

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk



# عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
278	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
311	دیگر شرح تبدیلی	3.7

327	4	تفرق کا استعمال
327	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک درجی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
364	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
371	۱	ضمیمہ دوم

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018



# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



# باب 1

## ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جاسکتا ہے۔

### 1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

#### حقیقی اعداد اور حقیقی خط

احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔ حقیقی اعداد<sup>1</sup> وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$-\frac{3}{4} = -0.75000 \dots$$

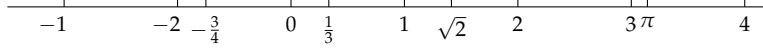
$$\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو کثیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس کثیر کو حقیقی خط<sup>2</sup> کہتے ہیں۔

real numbers<sup>1</sup>  
real line<sup>2</sup>



$\mathbb{R}$  کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

### حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جاسکتے ہیں: الجبرائی خواص، خواص درجہ، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جاسکتے ہیں۔ آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

### قواعد برائے عدم مساوات

اگر  $a$ ،  $b$  اور  $c$  حقیقی اعداد ہوں، تب:

$$1. a + c < b + c \iff a < b$$

$$2. a - c < b - c \iff a < b$$

$$3. ac < bc \iff a < b \text{ اور } c > 0$$

$$4. -b < -a \iff a < b \text{ خصوصی صورت: } bc < ac \iff a < b \text{ اور } c < 0$$

$$5. \frac{1}{a} > 0 \iff a > 0$$

$$6. \text{ اگر } a \text{ اور } b \text{ دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب } a < b \iff \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

درج بالا میں  $a < b \iff a + c < b + c$  کہتا ہے کہ اگر  $a$  کی قیمت  $b$  کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $a + c$  کی قیمت  $b + c$  کی قیمت سے کم ہوگی۔ دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دار و مدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔ کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ درجہ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

$\mathbb{R}$  کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی سلسلوں<sup>3</sup> کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. قدرتی اعداد<sup>4</sup>، یعنی 1، 2، 3، 4، ...

2. عدد صحیح، یعنی 0،  $\pm 1$ ،  $\pm 2$ ،  $\pm 3$ ، ...

3. ناطق اعداد<sup>5</sup>، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر  $\frac{m}{n}$  کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں  $m$  اور  $n$  عددی صحیح ہیں اور  $n$  غیر صفر  $n \neq 0$  ہے۔ اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{200}{13}, 57 = \frac{57}{1}$$

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔  
(الف) مختتم (جو لامتناہی صفر پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000 \dots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909 \dots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور خواص درجہ رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔ یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سراخ" پایا جاتا ہے جہاں  $\sqrt{2}$  کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں غیر ناطق اعداد<sup>6</sup> کہلاتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نامختتم اور نامی دہراتی صورت ملتی ہے۔ ناطق اعداد کی مثالیں  $\pi$ ،  $\sqrt{2}$  اور  $\log_{10} 3$  ہیں۔

sets<sup>3</sup>  
natural numbers<sup>4</sup>  
rational numbers<sup>5</sup>  
irrational numbers<sup>6</sup>

## وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو اعداد کے درمیان تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں وقفہ<sup>7</sup> کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر تمام حقیقی اعداد  $x$  کا سلسلہ جہاں  $x > 4$  ہو وقفہ ہے۔ اسی طرح تمام  $x$  کا سلسلہ جہاں  $-4 \leq x \leq 8$  ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہذا  $-1$  اور  $1$  کے درمیان تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریکی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔ خطی قطع متناہی وقفہ<sup>8</sup> جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط لامتناہی وقفہ<sup>9</sup> کہلاتے ہیں۔

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ بند<sup>10</sup> کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ نصف کھلا<sup>11</sup> کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ کھلا<sup>12</sup> کہلاتا ہے۔ وقفے کے سروں کو سرحدی نقطے<sup>13</sup> بھی کہتے ہیں۔ یہ وقفہ کی سرحد<sup>14</sup> ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو اندرونی نقطے<sup>15</sup> کہتے ہیں۔ تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی اندرون<sup>16</sup> کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسموں کو جدول 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔

## عدم مساوات کا حل

$x$  پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

مثال 1.1:

$$\frac{2}{x-1} \geq 4 \quad (3) \quad -\frac{x}{3} < x-1 \quad (2) \quad 2x-4 < x+1 \quad (1)$$

حل:

- interval<sup>7</sup>
- finite interval<sup>8</sup>
- infinite interval<sup>9</sup>
- closed<sup>10</sup>
- half-open<sup>11</sup>
- open<sup>12</sup>
- boundary points<sup>13</sup>
- boundary<sup>14</sup>
- interior points<sup>15</sup>
- interior<sup>16</sup>

## جدول 1.1: وقفوں کی تسمیہ

ترسیم	سلسلہ	علامت	متناہی
	$\{x   a < x < b\}$	$(a, b)$	
	$\{x   a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
	$\{x   a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
	$\{x   a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
	$\{x   x > a\}$	$(a, \infty)$	لا متناہی
	$\{x   x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
	$\{x   x < b\}$	$(-\infty, b)$	
	$\{x   x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

(1)

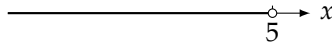
$$2x - 4 < x + 1$$

$$2x < x + 5$$

$$x < 5$$

دونوں ہاتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ سے x منفی کریں

حل سلسلہ وقفہ  $(-\infty, 5)$  ہے۔

(2)

$$-\frac{x}{3} < x - 1$$

$$-x < 3x - 3$$

$$0 < 4x - 3$$

$$3 < 4x$$

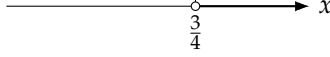
$$\frac{3}{4} < x$$

دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ x جمع کریں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں



وقفہ  $(\frac{3}{4}, \infty)$  حل سلسلہ ہے۔

(3) عدم مساوات  $\frac{2}{x-1} \geq 4$  صرف  $x > 1$  کی صورت میں درست ہو گا چونکہ  $x < 1$  کی صورت میں بائیں ہاتھ منفی ہو گا اور  $x = 1$  پر بائیں ہاتھ غیر متعین ہے۔ عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو  $x - 1$  سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

$$2 \geq 4x - 4$$

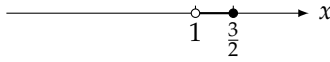
$$6 \geq 4x$$

$$\frac{3}{2} \geq x$$

دونوں ہاتھ کو  $x - 1$  سے ضرب دیں

دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ  $(1, \frac{3}{2}]$  ہے۔

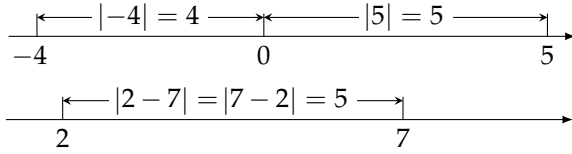
□

## مطلق قیمت

عدد  $x$  کی مطلق قیمت<sup>17</sup> جس کو  $|x|$  سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2:  $|0.88| = 0.88$ ,  $|0| = 0$ ,  $|-13| = -(-13) = 13$ ,  $|-|a|| = |a|$  □



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی  $|x| \geq 0$  ہوگی اور صرف  $x = 0$  کی صورت میں  $|x| = 0$  ہوگا۔ چونکہ  $a$  کی غیر منفی جذر کو  $\sqrt{a}$  سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا  $|x|$  کی متبادل تعریف درج ذیل لی جاسکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

آپ  $\sqrt{a^2} = |a|$  لکھ سکتے ہیں جبکہ  $\sqrt{a^2} = a$  صرف مثبت  $a$  کی صورت میں درست ہوگا۔

جیومیٹریکی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے  $x$  تک فاصلے کو  $|x|$  ظاہر کرتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$|x - y| \text{ } x \text{ اور } y \text{ کے بیچ فاصلہ}$$

ہوگا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص درج ذیل ہیں۔

$$1. \quad |-a| = |a| \quad \text{کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔}$$

$$2. \quad |ab| = |a||b| \quad \text{حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہوگا۔}$$

$$3. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہوگا۔}$$

$$4. \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہوگی۔ اس کو تکنیکی عدم مساوات کہتے ہیں۔}$$

اگر  $a$  اور  $b$  کی علامتیں مختلف ہوں تب  $|a + b|$  کی قیمت  $|a| + |b|$  کی قیمت سے کم ہوگی۔ اس کے علاوہ ہر صورت  $|a + b| = |a| + |b|$  ہوگا۔

مثال 1.3:

$$|-2 + 6| = |4| = 4 < |-2| + |6| = 8$$

$$|2 + 6| = |8| = |2| + |6|$$

$$|-2 - 6| = |-8| = 8 = |-2| + |-6|$$

□

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات  $|2x - 1| = 11$  کو حل کریں۔  
 حل: اس مساوات کے تحت  $2x - 1 = \pm 11$  ہو سکتا ہے لہذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 = 11 & 2x - 1 = -11 \\ 2x = 12 & 2x = -10 \\ x = 6 & x = -5 \end{array}$$

□

یوں  $|2x - 1| = 11$  کا درکار حل  $x = 6$  اور  $x = -5$  ہے۔

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات  $|a| < D$  کہتی ہے کہ مبدا 0 سے  $a$  تک فاصلہ  $D$  سے کم ہے۔ یوں  $D$  اور  $-D$  کے بیچ  $a$  پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے اگر  $D$  کوئی مثبت عدد ہو، تب

$$(1.1) \quad |a| < D \iff -D < a < D$$

$$(1.2) \quad |a| \leq D \iff -D \leq a \leq D$$

مثال 1.5: عدم مساوات  $|x - 3| < 7$  کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔  
 حل:

$$|x - 3| < 7$$

$$-7 < x - 3 < 7$$

$$-7 + 3 < x < 7 + 3$$

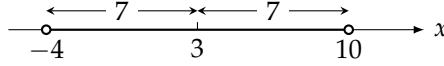
$$-4 < x < 10$$

مساوات 1.1

دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں

حل سلسلہ کھلا وقفہ  $(-4, 10)$  ہے۔





□

مثال 1.6: عدم مساوات  $\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1$  کو حل کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned} \left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1 &\iff -1 < 3 - \frac{2}{x} < 1 && \text{مساوات 1.1} \\ -4 < -\frac{2}{x} < -2 &&& \text{3 منفی کریں} \\ 2 > \frac{1}{x} > 1 &&& -\frac{1}{2} \text{ سے ضرب دیں} \\ \frac{1}{2} < x < 1 &&& \text{معکوس لیں} \end{aligned}$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔ آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔ اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب معکوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہو گی جب  $\frac{1}{2} < x < 1$  ہو۔ حل سلسلہ کھلا وقفہ  $(\frac{1}{2}, 1)$  ہے۔ □

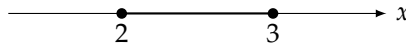
مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

$$(الف) \quad |2x - 5| \leq 1 \qquad (ب) \quad |2x - 5| \geq 1$$

حل: (الف)

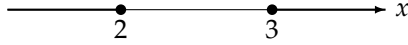
$$\begin{aligned} |2x - 5| &\leq 1 \\ -1 &\leq 2x - 5 \leq 1 && \text{مساوات 1.2} \\ 4 &\leq 2x \leq 6 && \text{جمع 5} \\ 2 &\leq x \leq 3 && \text{تقسیم 2} \end{aligned}$$

حل سلسلہ بند وقفہ  $[2, 3]$  ہے۔



(ب)

$$\begin{array}{l|l}
 |2x - 5| \geq 1 & \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 2x - 5 \geq 1 \\
 2x \geq 6 \\
 x \geq 3
 \end{array} & \begin{array}{l}
 -(2x - 5) \geq 1 \\
 2x - 5 \leq -1 \\
 2x \leq 4 \\
 x \leq 2
 \end{array}
 \end{array}$$

حل سلسلہ  $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$  ہے۔

□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی اشتراک<sup>18</sup> کی علامت  $\cup$  استعمال کی گئی ہے۔ دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ اسی طرح ہم تقاطع<sup>19</sup> کی علامت  $\cap$  بھی استعمال کرتے ہیں۔ دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ مثال کے طور پر  $[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3)$  ہو گا۔

## سوالات

## اعشاری روپ

سوال 1: عدد  $\frac{1}{9}$  کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔ اسی طرح  $\frac{2}{9}$ ،  $\frac{3}{9}$  اور  $\frac{8}{9}$  کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔  
جواب:  $0.\bar{1}, 0.\bar{2}, 0.\bar{3}, 0.\bar{8}$

سوال 2:  $\frac{1}{11}$  کو اعشاری روپ میں لکھیں۔ دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔  $\frac{2}{11}$ ،  $\frac{3}{11}$  اور  $\frac{9}{11}$  کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

## عدم مساوات

سوال 3: اگر  $2 < x < 6$  ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے  $x$  کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

<sup>18</sup> union  
<sup>19</sup> intersection

$$\begin{array}{lll}
 \text{ا} & 0 < x < 4 & \text{د} & \frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \\
 \text{ب} & 0 < x - 2 < 4 & \text{ه} & 1 < \frac{6}{x} < 3 \\
 \text{ج} & 1 < \frac{x}{2} < 3 & \text{و} & |x - 4| < 2 \\
 \text{ز} & -6 < -x < 2 & \text{ح} & -6 < -x < -2
 \end{array}$$

سوال 4: اگر  $-1 < y - 5 < 1$  ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے  $y$  کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

$$\begin{array}{lll}
 \text{ا} & 4 < y < 6 & \text{د} & y < 6 \\
 \text{ب} & -6 < y < -4 & \text{ه} & 0 < y - 4 < 2 \\
 \text{ج} & y > 4 & \text{و} & 2 < \frac{y}{2} < 3 \\
 \text{ز} & |y - 5| < 1 & \text{ح} & 
 \end{array}$$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترتیم کریں۔

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 5:} & -2x > 4 \\
 \text{جواب:} & x < -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 9:} & 2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6} \\
 \text{جواب:} & x \leq -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 6:} & 8 - 3x \geq 5 \\
 \text{سوال 10:} & \frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 7:} & 5x - 3 \leq 7 - 3x \\
 \text{جواب:} & x \leq \frac{5}{4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 11:} & \frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6) \\
 \text{جواب:} & x < -\frac{6}{7}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{سوال 8:} & 3(2 - x) > 2(3 + x) \\
 \text{سوال 12:} & -\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}
 \end{array}$$

مطلق قیمت

سوال 13 تا سوال 18 میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال 16:  $|1 - t| = 1$

سوال 13:  $|y| = 3$   
جواب:  $\mp 3$

سوال 17:  $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$   
جواب:  $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

سوال 14:  $|y - 3| = 7$

سوال 18:  $|\frac{s}{2} - 1| = 1$

سوال 15:  $|2t + 5| = 4$   
جواب:  $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$

سوال 19 تا سوال 34 میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ کو ترتیم کریں

سوال 19:  $|x| < 2$   
جواب:  $-2 < x < 2$

سوال 20:  $|x| \leq 2$

سوال 21:  $|t - 1| \leq 3$   
جواب:  $-2 \leq t \leq 4$

سوال 22:  $|t + 2| < 1$

سوال 23:  $|3y - 7| < 4$   
جواب:  $1 < y < \frac{11}{3}$

سوال 24:  $|2y + 5| < 1$

سوال 25:  $|\frac{z}{5} - 1| \leq 1$   
جواب:  $0 \leq z \leq 10$

سوال 26:  $|\frac{3}{2}z - 1| \leq 2$

سوال 27:  $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$   
 جواب:  $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$  یا  $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

سوال 28:  $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 3$

سوال 29:  $|2s| \geq 4$   
 جواب:  $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

سوال 30:  $|s + 3| \geq \frac{1}{2}$

سوال 31:  $|1 - x| > 1$   
 جواب:  $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

سوال 32:  $|2 - 3x| > 5$

سوال 33:  $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$   
 جواب:  $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

سوال 34:  $\left|\frac{3}{5}r - 1\right| > \frac{2}{5}$

### دو درجی عدم مساوات

سوال 35 تا سوال 42 میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترتیب کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں  $\sqrt{a^2} = |a|$  کا استعمال کریں۔

سوال 35:  $x^2 < 2$   
 جواب:  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 36:  $4 \leq x^2$

سوال 37:  $4 < x^2 < 9$   
 جواب:  $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 38:  $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 39:  $(x - 1)^2 < 4$   
 جواب:  $(-1, 3)$

سوال 40:  $(x + 3)^2 < 2$

سوال 41:  $x^2 - x < 0$

جواب:  $(0, 1)$

سوال 42:  $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ  $-a = a$  ہے۔ کس حقیقی عدد  $a$  کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔

جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ  $a \geq 0$  کے لئے درست ہے۔

سوال 44: مساوات  $|x - 1| = 1 - x$  کو حل کریں۔

سوال 45: نیکنونی عدم مساوات کا ثبوت۔  $|a + b| = (a + b)^2$  سے شروع کرتے ہوئے نیکنونی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

سوال 46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد  $a$  اور  $b$  کے لئے  $|ab| = |a||b|$  ہو گا۔

سوال 47: اگر  $|x| \leq 3$  اور  $x > -\frac{1}{2}$  ہوں تب  $x$  کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟

جواب:  $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 48: عدم مساوات  $|x| + |y| \leq 1$  کو ترسیم کریں۔

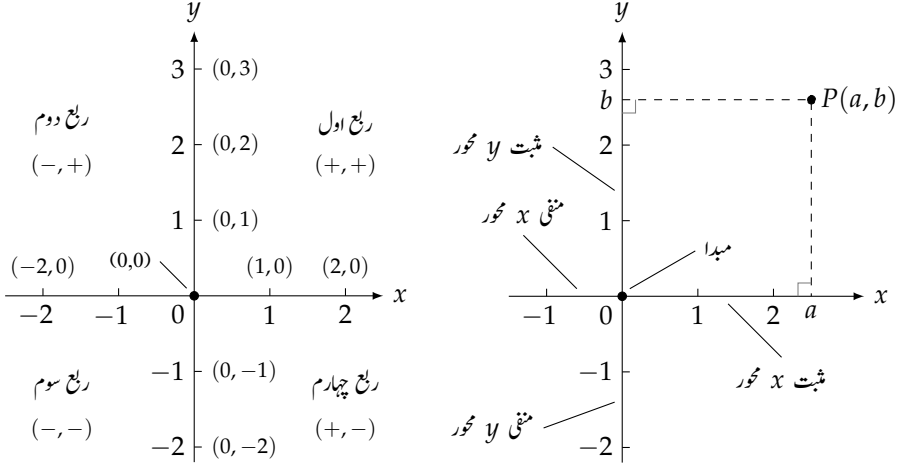
سوال 49: (الف)  $f(x) = \frac{x}{2}$  اور  $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$  کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے  $x$  کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر  $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$  ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تجلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔

جواب:  $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 50: (الف) تفاعل  $f(x) = \frac{3}{x-1}$  اور  $g(x) = \frac{2}{x+1}$  کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے  $x$  کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر  $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$  ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تجلیلی طور پر ثابت کریں۔



شکل 1.2: کارتیسی محدود

## 1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدود اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

### مستوی میں کارتیسی محدود

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ ان خطوط کو مستوی میں محدود محاور<sup>20</sup> کہتے ہیں۔ افقی  $x$  محور پر اعداد کو  $x$  سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔ انصافی  $y$  محور پر اعداد کو  $y$  سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر  $x$  اور  $y$  دونوں 0 ہوں محدود نظام کا مبدأ<sup>21</sup> کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف  $M$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ  $P$  سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جاسکتے ہیں۔ اگر  $P$  سے  $x$  محور پر قائمہ خط  $x$  محور کو  $a$  پر قطع کرتا ہو تب  $P$  کا  $x$  محدود<sup>22</sup>  $a$  ہو گا۔ اسی طرح اگر  $P$  سے  $y$  محور پر قائمہ خط  $y$  محور کو  $b$  پر قطع کرتا ہو تب  $P$  کا  $y$  محدود<sup>23</sup>

<sup>20</sup> coordinate axis

<sup>21</sup> origin

<sup>22</sup> x-coordinate

<sup>23</sup> y-coordinate

$b$  ہو گا۔ مرتب جوڑی  $(a, b)$  کو نقطہ کی محدودی جوڑی<sup>24</sup> کہتے ہیں۔  $x$  محور پر ہر محدودی جوڑی کا  $y$  محدود  $0$  ہو گا جبکہ  $y$  محور پر ہر محدودی جوڑی کا  $x$  محدود  $0$  ہو گا۔ محدودی نظام کا مبدا نقطہ  $(0, 0)$  ہے۔

محور  $x$  کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدا کے دائیں جانب مثبت  $x$  محور<sup>25</sup> اور مبدا کے بائیں جانب منفی  $x$  محور<sup>26</sup> پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدا  $y$  محور کو بھی مثبت  $y$  محور اور منفی  $y$  محور میں تقسیم کرتا ہے۔ محدودی مستوی کو چار ربعات<sup>27</sup> میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پہلا

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سٹی میٹر کا فاصلہ ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سٹی میٹر کا فاصلہ  $25 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمانوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی تناسب پہلو<sup>28</sup> ایک جیسے رکھتے ہیں لہذا دونوں محور پر پیمانہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدودی میں کل تبدیلی کو بڑھوتری<sup>29</sup> کہتے ہیں۔ اختتامی محدودی سے ابتدائی محدودی منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

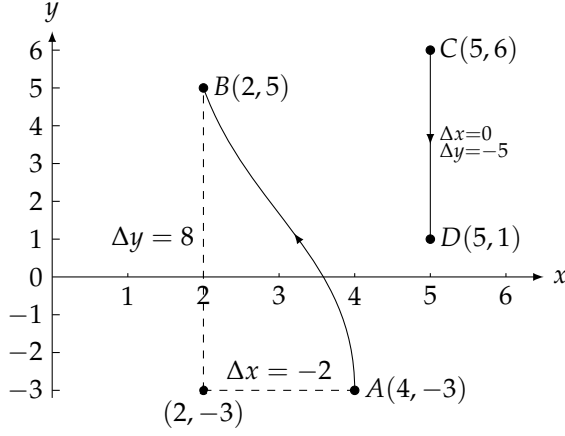
مثال 1.8: نقطہ  $A(4, -3)$  سے نقطہ  $B(2, 5)$  منتقل ہونے سے بڑھوتری  $x$  اور بڑھوتری  $y$  درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)

$$\Delta x = 2 - 4 = 2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

coordinate pair<sup>24</sup>  
positive x-axis<sup>25</sup>  
negative x-axis<sup>26</sup>  
quadrants<sup>27</sup>  
aspect ratio<sup>28</sup>  
increments<sup>29</sup>





شکل 1.3: محدودی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

تعریف: اگر متغیر  $x$  کی ابتدائی قیمت  $x_1$  اور اختتامی قیمت  $x_2$  ہو تب  $x$  کی بڑھوتری درج ذیل ہوگی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

□

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ  $C(5, 6)$  اور اختتامی نقطہ  $D(5, 1)$  ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔  
حل:  $\Delta x = 5 - 5 = 0$ ,  $\Delta y = 1 - 6 = -5$

□

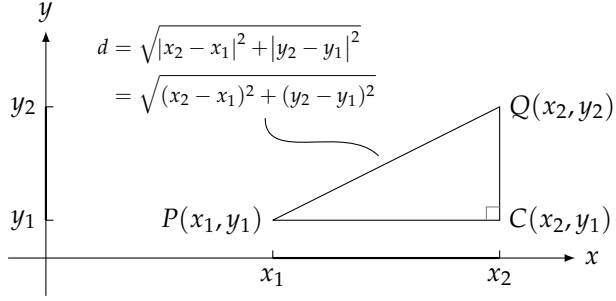
مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ نقطہ  $P(x_1, y_1)$  اور نقطہ  $Q(x_2, y_2)$  کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہوگا (شکل 1.4)۔

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1.10: (الف)  $P(-1, 2)$  اور  $Q(3, 4)$  کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)

(ب) مبدا سے  $P(x, y)$  تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

ترسیم

متغیرات  $x$  اور  $y$  پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں  $P(x, y)$  کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

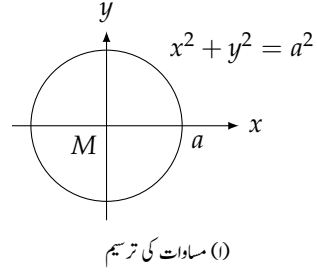
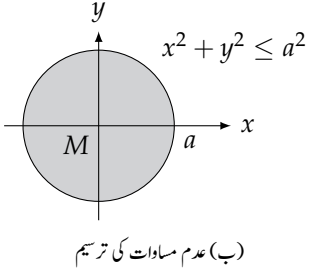
مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو

(الف)  $a > 0$  کی صورت میں مساوات  $x^2 + y^2 = a^2$  ان تمام نقطوں  $P(x, y)$  کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصلہ  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$  ہو۔ یہ نقطے مبدا کے گرد رداس  $a$  کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دائرہ مساوات  $x^2 + y^2 = a^2$  کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔

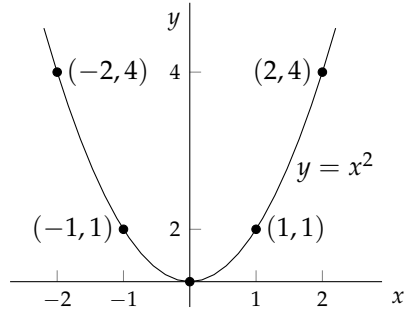
(ب) عدم مساوات  $x^2 + y^2 \leq a^2$  کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں  $(x, y)$  کا مبدا سے فاصلہ  $\leq a$  ہے۔ یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس  $a$  کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہوگی (شکل 1.5)۔

□

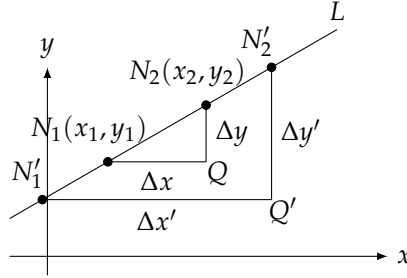
اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو اکائی دائرہ<sup>30</sup> کہتے ہیں۔



شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)



شکل 1.6: قطع مکانی (مثال 1.12)



شکل 1.7:  $N_1Q N_2$  اور  $N_1'Q' N_2'$  متماثلہ مثلثات ہیں لہذا  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$  ہو گا

مثال 1.12: مساوات  $y = x^2$  پر غور کریں۔  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$ ،  $(-1, 1)$ ،  $(2, 4)$  اور  $(-2, 4)$  ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدد اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو قطع مکافی<sup>31</sup> کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں  $N_1(x_1, y_1)$  اور  $N_2(x_2, y_2)$  سے یکتا سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط  $N_1N_2$  کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر دو نقطوں  $N_1(x_1, y_1)$  اور  $N_2(x_2, y_2)$  کے لئے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

کی قیمت ایک جیسی ہو گی (شکل 1.7)۔

تعریف: درج ذیل شرح

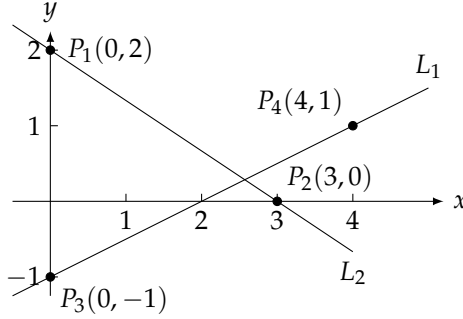
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

غیر انتصابی خط  $N_1N_2$  کی ڈھلوان<sup>32</sup> کہلاتی ہے۔

<sup>30</sup>unit circle

<sup>31</sup>parabola

<sup>32</sup>slope



شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)

□

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔ مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔ انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے  $\Delta x = 0$  ہو گا لہذا شرح  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  غیر معین ہو گا<sup>33</sup>۔ یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں  $L_1$  کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1 - (-1)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔ اسی طرح  $L_2$  کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0 - 2}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

□

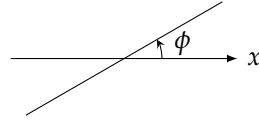
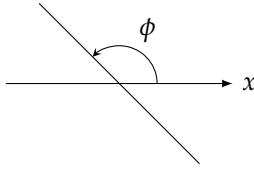
ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترائی ہو گی۔ ہے۔ یوں دائیں رخ چلتے ہوئے

خط کی چڑھائی یا اترائی کو زاویہ میلان<sup>34</sup> سے بھی ناپا جاتا ہے۔  $x$  محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت  $x$  محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔ افقی خط کا زاویہ میلان  $0^\circ$  اور انتصابی خط کا زاویہ میلان  $90^\circ$  ہو گا۔ اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہی  $\phi$  سے ظاہر کیا جائے تب  $0 \leq \phi \leq 180^\circ$  ہو گا۔

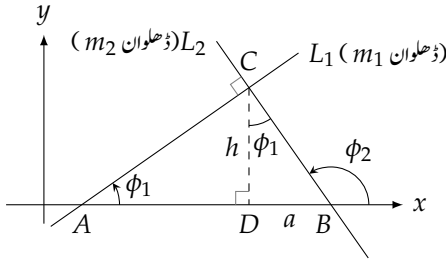
خط کی ڈھلوان  $m$  اور زاویہ میلان  $\phi$  کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

$$m = \tan \phi$$

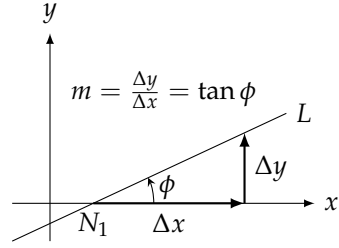
<sup>33</sup> چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔  
<sup>34</sup> angle of inclination



شکل 1.9: زاویہ میلان  $x$  محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے



شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق



شکل 1.10: غیر انتصابی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجٹ ہوتا ہے

### متوازی اور قائمہ خطوط

متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔ اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہذا یہ متوازی ہوں گے۔

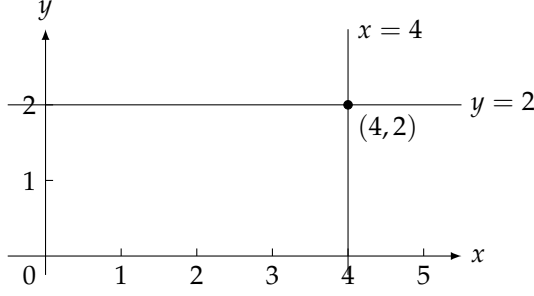
اگر غیر انتصابی خطوط  $L_1$  اور  $L_2$  آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان  $m_1$  اور  $m_2$  مساوات  $m_1 m_2 = -1$  کو مطمئن کریں گی۔ یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں  $m_1 = \tan \phi_1 = \frac{a}{h}$  اور  $m_2 = \tan \phi_2 = -\frac{h}{a}$  ہیں۔ یوں  $m_1 m_2 = \left(\frac{a}{h}\right)\left(-\frac{h}{a}\right) = -1$  ہو گا۔

### خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔  $x$  محور کے نقطہ  $a$  سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی  $x$  محدود  $a$  ہو گی۔ یوں اس انتصابی خط کی مساوات  $x = a$  ہو گی۔ اسی طرح  $y$  محور کے نقطہ  $b$  سے گزرتے افقی خط کی مساوات  $y = b$  ہو گی۔



شکل 1.12: افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

مثال 1.14: نقطہ  $(4, 2)$  سے گزرتے افقی اور انتصابی خطوط کے مساوات بالترتیب  $y = 2$  اور  $x = 4$  ہوں گی (شکل 1.12)۔

اگر ہمیں غیر انتصابی سیدھے خط  $L$  کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ  $N_1(x_1, y_1)$  معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر  $N(x, y)$  کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = y_1 + m(x - x_1)$$

لکھا جاسکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

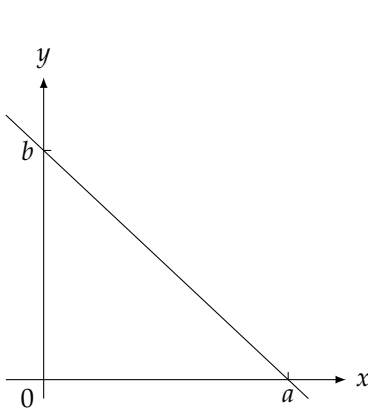
تعریف: نقطہ  $(x_1, y_1)$  سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان  $m$  ہو کی مساوات  $y = y_1 + m(x - x_1)$  ہو گی جس کو خط کی نقطہ-ڈھلوان مساوات<sup>35</sup> ہے۔

□

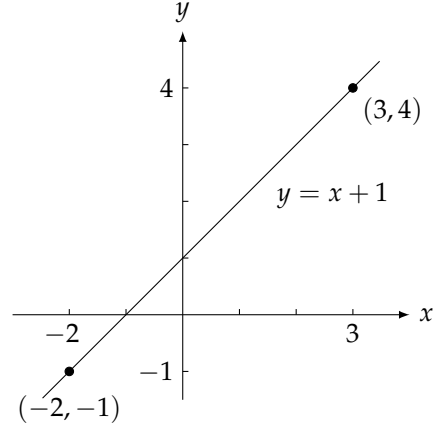
مثال 1.15: نقطہ  $(3, 2)$  سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان  $-\frac{2}{3}$  ہو کی مساوات تلاش کریں۔  
حل:

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \implies y = -\frac{2}{3}x + 4$$

point-slope equation<sup>35</sup>



شکل 1.14: غیر انتظامی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات



شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال 1.16)

□

مثال 1.16: نقطہ  $(-2, -1)$  اور  $(3, 4)$  سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔  
حل: اس خط کی ڈھلوان

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ہے۔ ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ  $(x_1, y_1) = (3, 4)$  لیتے ہیں      نقطہ  $(x_1, y_1) = (-2, -1)$  لیتے ہیں

$$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2)) \quad y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$$

$$y = -1 + x + 2 \quad y = 4 + x - 3$$

$$y = x + 1 \quad y = x + 1$$

□

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔

غیر انتظامی خط  $y$  محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا  $y$  قطع<sup>36</sup> کہتے ہیں۔ اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر  $x$  محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا  $x$  قطع<sup>37</sup> کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

<sup>36</sup>y-intercept  
<sup>37</sup>x-intercept



غیر انتہائی خط جو  $y$  محور کو  $(0, b)$  پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

ہو گی۔

تعریف: درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \implies y = mx + b$$

کو خط کی ڈھلوان-قطع مساوات<sup>38</sup> کہتے ہیں۔ اس خط کی ڈھلوان  $m$  ہے اور یہ  $y$  محور کو  $b$  پر قطع کرتا ہے۔

□

مثال 1.17: خط  $y = 3x - 7$  کی ڈھلوان  $m = 3$  ہے جبکہ یہ  $y$  محور کو  $-7$  پر قطع کرتا ہے۔

□

درج ذیل مساوات کو عمومی خطی مساوات<sup>39</sup> کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \quad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1.18: خط  $8x + 5y = 20$  کی  $y$  قطع تلاش کریں۔  
حل: ہم مساوات کو ڈھلوان-قطع روپ میں لکھ کر  $y$  قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

□

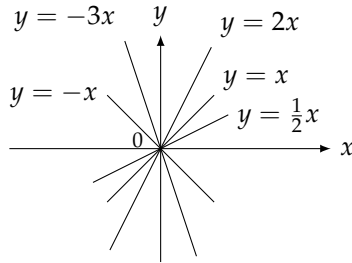
یوں خط کی ڈھلوان  $-\frac{8}{5}$  اور  $y$  قطع  $4$  ہے۔

مثال 1.19: مبدا سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔

□

چونکہ ان خطوط کا  $y$  قطع  $0$  ہو گا لہذا ان کی مساوات  $y = mx$  ہو گی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔

<sup>38</sup>slope-intercept equation  
<sup>39</sup>general linear equation



شکل 1.15: مبداء سے گزرتا خط کی مساوات  $y = mx$  ہے جہاں  $m$  خط کی ڈھلوان ہے

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔ اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بناسیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں خطی مساوات<sup>40</sup> کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباؤ  $V$  اور برقی رو  $I$  کا تعلق  $V = IR$  ہے جو خطی مساوات ہے۔ اس مساوات کی ڈھلوان  $R$  ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔

□

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی

سوال 1 تا سوال 4 میں ایک ذرہ  $A$  سے  $B$  منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری  $\Delta x$  اور  $\Delta y$  تلاش کریں اور  $A$  سے  $B$  تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1:  $A(-3, 2), B(-1, -2)$   
جواب:  $2, -4; 2\sqrt{5}$

سوال 2:  $A(-1, -2), B(-3, 2)$

linear equations<sup>40</sup>

سوال 3:  $A(-3.2, -2), B(-8.1, -2)$   
جواب:  $-4.9, 0; 4.9$

سوال 4:  $A(\sqrt{2}, 4), B(0, 1.5)$

سوال 5 تا سوال 8 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 5:  $x^2 + y^2 = 1$   
جواب: اکائی دائرہ

سوال 6:  $x^2 + y^2 = 2$

سوال 7:  $x^2 + y^2 \leq 3$   
جواب: رداس  $\sqrt{3}$  کا دائرہ اور اس کی اندرون۔ دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 8:  $x^2 + y^2 = 0$

### ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

سوال 9 تا سوال 12 دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط  $AB$  کی قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 9:  $A(-1, 2), B(-2, -1)$   
جواب:  $m_{\perp} = -\frac{1}{3}$

سوال 10:  $A(-2, 1), B(2, -2)$

سوال 11:  $A(2, 3), B(-1, 3)$   
جواب:  $\perp$  غیر معین ہے۔

سوال 12:  $A(-2, 0), B(-2, -2)$

سوال 13 تا سوال 16 میں دیے گئے نقطے سے گزرتا (الف) اتصالی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 13:  $(-1, \frac{4}{3})$   
جواب: (الف)  $x = -1$  (ب)  $y = \frac{4}{3}$

سوال 14:  $(\sqrt{2}, -1.3)$ سوال 15:  $(0, -\sqrt{2})$   
جواب: (الف)  $x = 0$   $y = -\sqrt{2}$ سوال 16:  $(-\pi, 0)$ 

سوال 17 تا سوال 30 میں خط کی مساوات تلاش کریں۔ خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 17: نقطہ  $(-1, 1)$  سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان  $-1$  ہو۔  
جواب:  $y = -x$ سوال 18: نقطہ  $(2, -3)$  سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان  $\frac{1}{2}$  ہو۔سوال 19: نقطہ  $(3, 4)$  اور  $(-2, 5)$  سے گزرتا خط۔  
جواب:  $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$ سوال 20: نقطہ  $(-8, 0)$  اور  $(-1, 3)$  سے گزرتا خط۔سوال 21: ڈھلوان  $-\frac{5}{4}$  اور  $y$  قطع  $6$  ہے۔  
جواب:  $y = -\frac{5}{4}x + 6$ سوال 22: ڈھلوان  $\frac{1}{2}$  اور  $y$  قطع  $-3$  ہے۔سوال 23: نقطہ  $(-12, -9)$  سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان  $0$  ہو۔  
جواب:  $y = -9$ سوال 24: نقطہ  $(\frac{1}{3}, 2)$  سے گزرتا خط جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔سوال 25: جس کا  $x$  قطع  $-1$  اور  $y$  قطع  $4$  ہو۔  
جواب:  $y = 4x + 4$ سوال 26: جس کا  $x$  قطع  $2$  اور  $y$  قطع  $-6$  ہو۔سوال 27: جو نقطہ  $(5, -1)$  سے گزرتا ہو اور خط  $2x + 5y = 15$  کے متوازی ہو۔  
جواب:  $y = -\frac{2}{5}x + 1$ سوال 28: جو نقطہ  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  سے گزرتا ہو اور خط  $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$  کے متوازی ہو۔

سوال 29: نقطہ  $4, 10$  سے گزرتا اور خط  $6x - 3y = 13$  کا قائلہ ہو۔  
جواب:  $y = -\frac{x}{2} + 12$

سوال 30: نقطہ  $(0, 1)$  سے گزرتا اور خط  $8x - 13y = 13$  کا قائلہ ہو۔

خط کا  $x$  قطع اور  $y$  قطع تلاش کریں۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال 31 تا سوال 34)

سوال 31:  $3x + 4y = 12$  قطع  $4 = x$  ، قطع  $3 = y$  جواب:

سوال 32:  $x + 2y = -4$

سوال 33:  $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$  قطع  $\sqrt{3} = x$  ، قطع  $-\sqrt{2} = y$  جواب:

سوال 34:  $1.5x - y = -3$

سوال 35: کیا  $Ax + By = C_1$  اور  $Bx - Ay = C_2$  (جہاں  $A \neq 0$  اور  $B \neq 0$  ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔  
جواب: جی ہاں۔ خطوط قائلہ ہیں چونکہ ان کی ڈھلوان  $-\frac{A}{B}$  اور  $\frac{B}{A}$  ایک دوسرے کے منفی معکوس ہیں۔

سوال 36: کیا  $Ax + By = C_1$  اور  $Ax + By = C_2$  (جہاں  $A \neq 0$  اور  $B \neq 0$  ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

### بڑھوتری اور حرکت

سوال 37: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام  $A(-2, 3)$  ہے جبکہ اس کی بڑھوتری  $\Delta x = 5$  ،  $\Delta y = -6$  ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔  
جواب:  $(3, -3)$

سوال 38: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام  $A(6, 0)$  ہے جبکہ اس کی بڑھوتری  $\Delta x = -6$  ،  $\Delta y = 0$  ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 39: ایک ذرہ  $A(x, y)$  سے  $B(3, -3)$  منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری  $\Delta x = 5$  اور  $\Delta y = 6$  ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔  
جواب:  $(-2, -9)$

سوال 40: ایک ذرہ  $A(1,0)$  سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد  $A(1,0)$  کو واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محد میں کل تبدیلی کیا ہے؟

### عملی استعمال

سوال 41: پانی میں دباؤ پانی میں  $d$  گہرائی پر غوطہ خور  $p$  دباؤ محسوس کرے گا جہاں  $p = kd + 1$  ہے جہاں  $k$  مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباؤ پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر دباؤ کیا ہوگا؟  
جواب: 5.97 کرہ ہوائی دباؤ

سوال 42: انعکاس شعاع ربع دوم سے خط  $x + y = 1$  پر آمدی شعاع  $x$  محور سے منعکس ہوتی ہے۔ زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔ انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 43: سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی  $FC$  میں  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$  ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔ اسی جگہ  $F = C$  ترسیم کریں۔ کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟  
جواب: جی ہاں۔  $C = F = -40^\circ$

### نظریہ اور مثالیں

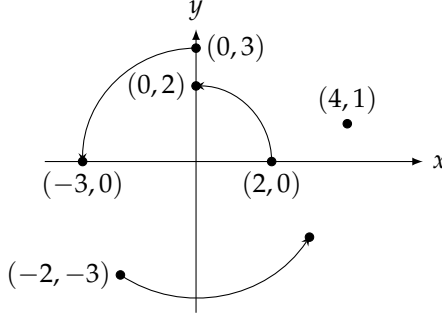
سوال 44: ایک مثلث کے راس  $A(1,2)$ ،  $B(5,5)$  اور  $C(4,-2)$  پر پائے جاتے ہیں۔ مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 45: ایک مثلث کے راس  $A(0,0)$ ،  $B(1,\sqrt{3})$  اور  $C(2,0)$  ہیں۔ دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

سوال 46: دکھائیں کہ  $A(2,-1)$ ،  $B(1,3)$  اور  $C(-3,2)$  چکور کی راسیں ہیں۔ چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 47: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس  $(-1,1)$ ،  $(2,0)$  اور  $(2,3)$  ہیں۔ تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔  
جواب:  $(-1,4)$ ،  $(-1,-2)$ ،  $(5,2)$

سوال 48: مبدا کے گرد گھڑی مخالف  $90^\circ$  گھمانے سے نقطہ  $(2,0)$  اور  $(0,3)$  بالترتیب  $(0,2)$  اور  $(-3,0)$  منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔ درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

شکل 1.16: گھڑی مخالف  $90^\circ$  گھومنا (سوال 48)

- ا)  $(4, 1)$       ب)  $(-2, -3)$       ج)  $(2, -5)$   
 د)  $(x, 0)$       ه)  $(0, y)$       و)  $(x, y)$   
 ز) کونسا نقطہ  $(10, 3)$  پر منتقل ہو گا؟

سوال 49:  $k$  کی کس قیمت کے لئے خط  $2x + ky = 3$  اور خط  $4x + y = 1$  قائمہ ہوں گے۔  $k$  کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟  
 جواب:  $k = -8$ ,  $k = \frac{1}{2}$

سوال 50: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ  $(1, 2)$  اور خط  $x + 2y = 3$  اور  $2x - 3y = -1$  کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 51: دکھائیں کہ  $A(x_1, y_1)$  اور  $B(x_2, y_2)$  کو ملانے والے قطع کا وسط  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$  ہو گا۔

سوال 52: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ  $N(x_0, y_0)$  سے خط  $L: Ax + By = C$  تک فاصل درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

•  $L$  کی قائمہ اور  $N$  سے گزرتے خط  $Q$  کی مساوات تلاش کریں۔

• خط  $Q$  اور  $L$  کا نقطہ تقاطع  $M$  تلاش کریں۔

•  $N$  سے  $M$  تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصل تلاش کریں۔

$$N(a, b), L : x = -1 \quad (ج)$$

$$N(2, 1), L : y = x + 2 \quad (د)$$

$$N(x_0, y_0), L : Ax + By = C \quad (ح)$$

$$N(4, 6), L : 4x + 3y = 12 \quad (پ)$$

### 1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

#### تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ایلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔ زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ایلتا ہے۔ اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم  $y$  کہہ سکتے ہیں، کا دار و مدار دوسرے متغیر، جس کو ہم  $x$  کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔ چونکہ  $y$  کی قیمت مکمل طور پر  $x$  تعین کرتا ہے لہذا  $y$  کو  $x$  کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔ یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو  $A$  اور رداس کو  $r$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ  $A = \pi r^2$  ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ رداس  $r$  کا رقبہ  $A$  تفاعل ہے۔ مساوات  $A = \pi r^2$  وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے  $r$  کی ہر قیمت کے لئے  $A$  کی یکتا قیمت تلاش کی جاسکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا دائرہ کار<sup>41</sup> کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا سعت<sup>42</sup> کہتے ہیں۔ چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ  $[0, \infty)$  پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

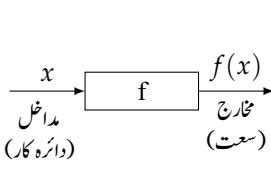
ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔ اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ ہم

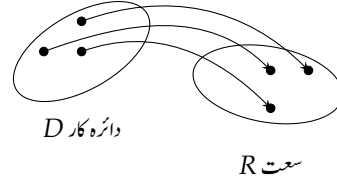
$$y = f(x) \quad (y \text{ برابر ہے } x \text{ کا } f)$$

domain<sup>41</sup>  
range<sup>42</sup>





شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت



شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔

لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر  $y$ ، متغیر  $x$  کا تفاعل ہے۔ یہاں  $f$  تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت  $x$  غیر تابع متغیر<sup>43</sup> ہے اور خارجی قیمت  $y$  تابع متغیر<sup>44</sup> ہیں۔  $x$  کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہو گی جبکہ  $y$  کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہو گی۔

تعریف: سلسلہ  $D$  سے سلسلہ  $R$  تک تفاعل  $f(x)$  اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو  $D$  میں ہر رکن  $x$  کو  $R$  کا یکتا رکن  $f(x)$  مختص کرتا ہے۔

□

اس تعریف کے تحت  $D = D(f)$  (جس کو  $D$  کا  $f$  پڑھتے ہیں) تفاعل  $f$  کا دائرہ کار ہے اور  $f$  کا سعت  $R$  کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔ اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً  $f(x)$  خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر  $y$  سے ظاہر کرتے ہوئے  $y = x^2$  طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

2. ہم  $f(x) = x^2$  کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو  $f$  کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو  $f$ ، ناکہ  $f(x)$ ، کہنا چاہیے چونکہ  $f(x)$  سے مراد نقطہ  $x$  پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو  $f(x)$  لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر رداس  $r$  دائرے کے رقبہ کو ہم  $A(r) = \pi r^2$  لکھ سکتے ہیں جہاں علامت  $A$  سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

<sup>43</sup> independent variable  
<sup>44</sup> dependent variable

## قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً حقیقی متغیرات<sup>45</sup> کے حقیقی قیمت تفاعل<sup>46</sup> پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس  $r$  کے کرہ کا حجم  $V$  درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3 m رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد  $t$  کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t - 1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0، 2،  $x + 2$  اور  $F(2)$  پر حاصل کریں۔  
حل:

$$F(0) = 2(0 - 1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$F(2) = 2(2 - 1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$F(x + 2) = 2(x + 2 - 1) + 3 = 2x + 5$$

$$F(F(2)) = F(5) = 2(5 - 1) + 3 = 11$$

□

<sup>45</sup>real variables  
<sup>46</sup>real valued function

## روایت دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل  $y = f(x)$  متعارف کیا جائے تب  $x$  کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔ اس کو تفاعل کا قدرتی دائرہ کار<sup>47</sup> کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل  $y = x^2$  کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔ اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار  $x$  کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم " $y = x^2, x \geq 2$ " لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔ تفاعل  $y = x^2$  کا سعت  $[0, \infty)$  ہو گا جبکہ تفاعل  $y = x^2, x \geq 2$  کا سعت  $[4, \infty)$  ہو گا جس کو ہم  $\{x^2 | x \geq 2\}$  یا  $\{y | y \geq 4\}$  بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

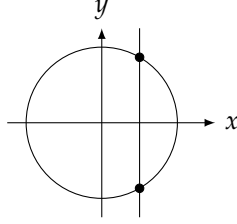
تفاعل	(x) دائرہ کار	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

تفاعل  $y = \sqrt{1 - x^2}$  بند وقفہ  $-1$  تا  $1$  میں ہر  $x$  کے لئے  $y$  کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔ اس دائرہ کار کے باہر  $1 - x^2$  منفی ہو گا اور  $\sqrt{1 - x^2}$  خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔ دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے  $\sqrt{1 - x^2}$  کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو  $[0, 1]$  لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا ماسوائے  $x = 0$ ، کلیہ  $y = \frac{1}{x}$  ہر  $x$  کے لئے حقیقی  $y$  دیتا ہے۔ تفاعل  $y = \frac{1}{x}$  کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ  $y = \sqrt{x}$  صرف  $x \geq 0$  کی صورت میں حقیقی  $y$  دیتا ہے۔ اس کا سعت  $[0, \infty)$  ہے۔

حقیقی  $y$  کے لئے کلیہ  $y = \sqrt{4 - x}$  میں  $4 - x$  کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔ یوں  $4 - x \geq 0$  سے دائرہ کار  $x \leq 4$  حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل کا سعت  $[0, \infty)$  ہو گا۔ □



شکل 1.19: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط ہے۔

### تفاعل کی ترسیم

تفاعل  $f$  کی تقسیم سے مراد مساوات  $y = f(x)$  کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدود تفاعل  $f$  کی داخلی، خارجی جوڑیاں  $(x, y)$  ہیں۔

ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔ تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر  $x$  کے لئے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت  $f(x)$  ہو لہذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔ چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں  $x$  کی ایک ہی قیمت پر  $y$  کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔ اگر تفاعل  $f$  کی دائرہ کار میں نقطہ  $a$  پایا جاتا ہو تب انتصابی خط  $x = a$  تفاعل کو صرف ایک نقطہ  $(a, f(a))$  پر قطع کرے گا۔

مثال 1.24: وقفہ  $[-2, 2]$  پر تفاعل  $y = x^2$  کی ترسیم کریں۔  
حل: پہلا قدم: پہلے ایسے  $(x, y)$  نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

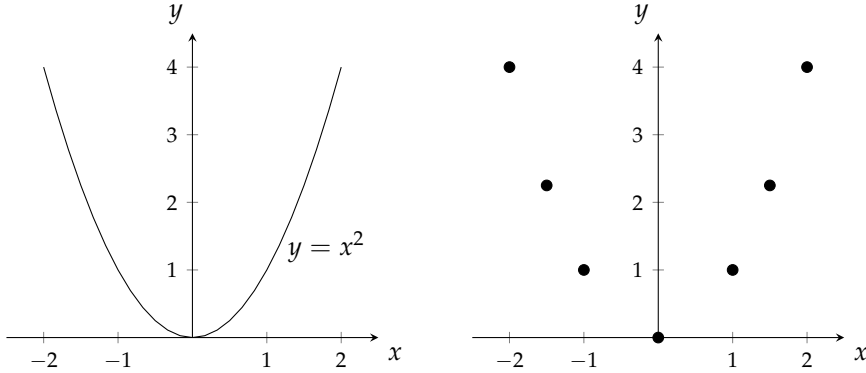
$x$	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
$y$	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو  $xy$  مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔

□

تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچیں۔ منحنی پر سرخی لکھیں۔

احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔



شکل 1.20: تفاعل  $y = x^2$  کی ترسیم (مثال 1.24)

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ اگر  $f$  اور  $g$  تفاعل ہوں تب ایسے  $x$  کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل  $f + g$ ،  $f - g$  اور  $f \cdot g$  کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

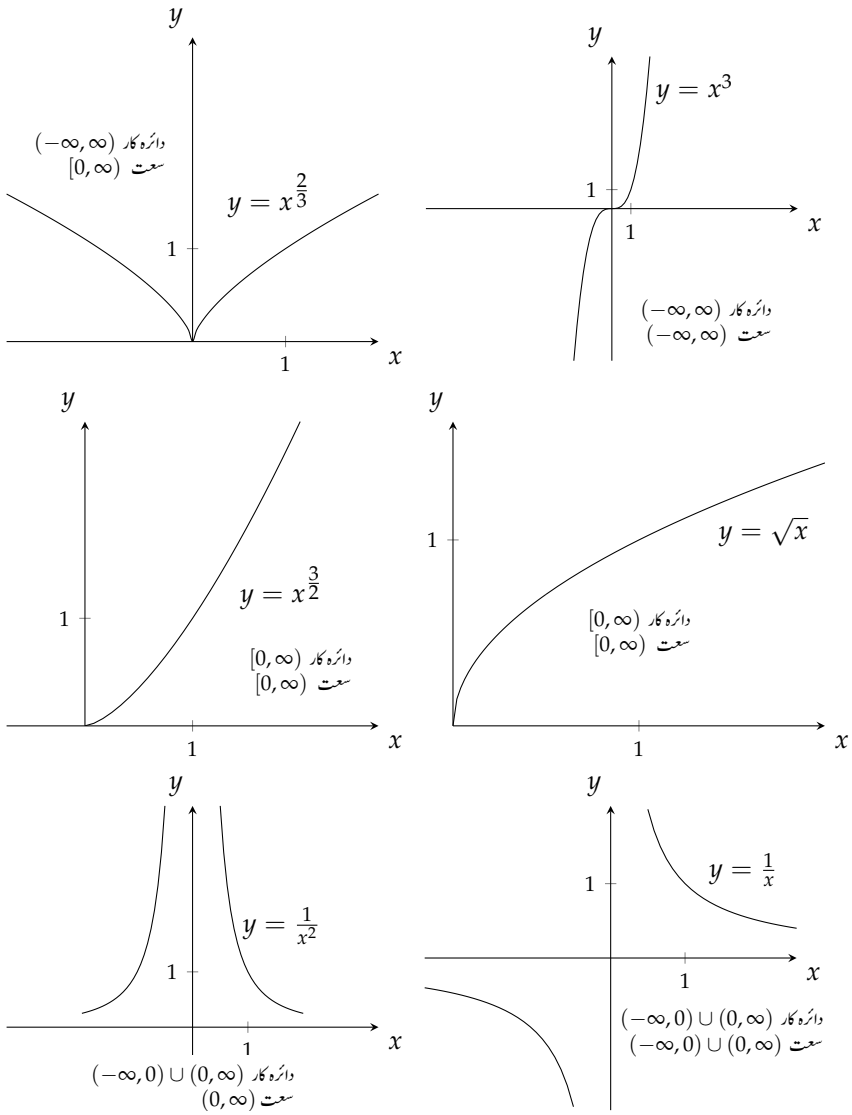
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$f$  اور  $g$  کی دائرہ کار کے اشتراک  $D(f) \cap D(g)$  جہاں  $g(x) \neq 0$  ہو ہم تفاعل  $\frac{f}{g}$  کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر  $c$  حقیقی عدد ہو تب تفاعل  $cf$  کی تعریف درج ذیل ہوگی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$



شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
$f$	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$g$	$g(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$3g$	$3g(x) = 3\sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1)$ (ماسوائے 1)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1]$ (ماسوائے 0)

□

## مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ  $x$  پر ایک تفاعل  $g$  کے نتائج  $g(x)$  پر دوسرا تفاعل  $f$  لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل  $f(g(x))$  حاصل کیا جاسکتا ہے جس کو مرکب تفاعل  $f \circ g$ <sup>48</sup> کہتے ہیں۔

تعریف: اگر  $f$  اور  $g$  تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل  $f \circ g$  کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f \circ g$  کا دائرہ کار ان  $x$  پر مشتمل ہے جو  $g$  کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر  $g$  کی سعت  $f$  کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

□

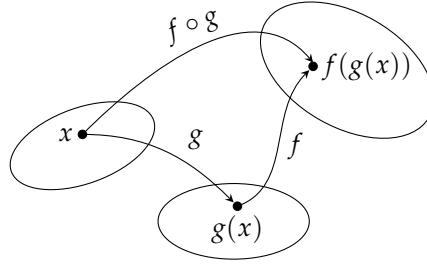
تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جاسکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔  $f \circ g$  حاصل کرنے کی خاطر ہم  $g(x)$  معلوم کر کے  $f(g(x))$  حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

معین  $g \circ f$  حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے  $f(x)$  اور بعد میں  $g(f(x))$  حاصل کرتے ہیں۔  $g \circ f$  کا دائرہ کار ان  $x$  پر مشتمل ہو گا جن پر  $f$  کی سعت  $g$  کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل  $f \circ g$  اور  $g \circ f$  عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  اور  $g(x) = x + 1$  ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

composite function<sup>48</sup>



شکل 1.22: مرکب تفاعل

ا.  $(f \circ g)(x)$       ب.  $(g \circ f)(x)$       ج.  $(f \circ f)(x)$       د.  $(g \circ g)(x)$

حل:

مرکب	دائرہ کار
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x+2$	$(-\infty, \infty)$

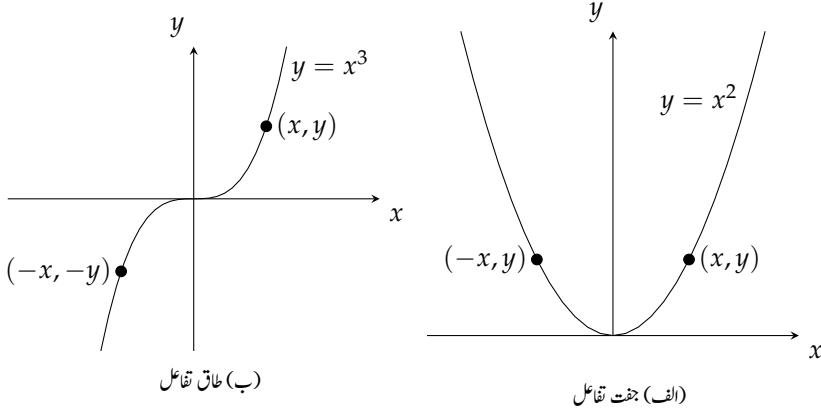
یہ جاننے کے لئے کہ  $f \circ g$  کا دائرہ کار کیوں  $[-1, \infty)$  ہے، غور کریں کہ  $g(x) = x+1$  تمام حقیقی  $x$  کے لئے معین ہے لیکن یہ  $f$  کے دائرہ کار میں صرف  $x+1 \geq 0$  یعنی  $x \geq -1$  کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

$f$  کی دائرہ کار میں ہر  $x$  پر  $f(-x) = f(x)$  کی صورت میں تفاعل  $y = f(x)$  جفت<sup>49</sup> کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ  $x$  اور  $-x$  دونوں کا  $f$  کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل  $f(x) = x^2$  جفت ہے چونکہ  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$  ہے۔

چونکہ  $f(-x) = f(x)$  ہے لہذا نقطہ  $(x, y)$  اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ  $(-x, y)$  بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یوں جفت تفاعل کی ترسیم  $y$  محور کے لحاظ سے تشاکل ہوگی (شکل 1.23-الف)۔  $y$  محور کے ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جاسکتی ہے۔





شکل 1.23: جفت اور طاق تفعل

$f$  کی دائرہ کار میں ہر  $x$  پر  $f(-x) = -f(x)$  کی صورت میں تفعل  $y = f(x)$  طاق<sup>50</sup> کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ  $x$  اور  $-x$  دونوں کا  $f$  کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفعل  $f(x) = x^3$  طاق ہے چونکہ  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$  ہے۔

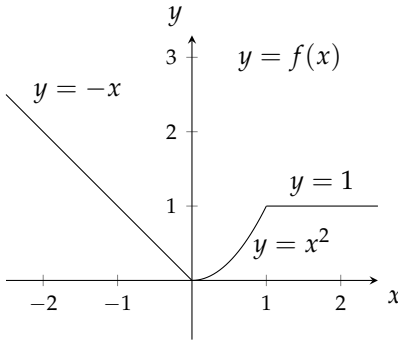
طاق تفعل کی ترسیم مبداء کے لحاظ سے متشاکل ہوگی (شکل 1.23-ب)۔ چونکہ  $f(-x) = -f(x)$  ہے لہذا نقطہ  $(x, y)$  صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ  $(-x, -y)$  بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یہاں بھی  $y$  محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جاسکتی ہے۔

### ٹکڑوں میں معین تفعل

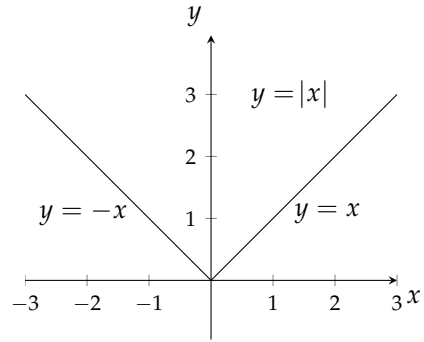
بعض اوقات ایک تفعل دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات استعمال کرتا ہے۔ اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفعل ہے (شکل 1.24)۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔



شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27



شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل

ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد  $x$  پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو  $x$  کے برابر یا اس سے کم ہو بڑا ترین عدد صحیح تفاعل<sup>51</sup> یا عدد صحیح زمین تفاعل<sup>52</sup> کہلاتا جس کو  $\lfloor x \rfloor$  سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \lfloor 2.4 \rfloor &= 2, & \lfloor 1.9 \rfloor &= 1, & \lfloor 0 \rfloor &= 0, & \lfloor -1.2 \rfloor &= -2 \\ \lfloor 2 \rfloor &= 2, & \lfloor 0.2 \rfloor &= 0, & \lfloor -0.3 \rfloor &= -1, & \lfloor -2 \rfloor &= -2 \end{aligned}$$

□

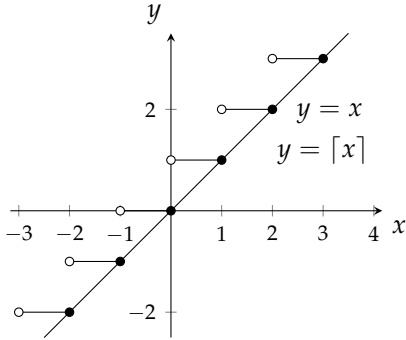
مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد  $x$  پر وہ کم ترین عدد ہو جو  $x$  کے برابر یا اس سے زیادہ ہو کم ترین عدد صحیح تفاعل<sup>53</sup> یا عدد صحیح چھت تفاعل<sup>54</sup> کہلاتا ہے جس کو  $\lceil x \rceil$  سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ اس کی مثال ٹیکسی کا کرایا

<sup>51</sup> greatest integer function

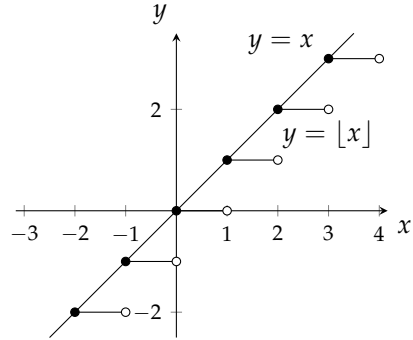
<sup>52</sup> integer floor function

<sup>53</sup> least integer function

<sup>54</sup> integer ceiling function



شکل 1.27: عدد صحیح چھت تقابل (مثال 1.29)



شکل 1.26: عدد صحیح زمین تقابل (مثال 1.28)

ہے جو فی کلو میٹر واجب الادا ہوتا ہے۔ اضافی نامکمل کلو میٹر کی صورت میں مکمل کلو میٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔ یوں 17.2 کلو میٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلو میٹر کا کرایا واجب الادا ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} [3.2] &= 4, & [2.9] &= 3, & [0] &= 0, & [2] &= 2, \\ [-5] &= -5, & [-5.6] &= -5, & [-0.9] &= 0, & [-7.2] &= -7 \end{aligned}$$

□

### سوالات

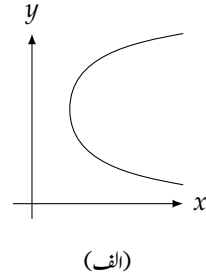
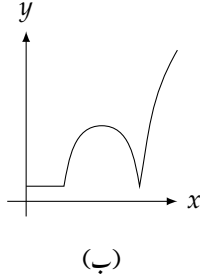
سوال 1 تا سوال 6 میں تقابل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1:  $f(x) = 1 + x^2$   
جواب: دائرہ کار  $(-\infty, \infty)$ ، سعت  $[1, \infty)$

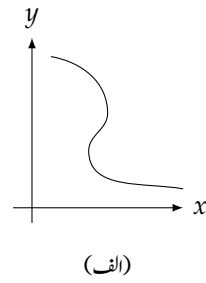
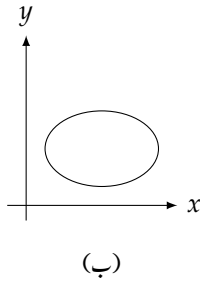
سوال 2:  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

سوال 3:  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$   
جواب: دائرہ کار  $(0, \infty)$ ، سعت  $(0, \infty)$

سوال 4:  $F(t) = \frac{1}{1 + \sqrt{t}}$



شکل 1.28: اشکال برائے سوال 7



شکل 1.29: اشکال برائے سوال 8

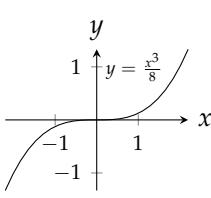
سوال 5:  $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$   
جواب: دائرہ کار  $[-2, 2]$ ، سعت  $[0, 2]$

سوال 6:  $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$

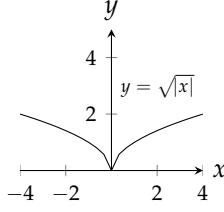
سوال 7: شکل 1.28 میں کون سی ترسیم  $x$  کے تقاضے کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم  $x$  کے تقاضے کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) چونکہ چند  $x$  پر  $y$  کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہذا  $x$  کا تقاضے نہیں ہے۔  
(ب) چونکہ ہر  $x$  پر  $y$  کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہذا  $x$  کا تقاضے ہے۔

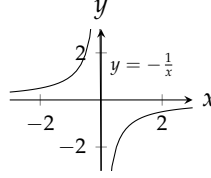
سوال 8: شکل 1.29 میں کون سی ترسیم  $x$  کے تقاضے کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم  $x$  کے تقاضے کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔



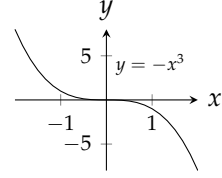
شکل 1.33



شکل 1.32



شکل 1.31



شکل 1.30

### تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

سوال 9: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی  $x$  کا تفاعل لکھیں۔

جواب:  $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ,  $p = 3x$

سوال 10: چکور کی وتر کی لمبائی  $d$  کی صورت میں چکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔ اب چکور کے رقبہ کو  $d$  کا تفاعل لکھیں۔

سوال 11: مکعب کی ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتری لمبائی  $d$  کی صورت میں لکھیں۔ مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو  $d$  کا تفاعل لکھیں۔

$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ ,  $A = 2d^2$ ,  $V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

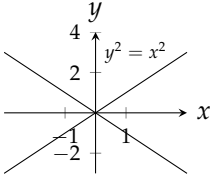
سوال 12: ربع اول میں نقطہ  $N$  تفاعل  $f(x) = \sqrt{x}$  کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔  $N$  کے محدود کو مبدا سے  $N$  تک خط کی ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

### تفاعل اور ترسیم

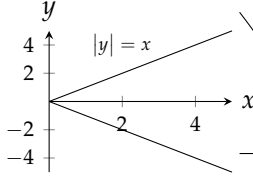
سوال 13 تا سوال 24 میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ ان میں کوئی تشاکل پائی جاتی ہے (اگر پائی جاتی ہو تب)۔ اشکال 1.21 میں دی ترسیم کا سہارا لیا جاسکتا ہے۔

سوال 13:  $y = -x^3$   
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.30

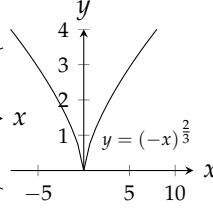
سوال 14:  $y = -\frac{1}{x^2}$



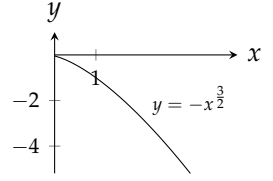
شکل 1.37



شکل 1.36



شکل 1.35



شکل 1.34

سوال 15:  $y = -\frac{1}{x}$   
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.31

سوال 16:  $y = \frac{1}{|x|}$

سوال 17:  $y = \sqrt{|x|}$   
جواب: محدود کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.32

سوال 18:  $y = \sqrt{-x}$

سوال 19:  $y = \frac{x^3}{8}$   
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.33

سوال 20:  $y = -4\sqrt{x}$

سوال 21:  $y = -x^{3/2}$   
جواب: کوئی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 1.34

سوال 22:  $y = (-x)^{3/2}$

سوال 23:  $y = (-x)^{2/3}$   
جواب: محور کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.35

سوال 24:  $y = -x^{2/3}$

سوال 25: (الف)  $|y| = x$  اور (ب)  $y^2 = x^2$  ترسیم کریں۔ یہ مساوات  $x$  کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف)  $x$  کی ہر مثبت قیمت کے لئے  $y$  کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.36  
(ب) ہر  $x \neq 0$  کے لئے  $y$  کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.37

سوال 26: (الف)  $|x| + |y| = 1$  اور (ب)  $|x + y| = 1$  ترسیم کریں۔ یہ  $x$  کے تقابل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ وجہ پیش کریں۔

### جفت اور طاق تفاعل

سوال 27 تا سوال 38 میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ جفت ہیں؟

سوال 27:  $f(x) = 3$   
جواب: جفت

سوال 28:  $f(x) = x^{-5}$

سوال 29:  $f(x) = x^2 + 1$   
جواب: جفت

سوال 30:  $f(x) = x^2 + x$

سوال 31:  $g(x) = x^3 + x$   
جواب: طاق

سوال 32:  $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

سوال 33:  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$   
جواب: جفت

سوال 34:  $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

سوال 35:  $h(t) = \frac{1}{t - 1}$   
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 36:  $h(t) = |t^3|$

سوال 37:  $h(t) = 2t + 1$   
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 38:  $h(t) = 2|t| + 1$

مجموعے، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم  
سوال 39 تا 40 میں  $f$ ،  $g$ ،  $f + g$  اور  $f \cdot g$  کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 39:  $f(x) = x$ ،  $g(x) = \sqrt{x-1}$   
جوابات:  $D_f : -\infty < x < \infty$ ،  $D_g : x \geq 1$ ،  $R_f : -\infty < y < \infty$ ،  $R_g : y \geq 0$ ،  
 $D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g$ ،  $R_{f+g} : y \geq 1$ ،  $R_{f \cdot g} : y \geq 0$

سوال 40:  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ،  $g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 41 تا سوال 42 میں  $f$ ،  $g$ ،  $\frac{f}{g}$  اور  $\frac{g}{f}$  کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 41:  $f(x) = 2$ ،  $g(x) = x^2 + 1$   
جواب:  $D_f : -\infty < x < \infty$ ،  $D_g : -\infty < x < \infty$ ،  $R_f : y = 2$ ،  $R_g : y \geq 1$ ،  
 $D_{\frac{f}{g}} : -\infty < x < \infty$ ،  $R_{\frac{f}{g}} : 0 < y \leq 2$ ،  $D_{\frac{g}{f}} : -\infty < x < \infty$ ،  $R_{\frac{g}{f}} : y \geq \frac{1}{2}$

سوال 42:  $f(x) = 1$ ،  $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تفاعل کے مرکب

سوال 43: اگر  $f(x) = x + 5$  اور  $g(x) = x^2 - 3$  ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا.  $f(g(0))$       ب.  $f(g(x))$       ج.  $f(f(-5))$       د.  $f(f(x))$   
ب.  $g(f(0))$       ج.  $g(f(x))$       د.  $g(g(2))$       ح.  $g(g(x))$

جواب:



2. ا.  $x^2 + 2$  ج. 5 د.  $g + 10$  ز.  
 22 ب.  $x^2 + 10x + 22$  د. -2 و.  $x^4 - 6x^2 + 6$  ح.

