احصاء اور تحليلي جيوميٹري

خالد خان يوسفز. كي

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

Vii																										,	يباچ	,
ix																						4	یبادٍ	، کا د	ناب	پہلی کہ انجابی کن	يىرى	•
1																							٠	لمومات	، مع	ابتدائی	1	L
1																		خط	تى :	حقية	اور	راد	اعد	حقيقي		1.1		
15																										1.2		
32																							Ĺ	تفاعل		1.3		
54																					غلى	انمذ	م کی	ترسيم		1.4		
74																					بل	نفاء	انی اِنی	بنكوني		1.5		
95																								/		حدود ا	2	•
95																										2.1		
113															٠.		عد	قواه	کے	ئے ۔	_,	پ کر	لاثر	פנ "		2.2		
126																										2.3		
146																										2.4		
165																							ار	استمر		2.5		
184	١.																					Į	ی ز	مماسح		2.6		
199)																									تفرق	3	Ł
199)																				ت ,	تف	K,	تفاعل		3.1	-	
221																					رں	, زق	ی ہ ِ تفر	عا ر قواعد		3.2		
240																										3.3		
257																										3.4		
277																										3.5		
294																										3.6		
310) .																			ىلى	تبد	ح .	شرر	د گیر		3.7		

عـــنوان

 325 340 340 341 340 341 352 363 364 374 385 386 387 391 44 391 45 46 47 46 47 48 51 52 53 54 55 55 56 57 57 58 58 59 605 605 605 70 7		تفرق کا استعال	4
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 56 57 56 57 57<td></td><td></td><td></td>			
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 56 57 56 57 57<td>اوسط قیمت</td><td>4.2 متله</td><td></td>	اوسط قیمت	4.2 متله	
 356 368 368 368 368 368 368 368 368 368 37 40 44 45 46 47 46 47 46 47 48 47 48 47 48 47 48 51 52 54 55 55 56 57 50 50 51 52 53 54 55 54 55 55 56 57 56 57 56 57 57<td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ</td><td>4.3 مقائر</td><td></td>) انتهائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پر کھ	4.3 مقائر	
 391. پرترین بتان کرد بر بر عالب ایزان با ایزان بتان کرد بر بر عالب ایزان بتان کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر بی بی بر کرد بر بر تر تر تر قاصل کرد بر بر تر کرد بر بی بر کرد بر بر تر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر بر بر بر کرد بر بر بر بر کرد بر بر	356	3.1	
418 بیترین بنان 4.6 442 خط بخد کی اور تنو تات 47 خط بخد کی اور تر تات 47 خط بخد کی اور ریانسان نموند کئی 5 477 کسی محلت 5.1 489 کسی محلت 5.2 505 تعلق محلوات، ابتدائی قیت سخلے، اور ریانسانی نموند کئی 5.3 505 تعلی بداریج شرکیب بدل و توخیری تابعدہ کا اللہ اطلاق 5.6 516 بخدی سخای محمد 5.5 534 نموسیت ، تیب، اور اوسط قیت سخل 5.6 578 بنیادی محمد 5.7 599 نیادی محمد 5.8 605 بین بدل 5.9 605 بین بدل 6.2 605 بین بدل 6.2 605 بین بدل 6.1 625 بین بدل 6.2 626 بین بدل 6.2 627 بین بدل 6.2 628 بین باللہ مواف کی برائی ہوتے کلیت والا برصد 6.3 629 بین بین ہول ہول 6.3 630 بین بین ہول ہول 6.4 640 بین بین ہول ہول ہول ہول ہول ہول ہول ہول	اور y'' کے ساتھ ترسیم	y' = 4.4	
442 غط بدی کا اور تو تات 465 خیر توشی کلداد 477 4.8 477 5.1 477 5.1 489 5.1 5.2 تقری سادان، ابتدائی تیب سنت، اور ریاضیاتی موند شی 5.3 5.2 5.5 کلی بذریع ترایب بدل ر تنجری تاتده کلیت 5.6 کسی بدل و تنجی کلیت 5.7 بنیادی سنت 5.8 کسی کلی سیل 6.5 کسی کلی سیل 6.5 کسی کلی سیل 605 سی کلی سیل 606 کسی 625 سیل 626 کسی 627 کسی 628 کسی 629 کسی 630 کسی 640 کسی 651 کسی 662 کسی 663 کسی			
