $y = (2-x)^{1/5}$

مرکب تفاعل کے حد
سوال 29 تا سوال 34 میں حد تلاش کریں۔

سوال 29: $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$

سوال 30: $\lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$

سوال 31: $\lim_{y \rightarrow 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

سوال 32: $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(\sin x^{1/3})\right)$

سوال 33: $\lim_{t \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{19-3 \sec 2t}}\right)$

سوال 34: $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3} \tan x}$

استمراری توسیع

سوال 35: $g(3)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x = 3$ پر $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 36: $h(2)$ کی تعریف یوں کریں کہ $t = 2$ پر $h(t) = \frac{t^2+3t-10}{t-2}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 37: $f(1)$ کی تعریف یوں کریں کہ $s = 1$ پر $f(s) = \frac{s^3-1}{s^2-1}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 38: $g(4)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x = 4$ پر $g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 39: a کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$ استمراری ہے؟

سوال 40: b کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$ استمراری ہے؟

استمراری توسیع - کمپیوٹر کا استعمال

سوال 41 تا سوال 44 میں تفاعل f کو ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کہ آیا مبداء پر اس کا استمراری توسیع پایا جاتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب $x = 0$ پر وسیع تفاعل کی موزوں قیمت تلاش کریں۔ اگر تفاعل کی استمراری توسیع ممکن نہ ہو، تب کیا اس کو مبداء پر دائیں یا بائیں سے استمراری بنایا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں مبداء پر وسیع تفاعل کی قیمت کیا ہوگی؟

سوال 41: $f(x) = \frac{10^x - 1}{x}$

سوال 42: $f(x) = \frac{10^{|x|} - 1}{x}$

سوال 43: $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

سوال 44: $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: ایک استمراری تفاعل کی قیمت $x = 0$ پر منفی اور $x = 1$ پر مثبت ہے۔ $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ مساوات $f(x) = 0$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟ ایک خاکہ کھینچ کر وجہ بیان کریں۔

سوال 46: مساوات $\cos x = x$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟

سوال 47: دکھائیں کہ وقفہ $[-4, 4]$ میں مساوات $x^3 - 15x + 1 = 0$ کے تین حل پائے جاتے ہیں۔

سوال 48: دکھائیں کہ کسی x پر تفاعل $F(x) = (x - a)^2(x - b)^2 + x$ کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہوگی۔

سوال 49: دکھائیں کہ c کی ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جن پر تفاعل $f(x) = x^3 - 8x + 10$ کی قیمت (i) π ؛ (ب) $-\sqrt{3}$ ؛ (ج) $5\,000\,000$ ہوں گی۔

سوال 50: سمجھائیں کہ درج ذیل جملے ایک ہی معلومات پوچھتی ہیں۔

(i) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے جذر تلاش کریں۔

(ب) اس نقطے کا x محدود تلاش کریں جہاں $y = x^3$ اور $y = 3x + 1$ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

(ج) وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جن پر $x^3 - 3x = 1$ ہو گا۔

(د) ان نقطوں کے x محدود تلاش کریں جہاں منحنی $y = x^3 - 3x$ خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔

(ه) مساوات $x^3 - 3x - 1 = 0$ کو حل کریں۔

سوال 51: ایسا تفاعل $f(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = 2$ پر جہاں اس کا قابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 2$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے۔

سوال 52: ایسا تفاعل $g(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = -1$ پر جہاں اس کا ناقابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 1$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار ناقابل ہٹاؤ ہے۔

سوال 53: تمام نقطوں پر غیر استمراری تفاعل

(i) اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہوئے، کہ حقیقی اعداد کا ہر غیر خالی وقفہ ناطق اور غیر ناطق اعداد پر مشتمل ہے، دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل ہر نقطے پر عدم استمراری ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ناطق} \\ 0 & x \text{ غیر ناطق} \end{cases}$$