سوال 44: اگر  $f(x) = x - 1$  اور  $g(x) = \frac{1}{x+1}$  ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

- ا.  $f(g(\frac{1}{2}))$  ج.  $f(g(x))$  د.  $f(f(2))$  و.  $f(f(x))$  ز.  
 ب.  $g(f(\frac{1}{2}))$  د.  $g(f(x))$  و.  $g(g(2))$  ح.  $g(g(x))$

سوال 45: اگر  $u(x) = 4x - 5$  ،  $v(x) = x^2$  اور  $f(x) = \frac{1}{x}$  ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

- ا.  $u(v(f(x)))$  ج.  $v(u(f(x)))$  د.  $f(u(v(x)))$  و.  
 ب.  $u(f(v(x)))$  د.  $v(f(u(x)))$  و.  $f(v(u(x)))$

جواب:

- ا.  $\frac{4}{x^2} - 5$  ج.  $(\frac{4}{x} - 5)^2$  د.  $\frac{1}{4x^2 - 5}$  و.  
 ب.  $\frac{4}{x^2} - 5$  د.  $(\frac{1}{4x-5})^2$  و.  $\frac{1}{(4x-5)^2}$

سوال 46: اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  ،  $g(x) = \frac{x}{4}$  اور  $h(x) = 4x - 8$  ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

- ا.  $h(g(f(x)))$  ج.  $g(h(f(x)))$  د.  $f(g(h(x)))$  و.  
 ب.  $h(f(g(x)))$  د.  $g(f(h(x)))$  و.  $f(h(g(x)))$

سوال 47 اور سوال 47 میں  $f(x) = x - 3$  ،  $g(x) = \sqrt{x}$  ،  $h(x) = x^3$  اور  $j(x) = 2x$  لیں۔ سوال کے ہر جزو کو تفاعل کا مرکب لکھیں۔ مرکب میں  $f$  ،  $g$  ،  $h$  اور  $j$  میں سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل ہو سکتے ہیں۔

سوال 47:

$$y = \sqrt{(x-3)^3} \text{ ا.}$$

$$y = x^{\frac{1}{4}} \text{ ب.}$$

$$y = \sqrt{x} - 3 \text{ ج.}$$

$$y = (2x-6)^3 \text{ د.}$$

$$y = 4x \text{ ه.}$$

$$y = 2\sqrt{x} \text{ و.}$$

جواب:

$$g(h(f(x))) \text{ ا.}$$

$$g(g(x)) \text{ ب.}$$

$$f(g(x)) \text{ ج.}$$

$$h(j(f(x))) \text{ د.}$$

$$j(j(x)) \text{ ه.}$$

$$j(g(x)) \text{ و.}$$

سوال 48:

$$y = 2\sqrt{x-3} \text{ ا.}$$

$$y = x^9 \text{ ب.}$$

$$y = 2x - 3 \text{ ج.}$$

$$y = \sqrt{x^3 - 3} \text{ د.}$$

$$y = x - 6 \text{ ه.}$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} \text{ و.}$$

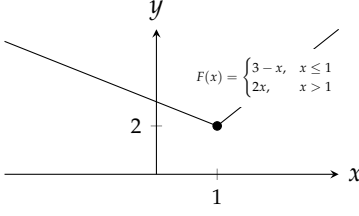
سوال 49: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	
(ب)	$x + 2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ه)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	
(و)	$\frac{1}{x}$		$x$

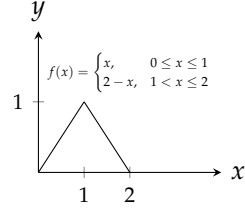
جواب:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(ب)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(ج)	$x^2$	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$x$
(ه)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	$x$
(و)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$x$

سوال 50: کوئی عدد  $x$  لیں۔ اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔ نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔ نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔ جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟



شکل 1.39



شکل 1.38

## ٹکڑوں میں معین تفاعل

سوال 51 تا سوال 54 میں تفاعل ترسیم کریں۔

سوال 51:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جواب: شکل 1.38

سوال 52:

$$g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

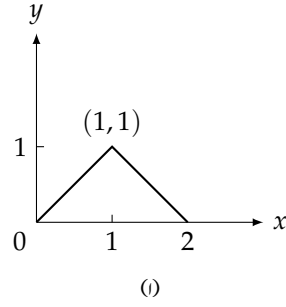
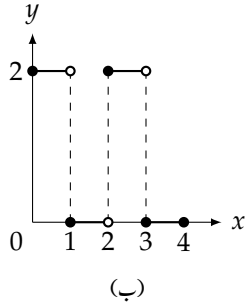
سوال 53:

$$F(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

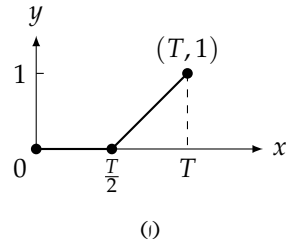
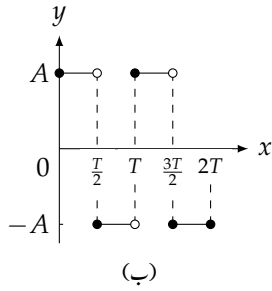
جواب: شکل 1.39

سوال 54:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$$



شکل 1.40: اشکال برائے سوال 55



شکل 1.41: اشکال برائے سوال 56

سوال 55: شکل 1.40 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

$$y = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 2 \leq x < 3 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

جواب: (الف)

سوال 56: شکل 1.41 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چہت اور زمین تفاعل

سوال 57:  $x$  کی کن قیمتوں کے لئے  $[x] = 0$  (الف) ہوگا؟  $[x] = 0$  (ب) ہوگا؟

جواب: الف  $0 \leq x < 1$  (ب)  $-1 < x \leq 0$

سوال 58: کون سے عدد صحیح  $x$  مساوات  $[x] = [x]$  کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال 59: کیا تمام  $x$  کے لئے  $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$  ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب: ہاں

سوال 60: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔  $f(x)$  کو  $x$  کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

### جفت اور طاق تفاعل

سوال 61: فرض کریں کہ  $f$  جفت تفاعل اور  $g$  طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط  $\mathbb{R}$  پر معین ہیں۔ درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

- |                  |                |                |
|------------------|----------------|----------------|
| ا. $fg$          | د. $f^2 = ff$  | ز. $g \circ f$ |
| ب. $\frac{f}{g}$ | ه. $g^2 = gg$  | ح. $f \circ f$ |
| ج. $\frac{g}{f}$ | و. $f \circ g$ | ط. $g \circ g$ |

جواب:

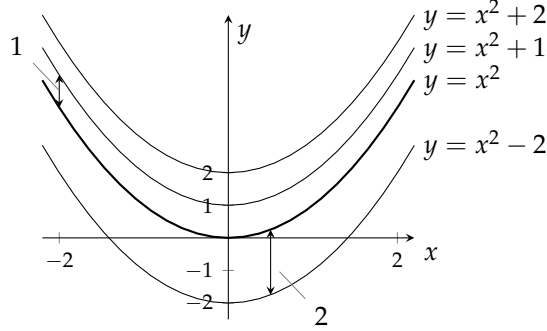
- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| ا. طاق | د. جفت | ز. جفت |
| ب. طاق | ه. جفت | ح. جفت |
| ج. طاق | و. جفت | ط. طاق |

سوال 62: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

### ترسیم

سوال 63: تفاعل  $f(x) = \sqrt{x}$  اور  $g(x) = \sqrt{1-x}$  ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم کو بھی ترسیم کریں۔

سوال 64: فرض کریں کہ  $f(x) = x - 7$  اور  $g(x) = x^2$  ہیں۔  $f$  اور  $g$  کے ساتھ  $f \circ g$  اور  $g \circ f$  کو بھی ترسیم کریں۔



شکل 1.42: تقابل  $f(x) = x^2$  کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال 1.30 اور مثال 1.31)۔

## 1.4 ترسیم کی منتقلی

اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ ایسا کرنے سے نئی مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔ اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کا ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتا ہے۔ ہم دائرہ اور قطع مکانی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر دیگر منحنيات پر بھی قابل لاگو ہے۔

ترسیم کو کیسے منتقل کیا جاتا ہے

تقابل  $y = f(x)$  کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ  $y = f(x)$  کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔

مثال 1.30: کلیہ  $y = x^2$  کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے  $y = x^2 + 1$  حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل 1.42)۔

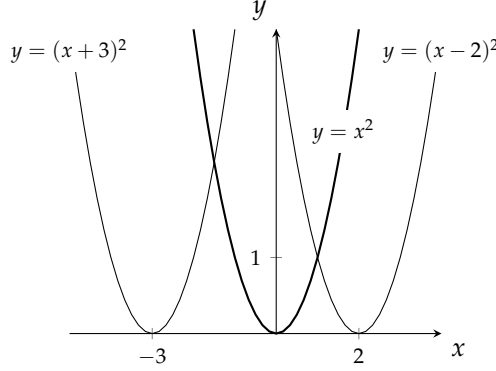
□

مثال 1.31: مساوات  $y = x^2$  کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے  $y = x^2 - 2$  ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل 1.42)۔

□

مثال 1.32:  $y = x^2$  میں  $x$  کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل 1.43)۔

□



شکل 1.43:  $y = x^2$  کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر  $x$  کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔ دائیں منتقلی کی خاطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال 1.32 اور مثال 1.33)

$y = f(x)$  کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لئے  $x$  کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال 1.33:  $y = x^2$  میں  $x$  کے ساتھ  $-2$  جمع کرنے سے  $y = (x-2)^2$  حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل 1.43)۔

□

### منتقلی کے کلیات

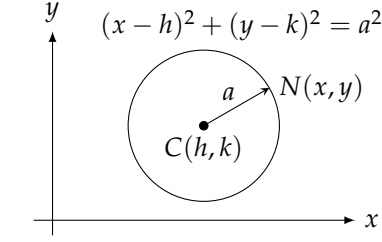
$$y = f(x) + k \quad \text{اُتصابی منتقلی}$$

$k > 0$  کی صورت میں ترسیم  $k$  اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ  $k < 0$  کی صورت میں ترسیم  $|k|$  اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

$$y = f(x - h) \quad \text{افقی منتقلی}$$

$h > 0$  کی صورت میں ترسیم  $h$  اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ  $h < 0$  کی صورت میں ترسیم  $|h|$  اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

مثال 1.34:  $y = (x-2)^2 + 3$  تعامل  $y = x^2$  کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ □



شکل 1.44: مستوی میں  $h, k$  کے گرد رداس  $a$  کا دائرہ

### مساوات دائرہ

ایک مقررہ نقطہ سے یکساں فاصلے پر نقطوں کا سلسلہ دائرہ کہلاتا ہے۔ مقررہ نقطہ کو دائرے کا مرکز<sup>55</sup> کہتے ہیں جبکہ مرکز سے دائرے تک فاصلے کو دائرے کی رداس<sup>56</sup> کہتے ہیں (شکل 1.44)۔ ہم نے مثال 1.11 میں دیکھا کہ مبدا کے گرد رداس  $a$  کے دائرے کی مساوات  $x^2 + y^2 = a^2$  ہے۔ مرکز کو  $(h, k)$  منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$  حاصل ہوتی ہے۔

رداس  $a$  کا دائرہ جس کا مرکز  $(h, k)$  ہو کی معیاری مساوات

$$(1.3) \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

مثال 1.35: دائرہ  $x^2 + y^2 = 25$  کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔ نئی مساوات  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$  ہو گی۔ اس کا مرکز  $(-2, 3)$  ہو گا۔ □

مثال 1.36: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز 3, 4 پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

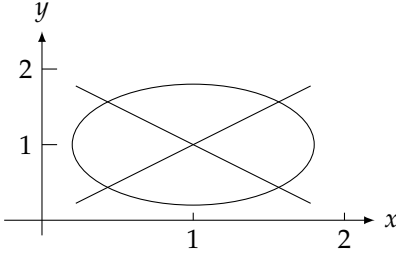
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

□

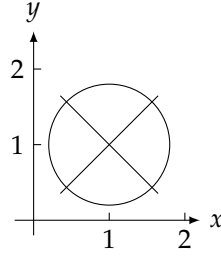
مثال 1.37: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$





(ب) غیر چکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے



(i) چکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے

شکل 1.45: چکور اور غیر چکور نقش

حل: اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رداس  $a = \sqrt{3}$  اور مرکز  $(h, k) = (1, -5)$  لکھے جاسکتے ہیں۔  
□

## کمپیوٹر چکور نقش

چکور نقش سے مراد ایسا نقش ہے جس میں افقی اور انحصائی محدود کی پیمائش ایک جیسی ہو۔ چکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔ غیر چکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔ چکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شیشہ نہیں ہے۔ بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام  $x$  اور  $y$  محدود کی پیمائش غیر یکساں کرتے ہیں۔ یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔ عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جاسکتا ہے کہ وہ چکور ترسیم ہی دکھائے۔ شکل 1.45 میں چکور اور غیر چکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائری کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 1.38: درج ذیل دائرہ کا رداس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

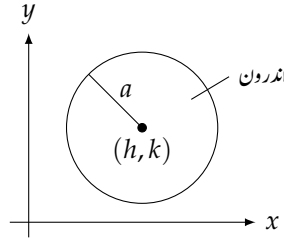
$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 3$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 3$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 = 4^2$$

□

یوں رداس  $a = 4$  اور مرکز  $(h, k) = (-2, 3)$  ہیں۔



شکل 1.46: دائرے کی اندرون

اندرون اور بیرون

دائرہ  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$  کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا  $(h, k)$  سے فاصلہ  $a$  اکائیوں سے کم ہو۔ یہ نقطے درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

اس خطہ کو دائرے کی اندرون<sup>57</sup> کہتے ہیں (شکل 1.46)۔

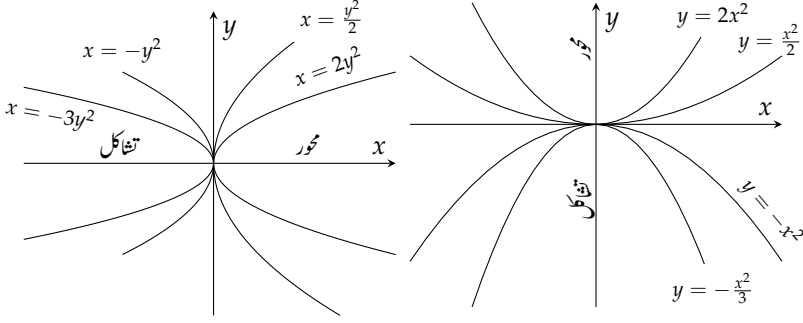
دائرے کی بیرون<sup>58</sup> ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا  $(h, k)$  سے فاصلہ  $a$  اکائیوں سے زیادہ ہو۔ ایسے نقطے درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2$$

مثال 1.39:

خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کی اندرون	$x^2 + y^2 < 1$
اکائی دائرہ اور اس کی اندرون	$x^2 + y^2 \leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2 + y^2 > 1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2 + y^2 \geq 1$

□

شکل 1.48: قطع مکانی  $x = ay^2$ شکل 1.47: قطع مکانی  $y = ax^2$ 

### قطع مکانی ترسیم

مساد  $y = 3x^2$  یا  $y = -5x^2$  جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y = ax^2$$

کی ترسیم کو قطع مکانی<sup>59</sup> کہتے ہیں جس کی محور<sup>60</sup> تقاطع  $y$  محور ہے۔ اس قطع مکانی کی راس<sup>61</sup> (جہاں قطع مکانی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبداء پر پائی جاتی ہے۔ مثبت  $a$  ( $a > 0$ ) کی صورت میں یہ قطع مکانی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی  $a$  ( $a < 0$ ) کی صورت میں یہ قطع مکانی نیچے کو کھلتا ہے۔  $|a|$  کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکانی اتنا تنگ ہو گا (شکل 1.47)۔

کلیہ  $y = ax^2$  میں  $x$  اور  $y$  کو آپس میں اول بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$x = ay^2$$

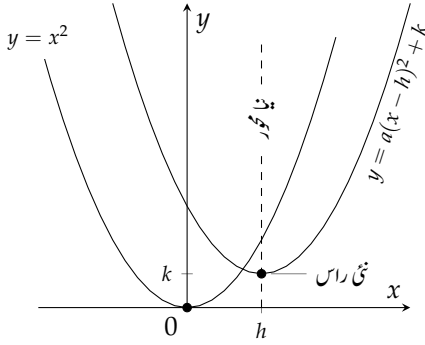
اس قطع مکانی کی ترسیم کا محور،  $x$  محور ہو گا اور اس کی راس مبداء پر پائی جائے گی (شکل 1.48)۔

مثال 1.40: کلیہ  $x = y^2$  ہمیں  $x$  بطور  $y$  کا تقاطع دیتا ہے لیکن یہ ہمیں  $y$  بطور  $x$  کا تقاطع نہیں دیتا ہے۔  $y$  کے لئے حل کرتے ہوئے  $y = \pm\sqrt{x}$  حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت  $x$  کے لئے  $y$  کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تقاطع کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

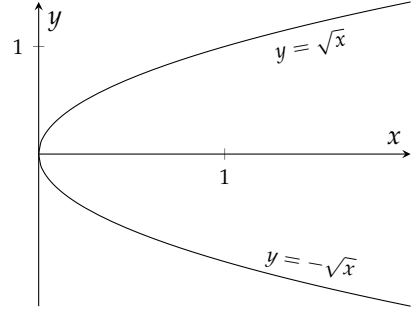
ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تقاطع  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = -\sqrt{x}$  تصور کیا جاسکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت  $x$  کے لئے یہ کلیات  $y = \sqrt{x}$  کی ترسیم قطع مکانی کا بالائی حصہ اور  $y = -\sqrt{x}$  قطع مکانی کا نچلا حصہ دیتے ہیں (شکل 1.49)۔

□

<sup>59</sup> parabola  
<sup>60</sup> axis  
<sup>61</sup> vertex



شکل 1.50: قطع مکانی  $y = ax^2$ ,  $a > 0$  کو  $h$  اکائیاں دائیں اور  $k$  اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے



شکل 1.49: تقابل  $y = \sqrt{x}$  اور  $y = -\sqrt{x}$  کی ترسیم مبداء پر ملتے ہیں اور مساوات  $x = y^2$  کی ترسیم دیتے ہیں (مثال 1.40)

دو درجی مساوات  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$

قطع مکانی  $y = ax^2$  کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$(1.4) \quad y = a(x-h)^2$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$(1.5) \quad y - k = a(x-h)^2$$

لکھتے ہیں۔ دونوں منتقلی سے قطع مکانی کی راس  $(h, k)$  کو منتقل ہوتی ہے جبکہ اس کا محور  $x = k$  ہوگا (شکل 1.50)۔

مساوات 1.5 کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(1.6) \quad y = ax^2 + bx + c$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت  $y = ax^2$  کی ترسیم ہوگی جس کو کہیں اور منتقل کیا گیا ہے۔ کیوں؟ اس لئے کہ جس طرح مساوات 1.5 سے مساوات 1.6 حاصل کی گئی اسی طرح واپس مساوات 1.6 سے مساوات 1.5 بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ منحنی  $y = ax^2 + bx + c$  اور  $y = ax^2$  کی صورت اور سمت بندی ایک جیسی ہیں۔

قطع مکانی  $y = ax^2 + bx + c$  کا محور خط  $x = -\frac{b}{2a}$  ہوگا۔ اس کا قطع  $y$  حاصل کرنے کی خاطر  $x = 0$  پر کیا جائے گا۔

منحنی  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  کی ترسیم  $y = ax^2 + bx + c$  مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  کی ترسیم قطع مکانی ہے جو  $a > 0$  کی صورت میں اوپر رخ اور  $a < 0$  کی صورت میں نیچے رخ کھلتا ہے۔ اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$(1.7) \quad x = -\frac{b}{2a}$$

اس کی راس اس نقطے پر ہوگی جہاں قطع مکانی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔ راس کا  $x = -\frac{b}{2a}$  محدود ہوگا جس کو قطع مکانی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا  $y$  محدود حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 1.41: ترسیم قطع مکانی

مساوات  $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$  ترسیم کریں۔

حل: پہلا قدم: مساوات  $y = ax^2 + bx + c$  کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

دوسرا قدم: چونکہ  $a < 0$  ہے لہذا قطع مکانی نیچے کھلا ہے۔

تیسرا قدم: قطع مکانی کی محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔ اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

یوں راس کا  $x$  محدود  $-1$  ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا  $y$  محدود حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

اس طرح راس  $(-1, \frac{9}{2})$  ہوگی۔

چوتھا قدم: قطع  $x$  (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

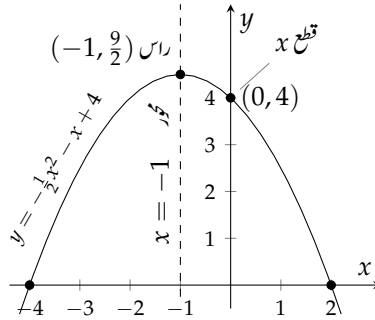
$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \quad \text{قطع مکانی کی مساوات میں } y = 0 \text{ پر کریں}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (x-2)(x+4) = 0 \quad \text{دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں}$$

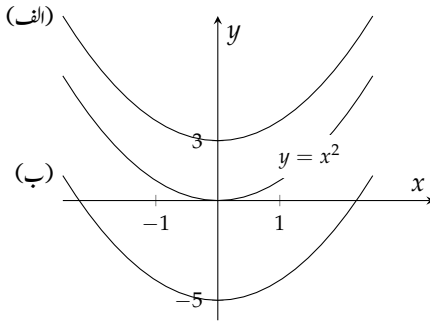
$$x = 2, \quad x = -4$$

پانچواں قدم:  $y = ax^2$  کا خاکہ بناتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کر کے منتقلی کے بعد کے  $xy$  محور کھینچیں (شکل 1.51)۔

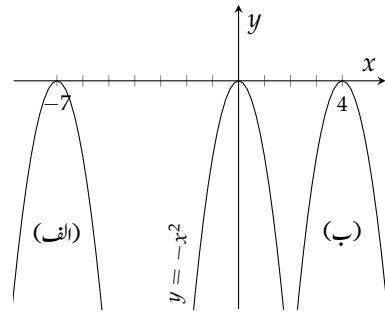
□



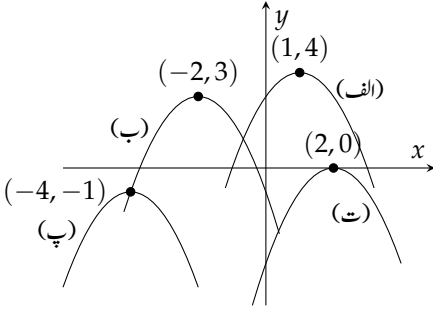
شکل 1.51: ترسیم قطع مگانی (مثال 1.41)



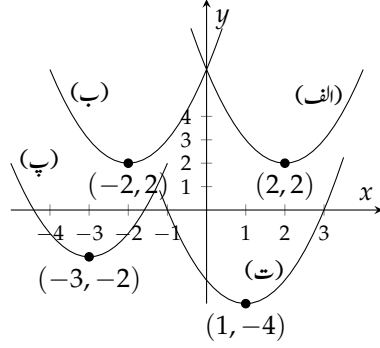
شکل 1.53: اشکال برائے سوال 2



شکل 1.52: اشکال برائے سوال 1



شکل 1.55: اشکال برائے سوال 4



شکل 1.54: اشکال برائے سوال 3

## سوالات

## ترسیم کی منتقلی

سوال 1: شکل 1.52 میں  $y = -x^2$  کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

جواب: (الف)  $y = -(x+7)^2$  (ب)  $y = -(x-4)^2$

سوال 2: شکل 1.53 میں  $y = x^2$  کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

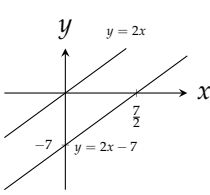
سوال 3: شکل 1.54 میں دکھائے گئے ترسیم کی مساوات درج ذیل میں سے منتخب کریں۔

$$y = (x-1)^2 - 4, \quad y = (x-2)^2 + 2, \quad y = (x+2)^2 + 2, \quad y = (x+3)^2 - 2$$

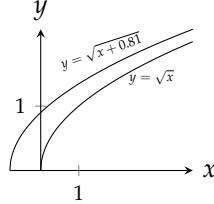
جواب: (الف)  $y = (x-2)^2 + 2$  (ب)  $y = (x+2)^2 + 2$  (پ)  $y = (x+3)^2 - 2$  (ت)  $y = (x-1)^2 - 4$

سوال 4: شکل 1.55 میں  $y = -x^2$  کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔ چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔

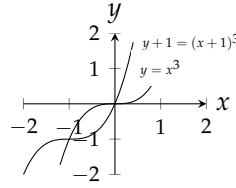
سوال 5 تا 16 میں ترسیم منتقل کریں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساوات حاصل کریں۔ اصل اور منتقل شدہ ترسیم کھینچیں۔



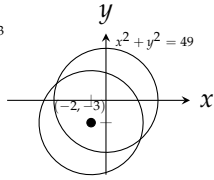
شکل 1.59



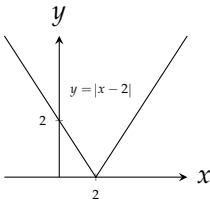
شکل 1.58



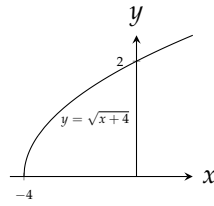
شکل 1.57



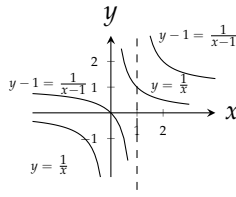
شکل 1.56



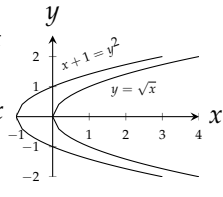
شکل 1.63



شکل 1.62



شکل 1.61



شکل 1.60

سوال 5:  $x^2 + y^2 = 49$  کو 3 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

جواب:  $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$ ، شکل 1.56

سوال 6:  $x^2 + y^2 = 25$  کو 3 اوپر، 4 بائیں منتقل کریں۔

سوال 7:  $y = x^3$  کو 1 نیچے، 1 بائیں منتقل کریں۔

جواب:  $y + 1 = (x + 1)^3$ ، شکل 1.57

سوال 8:  $y = x^{2/3}$  کو 1 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال 9:  $y = \sqrt{x}$  کو 0.81 بائیں منتقل کریں۔

جواب:  $y = \sqrt{x + 0.81}$ ، شکل 1.58

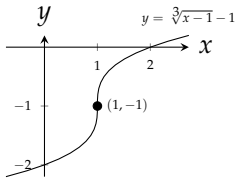
سوال 10:  $y = -\sqrt{x}$  کو 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 11:  $y = 2x - 7$  کو 7 اوپر منتقل کریں۔

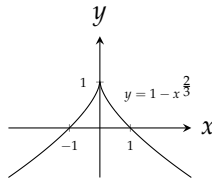
جواب:  $y = 2x$ ، شکل 1.59

سوال 12:  $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$  کو 5 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

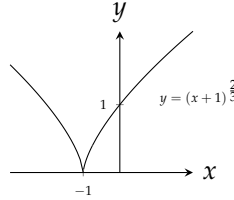




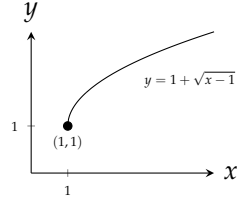
شکل 1.67



شکل 1.66



شکل 1.65



شکل 1.64

سوال 13:  $y = x^2$  کو 1 بائیں منتقل کریں۔  
جواب:  $x + 1 = y^2$ ، شکل 1.60

سوال 14:  $x = -3y^2$  کو 2 اوپر، 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 15:  $y = \frac{1}{x}$  کو 1 اوپر، 1 دائیں منتقل کریں۔  
جواب:  $y - 1 = \frac{1}{x-1}$ ، شکل 1.61

سوال 16:  $y = \frac{1}{x^2}$  کو 1 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

سوال 17 تا سوال 36 میں تقابل ترسیم کریں۔ صفحہ 38 پر شکل 1.21 میں دی گئی ترسیم کا سہارا لیں۔

سوال 17:  $y = \sqrt{x+4}$   
جواب: شکل 1.62

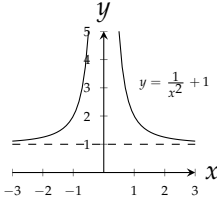
سوال 18:  $y = \sqrt{9-x}$

سوال 19:  $y = |x-2|$   
جواب: شکل 1.63

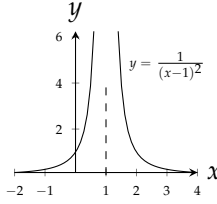
سوال 20:  $y = |1-x| - 1$

سوال 21:  $y = 1 + \sqrt{x-1}$   
جواب: شکل 1.64

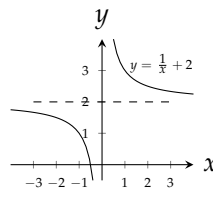
سوال 22:  $y = 1 - \sqrt{x}$



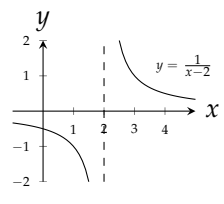
شکل 1.71



شکل 1.70



شکل 1.69



شکل 1.68

سوال 23:  $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$   
جواب: شکل 1.65

سوال 24:  $y = (x - 8)^{\frac{2}{3}}$

سوال 25:  $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$   
جواب: شکل 1.66

سوال 26:  $y + 4 = x^{\frac{2}{3}}$

سوال 27:  $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$   
جواب: شکل 1.67

سوال 28:  $y = (x + 2)^{\frac{3}{2}} + 1$

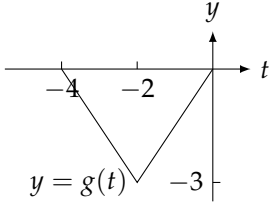
سوال 29:  $y = \frac{1}{x-2}$   
جواب: شکل 1.68

سوال 30:  $y = \frac{1}{x} - 2$

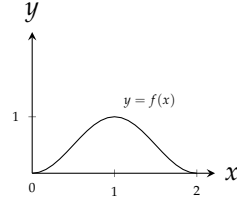
سوال 31:  $y = \frac{1}{x} + 2$   
جواب: شکل 1.69

سوال 32:  $y = \frac{1}{x+2}$

سوال 33:  $y = \frac{1}{(x-1)^2}$   
جواب: شکل 1.70



شکل 1.73: تقابل برائے سوال 38



شکل 1.72: تقابل برائے سوال 37

سوال 34:  $y = \frac{1}{x^2} - 1$

سوال 35:  $y = \frac{1}{x^2} + 1$

جواب: شکل 1.71

سوال 36:  $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

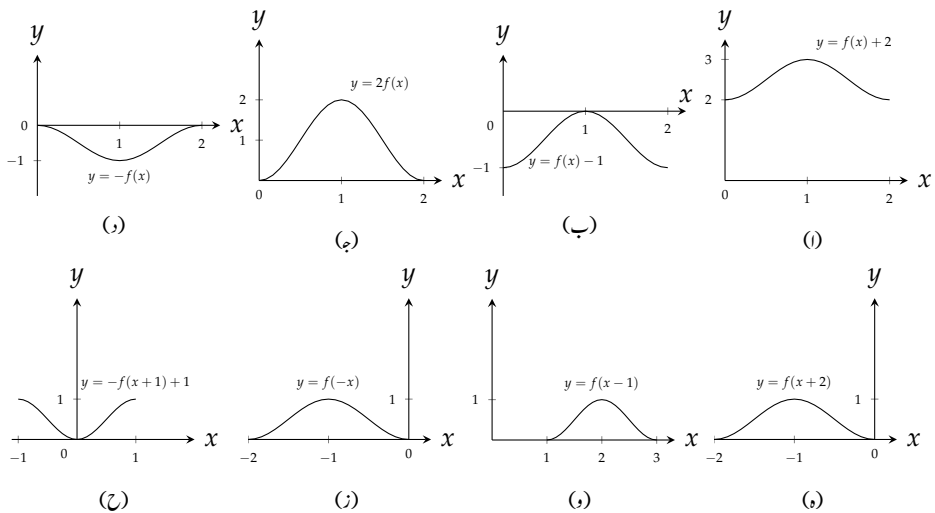
سوال 37: شکل 1.72 میں دکھائے گئے تقابل  $f(x)$  کا دائرہ کار  $[0, 2]$  اور سعت  $[0, 1]$  ہے۔ درج ذیل تقابل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تقابل کا خاکہ بنائیں۔

ا.  $f(x) + 2$       ج.  $2f(x)$       د.  $f(x + 2)$       ز.  $f(-x)$   
 ب.  $f(x) - 1$       د.  $-f(x)$       و.  $f(x - 1)$       ح.  $-f(x + 1) + 1$

جوابات: اشکال کے لئے شکل 1.74 دیکھیں۔ جبکہ دائرہ کار اور سعت درج ذیل ہیں۔

ا.  $D : [0, 2], R : [2, 3]$       د.  $D : [0, 2], R : [-1, 0]$       ز.  $D : [-2, 0], R : [0, 1]$   
 ب.  $D : [0, 2], R : [-1, 0]$       و.  $D : [-2, 0], R : [0, 1]$   
 ج.  $D : [0, 2], R = [0, 2]$       د.  $D : [1, 3], R : [0, 1]$       ح.  $D : [-1, 1], R : [0, 1]$

سوال 38: شکل 1.73 میں دکھائے گئے تقابل  $g(t)$  کا دائرہ کار  $[-4, 0]$  اور سعت  $[-3, 0]$  ہے۔ درج ذیل تقابل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تقابل کا خاکہ بنائیں۔



شکل 1.74: اشکال برائے سوال 37 کے جوابات

- ا.  $g(-t)$       ب.  $g(t) + 3$       ج.  $g(-t + 2)$       د.  $g(1 - t)$
- ب.  $-g(t)$       ج.  $1 - g(t)$       د.  $g(t - 2)$       ز.  $-g(t - 4)$

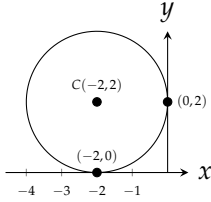
### دائرے

سوال 39 تا سوال 44 میں دائرے کا رداس  $a$  اور مرکز  $C(h, k)$  دیا گیا ہے۔ دائرے کی مساوات لکھیں۔ دائرہ اور دائرے کی مرکز کا  $xy$  مستوی میں خاکہ کھینچیں۔ دائرے کا قطع  $x$  اور قطع  $y$  (اگر پائے جاتے ہوں) کی نشاندہی کریں اور اس کے محدود لکھیں۔

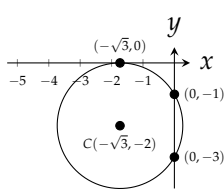
سوال 39:  $C(0, 2), a = 2$       جواب:  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ، شکل 1.75

سوال 40:  $C(-3, 0), a = 3$

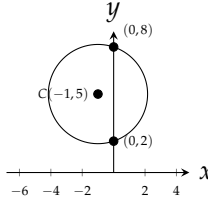
سوال 41:  $C(-1, 5), a = \sqrt{10}$       جواب:  $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$ ، شکل 1.76



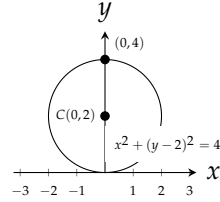
شکل 1.78



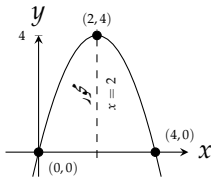
شکل 1.77



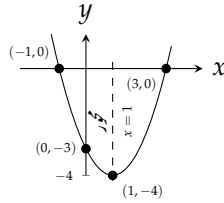
شکل 1.76



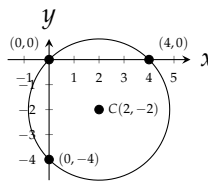
شکل 1.75



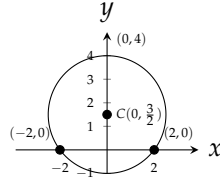
شکل 1.82



شکل 1.81



شکل 1.80



شکل 1.79

سوال 42:  $C(1, 1)$ ,  $a = \sqrt{2}$

سوال 43:  $C(-\sqrt{3}, -2)$ ,  $a = 2$   
جواب:  $(x + \sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 4$  ، شکل 1.77

سوال 44:  $C(3, \frac{1}{2})$ ,  $a = 5$

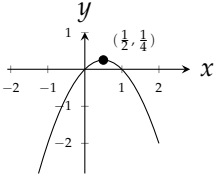
سوال 45 تا سوال 50 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔ دائرے کا مرکز اور قطع  $x$  ، قطع  $y$  (اگر پائے جاتے ہوں) کے محدود دکھائیں۔

سوال 45:  $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$   
جواب:  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$  ، شکل 1.78

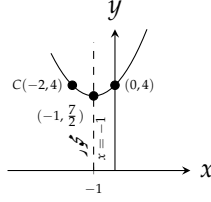
سوال 46:  $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

سوال 47:  $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$   
جواب:  $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$  ، شکل 1.79

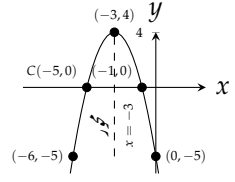
سوال 48:  $x^2 + y^2 - 4x - \frac{9}{4} = 0$



شکل 1.85



شکل 1.84



شکل 1.83

سوال 49:  $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$   
 شکل 1.80،  $(x - 2)^2(y + 2)^2 = 8$

سوال 50:  $x^2 + y^2 + 2x = 3$

### قطع مکانی

سوال 51 تا سوال 58 میں دیے گئے قطع مکانی ترسیم کریں۔ راس، محور اور قطع  $x$ ، قطع  $y$  بھی ظاہر کریں۔

سوال 51:  $y = x^2 - 2x - 3$   
 شکل 1.81،  $y = x^2 - 2x - 3$

سوال 52:  $y = x^2 + 4x + 3$

سوال 53:  $y = -x^2 + 4x$   
 جواب: شکل 1.82،  $y = -x^2 + 4x$

سوال 54:  $y = -x^2 + 4x - 5$

سوال 55:  $y = -x^2 - 6x - 5$   
 جواب: شکل 1.83

سوال 56:  $y = 2x^2 - x + 3$

سوال 57:  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$   
 جواب: شکل 1.84

سوال 58:  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

سوال 59: قطع مکانی  $y = x - x^2$  ترسیم کرتے ہوئے  $f(x) = \sqrt{x - x^2}$  کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔  
جواب: شکل 1.85

سوال 60: قطع مکانی  $y = 3 - 2x - x^2$  ترسیم کرتے ہوئے  $g(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$  کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

### عدم مساوات

سوال 61 تا سوال 68 میں دیے گئے عدم مساوات اور عدم مساوات کی جوڑیوں پر تبصرہ کریں۔

سوال 61:  $x^2 + y^2 > 7$   
جواب: رداس  $\sqrt{7}$  کے دائرے کی بیرون-دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 62:  $x^2 + y^2 < 5$

سوال 63:  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$   
جواب:  $(1, 0)$  پر مرکز اور رداس 2 دائرے پر اور اس کے اندر۔

سوال 64:  $x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$

سوال 65:  $x^2 + y^2 > 1$ ,  $x^2 + y^2 < 4$   
جواب: دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  اور دائرہ  $x^2 + y^2 = 4$  کے بیچ جھلی۔ (وہ نقطے جن کا مبدا سے فاصلہ 1 اور 2 کے بیچ ہے۔)

سوال 66:  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $(x + 2)^2 + y^2 \leq 4$

سوال 67:  $x^2 + y^2 + 6y < 0$ ,  $y > -3$   
جواب: خط  $y = -3$  کی بالائی جانب رداس 3 کے دائرہ کی اندرون-دائرے کا مرکز  $(0, -3)$  ہے۔

سوال 68:  $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4$ ,  $x > 2$

سوال 69: ایسا عدم مساوات لکھیں جو رداس  $\sqrt{6}$  کے دائرہ جس کا مرکز  $(-2, 1)$  ہو کے اندر نقطوں کو ظاہر کرتی ہو۔  
جواب:  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$

سوال 70: رداس 4 اور مرکز  $(-4, 2)$  والے دائرے کے باہر نقطوں کے لئے عدم مساوات لکھیں۔

سوال 71: رداس 2 اور مرکز  $(0, 0)$  دائرے پر یا اس کے اندر، اور نقطہ  $(1, 0)$  سے گزرتا انتخابی خط پر یا اس کے دائیں جانب نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔  
جواب:  $x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 1$

سوال 72: رداس 2 اور مرکز  $(0, 0)$  والے دائرے کے باہر اور ایسے دائرہ جس کا مرکز  $(1, 3)$  ہو اور جو مہدا سے گزرتا ہو، کے اندر نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

### منتقلی خطوط

سوال 73: خط  $y = mx$  جو مہدا سے گزرتا ہے کو افقی اور انتخابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ  $(x_0, y_0)$  سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں (جس کو نقطہ-ڈھلوان مساوات کہتے ہیں)۔  
جواب:  $y = y_0 + m(x - x_0)$

سوال 74: خط  $y = mx$  کو انتخابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ  $(0, b)$  سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں۔

### خطوط، دائرے اور قطع مکافی کا ایک دوسرے کو قطع ہونا

سوال 75 تا سوال 82 میں دیے دو مساوات ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

سوال 75:  $y = 2x, x^2 + y^2 = 1$   
جواب:  $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

سوال 76:  $x + y = 1, (x - 1)^2 + y^2 = 1$

سوال 77:  $y - x = 1, y = x^2$   
جواب:  $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}), (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$



سوال 78:  $x + y = 0, \quad y = -(x - 1)^2$

سوال 79:  $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$   
جواب:  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

سوال 80:  $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = (x - 1)^2$

سوال 81:  $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$   
جواب:  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

سوال 82:  $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 1$

سوال 83 تا سوال 86 میں مساوات  $y = f(ax)$  میں مستقل  $a$  کی تبدیلی کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر ہم  $y = f(ax)$  کو کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کرتے ہیں۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا.  $y = f(x)$  کے ساتھ ساتھ  $a = 2, 3, \dots, 10$  لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر  $y = f(ax)$  ترسیم کریں۔  $a$  کی (ثابت) قیمت بڑھانے کے اثرات پر تبصرہ کریں۔

ب.  $y = f(x)$  کے ساتھ ساتھ  $a = -2, -3, \dots, -10$  لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر  $y = f(ax)$  ترسیم کریں۔ اب ترسیم پر اثرات کیا ہیں؟

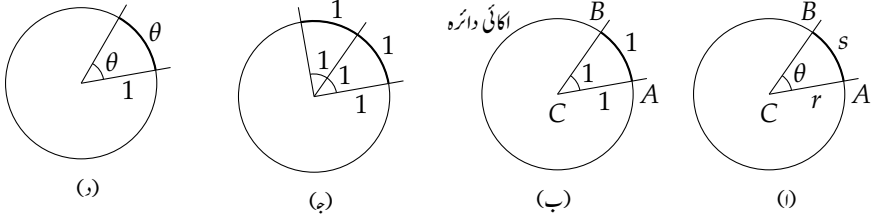
ج.  $y = f(x)$  اور  $y = f(ax)$  کو  $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  کے لئے ترسیم کریں۔ ترسیم پر  $|a| < 1$  کا کیا اثر پایا جاتا ہے؟

سوال 83:  $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}, \quad [-10, 10]$

سوال 84:  $f(x) = \frac{2x(x-1)}{x^2+1}, \quad [-3, -2]$

سوال 85:  $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}, \quad [-2, -2]$

سوال 86:  $f(x) = \frac{x^4-4x^3+10}{x^2+4}, \quad [-1, 4]$



شکل 1.86: ریڈین کی تعریف

## 1.5 ٹکونیاتی تفاعل

اس حصہ میں ریڈین، ٹکونی تفاعل، دوریت اور بنیادی ٹکونی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

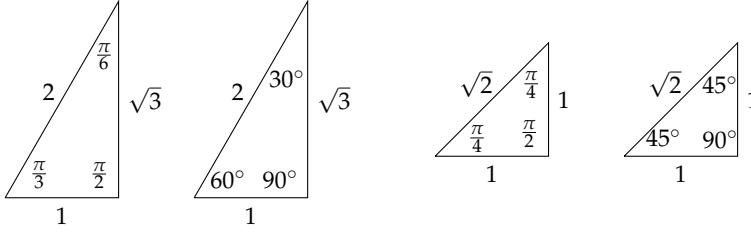
### ریڈین

چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات کی صورت میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویہ کو ریڈین میں ناپا جاتا ہے جہاں  $180^\circ$  کو  $\pi$  ریڈین کہتے ہیں۔ ریڈین کی استعمال سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

شکل 1.86-1 میں رداس  $r$  کا دائرہ دکھایا گیا ہے جس کے مرکز  $C$  سے دو شعاعیں نکل رہی ہیں جو مرکز پر وسطی زاویہ  $\theta$  بناتی ہیں۔ یہ شعاعیں دائرے کو  $A$  اور  $B$  پر قطع کرتی ہیں۔ قوس  $AB$  کی لمبائی  $s$  ہے۔ اگر دائرے کا رداس 1 ہو تب ہم اس دائرے کو اکائی دائرہ<sup>62</sup> کہتے ہیں۔ اکائی دائرے پر اکائی لمبائی کا قوس جتنا زاویہ بناتی ہے اس کو ایک ریڈین زاویہ کہتے ہیں (یہی ایک ریڈین کی تعریف ہے)۔ شکل 1.86-2 میں ایک ریڈین کی اس تعریف کی وضاحت کی گئی ہے۔ شکل 1.86-3 ج میں اکائی لمبائی کے دو قوس ساتھ ساتھ رکھے گئے ہیں جو ایک ایک ریڈین کا وسطی زاویہ بناتے ہیں۔ یوں کل قوس کی لمبائی 2 ہے اور کل زاویہ 2 ریڈین ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اکائی دائرے پر وسطی زاویہ کی ریڈین میں ناپ قوس کی لمبائی کے برابر ہوگی۔ شکل 1.86-4 میں اس حقیقت کو دکھایا گیا ہے۔

زاویہ  $ACB$  کی ریڈین ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس  $AB$  کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط  $2\pi$  ہے اور ایک مکمل چکر  $360^\circ$  ہے لہذا درج ذیل تعلق لکھا جاسکتا ہے۔

$$180^\circ = \pi \text{ ریڈین}$$



شکل 1.87: اشکال برائے مثال 1.42

مثال 1.42: درجہ سے ریڈیئن میں زاویے کی تبدیلی  
 $45^\circ$  کو ریڈیئن میں لکھیں اور  $\frac{\pi}{6}$  کو درجہ میں لکھیں۔  
 حل: شکل 1.87 دیکھیں۔

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈیئن}$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

□

### ریڈیئن اور درجہ

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.02 \text{ ریڈیئن}$$

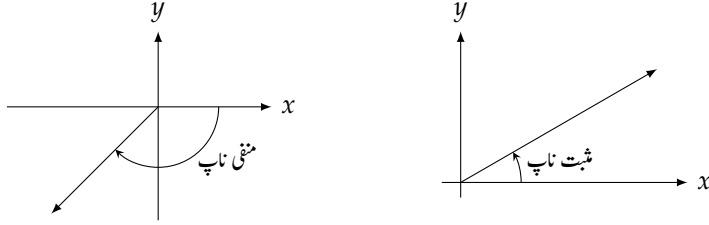
$$1 \text{ ریڈیئن} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$$

دھیان رہے کہ زاویے کی پیمائش درجات میں ہونے کو  $^\circ$  کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ریڈیئن کو بغیر علامت لکھا جاتا ہے۔ یوں  $45^\circ$  سے مراد پینتالیس درجہ ہو گا جبکہ  $\theta = 3$  سے مراد تین ریڈیئن ہو گا۔

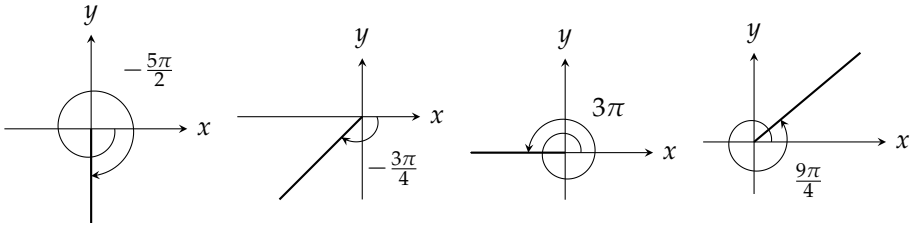
$xy$  مستوی میں شعاع کا راس مبدأ پر اور شعاع کا ابتدائی مقام مثبت  $x$  محور پر ہونے کی صورت میں زاویہ کے مقام کو معیاری مقام<sup>63</sup> کہتے ہیں۔ مثبت  $x$  محور سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ زاویہ کی ناپ مثبت اور گھڑی کی سوئی کی رخ ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل 1.88)۔ یوں مثبت  $x$  محور کا زاویہ 0 ریڈیئن اور منفی  $x$  محور کا زاویہ  $\pi$  ریڈیئن ہو گا۔

گھڑی مخالف چکر بیان کرتے ہوئے زاویے کی ناپ  $2\pi$  یعنی  $360^\circ$  سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ اسی طرح گھڑی کی رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ کچھ بھی ممکن ہے (شکل 1.89)۔

<sup>63</sup> standard position

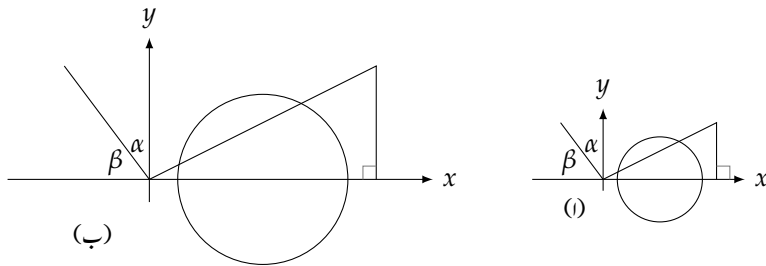


شکل 1.88: زاویے کی ناپ

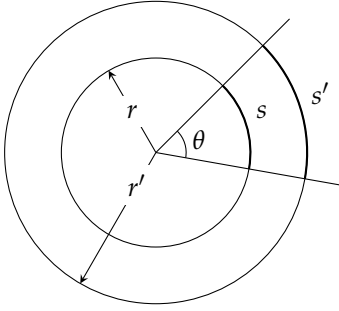


شکل 1.89: مثبت اور منفی ریڈیئن

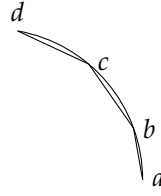
شکل 1.90-1 میں چند اشکال کو چکدر  $xy$  مستوی پر دکھایا گیا ہے۔ اس  $xy$  مستوی کو کھینچ کر  $x$  رخ اور  $y$  رخ کی لمبائیاں  $k$  گنا کرنے سے شکل 1.90-2 حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ جسامت  $k$  گنا کر دی گئی ہے۔ یوں اگر بائیں شکل کے ٹکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب  $a$  اور  $b$  ہوں تب اس کی وتر کی لمبائی  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ہوگی۔ دائیں شکل میں ٹکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب  $ka$  اور  $kb$  ہوں گی لہذا اس کا وتر  $\sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = k\sqrt{a^2 + b^2}$  ہوگا۔ آپ نے دیکھا کہ دائیں مستوی پر نا صرف افقی اور انتصابی خط بلکہ ترچھے خط کی لمبائی بھی  $k$  گنا ہو گئی ہے۔ چونکہ ہر ترچھے خط کو کسی ٹکون کا وتر تصور کیا جاسکتا ہے لہذا دائیں مستوی پر (ہر افقی اور ہر انتصابی خط کے ساتھ ساتھ) ہر ترچھے خط کی لمبائی  $k$  گنا ہوگی۔ کیا جسامت  $k$  گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی  $k$  گنا ہوگی؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جس کا ثبوت اب پیش کرتے ہیں۔



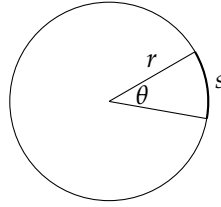
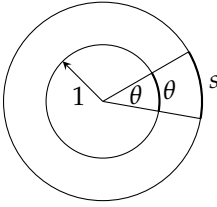
شکل 1.90: شکل بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر اثر نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 1.92: محیط دائرہ



شکل 1.91: قوس کی لمبائی



شکل 1.93: قوس، رداس اور زاویے کا تعلق۔

شکل 1.91 میں قوس کی لمبائی جاننے کی خاطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی لی جاسکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ اب اگر اس قوس کی جسامت کو  $k$  گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی  $k$  گنا ہوگی لہذا ان کی مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی  $k$  گنا ہوگی۔ (ثبوت مکمل ہوا۔)

شکل 1.93-1 میں رداس  $r$  کے دائرے پر قوس  $s$  اور وسطی زاویہ  $\theta$  دکھائے گئے ہیں۔ اس دائرے کے مرکز پر ہم 1 رداس کا دائرہ بناتے ہیں (شکل 1.93-2)؛ اگر دیے گئے دائرے کا رداس اکائی سے کم ہو تب یہ دائرہ اکائی دائرے کے اندر نظر آئے گا۔ (جیسا شکل 1.93-2 میں دکھایا گیا ہے) ریڈیئن کی تعریف کی رو سے اکائی دائرے پر قوس اور زاویہ آپس میں برابر ہوں گے۔ شکل 1.93-2 میں دونوں دائروں پر قوس کی لمبائیوں کا تناسب  $\frac{s}{\theta}$  اور دائروں کے رداس کی لمبائیوں کا تناسب  $\frac{r}{1}$  ایک جیسا ہوں گے، یعنی  $\frac{s}{\theta} = \frac{r}{1}$  جس سے درج ذیل اہم ترین کلیہ ملتا ہے۔

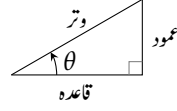
قوس، رداس اور زاویے کا تعلق

$$s = r\theta$$

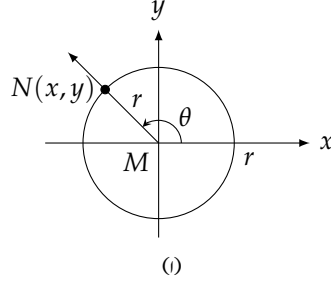
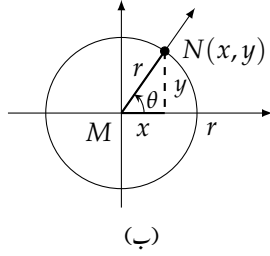
زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں

یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔ جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔ یوں اگر ہم زاویہ  $\frac{\pi}{6}$  کی بات کریں تب اس سے مراد  $\frac{\pi}{6}$  ریڈیئن کا زاویہ ہو گا نا کہ  $\frac{\pi}{6}$  درجے کا زاویہ۔

$\sin \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$	کوسائنٹ	$\csc = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$
$\cos \theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$	سیکینٹ	$\sec = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$
$\tan \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$	کوٹینجینٹ	$\cot = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$



شکل 1.94: قائمہ مثلث اور ٹیکنونیائی تفاعل



شکل 1.95: ٹیکنونیائی تفاعل

مثال 1.43: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر  $2\pi$  لمبائی کا قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بناتا ہے۔  
(ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو  $\frac{3\pi}{4}$  وسطی زاویہ بناتا ہو۔  
حل:

$$s = r\theta = 8\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\pi \quad (\text{ب}) \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الف})$$

□

چھ بنیادی ٹیکنونیائی تفاعل

آپ زاویہ حادہ کے ٹیکنونیائی تفاعل سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل 1.94)۔ ہم انہیں تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرد اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس  $r$  کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب ان ٹیکنونیائی تفاعل کو نقطہ  $N(x, y)$  کے محدود کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتا ہوا شعاع دائرے کو  $N(x, y)$  پر قطع کرتا ہے۔

شکل 1.95-ا کو دیکھتے ہوئے ان تفاعل کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

## چھ ٹکونیاتی تفاعل

$$\begin{array}{ll}
 \text{سائن} & \sin \theta = \frac{y}{r} \\
 \text{کوسائن} & \cos \theta = \frac{x}{r} \\
 \text{ٹینجینٹ} & \tan \theta = \frac{y}{x}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{کوسیکنٹ} & \csc \theta = \frac{r}{y} \\
 \text{سییکنٹ} & \sec \theta = \frac{r}{x} \\
 \text{کوتینجینٹ} & \cot \theta = \frac{x}{y}
 \end{array}$$

آپ شکل 1.95-ب سے دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ حادثہ کی صورت میں ٹکونیاتی تفاعل کی توسیعی تعریف اور قائمہ زاویہ ٹکونی تعریف ایک جیسے ہیں۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں  $x = 0$  کی صورت میں  $\tan \theta$  اور  $\sec \theta$  غیر معین ہیں (چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے)۔ یوں یہ  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$  کے لئے غیر معین ہیں۔ اسی طرح  $y = 0$  یعنی  $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  کے لئے  $\csc \theta$  اور  $\cot \theta$  غیر معین ہیں۔

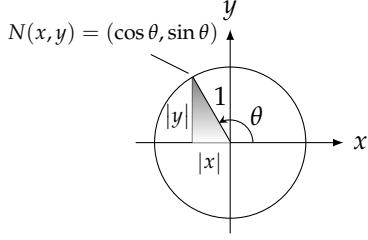
اسی طرح درج ذیل تعریف بھی لکھے جاسکتے ہیں۔

## ٹکونیاتی تفاعل کے باہمی تعلقات

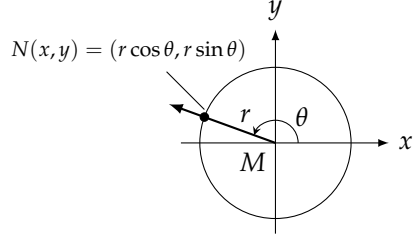
$$\begin{array}{ll}
 \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \\
 \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} & \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}
 \end{array}$$

مستوی میں نقطہ  $N(x, y)$  کو مہداسے فاصلہ  $r$  اور زاویہ  $\theta$  کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے (شکل 1.96)۔ چونکہ  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  اور  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  ہیں لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$



شکل 1.97: زاویہ  $\theta$  کے لئے زاویہ حادہ نکون



شکل 1.96: مستوی میں کارتیسی محدد کا  $r$  اور  $\theta$  میں اظہار۔

### تکوینیاتی تفاعل کی قیمتیں

شکل 1.95 کے دائرے میں  $r = 1$  ہونے کی صورت میں  $\sin \theta$  اور  $\cos \theta$  کی تعارفی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y$$

یوں ہم سائن اور کوسائن کی قیمتوں کو بالترتیب نقطہ  $N(x, y)$  کی  $x$  اور  $y$  محدد سے پڑھ سکتے ہیں۔ نقطہ  $N$  سے  $x$  محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ نکون سے بھی انہیں حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 1.97)۔ ہم  $x$  اور  $y$  کی قیمتیں نکون کی اطراف سے ناپتے ہیں۔  $x$  اور  $y$  کی علامتیں اس ربع سے تعین کی جاتی ہیں جس میں نکون پایا جاتا ہو۔

مثال 1.44:  $\frac{2\pi}{3}$  ریڈین کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم: زاویے کو معیاری مقام پر اکائی دائرے میں بنائیں۔ حوالہ نکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.98)۔  
دوسرا قدم: جہاں اکائی دائرے کو شعاع قطع کرتی ہے اس نقطے کے محدد دریافت کریں:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = x \text{ کا محدد } N = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = y \text{ کا محدد } N = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

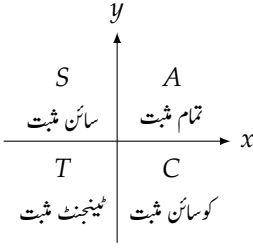
□

تکوینیاتی تفاعل کی قیمتوں کی علامت جاننے کے لئے شکل 1.99 میں دکھایا گیا CAST کا قاعدہ یاد رکھیں۔

مثال 1.45:  $-\frac{\pi}{4}$  ریڈین کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

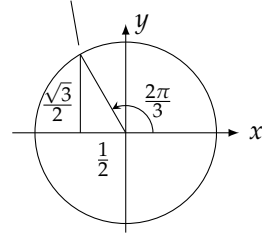
حل: پہلا قدم: معیاری مقام پر اکائی دائرے میں زاویہ کھینچ کر حوالہ نکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.100)۔



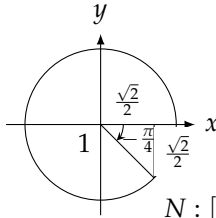


شکل 1.99: قاعدہ CAST

$$\left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



شکل 1.98: ٹکونیاتی تناسب کی قیمتیں (مثال 1.44)



$$N : \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

شکل 1.100: شکل برائے مثال 1.45

دوسرا قدم: نقطہ  $N$  کے محدد تلاش کریں۔

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = x \text{ کا محدد } N = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y \text{ کا محدد } N = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

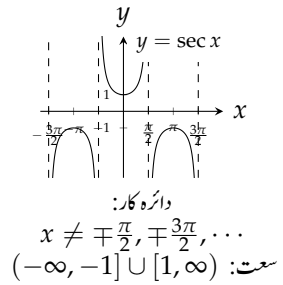
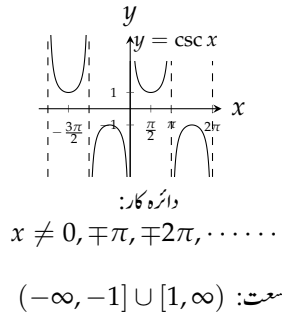
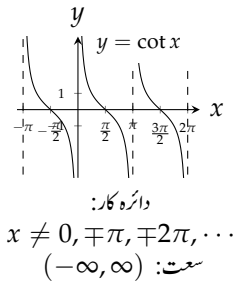
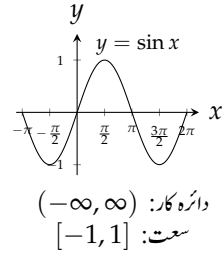
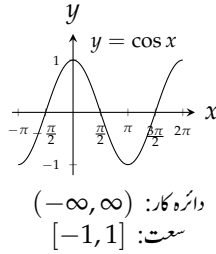
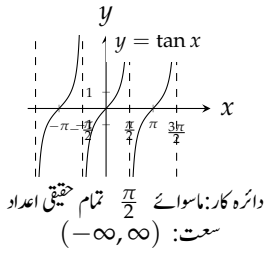
□

درج بالا دو مثالوں کی طرح حل کرتے ہوئے جدول میں دیے قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔

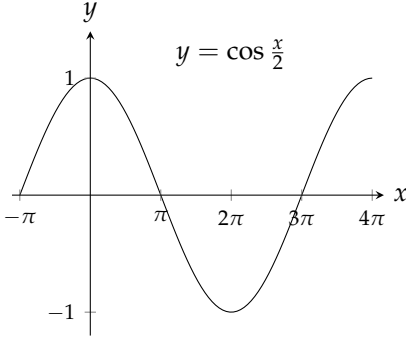
ترسیم

ٹکونیاتی تناسب کو کارٹیسی محدد میں ترسیم کرتے ہوئے ہم عموماً غیر تابع متغیر  $\theta$  کو  $x$  سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 1.101)۔

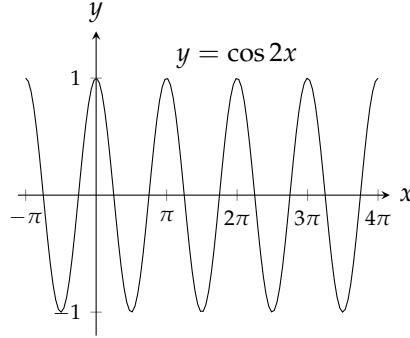
درجہ ریڈین	$-180^\circ$	$-135^\circ$	$-90^\circ$	$-45^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$\sin \theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0



شکل 1.101: چھ بنیادی ٹریگونیٹریک فنکشنز کے گراف۔ ان فنکشنز کی دوریت صاف ظاہر ہے۔



(ب)



(i)

شکل 1.102:  $\cos 2x$  کا دوری عرصہ کم ہے جبکہ  $\cos \frac{x}{2}$  کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

### دوریت

معیاری مقام پر زاویہ  $x$  اور زاویہ  $x + 2\pi$  ہم مکان ہوں گے۔ یوں ان دونوں زاویوں کے ٹکونیاتی تفاعل کی قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔ مثال کے طور پر  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  ہو گا۔ ایسے تفاعل جن کی قیمت مقررہ وقفوں سے دہرائی ہو دوری<sup>64</sup> کہلاتا ہے۔

تعریف: اگر کسی مثبت عدد  $p$  کے لئے تمام  $x$  پر  $f(x + p) = f(x)$  ہو تب تفاعل  $f(x)$  دوری کہلاتا ہے۔  $p$  کی ایسی کم سے کم قیمت کو  $f(x)$  کا دوری عرصہ<sup>65</sup> کہتے ہیں۔

□

ہم شکل 1.101 سے دیکھ سکتے ہیں کہ ٹینجٹ اور کوٹینجٹ تفاعل کا دوری عرصہ  $p = \pi$  ہے جبکہ باقی چار تفاعل کا دوری عرصہ  $2\pi$  ہے۔

شکل 1.102 میں  $y = \cos 2x$  اور  $y = \cos \frac{x}{2}$  ترسیم کیے گئے ہیں۔ ٹکونیاتی تفاعل میں  $x$  کو 1 سے بڑی عدد سے ضرب کرنے سے تفاعل تیز ہو جاتا ہے (اس کی تعدد بڑھ جاتی ہے اور اس کا دوری عرصہ کم ہو جاتا ہے) جبکہ 1 سے کم عدد سے  $x$  کو ضرب کرنے سے تفاعل آہستہ ہو جاتا ہے جس سے اس کا دوری عرصہ بڑھ جاتا ہے۔

دوری تفاعل کی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ سائنس میں عموماً طبعی نظام جن پر ہم غور کرتے ہیں کا رویہ دوری ہوتا ہے۔ دل کی دھڑکن، دماغی لہریں اور گھریلو استعمال کی 220 وولٹ کی بجلی دوری ہیں۔ اسی طرح خرد امواج تندور میں برقی میدان جو خوراک کو گرم کرتی ہیں دوری

periodic<sup>64</sup>  
period<sup>65</sup>

ہوتی ہیں۔ موسمی کاروبار میں سرمایہ کی آمد و رفت اور گھومنے والی مشین کا رویہ بھی دوری ہوتا ہے۔ ہمارے پاس پختہ شواہد موجود ہیں جن کے تحت دنیا پر برفانی عہد تقریباً 90 000 تا 100 000 سال کے وقفہ سے دہراتا ہے۔

اگر اتنے زیادہ چیزیں دوری ہیں تب ہم صرف تکنیکی تفاعل پر کیوں غور کرنا چاہتے ہیں؟ اس کا جواب اعلیٰ احصاء کا ایک حیرت کن مسئلہ دیتا ہے جس کے تحت ہر دوری تفاعل، جسے ہم ریاضی نمونہ میں استعمال کرنا چاہیں گے، کو ہم سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں۔ یوں سائن اور کوسائن تفاعل کا احصاء جانتے ہوئے ہم کسی بھی دوری تفاعل کا ریاضی نمونہ اخذ کر سکیں گے۔

### جفت بالمقابل طاق

شکل 1.101 سے ظاہر ہے کہ کوسائن اور سینکسٹ تفاعل جفت ہیں جبکہ باقی چار تفاعل طاق ہیں:

جفت	طاق
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

### مماثل

اکائی دائرے پر نقطہ  $N(\cos \theta, \sin \theta)$  سے  $x$  محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ ٹکون پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے درج ذیل ملتا ہے (شکل 1.103)۔

$$(1.8) \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

یہ مساوات  $\theta$  کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اور غالباً یہ اہم ترین تکنیکی مماثل ہے۔

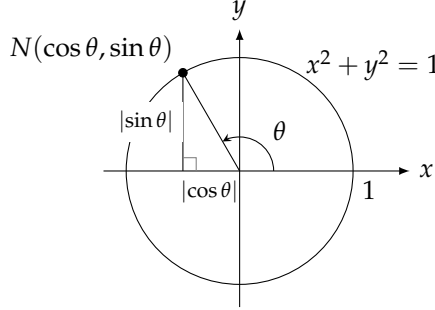
مساوات 1.8 کے دونوں ہاتھ کو ایک بار  $\cos^2 \theta$  اور ایک بار  $\sin^2 \theta$  سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

آپ درج ذیل مماثل سے بخوبی واقف ہوں گے۔

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned} \quad \text{مجموعہ زاویہ کلیات}$$



شکل 1.103: عمومی زاویہ  $\theta$  کے لئے حوالہ ٹریگون۔

اس کتاب میں تمام درکار مماثل کو مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 1.9  $A$  اور  $B$  کی ہر قیمت کے لئے درست ہیں۔  $\cos(A - B)$  اور  $\sin(A - B)$  کے لئے بھی اسی طرح کے کلیات پائے جاتے ہیں (سوال 35 اور سوال 36)۔

مجموعہ زاویہ کلیات میں  $A$  اور  $B$  دونوں کے لئے  $\theta$  پر کرنے سے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \text{دوہرا زاویہ کلیات}$$

درج ذیل کلیات

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

کو آپس میں جمع کرنے سے  $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$  اور تفریق کرنے سے  $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$  حاصل ہوتا ہے جن سے دوہرا زاویے کے درج ذیل مزید دو کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$(1.11) \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

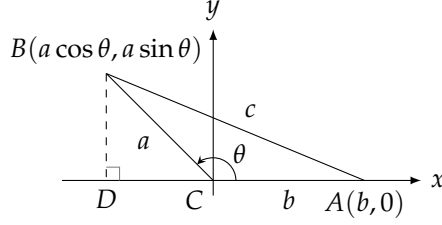
$$(1.12) \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

درج بالا میں  $\theta$  کی جگہ  $\frac{\theta}{2}$  لکھنے سے نصف زاویہ کلیات<sup>66</sup> حاصل ہوتے ہیں۔

قاعدہ کوسائن

اگر ٹریگون  $ABC$  کے اضلاع  $a$ ،  $b$  اور  $c$  ہوں اور  $c$  کے سامنے زاویہ  $\theta$  ہو تب درج ذیل ہوگا (شکل 1.104)۔

$$(1.13) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



شکل 1.104: قاعدہ کوسائن

اس مساوات کو قاعدہ کوسائن<sup>67</sup> کہتے ہیں۔

اس کلیہ کو حاصل کرنے کی خاطر تینوں کو کارتیسی محدود پر یوں بنائیں کہ اس کا ایک راس مبدا پر اور ایک ضلع  $x$  محور پر ہو (شکل 1.104)۔ اس  $B$  سے  $x$  محور پر قائمہ گرہیں۔ یوں حاصل قائمہ مثلث  $ABD$  پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق کرتے ہیں جہاں  $A$  سے  $D$  تک فاصلہ  $b - a \cos \theta$  لکھا جائے گا (مثلاً  $b = 3$  اور  $a \cos \theta = -2$  کی صورت میں  $AD = 3 - (-2) = 5$  ہو گا اور  $a \cos \theta = 1$  کی صورت میں  $AD = 3 - 1 = 2$  ہو گا)۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + b^2 - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  کا سہارا لیا گیا ہے۔

قاعدہ کوسائن مسئلہ فیثاغورث کو عمومی بناتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\theta = \frac{\pi}{2}$  کی صورت میں  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  کی بنا قاعدہ کوسائن سے  $c^2 = a^2 + b^2$  یعنی مسئلہ فیثاغورث حاصل ہوتا ہے۔

## سوالات

ریڈیئن، درجہ اور دائری قوس

سوال 1: رداس 10 cm کے دائرے پر کتنی لمبائی کا قوس (الف)  $\frac{4\pi}{5}$  ریڈیئن (ب)  $110^\circ$  کا وسطی زاویہ بنائے گا؟  
جواب: (الف)  $8\pi$  سٹی میٹر (ب) 0.19 میٹر

half angle formulae<sup>66</sup>  
law of cosines<sup>67</sup>

سوال 2: رداس 8 کے دائرے پر  $10\pi$  لمبائی کا قوس، مرکز پر کتنا وسطی زاویہ بناتا ہے؟ جواب درجات اور ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 3: کیلکولیٹر  $80^\circ$  کا وسطی زاویہ بنانے کی خاطر آپ 30 cm قطر کے قرص پر مرکز سے دو خط کھینچنا چاہتے ہیں۔ محیط پر قرص کی لمبائی 1 mm درستی تک تلاش کریں۔  
جواب: 20.9 cm

سوال 4: کیلکولیٹر ایک میٹر قطر کے پہیا کو ہموار زمین پر 30 cm چلایا جاتا ہے۔ پہیا کتنا زاویہ گھوما ہوگا؟ جواب (الف) ریڈیئن کے دو سوال حصہ اور (ب) درجہ کے ایک حصہ درستی تک تلاش کریں۔

### ٹکونیاتی تفاعل کی قدر پیمانی

سوال 5: درج ذیل بایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

$\theta$	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\theta$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$\sin \theta$						$\sin \theta$					
$\cos \theta$						$\cos \theta$					
$\tan \theta$						$\tan \theta$					
$\cot \theta$						$\cot \theta$					
$\sec \theta$						$\sec \theta$					
$\csc \theta$						$\csc \theta$					

سوال 6: درج بالا دایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

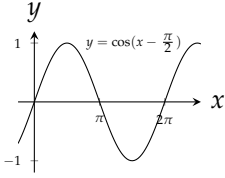
سوال 7 تا سوال 12 میں  $\sin x$ ،  $\cos x$ ،  $\tan x$  میں سے ایک دیا گیا ہے۔ باقی دو تفاعل کو دیے گئے وقفے کے اندر تلاش کریں۔

سوال 7: دائرہ کار:  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ،  $\sin x = \frac{3}{5}$ ،  
جواب:  $\cos x = -\frac{4}{5}$ ،  $\tan x = -\frac{3}{4}$

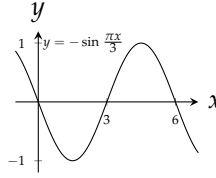
سوال 8: دائرہ کار:  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ،  $\tan x = 2$ ،

سوال 9: دائرہ کار:  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ ،  $\cos x = \frac{1}{3}$ ،  
جواب:  $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ ،  $\tan x = -\sqrt{8}$

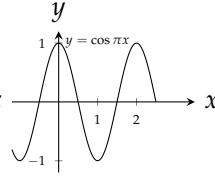
سوال 10: دائرہ کار:  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ،  $\cos x = -\frac{5}{13}$ ،



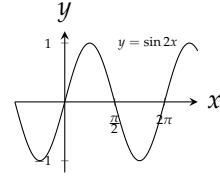
شکل 1.108



شکل 1.107



شکل 1.106



شکل 1.105

سوال 11: دائرہ کار:  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $\tan x = \frac{1}{2}$ ,  
جواب:  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 12: دائرہ کار:  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $\sin x = -\frac{1}{2}$

**تکونیاتی تفاعل کی ترسیم**  
سوال 13 تا سوال 22 میں دیا گیا تفاعل ترسیم کریں۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ تلاش کریں۔

سوال 13:  $\sin 2x$   
جواب: دوری عرصہ  $\pi$  ہے۔ شکل 1.105

سوال 14:  $\sin \frac{x}{2}$

سوال 15:  $\cos \pi x$   
جواب: دائرہ کار: 2، شکل 1.106

سوال 16:  $\cos \frac{\pi x}{2}$

سوال 17:  $-\sin \frac{\pi x}{3}$   
جواب: دائرہ کار: 6، شکل 1.107

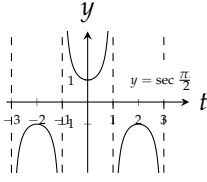
سوال 18:  $-\cos 2\pi x$

سوال 19:  $\cos(x - \frac{\pi}{2})$   
جواب: دائرہ کار:  $2\pi$ ، شکل 1.108

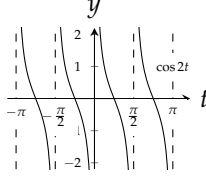
سوال 20:  $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

سوال 21:  $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$   
جواب: دائرہ کار:  $2\pi$ ، شکل 1.109

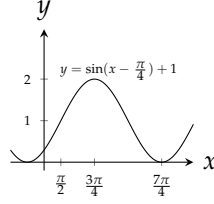




شکل 1.111



شکل 1.110



شکل 1.109

سوال 22:  $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$ 

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے تقاضا کو  $ts$  مستوی میں ترسیم کریں جہاں افقی محور  $t$  ہو۔ ہر تقاضا کا دوری عرصہ اور تقاضا تلاش کریں۔

سوال 23:  $s = \cot 2t$  جواب: دائرہ کار:  $\frac{\pi}{2}$ ، شکل 1.110

سوال 24:  $s = -\tan \pi t$ 

سوال 25:  $s = \sec \frac{\pi t}{2}$  جواب: دائرہ کار: 4، شکل 1.111

سوال 26:  $s = \csc \frac{t}{2}$ 

سوال 27: کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے  
(الف)  $y = \sec x$  اور  $y = \cos x$  کو  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔  $\sec x$  کے رویہ پر  $\cos x$  کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔  
(ب)  $y = \csc x$  اور  $y = \sin x$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔  $\csc x$  کے رویہ پر  $\sin x$  کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

سوال 28:  $-7 \leq x \leq 7$  کے لئے  $y = \tan x$  اور  $y = \cot x$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔  $\tan x$  کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے  $\cot x$  پر تبصرہ کریں۔

سوال 29:  $y = \sin x$  اور  $y = \lfloor \sin x \rfloor$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔  $\lfloor \sin x \rfloor$  کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 30:  $y = \sin x$  اور  $y = \lceil \sin x \rceil$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔  $\lceil \sin x \rceil$  کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

## اضافی تکنیکی مماثل

مجموعہ زاویہ کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال 31 تا سوال 36 میں دیے گئے مماثل حاصل کریں۔

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \quad \text{سوال 31}$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \text{سوال 32}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \text{سوال 33}$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x \quad \text{سوال 34}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \text{سوال 35}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \text{سوال 36}$$

سوال 37: اگر سوال 35 میں  $B = A$  پر کیا جائے تب کیا حاصل ہوگا؟ کیا آپ حاصل کردہ مماثل کو پہلے سے جانتے ہیں؟

سوال 38: مجموعہ زاویہ کلیات میں  $B = 2\pi$  لینے سے کیا حاصل ہوگا؟ کیا آپ نتائج سے مطمئن ہیں؟

## مجموعہ زاویہ کلیات کا استعمال

سوال 39 تا سوال 42 میں دی گئی مقدار کو  $\sin x$  اور  $\cos x$  کی صورت میں لکھیں۔

$$\cos(\pi + x) \quad \text{سوال 39}$$

جواب:  $-\cos x$

$$\sin(2\pi - x) \quad \text{سوال 40}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \quad \text{سوال 41}$$

جواب:  $-\cos x$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) \quad \text{سوال 42}$$

سوال 43:  $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$  استعمال کرتے ہوئے  $\sin \frac{7\pi}{12}$  کی قیمت حاصل کریں۔  
جواب:  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

سوال 44:  $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})$  استعمال کرتے ہوئے  $\cos \frac{11\pi}{12}$  کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 45:  $\cos \frac{\pi}{12}$  کی قیمت حاصل کریں۔  
جواب:  $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

سوال 46:  $\sin \frac{5\pi}{12}$  کی قیمت حاصل کریں۔

دوہرا زاویہ کلیات کا استعمال  
سوال 47 تا سوال 50 میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 47:  $\cos^2 \frac{\pi}{8}$   
جواب:  $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

سوال 48:  $\cos^2 \frac{\pi}{12}$

سوال 49:  $\sin^2 \frac{\pi}{12}$   
جواب:  $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

سوال 50:  $\sin^2 \frac{\pi}{8}$

نظریہ اور مثالیں

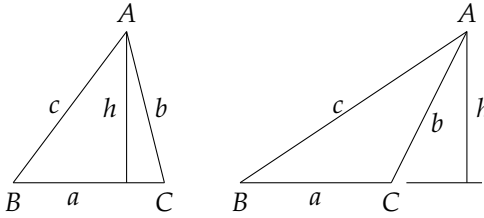
سوال 51: ٹینجینٹ مجموعہ زاویہ کا کلیہ  $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$  ہے۔ اس کلیہ کو اخذ کریں۔

سوال 52:  $\tan(A-B)$  کا کلیہ اخذ کریں۔

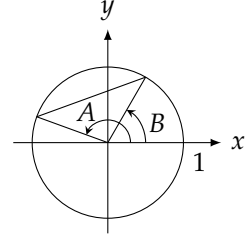
سوال 53: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 پر لاگو کرتے ہوئے  $\cos(A-B)$  کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 54: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 کی طرز کے شکل پر لاگو کرتے ہوئے  $\cos(A+B)$  کا کلیہ اخذ کریں۔ یہ شکل کیسا ہو گا۔

سوال 55: سیکلویٹر ایک مثلث کے اضلاع  $a = 2$ ،  $b = 3$  اور زاویہ  $C = 60^\circ$  ہیں۔ ضلع  $c$  کی لمبائی تلاش کریں۔  
جواب:  $c = \sqrt{7} \approx 2.646$



شکل 1.113: اشکال برائے سوال 57



شکل 1.112: اشکال برائے سوال 53

سوال 56: کیلو لیٹر ایک مثلث کے اضلاع  $a = 2$ ،  $b = 3$  اور زاویہ  $C = 40^\circ$  ہیں۔ ضلع  $c$  کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 57: قاعدہ سائن قاعدہ سائن کہتا ہے کہ اگر مثلث کے زاویے  $A$ ،  $B$ ،  $C$  کے سامنے اضلاع بالترتیب  $a$ ،  $b$ ،  $c$  ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

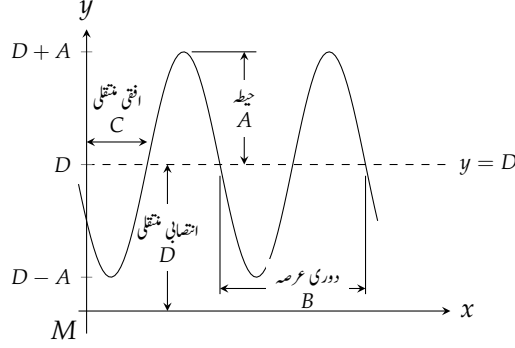
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اشکال 1.113 اور مماثل  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$  استعمال کرتے ہوئے اس قاعدہ کو اخذ کریں۔

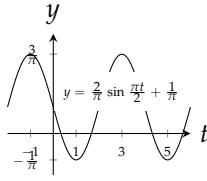
سوال 58: کیلو لیٹر ایک مثلث کے اضلاع  $a = 2$ ،  $b = 3$  اور زاویہ  $C = 60^\circ$  ہیں۔  $\sin B$  کو قاعدہ سائن سے حاصل کریں۔

سوال 59: کیلو لیٹر ایک مثلث کا ضلع  $c = 2$  اور زاویے  $A = \frac{\pi}{4}$  اور  $B = \frac{\pi}{3}$  ہیں۔ زاویہ  $A$  کا مخالف ضلع  $a$  اور تلاش کریں۔  
جواب:  $a = 1.464$

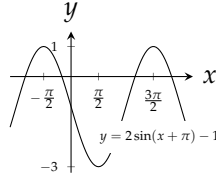
سوال 60: تخمین  $\sin x \approx x$  کی چھوٹی قیمتوں کے لئے  $\sin x \approx x$  ہوتا ہے جہاں  $x$  کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ اس کی وجہ تیسرے باب میں بتائی جائے گی۔  $|x| < 0.1$  کے لئے تخمینی خلل 5000 میں 1 حصہ سے کم ہو گا۔  
(الف) کمپیوٹر پر  $y = \sin x$  اور  $y = x$  کو مبداء کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں  $x$  کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ مبداء کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟  
(ب) کمپیوٹر پر  $y = \sin x$  اور  $y = x$  کو مبداء کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں  $x$  کی ناپ درجات میں ہے۔ مبداء کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟  
(پ) کیلو لیٹر استعمال کرتے ہوئے  $x = 0.1$  کے لئے  $\sin x$  حاصل کریں۔ اگر آپ کی کیلو لیٹر ریڈیئن استعمال کر رہا ہو تب جواب تقریباً 0.1 ہی ہو گا۔ اگر کیلو لیٹر درجات استعمال کر رہا ہو تب جواب مختلف ہو گا۔



شکل 1.114: عمومی سائن تفاعل



شکل 1.116



شکل 1.115

## عمومی سائن ترسیم

شکل 1.114 میں درج ذیل تفاعل کی ترسیم یعنی عمومی سائن ترسیم دکھائی گئی ہے جہاں  $|A|$  جیٹہ،  $|B|$  دوری عرصہ،  $C$  افقی منتقلی اور  $D$  انتظامی منتقلی ہے۔ سوال 61 تا سوال 64 میں عمومی سائن تفاعل کے  $A$ ،  $B$ ،  $C$  اور  $D$  تلاش کریں۔ تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

سوال 61:  $y = 2 \sin(x + \pi) - 1$

جواب:  $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$ ؛ شکل 1.115

سوال 62:  $y = \frac{1}{2} \sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

سوال 63:  $y = -\frac{2}{\pi} \sin\left(-\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{1}{\pi}$