465 ریب نیوش 4.8 477 کل کا 477 خیر تطبی محملات 5.1 489 خیر تطبی محملات 5.2 5.2 تفری براید ترکیب بدل ر تیجری تامیده کا الت اطارت 5.3 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.6 کل کل 5.7 نیادی متلد 5.8 5.8 کل کل 605 کا کا 606 کا کا 607 کا کا 608 کا کا 609 کا کا 600 کا کا 600 کا کا 600 کا کا <td< td=""><td></td><td></td><td></td></td<>			
477 گل قریق الطاق الله 5.1 489 قریق ساوات، ابتدائی آیت سئط، اور ریاضیاتی موند آشی 5.2 505 تغیلی سرایید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.3 516 تغیلی شریعید تزایی بدر اید تغییری تاعده کا الت اطلاق 5.4 54 اندازه بذر اید شای گموید 5.5 561 تغیادی مسئلد 5.6 578 تغیادی مسئلد 5.7 599 تغیادی مسئلد 5.8 605 تغیادی مسئلد 5.9 605 تغیادی مسئل 5.9 605 تغیادی مسئل 6.1 625 تغیادی مسئل 6.1 629 تغیادی وزاند 6.2 640 مینان کارتج کی کات والا سرحد 6.2 648 تغیال کات کر جم کی حال ال سرح الحال المراح و المراح المراح و الحال المراح و المراح المراح المراح و المراح المراح المراح و المراح المراح و المراح المراح المراح و المراح المراح المراح و المراح			
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت التی محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 562 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 599 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمیل 5.9 605 بخیری محمیل 5.0 605 بخیری محمیل 6.1 625 بخیری محمیل 6.1 626 بخیری محمیل 6.2 627 بخیری محمیل 6.3 628 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.5 6.6 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.6 6.7 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.7 71 بادی کشور استمال اور قوت بیالی افتراد کر محمیل استمال اور قوت بیالی انتخال الحمیلی استمال 6.8 740	ب نيو ئن	4.8 ترکیہ	
477 غیر تطعی محملات 5.1 489 ترق سدادات، ابتدائی تیت سخی، اور ریاضیاتی نموند کشی 5.2 505 تعلی بدرایید ترکیب بدل. و نیجری قاعده کا الت اطلاق 5.3 516 بخیری تعلی محمید 5.4 54 بخیری قاعده کا الت الت التی محمید 5.5 561 بخیری محمید 5.6 562 بخیری محمید 5.6 578 بخیری محمید 5.7 599 بخیری محمید 5.8 605 بخیری محمیل 5.9 605 بخیری محمیل 5.0 605 بخیری محمیل 6.1 625 بخیری محمیل 6.1 626 بخیری محمیل 6.2 627 بخیری محمیل 6.3 628 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل 6.3 640 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.5 6.6 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.6 6.7 بخیری محمیل اثر اور مرکز کمیت 6.7 71 بادی کشور استمال اور قوت بیالی افتراد کر محمیل استمال اور قوت بیالی انتخال الحمیلی استمال 6.8 740	477	کیل .	5
489 ترق سادات، ابتدائی آیت سلے، اور ریاضیاتی نمونہ گئی 505 تحل بذریعہ ترکیب بدل نرنیمی تامیدہ کا الٹ اطال تل 5.3 516 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.4 534 ندازہ بذریعہ تنایس مجموعہ اور قطعی محملات 5.5 551 5.6 562 نصوعیات، رقب، اور اوسط قیت سئلہ 5.7 578 نیادی سئلہ 5.8 579 5.8 605 5.8 605 5.9 605 تعدادی محملہ 6.5 605 تعدادی محملہ 6.5 625 تعدادی وزرنقہ 6.1 626 منحنیات کے فتی رتب 627 کمیل کا استعمال 6.1 640 منحنیات والا سرحم 640 کمیل سیل کا الے کر قبم کی سائل 7.5 640 کمیل سیل کی سیل کی سیار آثر اور سرکر کی سیار آثر اور سیل سیال سیل سیل سیار آثر اور سرکر کی سیار آثر اور سیل سیال سیار آثر اور سیل سیار آثر اور سیال سیال سیار آثر اور میگر نمونی استعمال 6.8 750 مادرائی شیاری نقش اور دیگر نمونی استعمال 7.5 750 مادرائی شیاری نقش اور دیگر نمونی استعمال 7.5 750 مادرائی شیاری نقش استعمال 1.5		•	5
