

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور a^x	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبہ تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273	10.6	قطبی محدود
1285	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300	10.8.1	دائرے
1314	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327	11	سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری
1327	11.1	مستوی میں سمتیات
1344	11.2	کار تیبی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351	11.2.1	کرہ
1361	11.3	ضرب نقطہ
1362	11.3.1	حساب
1376	11.4	صلیبی ضرب
1391	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1423	11.7	تنگی اور کردی محدود
1435	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ T
1475	12.4	اخذ، مروڑ اور TNB چپو کوٹ
1497	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528	13.2	حد اور استمرار
1543	13.3	جزوی تفرقات
1560	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577	13.5	زنجیری قاعدہ
1592	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1621	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقطہ زمین
1625		جوابات
1627		ضمیمہ اول

1629	ب ضمیمہ دوم
1631	ج ضمیمہ تین
1633	د ضمیمہ چار
1635	ه ضمیمہ پانچ
1637	و ضمیمہ چھ
1639	ز ضمیمہ سات
1641	ح ضمیمہ آٹھ
1643	ط ضمیمہ آٹھ

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

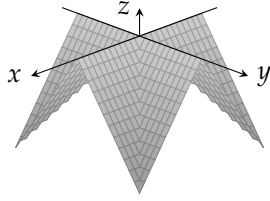
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

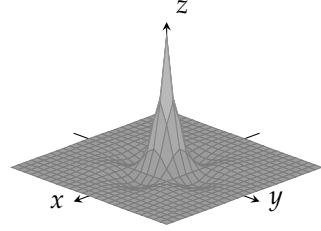
میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 13.55: چکور خطہ $|x| \leq a, |y| \leq a$ پر "تفاعل" جھپٹ $z = \frac{1}{2}(|x| - |y|) - |x| - |y|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت 0 اور کم سے کم قیمت $-a$ ہے۔



شکل 13.54: چکور خطہ $|x| \leq \frac{3\pi}{2}, |y| \leq \frac{3\pi}{2}$ پر تفاعل $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور کم سے کم قیمت تقریباً -0.067 ہے۔

13.8 انتہائی قیمتیں اور نقطہ زین

مستوی xy میں محدود بند خطہ میں استمراری تفاعل کی اس دائرہ کار میں مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں پائی جائیں گی (شکل 13.54 اور شکل 13.55)۔ ان قیمتوں کا جاننا اور ان نقطوں کا جاننا، جہاں یہ قیمتیں پائی جاتی ہیں، ضروری ہے۔ ہم جزوی تفرقات سے عموماً انہیں جان سکتے ہیں۔

تفرقی پرکھ

واحد متغیری تفاعل کا مقامی انتہائی نقطہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان نقطوں پر نظر رکھتے ہیں جہاں اس تفاعل کا مماس افقی ہو۔ ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت، مطلق کم سے کم قیمت یا نقطہ زین تلاش کرتے ہیں۔ دو متغیری تفاعل $z = f(x, y)$ کے لئے ہم ان نقطوں پر نظر رکھتے ہیں جہاں اس تفاعل کا مماسی مستوی افقی ہو۔ ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت، مطلق کم سے کم قیمت یا نقطہ زین تلاش کرتے ہیں۔ (نقطہ زین پر مزید بات جلد کی جائے گی)۔

تعریفات: فرض کریں خطہ R ، جس میں نقطہ (a, b) پایا جاتا ہو، میں تفاعل $f(x, y)$ معین ہے۔ تب

1. اگر کھلا قرص، جس کا مرکز (a, b) ہو، میں دائرہ کار کے تمام نقاط (x, y) پر $f(a, b) \geq f(x, y)$ ہو تب $f(a, b)$ تفاعل f کا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ ہو گا۔

2. اگر کھلا قرص، جس کا مرکز (a, b) ہو، میں دائرہ کار کے تمام نقاط (x, y) پر $f(a, b) \leq f(x, y)$ ہو تب $f(a, b)$ تفاعل f کا مقامی کم سے کم قیمت نقطہ ہو گا۔

□

مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ کو سطح $z = f(x, y)$ پر پہاڑی جبکہ مقامی کم سے کم نقطہ کو وادی میں گھاٹی تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایسے نقطوں پر مماسی مستوی افقی ہوں گے، بشرطیکہ یہ موجود ہوں۔