جواب:  $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$ ؛ شکل 1.116

سوال 64:  $y = \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

سوال 65 تا سوال 65 میں عمومی سائن تفاعل  $f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$  پر ترسیم کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ ترسیم کے لئے کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال 65: دوری عرصہ  $A = 3, C = D = 0$  لیتے ہوئے (الف)  $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$  کے لئے وقفہ  $-4\pi \leq x \leq 4\pi$  پر تفاعل ترسیم کریں۔ دوری عرصہ بڑھانے سے تفاعل کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ (ب)  $B$  کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟  $B = -3$  اور  $B = -2\pi$  کے لئے ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں۔

سوال 66: افقی منتقلی  $A = 3, B = 6, D = 0$  لیتے ہوئے (الف) تفاعل  $f(x)$  کو  $C = 0, 1, 2$  کے لئے وقفہ  $-4\pi \leq x \leq 4\pi$  پر ترسیم کریں۔  $C$  کی بڑھتے مثبت قیمت کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب)  $C$  کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی۔ (پ) صفر افقی منتقلی کے لئے  $C$  کی کم تر مثبت قیمت کیا ہو گی؟ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 67: انتہائی منتقلی  $A = 3, B = 6, C = 0$  لیتے ہوئے (الف) تفاعل  $f(x)$  کو  $D = 0, 1, 3$  کے لئے وقفہ  $-4\pi \leq x \leq 4\pi$  پر ترسیم کریں۔  $D$  کی بڑھتی مثبت قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب)  $D$  کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

سوال 68: جیٹ  $B = 6, C = D = 0$  لیتے ہوئے (الف)  $A$  کی مثبت بڑھتی قیمتوں کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟  $f(x)$  کو  $A = 1, 5, 9$  کے لئے ترسیم کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔ (ب)  $A$  کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

## باب 2

### حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکنیکیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں باضابطہ وضع کرتے ہیں۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل  $f$  میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔ کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں  $x$  میں چھوٹی تبدیلی،  $f(x)$  میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔ دیگر تفاعل میں  $x$  کی چھوٹی تبدیلی،  $f(x)$  میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔ تفاعل کی تفرق، جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

### 2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

## رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 2.1: ایک پتھر 100 m اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے دارانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہو گی؟  
حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی  $t$  سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔ یوں پہلی  $t$  سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی  $\Delta y$  کو وقت میں تبدیلی  $\Delta t$  سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$(الف) \quad پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2 - 0} = 9.8 \text{ m s}^{-1} \text{ ہو گی۔}$$

$$(ب) \quad پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(1)^2}{2 - 1} = 14.7 \text{ m s}^{-1} \text{ ہو گی۔} \quad \square$$

مثال 2.2: پتھر کی رفتار  $t = 1 \text{ s}$  اور  $t = 2 \text{ s}$  پر تلاش کریں۔

حل: ہم وقتی وقفہ  $[t_0, t_0 + h]$  پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

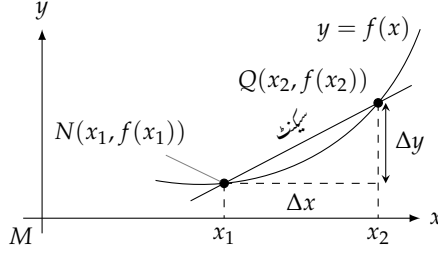
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا درج بالا کلیہ میں  $h = 0$  پر کرتے ہوئے "الحاقی رفتار" حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں  $t_0 = 1$  اور  $t_0 = 2$  کے لئے  $h = 0.1, 0.01, \dots$  لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

$h$	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $t_0 = 1$  کے لئے  $h$  کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار  $9.8 \text{ m s}^{-1}$  کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $t_0 = 1$  پر پتھر کی رفتار  $9.8 \text{ m s}^{-1}$  ہو گی۔ اسی طرح  $t_0 = 2$  پر پتھر کی رفتار  $19.6 \text{ m s}^{-1}$  نظر آئے گی۔  
 $\square$





شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سینٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

### اوسط شرح تبدیلی اور سینٹ خطوط

$x$  کے لحاظ سے متعلق  $f(x)$  کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ  $[x_1, x_2]$  پر حاصل کرنے کی خاطر ہم  $y$  کی قیمت میں تبدیلی،  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$  کو  $x$  کی قیمت میں تبدیلی  $\Delta x = x_2 - x_1 = h$  سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف:  $x$  کے لحاظ سے وقفہ  $[x_1, x_2]$  پر  $y = f(x)$  کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

□

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ  $[x_1, x_2]$  پر  $f$  کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ  $N(x_1, f(x_1))$  اور نقطہ  $Q(x_2, f(x_2))$  سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔ جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گرتے ہوئے خط کو ترسیم کا سینٹ<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ یوں  $x_1$  سے  $x_2$  تک اوسط شرح تبدیلی سینٹ  $NQ$  کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

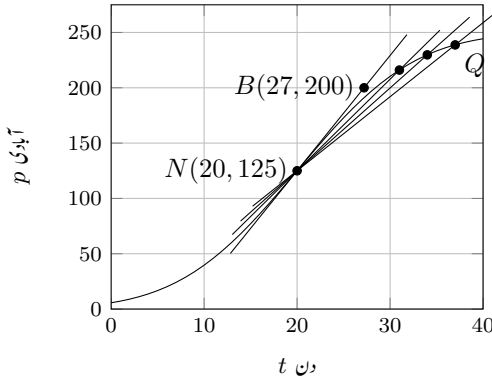
مثال 2.3: نمو آبادی کی اوسط شرح

ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔ تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

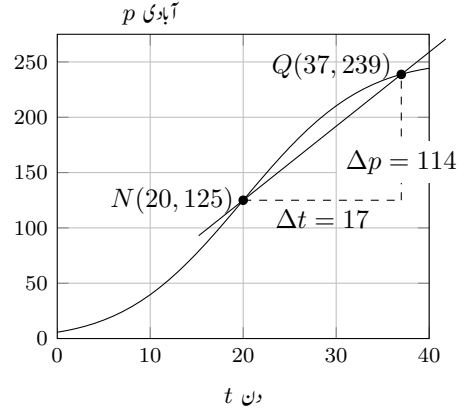
حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔ یوں  $37 - 20 = 17$  دنوں میں آبادی میں  $239 - 125 = 114$  تبدیلی رونما ہوئی۔ یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7 \text{ (دیکھیاں فی دن)}$$

<sup>1</sup> secant



شکل 2.3: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی



شکل 2.2: مکھی کی نمو آبادی

□

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔

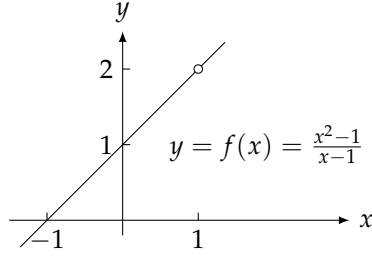
درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔ اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

مثال 2.4: مثال 2.3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟  
حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
(37, 239)	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
(35, 230)	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
(32, 216)	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
(27, 200)	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو مس کرتا ہے۔ اس خط کو دیے گئے منحنی کا مماس<sup>2</sup> کہتے ہیں۔ اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 کھیاں فی دن ہو گی۔

□



شکل 2.4: شکل برائے مثال 2.5

لحہ  $t = 1$  اور لحہ  $t = 2$  پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو لحاقی شرح تبدیلی<sup>3</sup> کہتے ہیں۔ جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لحاقی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔ درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔ لحاقی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔ اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم حد<sup>4</sup> کہتے ہیں۔

### تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 2.5: تفاعل  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  نقطہ  $x = 1$  کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟  
حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے لہذا مساوی  $x = 1$  کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے  $f$  تعین کرتا ہے۔ کسی بھی  $x \neq 1$  کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$$

یوں خط  $y = x + 1$  جس سے نقطہ  $x = 1$  یعنی  $(1, 2)$  خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔ اگرچہ نقطہ  $f(1)$  غیر معین ہے، ہم  $x$  کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے  $f(x)$  کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

$x (\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ  $x$  کی قیمت 1 تک پہنچنے سے  $f(x)$  کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا  $x$  ایک تک پہنچنے سے  $f(x)$  تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

□

$x$  کی قیمت  $x_0$  تک پہنچنے کو  $x \rightarrow x_0$  لکھا جاتا ہے۔

**تعریف:** حد کی غیر رسمی تعریف

فرض کریں کہ  $x_0$  کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ پر تقابل  $f(x)$  معین ہے جبکہ عین نقطہ  $x_0$  پر  $f(x)$  غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر  $x_0$  کے کافی قریب  $x$  کی تمام قیمتوں کے لئے  $f(x)$  کی قیمتیں  $L$  کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ  $x$  کی قیمت  $x_0$  تک پہنچنے سے  $f$  کی قیمت حد  $L$  تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

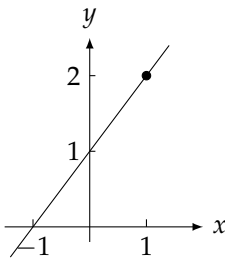
□

اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراہ پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد  $10 \mu\text{m}$  ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف جلد پیش کریں گے۔

مثال 2.6:  $x \rightarrow x_0$  کی صورت میں  $f$  کی حد کی وجودیت  $x_0$  پر  $f$  کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں  $f$  کا  $x \rightarrow 1$  پر حد 2 ہے اگرچہ  $x = 1$  پر  $f$  غیر معین ہے۔ تقابل  $g$  کا  $x \rightarrow 1$  پر حد 2 ہے اگرچہ  $x = 1$  پر  $g(1) = 1$  ہے۔ یوں  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$  ہو گا۔ صرف تقابل  $h$  کا  $x \rightarrow 1$  پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں

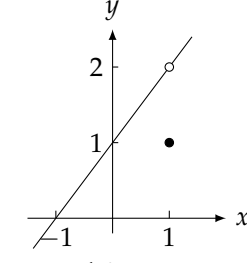
□

یعنی  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$



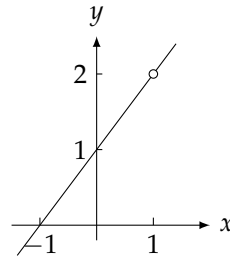
$$h(x) = x + 1$$

(ج)



$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(ب)



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

(ا)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 \quad \text{شکل 2.5}$$

بعض اوقات  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  کی قیمت  $f(x_0)$  سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کی مثال تفاعل  $f(x)$  ہے جو کثیر رکنی اور ٹکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں  $x_0$  پر  $f(x_0)$  معین ہو۔

مثال 2.7:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 13} (4) = 4 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7 \quad \text{د.}$$

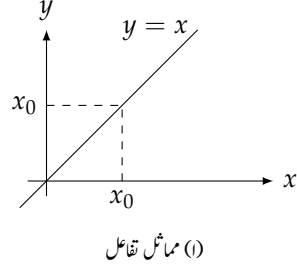
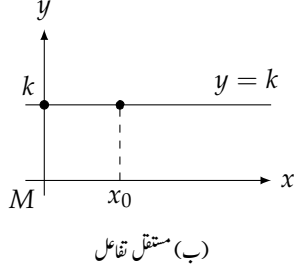
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3} \quad \text{ه.}$$

□

مثال 2.8:

ا. اگر  $f$  مماثل تفاعل  $f(x) = x$  ہو تب  $x_0$  کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہوگا (شکل 2.6-ل)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$



شکل 2.6: اشکال برائے مثال 2.7

ب. اگر  $f$  مستقل تفاعل  $f(x) = k$  ہو (جہاں  $k$  مستقل ہے) تب  $x_0$  کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

□

مثال 2.9: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔  
درج ذیل تفاعل کا  $x \rightarrow 0$  پر رویہ کیسا ہو گا؟

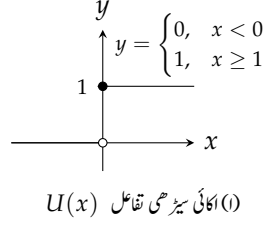
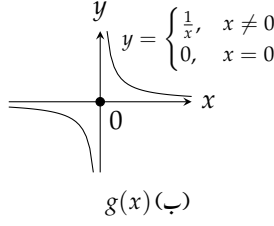
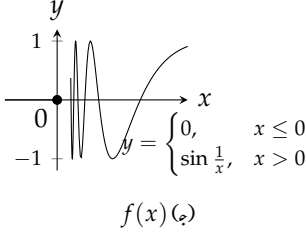
$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \text{ ا.}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ ب.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ ج.}$$

حل:

ا. اکائی میٹر ہی تفاعل  $U(x)$  کا  $x \rightarrow 0$  پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تفاعل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب  $x$  کی منفی قیمتوں کے لئے  $U$  کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب  $x$  کی مثبت قیمتوں کے لئے  $U$  کی قیمت 1 ہے۔ یوں 0 کے قریب پہنچنے سے  $U$  کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔



شکل 2.7: اشکال برائے مثال 2.9

ب.  $x = 0$  کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج.  $x = 0$  کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔ اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

□

## سوالات 2.1

### ترسیم سے حد

سوال 1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

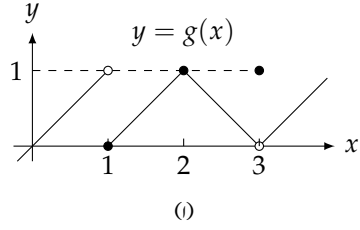
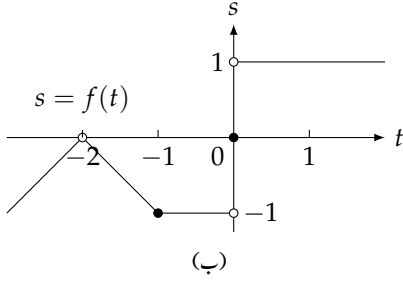
ج.  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ب.  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

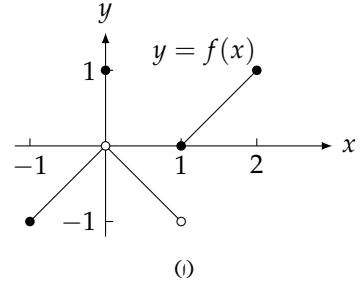
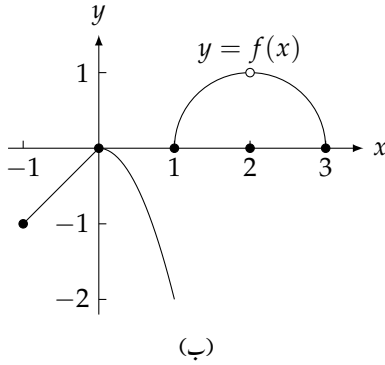
ا.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

جواب: (ا) موجود نہیں ہے۔ جیسے جیسے  $x$  دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے  $g(x)$  کی قیمت 0 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ جیسے جیسے  $x$  بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے  $g(x)$  کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ یوں  $x$  کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہونے سے  $L$  کی یکتا قیمت کے نزدیک تر  $g(x)$  نہیں پہنچتا ہے۔ (ب) 1 (ج) 0

سوال 2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔



شکل 2.8: اشکال برائے سوال 1 اور سوال 2



شکل 2.9: اشکال برائے سوال 3 اور سوال 4

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} f(t) \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{t \rightarrow -2} f(t) \quad \text{ا.}$$

سوال 3: تفاعل  $y = f(x)$  (شکل 3-ا) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے} \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ وقفہ } (-1, 1) \quad \text{د.}$$

میں ہر نقطہ  $x_0$  پر موجود ہے

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{ب.}$$

جواب: (i) درست (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ه) غلط (و) درست

سوال 4: تفاعل  $y = f(x)$  (شکل 3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟



- ا.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  موجود نہیں ہے ج.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  موجود نہیں ہے د.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  وقفہ  $(1, 3)$  میں ہر نقطہ  $x_0$  پر موجود ہے۔  
 ب.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$  میں ہر نقطہ  $x_0$  پر موجود ہے۔ د.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  وقفہ  $(-1, 1)$  میں ہر نقطہ  $x_0$  پر موجود ہے۔

### وجودیت اور حد

سوال 5 اور سوال 6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 5:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$   
 جواب: جیسے جیسے  $x$  بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے  $\frac{x}{|x|}$  کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ جب  $x$  دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے  $\frac{x}{|x|}$  کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ یوں  $x$  کا 1 کے نزدیک تر ہونے سے  $\frac{x}{|x|}$  کسی یکتا قیمت کے نزدیک تر نہیں ہوتی ہے۔

سوال 6:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

- سوال 7: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ  $x = x_0$  تفاعل  $f(x)$  تمام حقیقی  $x$  کے لئے معین ہے۔ کیا  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 8: فرض کریں کہ تفاعل  $f(x)$  وقفہ  $[-1, 1]$  میں تمام  $x$  کے لئے معین ہے۔ کیا  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

- سوال 9: اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$  ہو تب کیا  $x = 1$  پر  $f$  کا معین ہونا لازم ہے؟ اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا  $f(1) = 5$  ہونا لازم ہے؟ کیا  $x = 1$  پر ہم  $f$  کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

- سوال 10: اگر  $f(1) = 5$  ہو تب کیا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  لازماً موجود ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب کیا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$  لازماً ہوگا؟ کیا ہم  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

### کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11:  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$  لیں۔

ا.  $f$  کی قیمتوں کا جدول نقاط  $x = -3.1, -3.01, -3.001, \dots$  پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلو لیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔ اس جدول سے  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس نقاط  $x = -2.9, -2.99, \dots$  پر  $f$  کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہوگا؟

ب. تقابل کو  $x_0 = -3$  کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر  $x \rightarrow -3$  کے لئے  $y$  کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج.  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

جواب: (i)

$x$	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

$x$	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -6 \text{ (ج)}$$

سوال 12:  $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$  لیں۔

ا.  $\sqrt{2}$  کی تخنیتی قیمتوں  $x = 1.4, 1.41, 1.414, \dots$  پر تقابل کی قیمتوں کے جدول سے  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$  کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ  $x_0 = \sqrt{2}$  کے قریب تقابل ترسیم کریں۔  $x \rightarrow \sqrt{2}$  کے لئے ترسیم سے  $y$  کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x)$  کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 13:  $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$  لیں۔

ا. نقاط  $x = -5.9, -5.99, -5.999, \dots$  پر  $G$  کی قیمتوں کا جدول بنا کر  $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$  کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس  $x = -6.1, -6.01, -6.001, \dots$  پر  $G$  کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہوگا؟

ب.  $G$  کو  $x_0 = 6$  کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے  $x \rightarrow -6$  کے لئے  $G$  کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔  $\lim_{x \rightarrow -6} G(x)$  کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

$x$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	-0.126582	-0.1251564	-0.1250156	-0.1250015	-0.1250001	-0.1250000

$x$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	-0.123456	-0.124843	-0.124984	-0.124998	-0.124999	-0.124999

$$\lim_{x \rightarrow -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0.125 \text{ (ج)}$$

سوال 14:  $h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$  لیں۔

ا. نقاط  $x = 2.9, 2.99, 2.999, \dots$  پر  $h$  کی قیمتوں کے جدول سے  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$  کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کے برعکس  $x = 3.1, 3.01, 3.001, \dots$  پر  $h$  کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہوگا؟

ب.  $x_0 = 3$  کے قریب  $h$  ترسیم کر کے  $x \rightarrow 3$  کے لئے  $h(x)$  کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$  کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 15:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$  لیں۔

ا.  $f$  کی قیمتوں کا جدول  $x$  کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو  $x_0 = -1$  تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب.  $x_0 = -1$  کے قریب  $f$  ترسیم کریں۔ ترسیم سے  $x \rightarrow -1$  کے لئے  $y$  کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج۔  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

(i): جواب:

$x$	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

$x$	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	-0.99999	-0.999999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ (ج)}$$

$$\text{سوال 16: } F(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{2 - |x|} \text{ لیں۔}$$

ا.  $F$  کی قیمتوں کا جدول  $x$  کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو  $x_0 = -2$  تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے  $\lim_{x \rightarrow -2} F(x)$  کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب.  $x_0 = -2$  کے قریب  $F$  ترسیم کریں۔ ترسیم سے  $x \rightarrow -2$  کے لئے  $y$  کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

$$\text{ج. } \lim_{x \rightarrow -2} F(x) \text{ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔}$$

$$\text{سوال 17: } g(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ لیں۔}$$

ا.  $g$  کی قیمتوں کا جدول  $\theta$  کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو  $\theta_0 = 0$  تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے  $\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta)$  کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب.  $\theta_0 = 0$  کے قریب  $g$  ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

(i): جواب:

$\theta$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

$\theta$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = 1 \text{ (ج)}$$

$$\text{سوال 18: } G(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} \text{ لیں۔}$$

ا.  $G$  کی قیمتوں کا جدول  $t$  کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو  $t_0 = 0$  تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے  $\lim_{t \rightarrow 0} G(t)$  کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب.  $t_0 = 0$  کے قریب  $G$  ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 19:  $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$  لیں۔

ا.  $f$  کی قیمتوں کا جدول  $x$  کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو  $x_0 = 1$  تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا  $x$  کی قیمت  $x \rightarrow 1$  تک پہنچنے سے  $f$  کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب.  $x_0 = 1$  کے قریب  $f$  ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب: (i)

$x$	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$f(x)$	0.348678	0.366032	0.367695	0.367861	0.367877	0.367879
$x$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	0.385543	0.369711	0.368063	0.367897	0.367881	0.367878

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \approx 0.36788$

سوال 20:  $f(x) = \frac{3^x - 1}{x}$  لیں۔

ا.  $f$  کی قیمتوں کا جدول  $x$  کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو  $x_0 = 0$  تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا  $x$  کی قیمت  $x \rightarrow 0$  تک پہنچنے سے  $f$  کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب.  $x_0 = 0$  کے قریب  $f$  ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 21 تا سوال 28 میں متغیر  $x$  کی تحدیدی قیمت کو تفاعل میں پر کرتے ہوئے تفاعل کی حد تلاش کریں۔

سوال 21:  $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$

جواب: 4

سوال 22:  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x$

سوال 23:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x - 1)$   
جواب: 0

سوال 24:  $\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال 25:  $\lim_{x \rightarrow -1} 3x(2x - 1)$   
جواب: 9

سوال 26:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 27:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin x$   
جواب:  $\frac{\pi}{2}$

سوال 28:  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

### اوسط شرح تبدیلی

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے وقفہ پر تقابل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

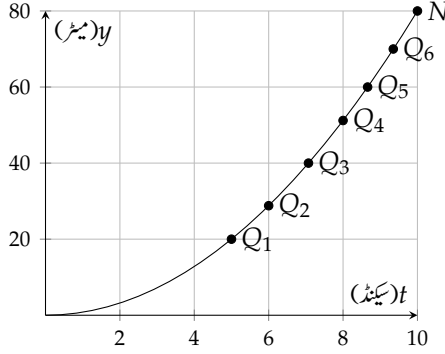
سوال 29:  $f(x) = x^3 + 1$  (الف)  $[2, 3]$ ، (ب)  $[-1, 1]$   
جواب: (i) 19 (ب) 1

سوال 30:  $g(x) = x^2$  (الف)  $[-1, 1]$ ، (ب)  $[-2, 0]$

سوال 31:  $h(t) = \cos t$  (الف)  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ، (ب)  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$   
جواب: (i)  $-\frac{4}{\pi}$  (ب)  $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

سوال 32:  $g(t) = 2 + \cos t$  (الف)  $[0, \pi]$ ، (ب)  $[-\pi, \pi]$

سوال 33:  $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ ؛  $[0, 2]$   
جواب: 1



شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالقابل وقت ترسیم

سوال 34:  $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$  ؛  $[1, 2]$

سوال 35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ  $NQ_1$  ،  $NQ_2$  ،  $NQ_6$  کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے  $t = 10$  s پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔ (الف) منافع بالقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے 1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

جواب: (ب) 5600000 سالانہ (پ) 4200000 سالانہ

سوال 37: تفاعل  $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$  کی قیمتیں نقطہ  $x = 2$  ،  $\frac{11}{10}$  ،  $\frac{101}{100}$  ،  $\frac{1001}{1000}$  اور  $x = 1$  پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔ (الف) جدول میں پائے جانے والے ہر  $x \neq 1$  کے لئے وقفہ  $[1, x]$  پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔ (ب)  $x = 1$  پر  $F(x)$  کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔ اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 38:  $g(x) = \sqrt{x}$  کے لئے  $x \geq 0$  لیں۔

ا. وقفہ  $[1, 2]$  ،  $[1, 1.5]$  اور  $[1, 1+h]$  پر  $x$  کے لحاظ سے  $g(x)$  کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب  $h$  کی قیمتوں، مثلاً  $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$  کے لئے  $x$  کے لحاظ سے وقفہ  $[1, 1+h]$  پر  $g(x)$  کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے  $x = 1$  پر  $g(x)$  کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د.  $h \rightarrow 0$  کے لئے  $g(x)$  کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)  $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ , 0.449489, 0.414213 (ب)

$\frac{1+h}{\sqrt{1+h}}$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.0000005	1.00000005
	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(ج) 0.5 (د) 0.5

سوال 39:  $t \neq 0$  کے لئے  $f(t) = \frac{1}{t}$  لیں۔

ا. (الف) وقفہ  $t = 2$  تا  $t = 3$  اور (ب) وقفہ  $t = 2$  تا  $t = T$  پر  $t$  کے لحاظ سے  $g(t)$  کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی  $T$  کی قیمتوں، مثلاً  $T = 2.1$  ،  $T = 2.01$  ،  $T = 2.001$  ،  $T = 2.0001$  ،  $T = 2.000001$  اور  $T = 2.0000001$  کے لئے وقفہ  $[2, T]$  پر  $t$  کے لحاظ سے  $f(t)$  کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے  $t = 2$  پر  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ  $[2, T]$  پر  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کی شرح تبدیلی کی حد  $T \rightarrow 2$  کے لئے تلاش کریں۔ ( $T = 2$  پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال 40 تا 45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔ (الف) نقطہ  $x_0$  کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر تفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 40:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$



## 2.2. حد تلاش کرنے کے قواعد

سوال 41:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$

سوال 42:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

سوال 43:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

سوال 44:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

سوال 45:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3 - 3 \cos x}$

## 2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔ پہلے تین مسئلے مثال 2.8 کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔ چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 2.1: حد کے خواص

اگر  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  اور  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$  ہوں، جہاں  $L$  اور  $M$  حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M$

قاعدہ فرق:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M$

قاعدہ ضرب:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل:  $\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = kL$  (  $k$  مستقل عدد ہے )

قاعدہ حاصل تقسیم:  $M \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر  $m$  اور  $n$  عدد صحیح ہوں تب  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$  ہو گا بشرطیکہ  $L^{\frac{m}{n}}$  حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا مجموعہ ہو گا۔

2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا فرق ہو گا۔

3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا حاصل ضرب ہو گا۔

4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہو گا۔

5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدود کا حاصل تقسیم ہو گا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔

6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہو گا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ 1 میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 2.10:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$  تلاش کریں۔

حل: مثال 2.8 کے نتائج  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$  اور  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$  سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 2.1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

ا. حاصل ضرب یا طاقت  $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = (\lim_{x \rightarrow c} x)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c \cdot c = c^2$

ب.  $\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow c} x^2 + \lim_{x \rightarrow c} 5 = c^2 + 5$  مجموعہ اور (i)

ج.  $\lim_{x \rightarrow c} 4x^2 = 4 \lim_{x \rightarrow c} x^2 = 4c^2$  ضرب مستقل اور (i)

د.  $\lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow c} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow c} 3 = 4c^2 - 3$  فرق اور (ج)

ه.  $\lim_{x \rightarrow c} x^3 = (\lim_{x \rightarrow c} x^2)(\lim_{x \rightarrow c} x) = c^2 \cdot c = c^3$  حاصل ضرب اور (i) یا طاقت

مجموعہ، (ج) اور (د)  $\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x - 3) = \lim_{x \rightarrow c} x^3 + \lim_{x \rightarrow c} (4x^2 - 3) = c^3 + 4c^2 - 3$  .

حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب)  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^2 + 5)} = \frac{c^3 + 4c^2 - 3}{c^2 + 5}$  .

□

مثال 2.11:  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$  تلاش کریں۔  
حل:

مثال 2.10:  $n = \frac{1}{2}$  اور  $n$  کے ساتھ قاعدہ طاقت  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{4(-2)^2 - 3} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$

□

مسئلہ 2.1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔  $x \rightarrow c$  کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں  $x$  کی جگہ  $c$  پر کریں۔ ناطق تفاعل کا حد  $x \rightarrow c$  پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں  $x$  کی جگہ  $c$  پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2.2: کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا  
اگر  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

مسئلہ 2.3: غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہوگا

فرض کریں کہ  $P(x)$  اور  $Q(x)$  کثیر رکنی ہیں اور  $Q(c) \neq 0$  ہے تب درج ذیل ہوگا۔

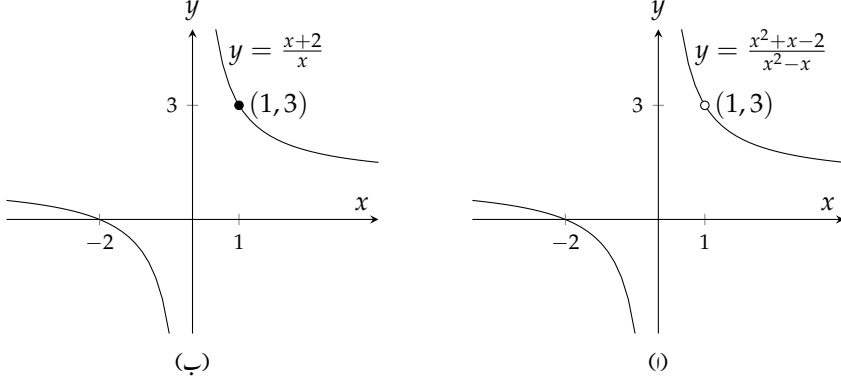
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 2.12:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

□

یہ ایک ہی قدم میں مثال 2.10 کا حل ہے۔



شکل 2.11: ماسوائے نقطہ  $(1, 3)$  کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے استقاط

مسئلہ 2.3: ناطق تقاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ  $c$  پر تقاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔ صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹنے ہوئے  $c$  پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر  $x$  کی جگہ  $c$  پر کرنے سے حد حاصل کیا جاسکتا ہے۔ درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں  $x = 1$  پر صفر ہیں۔ یوں  $(x - 1)$  ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جاسکتا ہے۔

مثال 2.13: یکساں جزو کی منسوخی

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} \text{ تلاش کریں۔}$$

حل: ہم  $x = 1$  پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہو گا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جاسکتا ہے۔ البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}$$

اب  $x \neq 0$  کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$

شکل 2.11 میں  $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$  اور  $y = \frac{x + 2}{x}$  کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔ یہ ترسیم صرف نقطہ  $(1, 3)$  پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ البتہ اس نقطہ پر دونوں تقاعل کا حد ایک جیسا ہے۔ □

مثال 2.14: ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \text{ تلاش کریں۔}$$

حل: ہم  $h = 0$  پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نم اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔ البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق  $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$  سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔ نسب نما میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے

جس کو ہم کاٹتے ہیں

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

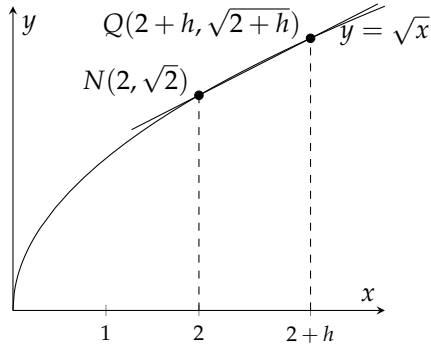
نسب نما اب  $h = 0$  پر صفر نہیں ہے

دھیان رہے کہ تفاعل  $\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$  درحقیقت تفاعل  $y = \sqrt{x}$  پر نقطہ  $N(2, \sqrt{2})$  اور نقطہ  $Q(2+h, \sqrt{2+h})$  کے بیچ سیکنٹ کی ڈھلوان ہے اور  $h \rightarrow 0$  کرنے سے مراد  $Q \rightarrow N$  ہے۔ نقطہ  $Q$  ترسیم پر  $N$  کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ ہم نے دیکھا کہ اس سیکنٹ کی تحدیدی قیمت  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  ہے۔ □

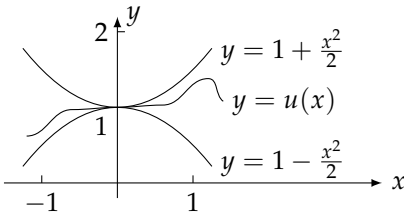
مسئلہ بیچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔ اس کو مسئلہ بیچ<sup>6</sup> اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل  $f$  سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل  $g$  اور تفاعل  $h$  کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ  $c$  پر ایک ہی حد  $L$  ہو۔ ظاہر ہے کہ نقطہ  $c$  پر دونوں تفاعل کے بیچ پھنسے ہوئے تفاعل کی قیمت  $L$  ہوگی (شکل 2.13)۔ اس کا ثبوت ضمیمہ 1 میں دیا گیا ہے۔

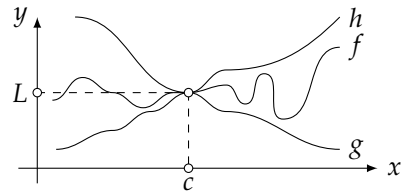
<sup>5</sup> conjugate expression  
<sup>6</sup> sandwich theorem



شکل 2.12:  $Q \rightarrow N$  کرنے سے سیکنٹ  $NQ$  کی ڈھلوان کا حد  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  ہے



شکل 2.14: شکل برائے مثال 2.15



شکل 2.13:  $f$  کی ترسیم  $h$  اور  $g$  کی ترسیم کے بیچ ہے۔

مسئلہ 2.4: مسئلہ بیچ

فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں  $c$  پایا جاتا ہو، میں (مکمل ہے کہ) مساوی  $x = c$  پر تمام  $x$  کے لئے

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ہے۔ مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

ہے۔ تب  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  ہو گا۔

مثال 2.15: اگر تمام  $x \neq 0$  کے لئے  $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$  ہو تب  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$  تلاش کریں۔

حل: چونکہ

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2}) = 1$$

□

ہیں لہذا مسئلہ بیچ کے تحت  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$  ہو گا (شکل 2.14)۔

مثال 2.16: دکھائیں کہ اگر  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$  ہو تب  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  ہو گا۔

حل: چونکہ  $|f(x)| \leq f(x) \leq -|f(x)|$  ہے، اور  $-|f(x)|$  اور  $|f(x)|$  کا حد 0 ہے لہذا مسئلہ بیچ کے تحت  $f(x)$  کا حد بھی 0 ہو گا۔

□

## سوالات 2.2

### حد کا حساب

سوال 1 تا سوال 16 میں حد تلاش کریں۔

سوال 1:  $\lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5)$

جواب: -9

سوال 2:  $\lim_{x \rightarrow 12} (10 - 3x)$

سوال 3:  $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 2)$   
جواب: 4

سوال 4:  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

سوال 5:  $\lim_{t \rightarrow 6} 8(t - 5)(t - 7)$   
جواب: -8

سوال 6:  $\lim_{s \rightarrow \frac{2}{3}} 3s(2s - 1)$

سوال 7:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+6}$   
جواب:  $\frac{5}{8}$

سوال 8:  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4}{x-7}$

سوال 9:  $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5-y}$   
جواب:  $\frac{5}{2}$

سوال 10:  $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 11:  $\lim_{x \rightarrow -1} 3(2x - 1)^2$   
جواب: 27

سوال 12:  $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 3)^{1984}$

سوال 13:  $\lim_{y \rightarrow -3} (5 - y)^{\frac{4}{3}}$   
جواب: 16

سوال 14:  $\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{\frac{1}{3}}$

سوال 15:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$   
جواب:  $\frac{3}{2}$



## 2.2. حد تلاش کرنے کے قواعد

سوال 16:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال 17 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 17:  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$   
جواب:  $\frac{1}{10}$

سوال 18:  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال 19:  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$   
جواب:  $-7$

سوال 20:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال 21:  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$   
جواب:  $\frac{3}{2}$

سوال 22:  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال 23:  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$   
جواب:  $-\frac{1}{2}$

سوال 24:  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال 25:  $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$   
جواب:  $\frac{4}{3}$

سوال 26:  $\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال 27:  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$   
جواب:  $\frac{1}{6}$

سوال 28:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$

سوال 29:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$  جواب: 4

سوال 30:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

### قواعد حد کا استعمال

سوال 31: فرض کریں کہ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  اور  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$  ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)} \\ &= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1 + 7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

جواب: (ا) قاعدہ حاصل تقسیم (ب) فرق اور قاعدہ طاقت (پ) مجموعہ اور ضرب مستقل قاعدہ

سوال 32: فرض کریں کہ  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 5$ ،  $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = 1$  اور  $\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2$  ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x \rightarrow 1} (p(x)(4 - r(x)))} && \text{(الف)} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 5h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} (4 - r(x)))} && \text{(ب)} \\ &= \frac{\sqrt{5 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)}}{(\lim_{x \rightarrow 1} p(x))(\lim_{x \rightarrow 1} 4 - \lim_{x \rightarrow 1} r(x))} && \text{(پ)} \\ &= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4 - 2)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

سوال 33:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$  اور  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2$  لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + 3g(x)) \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} 2f(x)g(x) \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)} \quad \text{د.}$$

$$\text{جواب: (ا) } -10 \quad \text{(ب) } -20 \quad \text{(ج) } -1 \quad \text{(د) } \frac{5}{7}$$

سوال 34:  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$  اور  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$  لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} (g(x) + 3) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (g(x))^2 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x f(x) \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x)-1} \quad \text{د.}$$

سوال 35:  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 7$  اور  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -3$  لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow b} (f(x) + g(x)) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow b} 4g(x) \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) \quad \text{ب.} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{د.}$$

$$\text{جواب: (ا) } 4 \quad \text{(ب) } -21 \quad \text{(ج) } -12 \quad \text{(د) } -\frac{7}{3}$$

سوال 36:  $\lim_{x \rightarrow -2} p(x) = 4$  ،  $\lim_{x \rightarrow -2} r(x) = 0$  اور  $\lim_{x \rightarrow -2} s(x) = -3$  لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2} (p(x) + r(x) + s(x)) \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4p(x) + 5r(x)}{s(x)} \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x) \quad \text{ب.}$$

### اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لمباتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنیاد احصاء میں عموماً درپیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سوال 37 تا سوال 42 میں اس حد کو دیے گئے  $x$  پر تقابل  $f(x)$  کے لئے تلاش کریں۔

سوال 37:  $f(x) = x^2$ ,  $x = 1$   
جواب: 2

سوال 38:  $f(x) = x^2$ ,  $x = -2$

سوال 39:  $f(x) = 3x - 4$ ,  $x = 2$   
جواب: 3

سوال 40:  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x = -2$

سوال 41:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 7$   
جواب:  $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

سوال 42:  $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ ,  $x = 0$

### مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 43: اگر  $-1 \leq x \leq 1$  کے لئے  $\sqrt{5 - x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - 2x}$  ہو تب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  تلاش کریں۔  
جواب:  $\sqrt{5}$

سوال 44: اگر تمام  $x$  کے لئے  $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$  ہو تب  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  تلاش کریں۔

سوال 45: (الف) یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام  $x$  کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$$

(ب)  $-2 \leq x \leq 2$  کے لئے  $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ ،  $y = \frac{x \sin x}{2 - 2 \cos x}$  اور  $y = 1$  ترسیم کریں۔  $x \rightarrow 0$  کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔  
جواب: (ا) حد 1 ہے۔

سوال 46: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام  $x$  کے لئے مطمئن ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

(ب)  $-2 \leq x \leq 2$  کے لئے  $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$  ،  $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$  اور  $y = \frac{1}{2}$  ترسیم کریں۔ ان ترسیم کا رویہ  $x \rightarrow 0$  کرتے ہوئے کیسا ہے؟

### نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر  $[-1, 1]$  میں  $x$  کے لئے  $x^4 \leq f(x) \leq x^2$  اور  $x < -1$  اور  $x > 1$  کے لئے  $x^2 \leq f(x) \leq x^4$  ہو تب کن نقطوں  $c$  پر آپ کو  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 48: فرض کریں کہ تمام  $x \neq 2$  کے لئے  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  ہے اور مزید فرض کریں کہ  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -5$  ہے۔ کیا 2 پر  $f$  ،  $g$  اور  $h$  کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا  $f(2) = 0$  ہو سکتا ہے؟ کیا  $\lim_{x \rightarrow 2} f(2) = 0$  ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہات پیش کریں۔

سوال 49: اگر  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$  ہو تب  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  کیا ہو گا؟  
جواب: 7

سوال 50: اگر  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$  ہو تب (الف)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x}$  تلاش کریں۔

سوال 51: (الف) اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$  ہو تب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کیا ہو گا؟

(ب) اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$  ہو تب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کیا ہو گا؟  
جواب: (ا) 5 (ب) 5

سوال 52: اگر  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$  ہو تب (الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  اور (ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  کیا ہوں گے؟

سوال 53: (الف)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  حاصل کرنے کی خاطر  $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ترسیم کریں۔  $x$  کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔  
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 54: (الف)  $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^3}$  ترسیم کرتے ہوئے  $x$  کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  تلاش کریں۔  
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبراً سے حاصل کریں۔

### 2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہوگی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ  $x$  کی کون سی قیمتیں تفاعل  $y = f(x)$  کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دار و مدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مسٹری انجن کی سلنڈر کا قطر  $50 \mu\text{m}$  درستی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

مثال 2.17: خطی تفاعل قابو کرنا  
تفاعل  $y = 2x - 1$  کے خارجی قیمت کو  $y_0 = 7$  کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر  $x$  کو  $x_0 = 4$  کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟  
حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ  $x$  کی کن قیمتوں کے لئے  $|y - 7| < 2$  ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم  $|y - 7|$  کو  $x$  کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

یوں ہم  $x$  کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات  $|2x - 8| < 2$  کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

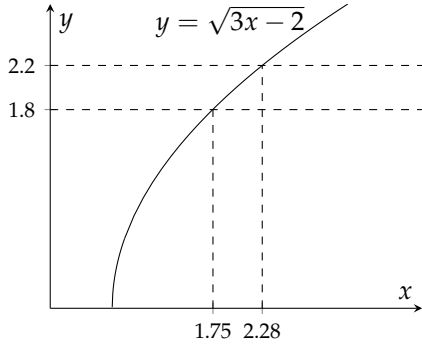
$$|2x - 8| < 2$$

$$-2 < 2x - 8 < 2$$

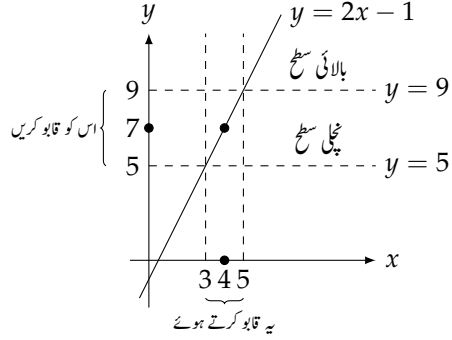
$$6 < 2x < 10$$

$$3 < x < 5$$

$$-1 < x - 4 < 1$$



شکل 2.16:  $y$  کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر  $x$  کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔



شکل 2.15:  $x$  کی قیمت قابو کرتے ہوئے  $y$  کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 2.17)

$x$  کو  $x_0 = 4$  کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے  $y$  کی قیمت  $y_0 = 7$  کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □

## فنیات

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جاسکتے ہیں۔ درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور نچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی لکیروں سے ظاہر کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفہ میں تفاعل کا رویہ دیکھا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر  $f(x) = \sqrt{3x - 2}$  کے ترسیم پر  $y$  محور کے مطلوبہ وقفہ (1.8, 2.2) پر غور کریں۔ یوں  $y_1 = f(x)$ ،  $y_2 = 1.8$  اور  $y_3 = 2.2$  ترسیم کریں (شکل 2.16)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ (1.98, 2.02) اور (1.9998, 2.0002) پر بھی تفاعل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2.18: 6 cm اندرونی قطر کے ایک لٹریٹ پیالے پر 1 mm وقفہ پر افقی لکیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔  
پیالے میں مائع کا حجم  $H = \pi r^2 h = 36\pi h$  ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس  $r$  اور مائع کی گہرائی  $h$  ہے۔ ایک لٹر ( $1000 \text{ cm}^3$ ) پانی ناپنے کی خاطر  $h$  کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل 1% سے کم ہونا چاہیے۔  
حل: ہم  $h$  کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \leq 10$$

یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہوگی۔

$$\begin{aligned} |36\pi h - 1000| &\leq 10 \\ -10 &\leq 36\pi h - 1000 \leq 10 \\ 990 &\leq 36\pi h \leq 1010 \\ \frac{990}{36\pi} &\leq h \leq \frac{1010}{36\pi} \\ 8.8 &\leq h \leq 8.9 \end{aligned}$$

یوں 1% درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی  $8.9 - 8.8 = 0.1 \text{ cm}$  یعنی 1 mm ہے۔ پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر اتنی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مانع مانچنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ □

### حد کی باضابطہ تعریف

مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر  $x$  کو کسی مخصوص قیمت  $x_0$  کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل  $f(x)$  کی قیمت کو مطلوبہ قیمت  $y_0$  کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ  $x \rightarrow x_0$  کرنے سے  $f(x)$  کا حد  $L$  حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم  $x$  کو  $x_0$  کے بہت قریب کرتے ہوئے  $f(x)$  اور  $L$  میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

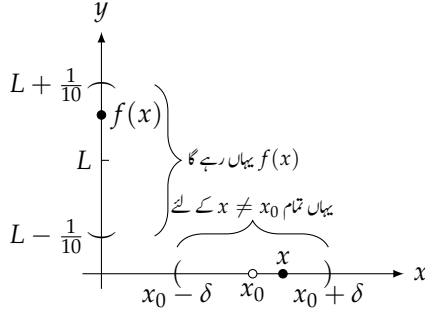
فرض کریں ہم  $f(x)$  کی قیمت کو دیکھتے ہوئے  $x$  کو  $x_0$  کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم  $x$  کی قیمت کو کبھی بھی  $x_0$  کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ  $x_0$  سے  $x$  کا فاصلہ  $\delta$  سے کم رکھنے سے  $f(x)$  اور  $L$  کی قیمت میں فرق  $L$  کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہوگی (شکل 2.17)۔ البتہ اتنا جاننا کافی نہیں ہے چونکہ  $x$  کو  $x_0$  کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ  $L - \frac{1}{10}$  تا  $L + \frac{1}{10}$  کے بیچ  $f(x)$  کی قیمت  $L$  کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھرائی ہو۔

ہمیں سے کہا جاسکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ  $\frac{L}{100}$  یا  $\frac{L}{1000}$  یا  $\frac{L}{100,000}$  ہے۔ ہر مرتبہ ہم  $x_0$  کے ارد گرد ایسا نیا وقفہ  $\delta$  تلاش کرتے ہیں جس کے اندر  $x$  کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جاسکتا ہے۔ البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جاسکتا ہے کہ  $x_0$  کے مزید قریب جانے سے  $f(x)$  کی قیمت تھر تھرائٹ کا شکار ہوتے ہوئے  $L$  تک نہ پہنچتی ہو۔

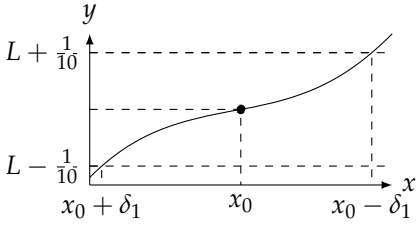
شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔ شکی انسان قابل قبول چھوٹ  $\epsilon$  چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار  $\delta$  پیش کرتا ہے۔

اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر  $\sigma$  کے لئے ایسا  $\delta$  تلاش کرنا ممکن ہے جو  $f(x)$  کو  $L$  کے قریب قابل قبول فاصلہ  $\epsilon$  کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔

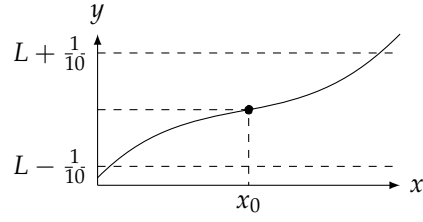




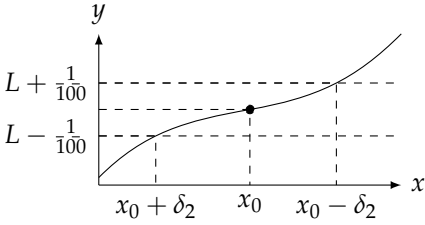
شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم



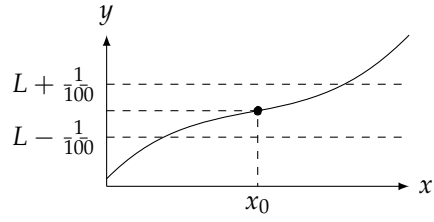
(ب) پہلے جواب:  $|x - x_0| < \delta_1$  رکھیں



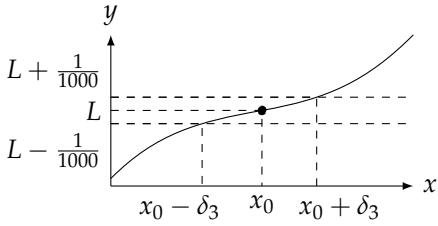
(i) پہلا مقابلہ:  $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$  کریں



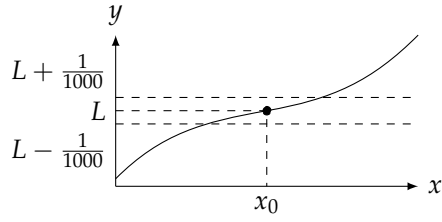
(د) دوسرا جواب:  $|x - x_0| < \delta_2$  رکھیں



(ج) دوسرا مقابلہ:  $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$  کریں

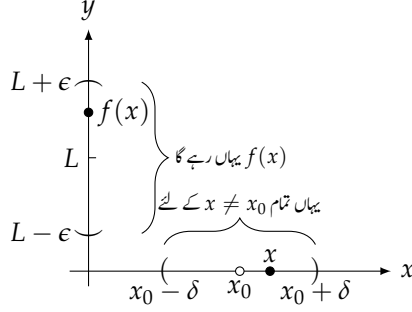


(گ) تیسرا جواب:  $|x - x_0| < \delta_3$  رکھیں



(ه) تیسرا مقابلہ:  $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$  کریں

شکل 2.18: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ



شکل 2.19: حد کی تعریف میں  $\delta$  اور  $\epsilon$  کا تعلق۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ  $x$  کو  $x_0$  کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے،  $f(x)$  کی قیمت  $L$  کے اتنی قریب ہوگی۔

**تعریف:** حد کی باضابطہ تعریف

فرض کریں کہ  $x_0$  کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں  $f(x)$  معین ہے جبکہ نقطہ  $x_0$  پر عین ممکن ہے کہ  $f(x)$  معین نہ ہو۔ اگر ہر عدد  $\epsilon > 0$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  پایا جاتا ہو کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے  $x$  کی قیمت  $x_0$  کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے  $f(x)$  کی قیمت حد  $L$  تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

□

مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ آپ خراہ کی مشین پر قطر  $L$  کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔ اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج نہیں دیتی ہے لہذا آپ کو  $f(x)$  قطر یعنی  $L - \epsilon$  اور  $L + \epsilon$  کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہوگا۔ دھرا کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لئے  $x$  کو قابو میں رکھنا ضروری ہوگا لہذا  $x$  کو  $x - \delta$  اور  $x + \delta$  کے بیچ رکھنا ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ  $\epsilon$  کم کی جائے، آپ کو ویسے ویسے  $\delta$  کو درست کرنا ہوگا۔

## تعریف کو پرکھنے کی مثالیں

حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی ہے البتہ اس سے حد کی درستی کی تصدیق کی جاسکتی ہے۔ درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔ حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 2.19: دکھائیں کہ  $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$  ہے۔

حل: حد کی تعریف میں  $x_0 = 1$ ،  $f(x) = 5x - 3$  اور  $L = 2$  لیں۔ کسی بھی دیے گئے  $\epsilon > 0$  کے لئے ہمیں موزوں  $\delta > 0$  تلاش کرنا ہو گا تاکہ اگر  $x \neq 1$  ہو اور  $x_0 = 1$  سے  $x$  کا فاصلہ  $\delta$  سے کم ہو یعنی اگر

$$0 < |x - a| < \delta$$

تو  $L = 2$  سے  $f(x)$  کا فاصلہ  $\epsilon$  سے کم ہو گا یعنی:

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

ہم  $\epsilon$  کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے  $\delta$  تلاش کرتے ہیں۔

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| < \epsilon$$

$$5|x - 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$$

یوں ہم  $\delta = \frac{\epsilon}{5}$  لے سکتے ہیں (شکل 2.20)۔ اب اگر  $\delta = \frac{\epsilon}{5}$  اور  $0 < |x - 1| < \delta$  ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

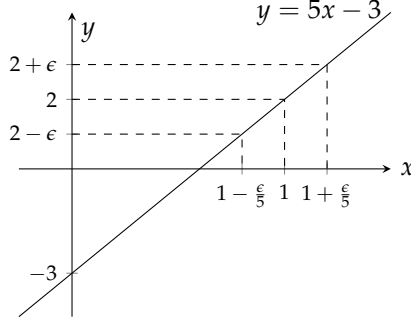
اس سے ثابت ہوا کہ  $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$  ہے۔

$\delta = \frac{\epsilon}{5}$  وہ واحد قیمت نہیں ہے جس کے لئے  $0 < |x - 1| < \delta$  سے مراد  $|5x - 5| < \epsilon$  لیا جاسکتا ہے۔  $\delta$  کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لئے بھی  $0 < |x - 1| < \delta$  سے مراد  $|5x - 5| < \epsilon$  لیا جاسکتا ہے۔ حد کی تعریف بہترین  $\delta$  کی بات نہیں کرتی ہے بلکہ  $\delta$  کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو کی بات کرتی ہے۔ □

مثال 2.20: دو اہم حد

تصدیق کریں: (i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$  جہاں  $k$  مستقل ہے۔  
حل: (i) فرض کریں کہ  $\epsilon > 0$  دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا  $\delta > 0$  تلاش کرنا ہے کہ تمام  $x$  کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ سے مراد } |x - x_0| < \epsilon \text{ ہو۔}$$



شکل 2.20: تقابل  $f(x) = 5x - 3$  کے لئے  $0 < |x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$  کی صورت میں  $|f(x) - 2| < \epsilon$  ہوگا (مثال 2.19)۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\delta$  کی قیمت  $\epsilon$  کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل 2.21)۔ یوں ثابت ہو کہ  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  ہے۔  
(ب) فرض کریں کہ  $\epsilon > 0$  دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا  $\delta$  تلاش کرنا ہے کہ ہر  $x$  کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ سے مراد } |k - k| < \epsilon \text{ ہو۔}$$

چونکہ  $k - k = 0$  ہے لہذا کسی بھی مثبت عدد کو  $\delta$  لیا جاسکتا ہے (شکل 2.21)۔ یوں ثابت ہوا کہ  $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$  ہے۔  
□

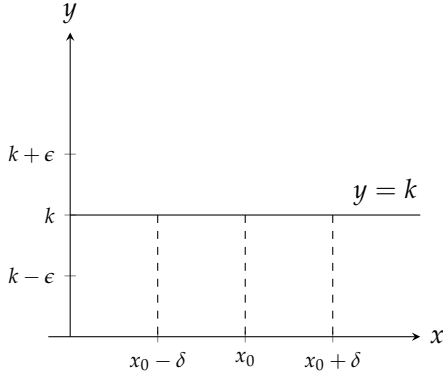
دیے گئے  $\epsilon$  کے لئے  $\delta$  کا الجبرائی حصول

مثال 2.19 اور مثال 2.20 میں  $x_0$  کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر  $|f(x) - L|$  کی قیمت  $\epsilon$  سے کم تھی  $x_0$  کے لحاظ سے تشابہی تھا۔ یوں ہم  $\delta$  کو وقفہ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشابہ نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا ہے، ہم  $x_0$  سے وقفے کے قریبی سر تک فاصلے کو  $\delta$  لے سکتے ہیں۔

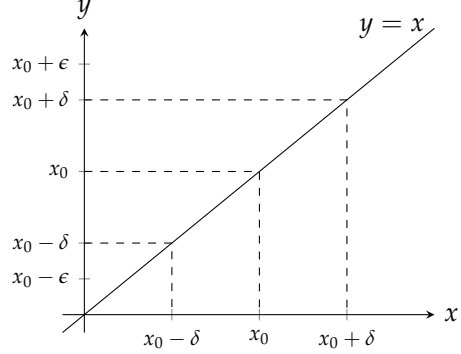
مثال 2.21: حد  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = 2$  کے لئے  $\epsilon = 1$  کے لحاظ سے  $\delta > 0$  تلاش کریں۔ یعنی ایسا  $\delta > 0$  تلاش کریں کہ  $0 < |x - 5| < \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت  $\implies$  کو پڑھیں "سے مراد")۔

$$0 < |x - 5| < \delta \implies |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$

حل: اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں عدم مساوات  $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$  کو حل کرتے ہوئے  $x_0 = 5$  کے ارد گرد ایسا وقفہ  $(a, b)$  تلاش کرتے ہیں جس پر تمام  $x \neq x_0$  کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد



(ب) تقابل  $f(x) = k$  کے لئے کسی بھی مثبت  $\delta$  کی صورت میں  $|f(x) - k| < \epsilon$  ہو گا۔



(1)  $0 < |x - x_0| < \delta$  کی صورت میں  $f(x) = x$  کے لئے جب بھی  $\delta \leq \epsilon$  ہو تب  $|f(x) - x_0| < \epsilon$  ہو گا۔

شکل 2.21: اشکال برائے مثال 2.20

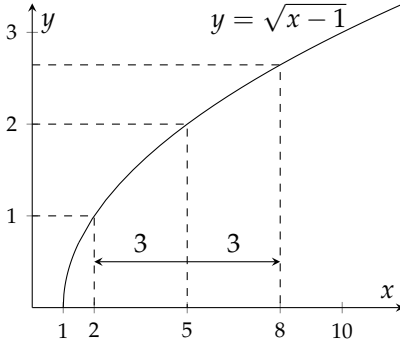
$\delta > 0$  حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ  $5 - \delta < x < 5 + \delta$  کا وسط نقطہ  $x_0$  ہو اور یہ وقفہ  $(a, b)$  کے اندر پایا جاتا ہو۔  
پہلا قدم: عدم مساوات  $|\sqrt{x-1}-2| < 1$  کو حل کرتے ہوئے  $x_0 = 5$  کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں کہ اس وقفے پر تمام  $x \neq x_0$  کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

$$\begin{aligned} |\sqrt{x-1}-2| &< 1 \\ -1 &< \sqrt{x-1}-2 < 1 \\ 1 &< \sqrt{x-1} < 3 \\ 1 &< x-1 < 9 \\ 2 &< x < 10 \end{aligned}$$

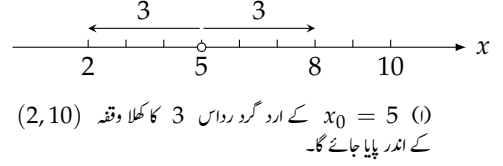
عدم مساوات کھلے وقفہ  $(2, 10)$  پر تمام نقطوں کے لئے مطمئن ہوتی ہے لہذا یہ اس وقفے پر تمام  $x \neq 5$  کے لئے بھی مطمئن ہو گی۔  
دوسرا قدم: ایسا  $\delta > 0$  تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ  $5 - \delta < x < 5 + \delta$  کو وقفہ  $(2, 10)$  میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ  $(2, 10)$  کے قریبی سر کا فاصلہ 3 ہے۔ اس طرح  $\delta = 3$  یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے  $0 < |x - 5| < \delta$  کو مطمئن کرنے والے تمام  $x$  وقفہ  $(2, 10)$  میں پائے جائیں گے جس سے  $|\sqrt{x-1}-2| < 1$  خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 5| < 3 \implies |\sqrt{x-1}-2| < 1$$

□



(ب) تقابل اور وقفہ



شکل 2.22: اشکال برائے مثال 2.21

دیے گئے  $f$ ،  $L$ ،  $x_0$  اور  $\epsilon > 0$  کے لئے  $\delta$  کا الجبرائی حصول

ایسا  $\delta > 0$  کہ  $0 < |x - x_0| < \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

کو دو قدموں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

**پہلا قدم:** عدم مساوات  $|f(x) - L| < \epsilon$  کو حل کرتے ہوئے  $x_0$  کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ  $(a, b)$  حاصل کریں جس میں تمام  $x \neq x_0$  کے لئے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

**دوسرا قدم:** ایسا  $\delta > 0$  تلاش کریں جو کھلا وقفہ  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، جس کا وسط  $x_0$  ہے، کو  $(a, b)$  کے اندر رکھے۔ اس  $\delta$  وقفہ میں تمام  $x \neq x_0$  کے لئے عدم مساوات  $|f(x) - L| < \epsilon$  مطمئن ہوگی۔

مثال 2.22: ثابت کریں کہ درج ذیل تقابل کے لئے  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

**حل:** ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے  $\epsilon > 0$  کے لئے ایسا  $\delta > 0$  موجود ہے کہ  $0 < |x - 2| < \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

**پہلا قدم:** عدم مساوات  $|f(x) - 4| < \epsilon$  کو حل کرتے ہوئے  $x_0 = 2$  کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام  $x \neq x_0$  کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اب  $x \neq x_0 = 2$  کے لئے  $f(x) = x^2$  ہے لہذا عدم مساوات کی صورت  $|x^2 - 4| < \epsilon$  ہوگی۔

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \epsilon \\ -\epsilon &< x^2 - 4 < \epsilon \\ 4 - \epsilon &< x^2 < 4 + \epsilon \\ \sqrt{4 - \epsilon} &< |x| < \sqrt{4 + \epsilon} \quad \text{فرض کریں کہ } \epsilon < 4 \text{ ہے} \\ \sqrt{4 - \epsilon} &< x < \sqrt{4 + \epsilon} \end{aligned}$$

کھلا وقفہ  $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$  میں تمام  $x \neq 2$  کے لئے عدم مساوات  $|f(x) - 4| < \epsilon$  مطمئن ہوتی ہے۔

**دوسرا قدم:** ایسا  $\delta > 0$  تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ  $(2 - \delta, 2 + \delta)$  کو  $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$  کے اندر رکھتا ہو۔ نقطہ  $x_0 = 2$  سے کھلا وقفہ  $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$  کے قریبی سر کا فاصلہ  $\delta$  ہوگا۔ یوں  $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$  اور  $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$  میں سے کم قیمت  $\delta$  کے برابر ہوگی۔  $\delta$  کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لئے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$$

□

درج بالا مثال میں ہم نے  $\epsilon < 4$  کیوں فرض کیا؟ اس لئے کہ تمام  $x$  کے لئے ایسا  $\delta$  کہ  $0 < |x - 2| < \delta$  سے مراد  $|f(x) - 4| < \epsilon < 4$  ہو میں ہم نے  $\delta$  کی وہ قیمت دریافت کی جو  $\epsilon$  کے کسی بھی بڑی قیمت کے لئے بھی کارآمد ہے۔

### مسئلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے ہیں۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسئلوں (بالخصوص حصہ 2.2 کے مسئلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کیے جاتے ہیں۔ انہیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال 2.23: قاعدہ مجموعہ

اگر  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  اور  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$  ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

حل: فرض کریں  $\epsilon > 0$  دیا گیا ہے۔ ہم ایسا مثبت عدد  $\delta$  تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ  $0 < |x - c| < \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned} \quad \text{تکوئی عدم مساوات}$$

چونکہ  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  موجود ہے لہذا ایسا عدد  $\delta_1 > 0$  پایا جاتا ہے کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$  موجود ہے لہذا ایسا عدد  $\delta_2 > 0$  پایا جاتا ہے کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - c| < \sigma_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ  $\delta_1$  اور  $\delta_2$  میں سے چھوٹی قیمت  $\delta$  کے برابر ہے۔ اب اگر  $0 < |x - c| < \delta$  ہو تب

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x - c| < \delta_1$$

ہوں گے، اور  $|x - c| < \delta_2$  اور  $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$  ہوں گے۔ اس طرح

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□ ہو گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$  ہے۔

## سوالات 2.3

نقطہ  $x_0$  پر وقفے کا وسط لانا

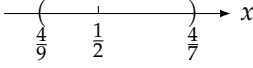
سوال 1 تا سوال 6 میں  $x$  محور پر وقفہ  $(a, b)$  ترسیم کریں جس میں نقطہ  $x_0$  پایا جاتا ہے۔ اس کے بعد ایسا  $\delta > 0$  تلاش کریں کہ  $|x - x_0| < \delta$  سے مراد  $a < x < b$  ہو۔

سوال 1:  $a = 1, b = 7, x_0 = 5$

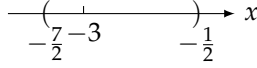
جواب:  $\delta = 2$  شکل 2.23

سوال 2:  $a = 1, b = 7, x_0 = 2$

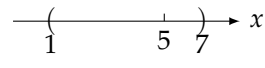




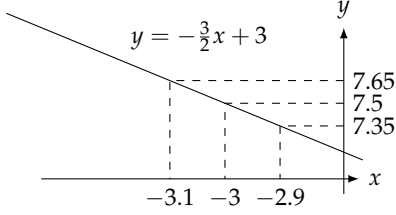
شکل 2.23



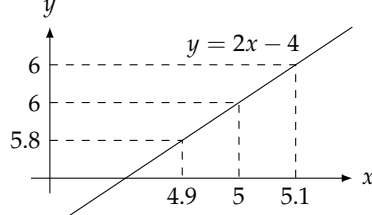
شکل 2.24



شکل 2.25



شکل 2.26: ترسیم برائے سوال 8



شکل 2.27: ترسیم برائے سوال 7

سوال 3:  $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -3$   
جواب:  $\delta = \frac{1}{2}$  شکل 2.24

سوال 4:  $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 5:  $a = \frac{4}{9}, b = \frac{4}{7}, x_0 = \frac{1}{2}$   
جواب:  $\delta = \frac{1}{18}$  شکل 2.25

سوال 6:  $a = 2.7591, b = 3.2391, x_0 = 3$

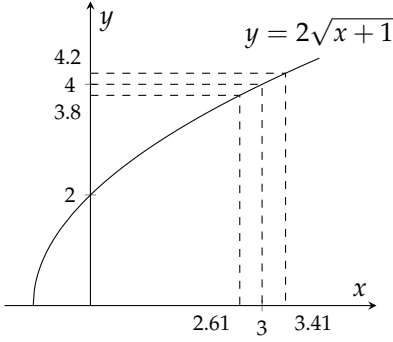
$\delta$  کا حصول بذریعہ ترسیم

سوال 7 تا سوال 14 میں ترسیم سے ایسا  $\delta > 0$  تلاش کریں کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو۔

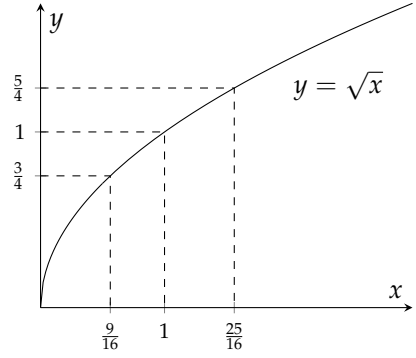
$$0 < |x - x_0| < \delta \implies 0 < |f(x) - L| < \epsilon$$

سوال 7:  $f(x) = 2x - 4, x_0 = 5, L = 6, \epsilon = 0.2$   
جواب:  $\delta = 0.1$  شکل 2.26

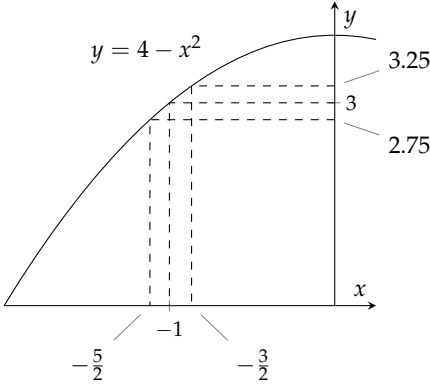
سوال 8:  $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3, x_0 = -3, L = 7.5, \epsilon = 0.15$  شکل 2.27



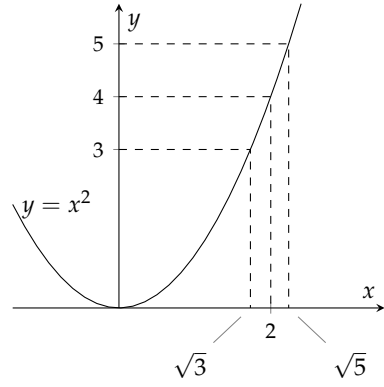
شکل 2.29: ترسیم برائے سوال 10



شکل 2.28: ترسیم برائے سوال 9



شکل 2.31: ترسیم برائے سوال 12



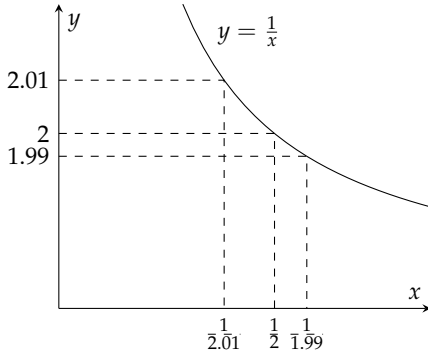
شکل 2.30: ترسیم برائے سوال 11

سوال 9:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $L = 1$ ,  $\epsilon = \frac{1}{4}$  شکل 2.28  
جواب:  $\delta = \frac{7}{16}$

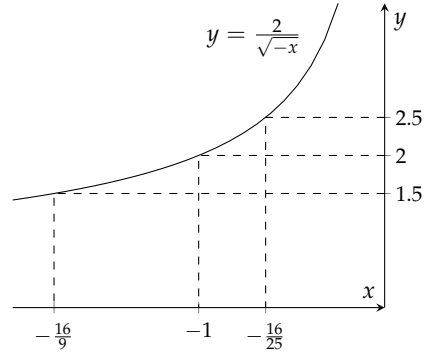
سوال 10:  $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ ,  $x_0 = 3$ ,  $L = 4$ ,  $\epsilon = 0.2$  شکل 2.29

سوال 11:  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 2$ ,  $L = 4$ ,  $\epsilon = 1$  شکل 2.30  
جواب:  $\delta = \sqrt{5} - 2$

سوال 12:  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $x_0 = -1$ ,  $L = 3$ ,  $\epsilon = 0.25$  شکل 2.31



شکل 2.33: ترسیم برائے سوال 14



شکل 2.32: ترسیم برائے سوال 13

سوال 13:  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}$ ,  $x_0 = -1$ ,  $L = 2$ ,  $\epsilon = 0.5$  شکل 2.32  
جواب:  $\delta = 0.36$

سوال 14:  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $L = 2$ ,  $\epsilon = 0.01$  شکل 2.33

### $\delta$ کا الجبرائی حصول

سوال 15 تا سوال 30 میں  $f(x)$  اور اعداد  $L$ ،  $x_0$  اور  $\epsilon > 0$  دیے گئے ہیں۔ ہر سوال میں  $x_0$  کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کریں جس پر عدم مساوات  $|f(x) - L| < \epsilon$  مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد  $\delta > 0$  کی ایسی قیمت تلاش کریں کہ عدم مساوات  $0 < |x - x_0| < \delta$  کو مطمئن کرنے والے ہر  $x$  کے لئے عدم مساوات  $|f(x) - L| < \epsilon$  مطمئن ہوتی ہے۔

سوال 15:  $f(x) = x + 1$ ,  $L = 5$ ,  $x_0 = 4$ ,  $\epsilon = 0.01$   
جواب:  $\delta = 0.01$ ,  $(3.99, 4.01)$

سوال 16:  $f(x) = 2x - 2$ ,  $L = -6$ ,  $x_0 = -2$ ,  $\epsilon = 0.02$

سوال 17:  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $L = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\epsilon = 0.1$   
جواب:  $\delta = 0.19$ ,  $(-0.19, 0.21)$

سوال 18:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $L = \frac{1}{2}$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ ,  $\epsilon = 0.1$

سوال 19:  $f(x) = \sqrt{19-x}$ ,  $L = 3$ ,  $x_0 = 10$ ,  $\epsilon = 1$   
جواب:  $\delta = 5$ ,  $(3, 15)$

سوال 20:  $f(x) = \sqrt{x-7}$ ,  $L = 4$ ,  $x_0 = 23$ ,  $\epsilon = 1$

سوال 21:  $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, x_0 = 4, \epsilon = 0.05$   
 جواب:  $\delta = \frac{2}{3}, \left(\frac{10}{3}, 5\right)$

سوال 22:  $f(x) = x^2, L = 3, x_0 = \sqrt{3}, \epsilon = 0.1$

سوال 23:  $f(x) = x^2, L = 4, x_0 = -2, \epsilon = 0.5$   
 جواب:  $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12, (-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$

سوال 24:  $f(x) = \frac{1}{x}, L = -1, x_0 = -1, \epsilon = 0.1$

سوال 25:  $f(x) = x^2 - 5, L = 11, x_0 = 4, \epsilon = 1$   
 جواب:  $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12, (\sqrt{15}, \sqrt{17})$

سوال 26:  $f(x) = \frac{120}{x}, L = 5, x_0 = 24, \epsilon = 1$

سوال 27:  $f(x) = mx, m > 0, L = 2m, x_0 = 2, \epsilon = 0.03$   
 جواب:  $\delta = \frac{0.03}{m}, \left(2 - \frac{0.03}{m}, 2 + \frac{0.03}{m}\right)$

سوال 28:  $f(x) = mx, m > 0, L = 3m, x_0 = 3, \epsilon = c > 0$

سوال 29:  $f(x) = mx + b, m > 0, L = \frac{m}{2} + b, x_0 = \frac{1}{2}, \epsilon = c > 0$   
 جواب:  $\delta = \frac{c}{m}, \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{1}{2} + \frac{c}{m}\right)$

سوال 30:  $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, x_0 = 1, \epsilon = 0.05$

با ضابطہ حد پر مزید سوالات

سوال 31 تا 36 میں تقابل  $f(x)$ ، نقطہ  $x_0$  اور مثبت عدد  $\epsilon$  دیے گئے ہیں۔  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  تلاش کریں۔ اس کے بعد ایسا عدد  $\delta > 0$  تلاش کریں کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

سوال 31:  $f(x) = 3 - 2x, x_0 = 3, \epsilon = 0.02$   
 جواب:  $\delta = 0.01, L = -3$

سوال 32:  $f(x) = -3x - 2, x_0 = -1, \epsilon = 0.03$

سوال 33:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x_0 = 2, \epsilon = 0.05$   
 جواب:  $\delta = 0.05, L = 4$

$$f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+5}, x_0 = -5, \epsilon = 0.05 \quad \text{سوال 34}$$

$$f(x) = \sqrt{1-5x}, x_0 = -3, \epsilon = 0.5 \quad \text{سوال 35}$$

جواب:  $\delta = 0.75, L = 4$

$$f(x) = \frac{4}{x}, x_0 = 2, \epsilon = 0.4 \quad \text{سوال 36}$$

سوال 37 تا سوال 50 میں دیا گیا فقرہ حد ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 4} (9 - x) = 5 \quad \text{سوال 37}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2 \quad \text{سوال 38}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x - 5} = 2 \quad \text{سوال 39}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 - x} = 2 \quad \text{سوال 40}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{کے لئے} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad \text{سوال 41}$$

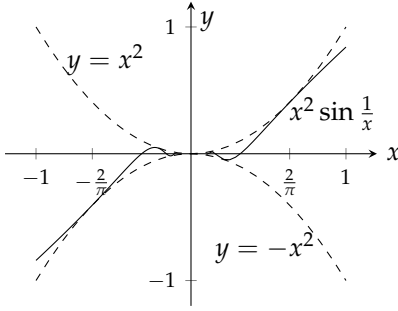
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4 \quad \text{کے لئے} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases} \quad \text{سوال 42}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \quad \text{سوال 43}$$

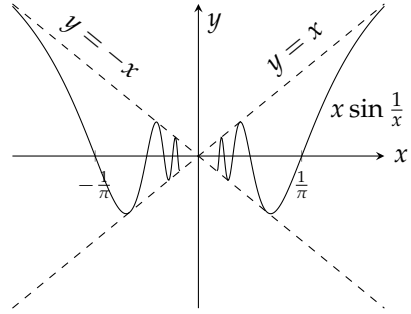
$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \quad \text{سوال 44}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6 \quad \text{سوال 45}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{سوال 46}$$



شکل 2.35: ترسیم برائے سوال 50



شکل 2.34: ترسیم برائے سوال 49

سوال 47:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  کے لئے  $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

سوال 48:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  کے لئے  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

سوال 49:  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$  شکل 2.34

سوال 50:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$  شکل 2.35

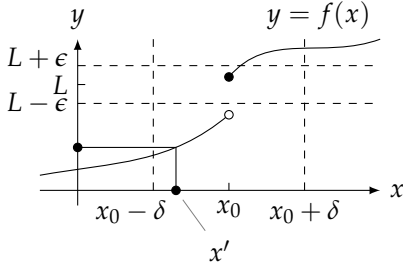
### نظریہ اور مثالیں

سوال 51:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

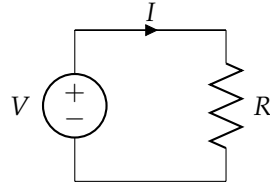
سوال 52:  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = k$  سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 53: یہ کہنا کہ "جیسے جیسے  $x$  کی قیمت  $x_0$  کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے  $f(x)$  کی قیمت  $L$  کے قریب ہوتی جاتی ہے" سے یہ اخذ نہیں کیا جاسکتا ہے کہ  $f(x)$  کا حد  $L$  ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال 54: یہ کہنا کہ "کسی بھی دیے گئے  $\epsilon > 0$  کے لئے ایسا  $x$  پایا جاتا ہے جس پر  $|f(x) - L| < \epsilon$ " سے یہ مراد نہیں لیا جاسکتا ہے کہ  $f(x)$  کا حد  $L$  ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔



شکل 2.37



شکل 2.36: قانون اوہم (سوال 56)

سوال 55: انجن کی سلنڈر کی رگڑائی  
انجن سلنڈر کا رقبہ عمودی تراش  $58 \text{ cm}^2$  حاصل کرنے کے لئے رگڑائی کرنے سے پہلے آپ جاننا چاہیں گے کہ سلنڈر کے رقبہ میں خلل کو  $\pm 0.06 \text{ cm}^2$  درستگی کے اندر رکھنے کے لئے درکار قطر میں چھوٹ کتنی ہے۔ یہ جاننے کی خاطر آپ  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  لکھ کر  $|A - 58| \leq 0.06$  کو حل کرتے ہوئے قطر  $d$  تلاش کرتے ہو۔ قطر کا کیا وقفہ حاصل ہو گا؟  
جواب:  $[8.589, 8.598]$