505 کل بذراید ترایب بدل۔ زئیری قاعدہ کا الف اطلاق 5.3 516 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.4 54 امدازہ بذراید متاباتی تجویم 5.5 55 ریمان تجویم اور قطعی محملات 5.6 576 بنیادی سئلہ 5.7 578 بنیادی سئلہ 5.8 579 بنیادی سئلہ 5.9 605 بعد الدی محمل میں بدل 6.0 605 اعدادی محمل میں بدل 6.1 625 اعدادی محمل میں بدل 6.2 626 محمل کا استعمال 6.1 640 منابع بات کے چھی رہیں 6.2 648 بدیل ہوت کیات وال سرحد 663 ہیادی محمل کی بہائیاں 664 ہیادی سیار اثر اور مرکز کہتے 665 معیاد اثر اور مرکز کہتے 666 معیاد اثر اور مرکز کہتے 667 معیاد اثر اور مرکز کہتے 668 میادی قش اور دیگر نمونی استعمال 740 اجاب کی قش اور دیگر نمونی استعمال 755 اجاب کی قش اور دیگر نمونی استعمال	ر با		
516 اندازه بذرایید تثانای مجموعها 534 5.5 5.6 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.5 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.6 5.7 5.8 5.7 5.9 5.8 5.8 5.8 5.9 5.9 5.0 605 606 605 606			
534 ريمان مجموع اور قطعي تحمالت 5.5 561 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.6 578 خصوصيات، رقب، اور اوسط قيت سمئله 5.7 579 5.8 605 5.8 605 5.9 605 6.05 605 6.05 605 6.05 605 6.05 605 6.06 626 6.1 627 6.1 640 معنیات کے قی رقب 640 معنیات کے قبلیت والا مرحد 640 معنیات کے قبلیت والا اور چھلا 648 معنیات کی اسائیل اور چھلا 650 معنیات کی اسائیل اور وی مرکز کہیت 660 معنیات کی اسائیل اور قیت سیال اور قی			
561 فصوصیات، رتب، اور اوسط قیت مسئل 5.6 578 5.7 5.7 579 5.8 5.8 605 5.9 5.9 605 5.0 5.10 625 605 6.1 626 6.2 6.1 627 6.2 6.2 640 6.2 6.3 640 6.3 6.3 663 6.4 6.5 664 6.5 6.5 665 6.6 6.6 6.6 670 6.2 6.4 687 6.3 6.4 688 6.5 6.6 689 6.6 6.7 710 6.8 6.8 731 6.8 6.9 740 6.10 6.5 755 7 10 6.10	ه بذرایعه متنائلی مجموعه	5.4 انداز	
578 بنیادی سئلد 5.7 5,10 5.8 5.8 5.8 5.8 6.0 5.8 6.0 5.9 5.9 6.0 5.9 6.0 5.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.0 6.1 6.2 6.2 6.2 6.1 6.1 6.2 6.3	ی مجموعے اور قطعی تکملات	5.5 ريمار	
599 قطع کمل میں برل 5.8 605 5.9 605 5.9 605 5.10 625 5.10 625 6.1 629 6.1 640 7 6.2 6.2 6.3 6.2 6.4 6.3 6.5 6.4 6.6 6.5 6.6 6.9 6.7 6.7 70 6.8 71 6.8 731 6.9 740 6.10 755 6.10			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و			
605 اعدادی گلل 5.9 605 تاعدہ و و و زفتہ 5.10 625 تاعدہ و و و زفتہ 6.1 626 مخدیات کے ختی رقبی ہوئے کلیات والا سرحد 6.1 629 منایاں کاٹ کر تیم کی طاش 640 شایل کاٹ کر تیم کی طاش 642 6.2 643 المحافظ اللہ ہوئے کی کی طاش 663 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں 664 معند الرا و در کر کہتے ہے۔ 665 معید الرا و در کر کہتے 667 المحافظ اللہ ہوئے ہوئے کی لہائیاں 668 المحافظ اللہ ہوئے کی لہائیاں اور قوت بیال اور قوت بیال اور قوت بیال ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت ور قوت و	^ت کمل میں بدل	5.8 قطعی	
