احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ v

میری پہلی کتاب کا دیباچہ vii

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 15
1.3 تفاعل 32
1.4 ترسیم کی منتقلی 54
1.5 تکونیاتی تفاعل 74

2 حدود اور استمرار 95
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 95
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 113
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف 126
2.4 تصور حد کی توسیع 146
2.5 استمرار 165
2.6 مماسی خط 184

3 تفرق 199
3.1 تفاعل کا تفرق 199
3.2 قواعد تفرق 221
3.3 تبدیلی کی شرح 240
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 257
3.5 زنجیری قاعدہ 277
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 294
3.7 دیگر شرح تبدیلی 310

4 تفرق کا استعمال 325
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں 325
4.2 مسئلہ اوسط قیمت 340
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ 356
4.3.1 پرکھ 356
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم 368
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء 391
4.6 بہترین بنانا 418
4.7 خط بندی اور تفرقات 442
4.8 ترکیب نیوٹن 463

5 تکمل 475
5.1 غیر قطعی تکملات 475
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی 487
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق 503

ا ضمیمہ دوم 511

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 5

تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

5.1 غیر قطعی تکملات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق $f(x)$ سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق f ہے۔ ان تفاعل کو f کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو f کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمل

تعریف: تفاعل $f(x)$ کا الٹ تفرق تب $F(x)$ ہو گا جب f کے دائرہ کار میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

f کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ x کے لحاظ سے f کا غیر قطعی تکمل[1] ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

علامت $\int$ کو علامت تکمل کہتے ہیں۔ تفاعل f کو متکمل[2] اور x کو تکمل کا متغیر[3] کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل f کے حاصل کردہ الٹ تفرق F اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکملی علامتیت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{5.1}$$

مستقل C کو تکمل کا مستقل[4] یا اختیاری مستقل[5] کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " x کے لحاظ سے تفاعل f کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$ ہے۔" $F(x) + C$ کے حصول کو f کے تکمل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1: $\int 2x\,\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔
حل:

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$

$2x$ کا الٹ تفرق x^2 ہے اور C تکمل کا مستقل ہے۔کلیہ $x^2 + C$ تفاعل $2x$ کے تمام تفرقات دیتا ہے۔یوں $x^2 + 1$ ، $x^2 - \pi$ اور $x^2 + \sqrt{2}$ تفاعل $2x$ کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔جدول 5.1 میں غیر قطعی تکملات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

---

[1] indefinite integral
[2] integrand
[3] variable of integration
[4] constant of integration
[5] arbitrary constant

جدول 5.1: تکمل کے کلیات

	غیر قطعی تکمل	تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے
1.	$\int x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,\ n$ ناطق	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$
	$\int \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$ (خصوصی صورت)	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$
2.	$\int \sin kx \, \mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{\cos kx}{k}) = \sin kx$
3.	$\int \cos kx \, \mathrm{d}x = \dfrac{\sin kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sin kx}{k}) = \cos kx$
4.	$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \sec^2 x$
5.	$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cot x) = \csc^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$
7.	$\int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\csc x) = \csc x \cot x$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں $n = 5$ لیتے ہوئے:

$$\int x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں $n = -\frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں $k = 2$ لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں $k = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق متکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \sin x + \cos x + C) = x \cos x + \sin x - \sin x + 0 = x \cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی تکمل کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ: (k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$
2. منفی کے لئے قاعدہ: (قاعدہ 1 میں $k = -1$ لیا گیا ہے۔)	$\int -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x) \mp g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

ا. ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب kf کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق ضرب k کے برابر ہو۔

ب. بالخصوص ایک تفاعل اس صورت $-f$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔

ج. ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق $f \mp g$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق اور g کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکملی علامتیت میں لکھنے سے غیر قطعی تکمل کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: تکمل کا مستقل

$$\int 5\sec x\tan x\,\mathrm{d}x = 5\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x \qquad \text{جدول 5.2، قاعدہ 1}$$
$$= 5(\sec x + C) \qquad \text{جدول 5.1، کلیہ 6}$$
$$= 5\sec x + 5C \qquad \text{غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت}$$
$$= 5\sec x + C' \qquad \text{مستقل } 5C \text{ کو مستقل } C' \text{ لکھا گیا ہے}$$
$$= 5\sec x + C \qquad C' \text{ ایک مستقل ہے جس کو ہم اب } C \text{ سے ظاہر کرتے ہیں}$$

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل C' کو بغیر علامت (') لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہٰذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, dx = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا تکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ تکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل تکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو تکمل۔
درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx$$

اگر ہم دیکھ کر بتلا سکیں کہ $x^2 - 2x + 5$ کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3\end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو C لکھا جا سکتا ہے یعنی $C_1 + C_2 + C_3 = C$ جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے C لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل C لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) \, dx &= \int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکملات

بعض اوقات جن تکملات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکونیاتی تماثل کی مدد سے ان تکملات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔ $\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکمل عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماثل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x && \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\\
&= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C\\
&= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C
\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x && \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\\
&= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C
\end{aligned}$$

□

سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 1 تا سوال 18 میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 1: (ا) $2x$ ، (ب) x^2 ، (ج) x^2-2x+1