(ب) کیا کسی نقطے پر f دائیں استمراری یا بائیں استمراری ہے؟

سوال 54: اگر $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ استمراری ہوں تب کیا $[0, 1]$ کے کسی نقطے پر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: اگر تفاعل $h(x) = f(h) \cdot g(x)$ نقطہ $x = 0$ پر استمراری ہو تب کیا $f(x)$ اور $g(x)$ ضرور $x = 0$ پر استمراری ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 56: ایسے تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی مثال دیں جو $x = 0$ پر استمراری ہوں لیکن ان کا مرکب تفاعل $f \circ g$ نقطہ $x = 0$ پر عدم استمراری ہو۔ کیا یہ مسئلہ 2.8 کی خلاف ورزی کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 57: کیا یہ کہنا درست ہو گا کہ جو تفاعل کسی وقفے پر کبھی صفر نہیں ہوتا ہے وہ تفاعل اس وقفے پر کبھی علامت تبدیل نہیں کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 58: کیا یہ درست ہے کہ رُبط کی پٹی کو دونوں سروں سے کھینچنے کے باوجود پٹی پر ایک نقطہ ایسا پایا جاتا ہے جو اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 59: مسئلہ مقررہ نقطہ
فرض کریں کہ وقفہ $0, 1$ میں تفاعل f استمراری ہے اور $[0, 1]$ میں ہر x کے لئے $0 \leq f(x) \leq 1$ ہے۔ دکھائیں کہ $[0, 1]$ میں ایسا نقطہ c پایا جاتا ہے جس پر $f(c) = c$ ہوگا۔ c کو f کا مقررہ نقطہ²⁵ کہتے ہیں۔

سوال 60: استمراری تفاعل کی علامت برقرار رکھنے کی خاصیت
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) پر تفاعل f معین ہے اور نقطہ c جہاں f استمراری ہے پر $f(c) \neq 0$ ہے۔ دکھائیں کہ c کے ارد گرد وقفہ $c - \delta, c + \delta$ میں f کی علامت وہی ہوگی جو c پر $f(c)$ کی ہے۔ یہ ایک غیر معمولی نتیجہ ہے۔ اگرچہ (a, b) پر f معین ہے، کسی بھی نقطے پر تفاعل کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے ماسوائے نقطہ c پر۔ اس کے ساتھ شرط $f(c) \neq 0$ ملانے سے f غیر صفر حاصل ہوتا ہے یعنی پورے وقفے پر f مثبت یا منفی ہوگا۔

سوال 61: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 سے اس حصے کا مسئلہ 2.6 کس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے۔

سوال 62: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.2 اور مسئلہ 2.3 سے موجودہ حصے کا مسئلہ 2.7 کس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے؟

سوال کا حل بذریعہ توسیم

کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کھینچ کر درج ذیل سوالات حل کریں۔

سوال 63: $x^3 - 3x - 1 = 0$

سوال 64: $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

سوال 65: $x(x - 1)^2 = 1$ ایک جذر حاصل کریں۔

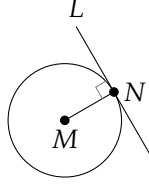
سوال 66: $x^x = 2$

سوال 67: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$

سوال 68: $x^3 - 15x + 1 = 0$ تین جذر تلاش کریں۔

سوال 69: $\cos x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

سوال 70: $2 \sin x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔



شکل 2.73: نقطہ N پر مماس اور رداس آپس میں عمودی ہیں۔

2.6 مماسی خط

حصہ 2.1 میں سیکنٹ اور مماس پر بحث کی گئی۔ اس بحث کو اس حصے میں جاری رکھتے ہیں۔ ہم سیکنٹ کی ڈھلوان کا حد تلاش کرتے ہوئے مماسی خط کا مماس حاصل کریں گے۔

منحنی کے مماس سے کیا مراد ہے؟

دائرے کی مماس کا مطلب سیدھا سادہ ہے۔ نقطہ N پر دائرہ C کے مماس سے مراد خط L ہے جو نقطہ N سے گزرتا ہے اور N پر رداس کو عمودی ہے (شکل 2.73)۔ نقطہ N پر کسی اور منحنی C کے مماس سے کیا مطلب ہے؟ دائرے کی جیومیٹری کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مماس کا مطلب درج ذیل میں سے ایک ہو سکتا ہے۔