 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 5.10 تاعدہ ذوزنقہ 625 تاعدہ ذوزنقہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 منحنیات کے ﷺ رقبہ 6.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 منیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 اجمام طواف کے جم ہے قرص اور چھلا 6.4 منتوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.6 میار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 میار اثر اور مرکز کمیت 6.9 وسطانی مرکز 6.7 میار اور قوت سیال اور قوت سیال 6.10 میادرائی تفاعل 			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اتا والا سرحد 6.0 ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 کلیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 گیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.4 ہوائے کے جم ہے قرص اور چھلا 6.5 محفیات کی لمبائیاں 6.6 محفیات کی لمبائیاں 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 کام 731 دیار کی قش اور وقیت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور وقیر ستعال 740 ماورائی نقاعل			
625 متخدیات کے نی رقبہ 6.1 629 متخدیات کے اتا والا سرحد 6.0 ہوتے کلیات والا سرحد 6.2 کلیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.3 گیاں کاٹ کر جم کی تلاش 6.4 ہوائے کے جم ہے قرص اور چھلا 6.5 محفیات کی لمبائیاں 6.6 محفیات کی لمبائیاں 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.8 کام 731 دیار کی قش اور وقیت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور قوت سیال اور وقیر ستعال 740 ماورائی نقاعل		کا ب	_
629 تدريل ہوتے کليات والا سرحد 640 6.2 640 6.2 6.3 6.4 6.4 6.5 6.5 6.6 6.6 6.6 6.7 6.6 6.8 6.7 711 6.8 731 6.8 740 6.0 755 6.0	0_0		6
640 گیاں کاٹ کر قجم کی طاش 648 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 اجمام طواف کے قجم۔ قرص اور چھلا 65 6.4 676 شوی متحدیات کی لمبائیاں 687 6.6 689 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 67 6.71 711 0.71 68 6.71 716 وسطانی مرکز 6.8 مارائی نقاعل اور قیر نمونی استعال 740 مادرائی نقاعل			
648 اجمام طواف کے تجم ۔ قرص اور چھلا 6.3 663 شکلی چھلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.9 699 6.7 6.7 711 6.7 7 688 7.1 6.8 731 6.8 7 740 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 755 ماورائی نقاعل 7	. 6 تبديل ہوتے قليات والا سرحد	1.1	
663 بکی چیلے 6.4 676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 6.5 687 6.6 6.6 699 6.7 6.7 711 6.7 7 711 6.7 7 711 6.8 7 710 6.8 7 731 10 6.0 740 6.10 6.10 755 10 6.10 7) کاٹ کر بم کی تلاش	6.2 تليار	
676 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 687 6.5 688 6.6 699 6.7 70 معیاد اثر اور مرکز کمیت 6.7 6.7.1 70 6.8 731 8 740 6.10 755 ماورائی تفاعل	•		
687 شطح طواف کا رقبہ 699 6.7 711 6.7 711 6.7.1 716 9 6.8 731 700 6.10 701 6.10 702 6.10 703 6.10 704 6.10 705 6.10 706 6.10 707 6.10	663	6.4 نککی	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	کی منحنیات کی لمبائیاں	6.5 مىتو	
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر اور مرکز کمیت 6.7.1 معیار اثر الله 6.8 کام 6.8 کام 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.9 فشار سیال اور قوت سیال 6.10 نیمادی نقش اور دیگر نمونی استعال 6.10 کم اورائی نقاعل 7 ماورائی نقاعل 7	طواف کار قبر	, E 6.6	
711			
716			
731			
740			
	755	، . ک جیما	7
			/