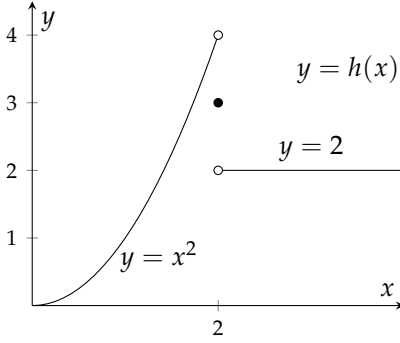
سوال 56: اوہم کا قانون کہتا ہے کہ  $V = IR$  ہو گا جہاں  $V$  برقی دباؤ،  $I$  برقی رو اور  $R$  برقی مزاحمت ہیں جن کی اکائیاں بالترتیب ولٹ  $V$ ، ایمپیر  $A$  اور اوہم  $\Omega$  ہیں (شکل 2.36)۔ آپ کے ادارے کو کہا گیا ہے کہ وہ برقی مزاحمت فراہم کرے۔ برقی دباؤ  $220 \text{ V}$  ہوگی جبکہ برقی رو  $10 \text{ mA} \pm 0.1 \text{ mA}$  ہونی ضروری ہے۔ مطلوبہ برقی رو  $10 \text{ mA}$  میں چھوٹ  $0.1 \text{ mA}$  ہے۔ درکار برقی مزاحمت کا وقفہ کیا ہو گا؟

کب  $x \rightarrow x_0$  کرنے سے عدد  $L$  تفاعل  $f(x)$  کا حد نہیں ہوگا؟  
یہ ثابت کرنے کی خاطر آپ کو ایسا  $\epsilon > 0$  تلاش کرنا ہو گا جس کے لئے ایسا کوئی  $\delta > 0$  نہیں پایا جاتا ہو کہ عدم مساوات  $0 < |x - x_0| < \delta$  کو مطمئن کرنے والے تمام  $x$  کے لئے  $|f(x) - L| < \epsilon$  ہو۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر ہم اس  $\epsilon$  کے لئے ثابت کریں گے کہ ہر  $\delta > 0$  کے لئے ایسا  $x$  پایا جاتا ہے کہ  $0 < |x - x_0| < \delta$  اور  $|f(x) - L| \geq \epsilon$  ہوں (مثلاً شکل 2.37 میں نقطہ  $x = x'$ )۔

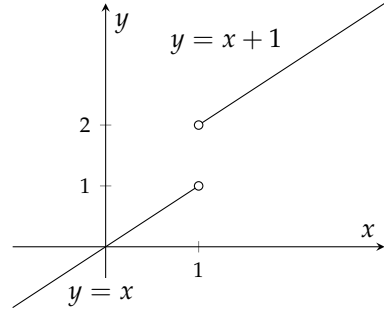
سوال 57: فرض کریں  $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$  ہے جس کو شکل 2.38 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف)  $\epsilon = \frac{1}{2}$

لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدم مساوات  $0 < |x - 1| < \delta$  کو مطمئن کرنے والے تمام  $x$  کے لئے کوئی بھی  $\delta > 0$  عدم مساوات  $|f(x) - 2| < \frac{1}{2}$  کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ یعنی ہر  $\delta$  کے لئے ایسا  $x$  پایا جاتا ہے جس پر  $0 < |x - 1| < \delta$  اور  $|f(x) - 2| \geq \frac{1}{2}$  ہوتے ہیں۔ یوں  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 2$  ہو گا۔

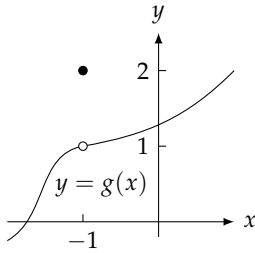
(ب) دکھائیں  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1$   
(پ) دکھائیں  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 1.5$



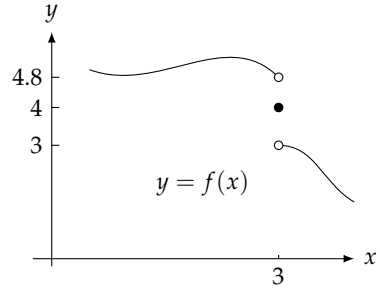
شکل 2.39: تقابل کا ترسیم برائے سوال 58



شکل 2.38: تقابل کا ترسیم برائے سوال 57



شکل 2.41: ترسیم برائے سوال 60



شکل 2.40: ترسیم برائے سوال 59

سوال 58: تقابل (شکل 2.39) کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

(الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 4$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 3$

(پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq 2$

سوال 59: تقابل کی ترسیم شکل 2.40 اس کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 4$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 4.2$

(پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 3$



سوال 60: دکھائیں کہ شکل 2.41 کی ترسیم کے لئے  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \neq 2$  ہے۔ کیا ایسا نظر آتا ہے جیسے حد  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  موجود ہے؟ اگر حد موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر حد نہیں پایا جاتا تو اس کی وجہ پیش کریں۔

### حد بذریعہ ترسیم۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 61 تا 66 میں آپ نے ترسیم کے ذریعہ  $\delta$  تلاش کرنا ہو گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔  
 (الف) تفاعل  $y = f(x)$  کو نقطہ  $x_0$  کے قریب ترسیم کریں۔  
 (ب) ترسیم کو دیکھ کر حد کا اندازہ لگائیں۔ حد کو حساب کے ذریعہ تلاش کرتے ہوئے اپنے اندازے کی تصدیق کریں۔  
 (پ)  $\epsilon = 0.2$  لیتے ہوئے تحدیدی خطوط  $y_1 = L - \epsilon$  اور  $y_2 = L + \epsilon$  کھینچیں۔ ساتھ ہی  $x_0$  کے قریب تفاعل  $f$  ترسیم کریں۔  
 (ت) درج بالا جزو (پ) سے ایسے  $\delta > 0$  کا اندازہ لگائیں کہ تمام  $x$  کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتے ہوں۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

اپنا اندازہ پرکھنے کی خاطر  $f$ ،  $y_1$  اور  $y_2$  کو وقفہ  $0 < |x - x_0| < \delta$  پر ترسیم کریں۔ اگر تفاعل کی کوئی قیمت وقفہ  $[L - \epsilon, L + \epsilon]$  کے باہر پائی جاتی ہو تب منتخب کردہ  $\delta$  بہت بڑا تھا لہذا  $\delta$  کی چھوٹی قیمت لیتے ہوئے دوبارہ کوشش کریں۔  
 (ث) جزو (پ) اور (ت) کو  $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.001$  کے لئے دہرائیں۔

سوال 61:  $f(x) = \frac{x^4 - 81}{x - 3}$ ,  $x_0 = 3$

سوال 62:  $f(x) = \frac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}$ ,  $x_0 = 0$

سوال 63:  $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$ ,  $x_0 = 0$

سوال 64:  $f(x) = \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}$ ,  $x_0 = 0$

سوال 65:  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ ,  $x_0 = 1$

سوال 66:  $f(x) = \frac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}$ ,  $x_0 = 1$

## 2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. یک طرفہ حد۔ جب  $x$  نقطہ  $a$  تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب بائیں ہاتھ حد<sup>7</sup> حاصل ہو گا۔ اسی طرح جب  $x$  نقطہ  $a$  تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب دائیں ہاتھ حد<sup>8</sup> حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

## یک طرفہ حد

تفاعل  $f$  کا نقطہ  $a$  پر حد اس صورت  $L$  کے برابر ہو گا جب  $a$  کے دونوں اطراف  $f$  معین ہو اور  $a$  کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں  $f$  کی قیمت  $L$  کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔ اسی لئے عام حد کو بعض اوقات دو طرفہ حد<sup>9</sup> بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے  $a$  کے نزدیک تر ہونے سے  $f$  کا حد پایا جاتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ  $f$  کا  $a$  پر یک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔ اگر  $x$  نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو  $x$  بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

تعریف: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف

فرض کریں کہ وقفہ  $(a, b)$ ، جہاں  $a < b$  ہے، پر تفاعل  $f(x)$  معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے  $a$  تک  $x$  پہنچنے کی کوشش کرنے سے  $f(x)$  کی قیمت  $L$  تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $a$  پر  $f(x)$  کا دائیں ہاتھ حد  $L$  ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

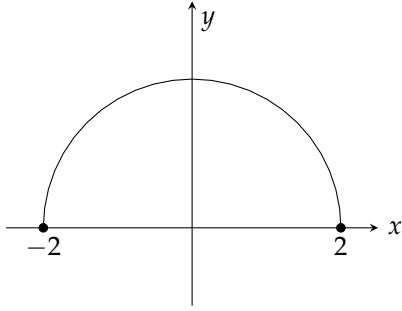
فرض کریں کہ وقفہ  $(c, a)$ ، جہاں  $c < a$  ہے، پر تفاعل  $f(x)$  معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے  $a$  تک  $x$  پہنچنے کی کوشش کرنے سے  $f(x)$  کی قیمت  $M$  تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $a$  پر  $f(x)$  کا بائیں ہاتھ حد  $M$  ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

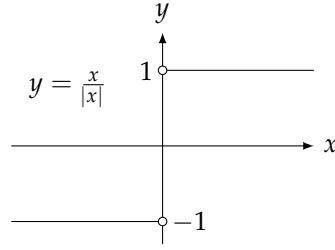
left-handed limit<sup>7</sup>

right-handed limit<sup>8</sup>

two-sided limit<sup>9</sup>



شکل 2.43: تقابل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔

شکل 2.42 میں تقابل  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$$

□

$x \rightarrow a^+$  سے مراد ہے کہ  $a$  تک پہنچتے ہوئے  $x$  کی قیمت  $a$  سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح  $x \rightarrow a^-$  سے مراد ہے کہ  $a$  تک پہنچتے ہوئے  $x$  کی قیمت  $a$  سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تقابل  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  کا دائرہ کار  $[-2, 2]$  ہے۔ تقابل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

نقطہ  $x = -2$  پر تقابل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح  $x = 2$  پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔  $x = -2$  اور  $x = 2$  پر تقابل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔

□

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تقابل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تقابل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تقابل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

ایک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: ایک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد  
متغیر  $x$  کا  $c$  کے نزدیک تر تفاعل  $f(x)$  کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$  پر:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  ہے جبکہ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجود نہیں ہیں۔  
( $x = 0$  کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$  پر:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$  ہے اگرچہ  $f(1) = 1$  ہے۔  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$  ہے جبکہ  
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  موجود نہیں ہے۔ (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$  پر:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$  اور  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$  ہیں۔  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  ہے اگرچہ  
 $f(2) = 2$  ہے۔

$x = 3$  پر:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$  ہے۔

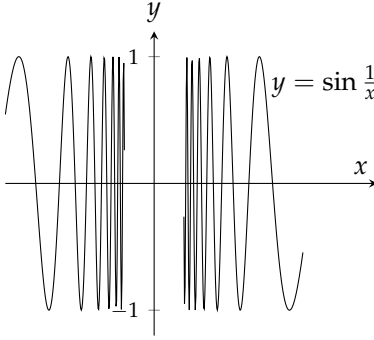
$x = 4$  پر:  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$  ہے اگرچہ  $f(4) \neq 1$  ہے۔  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  موجود نہیں ہیں۔ (نقطہ  $x = 4$  کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ  $[0, 4]$  میں ہر نقطہ  $a$  پر حد  $f(a)$  پایا جاتا ہے۔ □

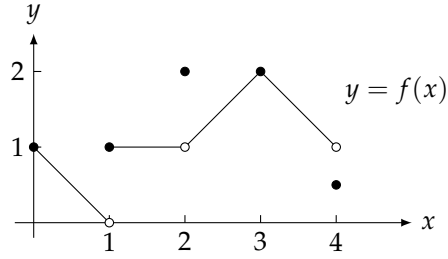
اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا ایک طرفہ حد موجود تھا۔ درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ  $x = 0$  تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن  $x = 0$  پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نہ بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر  $x$  کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل  $y = \sin \frac{1}{x}$  کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔

حل: جیسے جیسے  $x$  صفر تک پہنچتا ہے تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x}$  کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا پر  $\sin \frac{1}{x}$  کی قیمت متواتر  $-1$  اور  $1$  کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ ایسا کوئی کتنا عدد  $L$  نہیں پایا جاتا ہے جس تک  $\sin \frac{1}{x}$  کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے  $x$  کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔ یوں  $x = 0$  پر  $\sin \frac{1}{x}$  کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نہ کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ □



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

## لا متناہی حد

آئیں تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x}$  پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے  $x \rightarrow 0^+$  ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل  $f$  کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار  $f$  کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد  $B$  سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں  $B$  جتنا بھی بڑا عدد ہو،  $f$  آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔ یوں  $x \rightarrow 0^+$  پر  $f$  کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے قطع نظر،  $f$  کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ  $x \rightarrow 0^+$  کرنے سے  $f(x)$  کی قیمت  $\infty$  کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

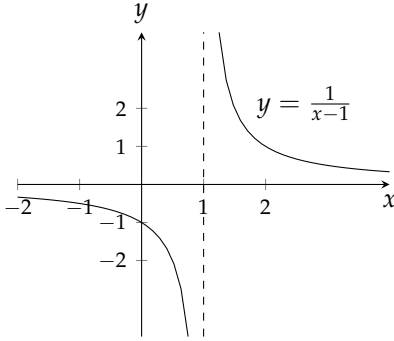
یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد  $\infty$  پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$  موجود نہیں ہے چونکہ  $x \rightarrow 0^+$  کرنے سے  $\frac{1}{x}$  کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x \rightarrow 0^-$  کرنے سے  $f(x) = \frac{1}{x}$  کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں  $f(x)$  کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد  $-B$  سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

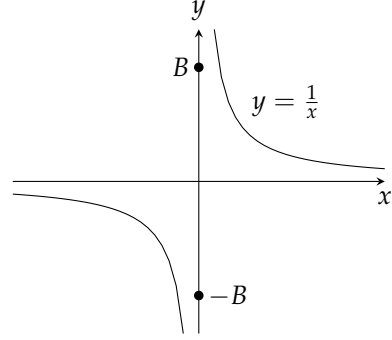
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد  $-\infty$  کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد  $-\infty$  پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت  $x \rightarrow 0^-$  کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: ایک طرفہ حد  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$  اور  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$  حاصل کریں۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27



شکل 2.46: تقابل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔

حل: ترسیمی حل: تقابل  $y = \frac{1}{x}$  کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے  $y = \frac{1}{x-1}$  کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب  $y = \frac{1}{x-1}$  کا رویہ 0 کے قریب  $y = \frac{1}{x}$  کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد  $x-1$  اور اس کے بالکل متناسب پر غور کریں۔  $x \rightarrow 1^+$  کرنے سے  $(x-1) \rightarrow 0^+$  اور  $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$  ملتے ہیں۔  $x \rightarrow 1^-$  کرنے سے  $(x-1) \rightarrow 0^-$  اور  $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$  ملتے ہیں۔ □

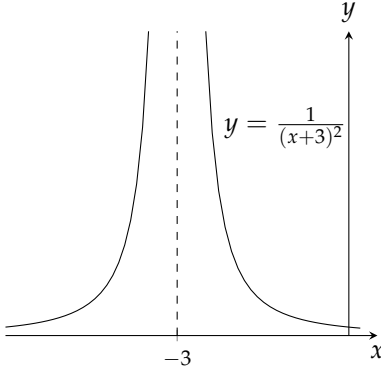
مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد (i)  $x=0$  کے قریب  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  (ب)  $x=-3$  کے قریب  $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$  پر غور کریں۔  
حل: (i) جیسے  $x$  صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے،  $\frac{1}{x^2}$  کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد  $B$  سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

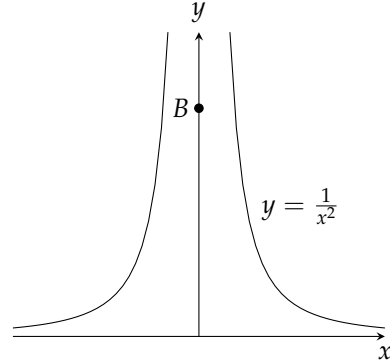
(ب)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے  $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$  کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب  $g(x)$  کا رویہ 0 کے قریب  $f(x)$  کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.49:  $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$  کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.48:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \rightarrow 0$  کرنے سے تفاعل  $y = \frac{1}{x}$  کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔  $x \rightarrow 0^+$  کرنے سے  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  حاصل ہوتا ہے جبکہ  $x \rightarrow 0^-$  کرنے سے  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  موجود نہیں ہے۔ اس کے برعکس تفاعل  $y = \frac{1}{x^2}$  کا رویہ ثابت قدم ہے۔ صفر کے دونوں اطراف سے  $x$  کو قریب لانے سے  $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$  حاصل ہوتا ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$  ہے۔

مثال 2.29: نااطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \quad (ب)$$

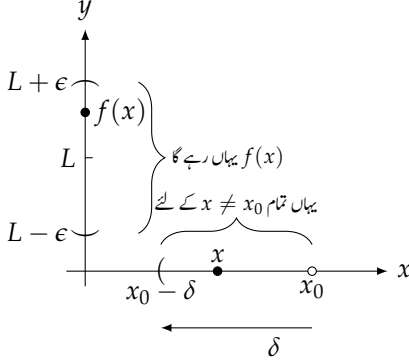
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \quad (د)$$

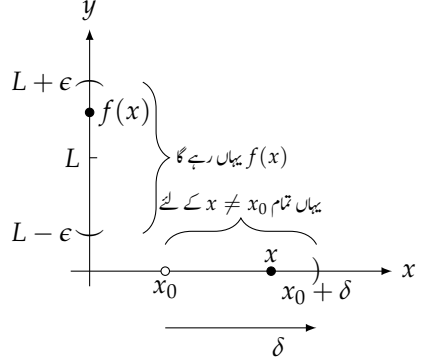
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \quad (و)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \quad (ه)$$

جزو (i) اور (ب) میں  $x = 2$  پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔ جزو (ه) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جاسکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد  $\epsilon > 0$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  پایا جاتا ہو کہ  $x_0 < x < x_0 + \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے

$$(2.1) \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $f(x)$  کا دائیں ہاتھ حد  $L$  ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

بائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد  $\epsilon > 0$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  پایا جاتا ہو کہ  $x_0 - \delta < x < x_0$  میں تمام  $x$  کے لئے

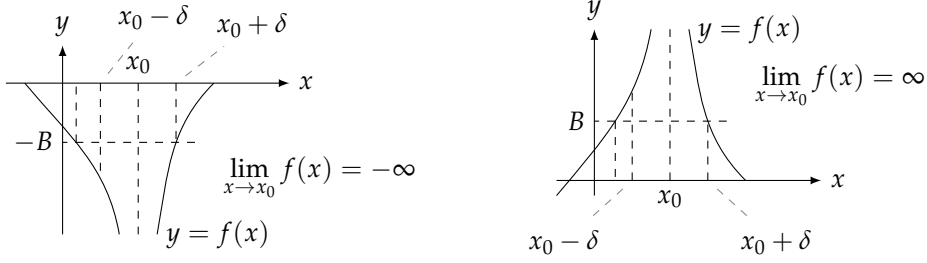
$$(2.2) \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $f(x)$  کا بائیں ہاتھ حد  $L$  ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

□





شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں  $\delta$  عدم مساوات سے  $x_0$  منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ حد کے لئے،  $x_0$  منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.3) \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے  $x_0$  منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.4) \quad -\delta < x - x_0 < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$(2.5) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

یوں  $x_0$  پر  $f$  کا حد اس صورت  $L$  ہو گا اگر  $x_0$  پر  $f$  کا بائیں ہاتھ حد  $L$  اور دائیں ہاتھ حد  $L$  ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ  $x_0$  کے کافی قریب تمام  $x$  کے لئے ہم کہیں کہ  $f(x)$  کی قیمت عدد  $L$  کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبداسے  $f(x)$  کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔ اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لامتناہی حد

(i) اگر ہر مثبت حقیقی عدد  $B$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  پایا جاتا ہو کہ  $0 < |x - x_0| < \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے

$f(x) > B$  ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے  $x$  کی قیمت  $x_0$  کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے  $f(x)$  کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد  $-B$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  پایا جاتا ہو کہ  $0 < |x - x_0| < \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے  $f(x) < -B$  ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے  $x$  کی قیمت  $x_0$  کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے  $f(x)$  کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

□

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔ اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

### سوالات

#### حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فکروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تغاقل  $y = f(x)$  کے لئے درست ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ن.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{ح.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{ط.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad \text{ی.}$$

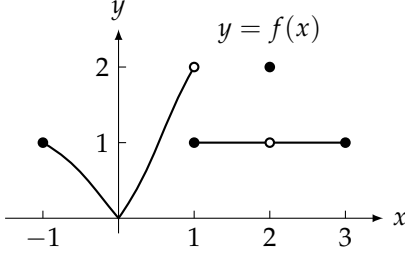
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{پ.}$$

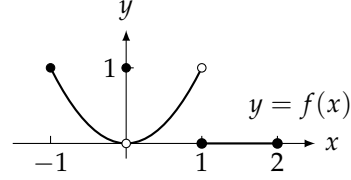
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے۔} \quad \text{و.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{ز.}$$



شکل 2.54: تقابل برائے سوال 2



شکل 2.53: تقابل برائے سوال 1

جواب:

- ا. درست      ج. غلط      ہ. درست      ز. غلط      ط. غلط      یا. درست  
ب. درست      د. درست      و. درست      ح. غلط      ی. غلط      یب. غلط

سوال 2: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تقابل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔

ا.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$       ز.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$       یا.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

ب.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  غیر موجود ہے۔

ح. کھلے وقفہ  $(-1, 1)$  میں ہر  $c$  پر  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجود ہے۔

ج.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

ط. کھلے وقفہ  $(1, 3)$  میں ہر  $c$  پر  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجود ہے۔

د.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

ی.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$

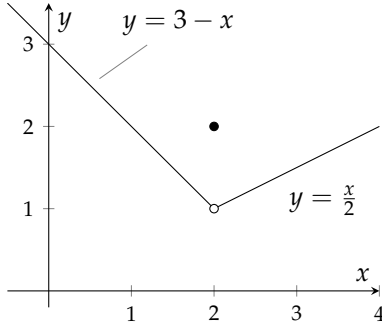
ہ.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

یا.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$  غیر موجود ہے۔

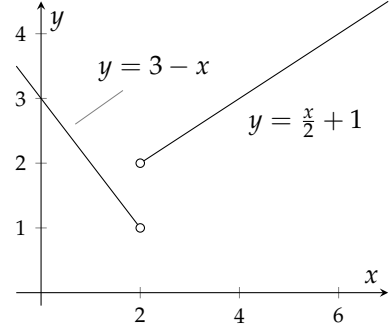
و.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  غیر موجود ہے۔

سوال 3: درج ذیل تقابل کو شکل 3 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$$



شکل 2.56: تقابل برائے سوال 4



شکل 2.55: تقابل برائے سوال 3

ا.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  تلاش کریں۔

ب. کیا  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$  تلاش کریں۔

د. کیا  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  موجود ہے۔ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تا نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) 1، 2، (ب) نہیں  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، (ج) 3، 3، (د) ہاں، 3

سوال 4: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

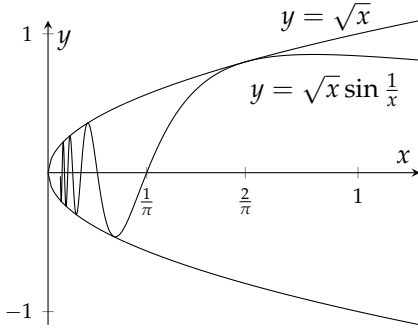
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  اور  $f(2)$  تلاش کریں۔

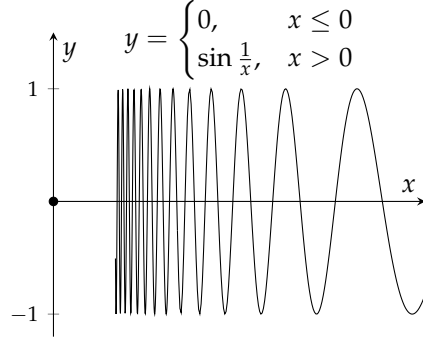
ب. کیا  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  تلاش کریں۔

د. کیا  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 6



شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 5

سوال 5: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

ا. کیا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) نہیں (ب) ہاں، 0 (ج) نہیں

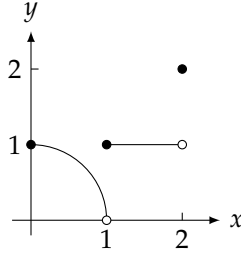
سوال 6: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

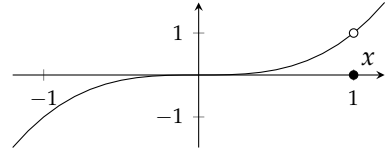
ب. کیا  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7:



شکل 2.60: ترسیم برائے سوال 9



شکل 2.59: ترسیم برائے سوال 7

ا. تفاعل  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$  کو ترسیم کریں۔

ب.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  تلاش کریں۔

ج. کیا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) شکل 2.59 (ب) 1, 1 (ج) ہاں، 1

سوال 8:

ا. تفاعل  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$  کو ترسیم کریں۔

ب.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  تلاش کریں۔

ج. کیا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9 اور سوال 10 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل  $f$  کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ  $c$  پر  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases} \quad \text{سوال 9:}$$

جواب: شکل 9 (i)  $D : 0 \leq x \leq 2$  ، اور  $R : 0 < y \leq 2$  (ب)  $(1, 2) \cup (0, 1)$  (ج)  $x = 0$  (د)  $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \text{ یا } 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \quad \text{سوال 10:}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 11 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \quad \text{سوال 11:}$$

جواب:  $\sqrt{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \quad \text{سوال 12:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left( \frac{x}{x+1} \right) \left( \frac{2x+5}{x^2+x} \right) \quad \text{سوال 13:}$$

جواب: 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{x+1} \right) \left( \frac{x+6}{x} \right) \left( \frac{3-x}{7} \right) \quad \text{سوال 14:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} \quad \text{سوال 15:}$$

جواب:  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h} \quad \text{سوال 16:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}} \quad (\text{i}) \quad \text{سوال 17:}$$

جواب: (i) 1 (ب) -1

سوال 18: (i)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 19: (i)  $\lim_{\theta \rightarrow 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$  (ب)  $\lim_{\theta \rightarrow 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$  (i) 1 (ب)  $\frac{2}{3}$  جواب:

سوال 20: (i)  $\lim_{t \rightarrow 4^+} (t - |t|)$  (ب)  $\lim_{t \rightarrow 4^-} (t - |t|)$

لامتناہی حد: سوال 21 تا سوال 32 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 21:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x}$  جواب:  $\infty$

سوال 22:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 23:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$  جواب:  $-\infty$

سوال 24:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 25:  $\lim_{x \rightarrow -8^+} \frac{2x}{x+8}$  جواب:  $-\infty$

سوال 26:  $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 27:  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4}{(x-7)^2}$  جواب:  $\infty$

سوال 28:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 29: (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$  جواب: (i)  $\infty$  (ب)  $-\infty$

سوال 30: (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$



## 2.4. تصور حد کی توسیع

سوال 31:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^{2/5}}$  جواب:  $\infty$

سوال 32:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 33 تا سوال 36 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33:  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x$  جواب:  $\infty$

سوال 34:  $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 35:  $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (1 + \csc \theta)$  جواب:  $-\infty$

سوال 36:  $\lim_{\theta \rightarrow 0} (2 - \cot \theta)$

مزید حساب: سوال 37 تا سوال 42 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 37:  $\lim_{x^2 \rightarrow 4} \frac{1}{x^2 - 4}$

ا.  $x \rightarrow 2^+$  ب.  $x \rightarrow 2^-$  ج.  $x \rightarrow -2^+$  د.  $x \rightarrow -2^-$

جواب: (ا)  $\infty$  (ب)  $-\infty$  (ج)  $-\infty$  (د)  $\infty$

سوال 38:  $\lim_{x^2 \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$

ا.  $x \rightarrow 1^+$  ب.  $x \rightarrow 1^-$  ج.  $x \rightarrow -1^+$  د.  $x \rightarrow -1^-$

سوال 39:  $\lim (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x})$

ا.  $x \rightarrow 0^+$  ب.  $x \rightarrow 0^-$  ج.  $x \rightarrow \sqrt[3]{2}$  د.  $x \rightarrow -1$

جواب: (ا)  $-\infty$  (ب)  $\infty$  (ج)  $0$  (د)  $\frac{3}{2}$

سوال 40:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x+4}$

ا.  $x \rightarrow -2^+$  ب.  $x \rightarrow -2^-$  ج.  $x \rightarrow 1^+$  د.  $x \rightarrow 0^-$

سوال 41:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$

ا.  $x \rightarrow 0^+$  ب.  $x \rightarrow 2^+$  ج.  $x \rightarrow 2^-$  د.  $x \rightarrow 2$

جواب: (ا)  $-\infty$  (ب)  $\frac{1}{4}$  (ج)  $\frac{1}{4}$  (د)  $-\infty$  ہو گا۔

سوال 42:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

ا.  $x \rightarrow 2^+$  ب.  $x \rightarrow -2^+$  ج.  $x \rightarrow 0^-$  د.  $x \rightarrow 1^+$

سوال 43 تا سوال 46 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

سوال 43:  $\lim_{t \rightarrow 0} (2 - \frac{3}{t^{1/3}})$

ا.  $t \rightarrow 0^+$  ب.  $t \rightarrow 0^-$

جواب: (ا)  $-\infty$  (ب)  $\infty$

سوال 44:  $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$

ا.  $t \rightarrow 0^+$  ب.  $t \rightarrow 0^-$

سوال 45:  $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

جواب: (ا)  $\infty$  (ب)  $\infty$  (ج)  $\infty$  (د)  $\infty$

$$\text{سوال 46:} \quad \lim \left( \frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \right)$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

### نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر  $f$  کے دائرہ کار کے اندر آپ کو  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  اور  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  معلوم ہو تب کیا آپ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر آپ جانتے ہوں کہ  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجود ہے، کیا آپ  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں کہ  $f(x)$  متغیر  $x$  کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$  ہے، آپ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$  کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: فرض کریں کہ  $f(x)$  متغیر  $x$  کا جفت تفاعل ہے۔ اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$  ہو تب کیا  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$  یا  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

### ایک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

سوال 51: اگر  $\epsilon > 0$  ہو تب ایسا وقفہ  $I = (5, 5 + \delta), \delta > 0$  تلاش کریں کہ اگر  $x$  وقفہ  $I$  میں پایا جاتا ہو تب  $\sqrt{x-5} < \epsilon$  ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟  
جواب:  $\delta = \epsilon^2, \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

سوال 52: اگر  $\epsilon > 0$  ہو تب ایسا وقفہ  $I = (4 - \delta, 4), \delta > 0$  تلاش کریں کہ اگر  $x$  وقفہ  $I$  میں پایا جاتا ہو تب  $\sqrt{4-x} < \epsilon$  ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 53 اور سوال 54 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

$$\text{سوال 53:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

سوال 54:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

سوال 55: (i)  $\lim_{x \rightarrow 400^+} [x]$  اور (ب)  $\lim_{x \rightarrow 400^-} [x]$  تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا  $\lim_{x \rightarrow 400} [x]$  کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔  
جواب: (i) 400 (ب) 399 (ج) حد غیر موجود ہے۔

سوال 56: فرض کریں کہ  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$  ہے۔ (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  اور (ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے فکروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

سوال 57:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

سوال 58:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

سوال 59:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty$

سوال 60:  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

ایک طرفہ لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لامتناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد  $B$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  موجود ہو کہ  $x_0 < x < x_0 + \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے  $f(x) > B$  ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے  $x$  دائیں ہاتھ سے  $x_0$  کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے  $f(x)$  لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} = \infty$$

□

سوال 61: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{ج۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{ا۔}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ب۔}$$

جواب: (ا) ہر مثبت حقیقی عدد  $B$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  موجود ہے کہ  $x_0 - \delta < x < x_0$  میں تمام  $x$  کے لئے  $f(x) > B$  ہے۔ (ب) ہر منفی حقیقی عدد  $-B$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  موجود ہے کہ  $x_0 < x < x_0 + \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے  $f(x) < -B$  ہے۔ (ج) ہر منفی حقیقی عدد  $-B$  کے لئے ایسا مطابقتی عدد  $\delta > 0$  موجود ہے کہ  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$  میں تمام  $x$  کے لئے  $f(x) < -B$  ہے۔

یک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 62 تا سوال 67 میں دیے گئے فکروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{سوال 62}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{سوال 63}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{سوال 64}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{سوال 65}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \quad \text{سوال 66}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty \quad \text{سوال 67}$$

## 2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے تاکہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اتنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاید ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مائیکول میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی درحقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے تاکہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطے پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔ استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

## نقطہ پر استمرار

مُلاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔ یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی اندرونی نقطے<sup>10</sup> (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، بائیں سر نقطے<sup>11</sup> اور دائیں سر نقطے<sup>12</sup>۔

تعریف: اندرونی نقطہ پر استمرار

اگر تفاعل  $f$  کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ  $x = c$  پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر  $f$  استمراری ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

□

شکل 2.61 میں  $x = 0$  پر (ا) استمراری ہے۔ اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر  $f(0) = 1$  ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں  $f(0) = 2$  کی بجائے  $f(0) = 1$  ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔ انہیں قابل ہٹاؤ<sup>13</sup> عدم استمرار کہتے ہیں۔ ان دونوں میں  $x \rightarrow 0$  کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور  $f(0)$  کو اس حد کے برابر پر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جاسکتا ہے۔

شکل 2.61 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تشویش ناک ہیں۔ ان میں  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجود نہیں ہیں لہذا  $x = 0$  پر  $f$  کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جاسکتی ہے۔ (د) میں چھلانگ عدم استمرار<sup>14</sup> پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (و) میں تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  کا لا متناہی عدم استمرار<sup>15</sup> پایا جاتا ہے۔ ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب  $f$  اس لئے غیر استمراری ہے کہ  $x \rightarrow 0$  کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں ارتعاشی عدم استمرار<sup>16</sup> پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔ کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔ عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

interior points<sup>10</sup>

left endpoints<sup>11</sup>

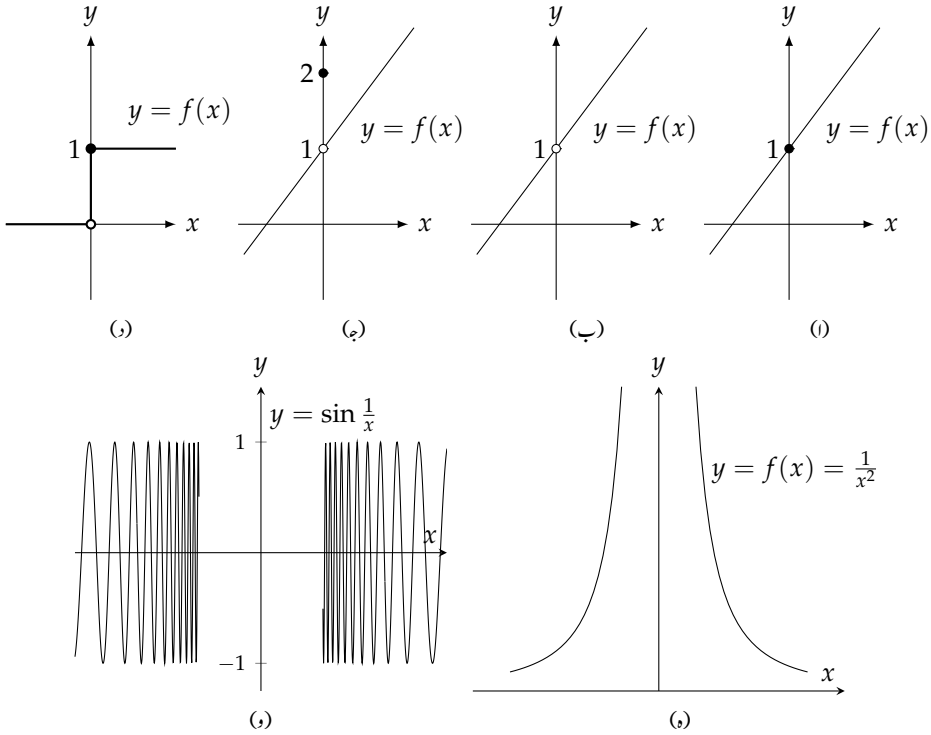
right endpoints<sup>12</sup>

removable<sup>13</sup>

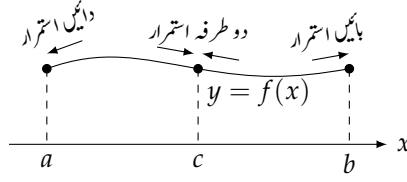
jump discontinuity<sup>14</sup>

infinite discontinuity<sup>15</sup>

oscillating discontinuity<sup>16</sup>



شکل 2.61:  $x = 0$  پر تقابل (i) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (د) غیر استمراری ہیں۔



شکل 2.62: نقطہ  $a$ ،  $b$  اور  $c$  پر استمرار

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

تعریف: بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار  
اگر تفاعل  $f$  کے دائرہ کار میں نقطہ  $x = a$  پر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ  $x = a$  پر استمراری ہو گا۔ اسی طرح اگر تفاعل  $f$  کے دائرہ کار میں نقطہ  $x = b$  پر

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ  $x = b$  پر استمراری ہو گا۔

□

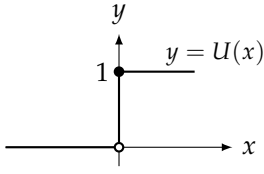
عام طور پر تفاعل  $f$  کے دائرہ کار میں نقطہ  $x = c$  پر  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$  ہونے کی صورت میں تفاعل دائیں استمراری<sup>17</sup> ہو گا۔ اسی طرح تفاعل  $f$  اس صورت بائیں استمراری<sup>18</sup> ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ  $x = c$  پر  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$  ہو۔ یوں  $f$  کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ  $x = a$  پر  $f$  اس صورت استمراری ہو گا جب یہ  $x = a$  پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ  $x = b$  پر  $f$  اس صورت استمراری ہو گا جب یہ  $x = a$  پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ  $x = c$  پر  $f$  اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر  $f$  دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.62)۔

مثال 2.30: تفاعل  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  اپنے پورے دائرہ کار  $[-2, 2]$  میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ  $x = -2$  شامل ہے جہاں  $f$  دائیں استمراری ہے اور  $x = 2$  جہاں  $f$  بائیں استمراری ہے (شکل 2.63)۔

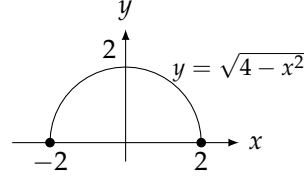
□

right-continuous<sup>17</sup>  
left-continuous<sup>18</sup>





شکل 2.64: یہ تفاعل مبدا پر دائیں استمراری ہے



شکل 2.63: پورے دائرہ کار کے پر نقطہ پر استمراری

مثال 2.31: شکل 2.64 میں دکھایا گیا اکائی سیزھی تفاعل  $U(x)$  نقطہ  $x = 0$  پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ نابائیں استمراری ہے اور نابائی استمراری ہے۔

□

ہم نقطہ پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

**پروکھ استمرار**  
نقطہ  $x = c$  پر تفاعل  $f(x)$  صرف اور صرف اس صورت استمراری ہوگا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

$$1. \quad f(c) \text{ موجود ہے} \quad (\text{نقطہ } c \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے})$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ موجود ہے} \quad (x \rightarrow c \text{ پر } f \text{ کا حد پایا جاتا ہے})$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (\text{تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے})$$

یک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل  $y = f(x)$  جسے شکل 2.65 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔ نقطہ  $x = 0, 1, 2, 3, 4$  پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

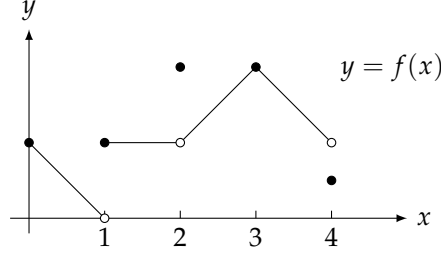
حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$1. \quad x = 0 \text{ پر } f \text{ استمراری ہے چونکہ}$$

$$1. \quad f(0) \text{ موجود ہے} \quad (f(0) = 1)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad (\text{اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے})$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (\text{تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں})$$



شکل 2.65: تقابل  $f$  بند وقفہ  $[0, 4]$  پر معین ہے۔ یہ تقابل  $x = 1, 2, 4$  پر غیر استتاری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استتاری ہے۔

ب. چونکہ  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  غیر موجود ہے لہذا  $x = 1$  پر  $f$  غیر استتاری ہے۔ پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ  $x = 1$  پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ  $x = 1$  پر  $f$  دائیں استتاری ہے چونکہ

$$1. \quad f(1) \text{ موجود ہے } (f(1) = 1)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ (نقطہ } x = 1 \text{ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ (دائیں ہاتھ حد اور تقابل کی قیمتیں برابر ہیں۔)}$$

ج.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$  کی بنا  $x = 2$  پر  $f$  غیر استتاری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

د.  $x = 3$  پر  $f$  استتاری ہے چونکہ

$$1. \quad f(3) \text{ موجود ہے } (f(3) = 2)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \text{ (نقطہ } x = 2 \text{ پر حد موجود ہے۔)}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{ (تقابل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)}$$

ہ. چونکہ  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$  ہے لہذا دائیں سر نقطہ  $x = 4$  پر  $f$  غیر استتاری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

## قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار

اگر نقطہ  $x = c$  پر تفاعل  $f$  اور  $g$  استمراری ہوں تب  $x = c$  پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

$$1. f + g \text{ اور } f - g$$

$$2. fg$$

$$3. kf, \text{ جہاں } k \text{ کوئی عدد ہے}$$

$$4. \frac{f}{g} \text{ (بشرطیکہ } g(c) \neq 0 \text{ ہو)}$$

$$5. (f(x))^{m/n} \text{ (بشرطیکہ } (f(x))^{m/n} \text{ اس وقت پر معین ہو جس پر } c \text{ پایا جاتا ہے، اور } m \text{ اور } n \text{ عدد صحیح ہیں۔)}$$

درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار

حقیقی خط کے ہر نقطہ پر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال 2.33:  $x$  کی ہر قیمت پر تفاعل  $f(x) = x^4 + 20$  اور  $g(x) = 5x(x - 2)$  استمراری ہیں۔ تفاعل

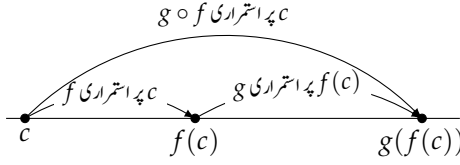
$$r(x) = \frac{x^2 + 20}{5x(x - 2)}$$

□

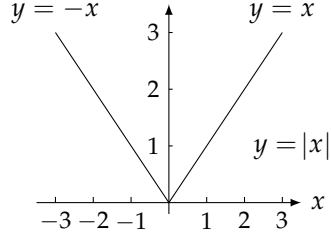
ماسوائے  $x = 0$  اور  $x = 2$  جہاں نسب نما صفر ہے،  $x$  کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔

مثال 2.34:  $f(x) = |x|$  کی استمرار

$x$  کی ہر قیمت پر تفاعل  $f(x) = |x|$  استمراری ہے (شکل 2.66)۔  $x > 0$  کے لئے  $f(x) = x$  ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔ اسی



شکل 2.67: مرکب تفاعل کی استمرار۔



شکل 2.66: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔

طرح  $x < 0$  کے لئے  $f(x) = -x$  ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔ آخر میں مباد پر  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$  ہے۔  
□

مثال 2.35: تکنیکی تفاعل کی استمرار  
اگلے باب میں دکھایا جائے گا کہ  $x$  کی ہر قیمت پر  $\sin x$  اور  $\cos x$  استمراری ہے لہذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

□

مسئلہ 2.8: مرکبات کی استمرار  
اگر  $c$  پر  $f$  اور  $f(c)$  پر  $g$  استمراری ہوں تب  $c$  پر  $g \circ f$  استمراری ہو گا (شکل 2.67)۔  
مرکب کی استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

- |  |   |
|--|---|
| (ا) $y = \sqrt{x}$                         | مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت)                      |
| (ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$              | مسئلہ 2.7 اور مسئلہ 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب) |
| (ج) $y = \frac{x \cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$  | مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی)        |
| (د) $y = \left  \frac{x-2}{x^2-2} \right $ | مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حقیقی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب)           |

□

## نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔ اگر  $f(c)$  غیر معین ہو لیکن  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل  $F(x)$  متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل  $F$  نقطہ  $x = c$  پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو  $f$  کی نقطہ  $x = c$  تک استمراری توسیع<sup>19</sup> کہتے ہیں اور توسیع شدہ تفاعل کو وسیع تفاعل<sup>20</sup> کہتے ہیں۔ ناطق تفاعل  $f$  کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا  $x = 2$  پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

حل: اگرچہ  $f(2)$  غیر معین ہے،  $x \neq 2$  پر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل  $x \neq 2$  پر  $f$  کے برابر ہے اور  $x = 2$  پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت  $\frac{5}{4}$  ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

یوں  $f$  کی نقطہ  $x = 2$  تک توسیع تفاعل  $F(x)$  ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

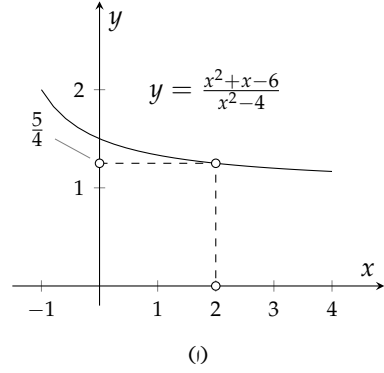
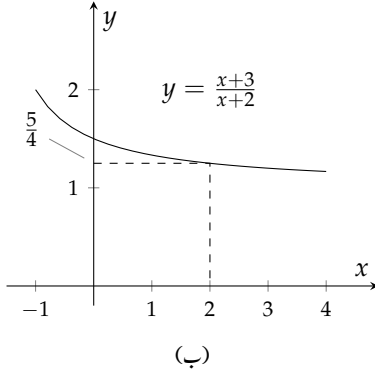
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

تفاعل  $f$  کی ترسیم شکل 2.68 میں دکھائی گئی ہے۔  $F$  کی بھی یہی ترسیم ہے مگر اس میں  $(2, \frac{5}{4})$  پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔  $f$  اور  $F$  کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

□

continuous extension<sup>19</sup>  
extended function<sup>20</sup>



شکل 2.68:  $f(x)$  تقابل اور اس کی استمراری توسیع  $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تقابل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ ایسا تقابل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

اگر  $f$  کے دائرہ کار کے اندر وقفہ  $I$  میں ہر اندرونی نقطہ  $c$  پر  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو  $I$  میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تقابل کی قیمت برابر ہوں تب  $f$  وقفہ پر استمراری<sup>21</sup> کہلائے گا۔ جو تقابل  $I$  پر استمراری ہو یہ تقابل  $I$  کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔ کثیر رکنی اور ناظم تقابل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تقابل

شکل 2.69 میں وقفوں پر استمراری تقابل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔

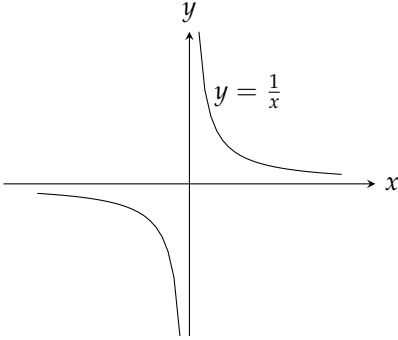
□

وقفوں پر استمراری تقابل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ ان میں ایک متوسط قیمت خاصیت<sup>22</sup> ہے۔ اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تقابل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تقابل متوسط قیمت خاصیت رکھتا ہے۔

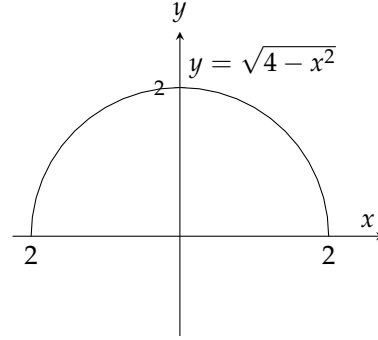
مسئلہ 2.9: مسئلہ متوسط قیمت

فرض کریں کہ تقابل  $f$  وقفہ  $I$  پر استمراری ہے جبکہ  $a$  اور  $b$  اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ تب اگر  $f(a)$  اور  $f(b)$  کے بیچ  $y_0$  ایک عدد ہو تب  $a$  اور  $b$  کے بیچ ایک ایسا عدد  $c$  پایا جائے گا کہ  $f(c) = y_0$  ہو (شکل 2.70)۔

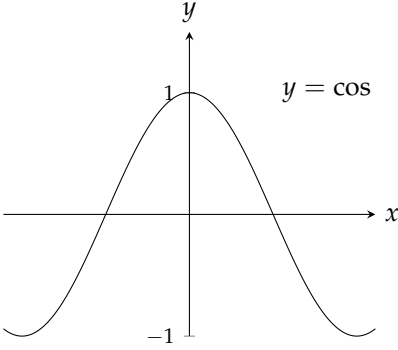
continuous on interval<sup>21</sup>  
intermediate value property<sup>22</sup>



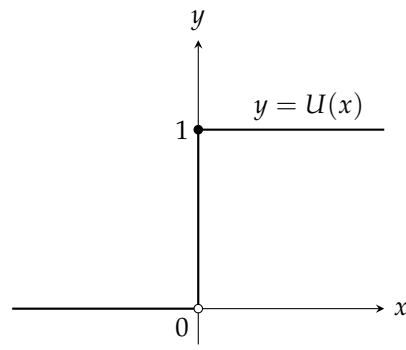
(ب)  $(-\infty, 0)$  اور  $(0, \infty)$  پر استمراری



(د)  $[-2, 2]$  پر استمراری

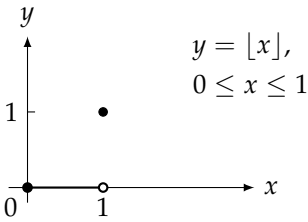


(د)  $(-\infty, \infty)$  پر استمراری

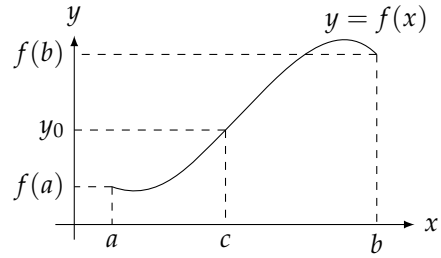


(ج)  $(-\infty, 0)$  اور  $[0, \infty)$  پر استمراری

شکل 2.69: وقفوں پر استمراری تقاض (مثال 2.38)



شکل 2.71:  $y = [x], 0 \leq x \leq 1$  تقاض کوئی بھی قیمت  $f(0) = 0$  اور  $f(1) = 1$  کے لئے قبول نہیں کرتا ہے۔



شکل 2.70: وقفہ  $[a, b]$  پر استمراری تقاض  $f(a)$  اور  $f(b)$  کے لئے ہر قیمت رکھتا ہے

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلیٰ درجے کی کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ  $I$  پر تفاعل  $f$  کی استتار ضروری ہے۔ اگر  $I$  میں صرف ایک نقطے پر بھی  $f$  غیر استتاری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔ اس کی ایک مثال شکل 2.71 میں دی گئی ہے۔

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ  $I$  پر استتاری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔ اس میں عددی صحیح زمین تفاعل  $[x]$  کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نا ہی اس میں تفاعل  $\frac{1}{x}$  کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

### تلاش جذر

مساوات  $f(x) = 0$  کے حل کو  $f(x)$  کا صفر<sup>23</sup> یا جذر<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ مسئلہ 2.9 کے تحت استتاری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت  $(\pm)$  تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $f(x) = 0$  طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں  $f$  استتاری ہے)۔ مساوات کی ترسیم  $x$  محور کو  $f$  کی جذر پر قطع کرتی ہے۔ ہم  $y = f(x)$  کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ یہ کہاں  $x$  محور کو قطع کرتی ہے۔ ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت دیکھتے ہیں۔ اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔ اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک کا جذر تلاش کیا جاسکتا ہے۔ شکل 2.72 میں، قدم با قدم، اس عمل سے  $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$  کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

ترسیم سے مساوات کو حل کرتے ہوئے تفاعل کے جذر حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ اس سے کم دورانیے میں جذر کو بذریعہ اعدادی تراکیب حاصل کیا جاسکتا ہے جن پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

### سوالات

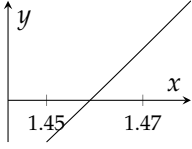
#### استمرار بذریعہ ترسیم

سوال 1 تا سوال 4 میں دریافت کریں کہ آیا تفاعل وقفہ  $[-1, 3]$  پر استتاری ہے۔ نا ہونے کی صورت میں کہاں تفاعل غیر استتاری ہے اور ایسا کیوں ہے؟

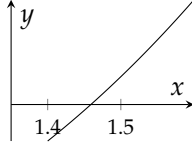
سوال 1: تفاعل  $y = f(x)$  جسے شکل 2.73-1 میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب: نہیں؛  $x = 2$  پر غیر استتاری ہے؛  $x = 2$  پر غیر معین ہے۔

zero<sup>23</sup>  
root<sup>24</sup>

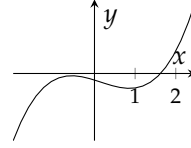




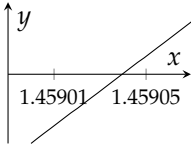
(ج) جذر (صفر) 1.45 اور 1.47 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



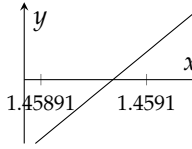
(ب) جذر (صفر) 1.4 اور 1.5 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



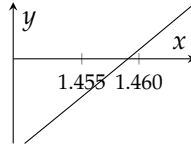
(ا) جذر (صفر) 1 اور 2 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(د) جذر (صفر) 1.45901 اور 1.45905 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

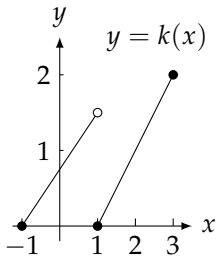


(س) جذر (صفر) 1.45891 اور 1.4591 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

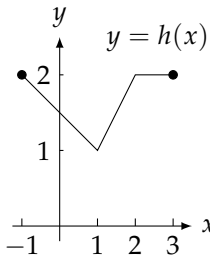


(ذ) جذر (صفر) 1.455 اور 1.460 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

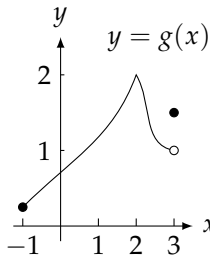
شکل 2.72: ترمیم کے ذریعہ  $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$  کے جذور کا قدم با قدم حصول۔



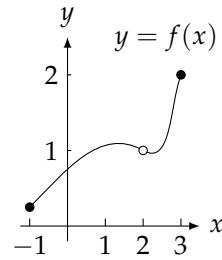
(ا)



(ب)

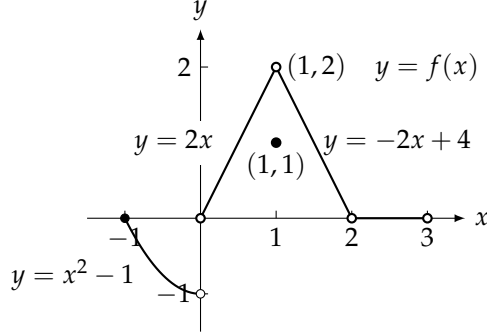


(ج)



(د)

شکل 2.73: اشکال برائے سوال 1 تا سوال 4



شکل 2.74: ترسیم برائے سوال 5 تا سوال 10

سوال 2: تقابل  $y = g(x)$  جسے شکل 2.73-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3: تقابل  $y = h(x)$  جسے شکل 2.73-ج میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب: استمراری

سوال 4: تقابل  $y = k(x)$  جسے شکل 2.73-د میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5 تا سوال 10 درج ذیل تقابل کے بارے میں ہیں جس کو شکل 2.74 میں ترسیم کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

- سوال 5: (ا) کیا  $f(-1)$  موجود ہے؟  
(ب) کیا  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  موجود ہے؟  
(ج) کیا  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$  ہے؟  
(د) کیا  $x = -1$  پر  $f(x)$  استمراری ہے؟  
جواب: (ا) ہاں، (ب) ہاں، (ج) ہاں، (د) ہاں

- سوال 6: (ا) کیا  $f(x)$  موجود ہے؟  
(ب) کیا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  موجود ہے؟  
(ج) کیا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  ہے؟  
(د) کیا  $x = 1$  پر  $f$  استمراری ہے؟

سوال 7: (i) کیا  $x = 2$  پر  $f$  معین ہے؟  
 (ب) کیا  $f = 2$  پر  $f$  استمراری ہے؟  
 جواب: (i) نہیں، (ب) نہیں

سوال 8:  $x$  کی کس قیمت پر  $f$  استمراری ہے؟

سوال 9:  $x = 2$  پر توسیع کردہ تفاعل کو استمراری بنانے کی خاطر  $f(2)$  کی کیا قیمت ہونی چاہیے؟  
 جواب: 0

سوال 10:  $f(1)$  کی کیا قیمت غیر استمرار کو ختم کرے گی؟

### پرکھ استمرار کا استعمال

کن نقطوں پر سوال 11 اور سوال 12 میں دیے گئے تفاعل غیر استمراری ہیں۔ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم کیا جاسکتا ہے؟ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم نہیں کیا جاسکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11: حصہ 2.4 میں سوال 1 کے تفاعل۔  
 جواب: 1 ناقابل ہٹاؤ؛ 0 قابل ہٹاؤ

سوال 12: حصہ 2.4 سوال 2 میں کے تفاعل۔

سوال 13 تا سوال 28 میں کن نقطوں پر تفاعل استمراری ہیں۔

سوال 13:  $y = \frac{1}{x-2} - 3x$   
 جواب: تمام ماسوائے  $x = 2$

سوال 14:  $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

سوال 15:  $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$   
 جواب: تمام ماسوائے  $x = 3$  اور  $x = 1$

سوال 16:  $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$

سوال 17:  $y = |x-1| + \sin x$   
 جواب: تمام  $x$

سوال 18:  $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$

سوال 19:  $y = \frac{\cos x}{x}$   
جواب: تمام ماسوائے  $x = 0$

سوال 20:  $y = \frac{x+2}{\cos x}$

سوال 21:  $y = \csc x$   
جواب: تمام  $x$  ماسوائے  $x = \frac{n\pi}{2}$  جہاں  $n$  عدد صحیح ہے۔

سوال 22:  $y = \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 23:  $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$   
جواب: تمام  $x$  ماسوائے  $x = \frac{n\pi}{2}$  جہاں  $n$  طاق عدد صحیح ہے۔

سوال 24:  $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

سوال 25:  $y = \sqrt{2x+3}$   
جواب: تمام  $x > -\frac{3}{2}$

سوال 26:  $y = \sqrt[4]{3x-1}$

سوال 27:  $y = (2x-1)^{1/3}$   
جواب: تمام  $x$

سوال 28:  $y = (2-x)^{1/5}$

مرکب تفاعل کے حد  
سوال 29 تا سوال 34 میں حد تلاش کریں۔

سوال 29:  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \sin x)$   
جواب: 0

سوال 30:  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$

سوال 31:  $\lim_{y \rightarrow 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$   
جواب: 1

سوال 32:  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(\sin x^{1/3})\right)$

سوال 33:  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{19-3 \sec 2t}}\right)$  جواب:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوال 34:  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3} \tan x}$

استمراری توسیع

سوال 35:  $g(3)$  کی تعریف یوں کریں کہ  $x = 3$  پر  $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  کی استمراری توسیع ہو۔  
جواب:  $g(3) = 6$

سوال 36:  $h(2)$  کی تعریف یوں کریں کہ  $t = 2$  پر  $h(t) = \frac{t^2+3t-10}{t-2}$  کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 37:  $f(1)$  کی تعریف یوں کریں کہ  $s = 1$  پر  $f(s) = \frac{s^3-1}{s^2-1}$  کی استمراری توسیع ہو۔  
جواب:  $f(1) = \frac{3}{2}$

سوال 38:  $g(4)$  کی تعریف یوں کریں کہ  $x = 4$  پر  $g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$  کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 39:  $a$  کی کس قیمت کے لئے ہر  $x$  پر  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$  استمراری ہے؟  
جواب:  $a = \frac{4}{3}$

سوال 40:  $b$  کی کس قیمت کے لئے ہر  $x$  پر  $g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$  استمراری ہے؟

استمراری توسیع - کمپیوٹر کا استعمال

سوال 41 تا سوال 44 میں تفاعل  $f$  کو ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کہ آیا مبداء پر اس کا استمراری توسیع پایا جاتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب  $x = 0$  پر وسیع تفاعل کی موزوں قیمت تلاش کریں۔ اگر تفاعل کی استمراری توسیع ممکن نہ ہو، تب کیا اس کو مبداء پر دائیں یا بائیں سے استمراری بنایا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں مبداء پر وسیع تفاعل کی قیمت کیا ہوگی؟

سوال 41:  $f(x) = \frac{10^x-1}{x}$

سوال 42:  $f(x) = \frac{10^{|x|}-1}{x}$

سوال 43:  $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

سوال 44:  $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

### نظریہ اور مثالیں

سوال 45: ایک استمراری تفاعل کی قیمت  $x = 0$  پر منفی اور  $x = 1$  پر مثبت ہے۔  $x = 0$  اور  $x = 1$  کے بیچ مساوات  $f(x) = 0$  کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟ ایک خاکہ کھینچ کر وجہ بیان کریں۔

سوال 46: مساوات  $\cos x = x$  کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟

سوال 47: دکھائیں کہ وقفہ  $[-4, 4]$  میں مساوات  $x^3 - 15x + 1 = 0$  کے تین حل پائے جاتے ہیں۔

سوال 48: دکھائیں کہ کسی  $x$  پر تفاعل  $F(x) = (x - a)^2(x - b)^2 + x$  کی قیمت  $\frac{a+b}{2}$  ہوگی۔

سوال 49: دکھائیں کہ  $c$  کی ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جن پر تفاعل  $f(x) = x^3 - 8x + 10$  کی قیمت  $(i) \pi$ ؛  $(ب) -\sqrt{3}$ ؛  $(ج) 5\,000\,000$  ہوں گی۔

سوال 50: سمجھائیں کہ درج ذیل جملے ایک ہی معلومات پوچھتی ہیں۔

(i)  $f(x) = x^3 - 3x - 1$  کے جذور تلاش کریں۔

(ب) اس نقطے کا  $x$  محدود تلاش کریں جہاں  $y = x^3$  اور  $y = 3x + 1$  ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

(ج) وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جن پر  $x^3 - 3x = 1$  ہو گا۔

(د) ان نقطوں کے  $x$  محدود تلاش کریں جہاں منحنی  $y = x^3 - 3x$  خط  $y = 1$  کو قطع کرتی ہے۔

(ه) مساوات  $x^3 - 3x - 1 = 0$  کو حل کریں۔

سوال 51: ایسا تفاعل  $f(x)$  کی مثال دیں جو تمام  $x$  پر استمراری ہو ماسوائے  $x = 2$  پر جہاں اس کا قابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ  $x = 2$  پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے۔

سوال 52: ایسا تفاعل  $g(x)$  کی مثال دیں جو تمام  $x$  پر استمراری ہو ماسوائے  $x = -1$  پر جہاں اس کا ناقابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ  $x = 1$  پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار ناقابل ہٹاؤ ہے۔

سوال 53: تمام نقطوں پر غیر استمراری تفاعل

(i) اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہوئے، کہ حقیقی اعداد کا ہر غیر خالی وقفہ ناطق اور غیر ناطق اعداد پر مشتعل ہے، دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل ہر نقطے پر عدم استمراری ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ناطق} \\ 0 & x \text{ غیر ناطق} \end{cases}$$

(ب) کیا کسی نقطے پر  $f$  دائیں استمراری یا بائیں استمراری ہے؟

سوال 54: اگر  $0 \leq x \leq 1$  پر  $f(x)$  اور  $g(x)$  استمراری ہوں تب کیا  $[0, 1]$  کے کسی نقطے پر  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  غیر استمراری ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: اگر تفاعل  $h(x) = f(h) \cdot g(x)$  نقطہ  $x = 0$  پر استمراری ہو تب کیا  $f(x)$  اور  $g(x)$  ضرور  $x = 0$  پر استمراری ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 56: ایسے تفاعل  $f(x)$  اور  $g(x)$  کی مثال دیں جو  $x = 0$  پر استمراری ہوں لیکن ان کا مرکب تفاعل  $f \circ g$  نقطہ  $x = 0$  پر عدم استمراری ہو۔ کیا یہ مسئلہ 2.8 کی خلاف ورزی کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 57: کیا یہ کہنا درست ہو گا کہ جو تفاعل کسی وقفے پر کبھی صفر نہیں ہوتا ہے وہ تفاعل اس وقفہ پر کبھی علامت تبدیل نہیں کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 58: کیا یہ درست ہے کہ ہر بڑی پٹی کو دونوں سروں سے کھینچنے کے باوجود پٹی پر ایک نقطہ ایسا پایا جاتا ہے جو اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 59: مسئلہ مقررہ نقطہ فرض کریں کہ وقفہ  $0, 1$  میں تفاعل  $f$  استمراری ہے اور  $[0, 1]$  میں ہر  $x$  کے لئے  $0 \leq f(x) \leq 1$  ہے۔ دکھائیں کہ  $[0, 1]$  میں ایسا نقطہ  $c$  پایا جاتا ہے جس پر  $f(c) = c$  ہو گا۔  $c$  کو  $f$  کا مقررہ نقطہ<sup>25</sup> کہتے ہیں۔

سوال 60: استمراری تفاعل کی علامت برقرار رکھنے کی خاصیت فرض کریں کہ وقفہ  $(a, b)$  پر تفاعل  $f$  معین ہے اور نقطہ  $c$  جہاں  $f$  استمراری ہے پر  $f(c) \neq 0$  ہے۔ دکھائیں کہ  $c$  کے ارد گرد وقفہ  $c - \delta, c + \delta$  میں  $f$  کی علامت وہی ہوگی جو  $c$  پر  $f(c)$  کی ہے۔ یہ ایک غیر معمولی نتیجہ ہے۔ اگرچہ  $(a, b)$  پر  $f$  معین ہے، کسی بھی نقطے پر تفاعل کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے ماسوائے نقطہ  $c$  پر۔ اس کے ساتھ شرط  $f(c) \neq 0$  ملانے سے  $f$  غیر صفر حاصل ہوتا ہے یعنی پورے وقفے پر  $f$  مثبت یا منفی ہو گا۔

سوال 61: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 سے اس حصے کا مسئلہ 2.6 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال 62: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.2 اور مسئلہ 2.3 سے موجودہ حصے کا مسئلہ 2.7 کس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے؟

### سوال کا حل بذریعہ ترسیم

کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کھینچ کر درج ذیل سوالات حل کریں۔

سوال 63:  $x^3 - 3x - 1 = 0$   
جواب:  $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$

سوال 64:  $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

سوال 65:  $x(x-1)^2 = 1$   
جواب:  $x \approx 1.7549$  ایک جذر حاصل کریں۔

سوال 66:  $x^x = 2$

سوال 67:  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$   
جواب:  $x \approx 3.5156$

سوال 68:  $x^3 - 15x + 1 = 0$  تین جذر تلاش کریں۔

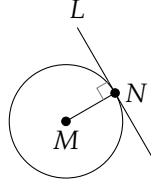
سوال 69:  $\cos x = x$  ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔  
جواب:  $x \approx 0.7391$

سوال 70:  $2 \sin x = x$  ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

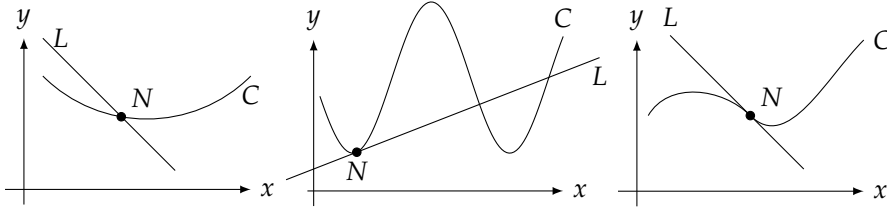
## 2.6 مماسی خط

حصہ 2.1 میں سینٹ اور مماس پر بحث کی گئی۔ اس بحث کو اس حصے میں جاری رکھتے ہیں۔ ہم سینٹ کی ڈھلوان کا حد تلاش کرتے ہوئے مماسی خط کا





شکل 2.75: نقطہ N پر مماس اور رداس آپس میں عمودی ہیں۔



(0) N پر مماسی خط L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ (ب) نقطہ N پر مماسی خط L منحنی C کا مماس ہے (ج) اگرچہ L منحنی C کو ایک نقطہ N پر مماسی خط کے دونوں اطراف پر پایا جاتا ہے۔ لیکن یہ منحنی کو کئی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ مس کرتا ہے، یہ منحنی کا مماس نہیں ہے۔

شکل 2.76: عمومی منحنی کے مماس۔

منحنی کے مماس سے کیا مراد ہے؟

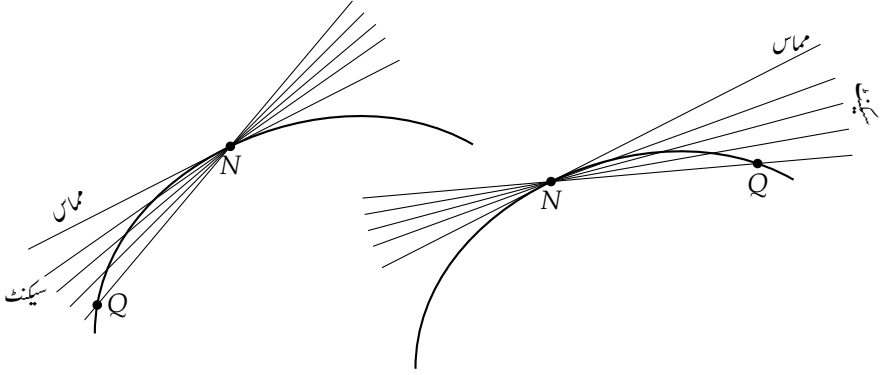
دائرے کی مماس کا مطلب سیدھا سادہ ہے۔ نقطہ N پر دائرہ C کے مماس سے مراد خط L ہے جو نقطہ N سے گزرتا ہے اور N پر رداس کو عمودی ہے (شکل 2.75)۔ نقطہ N پر کسی اور منحنی C کے مماس سے کیا مطلب ہے؟ دائرے کی جیومیٹری کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مماس کا مطلب درج ذیل میں سے ایک ہو سکتا ہے۔

1. N سے C کی مرکز تک خط کو عمودی خط L ،

2. خط L منحنی C کو صرف ایک نقطہ، یعنی N پر مس کرتا ہے،

3. خط L نقطہ N سے گزرتا ہے اور منحنی C کے ایک جانب رہتا ہے۔

اگرچہ یہ تینوں جملے دائرے کی صورت میں درست ہیں البتہ یہ ہر منحنی کے لئے بلا تضاد درست نہیں ہیں۔ عموماً منحنیات کا مرکز نہیں پایا جاتا ہے، اور نقطہ N پر جس خط کو ہم C کا مماس کہنا چاہتے ہیں وہ C کو کہیں اور یا N پر منقطع سکتا ہے۔ اس کے علاوہ ضروری نہیں ہے کہ منحنی کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہو سیدھا خط منحنی کا مماس ہو (شکل 2.76)۔



شکل 2.77: نقطہ N کے دائیں یا بائیں جانب منحنی C پر نقطہ Q کو N کے قریب تر کرنے سے N پر C کا مماس حاصل ہو گا۔

عمومی منحنی کا مماس متعارف کرنے کی خاطر ہمیں متحرک حکمت عملی سے کام لینا ہو گا۔ ہم نقطہ N اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے سیکنٹ پر نظر رکھتے ہوئے Q کو منحنی پر رکھتے ہوئے N کے نزدیک لاتے ہیں (شکل 2.77)۔ اس حکمت عملی میں ہم درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

1. ہم سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حساب لگاتے ہیں۔

2. منحنی پر رہتے ہوئے Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد پر غور کرتے ہیں۔

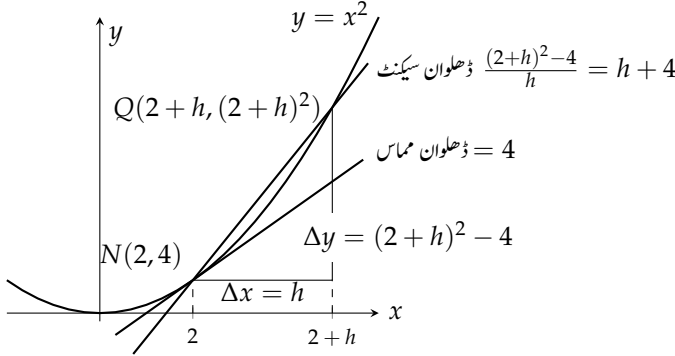
3. اگر یہ حد موجود ہو تب اس کو N پر منحنی کی ڈھلوان تسلیم کرتے ہوئے اس خط کو N پر C کا مماس تسلیم کریں جس کی ڈھلوان اس حد کے برابر ہو اور جو N سے گزرتا ہو۔

مثال 2.39: نقطہ  $N(2, 4)$  پر قطع مکانی  $y = x^2$  کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطے پر قطع مکانی کی مماس کی مساوات حاصل کریں (شکل 2.78)۔  
حل: ہم  $N(2, 4)$  اور  $Q(2+h, (2+h)^2)$  سے سیکنٹ گزار کر اس کی ڈھلوان کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$\text{سیکنٹ کی ڈھلوان} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h) - (2)} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

اگر  $h > 0$  ہو تب N کی دائیں جانب اور اس سے اوپر نقطہ Q پایا جائے گا۔ اگر  $h < 0$  ہو تب N کی بائیں جانب اور اس سے نیچے نقطہ Q پایا جائے گا۔ دونوں صورتوں میں قطع مکانی پر رہتے ہوئے جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ N کے نزدیک پہنچتا ہے ویسے ویسے h کی قیمت صفر کے نزدیک پہنچتی ہے جس سے سیکنٹ کی ڈھلوان کی درج ذیل حد حاصل ہوتی ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$$



شکل 2.78: قطع مکانی کا مماس (مثال 2.39)

ہم  $N$  پر قطع مکانی کی ڈھلوان 4 تسلیم کرتے ہیں۔ نقطہ  $N$  پر قطع مکانی کا مماس وہ خط ہے جس کی ڈھلوان 4 ہے اور جو نقطہ  $(2, 4)$  سے گزرتا ہے۔ اس مماس کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x - 2) \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

نقطہ ڈھلوان مساوات

□

### تفاعل کی ترسیم کا مماس

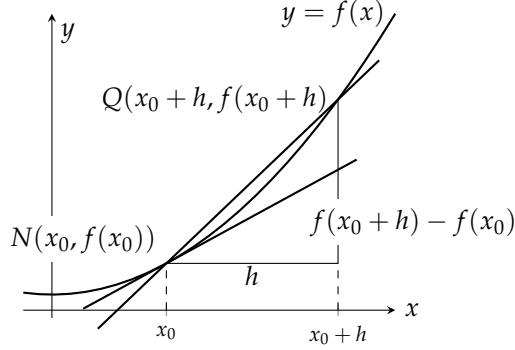
نقطہ  $N(x_0, f(x_0))$  پر تفاعل  $y = f(x)$  کا مماس اسی متحرک حکمت عملی سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم  $N$  اور  $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$  سے گزرتا ہوا سیکنٹ بناتے ہیں۔ اس کے بعد  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے اس سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہیں (شکل 2.79)۔ اگر یہ حد موجود ہو، اس کو  $N$  پر منحنی کے مماس کا ڈھلوان مانا جاتا ہے اور اتنی ڈھلوان کا سیدھا خط جو  $N$  سے گزرتا ہو کو  $N$  پر منحنی کا مماس قبول کیا جاتا ہے۔

تعریف: نقطہ  $N(x_0, f(x_0))$  پر تفاعل  $y = f(x)$  کی ڈھلوان درج ذیل عدد کو کہتے ہیں۔

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔})$$

$N$  پر اس ڈھلوان کے خط کو اس نقطے پر منحنی کا مماس کہتے ہیں۔

□



شکل 2.79: مماس کی ڈھلوان  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  ہو گی۔

نئی تعریف پیش کرنے کے بعد اس کو جانی پہچانی صورتوں میں استعمال کرتے ہوئے متوقع جوابات حاصل کر کے یقین دہانی ہوتی ہے۔ درج ذیل مثال دکھاتا ہے کہ ڈھلوان کی موجودہ تعریف ہمیں غیر انتظامی کیریوں کی صورت میں متوقع جوابات دیتی ہے۔

مثال 2.40: ڈھلوان کی تعریف کا استعمال  
دکھائیں کہ نقطہ  $(x_0, mx_0 + b)$  پر خط  $y = mx + b$  کا مماس یہی خط ہے۔  
حل: ہم  $f(x) = mx + b$  لیتے ہوئے قدم با قدم چلتے ہیں۔  
پہلا قدم:  $f(x_0) = h$  اور  $f(x_0) = h$  ڈھوڑتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f(x_0) &= mx_0 + b \\ f(x_0 + h) &= m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b \end{aligned}$$

دوسرا قدم: ڈھلوان تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned}$$

تیسرا قدم: نقطہ ڈھلوان مساوات استعمال کرتے ہوئے مماس کی مساوات لکھتے ہیں۔ نقطہ  $x_0, mx_0 + b$  پر مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= (mx_0 + b) + m(x - x_0) \\ &= mx_0 + b + mx - mx_0 \\ &= mx + b \end{aligned}$$

□

مثال 2.41: (i)  $x = a$  پر منحی  $y = \frac{1}{x}$  کی ڈھلوان تلاش کریں۔  
 (ب) کس نقطے پر ڈھلوان  $-\frac{1}{4}$  کے برابر ہے؟  
 (ج)  $a$  تبدیل کرنے سے نقطہ  $a, \frac{1}{a}$  پر مماس کو کیا ہو گا؟  
 حل: (i) یہاں  $f(x) = \frac{1}{x}$  ہے اور  $(a, \frac{1}{a})$  پر ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ ہمیں اس وقت تک  $\lim_{h \rightarrow 0}$  بار بار لکھنا پڑا جب تک ہم  $h = 0$  پر کرنے کے قابل نہیں ہوئے۔  
 (ب) نقطہ  $x = a$  پر  $y = \frac{1}{x}$  کی ڈھلوان  $-\frac{1}{a^2}$  ہے جس کو  $-\frac{1}{4}$  کے برابر پر کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

اس کے حل  $a = 2$  اور  $a = -2$  ہیں لہذا منحی  $y = \frac{1}{x}$  کا دو نقطوں یعنی  $(2, \frac{1}{2})$  اور  $(-2, -\frac{1}{2})$  پر ڈھلوان  $-\frac{1}{4}$  ہے (شکل 2.80)۔