جواب: (ا) x^2 ، (ب) $\frac{x^3}{3}$ ، (ج) $\frac{x^3}{3}-x^2+x$

سوال 2: (ا) $6x$ ، (ب) x^7 ، (ج) $x^7 - 6x + 8$

سوال 3: (ا) $-3x^{-4}$ ، (ب) x^{-4} ، (ج) $x^{-4} + 2x + 3$
جواب: (ا) x^{-3} ، (ب) $-\frac{1}{3}x^{-3}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

سوال 4: (ا) $2x^{-3}$ ، (ب) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ ، (ج) $-x^{-3} + x - 1$

سوال 5: (ا) $\frac{1}{x^2}$ ، (ب) $\frac{5}{x^2}$ ، (ج) $2 - \frac{5}{x^2}$
جواب: (ا) $-\frac{1}{x}$ ، (ب) $-\frac{5}{x}$ ، (ج) $2x + \frac{5}{x}$

سوال 6: (ا) $-\frac{2}{x^3}$ ، (ب) $\frac{1}{2x^3}$ ، (ج) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

سوال 7: (ا) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ، (ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ج) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
جواب: (ا) $\sqrt{x^3}$ ، (ب) $\sqrt{x}$ ، (ج) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

سوال 8: (ا) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ ، (ب) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ ، (ج) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

سوال 9: (ا) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ، (ب) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$
جواب: (ا) $x^{2/3}$ ، (ب) $x^{1/3}$ ، (ج) $x^{-1/3}$

سوال 10: (ا) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ، (ب) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ، (ج) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

سوال 11: (ا) $-\pi \sin \pi x$ ، (ب) $3 \sin x$ ، (ج) $\sin \pi x - 3 \sin 3x$
جواب: (ا) $\cos(\pi x)$ ، (ب) $-3 \cos x$ ، (ج) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

سوال 12: (ا) $\pi \cos \pi x$ ، (ب) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ ، (ج) $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$

سوال 13: (ا) $\sec^2 x$ ، (ب) $\frac{2}{3}\sec^2 \frac{x}{3}$ ، (ج) $-\sec^2 \frac{3x}{2}$
جواب: (ا) $\tan x$ ، (ب) $2\tan(\frac{x}{3})$ ، (ج) $-\frac{2}{3}\tan(\frac{3x}{2})$

سوال 14: (ا) $\csc^2 x$ ، (ب) $-\frac{3}{2}\csc^2 \frac{3x}{2}$ ، (ج) $1 - 8\csc^2 2x$

سوال 15: (ا) $\csc x \cot x$ ، (ب) $-\csc 5x \cot 5x$ ، (ج) $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$
جواب: (ا) $-\csc x$ ، (ب) $\frac{1}{5}\csc(5x)$ ، (ج) $2\csc(\frac{\pi x}{2})$

سوال 16: (ا) $\sec x \tan x$ ، (ب) $4 \sec 3x \tan 3x$ ، (ج) $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 17: $(\sin x - \cos x)^2$
جواب: $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 18: $(1 + 2\cos x)^2$

تکمل کا حصول
سوال 19 تا سوال 58 میں تکمل حاصل کریں۔ تکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $\int (x+1)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 20: $\int (5 - 6x)\,\mathrm{d}x$

سوال 21: $\int (3t^2 + \frac{t}{2})\,\mathrm{d}t$
جواب: $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 22: $(\frac{t^2}{2} + 4t^3)\,\mathrm{d}t$

سوال 23: $(2x^3 - 5x + 7)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 24: $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,\mathrm{d}x$

سوال 25: $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3})\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 26: $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x)\,\mathrm{d}x$

سوال 27: $\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

سوال 28: $\int x^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x$

سوال 29: $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

سوال 30: $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$

سوال 31: $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) \mathrm{d}y$
جواب: $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

سوال 32: $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) \mathrm{d}y$

سوال 33: $\int 2x(1 - x^{-3}) \, \mathrm{d}x$
جواب: $x^2 + \frac{2}{x} + C$

سوال 34: $\int x^{-3}(x+1) \, \mathrm{d}x$

سوال 35: $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} \, \mathrm{d}t$
جواب: $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

سوال 36: $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} \, \mathrm{d}t$

سوال 37: $\int (-2\cos t) \, \mathrm{d}t$
جواب: $-2\sin t + C$

سوال 38: $\int (-5\sin t) \, \mathrm{d}t$

سوال 39: $7\sin\frac{\theta}{3} \, \mathrm{d}\theta$
جواب: $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$

سوال 40: $\int 3\cos 5\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 41: $\int (-3\csc^2 x) \, \mathrm{d}x$
جواب: $3\cot x + C$

سوال 42: $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) \mathrm{d}x$

سوال 43: $\int \frac{\csc\theta \cot\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$

سوال 44: $\frac{2}{5}\sec\theta \tan\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 45: $\int (4\sec x \tan x - 2\sec^2 x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $4\sec x - 2\tan x + C$

سوال 46: $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \cot x)\,\mathrm{d}x$

سوال 47: $\int (\sin 2x - \csc^2 x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$