1. N سے C کی مرکز تک خط کو عمودی خط L ،

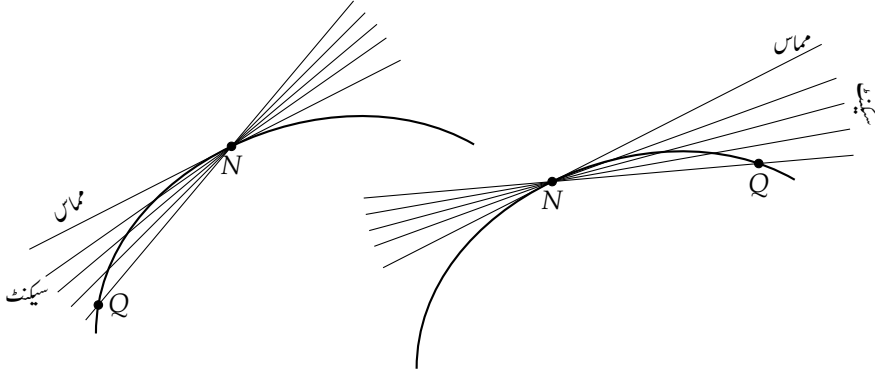
2. خط L منحنی C پر صرف ایک نقطہ، یعنی N سے گزرتا ہے،

3. خط L نقطہ N سے گزرتا ہے اور منحنی C کے ایک طرف رہتا ہے۔

اگرچہ یہ تینوں جملے دائرے کی صورت میں درست ہیں البتہ یہ ہر منحنی کے لئے بلا تضاد درست نہیں ہیں۔ عموماً منحنیات کا مرکز نہیں پایا جاتا ہے، اور نقطہ N پر جس خط کو ہم C کا مماس کہنا چاہتے ہیں وہ C کو کہیں اور یا N پر منقطع سکتا ہے۔

عمومی منحنی کا مماس متعارف کرنے کی خاطر ہمیں متحرک حکمت عملی سے کام لینا ہو گا۔ ہم نقطہ N اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے سیکنٹ پر نظر رکھتے ہوئے Q کو منحنی پر رکھتے ہوئے N کے نزدیک لاتے ہیں (شکل 2.74)۔ اس حکمت عملی میں ہم درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

1. ہم سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حساب لگاتے ہیں۔



شکل 2.74: نقطہ N کے دائیں یا بائیں جانب منحنی C پر نقطہ Q کو N کے قریب تر کرنے سے N پر C کا مماس حاصل ہو گا۔

2. منحنی پر رہتے ہوئے Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے سیکٹ کی ڈھلوان کی حد پر غور کرتے ہیں۔

3. اگر یہ حد موجود ہو تب اس کو N پر منحنی کی ڈھلوان تسلیم کرتے ہوئے اس خط کو N پر C کا مماس تسلیم کریں جس کی ڈھلوان اس حد کے برابر ہو اور جو N سے گزرتا ہو۔

مثال 2.39: نقطہ $N(2, 4)$ پر قطع مکافی $y = x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطے پر قطع مکافی کی مماس کی مساوات حاصل کریں (شکل 2.75)۔
حل: ہم $N(2, 4)$ اور $Q(2+h, (2+h)^2)$ سے سیکٹ گزار کر اس کی ڈھلوان کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$\text{سیکٹ کی ڈھلوان} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h) - (2)} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

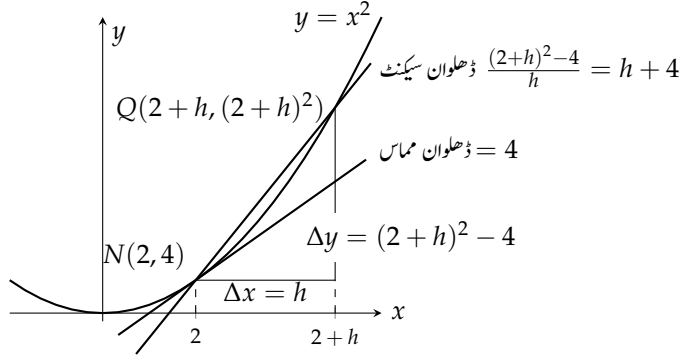
اگر $h > 0$ ہو تب N کی دائیں جانب اور اس سے اوپر نقطہ Q پایا جائے گا۔ اگر $h < 0$ ہو تب N کی بائیں جانب اور اس سے نیچے نقطہ Q پایا جائے گا۔ دونوں صورتوں میں قطع مکافی پر رہتے ہوئے جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ N کے نزدیک پہنچتا ہے ویسے ویسے h کی قیمت صفر کے نزدیک پہنچتی ہے جس سے سیکٹ کی ڈھلوان کی درج ذیل حد حاصل ہوتی ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$$