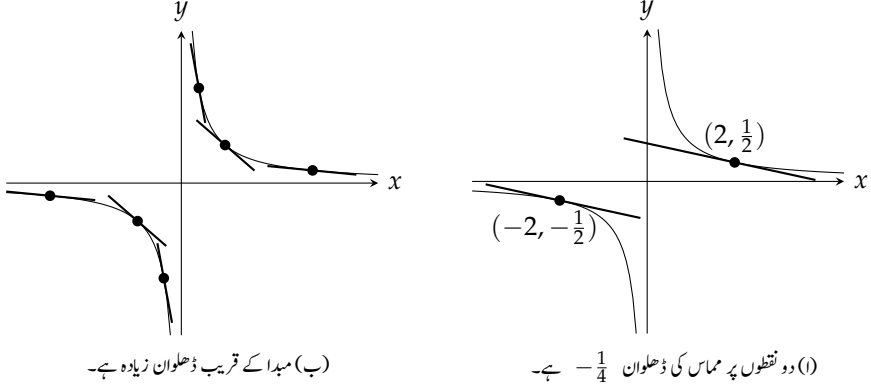
(ج) ڈھلوان  $-\frac{1}{a^2}$  ہر صورت منفی رہے گی۔ یوں  $a \rightarrow 0^+$  کی صورت میں ڈھلوان  $-\infty$  تک پہنچتی کی کوشش کرتی ہے اور مماس انتصابی صورت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ یہی کچھ  $a \rightarrow 0^-$  کرتے ہوئے بھی نظر آتا ہے۔ جیسے جیسے مبداء سے  $a$  دور ہوتا ہے ویسے ویسے مماس افقی صورت اختیار کرتا ہے (شکل 2.80)۔

□

## شرح تبدیلی

درج ذیل الجبرائی فقرے کو  $x_0$  پر  $f$  کا تقریقی حاصل تقسیم<sup>26</sup> کہتے ہیں۔ اگر  $h$  کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے تقریقی حاصل تقسیم کا حد پایا جاتا ہو، اس حد کو  $x_0$  پر  $f$  کا تفریق<sup>27</sup> کہتے ہیں۔ اگر ہم تقریقی حاصل تقسیم کو سیکنٹ کی ڈھلوان تصور کریں تب تفریق

difference quotient<sup>26</sup>  
derivative<sup>27</sup>



شکل 2.80: اشکال برائے مثال 2.41

نقطہ  $x_0$  پر منحنی اور مماس کی ڈھلوان دیتا ہے۔ اگر ہم تقریبی حاصل تقسیم کو اوسط تبدیلی شرح تصور کریں (جیسا ہم نے حصہ 2.1 میں کیا) تب تفرق نقطہ  $x = x_0$  پر تفاعل کی شرح تبدیلی دیتا ہے۔ احصاء میں دو اہم ترین ریاضیاتی تصور میں سے ایک تفرق ہے جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

مثال 2.42: لمحاتی رفتار (حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2)  $y = 4.9t^2$  میٹر فاصلہ طے کرتا ہے اور بتدریج کم دورانیہ میں اوسط رفتار سے ہم نے  $t = 1$  پر اس کی لمحاتی رفتار معلوم کی۔ ٹھیک  $t = 1$  پر لمحاتی رفتار کیا ہو گی؟  
 حل: ہم  $f(t) = 4.9t^2$  لیتے ہیں۔ یوں  $t = 1$  اور  $t = 1 + h$  کے دوران اوسط رفتار

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} = \frac{4.9(2th + h^2)}{h} = 4.9(2t + h)$$

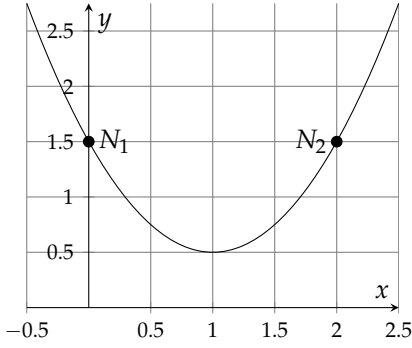
ہو گی۔ ٹھیک لمحہ  $t = 1$  پر پتھر کی رفتار درج ذیل ہو گی جو ہماری پہلی جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} 4.9(2 + h) = 4.9(2 + 0) = 9.8 \text{ m s}^{-1}$$

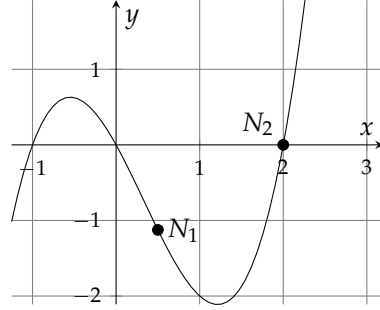
□

### سوالات

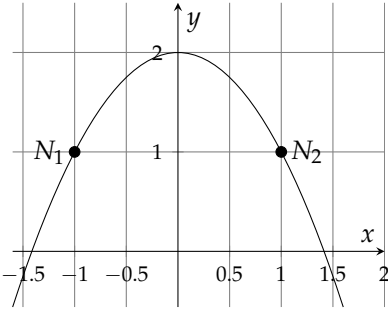
سوال 1 تا سوال 4 میں نقطہ  $N_1$  اور  $N_2$  پر منحنی کی ڈھلوان کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ نقطے پر فیتہ یا کوئی دوسرا سیدھا کنارہ رکھ کر سینکٹ کی حد سے ڈھلوان حاصل کریں۔ (ترسیم سے عموماً بالکل ٹھیک جواب حاصل نہیں ہوتا ہے لہذا آپ کے جواب میں اور دیے گئے جواب میں فرق ہو سکتا ہے۔)



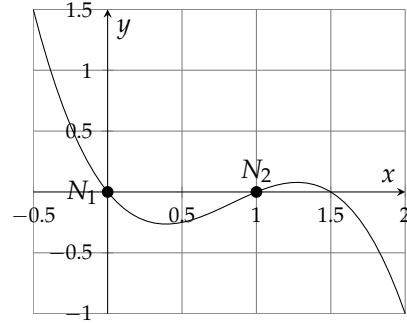
شکل 2.82: منحنی برائے سوال 2



شکل 2.81: منحنی برائے سوال 1



شکل 2.84: منحنی برائے سوال 4



شکل 2.83: منحنی برائے سوال 3

سوال 1: شکل 2.81

جواب:  $N_1 : m = -2.25$ ,  $N_2 : m = 6$ 

سوال 2: شکل 2.82

جواب:  $N_1 : m = -2$ ,  $N_2 : m = 2$ 

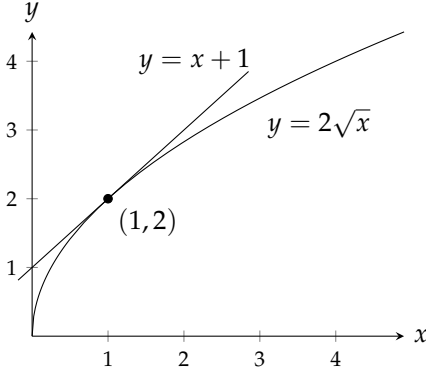
سوال 3: شکل 2.83

جواب:  $N_1 : m = -1.5$ ,  $N_2 : m = 0.5$ 

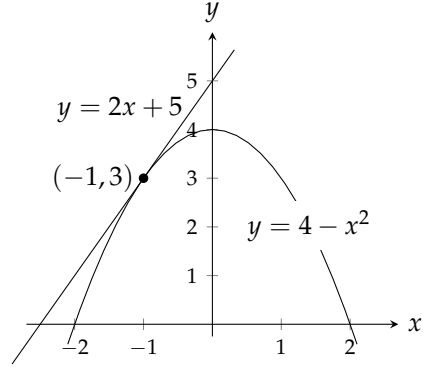
سوال 4: شکل 2.84

جواب:  $N_1 : m = 2$ ,  $N_2 : m = -2$ 

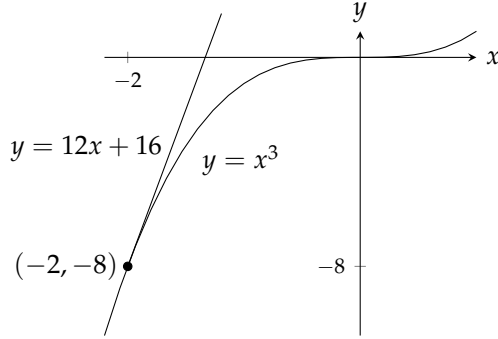
سوال 5 تا سوال 10 میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔ تفاعل اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔



شکل 2.86: ترسیم برائے سوال 7



شکل 2.85: ترسیم برائے سوال 5



شکل 2.87: ترسیم برائے سوال 9



سوال 5:  $y = 4 - x^2$ ,  $(-1, 3)$   
 جواب:  $y = 2x + 5$  شکل 2.85

سوال 6:  $y = (x - 1)^2 + 1$ ,  $(1, 1)$

سوال 7:  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $(1, 2)$   
 جواب:  $y = x + 1$  شکل 2.86

سوال 8:  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $(-1, 1)$

سوال 9:  $y = x^3$ ,  $(-2, -8)$   
 جواب:  $y = 12x + 16$  شکل 2.87

سوال 10:  $y = \frac{1}{x^3}$ ,  $(-2, -\frac{1}{8})$

سوال 11 تا سوال 18 میں دیے نقطے پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11:  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $(2, 5)$   
 جواب:  $m = 4$ ,  $y - 5 = 4(x - 2)$

سوال 12:  $f(x) = x - 2x^2$ ,  $(1, -1)$

سوال 13:  $g(x) = \frac{x}{x-2}$ ,  $(3, 3)$   
 جواب:  $m = -2$ ,  $y - 3 = -2(x - 3)$

سوال 14:  $g(x) = \frac{8}{x^2}$ ,  $(2, 2)$

سوال 15:  $h(t) = t^3$ ,  $(2, 8)$   
 جواب:  $m = 12$ ,  $y - 8 = 12(t - 2)$

سوال 16:  $h(t) = t^3 + 3t$ ,  $(1, 4)$

سوال 17:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $(4, 2)$   
 جواب:  $m = \frac{1}{4}$ ,  $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

سوال 18:  $f(x) = \sqrt{x + 1}$ ,  $(8, 3)$

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے گئے نقطے پر ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 19:  $y = 5x^2$ ,  $x = -1$   
جواب:  $m = -10$

سوال 20:  $y = 1 - x^2$ ,  $x = 2$

سوال 21:  $y = \frac{1}{x-1}$ ,  $x = 3$   
جواب:  $m = -\frac{1}{4}$

سوال 22:  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ,  $x = 0$

مخصوص ڈھلوان کے مماس

سوال 23: کس نقطے پر تقابل  $f(x) = x^2 + 4x - 1$  کا مماس افقی ہے؟  
جواب:  $(-2, -5)$

سوال 24: کس نقطے پر تقابل  $g(x) = x^3 - 3x$  کا مماس افقی ہے؟

سوال 25: ان تمام خطوط کی مساوات حاصل کریں جن کی ڈھلوان  $-1$  ہے اور جو تقابل  $y = \frac{1}{x-1}$  کی مماس ہیں۔  
جواب:  $y = -(x+1)$ ,  $y = -(x-3)$

سوال 26: اس سیدھے خط کی مساوات تلاش کریں جو تقابل  $y = \sqrt{x}$  کا مماس اور جس کی ڈھلوان  $\frac{1}{4}$  ہے۔

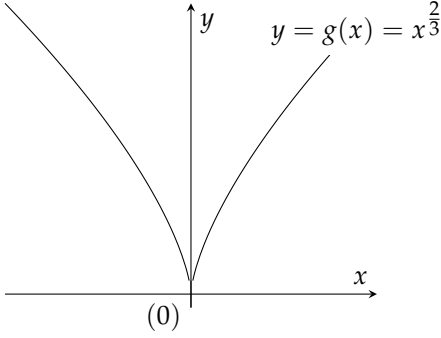
شرح تبدیلی

سوال 27: ایک جسم کو ساکن حالت سے  $100\text{ m}$  بلند عمارت سے گرایا جاتا ہے۔  $t$  سیکنڈ بعد زمین سے اس کا فاصلہ  $100 - 4.9t^2$  میٹر ہو گا۔ گرنے کے  $2$  سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟  
جواب:  $19.6\text{ m s}^{-1}$

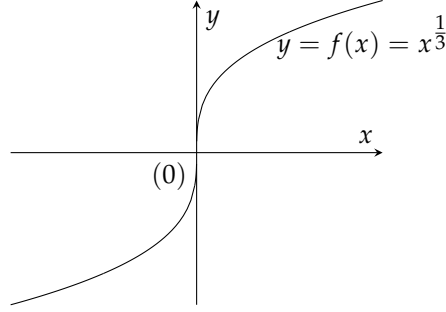
سوال 28: اڑان کے  $t$  سیکنڈ بعد ایک مزانل  $3t^2$  میٹر بلندی پر ہے۔  $10$  سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہے؟

سوال 29: ایک دائرے کے رقبہ  $A = \pi r^2$  کی رداس  $r$  کے لحاظ سے شرح تبدیل  $r = 3$  پر کیا ہو گی؟  
جواب:  $6\pi$

سوال 30: ایک گیند کے حجم  $H = \frac{4}{3}\pi r^3$  کی رداس  $r$  کے لحاظ سے شرح تبدیلی  $r = 2$  پر کیا ہو گی؟



(ب) مبداء پر انتصابی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔



(د) مبداء پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے۔

شکل 2.88: انتصابی مماس

مماس کے لئے پرکھ

سوال 31: کیا مبداء پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 32: کیا مبداء پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

انتصابی مماس

اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \infty$  یا  $-\infty$  ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ  $x = x_0$  پر تفاعل  $y = f(x)$  کا انتصابی مماس ہے۔

نقطہ  $x = 0$  پر تفاعل  $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  کا مماس درج ذیل ہوگا (شکل 2.88-ا)۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

انہیں اب مباد پر تفاعل  $y = g(x) = x^{\frac{2}{3}}$  (شکل 2.88-ب) کا مماس حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \infty$$

اب چونکہ مباد تک دائیں سے پہنچنے سے حد  $\infty$  جبکہ مباد تک بائیں سے پہنچنے سے حد  $-\infty$  حاصل ہوتا ہے لہذا مباد پر درج بالا حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 33: کیا درج ذیل تفاعل کا مباد پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 34: کیا درج ذیل تفاعل کا نقطہ  $(0, 1)$  پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ انتصابی مماس

سوال 35 تا سوال 44 میں دیا گیا تفاعل کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کریں۔ ترسیم کا مماس کہاں انتصابی نظر آتا ہے؟ حساب سے انتصابی مماس کی تصدیق کریں۔

$$y = x^{\frac{2}{5}} \quad \text{سوال 35:}$$

جواب: (ا) کہیں نہیں

$$y = x^{\frac{4}{5}} \quad \text{سوال 36:}$$

سوال 37:  $y = x^{\frac{1}{5}}$   
 جواب: (i)  $x = 0$  پر

سوال 38:  $y = x^{\frac{3}{5}}$

سوال 39:  $y = 4x^{\frac{2}{5}} - 2x$   
 جواب: (i) کہیں نہیں

سوال 40:  $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$

سوال 41:  $y = x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}$   
 جواب: (i)  $x = 1$  پر

سوال 42:  $y = x^{\frac{1}{3}} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

سوال 43:  $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$   
 جواب: (i)  $x = 0$  پر

سوال 44:  $y = \sqrt{|4-x|}$

### کمپیوٹر کا استعمال

سوال 45 تا سوال 48 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ  $x_0 - \frac{1}{2} \leq x \leq x_0 + 3$  پر تفاعل  $y = f(x)$  ترسیم کریں۔

ب. نقطہ  $x_0$  پر تقریبی حاصل تقسیم  $q$  کو قدم  $h$  کی صورت میں لکھیں۔

ج.  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے  $q$  کی حد تلاش کریں۔

د.  $h = 3, 2, 1$  کے لئے سینکڑوں خطوط  $y = f(x_0) + q(x - x_0)$  متعارف کرتے ہوئے (i) میں دیے گئے وقفے پر ان سینکڑوں خطوط کو تفاعل  $f$  کے ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 45:  $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

سوال 46:  $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

سوال 47:  $f(x) = x + \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 48:  $f(x) = \cos x + 4 \sin 2x, \quad x_0 = \pi$



## باب 3

# تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطہ پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔ اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

### 3.1 تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ  $x = x_0$  پر منحنی  $y = f(x)$  کی ڈھلوان  $m$  کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

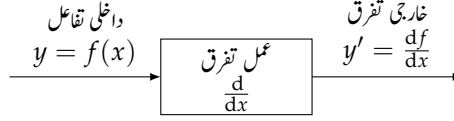
$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو،  $x_0$  پر  $f$  کا تفرق کہتے ہیں۔ اس حصے میں  $f$  کی دائرہ کار میں ہر نقطہ پر  $f$  کی ڈھلوان بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر  $x$  کے لحاظ سے تفاعل  $f$  کا تفرق<sup>1</sup> درج ذیل تفاعل  $f'$  ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

derivative<sup>1</sup>



شکل 3.1: تفرق کے عمل کی ڈیہ صورت

□

$f'$  کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل  $f$  کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر  $f'(x)$  موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $x$  پر  $f$  کا تفرق پایا جاتا ہے یا کہ  $x$  پر  $f$  قابل تفرق<sup>2</sup> ہے۔

## علامت

تفاعل  $y = f(x)$  کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔  $f'(x)$  کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

$y'$  یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔

$\frac{dy}{dx}$  یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو  $d$  سے ظاہر کرتی ہے۔

$\frac{df}{dx}$  یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

$\frac{d}{dx}f(x)$  اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل  $f$  پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل 3.1)۔

$D_x f$  یہ تفرقی عامل ہے۔

$\dot{y}$  نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم  $\frac{dy}{dx}$  کو " $x$  کے لحاظ سے  $y$  کو تفرق" پڑھتے ہیں۔ اسی طرح  $\frac{df}{dx}$  اور  $\frac{d}{dx}f(x)$  کو " $x$  کے لحاظ سے  $f$  کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔



تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال 2.40 اور مثال 2.41 میں تفاعل  $y = mx + b$  اور  $y = \frac{1}{x}$  کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال 2.40 میں

$$\frac{d}{dx}(mx + b) = m$$

اور مثال 2.41 میں

$$(3.1) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

1.  $f(x)$  اور  $f(x+h)$  لکھیں۔

2. درج ذیل تفریق حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3. سادہ ترین حاصل تقسیم سے  $f'(x)$  حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

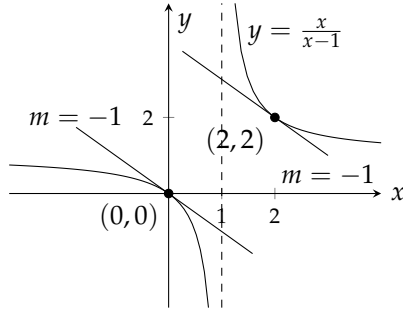
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال 3.1:

$$1. \quad f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ کو تفرق کریں۔}$$

ب. تفاعل  $y = f(x)$  کی ڈھلوان کس نقطے پر  $-1$  کے برابر ہے؟



شکل 3.2:  $x = 0$  اور  $x = 2$  پر  $y' = -1$  ہوگا (مثال 3.1)۔

حل: (i) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔  
 پہلا قدم: یہاں  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  ہے جس سے  $f(x+h) = \frac{x+h}{(x+h)-1}$  لکھا جاسکتا ہے۔  
 دوسرا قدم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب)  $y = f(x)$  کی ڈھلوان اس صورت  $-1$  کے برابر ہوگی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

اس مساوات  $(x-1)^2 = 1$  کے مترادف ہے لہذا  $x = 0$  اور  $x = 2$  درکار نتائج ہیں (شکل 3.2)۔ □

مثال 3.2:

1.  $x > 0$  کے لئے  $y = \sqrt{x}$  کا تفرق حاصل کریں۔

2.  $x = 4$  پر تفاعل  $y = \sqrt{x}$  کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (i) پہلا قدم:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} && \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \text{ سے ضرب دیتے ہیں} \\ &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل 3.3 دیکھیں۔

(ب)  $x = 4$  پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=4} = \left. \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

نقطہ  $(4, 2)$  سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان  $\frac{1}{4}$  ہو  $(4, 2)$  پر  $f$  کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{1}{4}x + 1$$

□

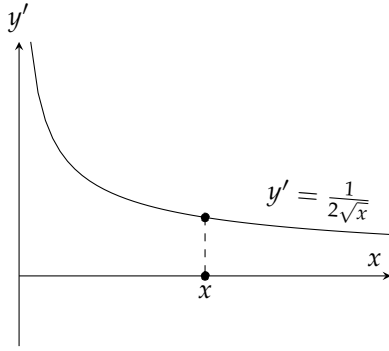
نقطہ  $x = a$  پر تفاعل  $y = f(x)$  کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

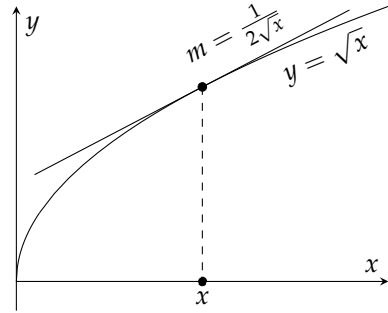
کے علاوہ

$$y' \Big|_{x=a} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

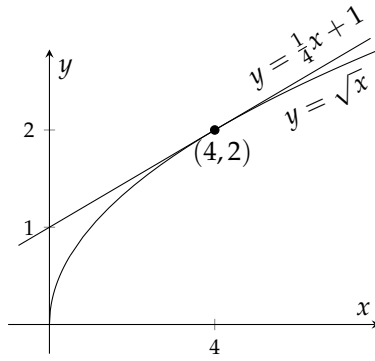
سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں  $|_{x=a}$  علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو  $x = a$  پر حاصل کیا جاتا ہے۔



(ب)  $x > 0$  کے لئے  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

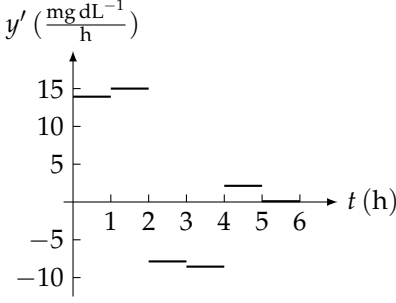


(ا) تقابل  $y = \sqrt{x}$

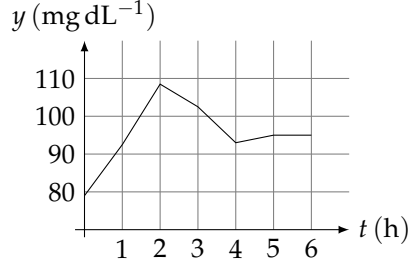


(ج) تقابل  $y = \sqrt{x}$  اور نقطہ  $(4, 2)$  پر اس کا مماس  $y = \frac{1}{4}x + 1$

شکل 3.3: اشکال برائے مثال 3.2۔ نقطہ  $x = 0$  پر تقابل معین ہے لیکن اس کا تفریق غیر معین ہے۔



(ب)



(i)

شکل 3.4: (i) قبل پرواز پر کہ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پر کہ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

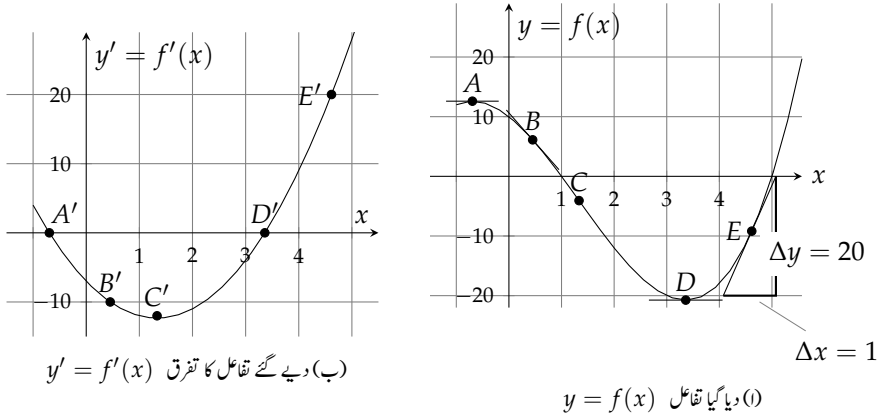
اندازاً حاصل قیمتوں سے  $f'$  کی ترسیم

تفاعل  $y = f(x)$  کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباؤ بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تاکہ ہمیں  $f$  کی صورت نظر آئے۔ مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان  $f'$  سے ہم عموماً  $f'$  کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

### مثال 3.3: دوا

23 اپریل 1988 کو 31 کلوگرام وزنی، ڈیڈلس<sup>3</sup> نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کرتی<sup>4</sup> سے جزیرہ سانٹورینی<sup>5</sup> تک اڑا کر 115.11 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔ یہ جہاز امریکی یونیورسٹی<sup>6</sup> کے طلبہ نے تیار کیا۔ اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل 3.4-1 میں دکھایا گیا ہے۔ موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جاسکتا ہے۔ تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل 3.4-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر  $79 \text{ mg dL}^{-1}$  سے بڑھ کر  $83 \text{ mg dL}^{-1}$  ہو جاتا ہے۔ یوں تبدیل  $\Delta y = 93 - 79 = 14 \text{ mg dL}^{-1}$  ہے جس کو  $\Delta x = 1 \text{ h}$  سے تقسیم کرتے ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14 \text{ mg dL}^{-1}}{\text{h}}$$



شکل 3.5: اشکال برائے مثال 3.5

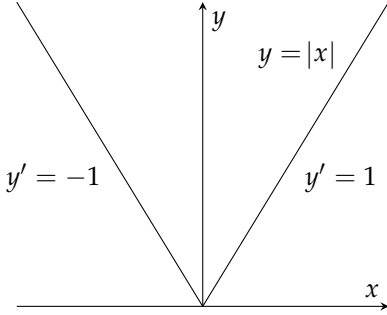
حاصل ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ لمحات 5, 2, 1,  $\dots$  پر، جہاں ترسم کے کونے پائے جاتے ہیں لہذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ ان نقطوں پر تفرقی سیزھی تفاعل غیر معین ہے۔

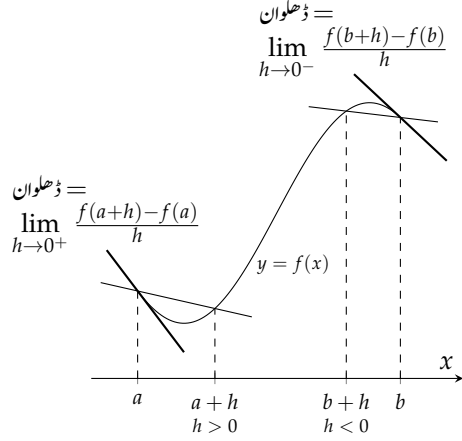
جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔ اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.4: تفاعل  $y = f(x)$  کو شکل 3.5-ا میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے تفرق  $y' = f'(x)$  کو ترسم کریں۔

حل: شکل 3.5-ا کے ترسم پر مختلف نقطوں مثلاً  $A, B, C, D, E$  پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔ شکل 1-ا کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔  $A$  سے  $D$  تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ  $D$  کی دائیں جانب اور  $A$  کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔ اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔ نقطہ  $A$  اور  $D$  پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل 3.5-ب کے مطابقتی نقطے  $A'$  اور  $D'$  دیتے ہیں جہاں  $y' = 0$  ہے۔ نقطہ  $E$  پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے  $\Delta x = 1$  اور  $\Delta y = 20$  پڑھے جاسکتے ہیں جن سے  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$  حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں اس کو نقطہ  $E'$  دکھایا گیا ہے۔ آپ شکل 1-ا میں نقطہ  $B$  پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو 10- ہو گا جس کو شکل-ب میں  $B'$  دکھایا گیا ہے۔ شکل 1-ا میں نقطہ  $C$  وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم ترین قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب  $C'$  حاصل ہوتا ہے۔



شکل 3.7: چونکہ مہدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہذا مہدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال 3.5)۔



شکل 3.6: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لامتناہی) پر تفاعل  $y = f(x)$  اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر  $f$  قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ  $[a, b]$  پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر  $f$  قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل 3.6)۔

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$a$  پر دائیں ہاتھ تفرق

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

$b$  پر بائیں ہاتھ تفرق

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ 2.5 کی بنا کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال 3.5: تفاعل  $y = |x|$  وقفہ  $(-\infty, 0)$  اور  $(0, \infty)$  پر قابل تفرق ہے لیکن  $x = 0$  پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مہدا کے دائیں جانب

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1, \quad \frac{d}{dx}(mx + b) = m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1$$

ہے (شکل 3.7)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر  $|x|$  کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \quad \text{اگر } h > 0 \text{ تب } |h| = h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

صفر پر  $|x|$  کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \quad \text{اگر } h < 0 \text{ تب } |h| = -h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned}$$

□

کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

اگر نقطہ  $N(x_0, f(x_0))$  اور اس کے قریب نقطہ  $Q$  سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان،  $Q$  کو  $N$  کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل  $f(x)$  نقطہ  $N$  پر قابل تفرق ہو گا۔ اگر  $Q$  کو  $N$  کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا  $N$  پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ  $N$  پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

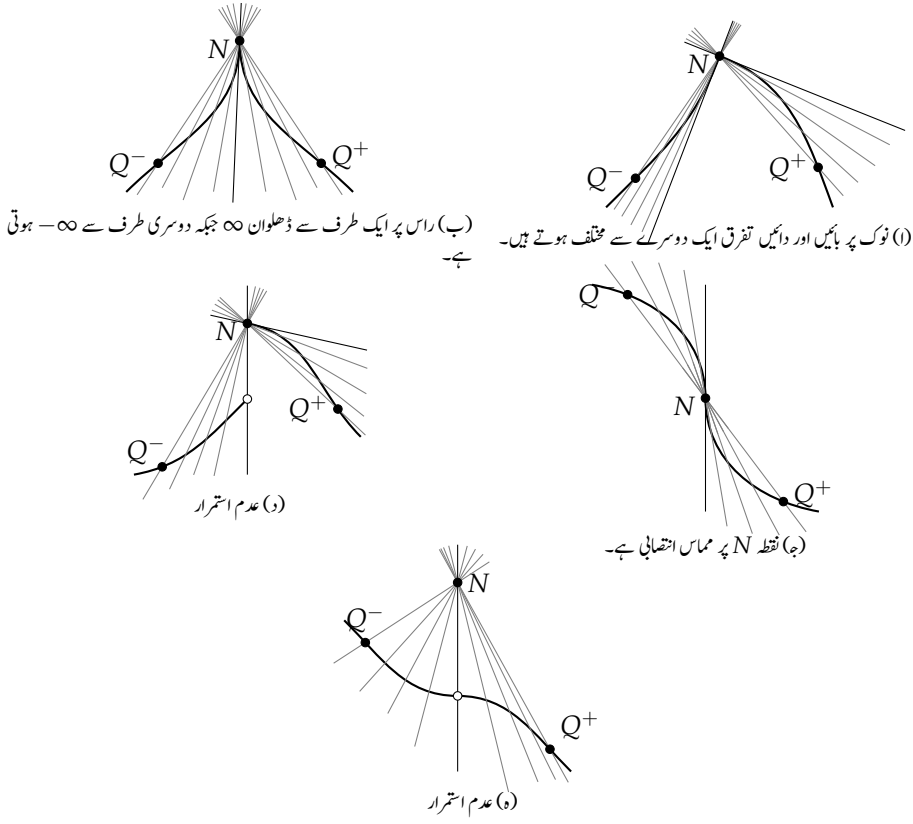
1. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل 3.8-ا)۔

2. راس، جہاں  $NQ$  کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے  $\infty$  اور دوسری طرف سے  $-\infty$  ہوتی ہے (شکل 3.8-ب)۔

3. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی  $NQ$  کی ڈھلوان  $\infty$  یا  $-\infty$  ہوتی ہے (شکل 3.8-ج)۔

4. عدم استمرار (شکل 3.8-د اور شکل 3.8-ه)۔





شکل 3.8: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل ناقابل تفرق ہو گا۔

## قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہو گا۔

مسئلہ 3.1: اگر  $x = c$  پر  $f$  کا تفرق موجود ہو تب  $x = c$  پر  $f$  استمراری ہو گا۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ  $f'(c)$  موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  یا اس کا مماثل  $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$  درست ہیں۔ اگر  $h \neq 0$  ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

اب  $h \rightarrow 0$  لیں۔ مسئلہ 2.1 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر  $x = c$  پر  $f$  کا ایک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب  $x = c$  پر  $f$  اس طرف (بائیں یا دائیں) سے استمراری ہو گا۔

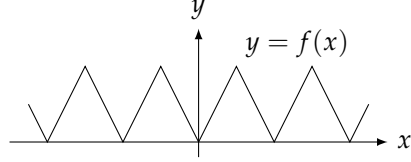
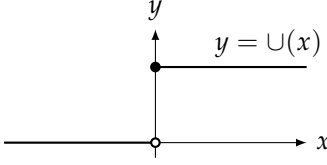
انتباہ مسئلہ 3.1 کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال 3.5 میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیت تفاعل  $y = |x|$  ایک نقطے پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل 3.9) بنا سکتے ہیں جو لامتناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائٹسٹراس<sup>7</sup> نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

[1815-1897]<sup>7</sup>



شکل 3.10: اکائی سیڑھی تفعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے لہذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔

شکل 3.9: دندان ترسیم استمراری لیکن لامتناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔

یہ کلیہ  $f$  کو بڑھتی تعداد کے کوسائن تفعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ بل کو بل دینے سے ایسا تفعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہذا اس کا تماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفعل جن کا کسی بھی نقطے پر تماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری<sup>8</sup> میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

### تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفعل کسی دوسرے کا تفرقی تفعل ہو۔ درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 3.2: اگر جس وقفے پر  $f$  قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ  $a$  اور  $b$  پائے جاتے ہیں تب  $f'(a)$  اور  $f'(b)$  کے سچے ہر قیمت کا تفرق  $f'$  پایا جائے گا۔

مسئلہ 3.2 (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفعل اس صورت تک کسی دوسرے تفعل کا تفرق نہیں ہوگا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل 3.10)۔ ایک تفعل کب کسی دوسرے تفعل کا تفرق ہوگا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبینٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ ان کے جواب کو ہم باب میں دیکھیں گے۔

## سوالات

تفریق تفاعل اور قیمتوں کی تلاش  
سوال 1 تا سوال 6 میں تفریق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفریق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1:  $f(x) = 4 - x^2$ ;  $f'(-3), f'(0), f'(1)$   
جواب:  $-2x, 6, 0, -2$

سوال 2:  $F(x) = (x - 1)^2 + 1$ ;  $F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال 3:  $g(t) = \frac{1}{t^2}$ ;  $g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$   
جواب:  $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

سوال 4:  $k(z) = \frac{1-z}{2z}$ ;  $k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال 5:  $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$ ;  $p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$   
جواب:  $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$

سوال 6:  $r(s) = \sqrt{2s+1}$ ;  $r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال 7 تا سوال 12 میں دیا گیا تفریق حاصل کریں۔

سوال 7:  $y = 2x^3$ ;  $\frac{dy}{dx}$   
جواب:  $6x^2$

سوال 8:  $r = \frac{s^3}{2} + 1$ ;  $\frac{dr}{ds}$

سوال 9:  $s = \frac{t}{2t+1}$ ;  $\frac{ds}{dt}$   
جواب:  $\frac{1}{(2t+1)^2}$

سوال 10:  $v = t - \frac{1}{t}$ ;  $\frac{dv}{dt}$

سوال 11:  $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}$ ;  $\frac{dp}{dq}$   
جواب:  $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

سوال 12:  $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}; \quad \frac{dz}{dw}$

ڈھلوان اور مماسی خطوط

سوال 13 تا سوال 16 میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 13:  $f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad x = -3$   
جواب:  $1 - \frac{9}{x^2}, 0$

سوال 14:  $k(x) = \frac{1}{2+x}; \quad x = 2$

سوال 15:  $s = t^3 - t^2; \quad t = -1$   
جواب:  $3t^2 - 2t, 5$

سوال 16:  $y = (x+1)^3; \quad x = -2$

سوال 17 تا سوال 18 میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 17:  $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}; \quad (x, y) = (6, 4)$   
جواب:  $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 6)$

سوال 18:  $g(z) = 1 + \sqrt{4-z}; \quad (z, w) = (3, 2)$

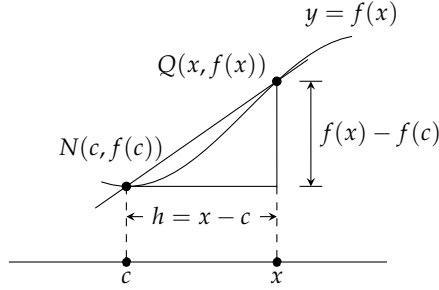
سوال 19 تا سوال 22 میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19:  $\frac{ds}{dt} \Big|_{t=-1}; \quad s = 1 - 3t^2$   
جواب: 6

سوال 20:  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\sqrt{3}}; \quad y = 1 - \frac{1}{x}$

سوال 21:  $\frac{dr}{d\theta} \Big|_{\theta=0}; \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$   
جواب:  $\frac{1}{8}$

سوال 22:  $\frac{dw}{dz} \Big|_{z=4}; \quad w = z + \sqrt{z}$



شکل 3.11: حصول تفرق کا متبادل کلیہ

تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ  
تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل 3.11 میں سیکنٹ کی ڈھلوان  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

$$(3.2) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال 23 تا سوال 26 میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

سوال 23:  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ,  $c = -1$   
جواب: -1

سوال 24:  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ,  $c = 2$

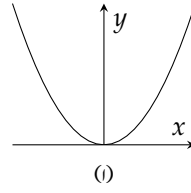
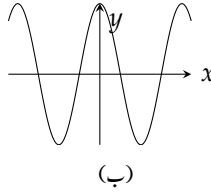
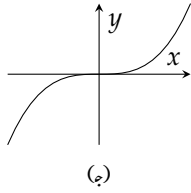
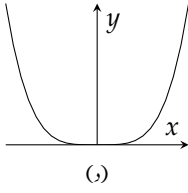
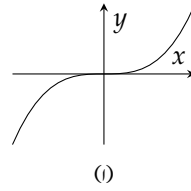
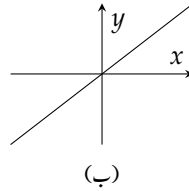
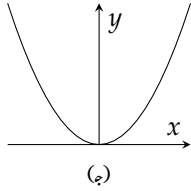
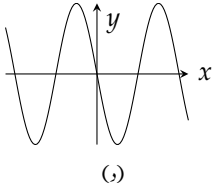
سوال 25:  $g(t) = \frac{t}{t-1}$ ,  $c = 3$   
جواب:  $-\frac{1}{4}$

سوال 26:  $k(s) = 1 + \sqrt{s}$ ,  $c = 9$

ترسیمات سوال 27 تا سوال 30 میں دیے گئے تفاعل کا تفرق شکل 3.12 میں تلاش کریں۔

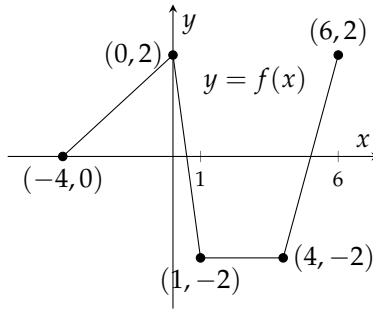
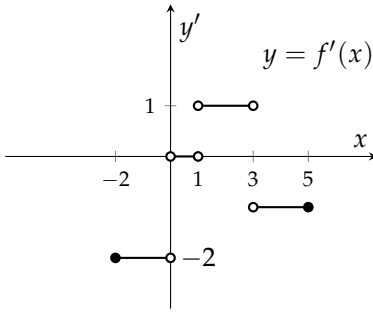
سوال 27: شکل 3.13-ا  
جواب: شکل 3.12-ب

سوال 28: شکل 3.13-ب  
جواب: شکل 3.12-د



شکل 3.12: تفعل کے تفرق

شکل 3.13: اصل تفعل



شکل 3.15: تفعل کا ترسیم برائے سوال 32

شکل 3.14: ترسیم برائے سوال 31

سوال 29: شکل 3.13-ج

جواب: شکل 3.12-ج

سوال 30: شکل 3.13-د

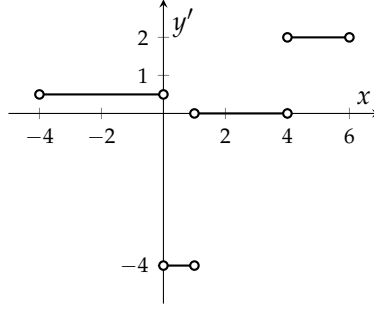
جواب: شکل 3.12-ا

سوال 31: قطعات کو جوڑ کر شکل 3.14 حاصل کی گئی ہے۔ (i) وقفہ  $[-4, 6]$  پر کہاں  $f'$  غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) انتہائی محور کو  $y'$  کہتے ہوئے  $f'$  کو ترسیم کریں۔ ترسیم سببھی نما ہو گا۔

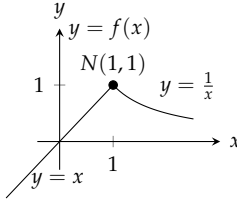
جواب: (i)  $x = 0, 1, 4$ : (ب) شکل 3.16

سوال 32: تفعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی

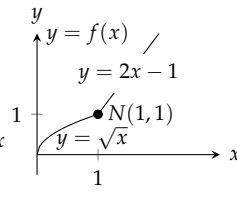
(i) درج ذیل طریقے سے تفعل  $f$  ترسیم کو وقفہ  $[-2, 5]$  پر کریں۔



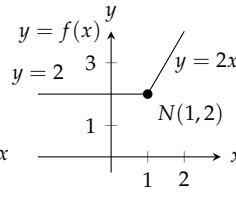
شکل 3.16: جواب برائے سوال 32



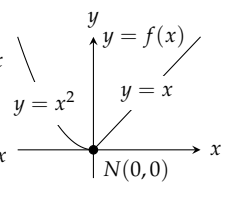
شکل 3.20



شکل 3.19



شکل 3.18



شکل 3.17

1. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔

2. ترسیم کو نقطہ  $(-2, 3)$  سے شروع کریں۔

3. تقابل کا تفرق شکل 3.15 میں دکھایا گیا ہے۔

(ب) نقطہ  $(-2, 0)$  سے شروع کرتے ہوئے جزو (ا) کا ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

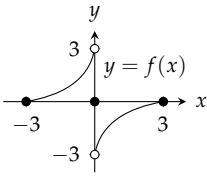
سوال 33 تا سوال 36 میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تقابل نا قابل تفرق ہے۔

سوال 33: تقابل کو شکل 3.17 میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب: چونکہ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$  جبکہ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$  ہے لہذا  $x = 0$  پر  $f(x)$  نا قابل تفرق ہے۔

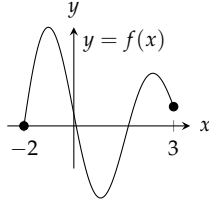
سوال 34: تقابل کو شکل 3.18 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 35: تقابل کو شکل 3.19 میں دکھایا گیا ہے۔  
جواب: چونکہ  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2$  جبکہ  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$  ہے لہذا  $x = 1$  پر  $f(x)$  نا قابل تفرق ہے۔

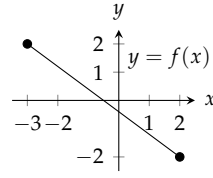




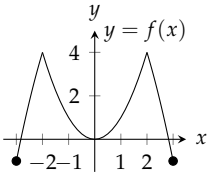
شکل 3.23



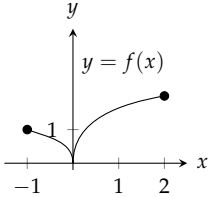
شکل 3.22



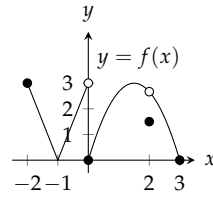
شکل 3.21



شکل 3.26



شکل 3.25



شکل 3.24

سوال 36: تفعل کو شکل 3.20 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 37 تا سوال 42 میں بند دائرہ کار  $D$  پر تفعل کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کن نقطوں پر تفعل (i) قابل تفرق، (ب) استمراری لیکن نا قابل تفرق، (ج) غیر استمراری اور نا قابل تفرق ہے؟

سوال 37: ترسیم شکل 3.21 میں دکھایا گیا ہے جبکہ  $D : -3 \leq x \leq 2$  ہے۔

جواب: (i)  $-3 \leq x \leq 2$  (ب) کوئی نہیں (ج) کوئی نہیں۔

سوال 38: ترسیم شکل 3.22 میں دکھایا گیا ہے جبکہ  $D : -2 \leq x \leq 3$  ہے۔

سوال 39: ترسیم شکل 3.23 میں دکھایا گیا ہے جبکہ  $D : -3 \leq x \leq 3$  ہے۔

جواب: (i)  $-3 \leq x < 0, 0 < x \leq 3$  (ب) کوئی نہیں (ج)  $x = 0$

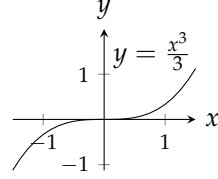
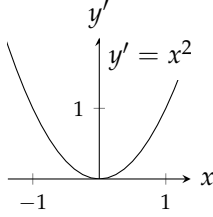
سوال 40: ترسیم شکل 3.24 میں دکھایا گیا ہے جبکہ  $D : -2 \leq x \leq 3$  ہے۔

سوال 41: ترسیم شکل 3.25 میں دکھایا گیا ہے جبکہ  $D : -1 \leq x \leq 2$  ہے۔

جواب: (i)  $-1 \leq x < 0, 0 < x \leq 2$  (ب)  $x = 0$  (ج) کوئی نہیں۔

سوال 42: ترسیم شکل 3.26 میں دکھایا گیا ہے جبکہ  $D : -3 \leq x \leq 3$  ہے۔

سوال 43 تا سوال 46 میں درج ذیل کریں۔



شکل 3.27: ترسیم برائے شکل 45

ا. تقابل  $y = f(x)$  کا تفرق  $y' = f'(x)$  تلاش کریں۔

ب.  $y = f(x)$  اور  $y' = f'(x)$  کو علیحدہ محدود پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج.  $x$  کی کن قیمتوں کے لئے  $y'$  کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د.  $x$  بڑھنے سے  $x$  کی قیمتوں کے کن وقفوں پر  $y = f(x)$  بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (اگلے باب میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال 43:  $y = -x^2$  (ا)  $y' = -2x$  (ب)  $x < 0, x = 0, x > 0$  (ج)  $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$  (د) کوئی نہیں۔

سوال 44:  $y = -\frac{1}{x}$

سوال 45:  $y = \frac{x^3}{3}$  (ا)  $y' = x^2$  (ب) شکل 3.27، (ج)  $x \neq 0, x = 0$ ، کوئی نہیں، (د)  $-\infty < x < \infty$ ، کوئی نہیں۔

سوال 46:  $y = \frac{x^4}{4}$

سوال 47: کیا  $y = x^3$  کا کبھی منفی ڈھلوان ہو گا؟ اگر ہے تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب:  $y' = 3x^2$  کبھی بھی منفی نہیں ہو گا۔

سوال 48: کیا  $y = 2\sqrt{x}$  کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: کیا قطع مکانی  $y = 2x^2 - 13x + 5$  کے مماس کا ڈھلوان  $-1$  ہو سکتا ہے۔ اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں ہے تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب: ہاں،  $y + 16 = -(x - 3)$  نقطہ  $(3, -16)$  پر مماس ہے۔

سوال 50: کیا منحنی  $y = \sqrt{x}$  کا کوئی مماس  $x$  محور کو  $x = -1$  پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال 51: کیا  $(-\infty, \infty)$  پر قابل تفریق تفاعل کا تفریق  $y = [x]$  ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب: نہیں، چونکہ تفاعل  $y = [x]$  متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا ہے۔

سوال 52:  $f(x) = |x|$  کے تفریق کو ترسیم کرنے کے بعد  $y = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$  ترسیم کریں۔ ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال 53: یہ جانتے ہوئے کہ  $x = x_0$  پر تفاعل  $f(x)$  قابل تفریق ہے، آپ  $x = x_0$  پر تفاعل  $-f$  کی قابل تفریق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب: ہاں؛  $(-f)'(x) = -(f'(x))$

سوال 54: کیا  $t = 7$  پر  $g(t)$  کا قابل تفریق ہونے سے آپ  $t = 7$  پر  $3g$  کے قابل تفریق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: فرض کریں کہ  $t$  کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل  $g(t)$  اور  $h(t)$  معین ہیں اور  $g(0) = h(0) = 0$  ہے۔  
کیا  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{h(t)}$  موجود ہو گا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب:  $g(t) = mt$  اور  $h(t) = t$  کے لئے  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{h(t)} = m$  ہو گا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

سوال 56: (i) فرض کریں کہ  $-1 \leq x \leq 1$  کے لئے تفاعل  $f(x)$  شرط  $|f(x)| \leq x^2$  کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ  $x = 0$  پر  $f$  قابل تفریق ہے اور  $f'(0)$  حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ  $x = 0$  پر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

قابل تفریق ہے اور  $f'(0)$  تلاش کریں۔

### کمپیوٹر کا استعمال

سوال 57:  $0 \leq x \leq 2$  کے لئے  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  کو ترسیم کریں۔ اس کے اوپر پہلے  $h = 1, 0.5, 0.1$  لیتے ہوئے  $y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$  ترسیم کریں اور بعد میں  $h = -1, -0.5, -0.1$  لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 58:  $-2 \leq x \leq 2$  اور  $0 \leq y \leq 3$  لیتے ہوئے  $y = 3x^2$  ترسیم کریں۔ اسی کے اوپر پہلے  $h = 2, 1, 0.2$  لیتے ہوئے  $y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$  ترسیم کریں اور بعد میں  $h = -2, -1, -0.2$  لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 59: وائشٹراس کا ناقابل تفرق تقابل وائشٹراس تقابل  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$  کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) \\ + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تقابل کو ترسیم کریں۔ ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں کہ یہ کتنی بلددار ہے۔

سوال 60 تا سوال 65 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا.  $y = f(x)$  ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت قدم  $h$  لیتے ہوئے عمومی نقطہ  $x$  پر حاصل تقسیم  $q$  متعارف کریں۔

ج.  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د.  $x = x_0$  پر کرتے ہوئے تقابل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ه.  $x_0$  سے  $x$  کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پر کریں۔ کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔ اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (د) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 60:  $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

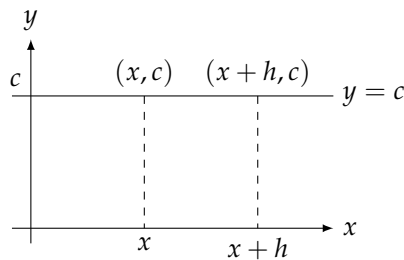
سوال 61:  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1$

سوال 62:  $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

سوال 63:  $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1$

سوال 64:  $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 65:  $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$



شکل 3.28: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

### 3.2 قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ 3.1: مستقل کا تفرق  
اگر  $c$  مستقل ہو تب  $\frac{d}{dx}c = 0$  ہو گا۔

مثال 3.6:  $\frac{d}{dx}(8) = 0$ ,  $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ,  $\frac{d}{dx}(\sqrt{3}) = 0$  □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے  $f(x) = c$  کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل 3.28)۔ ہر  $x$  پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں  $x^n$  کا تفریق دیتا ہے جہاں  $n$  مثبت عدد صحیح ہے۔

قاعدہ 3.2: قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح  
اگر  $n$  مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت  $n$  سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو  $n$  سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 3.7:

$f$	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$\dots$
$f'$	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\dots$

□

ثبوت قاعدہ: اگر  $f(x) = x^n$  ہو تب  $f(x+h) = (x+h)^n$  ہو گا۔ چونکہ  $n$  مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

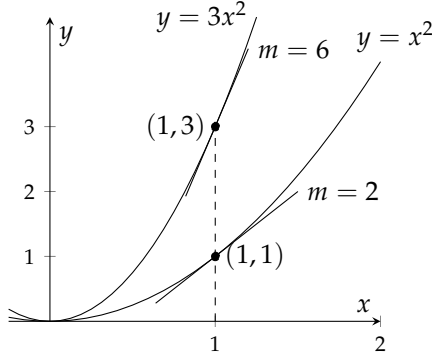
استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ ہم  $a = x+h$  اور  $b = x$  لیتے ہیں۔ یوں  $h = a - b$  ہو گا۔ اس طرح

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جو  $n$  ارکان پر مشتمل ہے اور  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے ہر رکن کا حد  $x^{n-1}$  ہے۔ یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

□



شکل 3.29: ترسیم برائے مثال 3.8

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

قاعدہ 3.3: قاعدہ مستقل مضرب

اگر  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو اور  $c$  ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

بالخصوص مثبت عدد صحیح  $n$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

مثال 3.8: تقریبی کلیہ  $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$  کہتی ہے کہ  $y$  محور کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم  $y = x^2$  کی پیمائش تبدیل کرنے سے ہر نقطے کی ڈھلوان 3 سے ضرب ہوگی (شکل 3.29)۔

□

مثال 3.9: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ 3.3 میں  $c = -1$  لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}$$

□

ثبوت قاعدہ : (قاعدہ 3.3)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} cu &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} && f(x) = cu(x) \text{ کے تفریق کی تعریف} \\
 &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} && \text{تحدیدی خاصیت} \\
 &= c \frac{du}{dx} && u \text{ قابل تفریق ہے}
 \end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفریق تفاعل کے مجموعے کا تفریق ان کے انفرادی تفریق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.4 : قاعدہ مجموعہ

اگر  $u$  اور  $v$  متغیر  $x$  کے قابل تفریق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ  $u + v$  ہر اس نقطے پر قابل تفریق ہو گا جہاں  $u$  اور  $v$  دونوں قابل تفریق ہوں۔ ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی تفریقی قاعدہ حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفریق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفریق ان کے تفریق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعل کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعہ میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔ اگر  $u_1, u_2, \dots, u_n$  متغیر  $x$  کے قابل تفریق تفاعل ہوں تب  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بھی قابل تفریق ہو گا اور اس کا تفریق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$$



مثال 3.10:

$$\begin{aligned}
 \text{(ا)} \quad y &= x^4 + 12x & \text{(ب)} \quad y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) & \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\
 &= 4x^3 + 12 & &= 3x^2 + \frac{4}{3} \cdot 2x - 5 + 0 \\
 & & &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5
 \end{aligned}$$

□

آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفریق لیا جاسکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.4) ہم تفریق کی تعریف کو  $f(x) = u(x) + v(x)$  پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
 &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}
 \end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لئے ثبوت ہم درج ذیل فقرے کو ریاضی مانوڈ<sup>9</sup> کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$(3.3) \quad \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ  $n = 2$  کے لئے درست ہے۔ یہ ریاضی مانوڈ کا پہلا قدم ہے۔

دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح  $n = k$  (جہاں  $n_0 = 2 \geq k$  ہے) کے لئے درست ہے تب یہ  $n = k + 1$  کے لئے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx}$$

ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}} \right) \\ &= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \\ &= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx} \end{aligned}$$

اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح  $n \geq 2$  کے لئے قاعدہ 3.4 کی درستی کی تصدیق کرتا ہے۔

مثال 3.11: کیا منحنی  $y = x^4 - 2x^2 + 2$  کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تب کہاں پایا جاتا ہے؟  
حل: افقی مماس وہاں ہو گا جہاں  $\frac{dy}{dx}$  صفر کے برابر ہو۔ ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے ہم  $\frac{dy}{dx}$  معلوم کرتے ہیں

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

اور اس کے بعد مساوات  $\frac{dy}{dx} = 0$  کو  $x$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

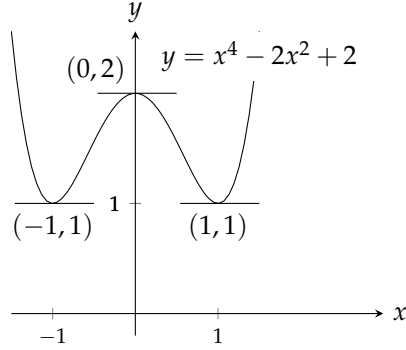
$$x = 0, 1, -1$$

منحنی  $y = x^4 - 2x^2 + 2$  کا افقی مماس  $x = 0, 1, -1$  پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابق نقطے  $(1, 1)$ ،  $(-1, 1)$ ،  $(0, 2)$  ہیں (شکل 3.30)۔  
□

حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{ہے جبکہ} \quad \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$



شکل 3.30: افقی مماس (مثال 3.11)

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفریق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.5: قاعدہ حاصل ضرب

اگر  $u$  اور  $v$  متغیر  $x$  کے قابل تفریق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب  $uv$  بھی  $x$  کا قابل تفریق تفاعل ہو گا جس کا تفریق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

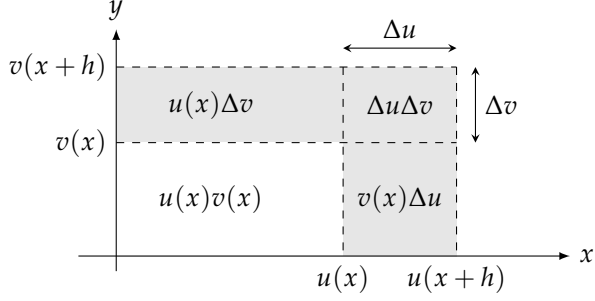
حاصل ضرب  $uv$  کا تفریق  $u$  ضرب  $v$  کا تفریق جمع  $v$  ضرب  $u$  کا تفریق ہو گا۔ اس کو  $(uv)' = uv' + vu'$  بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفریق کی تعریف کے تحت

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہو گا جس کو  $u$  اور  $v$  کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں  $u(x+h)v(x)$  جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \end{aligned}$$



شکل 3.31: قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی۔

چونکہ  $x$  پر  $u$  قابل تفرق ہے لہذا  $h \rightarrow 0$  کرنے سے  $u(x+h) \rightarrow u(x)$  ہو گا۔ دو سر کی تحدیدی قیمتیں  $x$  پر  $\frac{du}{dx}$  اور  $\frac{dv}{dx}$  ہیں۔ مختصراً درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

□

#### قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی

اگر  $u(x)$  اور  $v(x)$  مثبت ہوں اور  $x$  بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب  $h > 0$  کی صورت میں شکل 3.31 حاصل ہو گا۔  $u(x)$  اور  $v(x)$  بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u\Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو  $h$  سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h) \frac{\Delta v}{h} + v(x+h) \frac{\Delta u}{h} - \Delta u \frac{\Delta v}{h}$$

حاصل ہو گا۔ اب  $h \rightarrow 0^+$  کرنے سے  $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \rightarrow 0 \cdot \frac{dv}{dx} = 0$  ہو گا لہذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

مثال 3.12: تقابل  $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$  کا تفرق تلاش کریں۔  
حل: قاعدہ حاصل ضرب میں  $u = x^2 + 1$  اور  $v = x^3 + 3$  لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)(x^3 + 3)] &= (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\end{aligned}$$

□

اس مثال میں توسین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y &= (x^2 + 1)(x^3 + 3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3 \\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\end{aligned}$$

ملتا ہے جو مثال 3.12 میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔ درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال 3.13: فرض کریں کہ  $y = uv$  تقابل  $u$  اور  $v$  کا حاصل ضرب ہے۔ درج ذیل استعمال کرتے ہوئے  $y'(2)$  تلاش کریں۔

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1, \quad v'(2) = 2$$

حل: قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2\end{aligned}$$

□

## حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں تھا اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں ہو گا۔ درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

## قاعدہ 3.6: حاصل تقسیم

اگر  $u(x)$  اور  $v(x)$  متغیر  $x$  کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم  $\frac{u}{v}$  بھی  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

اس آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں  $u$  اور  $v$  کے تفریقی حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں  $v(x)u(x)$  جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نمبر نما میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.14: تفاعل  $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$  کا تفرق تلاش کریں۔

حل: ہم  $u = t^2 - 1$  اور  $v = t^2 + 1$  لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{(t^2+1) \cdot 2t - (t^2-1) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} & \left( \frac{du}{dt} = 2t, \frac{dv}{dt} = 2t \right) \\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{4t}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

□

منفی عدد صحیح کے لئے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ 3.7: منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ

اگر  $n$  منفی عدد صحیح اور  $x \neq 0$  ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ اگر  $n$  منفی عدد صحیح ہو تب  $m = -n$  مثبت عدد صحیح ہو گا۔ یوں  $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$  ہو گا لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\ &= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\ &= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} \quad \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہذا } \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\ &= -mx^{-m-1} \\ &= nx^{n-1} \quad \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے} \end{aligned}$$

□

مثال 3.15:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right) &= 4 \frac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4} \end{aligned}$$

□

مثال 3.16: منحنی  $y = x + \frac{2}{x}$  کا نقطہ  $(1, 3)$  پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔  
حل: منحنی کی ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

ہے جس کی قیمت نقطہ  $x = 1$  پر

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

ہو گی۔ نقطہ  $(1, 3)$  پر ڈھلوان  $m = -1$  کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y - 3 = (-1)(x - 1) \quad \text{نقطہ-ڈھلوان مساوات}$$

$$y = -x + 1 + 3$$

$$y = -x + 4$$

□

### قاعدہ کا انتخاب

تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔ درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 3.17: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کی بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر  $x^4$  سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

□



دو درجی اور بلند درجی تفرق

تفرق  $y' = \frac{dy}{dx}$  کو  $x$  کے لحاظ سے  $y$  کا درجہ اول تفرق<sup>10</sup> یا ایک درجی تفرق یا مختصراً پہلا تفرق<sup>11</sup> کہتے ہیں۔ یہ تفرق از خود  $x$  کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

کو  $x$  کے لحاظ سے  $y$  کا درجہ دوم تفرق<sup>12</sup> یا دو درجی تفرق یا مختصراً دوسرا تفرق<sup>13</sup> کہتے ہیں۔

دو درجی تفرق کی علامت  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  میں شمار کنندہ میں  $d$  جبکہ نسب نما میں  $x$  کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔ درج بالا مساوات میں  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$  سے مراد تفرقی علامتوں کا ضرب نہیں ہے بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر  $y''$  قبل تفرق ہو تب اس کے تفرق  $\frac{dy''}{dx} = \frac{d^3 y}{dx^3}$  کو  $x$  کے لحاظ سے  $y$  کا درجہ تین تفرق یا تین درجی تفرق یا مختصراً تیسرا تفرق کہتے ہیں۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}$$

کو  $x$  کے لحاظ سے  $y$  کا درجہ  $n$  تفرق یا  $n$  درجی تفرق یا  $n$  واں تفرق کہیں گے جہاں  $n$  مثبت عدد صحیح ہے۔ آپ نے دیکھا کہ بلند درجی تفرق کو قوسین میں بند  $y$  کا طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال 3.18: تعامل  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(4)} = 0$$

چونکہ  $y^{(4)} = 0$  ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہذا اس کا تفرق در حقیقت صفر (یعنی مثال) کا تفرق ہو گا جو صفر ہی ہے۔ یوں اس تعامل کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ اس کا چار درجی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

first order derivative<sup>10</sup>

first derivative<sup>11</sup>

second order derivative<sup>12</sup>

second derivative<sup>13</sup>

## سوالات

## تفرق کا حساب

سوال 1 تا سوال 12 میں متبادل کا درجہ اول اور درجہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال 1:  $y = -x^2 + 3$   
جواب:  $y' = -2x, \quad y'' = -2$

سوال 2:  $y = x^2 + x + 8$

سوال 3:  $s = 5t^3 - 3t^5$   
جواب:  $s' = 15t^2 - 15t^4, \quad s'' = 30t - 60t^3$

سوال 4:  $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال 5:  $y = \frac{4x^3}{3} - x$   
جواب:  $y' = 4x^2 - 1, \quad y'' = 8x$

سوال 6:  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال 7:  $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$   
جواب:  $w' = -6z^{-3} + \frac{1}{z^2}, \quad w'' = 18z^{-4} - \frac{2}{z^3}$

سوال 8:  $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال 9:  $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$   
جواب:  $y' = 12x - 10 + 10x^{-3}, \quad y'' = 12 - 30x^{-4}$

سوال 10:  $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال 11:  $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$   
جواب:  $r' = -\frac{2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \quad r'' = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

سوال 12:  $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال 13 تا سوال 16 میں (i)  $y'$  کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفریق حاصل کریں۔

سوال 13:  $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$   
 جواب:  $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

سوال 14:  $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

سوال 15:  $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$   
 جواب:  $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \frac{1}{x^2}$

سوال 16:  $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

سوال 17 تا سوال 28 میں تقابل کا تفریق تلاش کریں۔

سوال 17:  $y = \frac{2x+5}{3x-2}$   
 جواب:  $y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}$

سوال 18:  $z = \frac{2x+1}{x^2-1}$

سوال 19:  $g(x) = \frac{x^2-4}{x+0.5}$   
 جواب:  $g'(x) = \frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

سوال 20:  $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

سوال 21:  $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$   
 جواب:  $\frac{dv}{dt} = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

سوال 22:  $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

سوال 23:  $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$   
 جواب:  $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

سوال 24:  $u = \frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

سوال 25:  $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$   
 جواب:  $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

سوال 26:  $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

سوال 27:  $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$   
 جواب:  $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

سوال 28:  $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

سوال 29:  $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$  تعامل کے تمام بلند درجی تفریق تلاش کریں۔  
 جواب:  $y^{(4)} = 12, y''' = 6x^2 - 3, y'' = 2x^3 - 3x - 1, y' = 2x^3 - 3x - 1$  جبکہ تمام  $n \geq 5$  کے لئے  $y^{(n)} = 0$

سوال 30:  $y = \frac{x^5}{120}$  تعامل کے تمام بلند درجی تفریق تلاش کریں۔

سوال 31 تا سوال 38 میں ایک درجی اور دو درجی تفریق تلاش کریں۔

سوال 31:  $y = \frac{x^3+7}{x}$   
 جواب:  $y' = 2x - 7x^{-2}, y'' = 2 + 14x^{-3}$

سوال 32:  $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

سوال 33:  $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$   
 جواب:  $\frac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \frac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$

سوال 34:  $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

سوال 35:  $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$   
 جواب:  $\frac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \frac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$

سوال 36:  $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

سوال 37:  $p = \left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$   
 جواب:  $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}$ ,  $\frac{d^2p}{dq^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

سوال 38:  $p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال 39: فرض کریں کہ  $u$  اور  $v$  متغیر  $x$  کے تفاعل ہیں جو  $x = 0$  پر قابل تفرق ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

$x = 0$  پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{d}{dx}(uv), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

جواب:

$$\frac{d}{dx}(uv) = 13, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = -7, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{7}{25}, \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u) = 20$$

سوال 40: فرض کریں کہ  $u$  اور  $v$  متغیر  $x$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

$x = 1$  پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{d}{dx}(uv), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{d}{dx}(7v - 2u)$$

ڈھلوان اور مماس

سوال 41: (i) نقطہ  $(2, 1)$  پر منحنی  $y = x^3 - 4x + 1$  کے مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کتنی اور کس نقطے پر ہے؟ (ج) جس نقطے پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان 8 ہے وہاں مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 42: (i) منحنی  $y = x^3 - 3x - 2$  کے افقی مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔ مماسی نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساواتیں بھی تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کیا ہے اور کس نقطے پر ہے؟ اس نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 43: مبدا اور (1, 2) پر منحنی  $y = \frac{4x}{x^2+1}$  کے مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 44: نقطہ (2, 1) پر  $y = \frac{8}{x^2+4}$  کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 45: منحنی  $y = ax^2 + bx + c$  نقطہ (1, 2) سے گزرتی ہے اور مبدا پر خط  $y = x$  کا مماس ہے۔  $a$ ،  $b$  اور  $c$  تلاش کریں۔

سوال 46: نقطہ (1, 0) پر  $y = x^2 + ax + b$  اور  $y = cx - x^2$  کا مشترک مماس پایا جاتا ہے۔  $a$ ،  $b$  اور  $c$  تلاش کریں۔

سوال 47: (i) نقطہ (-1, 0) پر منحنی  $y = x^3 - x$  کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) کمپیوٹر پر منحنی اور مماس کو ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدود اندازہ لگائیں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

سوال 48: (i) مبدا پر منحنی  $y = x^3 - 6x^2 + 5x$  کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی اور مماس کو کمپیوٹر پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدود اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

### طبعی استعمال

سوال 49: دباؤ اور حجم بند ڈبہ میں مستقل درجہ حرارت  $T$  پر گیس کا حجم  $V$  اور دباؤ  $P$  درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں جہاں  $a$ ،  $b$  اور  $c$  مستقل ہیں۔  $\frac{dP}{dV}$  تلاش کریں۔

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

سوال 50: دوا کو جسم کا رد عمل دوا کو جسم کے رد عمل کو عموماً درج ذیل کلیہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں  $C$  مثبت مستقل ہے جبکہ  $M$  خون میں جذب دوا کی مقدار ہے۔

$$R = M^2 \left( \frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

اگر رد عمل فشار خون کی تبدیلی ہو تب  $R$  کو ملی میٹر پارہ میں ناپا جاتا ہے۔ اگر رد عمل درجہ حرارت میں تبدیلی ہو تب  $R$  کو کیلون میں ناپا جاتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔  $\frac{dR}{dM}$  تلاش کریں۔ یہ تفرق جو  $M$  کا تفاعل ہے، دوا کی مقدار میں تبدیلی کے لئے جسم کی حساسیت کہلاتا ہے۔

### نظریہ اور مثالیں

سوال 51: فرض کریں کہ قاعدہ حاصل ضرب میں  $v$  کی قیمت مستقل  $c$  ہو۔ کیا اس سے قاعدہ مضرب مستقل حاصل کیا جاسکتا ہے؟

سوال 52: قاعدہ بالعکس متناسب<sup>14</sup> کہتا ہے کہ جس نقطے پر تفاعل  $v(x)$  قابل تفرق ہو اس نقطے پر

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

ہو گا۔ دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب درحقیقت قاعدہ حاصل تقسیم کی ایک مخصوص صورت ہے۔ (ب) دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب اور قاعدہ حاصل ضرب کو ملا کر قاعدہ حاصل تقسیم اخذ کیا جاسکتا ہے۔

سوال 53: مثبت عدد صحیح کا دوسرا ثبوت الجبرائی کلیہ

$$cx^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1})$$

اور صفحہ 3.2 پر دیا گیا کلیہ تفرق (مساوات 3.2)

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

استعمال کرتے ہوئے  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$  حاصل کریں۔

سوال 54: قاعدہ حاصل ضرب کی عمومی صورت قاعدہ حاصل ضرب متغیر  $x$  کے قابل تفرق تفاعل  $u$  اور  $v$  کے لئے درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

(i) متغیر  $x$  کے قابل تفرق تین تفاعل کے حاصل ضرب  $uvw$  کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ب) متغیر  $x$  کے قابل تفرق چار تفاعل کے حاصل ضرب  $u_1u_2u_3u_4$  کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ج) متغیر  $x$  کے قابل تفرق متناہی تعداد تفاعل کے حاصل ضرب  $u_1u_2 \dots u_n$  کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟

سوال 55:  $x^{3/2}$  کو  $x \cdot x^{1/2}$  لکھ کر قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے  $\frac{d}{dx}(x^{3/2})$  حاصل کریں۔ جواب کو ناطق عدد ضرب  $x$  کا ناطق طاقت لکھیں۔ جزو (ب) اور (ج) کو بھی اسی طرح حل کریں۔ (ب)  $\frac{d}{dx}(x^{5/2})$  تلاش کریں۔ (ج)  $\frac{d}{dx}(x^{7/2})$  تلاش کریں۔ (د) درج بالا تین جزو میں آپ کیا نقش دیکھتے ہیں۔

## 3.3 تبدیلی کی شرح

اس حصے میں ہم تبدیلی کی شرح پر تفرق کی مدد سے غور کریں گے۔ وقت کے لحاظ سے فاصلہ میں تبدیلی کی مثالیں سستی رفتار اور اسراع ہیں۔ ہم وقت کے علاوہ دیگر متغیر کے لحاظ سے بھی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر حکیم جاننا چاہے گا کہ دوا میں معمولی تبدیلی سے مریض کی حالت پر کیا اثر ہو گا۔ ماہر اقتصادیات جاننا چاہے گا کہ سرمایہ کاری میں معمولی تبدیلی سے اقتصادی ترقی پر کتنا اثر پایا جائے گا۔ ان سوالات کو موزوں متغیر کے لحاظ سے تفرق کی صورت میں ظاہر کیا جائے گا۔

## اوسط اور لمحاتی شرح تبدیلی

ہم کسی دورانیہ پر اوسط شرح تبدیلی سے شروع کرتے ہیں۔ اس دورانیہ کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے حاصل شرح تبدیلی کی حد کو تفاعل کا تفرق کہتے ہیں۔

تعریف:  $x$  کے لحاظ سے وقفہ  $x_0$  تا  $x_0 + h$  پر تفاعل  $f(x)$  کی اوسط شرح تبدیلی سے مراد

$$\text{اوسط شرح تبدیلی} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ہے۔  $x$  کے لحاظ سے  $x_0$  پر  $f$  کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

کو کہتے ہیں بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

روایتی طور پر اگر  $x$  وقت کو ظاہر نہ کرتا ہو تب بھی لفظ لمحاتی استعمال کیا جاتا ہے۔ عموماً کو مختصراً کہتے ہیں۔

مثال 3.19: دائرے کے رقبہ  $S$  اور رداس  $r$  کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$S = \pi r^2$$

رقبے کی شرح تبدیلی  $r = 0.1 \text{ m}$  پر کیا ہو گی؟

حل: رداس کے لحاظ سے رقبے کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi r$$

ہے۔ یوں  $r = 0.1 \text{ m}$  کی صورت میں  $r$  تبدیل کرنے سے رقبہ تبدیل ہونے کی شرح  $0.2\pi \text{ m}^2/\text{m}$  ہو گی۔ یوں اس رداس

□

پر رداس میں  $\Delta r$  میٹر چھوٹی تبدیلی سے رقبے میں  $0.2\pi \Delta r$  مربع میٹر تبدیلی رونما ہو گی۔



لکیر پر حرکت۔ ہٹاؤ، سمتی رفتار، رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ محوری خط (جس کو ہم  $s$  محور کہتے ہیں) پر ایک جسم یوں حرکت کرتا ہے کہ اس محور پر مقام  $s$  اور وقت  $t$  کا تعلق

$$s = f(t)$$

ہے۔ دورانیہ  $t$  تا  $t + \Delta t$  میں جسم کا ہٹاؤ<sup>15</sup>

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ہوگا (شکل 3.32) اور اس کی اوسط سمتی رفتار<sup>16</sup>

$$v_{\text{اوسط}} = \frac{\text{ہٹاؤ}}{\text{دورانیہ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ہوگی۔ ٹھیک لمحہ  $t$  پر جسم کی سمتی رفتار جاننے کی خاطر ہم  $\Delta t \rightarrow 0$  کرتے ہوئے دورانیہ  $t$  تا  $t + \Delta t$  پر اوسط سمتی رفتار کا حد تلاش کرتے ہیں۔ یہ حد  $t$  کے لحاظ سے  $f$  کا تفرق ہے۔

تعریف: جسم کی (لحاتی) سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے تعین گر تفاعل  $s = f(t)$  کا تفرق ہوگا۔ لمحہ  $t$  پر سمتی رفتار درج ذیل ہوگی۔

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

□

مثال 3.20: ایک گاڑی کی فاصلہ (میٹر) بالقابل وقت (سیکنڈ) ترسیم کو شکل 3.33 میں دکھایا گیا ہے۔ سیکنڈ  $NQ$  کی ڈھلوان دورانیہ  $t = 5$  s تا  $t = 15$  s کے لئے اوسط سمتی رفتار ہے جو  $32.5 \text{ m s}^{-1}$  یعنی  $117 \text{ km h}^{-1}$  کے برابر ہے۔ لمحہ  $t = 5$  s پر مماس کی ڈھلوان اس لمحہ پر لحاتی سمتی رفتار  $16.25 \text{ m s}^{-1}$  یعنی  $58.5 \text{ km h}^{-1}$  دیتی ہے۔ □

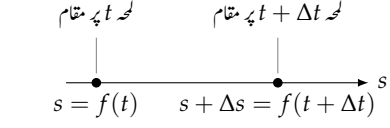
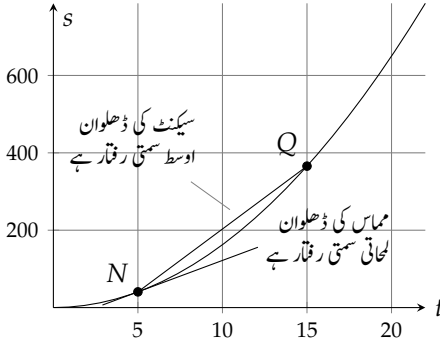
مقدار معلوم روپ

اگر  $x$  اور  $y$  دونوں متغیر  $t$  کے تفاعل ہوں تب  $(x(t), y(t))$  کی ترسیم مقدار معلوم ترسیم<sup>17</sup> کہلاتی ہے۔ منحنی

<sup>15</sup> displacement

<sup>16</sup> average velocity

<sup>17</sup> parametric curve



شکل 3.32: محور پر حرکت کرتے جسم کا  $t$  اور  $t + \Delta t$  پر مقام

شکل 3.33: فاصلہ بالمتقابل وقت برائے مثال 3.20

$y = f(x)$  کی مقدار معلوم روپ<sup>18</sup> حاصل کرنے کی خاطر ہم  $x = t$  اور  $y = f(t)$  لیں گے۔ چند منحنیات کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

تفاعل	مقدار معلوم روپ
$y = x^2$ ( $y$ متغیر $x$ کا تفاعل ہے)	$x(t) = t, y(t) = t^2, -\infty < t < \infty$
$x^2 + y^2 = 4$ ( $y$ متغیر $x$ کا تفاعل نہیں ہے)	$x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

سمتی رفتار ہمیں فاصلہ طے کرنے کی شرح کے ساتھ ساتھ حرکت کی سمت بھی دیتی ہے۔ اگر جسم آگے (بڑھتے  $s$ ) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار مثبت ہوگا؛ اگر جسم پیچھے (گھٹتے  $s$ ) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار منفی ہوگا (شکل 3.34)۔ سمتی رفتار ایک جسم کتنا تیز فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کے علاوہ ہمیں حرکت کرنے کی سمت کی معلومات بھی

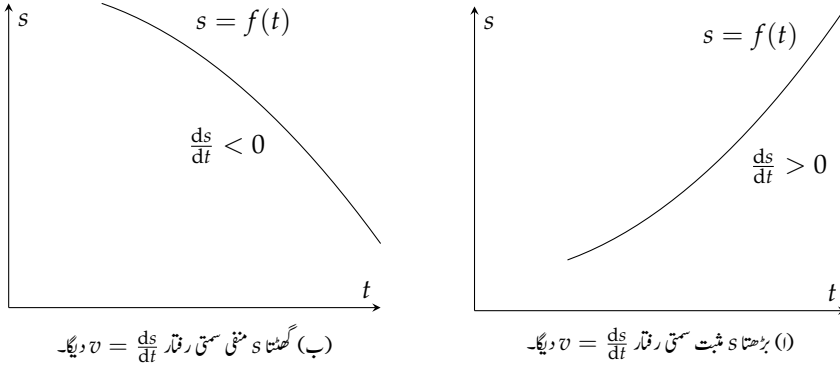
سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو رفتار<sup>19</sup> کہتے ہیں جو مثبت مقدار ہے۔ اگر آپ اپنے گھر سے دوست کے گھر تک 60 km کی سمتی رفتار سے گاڑھی چلائیں اور وہاں سے واپسی پر اسی رفتار سے آئیں تو واپسی پر گاڑھی کی سمتی رفتار 60 km ہوگی لیکن گاڑھی کا رفتار پتلا واپسی پر بھی 60 km h<sup>-1</sup> دکھائے گا چونکہ وہ رفتار ناپتا ہے ناکہ سمتی رفتار۔