سوال 48: $\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)\,\mathrm{d}x$

سوال 49: $\int 4\sin^2 y\,\mathrm{d}y$
جواب: $2y - \sin 2y + C$

سوال 50: $\int \frac{\cos^2 y}{7}\,\mathrm{d}y$

سوال 51: $\int \frac{1+\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 52: $\int \frac{1-\cos 6t}{2}\,\mathrm{d}t$

سوال 53: $\int (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ اشارہ۔ $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
جواب: $\tan\theta + C$

سوال 54: $\int (2+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

سوال 55: $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\cot x - x + C$

سوال 56: $\int (1-\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$

سوال 57: $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\cos\theta + \theta + C$

سوال 58: $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

تکملی کلیہ کی تصدیق

سوال 59 تا سوال 64 میں دیے تکملی کلیات کی تصدیق بذریعہ تفرق کریں۔ ان کلیات کا حصول جلد دکھایا جائے گا۔

سوال 59: $\int (7x-2)^3 \,\mathrm{d}x = \frac{(7x-2)^4}{28} + C$

سوال 60: $\int (3x+5)^{-2} \,\mathrm{d}x = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C$

سوال 61: $\int \sec^2(5x-1) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\tan(5x-1) + C$

سوال 62: $\int \csc^2(\frac{x-1}{3}) \,\mathrm{d}x = -3\cot(\frac{x-1}{3}) + C$

سوال 63: $\int \frac{1}{(x+1)^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+1} + C$

سوال 64: $\int \frac{1}{(x+1)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{x}{x+1} + C$

سوال 65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int x\sin x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin x + C$$

ب۔ $$\int x\sin x \,\mathrm{d}x = -x\cos x + C$$

ج۔ $$\int x\sin x \,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int \tan\theta\sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\sec^3\theta}{3} + C$$

ب۔ $$\int \tan\theta\sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + C$$

ج۔ $$\int \tan\theta\sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\sec^2\theta$$

سوال 67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int (2x+1)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$$

ب۔ $$\int 3(2x+1)^2 \,\mathrm{d}x = (2x+1)^3 + C$$

ج۔ $$\int 6(2x+1)^2 \,\mathrm{d}x = (2x+1)^3 + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x+C}$$

ب۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}+C$$

ج۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3+C$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

ا۔ $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

ب۔ $\int g(x)\,\mathrm{d}x$

ج۔ $\int [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

د۔ $\int [-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ہ۔ $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$

و۔ $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ز۔ $\int [x+f(x)]\,\mathrm{d}x$

ح۔ $\int [g(x)-4]\,\mathrm{d}x$

جواب: (ا) $-\sqrt{x}+C$، (ب) $x+C$، (ج) $\sqrt{x}+C$، (د) $-x+C$، (ہ) $x-\sqrt{x}+C$، (و) $-x-\sqrt{x}+C$، (ز) $\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}+C$، (ح) $-3x+C$

سوال 70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x, \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x)$$

5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی تکمل میں سے مخصوص الٹ تفرق منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لئے یہ عمل ضروری ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل صورت کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو تفرقی مساوات[6] کہلاتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

اس مساوات میں x آزاد متغیر جبکہ y تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم x کا ایسا تفاعل y جاننا چاہتے ہیں جس کی نقطہ x_0 پر قیمت y_0 ہو۔اس کو ابتدائی قیمت مسئلہ[7] کہتے ہیں۔ جیسا مثال 5.7 میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدموں میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال 5.7: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول
سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

اگر جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جائے تب t سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

حل: ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= 9.8 && \text{تفرقی مساوات} \\ v(0)&0 && \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ $t = 0$ پر ساکن جسم کی سمتی رفتار $v = 0$ ہے جس کو مختصراً $v(0) = 0$ لکھا جاتا ہے۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= 9.8 && \text{تفرقی مساوات} \\ \int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= \int 9.8\,\mathrm{d}t && t \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\ v + C_1 &= 9.8t + C_2 && \text{تکمل کا نتیجہ} \\ v &= 9.8t + C && \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں} \end{aligned}$$

---

[6] differential equation
[7] initial value problem

آخری مساوات کے تحت لمحہ t پر جسم کی رفتار $9.8t + C$ ہو گی جہاں C نا معلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} v &= 9.8t + C \\ 0 &= 9.8(0) + C && v(0) = 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

□

تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا عمومی حل[8] $y = F(x) + C$ دیتا ہے۔ عمومی حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل[9] تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ x_0 پر y کی قیمت y_0 ہے جس کو مختصراً $y(x_0) = y_0$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک نقطہ اور ڈھلوان سے منحنی کا حصول
ایک منحنی جو نقطہ $(1, -1)$ سے گزرتی ہے کا نقطہ (x, y) پر ڈھلوان $3x^2$ ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

حل: ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

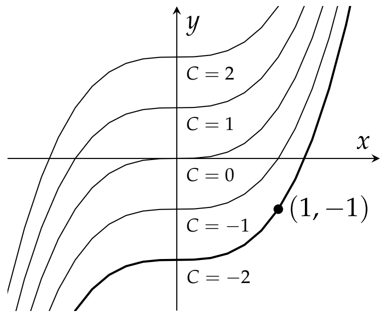
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 && \text{منحنی کی ڈھلوان} \\ y(1) &= -1 && \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