عـــنوان

قدرتی لوگار تھم	7.2	
قوت نمائی تفاعل	7.3	
807 $\log_a x$ let a^x	7.4	
	7.5	
قاعده گھوپیٹال کی میں میں میں میں میں ہوتی ہوتی ہوتی ہے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔	7.6	
اضافی شرح نمو	7.7	
7.7.1 ترقیمی اور شانکی علاش		
الث تكونياتى تفاعل	7.8	
الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	7.9	
ہذالولی تفاعل	7.10	
يك رتبي تفرقی مساوات	7.11	
يوگر كى اعداد كى تركيب؛ ميدان ڈھلوان	7.12	
المريق 43	ا تکمل کے	8
ر تمکن کے بنیادی کلیات	8.1	
تكمل بالحصص		
964	0.2	
974	8.3	
كونياتى بدلُ	8.4	
حبدول کمل اور کمپیوٹر	8.5	
	8.6	
, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	0.0	
ىلىل 1043	! لا مت ناہی ^{تن}	9
اعداد کی ترتیب کی حد	9.1	
ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	9.2	
لامتناي تسلسل	9.3	
غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پر کھ	9.4	
یر غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پر کھ	9.5	
یر منفی اجزاء کے شکسل کا تنابی اور جذری پر کھ	9.6	
بیر کی ابراء کے سطح ما بی اور جدری چرھی ۔		
بدليا مشكل الشكل اور مشروط الرتفازي	9.7 9.8	
	9.8	
پیر اور مقلان مسلس کا از تکاز؛ خلل کے اندازے	9.9 9.10	
یر من کار نظر: کس کے انداز کے	9.10	
طاق عن کے استعمال	9.11	
ھے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد	ا مخروطی ج	0
ے میں مدیر کا ہوتے ہی گئی۔ مخروطی چھے اور دو قدری مساواتیں	10.1	•
ر می تعداد می از در معنون کا جماعت بندی	10.2	

1246.																															
1261.												Ĺ	صول	D 6	پ	رور	وم	معلو	رار	مقد	2	ت ۔	نىيان	منح	وی'	مسته	10	.4			
1277.																		إت	تحنب	م: ا	علوم	ر ما	غدار	ر م	اء او	احصا	10	.5			
1291.																								رو) می	قطبي	10	.6			
1304 .																	•				يم	"	میں	رو !) می	قطبح	10	.7			
1311																										Ĺ	په اول	ضميم		ı	
1313																										ſ	رپه دوم	ضميم	٠.	-	

ديباجيه

ہے کتاب اس امید سے ککھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئر کی پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس ست میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی ریم کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry George B. Thomas, Jr Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- $\bullet \ \, \rm http:/\!/www.nlpd.gov.pk/lughat/$

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برتی پیتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

 $https:/\!/www.github.com/khalidyousafzai$

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان يوسفر کی

5 جون <u>2019</u>

میری پہلی کتاب کادیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلی تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلی تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلٰی تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں مخقیق کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں یائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر الیا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں گی۔

میں برسول تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ پھے کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں بیہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعال ہونے والے بھٹیکی الفاظ ہی استعال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الا توامی نظام اکائی استعال کی گئے ہے۔ ہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائح ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اس مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

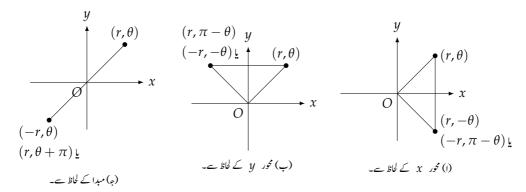
امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعال کی جائے گی۔اردو زبان میں برتی انجنیئر نگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔ اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے بی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکر یہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں بہال کامسیٹ یونیور سٹی اور ہائر ایجو کیشن کمیشن کا شکرید ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوگیں۔