تعریف: سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو رفتار<sup>20</sup> کہتے ہیں۔

$$\text{رفتار} = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

□

parametric representation<sup>18</sup>  
speed<sup>19</sup>  
speed<sup>20</sup>



شکل 3.34

جس شرح سے ایک جسم کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہے اس کو جسم کی اسراع کہتے ہیں۔

تعریف: وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کا تفرق اسراع<sup>21</sup> کہلاتا ہے۔ اگر لمحہ  $t$  پر ایک جسم کا مقام  $s = f(t)$  ہو تب  $t$  پر اس جسم کی اسراع درج ذیل ہوگی۔

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

□

ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے کسی بھی جسم سے اس کی وضاحت کی جاسکتی ہے۔ ایسے جسم پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہے اور جسم کی حرکت کو آزادانہ گونا<sup>22</sup> کہتے ہیں۔ آزادی سے گرتا ہوا جسم دورانہ  $t$  میں

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

فاصلہ طے کرتا ہے جہاں مستقل  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  سطح زمین کے قریب کشش زمین کی بنا اسراع ہے۔ خلا میں ہوا کی غیر موجودگی کی بنا ہوا کی مزاحمت نہیں پائے جاتی ہے اور ہر جسم اس کے تحت حرکت کرتی ہے۔ زمین کے قریب ہوا کی موجودگی میں ہر کثیف، بھاری جسم مثلاً لیٹ، پتھر، وغیرہ کی حرکت، ابتدائی چند سیکنڈ کے لئے جب تک ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہو، اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

اسراع کی اکائی  $\text{ms}^{-2}$  میٹر فی مربع سیکنڈ پڑھی جاتی ہے۔

<sup>21</sup> acceleration  
<sup>22</sup> free fall

یہ مساوات ہمیں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی رفتار اور مقام کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔

مثال 3.21: لمحہ  $t = 0$  پر ٹھوس جسم کو ساکن حال سے گرنے کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔  
(i) پہلے 2 سیکنڈوں میں جسم کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔ (ب) اس لمحہ پر جسم کی رفتار اور اسراع کتنی ہوں گی؟  
حل: (i) پہلے دو سیکنڈوں میں جسم درج ذیل فاصلہ طے کرتا ہے۔

$$s(2) = \frac{1}{2}(9.8)(2^2) = 19.6 \text{ m}$$

(ب) لمحہ  $t$  پر رفتار  $v(t)$  اور اسراع  $a(t)$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 9.8t, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8$$

ہوں گے۔ یوں  $t = 2 \text{ s}$  پر رفتار اور اسراع درج ذیل ہوں گے۔

$$v(2) = 9.8(2) = 19.6 \text{ m/s}, \quad a(2) = 9.8 \text{ m/s}^2$$

□

آپ نے دیکھا کہ اسراع  $a$  کی قیمت وقت  $t$  کا تابع نہیں ہے۔

مثال 3.22: ایک جسم کو  $49 \text{ m/s}^{-1}$  کی ابتدائی رفتار کے ساتھ سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ لمحہ  $t$  پر جسم کی بلندی  $s = 49 - \frac{1}{2}gt^2$  ہوگی (شکل 3.35)۔

ا. جسم کس بلندی تک پہنچے پائے گا؟

ب. اوپر جاتے ہوئے  $102.9 \text{ m}$  کی بلندی پر جسم کی سمتی رفتار کیا ہوگی؟ نیچے آتے ہوئے اتنی ہی بلندی پر سمتی رفتار کیا ہوگی؟

ج. حرکت کے دوران کسی بھی لمحہ  $t$  پر جسم کی اسراع کتنی ہوگی؟

د. جسم زمین پر کب گرے گا؟

حل:

ا. ہم محدودی نظام یوں منتخب کرتے ہیں سطح زمین سے فاصلہ مثبت ہو۔ یوں بلندی  $s$  مثبت مقدار ہوگی، ابتدائی رفتار مثبت ہوگی جبکہ اسراع جو نیچے رخ عمل کرتا ہے منفی ہوگا۔ اوپر جاتے ہوئے سمتی رفتار مثبت جبکہ نیچے گرتے ہوئے سمتی رفتار منفی ہوگی۔ بلند ترین مقام پر سمتی رفتار صفر ہوگی۔ اب کسی لمحہ پر سمتی رفتار

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 49 - gt$$

ہوگی۔ رفتار اس لمحہ پر صفر ہوگی جب

$$49 - 9.8t = 0, \quad \Rightarrow \quad t = \frac{49}{9.8} = 5 \text{ s}$$

ہو۔ لمحہ  $t = 5 \text{ s}$  پر جسم کی بلندی درج ذیل ہوگی۔

$$s(5) = 49(5) - \frac{1}{2}(9.8)(5^2) = 122.5 \text{ m}$$

ب. جسم کی رفتار  $100 \text{ m}$  پر حاصل کرنے کی خاطر ہم اس بلندی پر لمحہ  $t$  تلاش کرتے ہیں۔

$$102.9 = 49t - 4.9t^2, \quad \Rightarrow \quad t = 3 \text{ s}, 7 \text{ s}$$

یوں 3 سیکنڈوں میں جسم  $102.9 \text{ m}$  بلندی تک پہنچتا ہے جبکہ واپس گرتے ہوئے اسی بلندی پر یہ 7 سیکنڈ بعد ہوتا ہے۔ ان لمحات پر جسم کی سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$v(3) = 49 - 9.8(3) = 19.6 \text{ m s}^{-1}, \quad v(7) = 49 - 9.8(7) = -19.6 \text{ m s}^{-1}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں لمحات پر جسم کی رفتار ایک جیسی ہے۔

ج. جسم کی اسراع تلاش کرتے ہیں۔

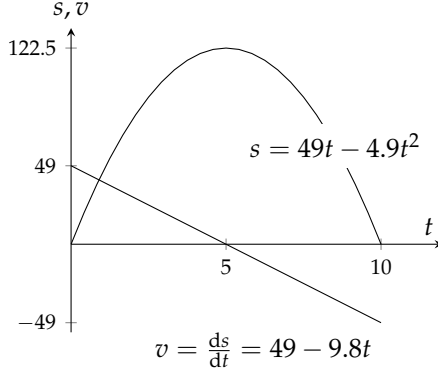
$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = -g = -9.8 \text{ m s}^{-2}$$

جسم کی اسراع مسلسل  $-9.8 \text{ m s}^{-2}$  رہتی ہے۔ اوپر جاتے ہوئے یہ سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے جبکہ نیچے گرتے کے دوران یہ سمتی رفتار میں اضافہ پیدا کرتا ہے۔

د. جس اس لمحہ زمین پر ہوگا جب  $s = 0$  ہو یعنی:

$$49t - 4.9t^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad t(49 - 4.9t) = 0, \quad \Rightarrow \quad t = 0 \text{ s}, 10 \text{ s}$$

یوں ابتدائی لمحے پر جسم زمین پر ہوگا اور ٹھیک 10 سیکنڈ بعد یہ واپس زمین پر گرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر جانے کا دورانیہ اور نیچے گرنے کا دورانیہ ایک جیسے ہیں۔



شکل 3.35: بلندی اور سمتی رفتار (برائے مثال 3.22)

□

فنیات انتہائی کلیہ پر حرکت کی نقل  
مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$

کو کمپیوٹر پر نقطہ ترسیم<sup>23</sup> کریں جو لمحہ  $t$  پر نقطہ  $(x(t), y(t))$  دکھائے گی۔ نقطہ ترسیم لمحہ بالحد صورت حال دکھاتی ہے۔ یوں اگر  $f(t)$  جسم کی بلندی کو ظاہر کرتا ہو تب  $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$  کی لمحاتی ترسیم جسم کی حقیقی حرکت دکھائے گی۔ مثال 3.22 کے لئے اس لمحاتی ترسیم کو پہلے  $0 \leq t \leq 5$  اور بعد میں  $0 \leq t \leq 10$  وقفے پر دیکھیں۔

دوسرا تجربہ کرنے کی خاطر مقدار معلوم مساوات

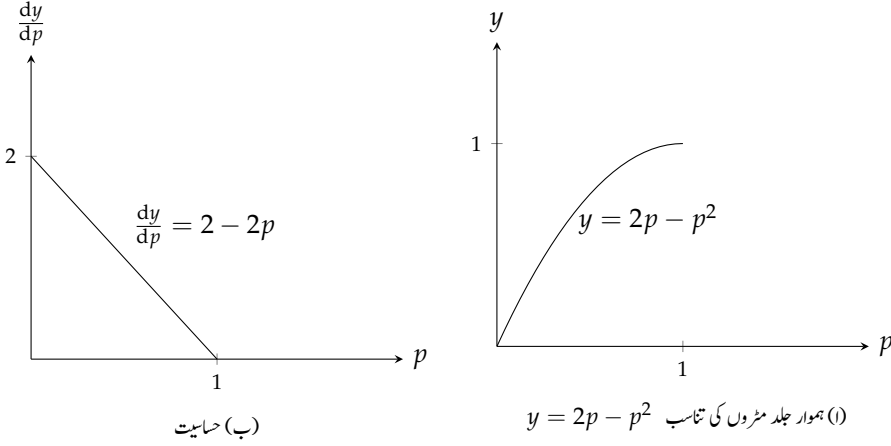
$$x(t) = t, \quad y(t) = 49t - 4.9t^2$$

کو نقطہ ترسیم کریں۔

حساسیت

اگر  $x$  میں چھوٹی تبدیلی سے تفاعل  $f(x)$  میں بڑی تبدیلی رونما ہوتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ  $x$  میں تبدیلی کے لئے تفاعل نسبتاً زیادہ حساس<sup>24</sup> ہے۔ تفرق  $f'(x)$  تفاعل  $f(x)$  کی حساسیت<sup>25</sup> کی ناپ ہے۔

dot graph<sup>23</sup>  
sensitive<sup>24</sup>  
sensitivity<sup>25</sup>



شکل 3.36: مینڈل کے تجربہ نے جنیات کی بنیاد رکھی۔

مثال 3.23: تبدیلی کے لئے حسایت  
آسٹریا کے گرگر یوہان مینڈل (1822-1884) نے مٹر پر تجربہ کرتے ہوئے جنیات<sup>26</sup> کے میدان کی بنیاد ڈالی۔ ان کے نتائج کے مطابق اگر ہموار جلد والے (غالب<sup>27</sup>) مٹروں کے جین<sup>28</sup> کی تعداد  $p$  ہو (جہاں  $p$  کی قیمت 0 تا 1 ہو سکتی ہے) اور غیر ہموار جلد والے (مغلوب<sup>29</sup>) مٹروں کی جین کی تعداد  $(1 - p)$  ہو تب مٹروں کی آبادی میں ہموار جلد مٹروں کی تناسب

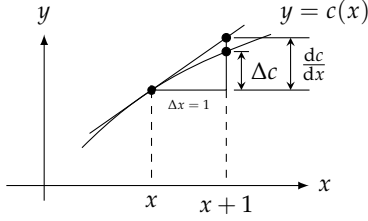
$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2$$

ہے۔

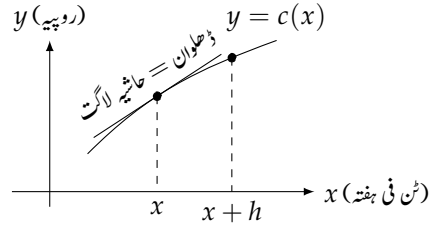
$y$  بالقابل  $p$  کی ترسیم کے مطابق جب  $p$  کی قیمت کم ہو تب  $y$  زیادہ حساس ہوگا (شکل 3.36-ii)۔ تفاعل  $y$  کے تفرق  $\frac{dy}{dp}$  کی قیمت 0 کے قریب ہوتا ہے۔ جب  $p$  کی قیمت 0 کے قریب ہو تب  $\frac{dy}{dp}$  کی قیمت 2 کے قریب ہے اور جب  $p$  کی قیمت 1 کے قریب ہو تب  $\frac{dy}{dp}$  کی قیمت 0 کے قریب ہے (شکل 3.36-ب)۔ □

جیسے تفرق کی بات کرتے ہوئے سستی رفتار اور اسراع کی اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں، اقتصادیات کی میدان میں ہم حاشیہ<sup>30</sup> کی بات کرتے ہیں۔

genetics<sup>26</sup>  
dominant<sup>27</sup>  
gene<sup>28</sup>  
recessive<sup>29</sup>  
marginals<sup>30</sup>



(ب)  $\Delta x = 1$  اضافی پیداوار کی اضافی لاگت  $\Delta c$  تقریباً  $\frac{dc}{dx}$  کے برابر ہے۔



(i) ہفتہ وار پیداوار ہاتھوں ہاتھ لاگت

شکل 3.37: حاشیہ لاگت پیداوار

عمل پیداوار میں اشیاء پیدا کرنے کی لاگت  $c(x)$  متغیر  $x$  کا تقابل ہے جہاں پیدا کردہ اشیاء کی تعداد  $x$  ہے۔ حاشیہ لاگت پیداوار<sup>31</sup> سے مراد پیداوار کے لحاظ سے لاگت کی شرح تبدیلی  $\frac{dc}{dx}$  ہے۔

مثال کے طور پر ایک ہفتہ میں  $x$  ٹن<sup>32</sup> فولاد پیدا کرنے پر  $c(x)$  روپیہ لاگت آتی ہے۔ اب  $x+h$  ٹن فولاد پیدا کرنے پر زیادہ لاگت آئے گی اور لاگت میں اضافہ (تبدیلی) کو  $h$  سے تقسیم کرنے سے فی ہفتہ فی ٹن لاگت میں اوسط اضافہ ہو گا۔

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{ہفتہ میں } h \text{ ٹن اضافی فولاد پیدا کرنے سے لاگت میں اوسط اضافہ}$$

فی ہفتہ موجودہ پیداوار  $x$  ٹن ہونے کی صورت میں  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے اس نسبت کا حد اضافی فولاد پیدا کرنے کی حاشیہ لاگت دے گی (شکل 3.37-ا)۔

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{حاشیہ لاگت پیداوار}$$

بعض اوقات ہم اضافی ایک اکائی پیداوار کی اضافی لاگت

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

کو ہی حاشیہ لاگت پیداوار کہتے ہیں جو  $x$  پر  $\frac{dc}{dx}$  کی تخمینہ ہے۔ یہ قابل قبول اس لئے ہے کہ  $x$  کے نزدیک  $c$  کی ڈھلوان میں تبدیلی زیادہ نہیں ہوتی ہے لہذا یہاں  $\Delta x = 1$  لیتے ہوئے حاصل سیکنٹ کی ڈھلوان کی قیمت حد  $\frac{dc}{dx}$  کے قیمت کے بہت قریب ہو گی۔ عملاً  $x$  کی بڑی قیمتوں کے لئے یہ تخمینہ قابل قبول ہو گی (شکل 3.37-ب)۔

مثال 3.24: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ  $x$  اشیاء پیدا کرنے پر

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

marginal cost of production<sup>31</sup>  
tonne, 1000 kg<sup>32</sup>



روپیہ لاگت آتی ہے جب  $x$  کی قیمت 8 تا 30 ہو۔ ابھی آپ روزانہ 10 اشیاء پیدا کرتے ہیں۔ روزانہ ایک اضافی شہ پیدا کرنے پر کتنی اضافی لاگت آئے گی؟  
 حل: دس اشیاء بناتے ہوئے مزید ایک شہ پیدا کرنے پر تقریباً  $c'(10)$  اضافی لاگت آئے گی

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

□

جو 195 روپیہ کے برابر ہے۔

اگرچہ حقیقی اعمال کے کلیات عموماً نہیں پائے جاتے ہیں، نظریہ اقتصادیات ہمیں متوقع نتائج جاننے میں مدد کرتا ہے۔ یہ نظریہ جن تفاعل کا ذکر کرتا ہے انہیں عموماً موزوں وقفہ پر کم درجے کی کثیر رکنیوں سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کبھی کثیر رکنی عموماً اس قابل ہوتی ہے کہ پیچیدہ مسئلے کو ظاہر کر سکے اور کبھی کثیر رکنی کا استعمال زیادہ مشکل بھی نہیں ہوتا ہے۔

مثال 3.25: حاشیہ شرح ٹیکس

اگر آپ نی موجودہ آمدن پر حاشیہ شرح ٹیکس 28% ہو اور آپ کی آمدنی میں 10000 روپیہ کا اضافہ ہو تب آپ کو اضافی 2800 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ 28% حاشیہ ٹیکس کا یہ ہرگز مطلب نہیں ہے کہ آپ کو اپنی آمدن کا 28% بطور ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ آپ کی موجودہ آمدنی  $I$  پر آمدنی بڑھنے کے لحاظ سے ٹیکس کی شرح  $\frac{dT}{dT} = 0.28$  ہے۔ آپ کو ہر اضافی ایک روپیہ کی آمدن پر 0.28 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اب ظاہر ہے کہ اگر آپ کی آمدن بہت بڑھ جائے تب آپ ٹیکس کے نئے قالب میں شامل ہوں جائیں گے جہاں حاشیہ شرح ٹیکس غالباً زیادہ ہو گا۔

□

مثال 3.26: حاشیہ اگر  $x$  ہزار مٹھائی فروخت کرنے سے

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

آمدنی حاصل ہو جہاں  $5 \leq x \leq 20$  ہے تب 10 ہزار مٹھائی فروخت کرتے ہوئے حاشیہ آمدنی

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

ہو گی۔ حاشیہ لاگت کی طرح ایک اضافی اکائی فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو حاشیہ آمدنی پیش کرتی ہے۔ اگر آپ 10 ہزار مٹھائیاں فی ہفتہ فروخت کر رہے ہوں تب فی ہفتہ 11 ہزار مٹھائیاں فروخت کرنے سے آپ کی آمدنی میں درج ذیل روپیہ اضافہ متوقع ہو گا۔

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252$$

□

## سوالات

## محددی لکیر پر حرکت

سوال 1: سوال 6 میں  $a \leq t \leq b$  کے لئے  $s = f(t)$  محدودی لکیر پر ایک جسم کا مقام دیتی ہے جہاں  $t$  کی اکائی سیکنڈ اور  $s$  کی اکائی میٹر ہے۔

ا. دیے گئے وقفے پر جسم کا ہٹاؤ اور سمتی رفتار حاصل کریں۔

ب. اس وقفے کے آخری سروں پر جسم کی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

ج. جسم کب حرکت کی سمت تبدیل کرتا ہے (اگر ایسا کرتا ہو)؟

سوال 1: چاند پر آزادانہ گرنا  $s = 0.8t^2$ ,  $0 \leq t \leq 10$   
جواب: (i)  $80 \text{ m}$ ,  $8 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $0 \text{ ms}^{-1}$ ,  $16 \text{ ms}^{-1}$ ;  $1.6 \text{ ms}^{-2}$ ,  $1.6 \text{ ms}^{-2}$  (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 2: مریخ پر آزادانہ گرنا  $s = 1.86t^2$ ,  $0 \leq t \leq 0.5$

سوال 3:  $s = -t^3 + 3t^2 - 3t$ ,  $0 \leq t \leq 3$   
جواب: (i)  $-9 \text{ m}$ ,  $-3 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $3 \text{ ms}^{-1}$ ,  $12 \text{ ms}^{-1}$ ;  $6 \text{ ms}^{-2}$ ,  $-12 \text{ ms}^{-2}$  (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 4:  $s = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2$ ,  $0 \leq t \leq 2$

سوال 5:  $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}$ ,  $1 \leq t \leq 5$   
جواب: (i)  $-20 \text{ m}$ ,  $-5 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $45 \text{ ms}^{-1}$ ,  $0.2 \text{ ms}^{-1}$ ;  $140 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\frac{4}{25} \text{ ms}^{-2}$  (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 6:  $s = \frac{25}{t+5}$ ,  $-4 \leq t \leq 0$

سوال 7:  $s$  محور پر لمحہ  $t$  پر ایک جسم کا مقام  $s = t^3 - 6t^2 + 9t$  ہے۔ (i) ان نقطوں پر اس جسم کی اسراع تلاش کریں جن پر جسم کی سمتی رفتار صفر ہو گی۔ (ب) جب جسم کی اسراع صفر ہو اس لمحے پر اس جسم کی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) لمحہ  $t = 0$  تا  $t = 2$  کے دوران یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔

جواب: (i)  $a(1) = -6 \text{ ms}^{-2}$ ,  $a(3) = 6 \text{ ms}^{-2}$  (ب)  $v(2) = 3 \text{ ms}^{-1}$  (ج)  $6 \text{ m}$

سوال 8: وقت  $t \geq 0$  پر  $s$  محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار  $v = t^2 - 4t + 3$  ہے۔ (ا) جسم کی اسراع وہاں تلاش کریں جہاں جسم کی سمتی رفتار صفر ہے۔ (ب) جسم کب آگے رخ اور کب پیچھے رخ حرکت کرتی ہے؟ (ج) جسم کی سمتی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

### آزادانہ گونا

سوال 9: مرنخ اور مشتری کی سطح کے قریب آزادانہ گرنے کے مساوات بالترتیب  $s = 1.86t^2$  اور  $s = 11.44t^2$  ہیں جہاں  $t$  کی اکائی سیکنڈ اور  $s$  کی اکائی میٹر ہے۔ ساکن حال سے گرتے ہوئے کتنے وقت میں (مرنخ اور مشتری میں) ایک جسم کی رفتار  $27.8 \text{ m s}^{-1}$  یعنی تقریباً  $100 \text{ km h}^{-1}$  ہوگی؟  
جواب: مرنخ:  $7.5 \text{ s}$ ، مشتری:  $1.2 \text{ s}$

سوال 10: سطح چاند سے انتصابی رخ  $25 \text{ m s}^{-1}$  کی رفتار سے پھینکا گیا پتھر  $t$  سیکنڈوں میں  $s = 24t - 0.8t^2$  میٹر بلندی پر پہنچے گا۔

ا. لمحہ  $t$  پر پتھر کی اسراع کیا ہوگی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہوگی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ه. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟

سوال 11: سطح زمین پر ہوا کی غیر موجودگی میں سوال 10 کا پتھر  $t$  سیکنڈوں میں  $s = 24t - 4.9t^2$  بلندی پر ہوگا۔

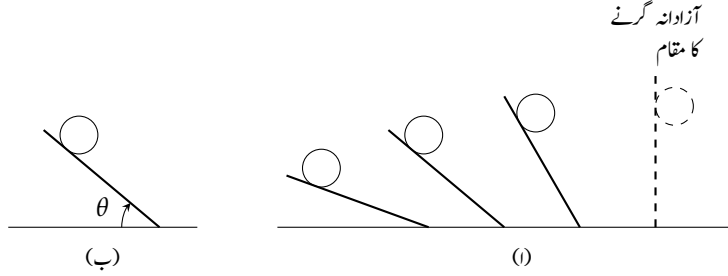
ا. لمحہ  $t$  پر پتھر کی اسراع کیا ہوگی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہوگی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ه. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟



شکل 3.38: گلیو کا تجربہ برائے آزادانہ گرنا (سوال 15)

جواب: (i)  $2.4 - 9.8t \text{ ms}^{-1}$  ،  $-9.8 \text{ ms}^{-2}$  (ب)  $2.4 \text{ s}$  (ج)  $29.4 \text{ m}$  (د)  $0.7 \text{ s}$  سیکنڈ اوپر جانب اور  $4.2 \text{ s}$  سیکنڈ نیچے رخ (e)  $4.9 \text{ s}$

سوال 12: ہوا سے خالی ایک دنیا پر ایک ٹھوس جسم کو انتہائی رخ  $15 \text{ ms}^{-1}$  کی ابتدائی رفتار سے پھینکا گیا۔ اس دنیا کے سطح پر ثقلی اسراع  $g_s \text{ ms}^{-2}$  ہونے کی بنا پر  $t$  سیکنڈوں میں جسم  $s = 15t - \frac{1}{2}g_s t^2$  میٹر بلندی تک پہنچے گا۔ یہ جسم بلند ترین مقام تک  $20$  سیکنڈوں میں پہنچتا ہے۔ اس دنیا میں ثقلی اسراع کتنی ہے؟

سوال 13: چاند پر ایک بندوق کو انتہائی رخ چلایا گیا۔ بندوق کی گولی  $t$  سیکنڈوں میں  $s = 300t - 4.9t^2$  میٹر بلندی پر ہو گی۔ چاند پر یہی گولی  $t$  سیکنڈ بعد  $s = 300t - 0.8t^2$  میٹر بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنی دیر بعد سطح پر گرے گی؟ جواب: چاند پر  $320$  سیکنڈ، زمین پر  $52$  سیکنڈ؛ چاند پر  $20287$  میٹر، زمین پر  $3297$  میٹر

سوال 14: مشتری پر ہوا کی غیر موجودگی میں یہی گولی  $t$  سیکنڈ بعد  $s = 300t - 11.44t^2$  میٹر بلندی پر ہو گی جبکہ مریخ پر یہ  $s = 300t - 1.86t^2$  میٹر کی بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنے بلندی تک پہنچے گی؟

سوال 15: گلیو کا کلیہ برائے آزادانہ گرنا ایک پٹی کو مختلف زاویوں پر رکھتے ہوئے گلیو نے اس پر گیند کی سمتی رفتار کو ناپتے ہوئے کلیہ اخذ کیا جس کی تحدیدی صورت سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کا کلیہ حاصل کرنا مقصد تھا (شکل 3.38)۔ گلیو نے دیکھا کہ حرکت کے شروع سے  $t$  سیکنڈ بعد سمتی رفتار کی قیمت  $t$  کے راست تناسب ہے یعنی  $v = kt$  لکھا جاسکتا ہے۔ مستقل  $k$  کی قیمت کا دارودمدار پٹی کی ڈھلوان پر ہے۔

موجودہ علامتیت استعمال کرتے ہوئے (شکل 3.38-ب) درحقیقت گلیو نے درج ذیل کلیہ حاصل کیا تھا جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔

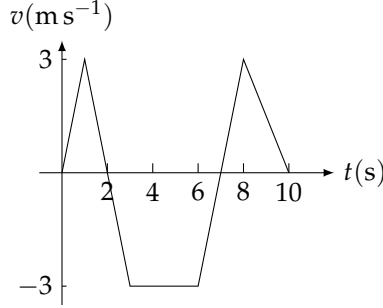
$$v = (9.8 \sin \theta)t$$

(i) آزادانہ گرتے ہوئے گیند کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) سطح زمین کے قریب جسم کی اسراع کیا ہو گی؟ جواب: (i)  $9.8 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $9.8 \text{ ms}^{-2}$

سوال 16: پی سا اگر گلیلو پی سا سے توپ کی گولی 55 m بلندی سے گرنے دیتا تب  $t$  سیکنڈ بعد سطح زمین سے اس کی بلندی  $s = 55 - 4.9t^2$  ہوتی۔ (i) لمحہ  $t$  پر توپ کی گولی کی سمتی رفتار، رفتار اور اسراع کیا ہوتے؟ (ب) یہ زمین تک کتنی دیر میں پہنچتا؟ (ج) زمین پر پہنچنے کے لمحہ پر اس کی سمتی رفتار کیا ہوتی؟

ترسیم سے حرکت کے بارے میں معلومات اخذ کرنا

سوال 17: ایک محوری کثیر پر ایک جسم کی سمتی رفتار  $v = \frac{ds}{dt} = f(t)$  کو درج ذیل شکل میں ترسیم کیا گیا ہے۔



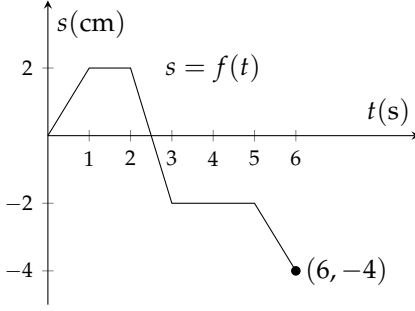
(i) جسم کب سمت حرکت تبدیل کرتی ہے؟ (ب) کب جسم تقریباً مستقل رفتار سے حرکت کرتی ہے؟ (ج) دورانیہ  $0 \leq t \leq 10$  کے لئے جسم کی رفتار ترسیم کریں۔ (د) جسم کی اسراع (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔  
جواب: (i)  $t = 2, t = 7$  (ب)  $3 \leq t \leq 6$

سوال 18: ایک محوری کثیر پر نقطہ N حرکت کرتا ہے۔ اس نقطے کا مقام بالمقابل وقت بھی ترسیم کیا گیا ہے (شکل 3.39)۔ (i) N کب بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب دائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب ساکن ہے؟ (ب) اس کی سمتی رفتار اور رفتار (جہاں معین ہوں) ترسیم کریں۔

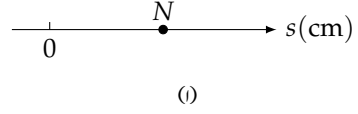
سوال 19: راکٹ میں چند سیکنڈوں کے لئے ایندھن ہوتا ہے جو اس کو کسی خاص بلندی تک پہنچاتا ہے جس کے بعد راکٹ کچھ دیر تک مزید بلند ہو کر واپس زمین کی جانب گرتا ہے۔ گرنے کے چند لمحات بعد خود کار پیراشوٹ کھلتا ہے جو راکٹ کو حفاظت کے ساتھ نہایت آہستہ زمین تک پہنچاتا ہے۔ ایک راکٹ کی حرکت کو شکل 3.40 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ (i) ایندھن ختم ہونے کے لمحہ راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ب) ایندھن کتنے سیکنڈوں تک کے لئے تھا؟ (ج) راکٹ کب بلند ترین مقام تک پہنچا اور بلند ترین مقام پر اس کی رفتار کتنی تھی؟ (د) پیراشوٹ کب کھلا اور اس لمحہ پر راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (e) پیراشوٹ کھلنے سے پہلے راکٹ کتنی دیر تک گرتا رہا؟ (و) راکٹ کی اسراع کب زیادہ سے زیادہ تھی؟ (ز) اسراع کب مستقل تھی اور اس کی قیمت کیا تھی؟

جواب: (i)  $60 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $2 \text{ s}$  (ج)  $v = 0 \text{ ms}^{-1}$ ،  $t = 8.12 \text{ s}$  (د)  $v = -38 \text{ ms}^{-1}$ ،  $12 \text{ s}$  (e) لمحہ  $t = 2 \text{ s}$  پر (و)  $12 \text{ s}$  تا  $2 \text{ s}$

سوال 20: محوری کثیر پر ایک جسم کی رفتار  $v = f(t)$  شکل 3.41 ترسیم کی گئی ہے۔ (i) کب جسم آگے حرکت، پیچھے حرکت کرتی ہے؟ اس کی رفتار کب تیز؟ کب کم ہوتی ہے؟ (ب) جسم کی اسراع کب مثبت؟ کب منفی؟ اور کب صفر ہے؟ (ج) جسم کی رفتار زیادہ سے زیادہ کب ہوتی ہے؟ (د) کم جسم لمحہ سے زیادہ دورانیے کے لئے ساکن رہتا ہے؟

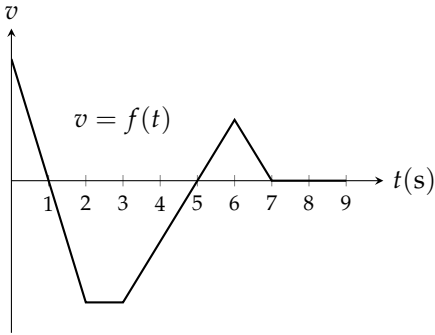


(ب)

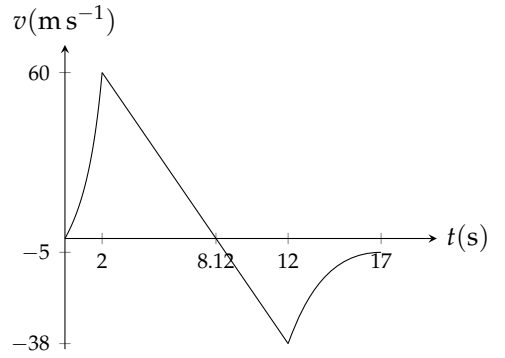


(i)

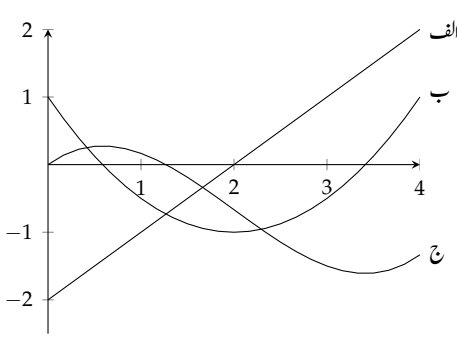
شکل 3.39: محوری لکیر پر حرکت (سوال 18)



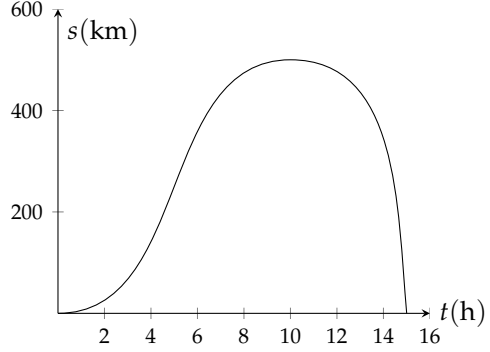
شکل 3.41: جسم کی حرکت (سوال 20)



شکل 3.40: راکٹ کی حرکت (سوال 19)



شکل 3.43: اشکال برائے سوال 22



شکل 3.42: ٹرک کی حرکت (سوال 21)

سوال 21: ایک ٹرک  $t = 0$  پر اڈے سے نکل کر دوسرے شہر مال پہنچا کر 15 گھنٹوں بعد اڈے پر واپس پہنچتا ہے۔ اس کے مقام بالقابل کا شکل 3.42 میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 3.4 کی طرح  $0 \leq t \leq 15$  کے لئے ٹرک کی سمتی رفتار  $v = \frac{ds}{dt}$  ترسیم کریں۔ اسی طریقے کو دہراتے ہوئے سمتی رفتار کی ترسیم سے ٹرک کی اسراع  $a = \frac{dv}{dt}$  ترسیم کریں۔

سوال 22: ایک جسم کا فاصلہ  $s$ ، رفتار  $v = \frac{ds}{dt}$  اور اسراع  $a = \frac{dv}{dt}$  بالقابل وقت  $t$  کو شکل 22 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ان میں کون سا ترسیم کون سا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب: مقام بالقابل وقت شکل-ج، رفتار بالقابل وقت شکل-ب اور اسراع بالقابل وقت شکل-ا ہیں۔

### اقتصادیات

سوال 23: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ  $x$  مشینوں کو پیدا کرنے پر  $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$  روپیہ لاگت آتی ہے۔ (ا) پہلے 100 مشینوں کی اوسط لاگت کیا ہوگی؟ (ب) اگر 100 پیدا کیے جا رہے ہوں تب حاشیہ لاگت کیا ہوگی؟ (ج) دکھائیں کہ 100 مشین پیدا کرنے کے بعد ایک اضافی مشین پیدا کرنے پر لاگت تقریباً حاشیہ لاگت کے برابر ہے۔  
جواب: (ا) 110 روپیہ فی مشین (ب) 80 روپیہ (ج) 79.9 روپیہ

سوال 24: حاشیہ آمدنی فرض کریں کہ  $x$  کرسیاں فروخت کرنے سے  $r(x) = 2000(1 - \frac{1}{x+1})$  روپیہ آمدنی ہوتی ہے۔ (ا)  $x$  کرسیوں کی فروخت پر حاشیہ آمدنی کیا ہوگی؟ (ب) فی ہفتہ 5 کرسیوں کی بجائے 6 کرسیاں فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو  $r'(x)$  سے حاصل کریں۔ (ج)  $x \rightarrow \infty$  کرتے ہوئے تقابل  $r'(x)$  کے حد کی قیمت تلاش کریں۔ اس قیمت کا کیا مطلب ہوگا؟

### مزید استعمال

سوال 25: جرسوموں پر تجربہ کے دوران ان کی خراک میں جرسومہ مار دو ملائی گئی۔ جرسوموں کی تعداد کچھ دیر تک بڑھتی رہی جس کے بعد ان کی تعداد کم ہونا شروع ہوئی۔ لمحہ  $t$  پر ان کی تعداد  $b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$  تھی جہاں  $t$  کی اکائی گھنٹہ ہے۔ شرح

نمو کو (i)  $t = 0$ ؛ (ب)  $t = 5$ ؛ اور  $t = 10$  پر تلاش کریں۔  
جواب: (i)  $10^4$  جرسو میں فی گھنٹہ؛ (ب)  $0$  جرسو میں فی گھنٹہ؛ (ج)  $-10^4$  جرسو میں فی گھنٹہ

سوال 26: لمحہ  $t$  پر ایک ٹینکی سے پانی کا اخلا  $Q(t) = 200(30 - t^2)$  لٹر ہے جہاں  $t$  کی اکائی منٹ ہے۔ دس منٹ بعد پانی کی اخلا کی شرح کیا ہے؟ پہلے دس منٹوں میں اوسط شرح اخراج کتنی ہے؟

سوال 27: ٹینکی کو خالی کرنے کے لئے گھر کے نلکے کھولے جاتے ہیں۔ نلکے کھولنے کے  $t$  منٹوں بعد ٹینکی میں پانی کی گہرائی  $y = 150(1 - \frac{t}{60})^2$  سنٹی میٹر ہے۔ (i) لمحہ  $t$  پر ٹینکی سے پانی کی اخلا  $\frac{dy}{dt}$  کیا ہوگی؟ (ب) پانی کی گہرائی کب زیادہ سے زیادہ تیزی سے کم ہوتی ہے؟ کب کم سے کم تیزی سے گہرائی گھٹتی ہے؟ ان لمحات پر  $\frac{dy}{dt}$  کی قیمت کیا ہے؟ (ج)  $y$  اور  $\frac{dy}{dt}$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں اور  $\frac{dy}{dt}$  کی علامت اور قیمتوں کے ساتھ  $y$  کے تعلق پر تبصرہ کریں۔  
جواب: (i)  $5(\frac{t}{60} - 1)$  (ب)  $t = 0$  پر گہرائی تیز ترین گھٹتی ہے جب شرح  $\frac{dy}{dt} = -5$  ہے اور  $t = 60$  پر گھٹنے کی کم تر شرح  $\frac{dy}{dt} = 0$  ہوگی۔

سوال 28: گول غبارے کا حجم  $H = \frac{4}{3}\pi r^3$  رداس  $r$  کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ (i) رداس کے ساتھ حجم کی تبدیلی کی شرح  $r = 10$  cm پر کیا ہوگی؟ (ب) اگر رداس  $10$  cm سے  $12$  cm ہو تب حجم میں تبدیلی کتنی ہوگی؟

سوال 29: پہلے ہوائی جہاز زمین پر دوڑ کر ایک مخصوص رفتار تک پہنچتا ہے۔ زمین پر دوڑ کے دوران ایک جہاز  $D = \frac{10}{9}t^2$  فاصلہ طے کرتا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ اڑنے کے لئے درکار رفتار  $200 \text{ km h}^{-1}$  ہے۔ جہاز کتنے وقت میں اڑ پاتا ہے اور اڑنے سے پہلے یہ زمین پر کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟  
جواب: جہاز  $25$  سیکنڈ بعد اڑتا ہے اور جس دوران یہ  $694 \text{ m}$  فاصلہ طے کرتا ہے۔

سوال 30: جزیرہ ہوائی کی آتش فشاں پہاڑی  $1959$  نومبر کے مہینے میں جزیرہ ہوائی کے ایک آتش فشاں پھٹ پڑا اور ہوا میں  $580 \text{ m}$  کی بلندی تک لاوا اگلنے لگا جو عالمی رکارڈ ہے۔ لاوا کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

### کمپیوٹر کا استعمال

سوال 31 تا سوال 34 میں  $s$  محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام لمحہ  $t$  پر تعین کرتا ہے  $s = f(t)$  دیتا ہے۔ اس تفاعل کو سمتی رفتار تفاعل  $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$  اور تفاعل اسراع  $a = \frac{dv}{dt} = f''(t)$  کے ساتھ اکٹھے ترسیم کریں۔  $v$  اور  $a$  کی قیمتوں اور علامت کے لحاظ سے  $s$  کے رویہ پر بحث کریں۔ بحث میں درج زیر شامل کریں۔

ا. کب جسم لمحاتی طور پر ساکن ہے؟

ب. کب جسم بائیں (یا نیچے) اور کب یہ دائیں (یا اوپر) رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. یہ سمت کو کب تبدیل کرتا ہے؟



## 3.4. ٹکونیاتی تفاعل کا تفرق

د. اس کی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

ه. یہ کب تیز تر اور کب آہستہ تر حرکت کرتا ہے؟

و. مبداءے جسم دور ترین کب ہوتا ہے؟

سوال 31:  $s = 200t - 16t^2$ ,  $0 \leq t \leq 12.5$

سوال 32:  $s = t^2 - 3t + 2$ ,  $0 \leq t \leq 5$   
 جواب: (ا)  $t = 6.25$  s (ب)  $[0, 6.25]$  پر اوپر رخ اور  $(6.25, 12.5]$  پر نیچے رخ؛ (ج)  $t = 6.25$  s؛ (د)  $[0, 6.25]$  پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ  $(6.25, 12.5]$  پر رفتار بڑھتی ہے؛ (ه)  $t = 0, 12.5$  پر تیز تر اور  $t = 6.25$  پر آہستہ ترین؛ (و)  $t = 6.25$  s

سوال 33:  $s = t^3 - 6t^2 + 7t$ ,  $0 \leq t \leq 4$

سوال 34:  $s = 4 - 7t + 6t^2$ ,  $0 \leq t \leq 4$   
 جواب: (ا)  $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$  (ب)  $(\frac{6 - \sqrt{15}}{3}, \frac{6 + \sqrt{15}}{3})$  پر بائیں رخ اور  $(\frac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4]$  پر دائیں رخ؛ (ج)  $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ ؛ (د)  $[0, \frac{6 - \sqrt{15}}{3}) \cup (2, \frac{6 + \sqrt{15}}{3}]$  پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ  $(\frac{6 - \sqrt{15}}{3}, 2) \cup (\frac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4]$  پر رفتار گھٹتی ہے؛ (ه)  $t = 0, 4$  پر تیز ترین اور  $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$  پر آہستہ ترین؛ (و)  $t = \frac{6 + \sqrt{15}}{3}$

## 3.4 ٹکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقیاتی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں چھ ٹکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈین میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر  $\theta$  کی پیمائش ریڈین میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں  $\theta$  ربع اول میں واقع ہے لہذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی  $|\theta|$  ہوگی۔ چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی  $\theta$  سے کم ہے لہذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہذا

$$\sin^2 \theta < \theta^2, \quad (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جاسکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

$$|\sin \theta| < |\theta|, \quad |1 - \cos \theta| < |\theta|$$

یعنی

$$-|\theta| < \sin \theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1 - \cos \theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

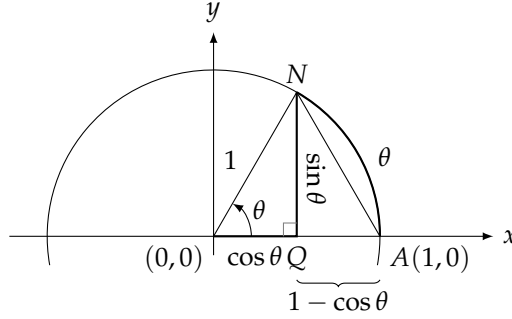
□

مثال 3.27: دکھائیں کہ  $\theta = 0$  پر  $\sin \theta$  اور  $\cos \theta$  استمراری ہیں یعنی:

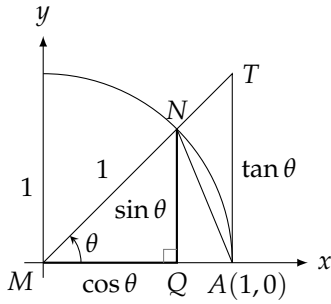
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

حل:  $\theta \rightarrow 0$  کرنے سے  $|\theta|$  اور  $|\theta|$  دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔ یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ بیچ سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔

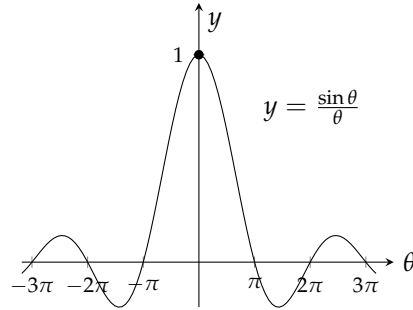
□



شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں  $\theta > 0$  ہے، سے عدم مساوات  $\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$  لکھی جاسکتی ہے۔



شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4



شکل 3.45: تقابل  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  جہاں  $\theta$  کی پیمائش ریڈینز میں ہے۔

تفاعل  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  جہاں  $\theta$  کی پیکش ریڈین میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے  $\theta = 0$  پر قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ اس شکل کے مطابق  $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 1$  ہو گا۔

مسئلہ 3.4:

$$(3.4) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ کی پیکش ریڈین میں ہے})$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔ یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم  $\theta$  کی قیمت مثبت اور  $\frac{\pi}{2}$  سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} < \Delta MAT \text{ رقبہ} < \Delta MAN \text{ رقبہ}$$

ہے۔ ان رقبوں کو  $\theta$  کی صورت

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2} (1) (\sin \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (1)^2 \theta = \frac{\theta}{2}$$

$$\Delta MAT \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2} (1) (\tan \theta) = \frac{1}{2} \tan \theta$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$$

جس کو  $\frac{1}{2} \sin \theta$  سے تقسیم کرنے سے

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

حاصل ہو گا۔ اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1 > \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta$$

چونکہ  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$  ہے لہذا مسئلہ پچ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

آخر میں دھیان رہے کہ  $\sin \theta$  اور  $\theta$  دونوں طاق تفاعل ہیں لہذا  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم  $y$  محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔ اس تشاکلی کی بنائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 148 پر مسئلہ 2.5 کے تحت  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم ٹکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر ٹکونیاتی حد تلاش کیے جاسکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$  ہے۔  
حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے  $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$  لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \quad (\theta = \frac{h}{2}) \\ &= -(1)(0) = 0 \end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل  $y = \sin \theta$  کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\
 &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کو سائن تفاعل ہے۔

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$\begin{aligned}
 y = x^2 - \sin x : \quad \frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق}) \\
 &= 2x - \cos x
 \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}
 y = x^2 \sin x : \quad \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= x^2 \cos x + 2x \sin x
 \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}
 y = \frac{\sin x}{x} : \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\
 &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}
 \end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  ہوتا ہے اور  $\sin x$  کا تفرق  $\cos x$  ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \quad (\text{تفرق کی تعریف}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \quad (\text{مثال 3.28 اور مسئلہ 3.4}) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

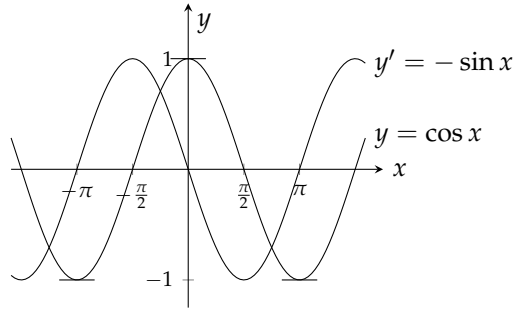
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی  $x = -\pi, 0, \pi$ ) وہاں اس کا تفرق یعنی  $y' = -\sin x$  کی قیمت صفر ہے۔ اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب  $x = -\frac{\pi}{2}$  اور  $x = \frac{\pi}{2}$  پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

ا.

$$\begin{aligned} y &= 5x + \cos x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x \end{aligned}$$



شکل 3.47:  $y = \cos x$  کی ڈیروان تفاعل  $y' = -\sin x$  دیتی ہے۔

ب.

$$\begin{aligned}
 y &= \sin x \cos x \\
 \frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
 &= \cos^2 x - \sin^2 x
 \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\
 &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\
 &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
 &= \frac{1}{1 - \sin x}
 \end{aligned}$$

□



## سادہ ہارمونئی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونئی حرکت کی ایک مثال ہے۔ اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ  $t = 0$  پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔ لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5 \cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned} s &= 5 \cos t && \text{ہم مقام} \\ v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5 \cos t) = 5 \frac{d}{dt}(\cos t) = -5 \sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \sin t) = -5 \frac{d}{dt}(\sin t) = -5 \cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں} \end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ  $s$  محور پر جسم  $s = 5$  اور  $s = -5$  کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا محیط 5 ہے جبکہ اس کی تعدد  $2\pi$  ہے جو  $\cos t$  کی تعدد ہے۔

2. تفاعل  $\sin t$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہوگی جب  $\cos t = 0$  ہوگا۔ یوں جسم کی رفتار  $|v| = 5|\sin t|$  اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہوگی جب  $\cos t = 0$  ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب  $\sin t = 0$  ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب  $\cos t = \pm 1$  ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع  $a = -5 \cos t$  اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب  $\cos t = 0$  ہوگا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔ کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہوگا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہوگا۔ اسراع کی مطلق قیمت مبداء سے دور ترین نقطہ پر زیادہ سے زیادہ ہوگی جہاں  $\cos t = \pm 1$  ہوگا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔ گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق  $\frac{d^3s}{dt^3}$  جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو جھٹکا<sup>33</sup> کہتے ہیں۔ اگر لمحہ  $t$  پر ایک جسم کا مقام  $s = f(t)$  ہو تب لمحہ  $t$  پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

□

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔ اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔ یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{dg}{dt} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j &= \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) \\ &= 5 \sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب  $\sin t = \pm 1$  ہو جو مہدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ  $\sin x$  اور  $\cos x$  متغیر  $x$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس  $x$  پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & \csc x &= \frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x\end{aligned}\tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم  $\tan x$  اور  $\sec x$  کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔ سوال میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33:  $y = \tan x$  کا تفرق تلاش کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad (\text{قاعدہ حاصل تقسیم}) \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر  $y = \sec x$  ہو تب  $y''$  تلاش کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned}
 y &= \sec x \\
 y' &= \sec x \tan x & (3.5 \text{ مساوات}) \\
 y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\
 &= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) & (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\
 &= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\
 &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
 \end{aligned}$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\frac{d}{dx}(3x + \cot x) = 3 + \frac{d}{dx}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{d}{dx}(2 \csc x) = 2 \frac{d}{dx}(\csc x) \\
 &= 2(-\csc x \cot x) = -2 \csc x \cot x
 \end{aligned}$$

□

تکوینیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکوینیاتی تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفریق ہیں لہذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔ اس کا مطلب ہے کہ  $\sin x$  اور  $\cos x$  تمام  $x$  کے لئے استمراری ہیں،  $\tan x$  اور  $\sec x$  تمام  $x$  کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب  $x$  کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  کا عددی صحیح مضرب ہو،  $\csc x$  اور  $\cot x$  تمام  $x$  کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب  $x$

کی قیمت  $\pi$  کا عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تفاعل کے لئے جہاں  $f(c)$  معین ہو وہاں  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  ہو گا۔ نتیجتاً ہم ٹکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

□ مثال 3.36:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  مطمئن ہو گی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \theta = x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1, \theta = 7x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1, \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں  $x \rightarrow 0$  کرنا  $\theta \rightarrow 0$  کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 3.37:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x} \quad (\text{تفاعل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے}) \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\ &= \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

ا.

ب.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) \quad (\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \\ &= \left( \frac{2}{5} \right) \left( \frac{1}{\cos 0} \right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

□

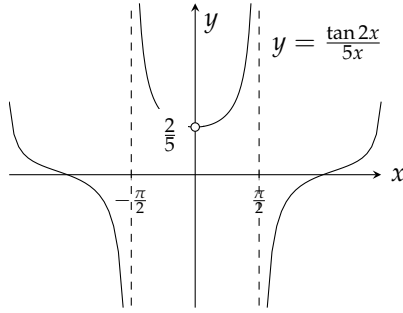
شکل 3.48 سے رجوع کریں۔

مثال 3.38: درج ذیل میں  $\theta = t - \frac{\pi}{2}$  لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔ یوں  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  سے مراد  $\theta \rightarrow 0$  ہو گا۔

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t - \frac{\pi}{2})}{t - \frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

□

احصاء کی میدان کے علاوہ تفاعل  $\frac{\sin x}{x}$  دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔



شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

## سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔

سوال 1:  $y = -10x + 3 \cos x$   
جواب:  $y' = -10 - 3 \sin x$

سوال 2:  $y = \frac{2}{x} + 3 \sin x$

سوال 3:  $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$   
جواب:  $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

سوال 4:  $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال 5:  $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$   
جواب:  $y' = 0$

سوال 6:  $y = (\sin x + \cos x) \sec x$

سوال 7:  $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$   
جواب:  $\frac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$

سوال 8:  $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

سوال 9:  $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$   
جواب:  $4 \tan x \sec x - \csc^2 x$

## 3.4. تکنیکی تفاسل کا تفرق

سوال 10:  $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

سوال 11:  $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$   
جواب:  $x^2 \cos x$

سوال 12:  $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

سوال 13 تا سوال 16 میں  $\frac{ds}{dt}$  تلاش کریں۔

سوال 13:  $s = \tan t - t$   
جواب:  $\sec^2 t - 1$

سوال 14:  $s = t^2 - \sec t + 1$

سوال 15:  $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$   
جواب:  $\frac{-2 \csc t \cot t}{(1 - \csc t)^2}$

سوال 16:  $s = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

سوال 17 تا سوال 20 میں  $\frac{dr}{d\theta}$  تلاش کریں۔

سوال 17:  $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$   
جواب:  $-\theta(\theta \cos \theta + 2 \sin \theta)$

سوال 18:  $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$

سوال 19:  $r = \sec \theta \csc \theta$   
جواب:  $\sec \theta \csc \theta (\tan \theta - \cot \theta) = \sec^2 \theta - \csc^2 \theta$

سوال 20:  $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

سوال 21 تا سوال 24 میں  $\frac{dp}{dq}$  تلاش کریں۔

سوال 21:  $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$   
جواب:  $\sec^2 q$

سوال 22:  $p = (1 + \csc q) \cos q$

سوال 23:  $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$   
جواب:  $\sec^2 q$

سوال 24:  $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

سوال 25: (i)  $y = \csc x$  اور (ب)  $y = \sec x$  کے لئے  $y''$  تلاش کریں۔  
جواب: (i)  $2 \csc^3 x - \csc x$ ، (ب)  $2 \sec^3 x - \sec x$

سوال 26: (i)  $y = -2 \sin x$  اور (ب)  $y = 9 \cos x$  کے لئے  $y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4}$  تلاش کریں۔

سوال 27 تا سوال 32 میں حد تلاش کریں۔

سوال 27:  $\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$   
جواب: 0

سوال 28:  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

سوال 29:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sec\left[\cos x + \pi \tan\left(\frac{\pi}{4 \sec x}\right) - 1\right]$   
جواب: -1

سوال 30:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x}$

سوال 31:  $\lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)$   
جواب: 0

سوال 32:  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \theta}{\sin \theta}\right)$

سوال 33 تا سوال 48 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33:  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$   
جواب: 1

سوال 34:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin kt}{t}$ , ( $k = \text{مستقل}$ )



3.4. تکونیاتی تفاسل کا تفرق

سوال 35:  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y}{4y}$   
جواب:  $3/4$

سوال 36:  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$

سوال 37:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$   
جواب: 2

سوال 38:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\tan t}$

سوال 39:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$   
جواب:  $1/2$

سوال 40:  $\lim_{x \rightarrow 0} 6x^2 \cot x \csc 2x$

سوال 41:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos x}{\sin x \cos x}$   
جواب: 2

سوال 42:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

سوال 43:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$   
جواب: 1

سوال 44:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

سوال 45:  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta}$   
جواب:  $1/2$

سوال 46:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

سوال 47:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$   
جواب:  $3/8$

سوال 48:  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

### مماسی خطوط

سوال 49 تا سوال 52 میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔ تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

سوال 49:  $y = \sin x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi, 0, 3\pi/2$

سوال 50:  $y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, 0, \pi/3$

سوال 51:  $y = \sec x, -\pi/2 < x < \pi/2, x = -\pi/3, \pi/4$

سوال 52:  $y = 1 + \cos x, -3\pi/2 \leq x \leq 2\pi, x = -\pi/3, 3\pi/2$

کیا سوال 53 تا سوال 56 کا دائرہ کار  $0 \leq x \leq 2\pi$  میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

سوال 53:  $y = x + \sin x$

جواب: ہاں، نقطہ  $x = \pi$  پر

سوال 54:  $y = 2x + \sin x$

سوال 55:  $y = x - \cot x$

جواب: نہیں

سوال 56:  $y = x + 2 \cos x$

سوال 57: منحنی  $y = \tan x$  پر  $-\pi/2 < x < \pi/2$  کے سچے وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط  $y = 2x$

کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

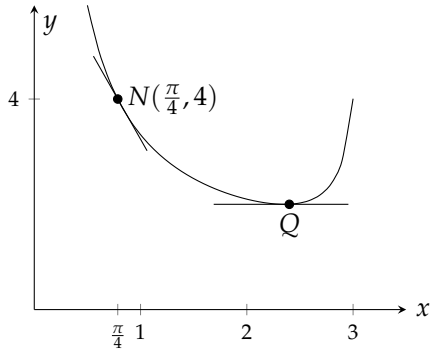
جواب:  $(-\pi/4, -1); (\pi/4, 1)$

سوال 58: منحنی  $y = \cot x, 0 < x < \pi$  پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط  $y = -x$  کے متوازی ہے۔

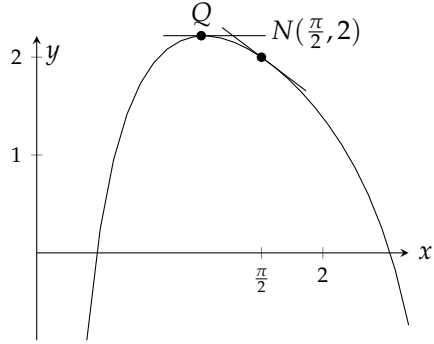
منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 59: نقطہ  $N$  اور نقطہ  $Q$  پر شکل 3.49 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔  $Q$  پر مماس افقی ہے۔

جواب: (i)  $y = -x + \pi/2 + 2$ ، (ب)  $y = 4 - \sqrt{3}$



شکل 3.50:  $y = 1 + \sqrt{2} \csc x + \cot x$  تفاعل کی منحنی (سوال 60)



شکل 3.49:  $y = 4 + \cot x - 2 \csc x$  تفاعل کی منحنی (سوال 59)

سوال 60: نقطہ  $N$  اور نقطہ  $Q$  پر شکل 3.50 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔  $Q$  پر مماس افقی ہے۔

#### سادہ بارمونی حرکت

سوال 61 تا سوال 61 میں محوری لکیر  $s$  پر ایک جسم کا مقام  $s = f(t)$  دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ  $t = \pi/4$  سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال 61:  $s = 2 - 2 \sin t$   
جواب:  $-\sqrt{2} \text{ m s}^{-1}, \sqrt{2} \text{ m s}^{-1}, \sqrt{2} \text{ m s}^{-2}, \sqrt{2} \text{ m s}^{-3}$

سوال 62:  $s = \sin t + \cos t$

#### نظریہ اور مزید مثالیں

سوال 63: کیا  $c$  کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو  $x = 0$  پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

جواب:  $c = 9$

سوال 64: کیا  $b$  کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو  $x = 0$  پر استمراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

سوال 65:  $\frac{d^{999}}{dx^{999}}(\cos x)$  تلاش کریں۔  
جواب:  $\sin x$

سوال 66:  $\frac{d^{725}}{dx^{725}}(\sin x)$  تلاش کریں۔

سوال 67:  $x$  کے لحاظ سے  $\sec x$  (i) اور  $\csc x$  کے تفریق کا کلیہ اخذ کریں

سوال 68:  $x$  کے لحاظ سے  $\cot x$  کے تفریق کا کلیہ اخذ کریں

### کمپیوٹر کا استعمال

سوال 69:  $-\pi \leq x \leq 2\pi$  کے لئے  $y = \cos x$  ترسیم کریں۔ ساتھ ہی  $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$  لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

اب  $h = -1, -0.5, -0.3$  کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ  $h \rightarrow 0^+$  اور  $h \rightarrow 0^-$  کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال 70: وسطی فرق حاصل تقسیم وسطی تفریقی حاصل تقسیم<sup>34</sup>

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

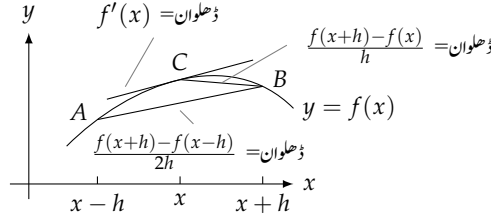
کو اعدادی تراکیب میں  $f'(x)$  کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر  $f'(x)$  موجود ہو تب  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے یہ تعامل کا تفریق دیتی ہے جو  $h$  کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم<sup>35</sup>

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سے بہتر ہوتا ہے (شکل 3.51)۔ (i) یہ دیکھنے کی خاطر کہ  $f(x) = \sin x$  کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے  $f'(x) = \cos x$  تک پہنچتا ہے،  $h = 1, 0.5, 0.3$  لیتے ہوئے وقفہ  $[-\pi, 2\pi]$  پر  $y = \cos x$  اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

centered difference quotient<sup>34</sup>  
Fermat's difference quotient<sup>35</sup>



شکل 3.51: فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم سے وسطی تفریقی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں  $h$  کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔  
(ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ  $f(x) = \cos x$  کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے  $f'(x) = -\sin x$  تک پہنچتا ہے،  
لیتے ہوئے وقفہ  $h = 1, 0.5, 0.3$  پر  $y = -\sin x$  اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں  $h$  کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 71: وسطی تفریقی حاصل تقسیم کے لئے انتہا بعض اوقات  $x$  پر ناقابل تفرق  $f(x)$  کے لئے بھی وسطی تفریقی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کا  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر  $f(x) = |x|$  لیں اور

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ  $x = 0$  پر  $f(x) = |x|$  کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال 72: دائرہ کار  $(-\pi/2, \pi/2)$  پر  $y = \tan x$  اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73: دائرہ کار  $0 < x < \pi$  پر  $y = \cot x$  اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 74: وقفہ  $-2 \leq x \leq 2$  پر  $y = \frac{\sin x}{x}$ ،  $y = \frac{\sin 2x}{x}$  اور  $y = \frac{\sin 4x}{x}$  کو اکٹھے ترسیم کریں۔  $y$  محور کو یہ ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتا نظر آتی ہیں؟ کیا یہ ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟  $x \rightarrow 0$  کرتے ہوئے آپ  $y = \frac{\sin 5x}{x}$

اور  $y = \frac{\sin(-3x)}{x}$  کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟  $k$  کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے  $y = \frac{\sin kx}{x}$  سے کیا توقع کیا جاسکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 75: درجات بالمتقابل ریڈین  $x$  کو درجات میں تبدیل ہونے  $\sin x$  اور  $\cos x$  کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$  کا اندازہ لگائیں۔ اس اندازے کا  $\frac{\pi}{180}$  کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا اس حد کی قیمت  $\frac{\pi}{180}$  کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جاسکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

ج. اب  $\sin x$  کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے  $\sin x$  کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے  $\cos x$  کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے  $\cos x$  کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ہ. بلند درجی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔  $y = \sin x$  اور  $y = \cos x$  کے لئے  $y''$  اور  $y'''$  تلاش کریں۔

### 3.5 زنجیری قاعدہ

ہم  $\sin x$  اور  $x^2 - 4$  کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً  $\sin(x^2 - 4)$  کا تفرق زنجیری قاعدہ<sup>36</sup> کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہوگا۔ احصاء میں تفرق کے حصول کے لئے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

<sup>36</sup> chain rule

مثال 3.39:  $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$  تعامل  $y = 2u$  حقیقتاً تعامل  $u = 3x - 5$  کا مرکب ہے۔ ان تینوں تعامل کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟  
حل: ان تعامل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = 6, \quad \frac{dy}{du} = 2, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

چونکہ  $6 = 2 \cdot 3$  ہے لہذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

□

کیا تعلق

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ایک اتفاق ہے؟ اگر ہم تفرق کو شرح تبدیلی تصور کریں اور  $y = f(u)$ ،  $u = g(x)$  ہوں تب اگر  $u$  سے  $y$  دگنا تبدیل ہوتا ہو اور  $x$  سے  $y$  تین گنا تبدیل ہوتا ہو تب ہم توقع کریں گے کہ  $x$  سے  $y$  چھ گنا تبدیل ہو گا۔

آئیں دوسرا تعامل لے کر دیکھیں۔

مثال 3.40:  $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$  کو  $y = u^2$  اور  $u = 3x^2 + 1$  کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

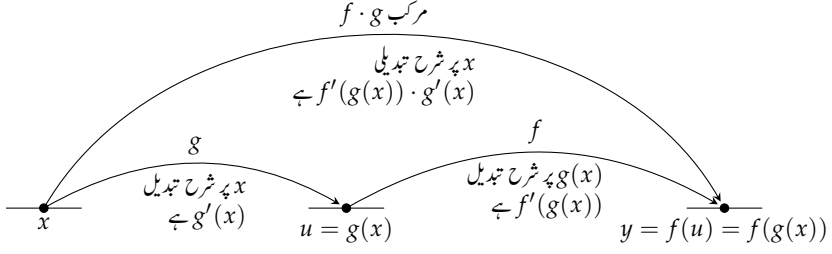
$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں اور ایک بار پھر درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



شکل 3.52:  $g(x)$  پر  $f$  کے تفرق اور  $x$  پر  $g$  کے تفرق کا حاصل ضرب  $x$  پر مرکب  $f \circ g$  کا تفرق دے گا۔

□

$x$  پر مرکب تقابل  $f(g(x))$  کا تفرق  $g(x)$  پر  $f$  کا تفرق اور  $x$  پر  $g$  کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔ اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل 3.52)۔

مسئلہ 3.5: زنجیری قاعدہ

اگر  $u = g(x)$  پر  $f(u)$  قابل تفرق ہو اور  $x$  پر  $g(x)$  قابل تفرق ہو تب  $x$  پر مرکب تقابل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(3.6) \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ہو گا۔ لیمنٹز طرز لکھائی میں اگر  $y = f(u)$  اور  $u = g(x)$  ہوں تب

$$(3.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ہو گا جہاں  $\frac{dy}{du}$  کو  $u = g(x)$  پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدہ کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر  $\Delta x \rightarrow 0$  کرتے ہوئے حد لینے سے زنجیری قاعدے کو ثابت نہیں کیا جاسکتا ہے چونکہ عین ممکن ہے کہ  $x$  میں تبدیل سے  $u$  میں تبدیل  $\Delta u$  صفر ہو۔ زنجیری قاعدہ اگلے باب میں ثابت کیا جائے گا۔



مثال 3.41:  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  کا تفرق تلاش کریں۔  
 حل: یہاں  $y = f(g(x))$  یعنی  $u = x^2 + 1$  اور  $f(u) = \sqrt{u}$  ہیں۔ چونکہ  $f$  اور  $g$  کے تفرق

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ہیں لہذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

□

باہر، اندر قاعدہ

اگر  $y = f(g(x))$  ہو تب مساوات 3.7 درج ذیل کہتی ہے

$$(3.8) \quad \frac{dy}{dx} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

جہاں دائیں طرف  $f$  کی اندرون کو نظر انداز کر کے جوں کا توں رکھ کر  $f$  کا تفرق لے کر اس کو  $f$  کی اندرون کے تفرق کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ یوں پہلے بیرونی تفاعل کا تفرق اور بعد میں اندرونی تفاعل کا تفرق لیا جاتا ہے۔

مثال 3.42:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sin}_{\text{بیرونی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{اندرونی}} = \underbrace{\cos}_{\text{تفرق بیرونی}} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{اندرونی نظر انداز}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{تفرق اندرونی}}$$

□

زنجیری قاعدہ کا بار بار اطلاق

بعض اوقات ہم زنجیری قاعدہ کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.43:  $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$  کا تفرق تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) \quad u = 5 - \sin 2t \text{ لے کر } \tan u \text{ کا تفرق} \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - (\cos 2t) \cdot \frac{d}{dt}(2t)) \quad u = 2t \text{ لے کر } 5 - \sin u \text{ کا تفرق} \\
 &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\
 &= -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t)
 \end{aligned}$$

□

### زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کے کلیات

تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔ اگر  $f$  متغیر  $u$  کا قابل تفرق تفاعل ہو اور  $u$  متغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو تب  $y = f(u)$  کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال کے طور پر اگر  $u$  تغیر  $x$  کا قابل تفرق تفاعل ہو اور  $y = u^n$  ہو جہاں  $n$  عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}(u^n) \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= nu^{n-1} \frac{du}{dx}
 \end{aligned}$$

### قاعدہ 3.8: طاقت کا زنجیری قاعدہ

اگر  $u(x)$  قابل تفرق ہو اور  $n$  عدد صحیح ہو تب  $u^n$  قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$(3.9) \quad \frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

مثال 3.44:

ا.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin^5 x &= 5 \sin^4 x \frac{d}{dx} (\sin x) \\ &= 5 \sin^4 x \cos x\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (2x+1)^{-3} &= -3(2x+1)^{-4} \frac{d}{dx} (2x+1) \\ &= -3(2x+1)^{-4} (2) \\ &= -6(2x+1)^{-4}\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6 \cdot \frac{d}{dx} (5x^3 - x^4) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6 (5 \cdot 3x^2 - 4x^3) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3)\end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3x-2} \right) &= \frac{d}{dx} (3x-2)^{-1} \\ &= -1(3x-2)^{-2} \frac{d}{dx} (3x-2) \\ &= -1(3x-2)^{-2} (3) \\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں متبادل  $\sin^5 x$  استعمال کیا گیا جو  $(\sin x)^5$  لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

مثال 3.45: درجات بالمتبادل ریڈیئن  $\sin x$  کا تفرق اس صورت  $\cos x$  ہو گا جب زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں ہو ناکہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ

ان دونوں میں فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ ریڈیئن  $\pi = 180^\circ$  ہوتا ہے لہذا ریڈیئن  $\frac{\pi x}{180} = x^\circ$  ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos(x^\circ)$$

ہو گا۔ اسی طرح  $\cos(x^\circ)$  کا تفرق  $-\frac{\pi}{180} \sin(x^\circ)$  ہو گا۔

زاویہ کی ناپ درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کی ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا  $\frac{\pi}{180}$  کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی زیادہ آسان ہو گی۔ □

مثال 3.46: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟

حل: ہم پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی  $s$  ہو تب اس کا حجم  $H = s^3$  ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $s$  اور  $H$  متغیر  $t$  (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کے راست متناسب ہے۔ یہ مفروضہ اس لئے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخل ہوتی ہے۔ یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{dH}{ds} = -k(6s^2), \quad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔ تناسب کا مستقل  $k$  مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً آرد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ ابتدائی حجم کو  $H_0$  لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$H = s^3, \quad \frac{dH}{dt} = -k(6s^2)$$

$$H = H_0 \quad \text{پہلے} \quad t = 0$$

$$H = \frac{3}{4}H_0 \quad \text{پہلے} \quad t = 1 \text{ h}$$

اب ہمیں  $H = 0$  پہلے  $t$  تلاش کرنا ہو گا۔

ہم  $H = s^3$  کا تفرق زنجیری قاعدہ سے  $t$  کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{dH}{dt} = 3s^2 \frac{ds}{dt}$$

تبدیلی کی شرح  $-k(6s^2)$  کے برابر پر کرتے ہوئے

$$3s^2 \frac{ds}{dt} = -6ks^2$$

$$\frac{ds}{dt} = -2k$$

حاصل کرتے ہیں۔ اطراف کی لمبائی مستقل شرح  $2k$  سے کم ہو رہی ہے۔ یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی  $s_0$  ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی  $s_1 = s_0 - 2k$  ہو گی جس سے

$$2k = s_0 - s_1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پگھلنے کا وقت  $2kt = s_0$  سے حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی:

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}} = (\frac{3}{4})^{1/3} \approx 0.91$$

ہے لہذا پگھلنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{1}{1 - 0.91} \approx 11 \text{ h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر  $\frac{1}{4}$  حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لئے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتی۔ ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور اس کو مزید بہتر کس طرح بنایا جاسکتا ہے۔

### سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں  $y = f(u)$  اور  $u = g(x)$  دیے گئے ہیں۔  $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$  تلاش کریں۔

سوال 1:  $y = 6u - 9$ ,  $u = \frac{1}{2}x^4$   
جواب:  $12x^3$

سوال 2:  $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

سوال 3:  $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$   
جواب:  $3 \cos(3x + 1)$

سوال 4:  $y = \cos u, \quad u = -\frac{x}{3}$

سوال 5:  $y = \cos u, \quad u = \sin x$   
جواب:  $-\sin(\sin x) \cos x$

سوال 6:  $y = \sin u, \quad u = x - \cos x$

سوال 7:  $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$   
جواب:  $10 \sec^2(10x - 5)$

سوال 8:  $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

سوال 9 تا سوال 18 میں تقابل کو  $y = f(u)$  اور  $u = g(x)$  صورت میں لکھ کر  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔

سوال 9:  $y = (2x + 1)^{-7}$   
جواب:  $u = 2x + 1$  لیتے ہوئے  $y = u^5$  اور  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$  ہو گا۔

سوال 10:  $y = (4 - 3x)^9$

سوال 11:  $y = (1 - \frac{x}{7})^{-7}$   
جواب:  $u = (1 - x/7)$  لے کر،  $y = u^{-7}$ ،  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot (\frac{1}{7}) = (1 - x/7)^{-8}$ ،

سوال 12:  $y = (\frac{x}{2} - 1)^{-10}$

سوال 13:  $y = (\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x})^4$   
جواب:  $u = x^2/8 + x - 1/x$  لے کر،  $y = u^4$ ،  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 4(x^2/8 + x - 1/x)^3(x/4 + 1 + 1/x^2)$

سوال 14:  $y = (\frac{x}{5} + \frac{1}{5x})^5$

سوال 15:  $y = \sec(\tan x)$   
جواب:  $u = \tan x$  لے کر  $y = \sec u$  اور

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x) = \sec(\tan x) \tan(\tan x) \sec^2 x$

سوال 16:  $y = \cos(\pi - \frac{1}{x})$

سوال 17:  $y = \sin^3 x$   
 جواب:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 3u^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x$  اور  $y = u^3$  کے لئے  $u = \sin x$

سوال 18:  $y = 5 \cos^{-4} x$

سوال 19 تا سوال 38 میں تقابل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 19:  $p = \sqrt{3-t}$   
 جواب:  $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$

سوال 20:  $q = \sqrt{2r-r^2}$

سوال 21:  $s = \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \cos 5t$   
 جواب:  $\frac{4}{\pi} (\cos 3t - \sin 5t)$

سوال 22:  $s = \sin(\frac{3\pi t}{2}) + \cos(\frac{3\pi t}{2})$

سوال 23:  $r = (\csc \theta + \cot \theta)^{-1}$   
 جواب:  $\frac{\csc \theta}{\cot \theta + \csc \theta}$

سوال 24:  $r = -(\sec \theta + \tan \theta)^{-1}$

سوال 25:  $y = x^2 \sin^4 x + x \cos^{-2} x$   
 جواب:  $2x \sin^4 x + 4x^2 \sin^3 x \cos x + \cos^{-2} x + 2x \cos^{-3} x \sin x$

سوال 26:  $y = \frac{1}{x} \sin^{-5} x - \frac{x}{3} \cos^3 x$

سوال 27:  $y = \frac{1}{21} (3x-2)^7 + (4 - \frac{1}{2x^2})^{-1}$   
 جواب:  $(3x-2)^6 - \frac{1}{x^3(4 - \frac{1}{2x^2})^2}$

سوال 28:  $y = (5-2x)^{-3} + \frac{1}{8} (\frac{2}{x} + 1)^4$

سوال 29:  $y = (4x+3)^4 (x+1)^{-3}$   
 جواب:  $\frac{(4x+3)^3 (4x+7)}{(x+1)^4}$

سوال 30:  $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$

سوال 31:  $h(x) = x \tan(2\sqrt{x}) + 7$   
جواب:  $\sqrt{x} \sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$

سوال 32:  $k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$

سوال 33:  $f(\theta) = \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}\right)^2$   
جواب:  $\frac{2 \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2}$

سوال 34:  $g(t) = \left(\frac{1 + \cot t}{\sin t}\right)^{-1}$

سوال 35:  $r = \sin(\theta^2) \cos(2\theta)$   
جواب:  $\frac{dr}{d\theta} = -2 \sin(\theta^2) \sin 2\theta + 2\theta \cos(2\theta) \cos(\theta^2)$

سوال 36:  $r = \sec \sqrt{\theta} \tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$

سوال 37:  $q = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$   
جواب:  $\frac{dq}{dt} = \left(\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}}\right) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$

سوال 38:  $q = \cot\left(\frac{\sin t}{t}\right)$

سوال 39 تا سوال 48 میں تلاش کریں۔  $\frac{dy}{dt}$

سوال 39:  $y = \sin^2(\pi t - 2)$   
جواب:  $2\pi \sin(\pi t - 2) \cos(\pi t - 2)$

سوال 40:  $y = \sec^2 \pi t$

سوال 41:  $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$   
جواب:  $\frac{8 \sin 2t}{(1 + \cos 2t)^5}$

سوال 42:  $y = (1 + \cot\left(\frac{t}{2}\right))^{-2}$

سوال 43:  $y = \sin(\cos(2t - 5))$   
جواب:  $-2 \cos(\cos(2t - 5)) \sin(2t - 5)$



سوال 44:  $y = \cos(5 \sin(\frac{t}{3}))$

سوال 45:  $y = (1 + \tan^4(\frac{t}{12}))^3$   
جواب:  $(1 + \tan^4(\frac{t}{12}))^2 (\tan^3(\frac{t}{12}) \sec^2(\frac{t}{12}))$

سوال 46:  $y = \frac{1}{6}(1 + \cos^2(7t))^3$

سوال 47:  $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$   
جواب:  $\frac{-t \sin(t^2)}{\sqrt{1 + \cos(t^2)}}$

سوال 48:  $y = 4 \sin(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$

سوال 49 تا سوال 52 میں  $y''$  تلاش کریں۔

سوال 49:  $y = (1 + \frac{1}{x})^3$   
جواب:  $\frac{6}{x^3}(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{2}{x})$

سوال 50:  $y = (1 - \sqrt{x})^{-1}$

سوال 51:  $y = \frac{1}{9} \cot(3x - 1)$   
جواب:  $2 \csc^2(3x - 1) \cot(3x - 1)$

سوال 52:  $y = 9 \tan(\frac{x}{3})$

تفرق کی اعدادی قیمتوں کا حصول

سوال 53 تا سوال 58 میں  $x$  کی دی گئی قیمت پر  $(f \circ g)'$  تلاش کریں۔

سوال 53:  $f(u) = u^5 + 1$ ,  $u = g(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$   
جواب:  $\frac{5}{2}$

سوال 54:  $f(u) = 1 - \frac{1}{u}$ ,  $u = g(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $x = -1$

سوال 55:  $f(u) = \cot \frac{\pi u}{10}$ ,  $u = g(x) = 5\sqrt{x}$ ,  $x = 1$   
جواب:  $-\pi/4$

سوال 56:  $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}$ ,  $u = g(x) = \pi x$ ,  $x = \frac{1}{4}$

سوال 57:  $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}$ ,  $u = g(x) = 10x^2 + x + 1$ ,  $x = 0$  جواب: 0

سوال 58:  $f(u) = (\frac{u-1}{u+1})^2$ ,  $u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ ,  $x = -1$

سوال 59: فرض کریں کہ قاعل  $f$  اور  $g$  اور  $x$  کے لحاظ سے ان کے تفریق کا  $x = 2$  اور  $x = 3$  پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	$2\pi$	5

درج ذیل میں دیے گئے  $x$  پر قاعل کے تفریق کی قیمت تلاش کریں۔

ا.  $2f(x)$ ,  $x = 2$  .