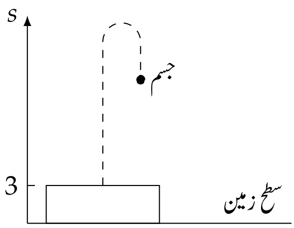
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x &= \int 3x^2\,\mathrm{d}x \\ y &= x^3 + C && \text{تکمل کے مستقلوں کی یکجا کیا گیا ہے} \end{aligned}$$

---

[8] general solution
[9] particular solution



شکل 5.1: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال 5.8



شکل 5.2: تصویر کشی برائے مثال 5.9

عمومی حل $y = x^3 + C$ ہے جس کو C کی مختلف قیمتوں کے لئے شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پر کر کے نا معلوم مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y &= x^3 + C \\
-1 &= (1)^3 + C \\
C &= -2
\end{aligned}
$$

عمومی حل میں C پر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل 5.1 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

□

اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ تکمل لینا ہو گا۔ پہلا تکمل

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + C$$

تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔ دوسرا تکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال 5.9: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول

زمین سے $3\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ $t = 0$ پر سیدھا اوپر $160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو بطور t کا تفاعل تلاش کریں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہو گی؟

حل: اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل 5.2) جہاں لمحہ t پر زمین سے جسم کی بلندی کو s سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s متغیر t کا دو گنا قابل تفرق تفاعل ہے لہٰذا جسم کی رفتار اور اسراع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

چونکہ ہمارے ریاضی نمونہ میں اسراع گھٹتے ہوئے s کے رخ عمل کرتی ہے لہٰذا ہمارا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160, \quad s(0) = 3 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ہم تفرقی مساوات کو t کے لحاظ سے تکمل کر کے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + C_1$$

ہم پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C_1 تلاش کرتے ہیں۔

$$160 = -9.8(0) + C_1 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160$$

$$C_1 = 160$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا کلیہ مکمل ہوتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + 160$$

ہم t کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا تکمل لیتے ہوئے s تلاش کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8t + 160)\,\mathrm{d}t$$

$$s = -4.9t^2 + 160t + C_2$$

ہم دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے C_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$3 = -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$

یوں مخصوص حل s کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر t ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لمحہ $t = 3$ پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں $t = 3$ پر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9\,\mathrm{m}$$

□

یک رتبی تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال 5.7 اور مثال 5.8 میں دیکھا گیا، جبکہ دو رتبی تفرق تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال 5.9 میں دیکھا گیا۔ اسی طرح تین رتبی تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہو گی۔ ہر بار الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ابتدائی قیمت درکار ہو گی۔

منحنی حل کا خاکہ

تفرقی مساوات کے حل کی ترسیم کو منحنی حل[10] یا منحنی تکمل[11] کہتے ہیں۔ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ کے حل $y = x^3 + C$ کو شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم $f(x)$ کا الٹ تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرقی مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

مثال 5.10: درج ذیل تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

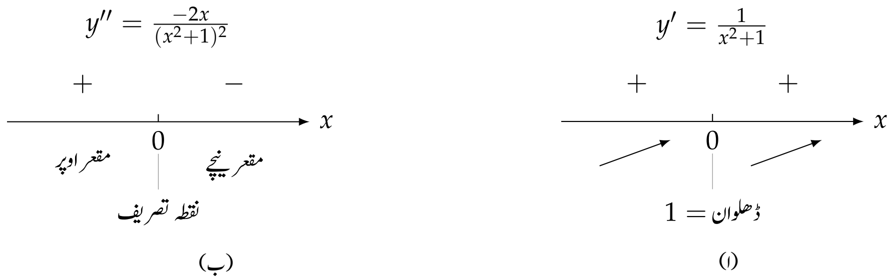
$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

حل: پہلا قدم: y' اور y'' : منحنی کی عمومی صورت y' اور y'' پر منحصر ہوتی ہے (حصہ 4.4)۔ ہم $y' = \frac{1}{x^2+1}$ پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق y'' دیتا ہے:

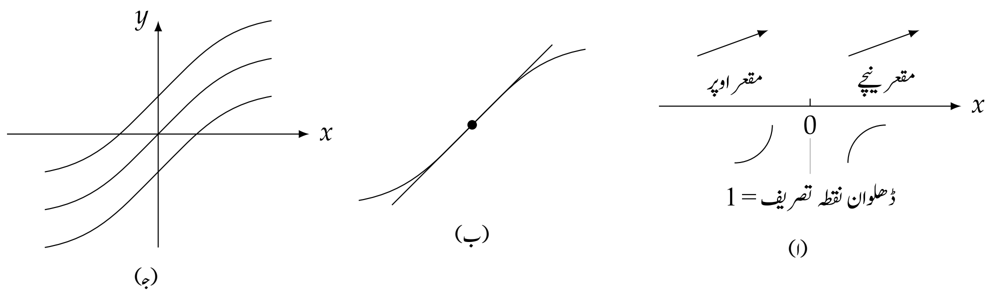
$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

دوسرا قدم: اتار چڑھاو۔ y' کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ہے۔نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔چونکہ $y' > 0$ ہے لہٰذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے (شکل 5.3-ا)۔

[10] solution curve
[11] integral curve



شکل 5.3: منحنی کی اتار چڑھاو اور مقعر (مثال 5.10)