خالد خان يوسفر كَي

2011 كتوبر _2011



شکل 10.103: تشاکلی کے تین پر کھ۔

10.7 قطبی محدد میں ترسیم

اس حصہ میں مساوات کو قطبی محدد میں ترسیم کرنے کے تراکیب پر غور کیا جائے گا۔

تشاكلي

قطبی محدد میں تشاکلی کا معیاری پر کھ شکل 10.103 میں و کھایا گیا ہے۔

قطبی ترسیمات کے پرکھ تشاکلی

- ا. کور $x \ge$ کاظ سے تفاکل: اگر نقطہ (r, θ) تر سیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(r, -\theta)$ یا $(r, -\theta)$ بھی تر سیم پر پایا جائے گا دائیل 10.103 -ا)۔
- ج. مبدا کے کاظ سے تفاکلی: اگر نقطہ (r, θ) تر تیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(-r, \theta)$ یا $(-r, \theta)$ کبی تر تیم پر پایا جائے گا (شکل ج. مبدا کے کاظ سے تفاکلی: اگر نقطہ (r, θ) تر تیم پر پایا جائے گا (شکل ح. مبدا کے کاظ سے تفاکلی: مبدا کے کاش سے کاش سے کاش سے تفاکلی: مبدا کے کاش سے کاش سے کاش سے کا

ڈ *ھ*لوان

قطی منحنی f=f(heta) کی ترسیم کو درج ذیل مقدار معلوم $r'=rac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d} heta}$ ہنا کہ r=f(heta) ہندار معلوم منحنی رہے کے خطوان مقدار معلوم ہندار معلوم میاوات کی ترسیم فرض کریں۔

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$
, $y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$

 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}
eq 0$ اگر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ کا قابل تفرق تفاعل ہوت $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ کا قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور جب $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ہوت ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\sin\theta)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\cos\theta)} \\ &= \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} \end{split}$$

منحنی $r = f(\theta)$ کی ڈھلوان بجال $r = f(\theta)$ پر $r = f(\theta)$ ہونا ضروری ہے۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$

اگر مبدا پر منحنی r=f(heta) کا زاویی $heta= heta_0$ ہو تب $f(heta_0)=0$ ہو گا اور مساوات 10.36 سے درج زیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

اگر مبدا پر $f(\theta)$ ہوت ہوئے ہم کہتے ہے اگر مبدا پر منحنی کی ڈھلوان " θ_0 ہوگ۔ مبدا پر ڈھلوان کی بات کرتے ہوئے ہم کہتے ہیں " $(0,\theta)$ پر ڈھلوان" ناکہ "مبدا پر ڈھلوان" کیونکہ قطبی منحنی مبدا سے کئی بار گزر سکتی ہے اور θ کی مختلف قیمتوں کے لئے یہاں ڈھلوان مختلف ہوگی۔

مثال 10.32: قلب نما $r=1-\cos\theta$ منحنی $r=1-\cos\theta$

عل: درج ذیل کی بنا ہی منحیٰ محور x کے لحاظ سے تشاکل ہے۔

یہ منحنی مبدا ہے $\tan(0)=0$ وطلوان پر نگلتی ہے اور مبدا پر $\tan(2\pi)=0$ وطلوان پر پہنچتی ہے۔

ہم heta=0 تا au=0 کی مختلف قیمتوں کے لئے au

معلوم کر کے ان نقطوں کو ترسیم کرتے ہیں جس کا مماس مبدا پر افقی ہو گا۔ محور x میں اس کا مکس لیتے ہوئے ہم ترسیم مکمل کرتے ہیں (شکل 10.104)۔ شکل 10.104 میں تیر کا نشان بڑھتی θ کے رخ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ اس منحنی کی شکل قلب کی مانند ہے الہٰذا اس منحنی کو قلب نما اشکال کے کیم 0 استعمال کئے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ قلب نما اشکال کے کیم 0 قلب نما ہوتی ہے۔ کئی ریڈ پر اینٹینا کی شعاع بھی قلب نما ہوتی ہے۔