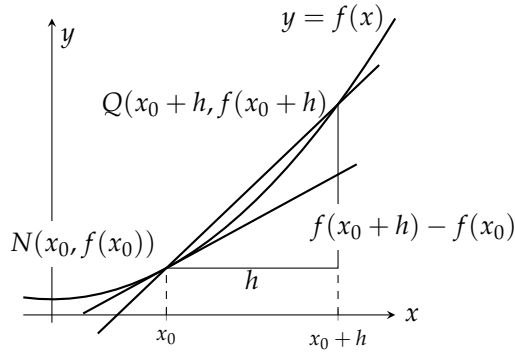
ہم N پر قطع مکافی کی ڈھلوان 4 تسلیم کرتے ہیں۔ نقطہ N پر قطع مکافی کا مماس وہ خط ہے جس کی ڈھلوان 4 ہے اور جو نقطہ $(2, 4)$ سے گزرتا ہے۔ اس مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x - 2) \\ &= 4x - 4 \end{aligned} \quad \text{نقطہ ڈھلوان مساوات}$$

□



شکل 2.75: قطع مکانی کا مماس (مثال 2.39)

شکل 2.76: مماس کی ڈھلوان $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ہو گی۔

تفاعل کی ترسیم کا مماس

نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس اسی متحرک حکمت عملی سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم N اور $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ سے گزرتا ہوا سینکٹ بناتے ہیں۔ اس کے بعد $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے اس سینکٹ کی ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہیں (شکل 2.76)۔ اگر یہ حد موجود ہو، اس کو N پر مماس کے مماس کا ڈھلوان مانا جاتا ہے اور اتنی ڈھلوان کا سیدھا خط جو N سے گزرتا ہو کو N پر مماس قبول کیا جاتا ہے۔

تعریف: نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان درج ذیل عدد کو کہتے ہیں۔

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔})$$

N پر اس ڈھلوان کے خط کو اس نقطے پر منحنی کا مماس کہتے ہیں۔

نئی تعریف پیش کرنے کے بعد اس کو جانی پہچانی صورتوں میں استعمال کرتے ہوئے متوقع جوابات حاصل کر کے یقین دہانی ہوتی ہے۔ درج ذیل مثال دکھاتا ہے کہ ڈھلوان کی موجودہ تعریف ہمیں غیر انتصابی کلیروں کی صورت میں متوقع جوابات دیتی ہے۔

مثال 2.40: ڈھلوان کی تعریف کا استعمال
دکھائیں کہ نقطہ $(x_0, mx_0 + b)$ پر خط $y = mx + b$ کا مماس یہی خط ہے۔
حل: ہم $f(x) = mx + b$ لیتے ہوئے قدم با قدم چلتے ہیں۔
پہلا قدم: $f(x_0) = h$ اور $f(x_0)$ ڈھوڑتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f(x_0) &= mx_0 + b \\ f(x_0 + h) &= m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b \end{aligned}$$