شکل 5.4: منحنی کی عمومی صورت (مثال 5.10)

تیسرا قدم: مقعر۔ دوگنا تفرق $x = 0$ پر $(+)$ سے تبدیل ہو کر $(-)$ ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا $x = 0$ پر نقطہ تصریف پایا جائے گا (شکل 5.3-ب)۔

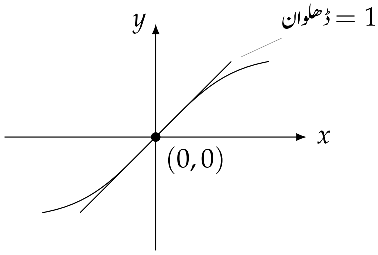
چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کی جھکاو شکل 5.4-ا اور اس کی عمومی صورت شکل 5.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔

پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x\to\mp\infty} y' = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

یوں $x \to \mp\infty$ پر منحنی افقی ہو گی۔

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے لہٰذا y محور کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل 5.4-ج۔ □



شکل 5.5: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال 5.11)

مثال 5.11: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

حل: ہم نے مثال 5.10 میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل 5.4-ج میں دکھایا گیا ہے۔ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ $(0,0)$ سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کی درکار مخصوص حل ہے جس کو شکل 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ □

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ میں تفاعل $f(x)$ کے الٹ تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے، جس پر آگے ایک باب میں غور کیا جائے گا، جبکہ تفاعل $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ کا الٹ تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+x^4}$ کو ہم ترسیمی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

ریاضیاتی نمونہ کشی

ریاضیاتی نمونہ کشی عموماً چار اقدام پر مبنی ہوتا ہے۔ ہم پہلے حقیقی دنیا میں کسی عمل (مثلاً گیند کا گرنا یا کھانسی کے دوران سانس کی نالی کا سکڑنا) کا مشاہدہ کرتے ہوئے اس کے اہم خصوصیات کو ظاہر کرنے والے ریاضی متغیرات کا نظام بناتے ہیں اور معلومات کا ریاضی استعارہ کرتے ہیں۔ اس کے بعد متغیرات کے تعلقات کو (عموماً) موجودہ ریاضی کی زبان میں لکھتے ہوئے نتائج اخذ کرتے ہیں۔ اس کے بعد ریاضیاتی حاصل نتائج کو زیر غور نظام پر لاگو کرتے ہیں۔ آخر میں ہم ریاضی نمونہ سے حاصل نتائج کا مشاہدے کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ پیش گوئی کر سکتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ دیگر نظام پر قابل اطلاق ہو گا۔ بہترین نمونہ وہ ہے جس کے نتائج مشاہدے کے عین مطابق ہوں، جو پیش گوئی کر سکے، جس کا استعمال وسیع اور آسان ہو۔

گیند کے گرنے کو مثال بناتے ہوئے مذکورہ بالا اقدام واضح کرتے ہیں۔ پہلے قدم پر ہم درج ذیل متغیرات اور مشاہدے اکٹھے کرتے ہیں۔
متغیرات:

فاصلہ: s
وقت: t
ابتدائی قیمتیں:
لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 0$ ہیں۔
فرض کیا گیا تعلق: $s = 4.9t^2$
دوسرے قدم پر احصاء استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ریاضی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

$$v = 9.8t$$
$$a = 9.8$$

تیسرے قدم پر نتائج کی تشریح کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے لحاظ سے مفہوم بیان کرتے ہیں۔یوں لمحہ t پر رفتار $9.8t$ میٹر فی سیکنڈ ہو گا جبکہ کسی بھی گرتے ہوئے جسم کی اسراع $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گی۔

آخری قدم پر ہم آزادانہ گرنے والے جسم کی لمحاتی رفتار اور اسراع ناپ کر تصدیق کرتے ہیں کہ ریاضی نمونہ درست نتائج کی پیش گوئی کر سکتا ہے۔

نقل اترنا بذریعہ کمپیوٹر

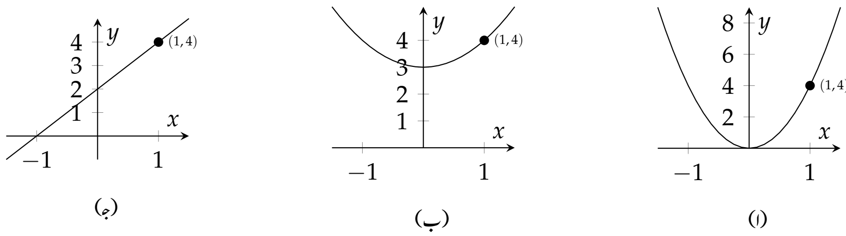
کسی بھی نظام کو سمجھنے کی خاطر ہم مختلف حالات میں اس کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض پیچیدہ نظام کا مشاہدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ (مثلاً جب مشاہدہ بہت مہنگا یا خطرناک ہو یا اس کے لئے بہت وقت درکار ہو۔) ایٹم بم یا سیلابی تباہی یا کہکشاں کا مشاہدہ اس زمرے میں آتے ہیں۔ ان نظام پر غور کرنے کے لئے ہم ریاضی نمونہ کا سہارا لیتے ہیں۔ جہاں نظام کا حساب پیچیدہ یا بہت لمبا ہو وہاں کمپیوٹر کا استعمال سود مند ثابت ہوتا ہے۔ بلند عمارت، دریا پر پل یا برقیاتی ادوار بنانے سے پہلے ان کے نمونوں پر کمپیوٹر کی مدد سے غور کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ ہم کمپیوٹر پر عمل کا نقل اتارتے[12] ہیں۔