ب.  $f(x) + g(x)$ ,  $x = 3$  .

ج.  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $x = 3$  .

د.  $f(x)/g(x)$ ,  $x = 2$  .

ه.  $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ ,  $x = 2$  .

جواب: (ا)  $2/3$ ، (ب)  $2\pi + 5$ ، (ج)  $-8\pi$ ، (د)  $37/6$ ، (ه)  $-1$ ، (و)  $\frac{\sqrt{2}}{24}$ ، (ز)  $5/32$ ، (ح)  $\frac{-5}{3\sqrt{17}}$

سوال 60: فرض کریں کہ قاعل  $f$  اور  $g$  اور  $x$  کے لحاظ سے ان کے تفریق کا  $x = 0$  اور  $x = 1$  پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$1/3$
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

درج ذیل میں دیے گئے  $x$  پر قاعل کے تفریق کی قیمت تلاش کریں۔

ا.  $5f(x) - g(x)$ ,  $x = 1$  .

ب.  $f(x)g^3(x)$ ,  $x = 0$  .

ج.  $\frac{f(x)}{g(x)+1}$ ,  $x = 1$  .

د.  $f(g(x))$ ,  $x = 0$  .

ه.  $x=0 \ f(x+g(x))$ , .

و.  $(x^{11} + f(x))^{-2}$ ,  $x = 1$  .

ز.  $x=0 \ g(f(x))$ , .

سوال 61: اگر  $s = \cos \theta$  اور  $\frac{ds}{dt} = 5$  ہوں تب  $\theta = 3\pi/2$  پر  $\frac{ds}{dt}$  تلاش کریں۔  
جواب: 5

سوال 62: اگر  $y = x^2 + 7x - 5$  اور  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$  ہوں تب  $x = 1$  پر  $\frac{dy}{dt}$  تلاش کریں۔

### مرکب کئے کئی صورتیں

اگر مرکب تقابل کو مختلف انداز میں لکھنا ممکن ہو تب کیا ہوگا؟ کیا ہر صورت سے ایک جیسا تفرق حاصل ہوگا؟ زنجیری قاعدہ کہتا ہے کہ ایسا ہی ہوگا۔ اگلے دو سوالات میں اس عمل کو دیکھیں۔

سوال 63: تقابل  $y = x$  کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔

ا.  $y = \frac{u}{5} + 7, \quad u = 5x - 35$

ب.  $y = 1 + \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{x-1}$

جواب: (ا) 1، (ب) 1

سوال 64: تقابل  $y = x^{3/2}$  کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔

ا.  $y = u^3, \quad u = \sqrt{x}$

ب.  $y = \sqrt{u}, \quad u = x^3$

### مماس اور ڈھلوان

سوال 65:

ا.  $x = 1$  پر منحنی  $y = 2 \tan(\pi x/4)$  کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

ب. وقفہ  $-2 < x < 2$  پر منحنی کی ڈھلوان کی کم سے کم قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا)  $y = \pi x + 2 - \pi$ ، (ب)  $\pi/2$

سوال 66:

ا. مبداء پر  $y = \sin 2x$  اور  $y = -\sin \frac{x}{2}$  کے مماس کی مساواتیں تلاش کریں۔ کیا ان مماس کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا مبدا پر  $y = \sin mx$  اور  $y = -\sin \frac{x}{m}$  کی ماسوں کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے جہاں مستقل  $m \neq 0$  ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ج. کسی بھی دیے گئے  $m$  کے لئے  $y = \sin mx$  اور  $y = -\sin \frac{x}{m}$  کی زیادہ سے زیادہ ڈھلوان کیا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. وقفہ  $[0, 2\pi]$  پر تفاعل  $y = \sin x$  ایک چکر پورا کرتا ہے، تفاعل  $y = \sin 2x$  دو چکر پورے کرتا ہے، تفاعل  $y = \sin \frac{x}{2}$  آدھا چکر پورا کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ کیا اس وقت پر تفاعل  $y = \sin mx$  کے مکمل چکر اور مبدا پر تفاعل کی ڈھلوان کا آپس میں کوئی تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال 67: مشین کا بہت تیز چلنا ایک گاڑی کی انجن کا پیسٹن<sup>37</sup> اوپر نیچے دوری حرکت کرتا ہے جس کو

$$s = A \cos(2\pi bt)$$

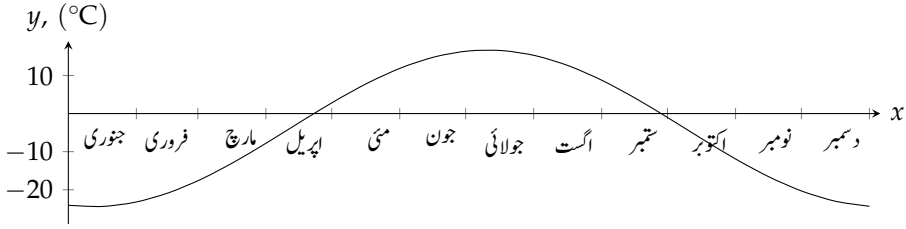
لکھا جاسکتا ہے جہاں لمحہ  $t$  پر پیسٹن کا مقام  $s$  ہے جبکہ  $A$  اور  $b$  مثبت مستقل ہیں۔ حرکت کا حیظ  $A$  اور اس کی تعدد (ایک سیکنڈ میں اوپر نیچے حرکت کی گنتی)  $b$  ہے۔ تعدد دگنا کرنے سے پیسٹن کی سمتی رفتار، اسراع اور جھٹکا پر کیا اثر ہو گا؟ (یہ جاننے کے بعد آپ سمجھ سکتے ہیں کہ مشین تیز چلانے سے کیوں خراب ہوتی ہے۔) جواب: سمتی رفتار دگنی، اسراع چار گنا اور جھٹکا آٹھ گنا ہو جاتا ہے۔

سوال 68: قطب شمالی کے نزدیک ایلاسکا کے ایک شہر میں درجہ حرارت ایلاسکا<sup>38</sup> کے ایک شہر میں پورے سال کے ہر دن کے اوسط درجہ حرارت کو شکل 3.53 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو درج ذیل تفاعل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$y = 20.56 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] - 3.89$$

ا. کس دن درجہ حرارت تیز ترین تبدیل ہوتا ہے؟

ب. ایک دن میں درجہ حرارت کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کتنی ہے؟



شکل 3.53: اوسط درجہ حرارت

سوال 69: محور کلیپر پر ایک جسم کا مقام  $s = \sqrt{1+4t}$  ہے جہاں  $t$  کی اکائی سیکنڈ اور  $s$  کی اکائی میٹر ہے۔ لمحہ  $t = 6$  s پر اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع کیا ہیں؟  
جواب:  $v = 0.4 \text{ m s}^{-1}$ ,  $a = -\frac{4}{125} \text{ m s}^{-2}$

سوال 70: ساکن حال کے  $t$  سیکنڈ بعد ایک گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار  $v = k\sqrt{s} \text{ m s}^{-1}$  ہے جہاں  $k$  مستقل اور ساکن مقام سے فاصلہ  $s$  ہے۔ دکھائیں کہ جسم کی اسراع مستقل ہے۔

سوال 71: زمین کی فضا میں داخل ہونے والے شہاب ثاقب کی سمتی رفتار  $\sqrt{s}$  کے بالعمد متناسب ہے جہاں  $s$  زمین کی وسط سے شہاب ثاقب کا فاصلہ  $s$  ہے۔ دکھائیں کہ شہاب ثاقب کی اسراع  $s^2$  کے بالعمد متناسب ہے۔

سوال 72:  $x$  محور پر حرکت کرنے والے ایک ذرہ کی سمتی رفتار  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  ہے۔ دکھائیں کہ اس ذرہ کی اسراع  $f(x)f'(x)$  ہے۔

سوال 73: لٹکن کا دوری عرصہ بالمقابل درجہ حرارت ایک لٹکن جس کی لمبائی  $L$  ہو کا دوری عرصہ  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  ہو گا جہاں لٹکن کے مقام پر ثقلی اسراع کو  $g$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں  $T$  کی اکائی سیکنڈ اور  $L$  کی اکائی میٹر ہے۔ اگر لٹکن کسی دھات سے بنا ہو تب اس کی لمبائی درجہ حرارت کے ساتھ درج ذیل کلیہ کے تحت تبدیل ہوگی

$$\frac{dL}{du} = kL$$

جہاں درجہ حرارت کو  $u$  سے ظاہر کیا گیا ہے اور  $k$  مستقل ہے۔ دکھائیں کہ حرارت کے ساتھ دوری عرصہ تبدیل ہونے کی شرح  $\frac{kT}{2}$  ہوگی۔

سوال 74: اگر  $f(x) = x^2$  اور  $g(x) = |x|$  ہوں تب مرکبات

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{اور} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

دونوں  $x = 0$  پر قابل تفرق ہیں اگرچہ  $x = 0$  پر  $g$  از خود قابل تفرق نہیں ہے۔ کیا یہ زنجیری قاعدہ کے مترادف ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 75: فرض کریں  $x = 1$  پر  $u = g(x)$  قابل تفرق ہے اور  $u = g(1)$  پر  $y = f(u)$  قابل تفرق ہے۔ اگر  $x = 1$  پر  $y = f(g(x))$  کے معنی کا مماس افقی ہو تب کیا  $x = 1$  پر  $g$  کے مماس یا  $u = g(1)$  پر  $f$  کے مماس کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 76: فرض کریں کہ  $x = -5$  پر  $u = g(x)$  قابل تفرق ہے اور  $u = g(-5)$  پر  $y = f(u)$  قابل تفرق ہے اور  $(f \circ g)'(-5)$  منفی ہے۔ کیا  $g'(-5)$  اور  $f'(g(-5))$  کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے۔

زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اگلے دو سوالات میں دیے گئے تفاعل  $x^n$  کے لئے دکھائیں کہ طاقنی قاعدہ  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$  مطمئن ہوتا ہے۔

$$\text{سوال 77: } x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$\text{سوال 78: } x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$$

### کمپیوٹر کا استعمال

سوال 79:  $y = \sin 2x$  کا تفرق وقفہ  $-2 \leq x \leq 3.5$  کے لئے تفاعل  $y = 2 \cos 2x$  ترسیم کریں۔ ساتھ ہی  $h = 1, 0.5, 0.2$  کے لئے

$$y = \frac{\sin 3(x+h) - \sin 2x}{h}$$

ترسیم کریں۔ کی دیگر (بشمول منفی) قیمتوں کے لئے بھی اس کو ترسیم کریں۔  $h \rightarrow 0$  کرتے ہوئے آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اس کی وجہ پیش کریں۔

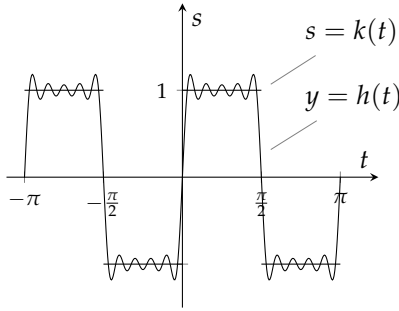
سوال 80: درج ذیل کثیر رکنی کو شکل 3.54 میں دکھایا گیا ہے جو وقفہ  $[-\pi, \pi]$  پر تقریباً دندان موج  $s = g(t)$  نظر آتا ہے۔

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662 \cos 2t - 0.07074 \cos 6t - 0.02546 \cos 10t - 0.01299 \cos 14t$$

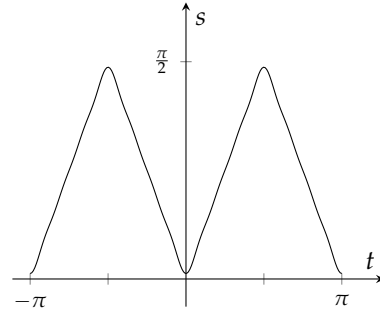
جہاں دندان موج معین ہو وہاں اس کثیر رکنی کا تفرق دندان موج کی تفرق کو کتنا خوش اسلوبی سے ظاہر کرتا ہے؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ  $[-\pi, \pi]$  پر  $\frac{dg}{dt}$  (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. تلاش کر کے ترسیم کریں۔  $\frac{df}{dt}$



شکل 3.55: سیڑھی تفاعل  $s = k(t)$  کا  $s = h(t)$  کثیر رکنی سے اظہار (سوال 81)



شکل 3.54: دندان موج کا کثیر رکنی سے اظہار (سوال 80)

ج. کہاں پر  $\frac{dg}{dt}$  کو  $\frac{df}{dt}$  بہتر ظاہر کرتا ہے؟ کہاں خراب ترین ظاہر کرتا ہے؟ ٹکوئیاتی تفاعل سے عموماً مختلف تفاعل کو ظاہر کیا جاتا ہے البتہ جیسے اگلا سوال میں ظاہر ہو گا اصل تفاعل کے تفرق کو عموماً ان کثیر رکنی کے تفرق سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا ہے۔

سوال 81: گزشتہ سوال میں دندان موج کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا جہاں ہم نے دیکھا کہ دندان موج کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر کرتا ہے۔ آئیں اب ایسا تفاعل دیکھیں جس کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے البتہ تفاعل کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر نہیں کرتا ہے۔ شکل 3.55 میں سیڑھی تفاعل کو درج ذیل کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$s = h(t) = 1.2732 \sin 2t + 0.4244 \sin 6t + 0.25465 \sin 10t + 0.18186 \sin 14t + 0.14147 \sin 18t$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ کثیر رکنی کا تفرق ہر گز سیڑھی تفاعل کا تفرق نہیں دیتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

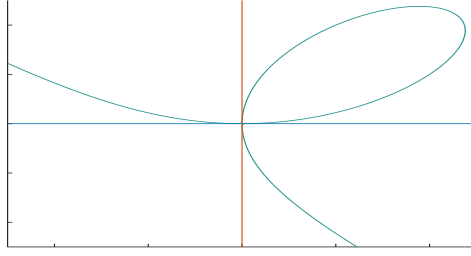
ا. وقفہ  $[-\pi, \pi]$  پر  $\frac{dk}{dt}$  (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب.  $\frac{dh}{dt}$  ترسیم کریں۔

ج. نتائج کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

### 3.6 خفی تفرق اور مناطق قوت نما

بعض اوقات مساوات  $F(x, y) = 0$  کو  $y = f(x)$  روپ میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ اس کے باوجود ہم  $\frac{dy}{dx}$  کو خفی تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اس حصہ میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا اور اس کے ذریعہ طاقتی قاعدہ کو وسعت دیتے ہوئے تمام مناطق تفاعل کو شامل کیا جائے گا۔



شکل 3.56: خفی معنی  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$  جس کو پتا بھی کہتے ہیں۔

### خفی تفرق

چونکہ مساوات  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$  درحقیقت تین تفاعل  $y = f_1(x)$ ،  $y = f_2(x)$  اور  $y = f_3(x)$  کا ملاپ ہے جو ماسوائے نقطہ  $M$  اور  $A$  کے قابل تفرق ہیں لہذا اس کے ترسیم کا تقریباً ہر نقطے پر اچھی طرح معین ڈھلوان پایا جاتا ہے (شکل 3.56)۔ خفی تفاعل کا تفرق لینے کی خاطر  $y$  کو  $x$  کا تفاعل تصور کرتے ہوئے قواعد برائے قوت نما، طاقت، مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور زنجیری قاعدہ زیر استعمال لائے جاتے ہیں۔ اس کے بعد  $\frac{dy}{dx}$  کے لئے حل کرتے ہوئے کسی بھی نقطہ  $(x, y)$  پر تفرق حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اس ترکیب کو خفی تفرق<sup>39</sup> کہتے ہیں۔

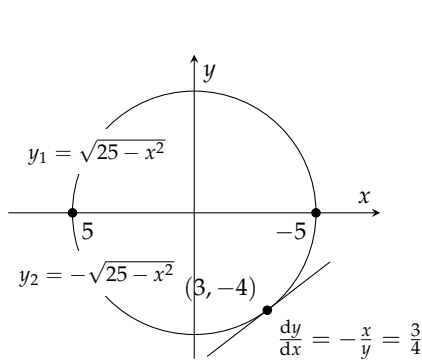
مثال 3.47:  $y^2 = x$  ہے۔  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔  
 حل: مساوات  $y^2 = x$  درحقیقت دو تفاعل  $y_1 = \sqrt{x}$  اور  $y_2 = -\sqrt{x}$  کو ظاہر کرتی ہے جہاں جذر کی مثبت قیمت لی جاتی ہے۔ ہم  $x > 0$  کے لئے ان دونوں تفاعل کا تفرق لینا جانتے ہیں۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

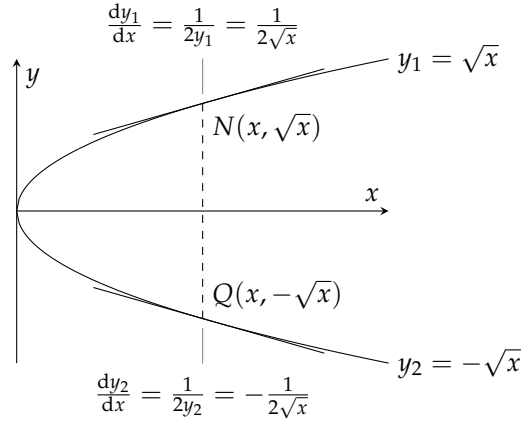
آئیں اب اس مساوات کو دو تفاعل میں تقسیم کیے بغیر اس کا تفرق حاصل کریں۔ ہم  $y$  کو  $x$  کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا  $x$  کے لحاظ سے تفرق زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں  $f(x) = y^2$  لکھ کر  $\frac{df}{dx} = 2y$  لکھا جا سکتا ہے لہذا

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned} \quad \text{زنجیری قاعدہ}$$





شکل 3.58: ترسیم برائے مثال 3.48



شکل 3.57: ترسیم برائے مثال 3.47

ہو گا۔ یہ کلیہ دونوں صریح تقابل  $y_1 = \sqrt{x}$  اور  $y_2 = -\sqrt{x}$  کا تفرق دیتا ہے۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

مثال 3.48: نقطہ  $(3, -4)$  پر دائرہ  $x^2 + y^2 = 25$  کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.58)۔  
 حل: دائرہ در حقیقت دو قابل تفرق تقابل  $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$  اور  $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$  کو ظاہر کرتا ہے۔ نقطہ  $(3, -4)$  تقابل  $y_2$  پر پایا جاتا ہے لہذا ہم صریحاً ڈھلوان تلاش کر سکتے ہیں:

$$(3.10) \quad \left. \frac{dy_2}{dx} \right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

ہم دائرے کی مساوات کا  $x$  کے لحاظ سے خفی تفرق

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

لے کر  $(3, -4)$  پر ڈھلوان کی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3, -4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

دھیان رہے کہ مساوات 3.10 صرف  $x$  محور کے نیچے جوابات دیتی ہے جبکہ درج بالا تمام نقطوں پر قابل استعمال ہے۔ خفی تفرق کی قیمت عموماً  $x$  اور  $y$  دونوں پر منحصر ہوتی ہے جبکہ صریحاً حاصل تفرق کے کلیہ میں صرف  $x$  درکار ہو گا۔ □

دیگر خفی تفاعل کا تفرق بھی درج بالا دو مثالوں کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ ہم  $y$  کو  $x$  کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف تفرق کے قواعد استعمال کرتے ہیں۔

مثال 3.49:  $2y = x^2 + \sin y$  کے لئے  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned} 2y &= x^2 + \sin y \\ \frac{d}{dx}(2y) &= \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y) \\ &= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y) \\ 2\frac{dy}{dx} &= 2x + \cos y \frac{dy}{dx} \\ 2\frac{dy}{dx} - \cos y \frac{dy}{dx} &= 2x \\ \frac{dy}{dx}(2 - \cos y) &= 2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{2 - \cos y} \end{aligned}$$

□

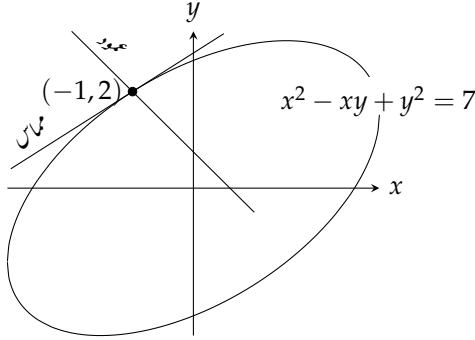
خفی تفرق چار اقدام پر مشتمل ہے۔

1.  $y$  کو  $x$  کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کو تفرق کے قواعد کے مطابق تفرق کریں۔

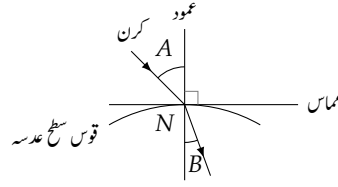
2.  $\frac{dy}{dx}$  والے اجزاء کو ایک طرف اکٹھا کریں۔

3.  $\frac{dy}{dx}$  کو تجزی کریں۔

4.  $\frac{dy}{dx}$  کے لئے حل کریں۔



شکل 3.60: ترسیات برائے مثال 3.50



شکل 3.59: عدسہ میں کرن داخل ہوتے ہوئے عمودی طرف جھکتی ہے۔

عدسہ، مماس اور عمودی خطوط

روشنی کی کرن عدسہ میں نقطہ  $N$  پر داخل ہوتے ہوئے سمت تبدیل کرتی ہے (شکل 3.59)۔ مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی خط کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ  $N$  پر منحنی کے مماس کے ساتھ قائمہ خط کو **عمودی**<sup>40</sup> کہتے ہیں۔ اس خط کو  $N$  پر منحنی کا **عمود** کہتے ہیں۔

□

عدسہ کی سطح پر تبصرہ عموماً دو درجی منحنیات کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ ان منحنیات کے مماس اور عمود کو خفی تفرق سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.50: نقطہ  $(-1, 2)$  پر منحنی  $x^2 - xy + y^2 = 7$  کا مماس اور عمود تلاش کریں (شکل 3.60)۔  
حل: ہم خفی تفرق سے  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 x^2 - xy + y^2 &= 7 \\
 \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(7) \\
 2x - (x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx}) + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\
 (2y - x) \frac{dy}{dx} &= y - 2x \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{y - 2x}{2y - x}
 \end{aligned}$$

نقطہ  $(x, y) = (-1, 2)$  پر ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(-1,2)} = \left. \frac{y - 2x}{2y - x} \right|_{(-1,2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$

$(-1, 2)$  پر مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{4}{5}(x - (-1))$$

$$y = \frac{4}{5} + \frac{14}{5}$$

اسی طرح منحنی کا عمود نقطہ  $(-1, 2)$  پر حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 - \frac{5}{4}(x - (-1))$$

$$y = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}$$

□

خفی تفرق سے بلند درجی تفرق کا حصول

خفی تفرق سے بلند درجی تفرق حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.51:  $2x^3 - 3y^2 = 7$  کے لئے  $\frac{d^2y}{dx^2}$  تلاش کریں۔  
حل: ہم دونوں اطراف کا  $x$  کے لحاظ سے تفرق حاصل کرتے ہوئے پہلے  $\frac{dy}{dx}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$2x^3 - 3y^2 = 7$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$$y' = \frac{x^2}{y} \quad (y \neq 0 \text{ اگر})$$

ہم اب مساوات  $x^2 - yy' = 0$  کا تفرق لیتے ہوئے  $y''$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(yy') = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x - y'y' - yy'' = 0$$

$$yy'' = 2x - (y')^2$$

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(y')^2}{y} \quad (y \neq 0 \text{ اگر})$$

ہم آخر میں  $y' = \frac{x^2}{y}$  پر کرتے ہوئے  $x$  اور  $y$  کی روپ میں  $y''$  حاصل کرتے ہیں۔

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(x^2/y)^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \quad (y \neq 0 \text{ اگر})$$

□

قابل تفرق تفاعل کے ناطق طاقت

ہم جانتے ہیں کہ طاقتی قاعدہ

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

عدد صحیح  $n$  کے لئے درست ہے۔ ہم اب دکھاتے ہیں کہ یہ قاعدہ کسی بھی ناطق عدد کے لئے درست ہے۔

مسئلہ 3.6: ناطق طاقت کے لئے طاقتی قاعدہ

اگر ناطق عدد ہو تب  $x^{n-1}$  کے دائرہ کار کے ہر اندرونی نقطہ  $x$  پر  $x^n$  قابل تفرق ہوگا اور یہ تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ثبوت: فرض کریں  $p$  اور  $q$  عدد صحیح ہیں جہاں  $q > 0$  اور  $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$  ہے۔ تب

$$y^q = x^p$$

ہو گا۔ یہ مساوات اور کے طاقتوں کا ملاپ ہے لہذا (اس حصہ کے ابتدا میں اعلیٰ مسئلہ کے تحت)  $y$  متغیر  $x$  کا قابل تفریق تفاعل ہو گا۔ چونکہ  $p$  اور  $q$  عدد صحیح ہیں (جن کے لئے ہمارے پاس قاعدہ طاقت ہے) ہم خفی مساوات کے دونوں اطراف کا  $x$  کے لحاظ سے تفریق لے سکتے ہیں:

$$qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

اب اگر  $y \neq 0$  ہو تب دونوں اطراف کو  $qy^{q-1}$  سے تقسیم کیا جاسکتا ہے:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{(p/q)})^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1} \end{aligned}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.52:

ا.

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{تفاعل } x \geq 0 \text{ جبکہ تفریق } x > 0 \text{ کے لئے معین ہے}$$

ب.

$$\frac{d}{dx}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5} \quad \text{تفاعل تمام } x \text{ جبکہ تفریق } x \neq 0 \text{ کے لئے معین ہے}$$

□

طاقق قاعدہ کی ایک روپ جس میں زنجیری قاعدہ ضم ہے کہتا ہے کہ اگر  $n$  ناطق عدد ہو اور  $x$  پر  $u$  قابل تفرق ہو اور  $(u(x))^{n-1}$  معین ہو تب  $x$  پر  $u^n$  قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$(3.11) \quad \frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

مثال 3.53:

ا.

$$\frac{d}{dx} (1-x^2)^{1/4} = \frac{1}{4} (1-x^2)^{-3/4} (-2x)$$

تفاعل وقفہ  $[-1, 1]$  جبکہ تفرق وقفہ  $(-1, 1)$  پر معین ہے۔

ب.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} \frac{d}{dx} (\cos x) \\ &= -\frac{1}{5} (\cos x)^{-6/5} (-\sin x) \\ &= \frac{1}{5} \sin x (\cos x)^{-6/5} \end{aligned}$$

□

سوالات

ناطق طاقتوں کا تفرق

سوال 1 تا سوال 10 میں  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں۔

سوال 1:  $y = x^{9/4}$   
جواب:  $\frac{9}{4} x^{5/4}$

سوال 2:  $y = x^{-3/5}$

سوال 3:  $y = \sqrt[3]{2x}$   
جواب:  $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

سوال 4:  $y = \sqrt[4]{5x}$

سوال 5:  $y = 7\sqrt{x+6}$   
جواب:  $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

سوال 6:  $y = -2\sqrt{x-1}$

سوال 7:  $y = (2x+5)^{-1/2}$   
جواب:  $-(2x+5)^{-3/2}$

سوال 8:  $y = (1-6x)^{2/3}$

سوال 9:  $y = x(x^2+1)^{1/2}$   
جواب:  $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

سوال 10:  $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

سوال 11 تا سوال 18 میں پہلا تفریق تلاش کریں۔

سوال 11:  $s = \sqrt[7]{t^2}$   
جواب:  $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

سوال 12:  $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

سوال 13:  $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$   
جواب:  $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3} \cos[(2t+5)^{-2/3}]$

سوال 14:  $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

سوال 15:  $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$   
جواب:  $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$



3.6. خفی تفرق اور ناظم قوت نم

سوال 16:  $g(x) = 2(2x^{-1/2} + 1)^{-1/3}$

سوال 17:  $h(\theta) = \sqrt[3]{1 + \cos(2\theta)}$   
جواب:  $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^{-2/3}$

سوال 18:  $k(\theta) = (\sin(\theta + 5))^{5/4}$

خفی تفرق

سوال 19 تا سوال 32 میں  $\frac{dy}{dx}$  کو خفی تفرق کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 19:  $x^2y + xy^2 = 6$   
جواب:  $\frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$

سوال 20:  $x^3 + y^3 = 18xy$

سوال 21:  $2xy + y^2 = x + y$   
جواب:  $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

سوال 22:  $x^3 - xy + y^3 = 1$

سوال 23:  $x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$   
جواب:  $\frac{-2x^3 + 3x^2y - xy^2 + x}{x^2y - x^3 + y}$

سوال 24:  $(3xy + 7)^2 = 6y$

سوال 25:  $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$   
جواب:  $\frac{1}{y(x+1)^2}$

سوال 26:  $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

سوال 27:  $x = \tan y$   
جواب:  $\cos^2 y$

سوال 28:  $x = \sin y$

سوال 29:  $x + \tan(xy) = 0$   
 جواب:  $\frac{-\cos^2(xy) - y}{x}$

سوال 30:  $x + \sin y = xy$

سوال 31:  $y \sin(\frac{1}{y}) = 1 - xy$   
 جواب:  $\frac{-y^2}{y \sin(\frac{1}{y}) - \cos(\frac{1}{y}) + xy}$

سوال 32:  $y^2 \cos(\frac{1}{y}) = 2x + 2y$

سوال 33 تا سوال 36 میں  $\frac{dr}{d\theta}$  تلاش کریں۔

سوال 33:  $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$   
 جواب:  $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

سوال 34:  $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

سوال 35:  $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$   
 جواب:  $\frac{-r}{\theta}$

سوال 36:  $\cos r + \cos \theta = r\theta$

### بلند درجی تفریق

سوال 37 تا سوال 42 میں خفی تفریق کی مدد سے پہلے  $\frac{dy}{dx}$  اور بعد میں  $\frac{d^2y}{dx^2}$  تلاش کریں۔

سوال 37:  $x^2 + y^2 = 1$   
 جواب:  $y' = -\frac{x}{y}, y'' = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}$

سوال 38:  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

سوال 39:  $y^2 = x^2 + 2x$   
 جواب:  $y' = \frac{x+1}{y}, y'' = \frac{y^2 - (x+1)^2}{y^3}$

سوال 40:  $y^2 - 2x = 1 - 2y$

سوال 41:  $2\sqrt{y} = x - y$   
 جواب:  $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}, y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

سوال 42:  $xy + y^2 = 1$

سوال 43: نقطہ  $(2, 2)$  پر  $x^3 + y^3 = 16$  کے لئے  $\frac{d^2y}{dx^2}$  کی قیمت تلاش کریں۔  
 جواب:  $-2$

سوال 44: نقطہ  $(0, -1)$  پر  $xy + y^2 = 1$  کے لئے  $\frac{d^2y}{dx^2}$  کی قیمت تلاش کریں۔

### ڈھلوان، مماس اور عمود

سوال 45 تا سوال 46 میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 45:  $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(-2, -1)$   
 جواب:  $(-2, 1) : m = -1$ ,  $(-2, -1) : m = 1$

سوال 46:  $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, -1)$

سوال 47 تا سوال 56 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا نقطہ منحنی پر پایا جاتا ہے اور اس نقطے پر منحنی کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 47:  $x^2 + xy - y^2 = 1$ ,  $(2, 3)$   
 جواب: (ا)  $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$ , (ب)  $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

سوال 48:  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $(3, -4)$

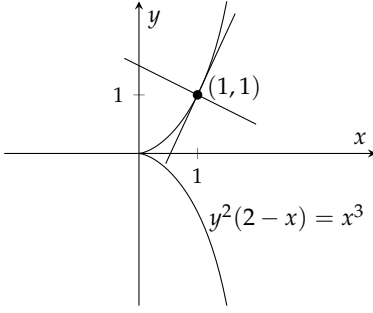
سوال 49:  $x^2y^2 = 9$ ,  $(-1, 3)$   
 جواب: (ا)  $y = 3x + 6$ , (ب)  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

سوال 50:  $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ ,  $(-2, 1)$

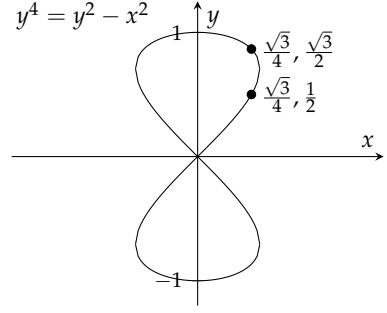
سوال 51:  $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0$ ,  $(-1, 0)$   
 جواب: (ا)  $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$ , (ب)  $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

سوال 52:  $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5$ ,  $(\sqrt{3}, 2)$

سوال 53:  $2xy + \pi \sin y = 2\pi$ ,  $(1, \pi/2)$   
 جواب: (ا)  $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$ , (ب)  $y = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$



شکل 3.62: منحنی برائے سوال 60



شکل 3.61: منحنی آٹھ (سوال 59)

سوال 54:  $x \sin 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

سوال 55:  $y = 2 \sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$   
جواب: (i)  $y = 2\pi x - 2\pi$ , (ب)  $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

سوال 56:  $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0, \pi)$

سوال 57: محور  $x$   $x^2 + xy + y^2 = 7$  دو نقطوں پر قطع کرتی ہے۔ ان نقطوں کو تلاش کریں اور دکھائیں کہ ان نقطوں پر منحنی کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔ ان مماس کی ڈھلوان کیا ہو گی؟  
جواب: نقطہ  $(-\sqrt{7}, 0)$  اور  $(\sqrt{7}, 0)$ ، ڈھلوان:  $-2$

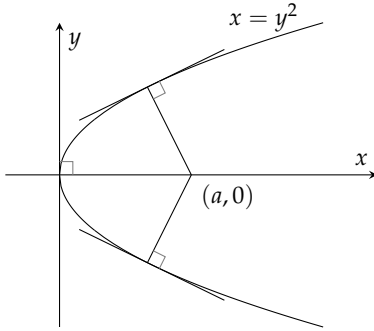
سوال 58: منحنی  $x^2 + y^2 + xy = 7$  پر وہ نقطے تلاش کریں جہاں (i) مماس  $x$  محور کے متوازی ہے، (ب) مماس  $y$  محور کے متوازی ہے۔ دوسرے جزو میں  $\frac{dy}{dx}$  غیر معین جبکہ  $\frac{dx}{dy}$  معین ہے۔ ان نقطوں پر  $\frac{dx}{dy}$  کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 59: منحنی آٹھ نقطہ  $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  اور  $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$  پر  $y^4 = y^2 - x^2$  کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.61)۔  
جواب:  $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  پر  $m = -1$ ،  $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$  پر  $m = \sqrt{3}$

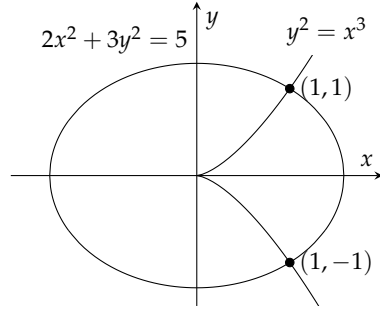
سوال 60: نقطہ  $(1, 1)$  پر  $y^2(2-x) = x^3$  کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں (شکل 3.62)۔

سوال 61: چار نقطوں  $(-3, 2)$ ،  $(-3, -2)$ ،  $(3, 2)$  اور  $(3, -2)$  پر  $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$  کی ڈھلوان تلاش کریں۔  
جواب:  $(-3, 2) : m = -\frac{27}{8}$ ;  $(-3, -2) : m = \frac{27}{8}$ ;  $(3, 2) : m = \frac{27}{8}$ ;  $(3, -2) : m = -\frac{27}{8}$

سوال 62:



شکل 3.64: منحنی برائے سوال 67



شکل 3.63: ترسیم برائے سوال 64

ا. نقطہ  $(4, 2)$  اور  $(2, 4)$  پر پتا  $x^3 + y^3 - 9xy = 0$  کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.56)۔

ب. مبدأ کے علاوہ پتے کا مماس کس نقطے پر افقی ہے؟

ج. کس نقطے پر پتے کا مماس انتہائی ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 63: اگر  $f''(x) = x^{-1/3}$  ہو تب درج ذیل میں سے کون سے درست ہوں گے؟

ا.  $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$  ج.  $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$

ب.  $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$  د.  $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

جواب: (ا) غلط، (ب) درست، (ج) درست، (د) درست

سوال 64: کیا نقطہ  $(1, 1)$  اور  $(1, -1)$  پر  $2x^2 + 3y^2 = 5$  اور  $y^2 = x^3$  کے مماس میں کوئی خاصیت پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل 3.63)۔

سوال 65: نقطہ  $(1, 1)$  پر منحنی  $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$  کا مماس اس منحنی کو کس دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے؟  
جواب:  $(3, -1)$

سوال 66: منحنی  $xy + 2x - y = 0$  کا ایسا عمود تلاش کریں جو  $2x + y = 0$  کے متوازی ہو۔

سوال 67: دکھائیں کہ اگر نقطہ  $(a, 0)$  سے قطع مکانی  $x = y^2$  تک تین عمود بنانا ممکن ہو تب  $a > \frac{1}{2}$  ہو گا۔ تیسرا عمود  $x$  محور ہے۔  $a$  کی کس قیمت کے لئے باقی دو عمود آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں (شکل 3.64)؟

سوال 68: مثال 3.52 اور مثال 3.53-1 میں کس جیومیٹری کی بنا دائرہ کار کے حدود تعین ہوتے ہیں؟

سوال 69 اور سوال 70 میں پہلے  $y$  کو  $x$  کا تفاعل تصور کرتے ہوئے  $\frac{dy}{dx}$  تلاش کریں اور اس کے بعد  $x$  کو  $y$  کا تفاعل تصور کرتے ہوئے  $\frac{dx}{dy}$  تلاش کریں۔ کیا  $\frac{dy}{dx}$  اور  $\frac{dx}{dy}$  کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ کیا آپ اس تعلق کو منحنی کی ترسیم کی مدد سے جیومیٹری کے ذریعہ سمجھا سکتے ہیں؟

سوال 69:  $xy^3 + x^2y = 6$   
جواب:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3 + 2xy}{x^2 + 3xy^2}$ ,  $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 + 3xy^2}{y^3 + 2xy}$ ,  $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{dy/dx}$

سوال 70:  $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

### کمپیوٹر کا استعمال

سوال 71:

ا. منحنی  $x^4 + 4y^2 = 1$  کا  $\frac{dy}{dx}$  عمومی طریقہ اور منحنی طریقہ سے حاصل کریں۔ کیا دونوں جوابات ایک دوسرے جیسے ہیں؟

ب. مساوات  $x^4 + 4y^2 = 1$  کو  $y$  کے لئے حل کرتے ہوئے تمام حاصل تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے  $x^4 + 4y^2 = 1$  کی مکمل ترسیم کھینچیں۔ اب ساتھ ہی ان تفاعل کے ایک درجی تفرق کے ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا  $x^4 + 4y^2 = 1$  کی ترسیم کو دیکھ کر آپ اس کے تفرق کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا مساوات کے تفرق کی تقسیم کو دیکھ کر آپ مساوات کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 72:

ا.  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  کا تفرق  $\frac{dy}{dx}$  دو طریقوں سے تلاش کریں۔ پہلی بار مساوات کو  $y$  کے لئے حل کرتے ہوئے تفرق حاصل کریں جبکہ دوسری بار منحنی طریقہ استعمال کریں۔ کیا دونوں بار ایک جیسے جوابات حاصل ہوتے ہیں؟

ب.  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  کو  $y$  کے لئے حل کریں۔ تمام حاصل تفاعل کا ترسیم کھینچ کر مساوات  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  کی مکمل ترسیم حاصل کریں۔ اب تفاعل کے ایک درجی تفرق کا ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا آپ مساوات کی ترسیم کو دیکھ کر اس کے تفرق کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا آپ تفرق کی ترسیم کو دیکھ کر مساوات کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73 تا سوال 80 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. کمپیوٹر پر مساوات کو ترسیم کریں۔ تصدیق کریں کہ نقطہ  $N$  مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. مخفی طریقہ سے تفرق  $\frac{dy}{dx}$  کا کلیہ حاصل کرتے ہوئے نقطہ  $N$  پر اس کی قیمت تلاش کریں۔

ج.  $N$  پر ڈھلوان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے اس نقطہ پر مماس کی مساوات حاصل کریں۔ مماس اور مساوات کو اکٹھے ترسیم کریں۔

$$\text{سوال 73: } x^3 - xy + y^3 = 7, \quad N(2, 1)$$

$$\text{سوال 74: } x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad N(1, 1)$$

$$\text{سوال 75: } y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad N(0, 1)$$

$$\text{سوال 76: } y^3 + \cos(xy) = x^2, \quad N(1, 0)$$

$$\text{سوال 77: } x + \tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2, \quad N(1, \pi/2)$$

$$\text{سوال 78: } xy^3 + \tan(x+y) = 1, \quad N(\pi/4, 0)$$

$$\text{سوال 79: } 2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad N(1, 1)$$

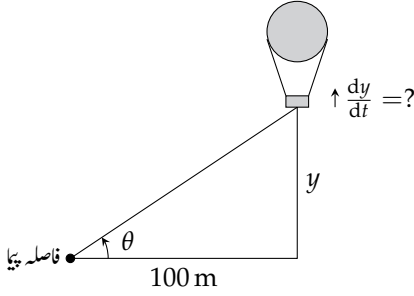
$$\text{سوال 80: } x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad N(1, 0)$$

### 3.7 دیگر شرح تبدیلی

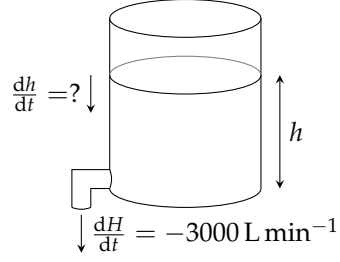
ٹینکی سے  $3000 \text{ L min}^{-1}$  پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہوگی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے ہیں۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 3.54: انعکاس  $3000 \text{ L min}^{-1}$  کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس  $r$  کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی  $h$  ہے۔ یوں پانی کا حجم  $H = \pi r^2 h$  ہوگا جہاں حجم کو  $H$  سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل 3.65)۔ اب ہمیں انعکاس

$$\frac{dH}{dt} = -3000$$



شکل 3.66: غبارہ (مثال 3.55)



شکل 3.65: پانی کی ٹینکی (مثال 3.54)

بتلایا گیا ہے جہاں  $t$  وقت کو ظاہر کرتی ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{dh}{dt}$$

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں  $H$  اور  $h$  کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{dH}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

جہاں دائیں جانب  $r$  مستقل ہے۔ اس میں  $\frac{dH}{dt}$  کی معلوم قیمت پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح  $\frac{dh}{dt}$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

پانی کی گہرائی  $\frac{3}{\pi r^2}$  میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہو گی۔ مثلاً  $r = 1$  m اور  $r = 10$  m کی صورت میں شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95 \text{ m min}^{-1} = -95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 1 \text{ m})$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095 \text{ m min}^{-1} = -0.95 \text{ cm min}^{-1} \quad (r = 10 \text{ m})$$

□



مثال 3.55: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل 3.66)۔ غبارے کی نقطہ اڑان سے 100 m دور واقع فاصلہ پتہ<sup>41</sup> سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پتہ کا زاویہ صعود  $\frac{\pi}{4}$  تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح  $0.14 \text{ rad min}^{-1}$  تھی۔ اس لمحہ پر غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟

حل: ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔

**پہلا قدم:** موقع کی تصویر کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات  $\theta$  اور  $y$  درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پتہ کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو  $t$  سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ  $\theta$  اور  $y$  متغیر  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پتہ سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ 100 m ہے جس کو متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔  
**دوسرا قدم:** ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad min}^{-1} \quad (\theta = \frac{\pi}{4})$$

**تیسرا قدم:** جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے  $\theta = \pi/4$  کی صورت میں  $\frac{dy}{dt}$  پوچھا گیا ہے۔  
**چوتھا قدم:** متغیرات  $\theta$  اور  $y$  کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100} = \tan \theta \quad \Rightarrow \quad y = 100 \tan \theta$$

**پانچواں قدم:** زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے  $t$  کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو  $\frac{dy}{dt}$  (درکار معلومات) اور  $\frac{d\theta}{dt}$  (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{dy}{dt} = 100 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

**چھٹا قدم:**  $\theta = \frac{\pi}{4}$  اور  $\frac{d\theta}{dt} = 0.14$  پر کرتے ہوئے  $\frac{dy}{dt}$  کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{dy}{dt} = 100(\sec \frac{\pi}{4})^2(0.14) = 28 \text{ m min}^{-1}$$

□

اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

• مسئلے کی تصویر کشی کریں۔ وقت کو  $t$  سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو  $t$  کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔

• اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کی روپ میں لکھیں۔

• مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کی روپ میں ہوگا)۔

- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی بار آپ کو دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنا ہو گا۔
- اس کا  $t$  کے لحاظ سے تفرق لیں۔ اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔
- معلوم معلومات کو پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال 3.56: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ  $0.6 \text{ km}$  اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ  $0.8 \text{ km}$  ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ  $20 \text{ km h}^{-1}$  سے بڑھ رہا ہے۔ پولیس کی گاڑی کی رفتار  $60 \text{ km h}^{-1}$  ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟  
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔

**پہلا قدم:** تصویر اور متغیرات۔ ہم کارتیسی محدود پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو  $x$  محور جبکہ پولیس کی گاڑی کو  $y$  محور پر رکھتے ہیں۔ وقت کو  $t$  سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ  $t$  پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام  $x$ ، پولیس کی گاڑی کا مقام  $y$  اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ  $s$  ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $x$ ،  $y$  اور  $s$  متغیر  $t$  کے قابل تفرق تعامل ہیں۔  
**دوسرا قدم:** اعدادی معلومات۔ لمحہ  $t$  پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8 \text{ km}, \quad y = 0.6 \text{ km}, \quad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ km h}^{-1}, \quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ km h}^{-1}$$

اس لئے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی  $y$  رخ چل رہی ہے۔  
**تیسرا قدم:** ہمیں  $\frac{dx}{dt}$  تلاش کرنا ہے۔  
**چوتھا قدم:** مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق  $s^2 = x^2 + y^2$  ہے۔  
**پانچواں قدم:** زنجیری قاعدہ کی مدد سے  $t$  کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

**چھٹا قدم:**  $x = 0.8$ ،  $y = 0.6$ ،  $\frac{dy}{dt} = -60$  اور  $\frac{ds}{dt} = 20$  پر کرتے ہوئے  $\frac{dx}{dt}$  کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} 20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2 + 0.6^2}} \left( 0.8 \frac{dx}{dt} + 0.6(-60) \right) \\ 20 &= 0.8 \frac{dx}{dt} - 36 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{20 + 36}{0.8} = 70 \end{aligned}$$

اس لمحہ پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار  $70 \text{ km h}^{-1}$  ہے۔

□

مثال 3.57: پانی کی مخروطی ٹینکی  $9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس  $5 \text{ m}$ ، اس کا قد  $10 \text{ m}$  ہے اور اس کی نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی  $6 \text{ m}$  ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟  
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔  
پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

$H$ : لمحہ  $t$  (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

$x$ : لمحہ  $t$  (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

$y$ : لمحہ  $t$  (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ  $H$ ،  $x$  اور  $y$  متغیر  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔  
دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ  $t$  پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6 \text{ m}, \quad \frac{dH}{dt} = 9 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$$

تیسرا قدم: ہمیں  $\frac{dy}{dt}$  تلاش کرنا ہے۔  
چوتھا قدم: متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

چونکہ لمحہ  $t$  پر ہمیں  $x$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی ہے لہذا ہمیں  $x$  سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ متشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12} y^3$$

پانچواں قدم:  $t$  کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt}$$

اس کو  $\frac{dy}{dt}$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \frac{dH}{dt}$$

چھٹا قدم: دی گئی معلومات یعنی  $y = 6$  اور  $\frac{dH}{dt} = 9$  پر کرتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi(6^2)} \cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \text{ m min}^{-1}$$

□

اس لمحے پر پانی کی گہرائی  $0.32 \text{ m min}^{-1}$  سے بڑھ رہی ہے۔

### سوالات

سوال 1: فرض کریں کہ دائرے کا رداس  $r$  اور رقبہ  $S = \pi r^2$  وقت  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔  $\frac{dr}{dt}$  اور  $\frac{dS}{dt}$  کا تعلق لکھیں۔

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad \text{جواب:}$$

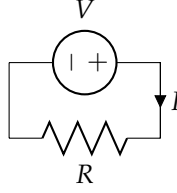
سوال 2: فرض کریں کہ رداس  $r$  اور سطحی رقبہ  $S = \frac{4}{3}\pi r^2$  وقت  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔  $\frac{dr}{dt}$  اور  $\frac{dS}{dt}$  کا تعلق لکھیں۔

سوال 3: بیلن کے رداس  $r$ ، قد  $h$  اور حجم  $H$  کا تعلق  $H = \pi r^2 h$  ہے۔

ا.  $r$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dh}{dt}$  کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب.  $h$  کو مستقل تصور کرتے ہوئے  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dr}{dt}$  کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نا  $r$  اور نا  $h$  مستقل ہوں تب  $\frac{dH}{dt}$  اور  $\frac{dr}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟



شکل 3.67: برقی دور برائے سوال 5

جواب: (ا)  $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi r h \frac{dr}{dt}$  (ب)  $\frac{dH}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt}$  (ج)  $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

سوال 4: سیدھا کھڑے مخروط جس کا رداس  $r$  اور قد  $h$  ہوں کا حجم  $H = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  ہو گا۔

ا. مستقل  $r$  کی صورت میں  $\frac{dh}{dt}$  اور  $\frac{dH}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ب. مستقل  $h$  کی صورت میں  $\frac{dr}{dt}$  اور  $\frac{dH}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل  $h$  اور  $r$  کی صورت میں  $\frac{dr}{dt}$  ،  $\frac{dh}{dt}$  اور  $\frac{dH}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال 5: مزاحمت  $R$  میں برقی رو  $I$  اور برقی دباؤ  $V$  کا تعلق  $V = IR$  ہے (شکل 3.67 میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباؤ  $1 \text{ V s}^{-1}$  سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو  $\frac{1}{3} \text{ A s}^{-1}$  سے گھٹ رہی ہے۔

ا.  $\frac{dV}{dt}$  کی قیمت کیا ہے؟

ب.  $\frac{dI}{dt}$  کی قیمت کیا ہے؟

ج.  $\frac{dR}{dt}$  ،  $\frac{dV}{dt}$  اور  $\frac{dI}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

د. جب  $V = 12$  وولٹ اور  $I = 2$  امپیر ہوں تب  $\frac{dR}{dt}$  کیا ہو گا؟ کیا  $R$  بڑھ رہا ہو گا یا گھٹ رہا ہو گا؟

جواب: (ا)  $1 \text{ V s}^{-1}$  ، (ب)  $-\frac{1}{3} \text{ A s}^{-1}$  ، (ج)  $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I} \left( \frac{dV}{dt} - \frac{V}{I} \frac{dI}{dt} \right)$  ، (د)  $\frac{3}{2} \Omega \text{ s}^{-1}$  ، مزاحمت بڑھ رہی ہے۔

سوال 6: برقی دور میں طاقت  $P$  ، مزاحمت  $R$  اور برقی رو  $i$  کا تعلق  $P = i^2 R$  ہے۔ طاقت، مزاحمت اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W) ، اوہم  $\Omega$  اور امپیر (A) ہیں۔

ا.  $\frac{dP}{dt}$  ،  $\frac{dR}{dt}$  اور  $\frac{di}{dt}$  کا تعلق کیا ہے جہاں  $P$  ،  $R$  اور  $i$  میں سے کوئی بھی مستقل نہیں ہے۔

ب. مستقل  $P$  کی صورت میں  $\frac{dR}{dt}$  اور  $\frac{di}{dt}$  کا کیا تعلق ہے؟

سوال 7: کارتیسی محد میں نقطہ  $(x, 0)$  اور  $(0, y)$  کے بیچ فاصلہ  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$  ہے۔ وقت کو  $t$  سے ظاہر کریں۔

ا. مستقل  $y$  کی صورت میں  $\frac{ds}{dt}$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کا تعلق کیا ہو گا؟

ب. اگر  $x$  اور  $y$  دونوں متغیر ہوں تب  $\frac{ds}{dt}$  کا  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

ج. مستقل  $s$  کی صورت میں  $\frac{dx}{dt}$  اور  $\frac{dy}{dt}$  کا کیا تعلق ہو گا؟

جواب: (ا)  $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt}$  ، (ب)  $\frac{ds}{dt} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt}$  ، (ج)  $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$

سوال 8: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں  $x$  ،  $y$  اور  $z$  ہیں۔ ڈبے کے وتر کی لمبائی  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  ہو گی۔

ا. فرض کریں  $x$  ،  $y$  اور  $z$  مستقل نہیں ہیں۔  $\frac{ds}{dt}$  ،  $\frac{dx}{dt}$  ،  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dz}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

ب. مستقل  $x$  کی صورت میں  $\frac{ds}{dt}$  ،  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dz}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

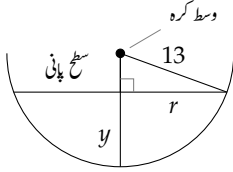
ج. مستقل  $x$  کی صورت میں  $\frac{dx}{dt}$  ،  $\frac{dy}{dt}$  اور  $\frac{dz}{dt}$  کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 9: ایک مثلث جس کے ضلع  $a$  اور  $b$  جن کے بیچ زاویہ  $\theta$  ہو کا رقبہ  $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  ہو گا۔

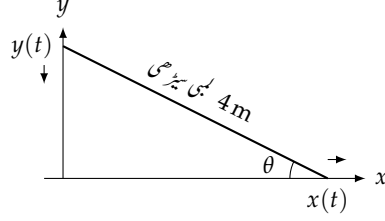
ا. مستقل  $a$  اور  $b$  کی صورت میں  $\frac{dS}{dt}$  اور  $\frac{d\theta}{dt}$  کا تعلق کیا ہو گا؟

ب. مستقل  $b$  کی صورت میں  $\frac{dS}{dt}$  ،  $\frac{da}{dt}$  اور  $\frac{d\theta}{dt}$  کا تعلق کیا ہو گا؟

ج.  $a$  ،  $b$  اور  $\theta$  غیر مستقل ہونے کی صورت میں  $\frac{dS}{dt}$  ،  $\frac{da}{dt}$  ،  $\frac{db}{dt}$  اور  $\frac{d\theta}{dt}$  کا تعلق کیا ہو گا؟



شکل 3.69: نصف کرہ ٹینکی (سوال 19)



شکل 3.68: دیوار کے ساتھ سیڑھی (سوال 13)

جواب: (ا)  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt}$ ، (ب)  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}a \sin \theta \frac{db}{dt}$ ، (ج)  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a \sin \theta \frac{db}{dt}$

سوال 10: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس  $r$  ہے جس سے اس کا رداس  $0.01 \text{ cm min}^{-1}$  کی شرح سے بڑھتا ہے۔ جب رداس  $50 \text{ cm}$  ہو تب تختے کا رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

سوال 11: مستطیل کی لمبائی  $l$  اور چوڑائی  $w$  کی شرح تبدیلی  $2 \text{ cm s}^{-1}$  اور  $2 \text{ cm s}^{-1}$  ہیں۔ جب  $l = 12 \text{ cm}$  اور  $w = 5 \text{ cm}$  ہو تب شرح تبدیلی (ا) رقبہ، (ب) محیط، (ج) وتر کیا ہوں گے؟ ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟

جواب: (ا)  $14 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  سے بڑھتا ہے؛ (ب)  $0 \text{ cm s}^{-1}$ ، مستقل؛ (ج)  $-\frac{14}{13} \text{ cm s}^{-1}$ ، گھٹ رہا ہے۔

سوال 12: مستطیل ڈبے کے ضلع کی لمبائیاں  $x$ ،  $y$  اور  $z$  ہیں۔ ان کی شرح تبدیلی

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m s}^{-1}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m s}^{-1}$$

ہیں۔ جس لمحہ  $x = 4$ ،  $y = 3$  اور  $z = 2$  ہوں اس لمحہ ڈبے کے (ا) حجم، (ب) سطحی رقبہ، (ج) وتر  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  کی تبدیلی کی شرح کیا ہوگی؟

سوال 13: دیوار کے ساتھ لگی  $4 \text{ m}$  لمبی سیڑھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے (شکل 3.68)۔ جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیڑھی کا فاصلہ  $3 \text{ m}$  ہو اس لمحہ پر سیڑھی کا یہ سر  $0.5 \text{ m s}^{-1}$  کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

ا. اس لمحے پر سیڑھی کا بالائی سر کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

ب. سیڑھی، زمین اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔ اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ج. اس لمحے پر سیڑھی اور زمین کے بیچ زاویہ  $\theta$  کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟

جواب: (i)  $-\frac{3\sqrt{7}}{14} \text{ m s}^{-1}$ ، (ب)  $-\frac{\sqrt{7}}{14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

سوال 14: دو ہوائی جہاز 7000 m کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار  $1000 \text{ km h}^{-1}$  جبکہ جہاز ب کی رفتار  $850 \text{ km h}^{-1}$  ہے۔ جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ 50 km اور ب کا فاصلہ 100 km ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 15: ایک لڑکی 300 m بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ ہوا پتنگ کو افقی رخ  $25 \text{ m min}^{-1}$  کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔ اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ 500 m ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟  
جواب:  $20 \text{ m s}^{-1}$

سوال 16: پرانے انجن کی بیلن کو خراہ کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا پسٹن ڈالا جاتا ہے۔ خراہ کی مشین بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں  $25 \mu\text{m}$  بڑھاتی ہے۔ جب رداس 9.8 cm ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال 17: ریت کو  $10 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی  $\frac{3}{8}$  ہوتی ہے۔ جب ڈھیر 4 m اونچا ہو اس لمحہ ڈھیر کی (i) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب  $\text{cm s}^{-1}$  میں دیں۔  
جواب: (i)  $\frac{dh}{dt} = 11.19 \text{ cm min}^{-1}$ ، (ب)  $\frac{dr}{dt} = 14.92 \text{ cm min}^{-1}$

سوال 18: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی 6 m اور رداس 45 m ہیں سے پانی کو  $50 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔ مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔ (i) جب پانی 5 m گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحے پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب  $\text{cm s}^{-1}$  میں دیں۔

سوال 19: نصف کرہ جس کا رداس  $R = 13 \text{ m}$  ہے سے پانی کا انعکاس  $6 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے کیا جاتا ہے (شکل 3.69)۔ پانی کا حجم  $H = \frac{\pi}{3} y^2 (3R - y)$  ہے جہاں  $y$  پانی کی گہرائی ہے۔

ا. جب پانی کی گہرائی 8 m ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

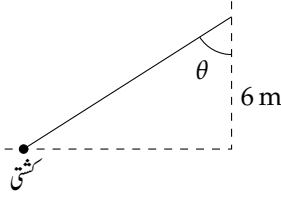
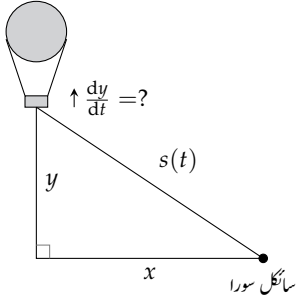
ب. جب پانی کی گہرائی  $y$  ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟

ج. جب پانی 8 m گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

جواب: (i)  $-\frac{1}{24\pi} \text{ m min}^{-1}$ ، (ب)  $r = \sqrt{26y - y^2} \text{ m}$ ، (ج)  $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi} \text{ m min}^{-1}$

سوال 20: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔ فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔ دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔





شکل 3.70: کشتی کو بندرگاہ میں کھینچا جاتا ہے (سوال 22)

شکل 3.71: غبارہ کے نیچے سے گاڑی گزرتی ہے (سوال 23)



شکل 3.72: مخروط چھلنی (سوال 24)

سوال 21: ایک غبارے میں  $100\pi \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے ہیلیم <sup>42</sup> گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس 5 m ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہو گا؟  
جواب:  $1 \text{ m/min}$  ،  $40\pi \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$

سوال 22: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے 6 m اونچائی سے بندرگاہ کی طرح کھینچا جاتا ہے (شکل 3.70)۔ رسی کو  $2 \text{ m s}^{-1}$  کی رفتار کھینچا جاتا ہے۔ (i) جب رسی کی لمبائی 10 m ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ  $\theta$  کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 23: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ  $1 \text{ m s}^{-1}$  سے حرکت کرتا ہے۔ جب یہ 65 m بلندی پر پہنچتا ہے ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی  $17 \text{ m s}^{-1}$  کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے (شکل 3.71)۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟  
جواب:  $11 \text{ m s}^{-1}$

سوال 24: مخروط چھلنی میں بیک وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں  $10 \text{ cm}^3 \text{ min}^{-1}$  کی شرح سے بھری جاتی ہے (شکل 3.72)۔ (i) چھلنی میں چائے کی گہرائی 5 cm ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحہ پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟

سوال 25: اخراج قلب جرمی کے اڈولف فک نے 1860 کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس جملے کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً  $7 \text{ L min}^{-1}$  خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر  $6 \text{ L min}^{-1}$  اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب  $30 \text{ L min}^{-1}$  تک خون خارج کر سکتا ہے۔

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

سے کیا جا سکتا ہے جہاں سانس سے خارج  $\text{CO}_2$  کی ملی لٹرنی منٹ میں مقدار کو  $Q$  سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں  $\text{CO}_2$  کی کثافت  $\text{mL/L}$  اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں  $\text{CO}_2$  کی کثافت کے فرق کو  $D$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں  $Q = 223 \text{ mL/min}$  اور  $D = 97 - 56 = 41 \text{ mL/L}$  کی صورت میں

$$y = \frac{223 \text{ mL/min}}{41 \text{ mL/L}} \approx 5.68 \text{ L/min}$$

ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ جب  $Q = 233$  اور  $D = 41$  ہوں تب  $D$  کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ  $Q$  میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی ہے۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟  
جواب:  $\frac{466}{1681} \text{ L min}^{-1}$  سے بڑھ رہا ہے۔

سوال 26: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ  $x$  اشیاء کو  $c(x)$  لاگت،  $r(x)$  آمدنی اور  $p(x) = r(x) - c(x)$  منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔  $x$  اور  $\frac{dx}{dt}$  کی درج ذیل قیمتوں کے لئے  $\frac{dr}{dt}$ ،  $\frac{dc}{dt}$  اور  $\frac{dp}{dt}$  کا حساب کریں۔

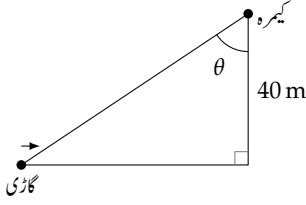
ا.

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x; \quad \frac{dx}{dt} = 0.1, \quad x = 2$$

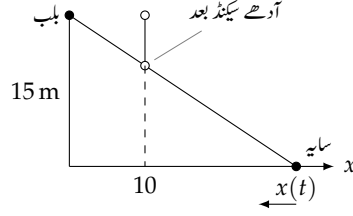
ب.

$$r(x) = 70x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{x}; \quad \frac{dx}{dt} = 0.05, \quad x = 1.5$$

سوال 27: قطع مکانی پر حرکت۔ ایک ذرہ قطع مکانی  $y = x^2$  پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا  $x$  محدود  $10 \text{ m s}^{-1}$  کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط،  $x$  محور کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بتاتا ہے۔ جب  $x = 3 \text{ m}$  ہو تب  $\theta$  کس شرح سے



شکل 3.74: گیڑی کی ویڈیو (سوال 32)



شکل 3.73: گیند کا سایہ (سوال 31)

تبدیل ہو گا؟

جواب:  $1 \text{ rad s}^{-1}$ 

سوال 28: دوسرا قطع مکانی۔ ایک ذرہ دائیں سے بائیں جانب قطع مکانی  $y = \sqrt{-x}$  پر یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا  $x$  محدود  $\frac{8}{\text{ms}}$  سے گھٹتا ہے۔ مبداء سے ذرہ تک خط،  $x$  محور کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنتا ہے۔ جب  $x = -4 \text{ m}$  ہو تب  $\theta$  کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 29: مستوی پر حرکت۔ کار تیمی محدود پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے تعین گر  $x$  اور  $y$  محدود وقت  $t$  کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ اگر  $\frac{dx}{dt} = -1 \text{ m s}^{-1}$  اور  $\frac{dy}{dt} = -5 \text{ m s}^{-1}$  ہوں تب مبداء سے ذرے کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

جواب:  $-5 \text{ m s}^{-1}$ 

سوال 30: حرکت پذیر سایہ۔  $2 \text{ m}$  قد کا ایک شخص گلی میں روشنی کے کھمبے کی طرف  $1.5 \text{ m s}^{-1}$  رفتار سے چل رہا ہے۔ کھمبے میں نسب بلب زمین سے  $5 \text{ m}$  بلندی پر ہے۔ جب شخص کھمبے سے  $4 \text{ m}$  فاصلے پر ہو، اس کا سایہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

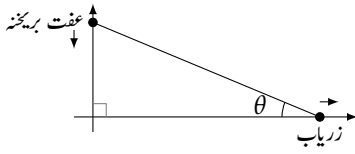
سوال 31: دوسرا حرکت کرتا سایہ۔ کھمبے پر بلب  $15 \text{ m}$  بلندی پر نسب ہے۔ کھمبے سے  $10 \text{ m}$  فاصلے پر اتنی ہی بلندی سے ایک گیند کو زمین پر گرنے دیا جاتا ہے (شکل 3.73)۔ آدھے سینڈ بعد زمین پر گیند کا سایہ کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ ( $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ )

جواب:  $490 \text{ m s}^{-1}$ 

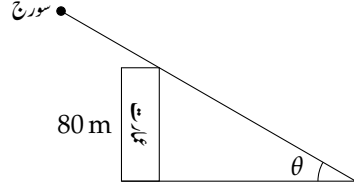
سوال 32: آپ  $80 \text{ km h}^{-1}$  رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی سے  $150 \text{ m}$  کے فاصلے پر  $40 \text{ m}$  کی بلندی سے گاڑی کی ویڈیو <sup>43</sup> بنا رہے ہیں جو سیدھی آپ کی طرف آرہی ہے (شکل 3.74)۔ اس لمحے پر کیمرے کا زاویہ میلان سے شرح سے تبدیل ہو گا؟ دو سینڈ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

سوال 33: برف کی پگھلتی تہہ۔ ایک لوہے کا کرہ جس کا رداس  $0.1 \text{ m}$  ہے پر برف کی یکساں موٹائی کی تہہ جمائی جاتی ہے جو  $10 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  کی شرح سے پگھلتی ہے۔ جس لمحے پر تہہ کو موٹائی  $2 \text{ cm}$  ہو اس لمحے پر تہہ کی موٹائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

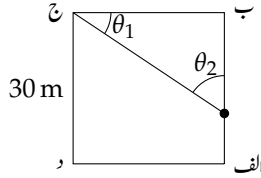
جواب:  $\frac{dr}{dt} = 55 \mu\text{m s}^{-1}$ ,  $\frac{ds}{dt} = 1.66 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$



شکل 3.76: عفت اور زریاب کی چال قدمی (سوال 36)



شکل 3.75: عمارت کا سایہ (سوال 35)



شکل 3.77: بچوں کا کھیل (سوال 37)

سوال 34: موٹرے پولیس۔ 1 km بلندی پر ایک جہاز پشاور سے اسلام آباد کی موٹرے کے ٹھیک اوپر  $500 \text{ km h}^{-1}$  کی رفتار سے پرواز کرتے ہوئے موٹرے پر سامنے سے آمد گاڑی کا فاصلہ 5 km ناپتا ہے جو اس لمحے پر  $100 \text{ km h}^{-1}$  کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ گاڑی کی رفتار تلاش کریں۔

سوال 35: عمارت کا سایہ۔ سال کے کسی ایک دن سورج 80 m بلند عمارت کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے (شکل 3.75)۔ جب عمارت کا سایہ ہموار زمین پر 60 m ہو، سایے کے سر سے سورج تک کا خط زمین کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتا ہے جو اس لمحے  $0.27^\circ/\text{min}$  کی شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔ سایے کی لمبائی کس شرح سے گھٹتی ہے؟ جواب  $\text{cm}/\text{min}$  میں دیں اور ریڈیئن کا استعمال کرنا نہ بھولیں۔  
جواب:  $58.9 \text{ cm}/\text{min}$

سوال 36: چال قدمی۔ ایک چوراہے پر دو سڑک  $90^\circ$  زاویے سے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک سڑک پر عفت بریجنز چوراہے کی جانب  $2 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے بڑھتی ہے جبکہ دوسری سڑک پر اس کا چھوٹا بھائی زریاب خان  $1.5 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے چوراہے سے دور چلا جاتا ہے (شکل 3.76)۔ جب عفت بریجنز اور زریاب خان چوراہے سے بالترتیب 20 m اور 15 m کے فاصلے پر ہوں، زاویہ  $\theta$  کی شرح تبدیلی کیا ہوگی؟

سوال 37: بچوں کا کھیل۔ ایک کھیل میں کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے دوڑ کر گھری کی الٹ رخ چکور راہ پر  $6 \text{ ms}^{-1}$  کی رفتار سے چکر لگاتا ہے۔ چکور کے اطراف کی لمبائی 30 m ہے (شکل 3.77)۔

ا. جب کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے 10 m فاصلے پر ہو، اس کا نقطہ ج سے فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ب. اس لمحے پر زاویہ  $\theta_1$  اور  $\theta_2$  کس شرح سے تبدیل ہوتے ہیں؟

جواب: (i)  $\frac{-12}{\sqrt{13}} \text{ m s}^{-1}$  (ب)  $\frac{d\theta_1}{dt} = -0.138 \text{ rad s}^{-1}$  ،  $\frac{d\theta_2}{dt} = 0.138 \text{ rad s}^{-1}$

سوال 38: ایک گھڑی کے سیکنڈوں کی سوئی کی لمبائی 20 cm ہے۔ جب یہ سوئی چار بجے پر ہو اس لمحہ بارہ بجے کی نشان سے اس کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 39: بحری جہاز۔ نقطہ M سے دو بحری جہاز آپس میں  $120^\circ$  کا زاویہ بناتے ہوئے روانہ ہوتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار  $28 \text{ km h}^{-1}$  ہے جبکہ جہاز ب کی رفتار  $20 \text{ km h}^{-1}$  ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟  
جواب:  $4\sqrt{109} \text{ km h}^{-1}$



## باب 4

### تفرق کا استعمال

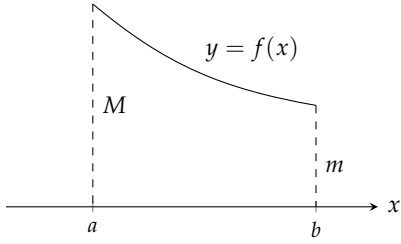
اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ ہم تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی کرتے ہیں اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کی صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔ مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ مکمل احصاء کی راہ ہموار کرتا ہے۔

#### 4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں

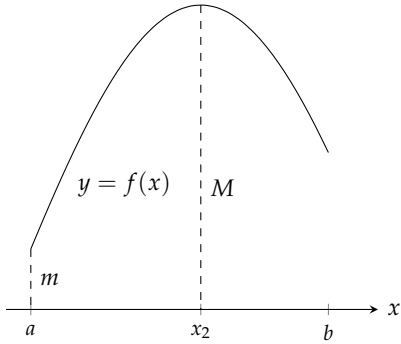
اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

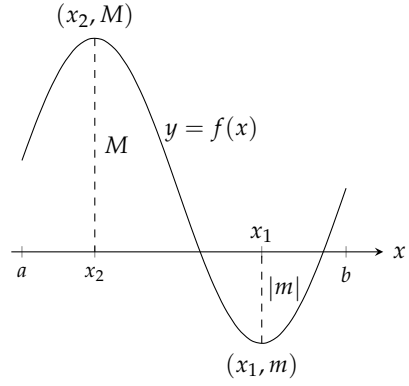
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کا اس دائرہ کار پر مطلق بلند تر قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت ہو گا جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں ان انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ مکمل احصاء کی نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔



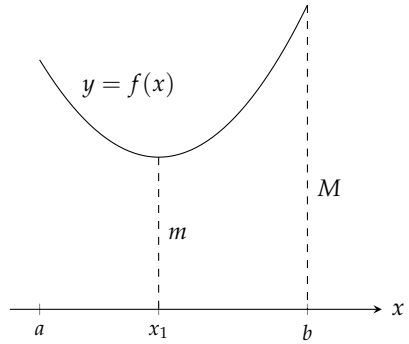
(ب) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم آخری نقطوں پر ہے۔



(د) زیادہ سے زیادہ اندرونی نقطہ جبکہ کم سے کم آخری نقطہ پر ہے۔



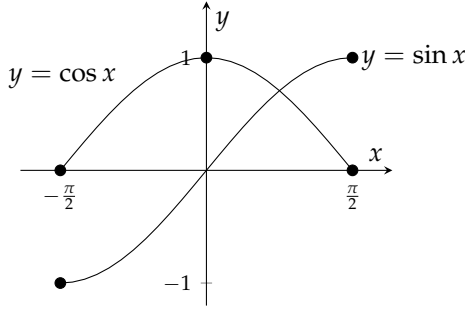
(ل) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔



(ج) کم سے کم اندرونی نقطہ جبکہ زیادہ سے زیادہ آخری نقطہ ہے۔

شکل 4.1: زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔





شکل 4.2: ترسیم برائے مثال 4.1

**مسئلہ 4.1:** استمراری تفاعل کا مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ  
بند دائرہ کار  $I$  کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل  $f$  کا  $I$  پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت  $M$  اور مطلق کم سے کم قیمت  $m$  پایا جائے گا۔ یعنی  $I$  میں ایسا  $x_1$  اور  $x_2$  پایا جائے گا کہ  $f(x_1) = m$  اور  $f(x_2) = M$  ہوں اور  $I$  میں تمام  $x$  کے لئے  $m \leq f(x) \leq M$  ہو (شکل 4.1)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

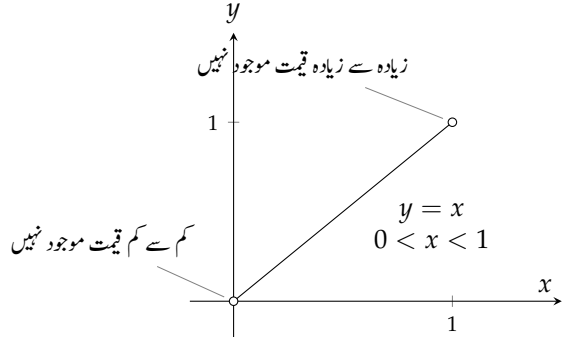
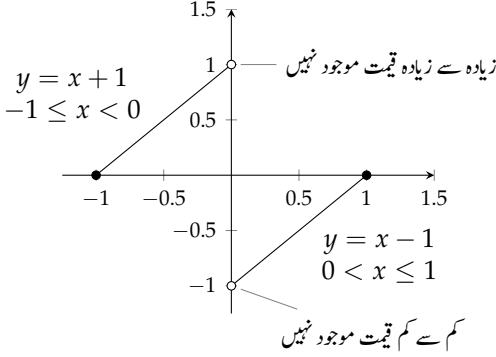
**مثال 4.1:** وقفہ  $[-\pi/2, \pi/2]$  پر تفاعل  $f(x) = \cos x$  ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور دو بار کم سے کم قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔ اسی وقفے پر تفاعل  $g(x) = \sin x$  ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور ایک بار کم سے کم قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل 4.2)۔ □

جیسا شکل 4.3 اور شکل 4.4 واضح کرتے ہیں مسئلہ 4.1 میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.4 میں تفاعل

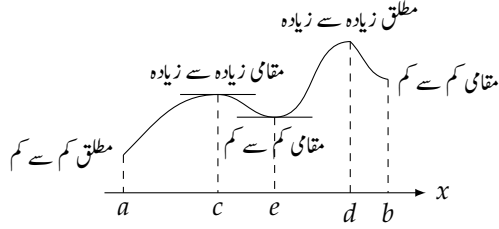
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

دکھایا گیا ہے جو وقفہ  $[-1, 1]$  پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ  $x = 0$  پر، جس کی بنا تفاعل کا نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی اس کی کوئی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔



شکل 4.4: واحد ایک نقطہ عدم استمرار کی بنا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں غیر یقینی ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.3: کھلا وقفہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں ہے۔



شکل 4.5: مقامی اور مطلق انتہا۔

مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

شکل 4.5 میں تقابل کے پانچ انتہا نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اس تقابل کا کم سے کم نقطہ  $a$  پر ہے اگرچہ  $e$  پر بھی  $x$  کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے  $f$  کی قیمت کم ہے۔ نقطہ  $c$  پر تقابل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے جبکہ  $d$  پر اس کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔

تعریف: مطلق انتہائی قیمتیں

فرض کریں تقابل  $f$  کا دائرہ کار  $D$  ہے۔ نقطہ  $c$  پر تقابل  $f$  کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تب پائی جائے گی جب  $D$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \leq f(c)$$

اور  $D$  میں  $c$  پر تب  $f$  کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جائے گی جب  $D$  میں تمام  $x$  کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \geq f(c)$$

□

مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم کو مطلق انتہا<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ انہیں عالمگیر<sup>2</sup> انتہا بھی کہتے ہیں۔

ایک جیسے قاعدہ کے تفاعل کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

مثال 4.2:

مطلق انتہا	دائرہ کار $D$	قاعدہ تفاعل
مطلق زیادہ سے زیادہ نہیں ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے	$(-\infty, \infty)$	(i) $y = x^2$
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے	$[0, 2]$	(ب) $y = x^2$
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت موجود نہیں ہے	$(0, 2]$	(ج) $y = x^2$
کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے	$(0, 2)$	(د) $y = x^2$