دوسرا قدم: ڈھلوان تلاش کرتے ہیں۔

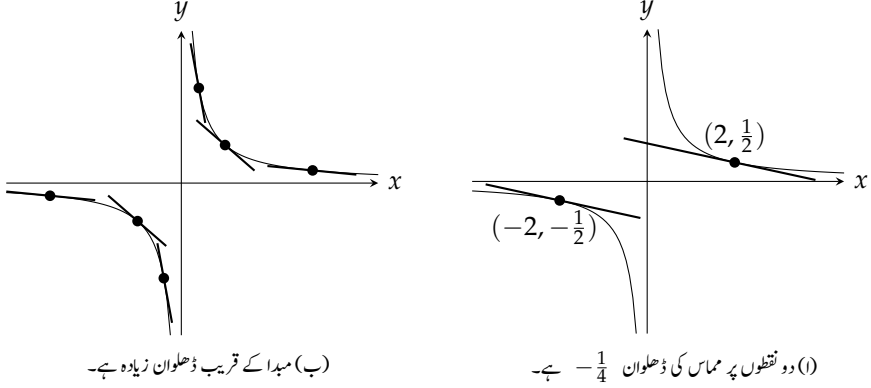
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned}$$

تیسرا قدم: نقطہ ڈھلوان مساوات استعمال کرتے ہوئے مماس کی مساوات لکھتے ہیں۔ نقطہ $x_0, mx_0 + b$ پر مماس کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} y &= (mx_0 + b) + m(x - x_0) \\ &= mx_0 + b + mx - mx_0 \\ &= mx + b \end{aligned}$$

□

مثال 2.41: (i) $x = a$ پر منحنی $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
(ب) کس نقطے پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ کے برابر ہے؟
(ج) a تبدیل کرنے سے نقطہ $a, \frac{1}{a}$ پر مماس کو کیا ہوگا؟



شکل 2.77: اشکال برائے مثال 2.41

حل: (i) یہاں $f(x) = \frac{1}{x}$ ہے اور $(a, \frac{1}{a})$ پر ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

دھیان رہے کہ ہمیں اس وقت تک $\lim_{h \rightarrow 0}$ بار بار لکھنا پڑا جب تک ہم $h = 0$ پر کرنے کے قابل نہیں ہوئے۔

(ب) نقطہ $x = a$ پر $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہے جس کو $-\frac{1}{4}$ کے برابر پر کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

اس کے حل $a = 2$ اور $a = -2$ ہیں لہذا معنی $y = \frac{1}{x}$ کا دو نقطوں یعنی $(2, \frac{1}{2})$ اور $(-2, -\frac{1}{2})$ پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے (شکل 2.77-1)۔

(ج) ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہر صورت منفی رہے گی۔ یوں $a \rightarrow 0^+$ کی صورت میں ڈھلوان $-\infty$ تک پہنچتی کی کوشش کرتی ہے اور مماس انتہائی صورت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ یہی کچھ $a \rightarrow 0^-$ کرتے ہوئے بھی نظر آتا ہے۔ جیسے جیسے مبدا سے a دور ہوتا ہے ویسے ویسے مماس افقی صورت اختیار کرتا ہے (شکل 2.77-ب)۔

□

شرح تبدیلی

درج ذیل الجبرائی فقرے کو x_0 پر f کا تفریقی حاصل تقسیم²⁶ کہتے ہیں۔ اگر h کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے تفریقی حاصل تقسیم کا حد پایا جاتا ہو، اس حد کو x_0 پر f کا تفرق²⁷ کہتے ہیں۔ اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو سینٹ کی ڈھلوان تصور کریں تب تفرق نقطہ x_0 پر منحنی اور مماس کی ڈھلوان دیتا ہے۔ اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو اوسط تبدیلی شرح تصور کریں (جیسا ہم نے حصہ 2.1 میں کیا) تب تفرق نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل کی شرح تبدیلی دیتا ہے۔ احصاء میں دو اہم ترین ریاضیاتی تصور میں سے ایک تفرق ہے جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

مثال 2.42: لمباتی رفتار (حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2) حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2 میں سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے پتھر پر غور کیا گیا۔ ہم جانتے تھے کہ پہلی t سینڈوں میں یہ $y = 4.9t^2$ میٹر فاصلہ طے کرتا ہے اور بتدریج کم دورانیہ میں اوسط رفتار سے ہم نے $t = 1$ پر اس کی لمباتی رفتار معلوم کی۔ ٹھیک $t = 1$ پر لمباتی رفتار کیا ہو گی؟ ہم $f(t) = 4.9t^2$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 1$ اور $t = 1 + h$ کے دوران اوسط رفتار