سوالات

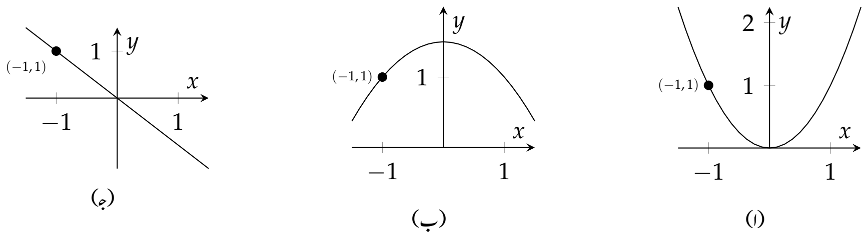
ابتدائی قیمت مسائل
سوال 1: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.6 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$
$$y(1) = 4$$

جواب: (ب)



شکل 5.6: ترسیمات برائے سوال 1



شکل 5.7: ترسیمات برائے سوال 2

سوال 2: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.7 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x$$
$$y(-1) = 1$$

جواب: (ب)

سوال 3 تا سوال 22 میں دیے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 3: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

جواب: $y = x^2 - 7x + 10$

سوال 4: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

[12] simulation

سوال 5: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x,\ x > 0, \quad y(2) = 1$
جواب: $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

سوال 6: $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

سوال 7: $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$
جواب: $y = 9x^{1/3} + 4$

سوال 8: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

سوال 9: $\frac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$
جواب: $s = t + \sin t + 4$

سوال 10: $\frac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

سوال 11: $\frac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$
جواب: $r = \cos(\pi\theta) - 1$

سوال 12: $\frac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

سوال 13: $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$
جواب: $v = \frac{1}{2} \sec t + \frac{1}{2}$

سوال 14: $\frac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v(\frac{\pi}{2}) = -7$

سوال 15: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 - 6x, \quad y'(0) = 4, y(0) = 1$
جواب: $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

سوال 16: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad y'(0) = 2, y(0) = 0$

سوال 17: $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1,\ r(1) = 1$
جواب: $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

سوال 18: $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{3t}{8}, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3,\ s(4) = 4$

سوال 19: $\frac{d^3 y}{dx^3} = 6,\ y''(0) = -8,\ y'(0) = 0,\ y(0) = 5$
جواب: $y = x^3 - 4x^2 + 5$

سوال 20: $\frac{d^3 \theta}{dt^3} = 0,\ \theta''(0) = -2,\ \theta'(0) = -\frac{1}{2},\ \theta(0) = \sqrt{2}$

سوال 21: $y^{(4)} = -\sin t + \cos t,\ y'''(0) = 7,\ y''(0) = y'(0) = -1,\ y(0) = 0$
جواب: $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

سوال 22: $y^{(4)} = -\cos x + 8\sin 2x,\ y'''(0) = 0,\ y''(0) = y'(0) = 1,\ y(0) = 3$

رفتار سے مقام معلوم کرنا

سوال 23 تا سوال 26 میں رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ اور ابتدائی مقام دیے گیے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 23: $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$
جواب: $s = 4.9t^2 + 5t + 10$

سوال 24: $v = 32t - 2, \quad s(1/2) = 4$

سوال 25: $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$
جواب: $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

سوال 26: $v = \frac{2}{\pi}\cos\frac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

اسراع سے مقام کی تلاش

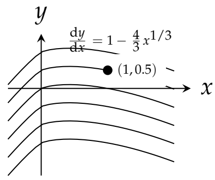
سوال 27 تا سوال 30 میں اسراع $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ ، ابتدائی رفتار اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 27: $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$
جواب: $s = 16t^2 + 20t + 5$

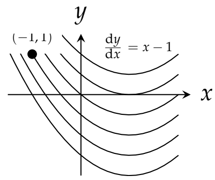
سوال 28: $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

سوال 29: $a = -4\sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$
جواب: $s = \sin(2t) - 3$

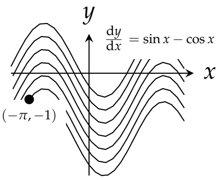
سوال 30: $a = \frac{9}{\pi^2}\cos\frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$



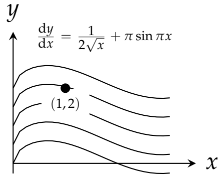
شکل 5.8: منحنیات برائے سوال 33



شکل 5.9: منحنیات برائے سوال 34



شکل 5.10: منحنیات برائے سوال 35



شکل 5.11: منحنیات برائے سوال 36

ترسیم کا حصول

سوال 31: ایسی ترسیم $y = f(x)$ تلاش کریں جو نقطہ $(9, 4)$ سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $3\sqrt{x}$ ہو۔
جواب: $y = 2x^{3/2} - 50$