 $r^2 = 4\cos\theta$ ترسیم کریں۔ $r^2 = 4\cos\theta$

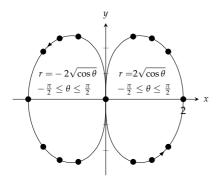
صل: مساوات $r^2=\cos\theta$ کے لئے ضروری ہے کہ $0 \leq \cos\theta$ ہو المذا پورا ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم θ کو وقفہ $\frac{\pi}{2}$ میں رکھتے ہیں۔ ورجی ذیل کی بنا ہیہ منحنی محور x کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

$$\vec{r} : (r, \theta) \implies r^2 = 4\cos\theta$$

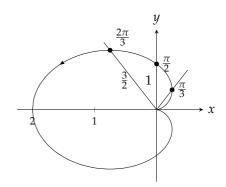
$$\implies r^2 = 4\cos(-\theta)$$

$$\implies \vec{r} : (r, -\theta) \implies \vec{r} : (r, -\theta)$$

 ${\rm cam}^{38}$



شكل 10.105: ترسيم برائے (مثال 10.33)



شكل 10.104: قلب نما (مثال 10.32)

یہ ترسیم مبدا کے لحاظ سے بھی تشاکل ہے۔

مذکورہ بالا دو تشاکل کو ملا کر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور y کے لحاظ سے بھی تشاکل ہو گا۔

یہ ترقیم $\theta=-\frac{\pi}{2}$ اور $\theta=\frac{\pi}{2}$ کے لئے مبداے گزرتی ہے۔ چونکہ ان زاویوں پر $\theta=-\frac{\pi}{2}$ کی قیت لا تنابی ہے لہٰذا مبدا پر ترقیم کا ممال انصابی ہو گا۔ وقعہ $\theta=-\frac{\pi}{2}$ میں ہر $\theta=-\frac{\pi}{2}$ میں ہر ویا ہے۔

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$$

ہم اس وقفہ میں مختلف نقطے

معلوم کر کر انہیں ترسیم کر کے ہموار منحیٰ سے آپس میں جوڑتے ہیں۔ مماس اور تشاکلی کی معلومات استعال کرتے ہوئے کمل منحیٰ عاصل کی جاتی ہے (شکل 10.105)۔

تیزی سے ترسیم کا حصول

قطبی مساوات $r=f(\theta)$ کو ترسیم کرنے کے لئے کہ ہم $r=f(\theta)$ کی قینوں کا جدول بنا کر ان نقطوں کو ترسیم کر کے بڑھتے θ رخ انہیں ہموار لکیر سے ملاتے ہیں۔ اگر ہمارے پاس اسنے زیادہ نقطے ہوں کہ قطبی ترسیم کا ہر گھیرا اور جھاو صاف نظر آتا ہو تب یوں ترسیم کرنا ٹھیک ہے۔ درج ذیل اقدام ترسیم کی ایک دوسری ترکیب بیان کرتے ہیں جو نسبتاً آسان اور تیز ثابت ہوتا ہے۔

ا. پہلے کار تیمی r heta مستوی میں $r = f(\theta)$ ترسیم کریں (لیتن θ کی قیمتوں کو افقی اور مطابقتی r کی قیمتوں کو انتصابی محور پر رکھیں۔)

ب. اب کار تیسی ترسیم کو بطور جدول اور رہبر لیتے ہوئے قطبی ترسیم حاصل کریں۔

صرف نقطے ترسیم کرنے سے کار تیمی ترسیم اس لئے بہتر ہے کہ کار تیمی ترسیم سے جلد دیکھا جا سکتا ہے کہاں قیمتیں مثبت، منفی یا غیر موجود $r=1+\cos(\frac{\theta}{2})$ ہوتی ہیں۔ اس کے علاوہ r کا بڑھنا اور گھٹنا بھی واضح ہوتا ہے۔ ہم $r=1+\cos(\frac{\theta}{2})$ اور $r=1+\cos(\frac{\theta}{2})$ کو مثال بنا کر س ترکیب کو دیکھتے ہیں۔