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} = \frac{4.9(2th + h^2)}{h} = 4.9(2t + h)$$

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ $t = 1$ پر پتھر کی رفتار درج ذیل ہو گی جو ہماری پہلی جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} 4.9(2 + h) = 4.9(2 + 0) = 9.8 \text{ ms}^{-1}$$

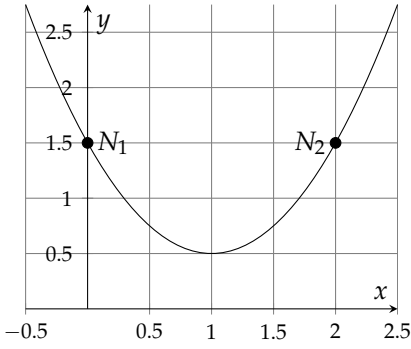
□

سوالات

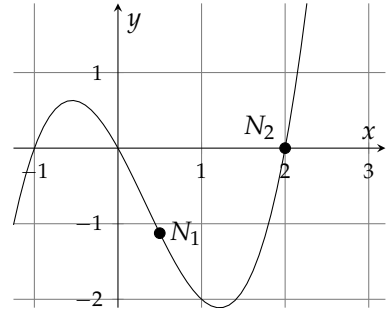
سوال 1 تا سوال 4 میں نقطہ N_1 اور N_2 پر منحنی کی ڈھلوان کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ نقطے پر فیئر یا کوئی دوسرا سیدھا کنارہ رکھ کر سینٹ کی حد سے ڈھلوان حاصل کریں۔ (ترسیم سے عموماً بالکل ٹھیک جواب حاصل نہیں ہوتا ہے لہذا آپ کے جواب میں اور دیے گئے جواب میں فرق ہو سکتا ہے۔)

سوال 1: شکل 2.78

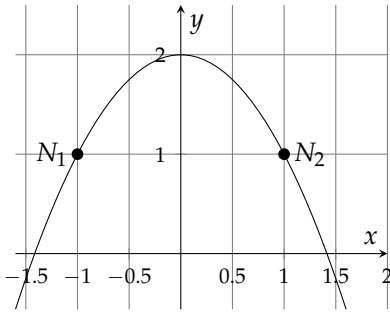
جواب: $N_1 : m = -2.25$, $N_2 : m = 6$



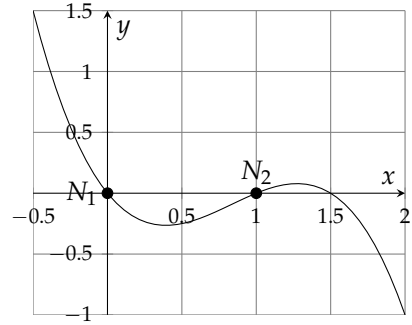
شکل 2.79: منحنی برائے سوال 2



شکل 2.78: منحنی برائے سوال 1



شکل 2.81: منحنی برائے سوال 4



شکل 2.80: منحنی برائے سوال 3

سوال 2: شکل 2.79
جواب: $N_1 : m = -2, \quad N_2 : m = 2$

سوال 3: شکل 2.80
جواب: $N_1 : m = -1.5, \quad N_2 : m = 0.5$

سوال 4: شکل 2.81
جواب: $N_1 : m = 2, \quad N_2 : m = -2$

سوال 5 تا سوال 10 میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔ تفاعل اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 5: $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$
جواب: شکل 2.82 $y = 2x + 5$

سوال 6: $y = (x - 1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

سوال 7: $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$
جواب: شکل 2.83 $y = x + 1$