□

شکل 4.6 دیکھیں۔

تعریف: مقامی انتہا قیمت

تفاعل  $f$  کا کھلے دائرہ کار  $D$  میں اندرونی نقطہ  $c$  پر اس صورت مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جب  $D$  میں کسی بھی کھلا وقفہ جس میں  $c$  پایا جاتا ہو میں تمام  $x$  کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ  $c$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

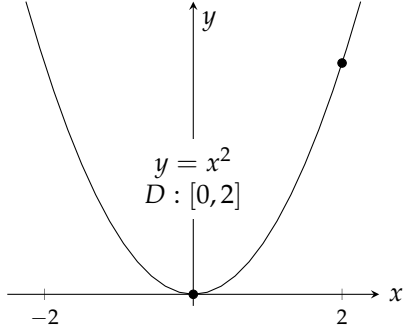
$$f(x) \geq f(c)$$

□

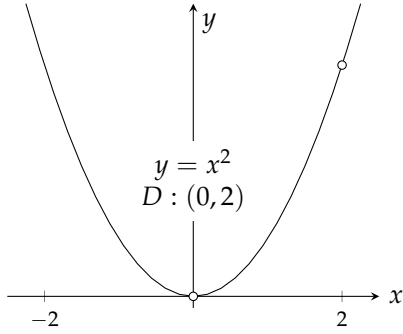
ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفہ کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔ یوں آخری سر  $c$  پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلا وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل 4.5 میں تفاعل  $f$  کا  $c$  اور  $d$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ  $a$ ،  $e$  اور  $b$  پر اس کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہیں۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت بھی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اپنی پڑوس میں بھی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ یوں تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتوں کی جدول میں مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی کم سے کم قیمتوں کی جدول میں مطلق کم سے کم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

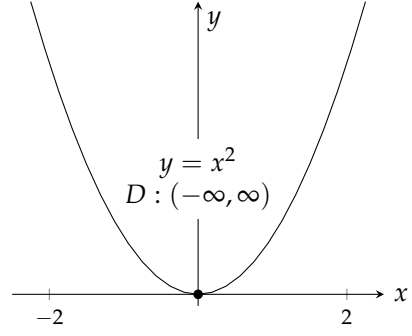
extrema<sup>1</sup>  
global<sup>2</sup>



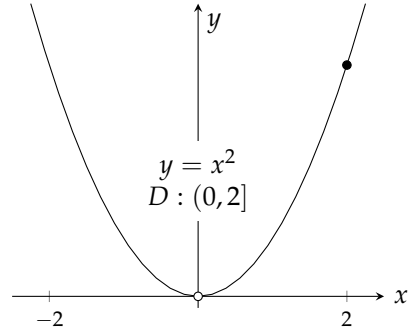
(ب) مطلق کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہیں



(د) نا مطلق زیادہ سے زیادہ اور نا مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(i) مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے

شکل 4.6: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال 4.2)۔

## انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھتا ہے تفاعل کے انتہا کی حصول کے لئے صرف چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہوگی۔

مسئلہ 4.2: یک درجی مسئلہ برائے مقامی انتہا فرض کریں تفاعل  $f$  کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ  $c$  پر  $f$  کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو اور  $c$  پر  $f'$  معین ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر  $f'(c)$  کی قیمت صفر ہوگی ہم دکھاتے ہیں کہ  $f'(c)$  مثبت نہیں ہو سکتا ہے اور کہ  $f'(c)$  منفی نہیں ہو سکتا ہے۔ صفر وہ واحد عدد ہے جو نا مثبت اور نا منفی ہے لہذا  $f'(c)$  صفر ہوگا۔

فرض کریں کہ  $c$  پر  $f$  کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.7)۔ یوں  $c$  کے قریبی پڑوس میں تمام  $x$  پر  $f(x) - f(c) \leq 0$  ہوگا۔ چونکہ  $c$  اندرونی نقطہ ہے لہذا  $f'(c)$  کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ  $x = c$  پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور  $f'(c)$  کے برابر ہیں۔ ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔ چونکہ  $c$  کے دائیں جانب  $x - c > 0$  اور  $f(x) \leq f(c)$  ہیں لہذا

$$(4.1) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ہوگا۔ اسی طرح  $c$  کے بائیں جانب  $x - c < 0$  اور  $f(x) \leq f(c)$  ہیں لہذا

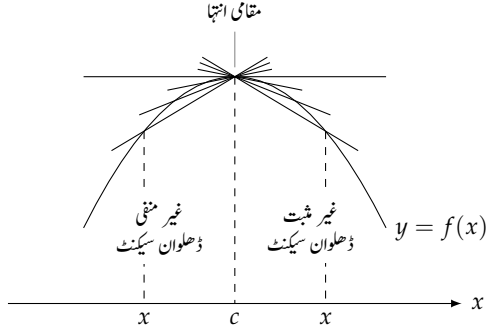
$$(4.2) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

ہوگا۔ مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کو ملا کر  $f'(c) = 0$  ملتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔ مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے  $f(x) \geq f(c)$  استعمال کرنا ہوگا جس سے مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب  $f'(c) = 0$  ہوگا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔



شکل 4.7: اندرونی نقطہ پر مقامی انتہا پر ڈھلوان صفر ہو گی (مسئلہ 4.2)۔

1. اندرونی نقطہ جہاں  $f' = 0$  ہو۔

2. اندرونی نقطہ جہاں  $f'$  غیر معین ہو۔

3.  $f$  کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل  $f$  کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں  $f'$  غیر معین یا صفر ہو کو نقطہ فاصل<sup>3</sup> کہتے ہیں۔

□

#### خلاصہ

تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کی دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں۔

عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ 4.1 ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔ اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جاسکتا ہے کہ آیا نقطہ پر زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.3: دائرہ کار  $[-2, 1]$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔  
 حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا واحد نقطہ فاصل  $f'(x) = 2x = 0$  یعنی  $x = 0$  پر ہوگا۔ ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل  $x = 0$  اور آخری نقطوں  $x = -2$  اور  $x = 1$  پر دیکھنی ہوں گی۔

$f(0) = 0$	نقطہ فاصل پر قیمت
$f(-2) = 4$	آخری نقطہ پر قیمت
$f(1) = 1$	آخری نقطہ پر قیمت

تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 ہے جو نقطہ  $x = -2$  پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ  $x = 0$  پر پائی جاتی ہے۔ □

سوال 1: دائرہ کار  $[-2, 1]$  پر تفاعل  $g(t) = 8t - t^4$  کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔  
 حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہوگا جہاں  $g'(t) = 0$  ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\ t^3 &= 2 \\ t &= 2^{1/3} \end{aligned}$$

ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں ہے۔ یوں تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی: (شکل 4.8)

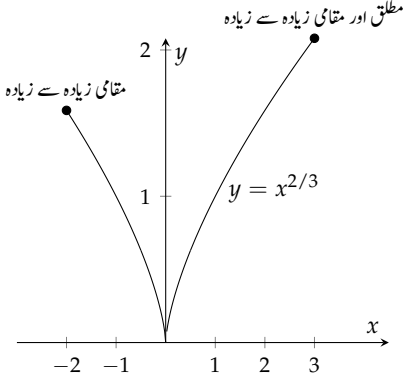
$g(-2) = -32$	مطلق کم سے کم قیمت
$g(1) = 7$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت

سوال 2: تفاعل  $h(x) = x^{2/3}$  کی  $[-2, -3]$  پر مطلق انتہائی تلاش کریں۔  
 حل: یک درجی تفرق

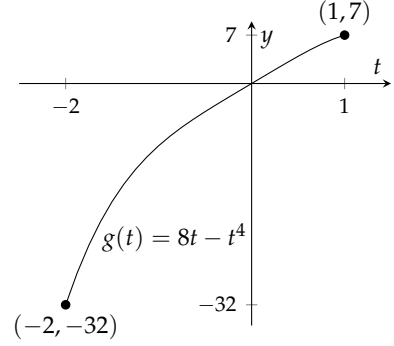
$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا ہے البتہ  $x = 0$  پر یہ غیر معین ہے۔ اس نقطہ پر اور آخری نقطوں  $x = -2$  اور  $x = 3$  پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

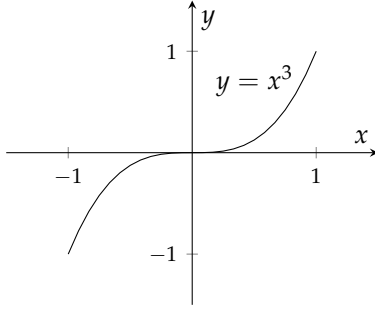
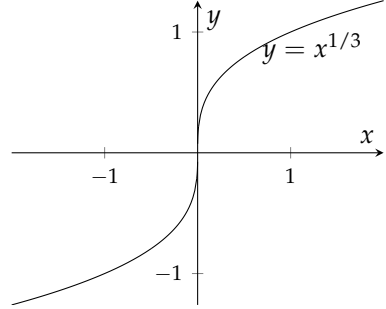
$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\ h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3} \end{aligned}$$



شکل 4.9: ترسیم برائے مثال 2



شکل 4.8: ترسیم برائے مثال 1

شکل 4.11:  $x = 0$  پر  $y = x^3$  کا کوئی انتہا نہیں پایا جاتا ہے اگرچہ اس نقطے پر  $y' = 3x^2 = 0$  ہے۔شکل 4.10: نقطہ فاصل  $x = 0$  پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

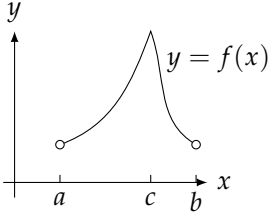
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت  $9^{1/3}$  ہے جو نقطہ  $x = 3$  پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ  $x = 0$  پر پائی جاتی ہے (شکل 4.9)۔

اگرچہ تقابل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں، ضروری نہیں ہے کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطہ پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل 4.10 اور شکل 4.11 اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

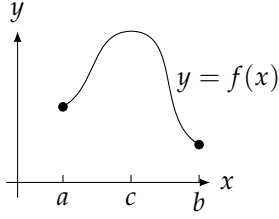
### سوالات

ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول

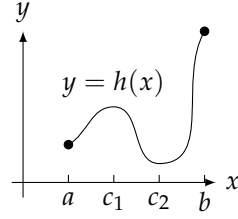




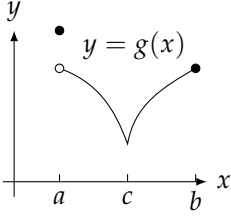
(ا)



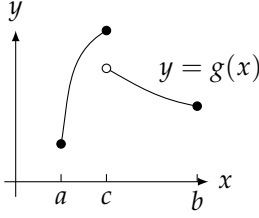
(ب)



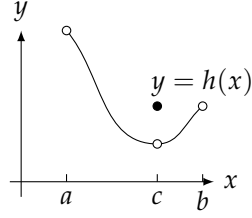
(ج)



(د)



(ه)



(و)

شکل 4.12: اشکال برائے سوال 3 تا سوال 8

کیا سوال 3 تا سوال 8 میں  $[a, b]$  کے بچے تفاعل کے مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ سمجھائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ 4.1 میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 3: شکل 4.12-ا

سوال 4: شکل 4.12-ب

سوال 5: شکل 4.12-ج

سوال 6: شکل 4.12-د

سوال 7: شکل 4.12-ه

سوال 8: شکل 4.12-و

بند وقفہ پر مطلق انتہا

سوال 9 تا سوال 24 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 9:  $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

سوال 10:  $f(x) = -x - 4, \quad -4 \leq x \leq 1$

سوال 11:  $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 2$

سوال 12:  $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

سوال 13:  $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \leq x \leq 2$

سوال 14:  $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$

سوال 15:  $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 16:  $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال 17:  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1$

سوال 18:  $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \leq x \leq 0$

سوال 19:  $f(\theta) = \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

سوال 20:  $f(x) = \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

سوال 21:  $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

سوال 22:  $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

سوال 23:  $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \leq t \leq 3$

سوال 24:  $f(t) = |t - 5|, \quad -4 \leq t \leq 7$

سوال 25 تا سوال 28 میں تفاعل کی مطلق کم سے کم اور مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال 25:  $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 26:  $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 27:  $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \leq \theta \leq 1$

سوال 28:  $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \leq \theta \leq 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال 29 تا سوال 29 میں دی گئے دائرہ کار پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال 29:

$$k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < \infty .$$

$$f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x \leq 2 .$$

$$g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < 2 .$$

$$l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty .$$

$$h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2 .$$

سوال 30:

$$k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \leq 1 .$$

$$f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

$$g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \leq 1 .$$

$$l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0 .$$

$$h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1 .$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 31: اگرچہ  $x = 0$  پر  $f(x) = |x|$  ناقابل تفرق ہے نقطہ  $x = 0$  پر  $f$  کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ کیا یہ مسئلہ 4.2 کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ  $c$  ہو تب مسئلہ 4.2 کیوں ناقابل استعمال ہوگا؟

سوال 33: اگر جفت تفاعل  $f(x)$  کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت  $x = c$  پر پائی جاتی ہو تب  $x = -c$  پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 34: اگر طاق تفاعل  $g(x)$  کی مقامی کم سے کم قیمت  $x = c$  پر پائی جاتی ہو تب کیا  $x = -c$  پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل  $f(x)$  کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونا کی صورت میں کیا ہوگا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 36: وقفہ  $[0, 1]$  پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا  $x = 0$  پر ناکوئی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 37 تا سوال 42 میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں  $f' = 0$  ہو۔ بعض اوقات  $f'$  ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں  $f'$  غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ه. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں اور جن نقطوں پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں تلاش کریں۔

$$\text{سوال 37: } f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad \left[-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}\right]$$

$$\text{سوال 38: } f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad \left[-\frac{3}{4}, 3\right]$$

$$\text{سوال 39: } f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$$

$$\text{سوال 40: } f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad \left[-1, \frac{10}{3}\right]$$

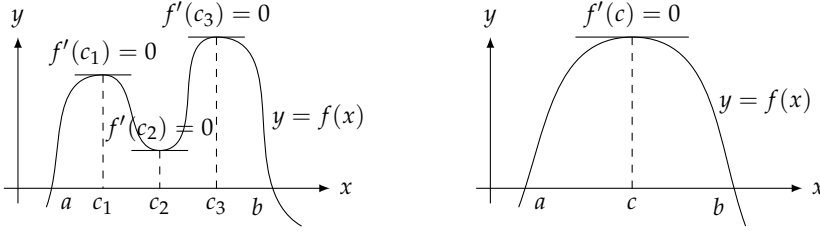
$$\text{سوال 41: } f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$$

$$\text{سوال 42: } f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$$

## 4.2 مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لحہ  $t = 0$ ) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی  $t$  سیکنڈوں میں  $s = 4.9t^2$  m کا فاصلہ طے کرے گا۔ اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لحہ  $t$  پر اس جسم کی سمتی رفتار  $v = \frac{ds}{dt} = 9.8 \text{ m s}^{-1}$  اور اسراع  $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  ہو گی۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کی اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاؤ تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ نتیجہ صریح کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 4.13: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل  $x$  محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

### مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل  $f(x)$  محور  $x$  کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب  $f(x)$  کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مثل رول (1652 – 1719) کا 300 سال پرانا مسئلہ رول ہمیں یقین دہانی کرتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

### مسئلہ 4.3: مسئلہ رول<sup>4</sup>

فرض کریں بند وقفہ  $[a, b]$  کے ہر نقطہ پر تفاعل  $y = f(x)$  استمراری ہے اور وقفہ کی اندرون  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

$$f(a) = f(b) = 0$$

تب  $(a, b)$  میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ  $c$  ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل 4.13)۔

$$f'(c) = 0$$

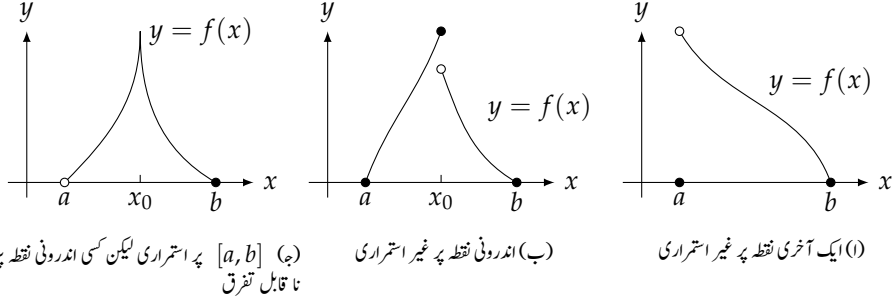
ثبوت: چونکہ  $f$  استمراری ہے لہذا  $[a, b]$  پر  $f$  کے مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

1. ان اندرونی نقطوں پر جہاں  $f'$  ہو۔

2. ان اندرونی نقطوں پر جہاں  $f'$  غیر معین ہو۔

3. تفاعل کے دائرہ کار کی آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں  $a$  اور  $b$  ہیں۔

<sup>4</sup>Rolle's theorem



شکل 4.14: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر  $f$  کا تفریق پایا جاتا ہے۔ یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ  $c$  پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ 4.2 کے تحت  $f'(c) = 0$  ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت دونوں  $a$  یا  $b$  پر پائے جاتے ہوں تب  $f$  مستقل ہو گا۔ یوں  $f' = 0$  ہو گا لہذا وقفے کے کسی بھی نقطہ کو  $c$  لیا جاسکتا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

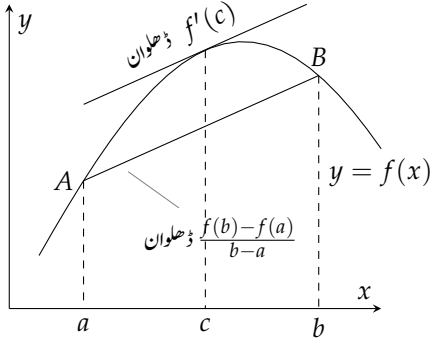
مسئلہ 4.3 میں دیے شرائط لازمی ہیں۔ اگر صرف ایک نقطہ پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترمیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل 4.14)۔

مثال 4.4: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ  $[-3, 3]$  کے ہر نقطہ پر استمراری ہے اور  $(-3, 3)$  کے ہر نقطہ پر قابل تفریق ہے۔

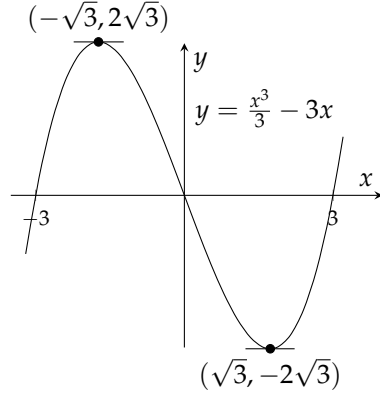
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

چونکہ  $f(-3) = f(3) = 0$  ہے لہذا مسئلہ رول کے تحت  $a = -3$  اور  $b = 3$  کھلا وقفہ کے بیچ کم سے کم ایک نقطہ پر  $f' = 0$  ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں  $f'(x) = x^2 - 3$  دو نقطوں  $x = \sqrt{3}$  اور  $x = -\sqrt{3}$  پر صفر کے برابر ہے (شکل 4.15)۔

□



شکل 4.16: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ  $A$  اور  $B$  کے بیچ کہیں پر تقاطع کا مماس قطع  $AB$  کے متوازی ہو گا۔



شکل 4.15: ترسیم برائے مثال 4.4

### مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترجمانی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل 4.16)۔ قطع  $AB$  کے متوازی نقطہ  $A$  اور  $B$  کے بیچ کہیں پر تقاطع کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کی ڈھلوان قطع کی ڈھلوان کے برابر ہوگی۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ اوسط قیمت فرض کریں بند وقفہ  $[a, b]$  کے ہر نقطہ پر  $y = f(x)$  استمراری ہے اور اس کی اندرون  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر  $f$  قابل تفرق ہے تب  $(a, b)$  میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

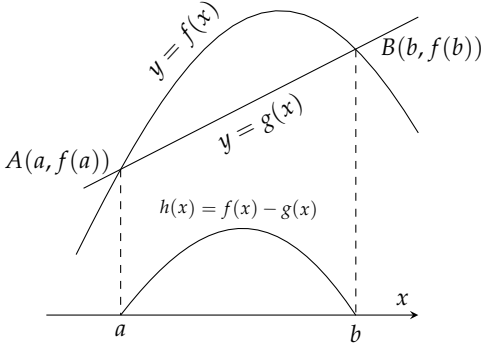
$$(4.3) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ثبوت: ہم  $f$  کی ترسیم پر دو نقطوں  $A(a, f(a))$  اور  $B(b, f(b))$  کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل 4.17)۔ یہ لکیر درج ذیل تقاطع کی ترسیم ہوگی۔

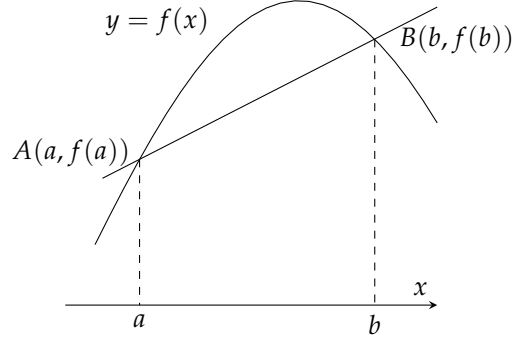
$$(4.4) \quad g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (\text{نقطہ ڈھلوان صورت})$$

نقطہ  $x$  پر  $f$  اور  $g$  کے بیچ انتصابی فاصلہ

$$(4.5) \quad \begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$



(ب)  $f(x)$  اور  $g(x)$  کے بیچ افقی فاصلہ  $h(x)$  ہے۔



(i) وقفہ  $[a, b]$  پر  $f$  اور قطع  $AB$  کے ترسیم۔

شکل 4.17: مسئلہ اوسط قیمت۔

ہو گا۔ شکل 4.17-ب میں  $f$ ،  $g$  اور  $h$  دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل  $h$  وقفہ  $[a, b]$  پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل  $h$  وقفہ  $[a, b]$  پر استمراری اور  $(a, b)$  پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفہ پر  $f$  اور  $g$  استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ  $f$  اور  $g$  دونوں نقطہ  $A$  اور  $B$  سے گزرتے ہیں لہذا  $h(a) = h(b) = 0$  ہے۔ یوں  $(a, b)$  میں کسی نقطہ  $c$  پر  $h'(c) = 0$  ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات 4.3 میں درکار ہے۔

مساوات 4.3 کی تصدیق کی خاطر ہم  $x$  کے لحاظ سے مساوات 4.5 کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں  $x = c$  پر کرتے ہیں۔

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{تفرق})$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x = c)$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (h'(c) = 0)$$

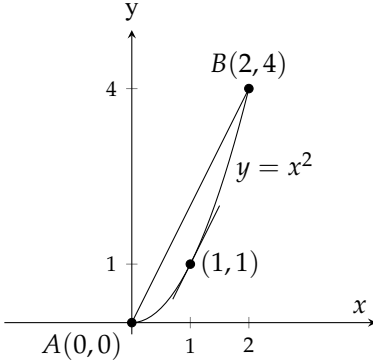
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

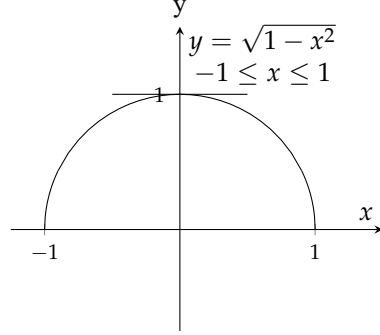
□

دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ  $a$  یا  $b$  پر  $f$  کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں ہے البتہ ان نقطوں پر  $f$  کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل 4.18)۔ ہم عموماً  $c$  کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ،  $c$  موجود ہے۔ اگلی مثال کی طرح





شکل 4.19: نقطہ  $c = 1$  پر مماس قطع  $AB$  کے متوازی ہے (مثال 4.5)



شکل 4.18: اگرچہ  $y = \sqrt{1-x^2}$  نقطہ  $-1$  اور  $1$  پر ناقابل تفرق ہے یہ  $[-1, 1]$  پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔

بعض اوقات ہم  $c$  کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذ و نادر ہو گا۔

مثال 4.5: وقفہ  $0 \leq x \leq 2$  پر تعامل  $f(x) = x^2$  استمراری ہے اور  $0 < x < 2$  پر یہ قابل تفرق ہے (شکل 4.19)۔ چونکہ  $f(0) = 0$  اور  $f(2) = 4$  ہیں لہذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ  $c$  پر تفرق  $f'(x) = 2x$  کی قیمت لازماً  $\frac{4-0}{2-0} = 2$  ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم  $2x = 2$  کو حل کرتے ہوئے  $x = c = 1$  حاصل کر پاتے ہیں۔ □

### طبیعی تشریح

اگر ہم  $[a, b]$  پر  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  کو  $f$  کی اوسط تبدیلی اور  $f'(c)$  کو لمحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لمحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال 4.6: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ ان 8 سیکنڈوں کے لئے گاڑی کی اوسط رفتار  $\frac{120}{8} = 15 \text{ m s}^{-1}$  ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی لمحہ رفتار پچاس ٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔ □

## نتائج صریح اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا نتیجہ صریح اس کا جواب دیتا ہے۔

نتیجہ صریح 4.1: صفر تفرق کے تفاعل مستقل ہوں گے  
اگر وقفہ  $I$  کے ہر نقطہ پر  $f'(x) = 0$  ہو تب  $I$  میں تمام  $x$  پر  $f(x) = C$  ہو گا جہاں  $C$  مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ  $I$  پر تفاعل  $f$  کی قیمت مستقل ہو تب  $I$  پر  $f$  قابل تفرق ہو گا اور  $I$  میں تمام  $x$  پر  $f'(x) = 0$  ہو گا۔ نتیجہ صریح اس کا الٹ پیش کرتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ  $I$  پر  $f$  کی قیمت مستقل ہے۔ ہم  $I$  میں ہر دو نقطوں  $x_1$  اور  $x_2$  پر  $f(x_1) = f(x_2)$  دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں  $x_1$  اور  $x_2$  وقفہ  $I$  میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بائیں سے دائیں جانب ہے لہذا  $x_1 < x_2$  ہو گا۔ یوں  $[x_1, x_2]$  پر  $f$  مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ کہ ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔ یوں  $x_1$  اور  $x_2$  کے بیچ کسی نقطہ  $c$  پر

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

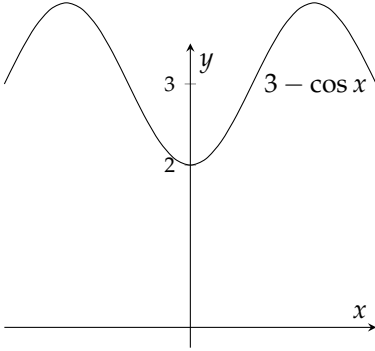
ہو گا۔ چونکہ پورے  $I$  پر  $f' = 0$  ہے لہذا اس مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

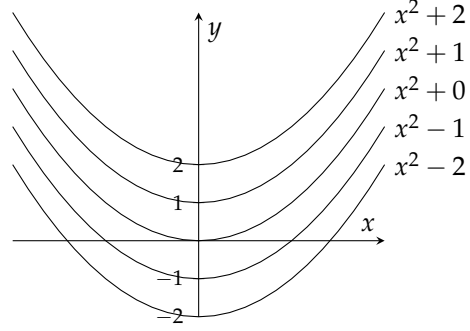
□

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا ہم اسراع سے پیچھے کی طرف چلتے ہوئے رفتار اور ہٹاؤ تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ کا جواب اگلا نتیجہ صریح پیش کرتا ہے۔

نتیجہ صریح 4.2: ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا  
اگر وقفہ  $I$  کے ہر نقطہ پر  $f'(x) = g'(x)$  ہو تب ایسا مستقل  $C$  موجود ہو گا کہ  $I$  میں تمام  $x$  پر  $f(x) = g(x) + C$  ہو۔



شکل 4.21: ترسیم برائے مثال 4.7



شکل 4.20: نتیجہ صریح 4.2 کہتا ہے کہ ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں صرف انتظامی فرق پایا جاتا ہے۔

ثبوت نتیجہ صریح:  $I$  میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق  $h = f - g$  کا تفرق

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

ہو گا۔ یوں نتیجہ صریح 4.1 کے تحت  $I$  پر  $h(x) = C$  ہو گا۔ یوں  $f(x) - g(x) = C$  یا  $f(x) = g(x) + C$  ہو گا۔

□

نتیجہ صریح 4.2 کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا مستقل فرق ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ  $(-\infty, \infty)$  پر  $f(x) = x^2$  کا تفرق  $2x$  ہے۔ ایسا دوسرا تفاعل جس کا  $(-\infty, \infty)$  پر تفرق  $2x$  ہو گا کلیہ لازماً  $x^2 + C$  ہو گا (شکل 4.20)۔

مثال 4.7: ایسا تفاعل  $f(x)$  تلاش کریں جس کا تفرق  $\sin x$  ہو اور جو نقطہ  $(0, 2)$  سے گزرتا ہو۔  
حل: چونکہ  $g(x) = -\cos x$  کا تفرق بھی  $\sin x$  ہے لہذا  $f(x) = -\cos x + C$  ہو گا۔ دیا گیا نقطہ اس میں پر کرتے ہوئے مستقل  $C$  حاصل کرتے ہیں۔

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2 \implies C = 3$$

□

یوں درکار تفاعل  $f(x) = -\cos x + 3$  ہے (شکل 4.21)۔

اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاؤ کا حصول

سطح زمین کے قریب جہاں  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاؤ تلاش کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار  $v$  ایسا تفاعل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ  $g(t) = 9.8t$  کا تفرق 9.8 ہے لہذا نتیجہ صریح 4.2 کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

ہو گا جہاں  $C$  مستقل ہے۔ لہ  $t = 0$  پر جسم ساکن ہو گا لہذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \implies C = 0$$

ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تفاعل  $v(t) = 9.8t$  ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ  $h(t) = 4.9t^2$  کا تفرق  $9.8t$  ہے لہذا نتیجہ صریح 4.2 کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

ہو گا جہاں  $C$  مستقل ہے۔ چونکہ لہ  $t = 0$  پر ہٹاؤ صفر ہے لہذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \implies C = 0$$

یعنی  $s(t) = 4.9t^2$  ہو گا۔

کسی تفاعل کی شرح تبدیلی سے تفاعل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

بڑھتا تفاعل اور گھٹتا تفاعل

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا نتیجہ صریح جو اس کا جواب دیتا ہے کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تفاعل کا تفرق مثبت اور گھٹے ہوئے تفاعل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف: فرض کریں وقفہ  $I$  پر تفاعل  $f$  معین ہے اور اس وقفہ پر  $x_1$  اور  $x_2$  کوئی بھی دو نقطے ہیں۔

1. اگر  $x_1 < x_2$  کی صورت میں  $f(x_1) < f(x_2)$  ہو تب  $I$  پر  $f$  بڑھتا تفاعل کہلاتا ہے۔

2. اگر  $x_1 < x_2$  کی صورت میں  $f(x_1) > f(x_2)$  ہو تب  $I$  پر  $f$  گھٹتا<sup>6</sup> قائل کہلاتا ہے۔

□

نتیجہ صریح 4.3: بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کا پہلا تفرقی پرکھ  
فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  استمراری اور  $(a, b)$  پر  $f$  قابل تفرق ہے۔

• اگر  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر  $f' > 0$  ہو تب  $[a, b]$  پر  $f$  بڑھتا ہے۔

• اگر  $(a, b)$  کے ہر نقطہ پر  $f' < 0$  ہو تب  $[a, b]$  پر  $f$  گھٹتا ہے۔

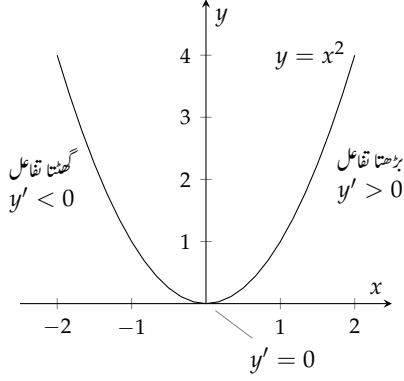
ثبوت نتیجہ صریح: فرض کریں  $[a, b]$  میں  $x_1$  اور  $x_2$  کوئی دو نقطے ہیں جہاں  $x_1 < x_2$  ہے۔ وقفہ  $[x_1, x_2]$  پر مسئلہ اوسط قیمت تفاعل  $f$  کے لئے کہتا ہے کہ

$$(4.6) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

ہو گا جہاں  $x_1$  اور  $x_2$  کے بیچ  $c$  ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ  $x_2 - x_1$  مثبت قیمت ہے لہذا مساوات 4.6 کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہو گی جو  $f'(c)$  کی ہے۔ یوں  $(a, b)$  پر مثبت  $f'(c)$  کی صورت میں  $f(x_2) > f(x_1)$  ہو گا جبکہ  $(a, b)$  پر منفی  $f'(c)$  کی صورت میں  $f(x_2) < f(x_1)$  ہو گا۔

□

مثال 4.8: وقفہ  $(-\infty, 0)$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کا تفرق  $f'(x) = 2x < 0$  ہے لہذا اس وقفے پر  $f$  گھٹنے گا۔  
وقفہ  $(0, \infty)$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کا تفرق  $f'(x) = 2x > 0$  ہے لہذا اس وقفے پر  $f$  بڑھے گا (شکل 4.22)۔ □



شکل 4.22: ترسیم برائے مثال 4.8

## سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں  $c$  کی تلاش  
سوال 1 تا سوال 4 میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لئے  $c$  کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

سوال 1:  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ,  $[0, 1]$

سوال 2:  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $[0, 1]$

سوال 3:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $[\frac{1}{2}, 2]$

سوال 4:  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $[1, 3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال

سوال 5 تا سوال 8 میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5:  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $[-1, 8]$

سوال 6:  $f(x) = x^{4/5}, [0, 1]$

سوال 7:  $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, [0, 1]$

سوال 8:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

سوال 9: درج ذیل تفاعل  $x = 0$  اور  $x = 1$  پر صفر کے برابر ہے اور  $(0, 1)$  پر قابل تفرق ہے لیکن  $(a, b)$  پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ  $(0, 1)$  پر کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10: وقفہ  $[0, 2]$  پر  $a$ ،  $m$  اور  $b$  کی کون سی قیمتوں کے لئے درج ذیل تفاعل مسئلہ اوسط قیمت کی قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال 11:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کے ایک درجی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

1.  $y = x^2 - 4$

2.  $y = x^2 + 8x + 15$

3.  $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

4.  $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

ب. مسئلہ رول کی مدد سے ثابت کریں کہ  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  کے ہر دو صفر کے بیچ  $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$  کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 12: فرض کریں کہ وقفہ  $[a, b]$  میں  $f'''$  استمراری ہے اور اس وقفہ پر  $f$  کے تین صفر پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس وقفہ پر  $f''$  کا کم سے کم ایک صفر پایا جائے گا۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال 13: دکھائیں کہ اگر پورے  $[a, b]$  پر  $f'' > 0$  ہو تب  $[a, b]$  میں  $f'$  کا زیادہ سے زیادہ ایک صفر پایا جائے گا۔ اگر  $[a, b]$  پر  $f'' < 0$  ہو تب کیا ہو گا؟

سوال 14: دکھائیں کہ کبھی کبھی رکنی کے صفروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ممکن ہے۔

### نظریہ اور مثالیں

سوال 15: دکھائیں کہ دو گھنٹوں کی صفر میں کسی لمحہ پر گاڑی کا رفتار پتیا ضرور دو گھنٹوں کی اوسط رفتار دکھائے گا۔

سوال 16: تبدیلی درجہ حرارت برف سے حرارت پتیا کو نکال کر اچلتے ہوئے پانی میں رکھنے سے اس کا درجہ حرارت  $14^\circ\text{C}$  سینکڑوں میں  $-19^\circ\text{C}$  سے بڑھ کر  $100^\circ\text{C}$  ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ اس دوران درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح کسی لمحے پر  $8.5^\circ\text{C s}^{-1}$  ضرور ہو گی۔

سوال 17: فرض کریں کہ وقفہ  $[0, 1]$  پر قابل تفرق تفاعل  $f$  کا تفرق کبھی صفر نہیں ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ  $f(0) \neq f(1)$  ہو گا۔

سوال 18: دکھائیں کہ  $a$  اور  $b$  کی کسی بھی قیمتوں کے لئے  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$  ہو گا۔

سوال 19: فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  قابل تفرق ہے اور  $f(b) < f(a)$  ہے۔ کیا  $[a, b]$  پر  $f'$  کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟

سوال 20: فرض کریں  $[a, b]$  پر  $f$  اور  $g$  قابل تفرق ہیں اور  $f(a) = g(a)$  اور  $f(b) = g(b)$  ہیں۔ دکھائیں کہ  $a$  اور  $b$  کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں  $f$  اور  $g$  کی تریسمات کے تماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال 21: فرض کریں  $x$  کی ہر قیمت کے لئے  $f$  قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ  $f(1) = 1$  ہے اور  $(-\infty, 1)$  پر  $f' < 0$  ہے اور  $(1, \infty)$  پر  $f' > 0$  ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام  $x$  پر  $f(x) \geq 1$  ہو گا۔

ب. کیا  $f'(1) = 0$  لازماً ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔



سوال 22: فرض کریں  $f(x) = px^2 + qx + r$  بند وقفہ  $[a, b]$  پر معین ہے۔ دکھائیں کہ  $(a, b)$  میں ٹھیک ایک نقطہ  $c$  پر  $f$  مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجے پر پورا اترتا ہے۔

سوال 23: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \sin x \sin(x+2) - \sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 24: اگر دو تفاعل  $f(x)$  اور  $g(x)$  کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک جیسی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک جیسے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 25:

ا. دکھائیں کہ تفاعل  $g(x) = \frac{1}{x}$  اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھٹتا ہے۔

ب. اگر جزو (i) کا نتیجہ درست ہو تب  $g(1) = 1$  کس طرح  $g(-1) = -1$  سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال 26: فرض کریں وقفہ  $[a, b]$  میں تفاعل  $f$  معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر  $f$  پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$f' \text{ سے زیادہ سے زیادہ } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f' \text{ سے کم سے کم}$$

جہاں کم سے کم  $f'$  اور زیادہ سے زیادہ  $f'$  سے مراد  $[a, b]$  پر بالترتیب  $f'$  کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

سوال 27: اگر  $0 \leq x \leq 0.1$  پر  $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$  ہو اور  $f(0) = 1$  ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے  $f(0.1)$  کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 28: اگر  $0 \leq x \leq 0.1$  پر  $f'(x) = 1/(1 - x^4)$  ہو اور  $f(0) = 2$  ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے  $f(0.1)$  کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 29: ہندسی اوسط۔ دو مثبت اعداد  $a$  اور  $b$  کی ہندسی اوسط<sup>7</sup> سے مراد عدد  $\sqrt{ab}$  ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجے میں مثبت اعداد کے وقفہ  $[a, b]$  پر تفاعل  $f(x) = \frac{1}{x}$  کے لئے  $c$  کی قیمت  $\sqrt{ab}$  ہے۔

سوال 30: حسابی اوسط۔ دو اعداد  $a$  اور  $b$  کی حسابی اوسط<sup>8</sup>  $\frac{a+b}{2}$  ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت میں وقفہ  $[a, b]$  پر تفاعل  $f(x) = x^2$  کے لئے  $c$  کی قیمت  $\frac{a+b}{2}$  ہوگی۔

<sup>7</sup> geometric mean  
<sup>8</sup> arithmetic mean

## تفریق سے تفاعل کا حصول

سوال 31: فرض کریں  $f(-1) = 3$  اور تمام  $x$  کے لئے  $f'(x) = 0$  ہے۔ کیا تمام  $x$  کے لئے  $f(x) = 3$  ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: فرض کریں  $f(0) = 5$  اور تمام  $x$  کے لئے  $f'(x) = 2$  ہیں۔ کیا تمام  $x$  کے لئے  $f(x) = 2x + 5$  ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: فرض کریں تمام  $x$  کے لئے  $f'(0) = 2x$  ہے۔ درج ذیل صورتوں میں  $f(2)$  تلاش کریں۔

ا.  $f(0) = 0$       ب.  $f(1) = 0$       ج.  $f(-2) = 3$

سوال 34: جن تفاعل کا تفریق مستقل ہو ان کے بارے میں کیا کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35 تا سوال 40 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفریق دیا گیا ہے۔

سوال 35: (ا)  $y' = x$ ، (ب)  $y' = x^2$ ، (ج)  $y' = x^3$

سوال 36: (ا)  $y' = 2x$ ، (ب)  $y' = 2x - 1$ ، (ج)  $y' = 3x^2 + 2x - 1$

سوال 37: (ا)  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ، (ب)  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ ، (ج)  $y' = 5 + \frac{1}{x^2}$

سوال 38: (ا)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ب)  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، (ج)  $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

سوال 39: (ا)  $y' = \sin 2t$ ، (ب)  $y' = \cos \frac{t}{2}$ ، (ج)  $y' = \sin 2t + \cos \frac{t}{2}$

سوال 40: (ا)  $y' = \sec^2 \theta$ ، (ب)  $y' = \sqrt{\theta}$ ، (ج)  $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2 \theta$

سوال 41 تا سوال 44 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفریق دیا گیا ہے اور جو دیے گئے نقطہ سے گزرتا ہے۔

سوال 41:  $f'(x) = 2x - 1$ ،  $N(0, 0)$

سوال 42:  $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$ ،  $N(-1, 1)$

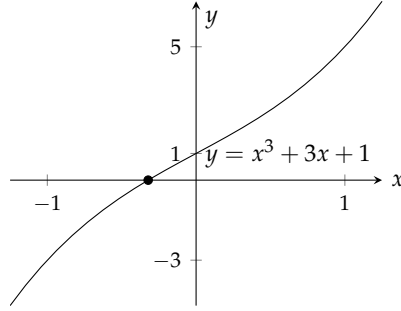
سوال 43:  $r'(\theta) = 8 - \csc^2 \theta$ ،  $N(\frac{\pi}{4}, 0)$

سوال 44:  $r'(t) = \sec t \tan t - 1$ ،  $N(0, 0)$

## صفروں کی گنتی

مساوات  $f(x) = 0$  کو اعدادی طریقہ سے حل کرنے سے پہلے ہم عموماً مطلوبہ وقفہ پر مساوات کی متوقع صفروں کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔ بعض اوقات نتیجہ صریح 4.3 کی مدد سے ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

درج ذیل فرض کریں۔



شکل 4.23: کثیر رکنی  $y = x^3 + 3x + 1$  کا واحد صفر دکھایا گیا ہے۔

1.  $[a, b]$  پر  $f$  استمراری اور  $(a, b)$  پر قابل تفرق ہے۔

2.  $f(a)$  اور  $f(b)$  کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں۔

3. پورے  $(a, b)$  پر  $f' > 0$  اور یا پورے  $(a, b)$  پر  $f' < 0$  ہے۔

تب  $a$  اور  $b$  کے بیچ  $f$  کا ٹھیک ایک صفر پایا جائے گا۔ چونکہ یہ پورے  $[a, b]$  پر بڑھ رہا ہے اور یا پورے  $[a, b]$  پر گھٹ رہا ہے لہذا یہ  $x$  محور کو ایک ہی بار قطع کر سکتا ہے۔ اس کے باوجود مسئلہ 2.9 کے تحت اس کا کم سے کم ایک صفر ہو گا۔ مثال کے طور پر  $[-1, 1]$  پر  $f(x) = x^3 + 3x + 1$  قابل تفرق ہے،  $f(-1) = -3$  اور  $f(1) = 5$  کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں، اور تمام  $x$  کے لئے  $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$  ہے لہذا  $[-1, 1]$  پر  $f$  کا ٹھیک ایک صفر پایا جاتا ہے (شکل 4.23)۔

سوال 45 تا سوال 52 میں دکھائیں کہ دیے گئے وقفہ پر تفاعل کا صرف ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 45:  $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

سوال 46:  $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

سوال 47:  $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

سوال 48:  $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3, \quad (-1, 1)$

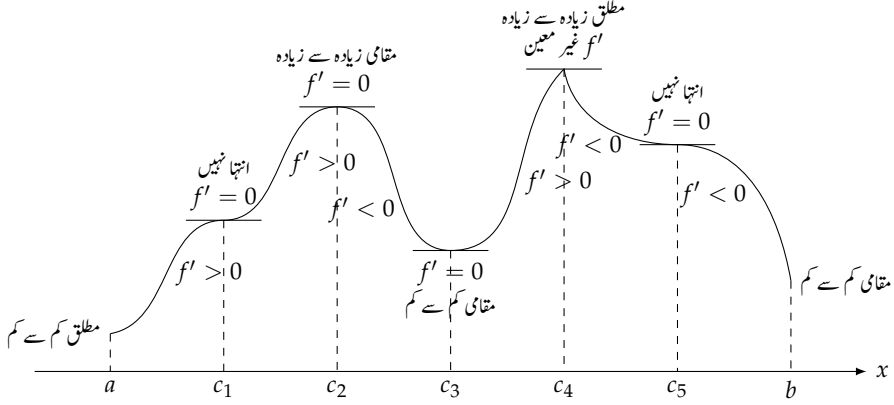
سوال 49:  $r(\theta) = \theta + \sin^2(\frac{\theta}{3}) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 50:  $r(\theta) = 2\theta - \cos^2 \theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 51:  $r(\theta) = \sec \theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

سوال 52:  $r(\theta) = \tan \theta - \cot \theta - \theta, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

کمپیوٹر کا استعمال  
سوال 53:



شکل 4.24: بعض نقطہ فاصل پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے اور بعض پر نہیں۔

ا. ایسا کثیر رکنی  $f(x)$  تشکیل دیں جس کے صفر  $x = -2, -1, 0, 1, 2$  پر پائے جاتے ہوں۔

ب.  $f(x)$  اور  $f'(x)$  کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ آپ کو کیا خوبی نظر آتی ہے۔

ج. کیا  $g(x) = \sin x$  اور اس کا تفریق  $g'(x)$  بھی ایسی خوبی رکھتے ہیں؟

### 4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک درجی تفریق پر کھ

اس حصہ میں مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کے لئے تفاعل کے نقطہ فاصل کو پرکھنا دکھایا جائے گا۔

#### 4.3.1 پرکھ

جیسا شکل 4.24 میں دکھایا گیا ہے تفاعل  $f$  کے بعض نقطہ فاصل پر تفاعل کی مقامی انتہا پائی جائے گی اور بعض پر نہیں۔ یہ راز نقطہ کے بالکل قریب  $f'$  کی علامت میں پوشیدہ ہے۔ جیسا جیسا  $x$  بائیں سے دائیں رخ بڑھتا ہے  $f$  کی قیمت وہاں بڑھتی ہے جہاں  $f' > 0$  ہو اور  $f$  کی قیمت وہاں گھٹتی ہے جہاں  $f' < 0$  ہو۔

آپ (شکل 4.24 سے) دیکھ سکتے ہیں کہ مقامی کم سے کم نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں  $f' < 0$  جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں  $f' > 0$  ہو گا۔ (آخری نقطہ کی صورت میں نقطہ کے صرف ایک طرف پر  $f'$  کی قیمت دیکھی جاسکتی ہے۔) یوں مقامی کم سے کم نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے)۔ اسی طرح مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں  $f' > 0$  جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں  $f' < 0$  ہو گا۔ یوں اس نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے)۔

اس مشاہدہ سے مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کا پرکھ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: مقامی انتہائی قیمت کا ایک درجی تفرقی پرکھ  
درج ذیل پرکھ استمراری تفاعل  $f(x)$  کے لئے ہیں۔

نقطہ فاصل  $c$  پر:

1. اگر  $c$  پر  $f'$  کی علامت مثبت سے تبدیل ہو کر منفی ہو جائے ( $x < c$  پر  $f' > 0$  اور  $x > c$  پر  $f' < 0$ ) تب  $c$  پر  $f$  کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی (شکل 4.25)۔

2. اگر  $c$  پر  $f'$  کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہو جائے ( $x < c$  پر  $f' < 0$  اور  $x > c$  پر  $f' > 0$ ) تب  $c$  پر  $f$  کی مقامی کم سے کم قیمت ہو گی (شکل 4.26)۔

3. اگر  $c$  پر  $f'$  کی علامت تبدیل نہ ہو ( $c$  کے دونوں اطراف  $f'$  کی علامت ایک جیسی ہے) تب  $c$  پر  $f$  کی کوئی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 4.27)۔

بائیں آخری نقطہ  $a$  پر:

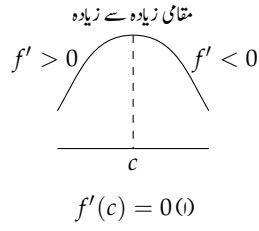
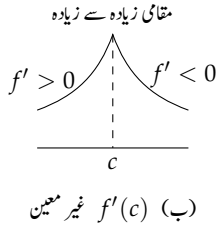
اگر  $x > a$  پر  $f' < 0$  ( $f' > 0$ ) ہو تب  $a$  پر  $f$  کا مقامی زیادہ سے زیادہ (مقامی کم سے کم) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.28-ا، ب)۔

دائیں آخری نقطہ  $b$  پر:

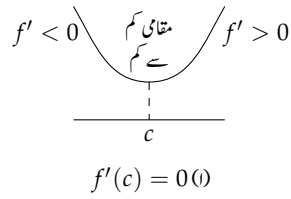
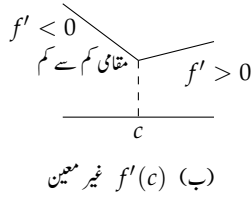
اگر  $x < b$  پر  $f' < 0$  ( $f' > 0$ ) ہو تب  $b$  پر  $f$  کا مقامی کم سے کم (مقامی زیادہ سے زیادہ) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.28-ج، د)۔

مثال 4.9: درج ذیل تفاعل کے نقطہ فاصل تلاش کریں۔

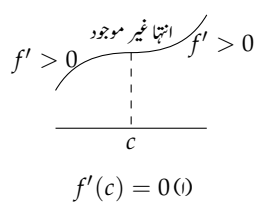
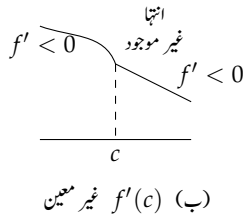
$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$



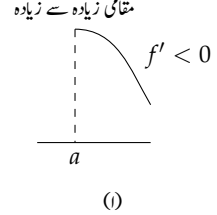
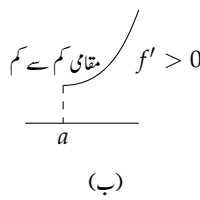
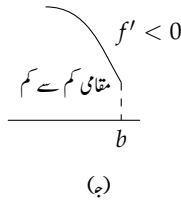
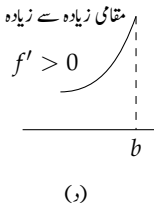
شکل 4.25: پرکھ برائے مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت۔



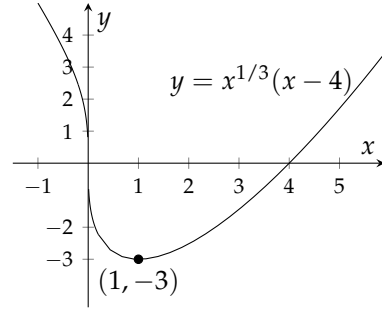
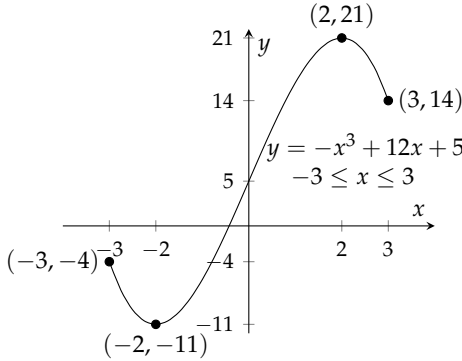
شکل 4.26: پرکھ برائے مقامی کم سے کم قیمت۔



شکل 4.27: پرکھ برائے عدم موجودگی انتہائی قیمت۔



شکل 4.28: پرکھ برائے بائیں اور دائیں نقطوں پر نقطہ انتہا۔



شکل 4.29: ترسیم برائے مثال 4.9

شکل 4.30: ترسیم برائے مثال 4.10

ان وقفوں کی نشاندہی کریں جس پر  $f$  بڑھتا ہے اور جس پر  $f$  گھٹتا ہے۔ تقابل کے مقامی اور مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔  
حل: تقابل تمام حقیقی اعداد کے لئے معین اور استمراری ہے۔ ایک درجی تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

ہے جو  $x = 1$  پر صفر اور  $x = 0$  پر غیر معین ہے۔  $f$  کے دائرہ کار میں کوئی آخری نقطہ نہیں پایا جاتا ہے لہذا نقطہ فاصل  $x = 0$  اور  $x = 1$  وہ نقطے ہیں جہاں تقابل کے انتہائی قیمتیں ممکن ہیں۔

یہ نقطے فاصل  $x$  محور کو ان حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جس پر  $f'$  یا مثبت اور یا منفی ہے۔ نقطہ فاصل کے دونوں اطراف  $f$  کی علامتوں کو دیکھ کر ہم فیصلہ انتہائی نقطہ کی نوعیت جان سکتے ہیں۔ وقفہ  $(-\infty, 0)$  پر  $f$  گھٹتا ہے، وقفہ  $(0, 1)$  پر گھٹتا ہے اور وقفہ  $(1, \infty)$  پر بڑھتا ہے۔ مسئلہ 4.5 کے تحت  $x = 0$  (جہاں  $f'$  کی علامت تبدیل نہیں ہوتی) پر کوئی انتہائی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جبکہ  $x = 1$  (جہاں  $f'$  کی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے) پر مقامی کم سے کم نقطہ پایا جائے گا۔

مقامی کم سے کم قیمت  $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$  جو تقابل کی مطلق کم سے کم قیمت بھی ہے (شکل 4.29)۔ □

مثال 4.10: درج ذیل کے لئے وہ وقفہ تلاش کریں جہاں  $f$  گھٹتا ہو اور جہاں  $f$  بڑھتا ہو۔

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \quad -3 \leq x \leq 3$$

تفاعل کے انتہائی قیمتیں کیا ہیں اور کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟  
حل: تفاعل اپنے دائرہ کار  $[-3, 3]$  پر استمراری ہے (شکل 4.30)۔ اس کا ایک درجی تفرق

$$g'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x+2)(x-2)$$

وقفہ  $[-3, 3]$  کے تمام نقطوں پر معین ہے، اور اس کی قیمت نقطہ  $x = -2$  اور  $x = 2$  پر صفر ہے۔ نقطے فاصلہ دائرہ کار کو ان خطوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں  $g'$  کی قیمت منفی یا مثبت ہو۔ ہم  $g'$  کی علامتوں کو دیکھ کر مسئلہ 4.5 کی مدد سے تفاعل کا تجزیہ کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ  $x = -3$  اور  $x = 2$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتیں پائی جاتی ہیں جبکہ  $x = -2$  اور  $x = 3$  پر مقامی کم سے کم قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ ان نقطوں پر تفاعل  $g(x) = -x^3 + 12x + 5$  کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$g(-3) = -4, \quad g(2) = 21 \quad \text{مقامی زیادہ سے زیادہ}$$

$$g(-2) = -11, \quad g(3) = 14 \quad \text{مقامی کم سے کم}$$

چونکہ بند وقفہ پر تفاعل معین ہے لہذا  $g(-2)$  مطلق کم سے کم اور  $g(2)$  مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں ہیں۔ □

## سوالات

**f کی مدد سے f کا تجزیہ**  
سوال 1 تا سوال 8 میں تفاعل کا تفرق دیا گیا ہے۔ درج ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

ا.  $f$  کے نقطہ فاصلہ کیا ہیں؟

ب.  $f$  کس وقفے پر بڑھتا اور کس وقفے پر گھٹتا ہے؟

ج. کن نقطوں پر تفاعل کا مقامی کم سے کم قیمت یا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟

$$\text{سوال 1: } f'(x) = x(x-1)$$

$$\text{سوال 2: } f'(x) = (x-1)(x+2)$$

$$\text{سوال 3: } f'(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$\text{سوال 4: } f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$$

$$\text{سوال 5: } f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$



4.3. معتمی انتہائی قیمتوں کا ایک درجہ تفریق پر کھ

سوال 6:  $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$

سوال 7:  $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$

سوال 8:  $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

دیے گئے تفاعل کی انتہا  
سوال 9 تا سوال 28 میں درج ذیل کریں۔

ا. وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل بڑھتا ہو اور وہ جن پر تفاعل گھٹتا ہو۔

ب. تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتوں کی نشاندہی کریں اور جن نقطوں پر ایسا ہو ان کی بھی نشاندہی کریں۔

ج. ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں (اگر ایسا ہو)؟

سوال 9:  $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

سوال 10:  $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

سوال 11:  $h(x) = -x^3 + 2x^2$

سوال 12:  $h(x) = 2x^3 - 18x$

سوال 13:  $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

سوال 14:  $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

سوال 15:  $f(r) = 3r^3 + 16r$

سوال 16:  $h(r) = (r + 7)^3$

سوال 17:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

سوال 18:  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

سوال 19:  $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$

سوال 20:  $K(t) = 15t^3 - t^5$

$$\text{سوال 21: } g(x) = x\sqrt{8-x^2}$$

$$\text{سوال 22: } g(x) = x^2\sqrt{5-x}$$

$$\text{سوال 23: } f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$$

$$\text{سوال 24: } f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$$

$$\text{سوال 25: } f(x) = x^{1/3}(x+8)$$

$$\text{سوال 26: } g(x) = x^{2/3}(x+5)$$

$$\text{سوال 27: } h(x) = x^{1/3}(x^2-4)$$

$$\text{سوال 28: } k(x) = x^{2/3}(x^2-4)$$

**نصف کھلے وقفوں پر تفاعل کی انتہا**  
سوال 29 تا سوال 36 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ میں تفاعل کے مقامی انتہا تلاش کریں۔ ان نقطوں کی بھی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. کون سے انتہا مطلق ہیں (اگر ہوں)۔

ج. کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔

$$\text{سوال 29: } f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$$

$$\text{سوال 30: } f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$$

$$\text{سوال 31: } g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$$

$$\text{سوال 32: } g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$$

$$\text{سوال 33: } f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$$

$$\text{سوال 34: } f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$$

$$\text{سوال 35: } h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\text{سوال 36: } k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$$

**کمپیوٹر کا استعمال**  
سوال 37 تا سوال 40 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے وقفے پر مقامی انتہا تلاش کریں اور اس نقطہ کی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. تقابل اور تقابل کے تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے  $f$  پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{سوال 37}$$

$$f(x) = -2 \cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{سوال 38}$$

$$f(x) = \csc^2 x - 2 \cot x, \quad 0 < x < \pi \quad \text{سوال 39}$$

$$f(x) = \sec^2 x - 2 \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{سوال 40}$$

نظریہ اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال 41 اور سوال 42 میں دیے گئے  $\theta$  پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے۔ اس انتہا کی قسم دریافت کریں۔

$$h(\theta) = 3 \cos \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \theta = 0, 2\pi \quad \text{سوال 41}$$

$$h(\theta) = 5 \sin \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta = 0, \pi \quad \text{سوال 42}$$

سوال 43: قابل تفرق تقابل  $y = f(x)$  نقطہ  $(1, 1)$  سے گزرتا ہے اور  $f'(1) = 0$  ہے۔ درج ذیل پر پورا اترتا ہوا اس تقابل کا خاکہ کھینچیں۔

ا.  $x < 1$  کے لئے  $f'(x) > 0$  ہے اور  $x > 1$  کے لئے  $f'(x) < 0$  ہے۔

ب.  $x < 1$  کے لئے  $f'(x) < 0$  ہے اور  $x > 1$  کے لئے  $f'(x) > 0$  ہے۔

ج.  $x \neq 1$  کے لئے  $f'(x) > 0$  ہے۔

د.  $x \neq 1$  کے لئے  $f'(x) < 0$  ہے۔

سوال 44: قابل تفرق تقابل  $y = f(x)$  جو درج ذیل پر پورا اترتا ہے کا خاکہ بنائیں۔

ا.  $(1, 1)$  پر مقامی کم سے کم اور  $(3, 3)$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

ب.  $(1, 1)$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور  $(3, 3)$  پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

ج.  $(1, 1)$  اور  $(3, 3)$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

د.  $(1, 1)$  اور  $(3, 3)$  پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

سوال 45: درج ذیل استمراری تفاعل  $y = g(x)$  کا خاکہ بنائیں۔

ا.  $g(2) = 2$  ہے،  $x < 2$  کے لئے  $0 < g' < 1$  ہے،  $x \rightarrow 2^-$  کے لئے  $g'(x) \rightarrow 1^-$ ،  $x > 2$  کے لئے  $-1 < g' < 0$  ہے اور  $x \rightarrow 2^+$  کے لئے  $g'(x) \rightarrow -1^+$  ہے۔

ب.  $g(2) = 2$  ہے،  $x < 2$  کے لئے  $g' < 0$  ہے،  $x \rightarrow 2^-$  کے لئے  $g' \rightarrow -\infty$  ہے،  $x > 2$  کے لئے  $g' > 0$  ہے اور  $x \rightarrow 2^+$  کے لئے  $g'(x) \rightarrow \infty$  ہے۔

سوال 46: درج ذیل استمراری تفاعل  $y = h(x)$  کا خاکہ بنائیں۔

ا.  $h(0) = 0$  ہے، تمام  $x$  کے لئے  $-2 \leq h(x) \leq 2$ ،  $x \rightarrow 0^-$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow \infty$  ہے اور  $x \rightarrow 0^+$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow -\infty$  ہے۔

ب.  $h(0) = 0$  ہے، تمام  $x$  کے لئے  $-2 \leq h(x) \leq 0$ ،  $x \rightarrow 0^-$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow \infty$  ہے اور  $x \rightarrow 0^+$  کے لئے  $h'(x) \rightarrow -\infty$  ہے۔

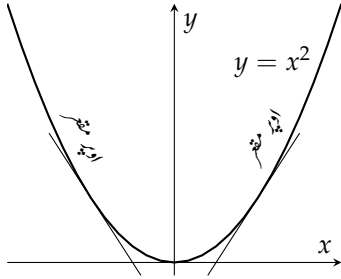
سوال 47: جب  $x$  بائیں سے دائیں جانب نقطہ  $c = 2$  سے گزرے تب  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے یا نیچے گرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جہاں  $a \neq 0$  ہے، بڑھتا ہے اور گھٹتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

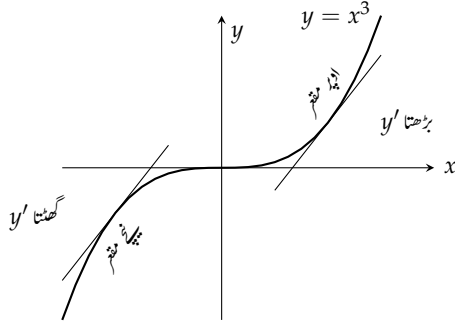
#### 4.4 $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم

ہم نے حصہ 4.1 میں تفاعل کی انتہائی قیمتوں کی تلاش میں ایک درجی تفریق کا کردار دیکھا۔ تفاعل کے انتہائی نقطے صرف نقطہ فاصل اور تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ نقطہ فاصل پر نقطہ انتہا کی موجودگی لازمی نہیں ہے۔ ہم نے حصہ 4.2 میں یہ بھی دیکھا کہ قابل تفریق تفاعل کی تقریباً تمام معلومات اس کی تفریق میں سمیٹی گئی ہے۔ مکمل تفاعل کے حصول کے لئے ہمیں صرف کسی ایک نقطہ پر تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔ اگر تفاعل کا تفریق  $2x$  ہے اور تفاعل مبدا سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً  $x^2$  ہو گا۔ اگر تفاعل کا تفریق  $2x$  ہو اور تفاعل نقطہ  $(0, 4)$  سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً  $x^2 + 4$  ہو گا۔

ہم نے حصہ 4.3 میں نقطہ فاصل پر تفاعل کے رویہ جانتے ہوئے اس کی تفریق سے مزید معلومات حاصل کرنا سیکھا جس کے بعد ہم یہ جان سکے کہ آیا نقطہ فاصل پر حقیقتاً انتہا موجود ہے یا تفاعل مسلسل گھٹتا یا مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم جانتے ہیں کہ تفاعل  $y = f(x)$  کی ترسیم کس طرح مڑتی یا واپس پلٹتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ معلومات  $y'$  کے اندر ضرور پائی جائے گی۔ دو مرتبہ قابل تفریق تفاعل کی صورت میں  $y'$  اور اس کا تفریق  $y''$  مل کر تفاعل کی ترسیم کی صورت کے بارے میں معلومات فراہم کرتے ہیں۔ اگلے باب میں انہیں استعمال کرتے ہوئے تفریقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل کے حل کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا۔



شکل 4.32: ترسیم برائے مثال 4.11

شکل 4.31:  $(-\infty, 0)$  پر منحنی دائیں جھکتی ہے جبکہ  $(0, \infty)$  پر مبداء بائیں مڑتی ہے۔

مقعر

$x$  بڑھنے سے تفاعل  $y = x^3$  کا ترسیم اوپر اٹھتا ہے لیکن  $(-\infty, 0)$  اور  $(0, \infty)$  پر اس کے حصے مختلف طریقہ سے مڑتے ہیں (شکل 4.31)۔ اگر ہم منحنی پر بائیں سے مبداء کی طرف گامزن ہوں تب منحنی ہماری دائیں ہاتھ کی طرف جھکتی ہے اور اپنے مماس سے نیچے رہتی ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم منحنی پر دائیں جانب مبداء سے دور چلیں تب منحنی ہماری بائیں ہاتھ جھکتی ہے اور اپنے مماس کے بالائی طرف رہتی ہے۔

اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ ربع سوم میں بائیں سے مبداء کی طرف چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان گھٹتی ہے جبکہ ربع اول میں مبداء سے دائیں جانب چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان بڑھتی ہے۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل  $y = f(x)$  کی ترسیم اس وقفہ پر اوپر مقعر<sup>9</sup> ہوگی جہاں  $y'$  بڑھتا ہو اور اس وقفہ پر نیچے مقعر<sup>10</sup> ہوگی جہاں  $y'$  گھٹتا ہو۔

□

اگر  $y = f(x)$  کا دو درجی تفرق موجود ہو تب ہم مسئلہ اوسط قیمت کا نتیجہ صریح 4.3 استعمال کرتے ہوئے اخذ کر سکتے ہیں کہ  $y'' > 0$  کی صورت میں  $y'$  کی قیمت بڑھے گی اور  $y'' < 0$  کی صورت میں  $y'$  کی قیمت گٹے گی۔

مقعر کا دو درجی تفرق پرکھ

فرض کریں وقفہ  $I$  پر  $y = f(x)$  دو مرتبہ قابل تفرق ہے۔

concave up<sup>9</sup>  
concave down<sup>10</sup>

ا. اگر  $I$  پر  $y'' > 0$  ہو تب  $I$  پر  $f$  کی ترسیم اوپر مقعر ہوگی۔

ب. اگر  $I$  پر  $y'' < 0$  ہو تب  $I$  پر  $f$  کی ترسیم نیچے مقعر ہوگی۔

مثال 4.11:

ا.  $(-\infty, 0)$  پر قاع  $y = x^3$  کا دودرجی تفرق  $y'' = 6x < 0$  ہے لہذا اس کی ترسیم نیچے مقعر ہوگی جبکہ  $(0, \infty)$  پر  $y'' = 6x > 0$  ہے لہذا یہاں ترسیم اوپر مقعر ہوگی (شکل 4.31)۔

ب. چونکہ قطع مکافی  $y = x^2$  کا دودرجی تفرق  $y'' = 2 > 0$  ہے لہذا یہ ہر جگہ اوپر مقعر ہوگا (شکل 4.32)۔

□

### نقطہ تصریف

ایک لکیر پر جسم کی حرکت کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اس کا مقام بالمقابل وقت ترسیم کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہم وہ لمحہ تلاش کر سکتے ہیں جہاں جسم کی اسراع، جو دودرجی تفرق ہے، کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔ ترسیم پر یہ وہ نقطہ ہوگا جہاں مقعر تبدیل ہوتا ہے۔

تعریف: وہ نقطہ جہاں تقاع کا مماس پایا جاتا ہو اور جہاں مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہو **نقطہ تصریف**<sup>11</sup> کہلاتا ہے۔

□

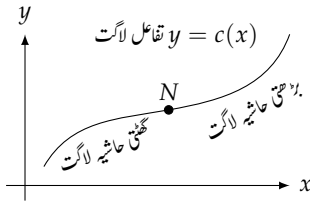
یوں نقطہ تصریف کی ایک طرف  $y''$  مثبت اور دوسری طرف منفی ہوگا۔ عین نقطہ تصریف پر  $y''$  کی قیمت یا (تفرق کی متوسط قیمت خاصیت کی بنا) صفر ہوگی اور یا  $y''$  غیر معین ہوگا۔

دو مرتبہ قابل تفرق تقاع کی ترسیم کے نقطہ تصریف پر  $y'' = 0$  ہوگا۔

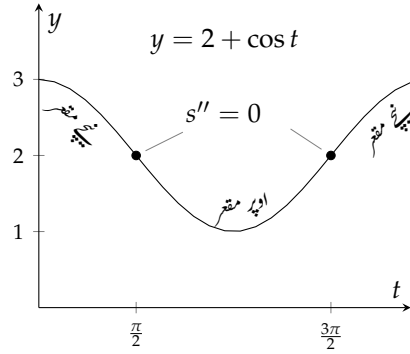
مثال 4.12: سادہ ہارمونی حرکت

تقاع  $y = 2 \cos t$  کی ترسیم نقطہ  $t = \pi/2, 3\pi/2, \dots$  پر مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہے جہاں اسراع  $s'' = -\cos t$  صفر ہے (شکل 4.33)۔

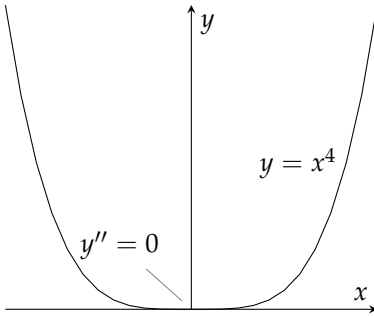
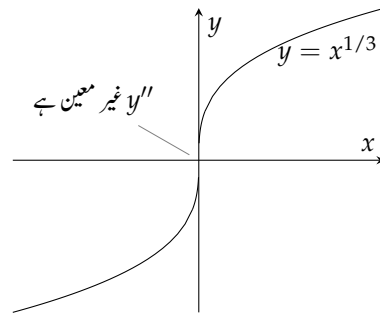
□



شکل 4.34: ترسیم برائے مثال 4.13



شکل 4.33: ترسیم برائے مثال 4.12

شکل 4.36: اگرچہ مہذب  $y'' = 0$  ہے یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا ہے (مثال 4.15)شکل 4.35: نقطہ تصریف پر  $y''$  غیر معین ہے (مثال 4.14)

مثال 4.13: نقطہ تصریف کا معاشیات میں بھی اہمیت ہے۔ فرض کریں کہ کسی چیز کی  $x$  اکائیاں پیدا کرنے پر  $y = c(x)$  لاگت آتی ہے۔ جہاں حاشیہ لاگت پیداوار گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے یہ نقطہ تصریف  $N$  ہوگا (شکل 4.34)۔

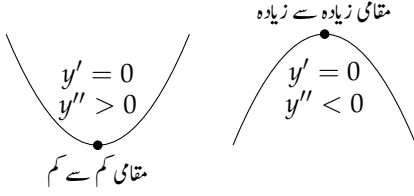
□

مثال 4.14: ایسا نقطہ تصریف جہاں  $y''$  غیر موجود ہے۔

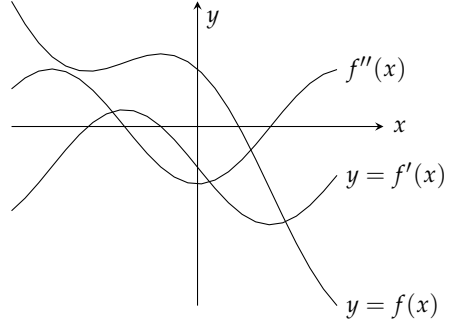
تقابل  $y = x^{1/3}$  کا نقطہ تصریف  $x = 0$  پر ہے لیکن یہاں  $y''$  غیر معین (لا متناہی) ہے (شکل 4.35)۔

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}(x^{1/3}) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^{-2/3}) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

□



شکل 4.38: دو درجی تفریق پر کھ برائے مقامی انتہا



شکل 4.37: تقابل  $y = f(x) = 2 \cos x - \sqrt{2}x$  اور اس کے یک درجی اور دو درجی تفریق۔

مثال 4.15:  $y'' = 0$  ہے لیکن نقطہ تعریف نہیں ہے  
تقابل  $y = x^4$  کا  $x = 0$  پر  $y'' = 12x^2 = 0$  پایا جاتا ہے لیکن یہاں  $y''$  کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہذا یہاں نقطہ تعریف نہیں پایا جاتا ہے۔

□

فنیات تقابل اور تقابل کے تفریق کا ترسیم

کبھی کبھار تقابل کی ترسیم سے نقطہ تعریف کی نشاندہی کرنا مشکل ہوتا ہے۔  $f(x) = 2 \cos x - \sqrt{2}x$  کی  $-4 \leq x \leq 3$  پر ترسیم کرتے ہوئے کوشش کر کے دیکھیں۔ اس کے ساتھ  $f'$  کی ترسیم شامل کرنے سے نقطہ تعریف کی پہچان میں کچھ بہتری آتی ہے۔  $f$  کے ساتھ  $f''$  ترسیم کرنے سے نقطہ تعریف پہچانے کا بہترین ثبوت ملتا ہے (شکل 4.37)۔ نقطہ تعریف پر  $f''$  کی علامت تبدیل ہوتی ہے یعنی  $f''$  محور  $x$  کو قطع کرتا ہے۔  $f$ ،  $f'$  اور  $f''$  تینوں کو ایک ساتھ ترسیم کرنا دلچسپ مشغلہ ہے۔

مقامی انتہائی قیمت کا دو درجی تفریق پر کھ

مقامی انتہا کا مقام تعین کرنے کی خاطر  $y'$  کی علامت کی تبدیلی کی بجائے درج ذیل پر کھ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

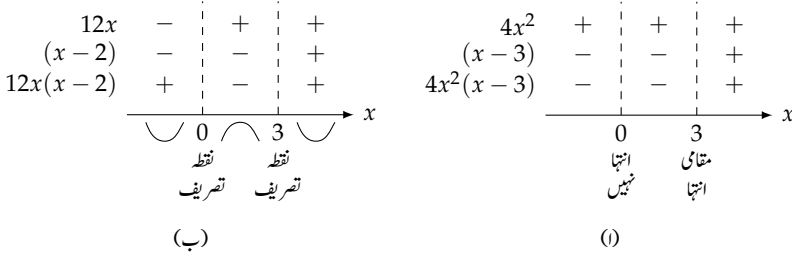
مقامی انتہا کا دو درجی تفریق پر کھ

• اگر  $f'(c) = 0$  اور  $f''(c) < 0$  ہوں تب  $x = c$  پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی (شکل 4.38)۔

• اگر  $f'(c) = 0$  اور  $f''(c) > 0$  ہوں تب  $x = c$  پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی (شکل 4.38)۔

مذکورہ بالا پر کھ میں ہمیں صرف  $x = c$  پر  $y''$  درکار ہے تاکہ  $c$  پر کسی وقفہ پر۔ یوں پر کھ کا استعمال نہایت آسان ہے۔  $y'' = 0$  یا غیر معین  $y''$  کی صورت میں پر کھ ہمیں مدد نہیں کر پاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں یک درجی تفریق پر کھ استعمال کرنی ہوگی۔





شکل 4.39: اشکال برائے مثال 4.16

 $y'$  اور  $y''$  کے ترسیم ایک ساتھ

ہم نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل ترسیم کرتے ہیں۔

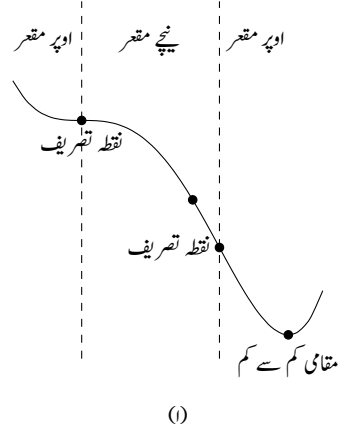
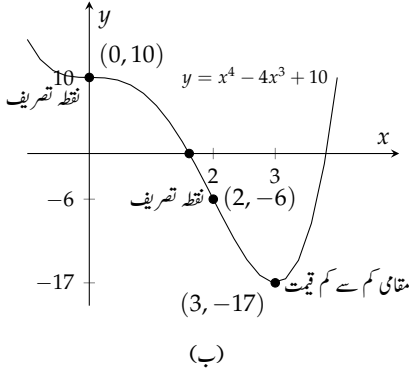
مثال 4.16: قلم و کاغذ سے تفاعل کا ترسیم  
تفاعل  $y = x^4 - 4x^3 + 10$  ترسیم کریں۔  
حل: پہلا قدم: ہم  $y'$  اور  $y''$  ڈھونڈتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^4 - 4x^3 + 10 \\ y' &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) && \text{نقطہ فاصل } x=0 \text{ اور } x=3 \text{ ہیں} \\ y'' &= 12x^2 - 24x = 12x(x-2) && \text{مکانہ نقطہ تصریف } x=0 \text{ اور } x=2 \text{ ہیں} \end{aligned}$$

دوسرا قدم: اتر اور چڑھاؤ دیکھنے کے لئے  $y'$  کی علامتوں کو دیکھ کر  $y$  کا رویہ جانتے ہیں۔  $y' = 4x^2(x-3)$  میں  $x=0$  سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے  $y'$  کی علامت منفی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے بھی منفی علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں نقطہ  $x=0$  پر  $y'$  کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے لہذا یہاں کوئی مقامی انتہا نہیں پایا جاتا ہے۔  $y' = 4x^2(x-3)$  میں  $x=3$  سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے  $y'$  کی منفی علامت جبکہ اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے مثبت علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں  $x=3$  پر  $y'$  کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہوتی ہے۔ یوں  $x=3$  پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.39-ا)۔

تیسرا قدم: نقطہ  $x=0$  اور  $x=2$  پر  $y''$  کی علامت تبدیل ہوتی ہے لہذا یہ دونوں نقطہ تصریف ہیں (شکل 4.39-ب)۔

چوتھا قدم: دوسرے اور تیسرے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے ہر وقفہ پر تفاعل کا عمومی خاکہ کھینچیں۔ ان خاکوں کو اکٹھا کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.40-ا)۔



شکل 4.40: اشکال برائے مثال 4.16

پانچواں قدم: (اگر موزوں ہو تب) ترسیم پر وہ نقطے ظاہر کریں جہاں یہ  $x$  اور  $y$  محور کو قطع کرتی ہے۔ اسی طرح وہ نقطے جہاں  $y'$  اور  $y''$  صفر ہیں کی نشاندہی کریں۔ مقامی انتہائی نقطے اور نقطہ تفریق کی نشاندہی کریں۔ چوتھے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.40-ب)۔

□

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