سوال 32: منحنی $y = f(x)$ نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کا مماس افقی ہے۔یہ ترسیم $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ کو مطمئن کرتی ہے۔ اس ترسیم کو تلاش کریں۔

منحنیات حل (تکملی منحنیات)

سوال 33 تا سوال 36 میں منحنی حل دکھائے گئے ہیں۔ دیے نقطے پر منحنی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 33: ترسیمات کو شکل 33 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

سوال 34: ترسیمات کو شکل 34 میں دکھایا گیا ہے۔

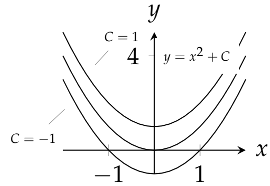
سوال 35: ترسیمات کو شکل 35 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = -\sin x - \cos x - 2$

سوال 36: ترسیمات کو شکل 36 میں دکھایا گیا ہے۔

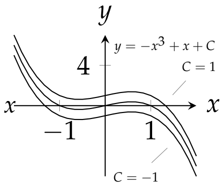
تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچنا مثال 5.10 میں سکھایا گیا۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے سوال 37 تا سوال 40 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کے خاکے بنائیں۔

سوال 37: $\frac{dy}{dx} = 2x$
جواب: شکل 5.12

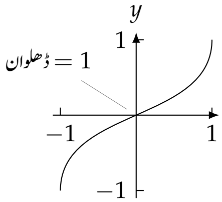
سوال 38: $\frac{dy}{dx} = -2x + 2$



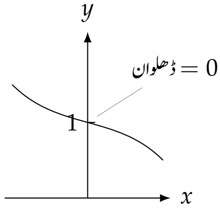
شکل 5.12



شکل 5.13



شکل 5.14



شکل 5.15

سوال 39: $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$
جواب: شکل 5.13

سوال 40: $\frac{dy}{dx} = x^2$

سوال 41 تا سوال 44 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ مثال 5.10 اور مثال 5.11 کی طرح بنائیں۔

سوال 41: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad y(0) = 0$
جواب: شکل 5.14

سوال 42: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}, \quad y(0) = 1$

سوال 43: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$
جواب: شکل 5.15

سوال 44: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}, \quad y(0) = 0$

عملی استعمال

سوال 45: چاند پر ثقلی اسراع $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ایک پتھر کو چاند پر گہرے شگاف میں گرایا جاتا ہے۔اس کی رفتار اس لمحہ پر کیا ہو گی جب یہ 30 سیکنڈ بعد شگاف کی تہہ تک پہنچتا ہے؟
جواب: $48\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 46: ایک راکٹ سطح زمین سے سیدھا اوپر رخ $20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کی اسراع سے اڑتا ہے۔ ایک منٹ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال 47: $10\,\mathrm{m}$ بلندی سے پانی میں کھودا جاتا ہے۔ پانی میں داخل ہوتے ہوئے لمحے پر آپ کی رفتار کیا ہو گی؟ $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیں۔
جواب: $14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 48: مریخ پر سطح کے نزدیک ثقلی اسراع $3.72\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ایک راکٹ جس کو مریخ کی سطح سے $93\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جائے کس بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 49: آپ اسلام آباد تا لاہور موٹروے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے صفر کر رہے ہیں جب آپ کو سامنے ایک حادثہ نظر آتا ہے۔ آپ یکدم گاڑی کو روکنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گاڑی $75\,\mathrm{m}$ میں مکمل رک جاتی ہے۔ رکنے کی اسراع تلاش کریں۔ اس کا جواب حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔
پہلا قدم: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -k \qquad k \text{ مستقل}$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 100, \quad s(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

دوسرا قدم: t کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$ حاصل ہو گا۔(آپ کے جواب میں k پایا جائے گا۔)
تیسرا قدم: k کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $s = 75$ حاصل ہوتا ہے۔
جواب: $t = \frac{100}{k},\ k = \frac{200}{3}\,\mathrm{km\,h^{-2}}$

سوال 50: موٹر سائکل پر با حفاظت صفر کے لئے لازمی ہے کہ آپ $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے $14\,\mathrm{m}$ میں رک سکیں۔ ایسا کرنے کے لئے کتنی اسراع درکار ہو گی؟

سوال 51: ایک ذرہ محوری لکیر پر $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر $s = 0$ اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4$ ہیں۔ لمحہ t پر $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور s تلاش کریں۔
جواب: $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2},\ s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

سوال 52: چاند پر اپالو-15 پرواز کے داؤد سکاٹ نے پر اور ہتھوڑے کو تقریباً $1.25\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک ساتھ گرنے دیا۔ چاند پر ہوا کی غیر موجودگی کی بنا دونوں کے گرنے کی رفتار یکساں تھی۔ بتائیں گرنے کا دورانیہ کتنا تھا؟ گرنے کا دورانیہ دریافت کرنے کے لئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے تفاعل s تلاش کریں جس کا آزاد متغیر t ہو۔ اس کے بعد t کی وہ قیمت تلاش کریں جو $s = 0$ دے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 0,\ s(0) = 1.25 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 53: محددی لکیر پر مستقل اسراع a سے حرکت کرتے ہوئے جسم کے مقام s کی معیاری مساوات درج ذیل ہے