سوال 8: $y = \frac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

سوال 9: $y = x^3, \quad (-2, -8)$
جواب: شکل 2.84 $y = 12x + 16$

سوال 10: $y = \frac{1}{x^3}, \quad (-2, -\frac{1}{8})$

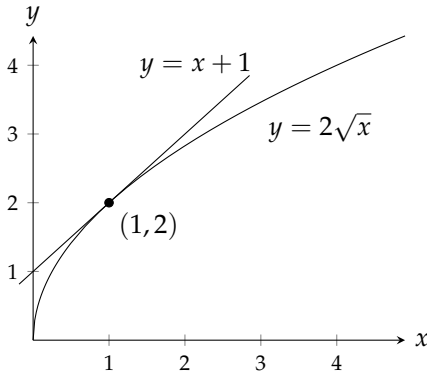
سوال 11 تا سوال 18 میں دیے نقطے پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11: $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$
جواب: $m = 4, \quad y - 5 = 4(x - 2)$

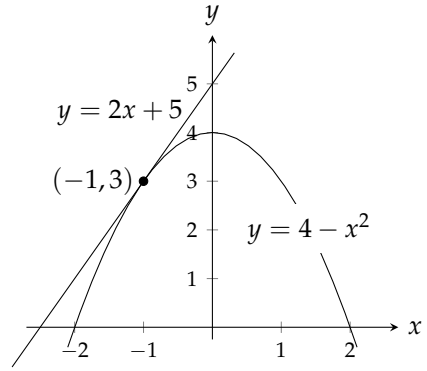
سوال 12: $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

سوال 13: $g(x) = \frac{x}{x-2}, \quad (3, 3)$
جواب: $m = -2, \quad y - 3 = -2(x - 3)$

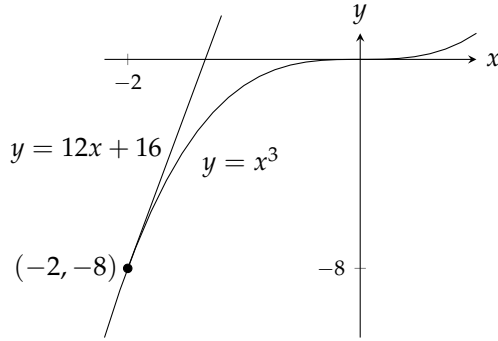
سوال 14: $g(x) = \frac{8}{x^2}, \quad (2, 2)$



شکل 2.83: ترسیم برائے سوال 7



شکل 2.82: ترسیم برائے سوال 5



شکل 2.84: ترسیم برائے سوال 9

سوال 15: $h(t) = t^3$, $(2, 8)$
جواب: $m = 12$, $y - 8 = 12(t - 2)$

سوال 16: $h(t) = t^3 + 3t$, $(1, 4)$

سوال 17: $f(x) = \sqrt{x}$, $(4, 2)$
جواب: $m = \frac{1}{4}$, $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

سوال 18: $f(x) = \sqrt{x+1}$, $(8, 3)$

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے گئے نقطے پر ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 19: $y = 5x^2$, $x = -1$
جواب: $m = -10$

سوال 20: $y = 1 - x^2$, $x = 2$

سوال 21: $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 3$
جواب: $m = -\frac{1}{4}$

سوال 22: $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x = 0$

مخصوص ڈھلوان کے مماس

سوال 23: کس نقطے پر تقابل $f(x) = x^2 + 4x - 1$ کا مماس افقی ہے؟
جواب: $(-2, -5)$

سوال 24: کس نقطے پر تقابل $g(x) = x^3 - 3x$ کا مماس افقی ہے؟

سوال 25: ان تمام خطوط کی مساوات حاصل کریں جن کی ڈھلوان -1 ہے اور جو تقابل $y = \frac{1}{x-1}$ کی مماس ہیں۔
جواب: $y = -(x+1)$, $y = -(x-3)$

سوال 26: اس سیدھے خط کی مساوات تلاش کریں جو تقابل $y = \sqrt{x}$ کا مماس اور جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے۔

شرح تبدیلی

سوال 27: ایک جسم کو ساکن حالت سے 100 m بلند عمارت سے گرایا جاتا ہے۔ t سیکنڈ بعد زمین سے اس کا فاصلہ $100 - 4.9t^2$ میٹر ہو گا۔ گرنے کے 2 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟
جواب: 19.6 m s^{-1}

سوال 28: اڑان کے t سیکنڈ بعد ایک مزائل $3t^2$ میٹر بلندی پر ہے۔ 10 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہے؟