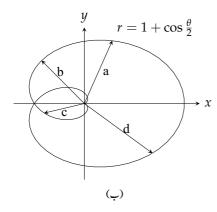
مثال 10.34: درج ذیل منحنی ترسیم کریں۔

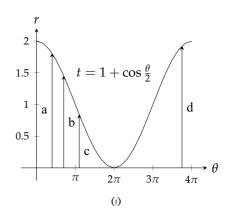
 $r = 1 + \cos \frac{\theta}{2}$

r عل: ہم پہلے r بالقابل θ کو کار تیمی $r\theta$ مستوی میں ترسیم کرتے ہیں۔ چونکہ کوسائن کا دوری عرصہ r ہم پہلے r بالقابل θ کا وقفہ θ تا r کیس گے۔کار تیمی مستوی پر محور θ سے ترسیم تک کیروں کی لمبائی (شکل 10.106-۱) قطبی ترسیم کا ردان r ویتی ہیں (شکل 10.106-ب)۔

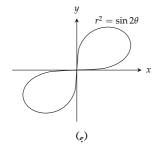
 $r^2 = \sin 2\theta$ ترسیم کریں۔ $r^2 = \sin 2\theta$

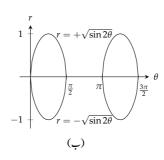
 r^2 علی ہے جس کی تجائے r^2 بالقابل θ کو کار تیبی $r^2\theta$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 10.107-۱) جہاں r^2 کو متغیر تصور کیا گیا ہے جس کی قیت ثبت کے ساتھ ساتھ متفی بھی ہو گئی ہے۔ اس کے بعد ہم $r = \pm \sqrt{\sin 2\theta}$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل 10.107-۱ کے نقطہ دار جسے کا جذر نہیں لیا جا سکتا ہے المذا شکل 10.107-ب میں یہ جسے خالی رہتے ہیں جبکہ جذر کی بنا باتی جسے کہ شبت اور منفی جسے پائے جاتے ہیں۔ آخر میں ہم قطبی ترسیم حاصل کرتے ہیں۔ کار تمہمی ترسیم (شکل 10.107-ب) دو بار قطبی ترسیم (شکل 10.107-ج) کو ڈھانیتا دیتا ہے۔ ہم کمی ایک گھیرا کو، یا دونوں گھیروں کے بالائی نصف یا دونوں کے گھیروں کے نخیف استعال کر سکتے تھے۔ البتہ دو بار ڈھانیخ سے کوئی نقصان نہیں ہوتا ہے اور ہم تفاعل کے رویہ کو بہتر سمجھ پاتے ہیں۔ r

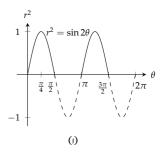




شكل 10.106: ترسيمات برائے مثال 10.34







شکل 10.107: ترسیم برائے مثال 10.35

قطبی قطب کے نقاط تقاطع کی تلاش

قطبی ترسیم میں ایک نقط کو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے للذا یہ فیصلہ کرنے کے لئے خصوصی دھیان کرنا ہو گا کہ آیا کسی قطبی مساوات کی ترسیم پر ایک نقط پایا جاتا ہے۔ ای طرح قطبی ترسیمات کے نقاط نقاطع معلوم کرتے ہوئے بھی دھیان رکھنا ضروری ہے۔ عین ممکن ہے کہ نقطہ نقاطع ایک ترسیم کو جن قطبی محدد پر مطمئن کرتا ہو، وہ ان قطبی محدد سے مختلف ہوں جن پر یہی نقطہ نقاطع دوسری قطبی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے تمام نقاط نقاطع دریافت ہوں۔ تمام نقاط نقاطع صرف مساوات ترسیم کرتے معلوم کے جا سکتے ہیں۔

ضمیمه ا ضمیمه اول

ضمیمه به و وم