واحد متغیر تفاعل کی طرح، مقامی انتہا کی تلاش ایک رتبی تفرقی پر منحصر ہوگا۔

مسئلہ 13.7: مقامی انتہائی قیمت کا ایک رتبی تفرقی پرکھ اگر تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ (a, b) پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو، اور اگر تفاعل کے یک رتبی تفرقات موجود ہوں، تب $f_x(a, b) = 0$ اور $f_y(a, b) = 0$ ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں تفاعل f کی دائرہ کار کے ایک اندرونی نقطہ (a, b) پر تفاعل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ تب

1. مستوی $y = b$ سطح $z = f(x, y)$ کو جس منحنی $z = f(x, b)$ میں قطع کرتا ہے، نقطہ $x = a$ اس منحنی کے دائرہ کار کا اندرونی نقطہ ہوگا۔

2. نقطہ $x = a$ پر تفاعل $z = f(x, b)$ متغیر x کے لحاظ سے قابل تفرق ہوگا (اور یہ تفرق $f_x(a, b)$ ہوگا)۔

3. نقطہ $x = a$ پر تفاعل $z = f(x, b)$ کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

4. یوں $x = a$ پر $z = f(x, b)$ کا تفرق صفر ہوگا (مسئلہ 4.2)۔ چونکہ یہ تفرق $f_x(a, b)$ ہے لہذا $f_x(a, b) = 0$ ہوگا۔ نقطہ $x = a$ منحنی $z = f(x, b)$ کے دائرہ کار کا اندرونی نقطہ ہوگا۔

تفاعل $z = f(a, y)$ لیتے ہوئے اسی طرح کی دلیل سے $f_y(a, b) = 0$ ثابت کیا جاسکتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلے کا ثابت مکمل ہوتا ہے۔ مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلے کا ثبوت آپ سے سوالات میں مانگا گیا ہے۔

□

نقطہ (a, b) پر سطح $z = f(x, y)$ کے مماسی مستوی کی مساوات

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

میں $f_x(a, b) = 0$ اور $f_y(a, b) = 0$ پر کرنے سے

$$0 \cdot (x - a) + 0 \cdot (y - b) - z + f(a, b) = 0$$

یعنی

$$z = f(a, b)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح مسئلہ 13.7 کہتا ہے کہ مقامی انتہا پر یقیناً افقی مماسی مستوی ہوگا، بشرطیکہ اس نقطہ پر مماسی مستوی موجود ہو۔

واحد متغیر تفاعل کی صورت کی طرح، مسئلہ 13.7 کہتا ہے کہ تفاعل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمت صرف اور صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جا سکتی ہے:

1. اندرونی نقاط جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو،

2. اندرونی نقاط جہاں f_x اور f_y میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں،

3. تفاعل کے دائرہ کار کے سرحدی نقاط۔

تعریف: تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار کا وہ اندرونی نقطہ جہاں f_x اور f_y دونوں صفر ہوں یا جہاں f_x اور f_y میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں، f کا نقطہ فاصل⁴² ہوگا۔

□

اس طرح تفاعل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمتیں صرف نقاط فاصل اور سرحدی نقاط پر پائی جائیں گی۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح، ضروری نہیں کہ ہر نقطہ فاصل پر مقامی انتہا ہو۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ تصریف ممکن ہے۔ دو متغیرات کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ زین ممکن ہوگا۔

تعریف: نقطہ فاصل (a, b) پر اس صورت قابل تفرق تفاعل $f(x, y)$ کا نقطہ زین⁴³ پایا جائے گا جب ہر کھلے قرص میں، جس کا مرکز (a, b) ہو، ایسے دائرہ کاری نقاط (x, y) پائے جاتے ہوں جن پر $f(x, y) > f(a, b)$ ہو، اور ایسے دائرہ کاری نقاط (x, y) پائے جاتے ہوں جن پر $f(x, y) < f(a, b)$ ہو۔ سطح $z = f(x, y)$ پر مطابقتی نقطہ $(a, b, f(a, b))$ اس سطح کا نقطہ زین کہلاتا ہے۔

□

critical point⁴²
saddle point⁴³

جوابات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