سوال 29: ایک دائرے کے رقبہ $A = \pi r^2$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیل $r = 3$ پر کیا ہو گی؟
جواب: 6π

سوال 30: ایک گیند کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیلی $r = 2$ پر کیا ہو گی؟

مماس کے لئے پرکھ

سوال 31: کیا مہدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 32: کیا مہدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

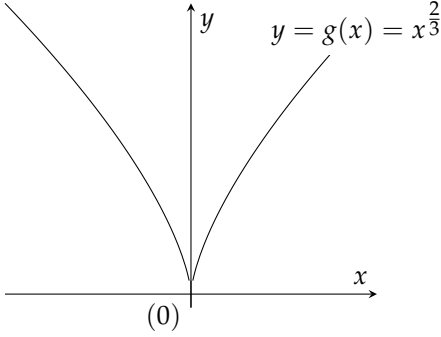
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

انتصابی مماس

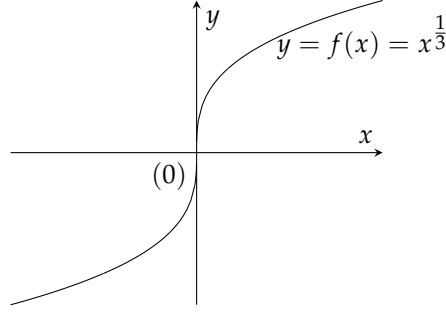
اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \infty$ یا $-\infty$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس انتصابی ہے۔

نقطہ $x = 0$ پر تفاعل $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کا مماس درج ذیل ہو گا (شکل 2.85)۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$



(ب) ممدا پر انتصابی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔



(د) ممدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے۔

شکل 2.85: انتصابی مماس

آئیں اب ممدا پر تفاعل $y = g(x) = x^{2/3}$ (شکل 2.85-ب) کا مماس حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

اب چونکہ ممدا تک دائیں سے پہنچنے سے حد ∞ جبکہ ممدا تک بائیں سے پہنچنے سے حد $-\infty$ حاصل ہوتا ہے لہذا ممدا پر درج بالا حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 33: کیا درج ذیل تفاعل کا ممدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 34: کیا درج ذیل تفاعل کا نقطہ $(0, 1)$ پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ انتصابی مماس

سوال 35 تا 44 میں دیا گیا تفاعل کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کریں۔ ترسیم کا مماس کہاں انتصابی نظر آتا ہے؟ حساب سے انتصابی مماس کی تصدیق کریں۔

سوال 35: $y = x^{\frac{2}{5}}$
جواب: (i) کہیں نہیں

سوال 36: $y = x^{\frac{4}{5}}$

سوال 37: $y = x^{\frac{1}{5}}$
جواب: (i) $x = 0$ پر

سوال 38: $y = x^{\frac{3}{5}}$

سوال 39: $y = 4x^{\frac{2}{5}} - 2x$
جواب: (i) کہیں نہیں

سوال 40: $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$

سوال 41: $y = x^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{1}{3}}$
جواب: (i) $x = 1$ پر

سوال 42: $y = x^{\frac{1}{3}} + (x - 1)^{\frac{1}{3}}$

سوال 43: $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$
جواب: (i) $x = 0$ پر

سوال 44: $y = \sqrt{|4 - x|}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 45 تا سوال 48 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $x_0 - \frac{1}{2} \leq x \leq x_0 + 3$ پر تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں۔

ب. نقطہ x_0 پر تقریبی حاصل تقسیم q کو قدم h کی صورت میں لکھیں۔

ج. $h \rightarrow 0$ کرتے ہوئے q کی حد تلاش کریں۔

د. $h = 3, 2, 1$ کے لئے سیکنٹ خطوط $y = f(x_0) + q(x - x_0)$ متعارف کرتے ہوئے (i) میں دیے گئے وقفے پر ان سیکنٹ خطوط کو تقابل f کے ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 45: $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

سوال 46: $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

سوال 47: $f(x) = x + \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 48: $f(x) = \cos x + 4 \sin 2x, \quad x_0 = \pi$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