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{5.2}$$

جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار v_0 اور مقام s_0 ہیں۔درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے اس مساوات کو اخذ کریں۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = v_0, \; s(0) = s_0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 54: سیارہ کی سطح کے نزدیک آزادی کے ساتھ گرتے ہوئے جسم کا مقام درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \tag{5.3}$$

جہاں ثقلی اسراع a ، سطح سیارہ سے جسم کی ابتدائی بلندی s_0 اور جسم کی ابتدائی رفتار v_0 ہے۔ چونکہ اسراع نیچے رخ (بلندی s کے الٹ) ہے لہٰذا مساوات میں منفی کی علامت پائی جاتی ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار اوپر رخ ہو تب v_0 مثبت ہو گا اور اگر اس کا رخ نیچے کو ہو تب v_0 منفی ہو گا۔

مساوات 5.2 استعمال کیے بغیر آپ مساوات 5.3 ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ ابتدائی قیمت مسئلہ کیا ہو گا؟ اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.3 کو حاصل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 55: رفتار کی الٹ تفرق سے ہٹاو کا تعین۔

ا. فرض کریں محور s پر ایک جسم کی رفتار $\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3$ ہے۔

1. اگر $t = 0$ پر $s = 5$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔
2. اگر $t = 0$ پر $s = -2$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔
3. اگر $t = 0$ پر $s = s_0$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

ب. فرض کریں محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔کیا یہ درست ہے کہ $\frac{ds}{dt}$ کا الٹ تفرق جانتے ہوئے دورانیہ $t = a$ تا $t = b$ کے لئے آپ جسم کا ہٹاو جان سکتے ہیں اگرچہ ان دونوں لمحات پر آپ کو جسم کا ہٹاو معلوم نہیں ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) $33.2\,\text{m}$ ، $33.2\,\text{m}$ ، $33.2\,\text{m}$ ، (ب) درست

سوال 56: یکتائی حل

اگر قابل تفرق تفاعل $y = F(x)$ اور $y = G(x)$ وقفہ I پر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل ہوں تب کیا I میں ہر x کے لئے $F(x) = G(x)$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔زنجیری قاعدہ کاالٹ اطلاق

بعض اوقات انجانے تکمل میں متغیرات کی تبدیلی سے جانا پہچانا تکمل حاصل ہوتا ہے۔ تکمل کے اس طریقہ کو ترکیب بدل کہتے ہیں۔ تکمل کے حصول کا یہ ایک اہم ترین طریقہ ہے۔ آئیں اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

عمومی طاقتی قاعدہ کی تکملی صورت

جب u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور n ناطق عدد ہو جس کی قیمت -1 نہ ہو تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{u^{n+1}}{n+1}\Big)=u^n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

اس مساوات کو ایک دوسری نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $u^n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا ایک الٹ تفرق $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int\Big(u^n\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

اس مساوات کے بائیں ہاتھ کو عموماً درج ذیل سادہ تفرقی روپ میں لکھا جاتا ہے

$$\int u^n\,\mathrm{d}u$$

جہاں دونوں $\mathrm{d}x$ کو آپس میں کاٹا گیا ہے۔درج بالا دو مساوات کو ملا کر درج ذیل ملتا ہے

$$\int u^n\,\mathrm{d}u=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C,\qquad (n\neq -1,\ \text{ناطق } n) \tag{5.4}$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرق ہے۔

مساوات 5.4 حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے، اگرچہ یہ متغیر اس کلیہ میں نہیں پایا جاتا ہے اور اس کی علامت اہم نہیں ہے۔ ہم اس متغیر کو کسی بھی علامت مثلاً θ ، t ، y وغیرہ سے ظاہر کر سکتے تھے۔ مساوات 5.4 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھ سکیں

$$\int u^n\,\mathrm{d}u,\qquad (n\neq -1)$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہو اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرق ہو تب اس کا حل $\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ ہو گا۔

مثال 5.12: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int (x+2)^5 \, \mathrm{d}x$$

حل: ہم اس تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\int u^n \, \mathrm{d}u$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم $u = x+2$ لیتے ہیں لہٰذا $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ ہو گا۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int (x+2)^5 \, \mathrm{d}x &= \int u^5 \, \mathrm{d}u && u = x+2,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\
&= \frac{u^6}{6} + C && \text{مساوات 5.4 میں } n = 5 \\
&= \frac{(x+2)^6}{6} + C && \text{واپس } u = x+2 \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

مثال 5.13: $u = x^2 + 2x - 3$ لیتے ہوئے $\mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x + 2 \, \mathrm{d} = 2(x+1) \, \mathrm{d}x$ اور $\frac{1}{2} \mathrm{d}u = (x+1) \, \mathrm{d}x$ ہو گا۔ یوں تکمل

$$\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) \, \mathrm{d}x$$

کو ترکیب بدل سے حل کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) \, \mathrm{d}x &= \int u^2 \cdot \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int u^2 \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} u^3 + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{6} (x^2 + 2x - 3) + C && u \text{ بدلیں}
\end{aligned}$$

آخری قدم پر u کی قیمت واپس پر کی گئی ہے۔ □

مثال 5.14:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 t \cos t \, dt &= \int u^4 \, du && u = \sin t,\ du = \cos t \, dt \\
&= \frac{u^5}{5} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{\sin^5 t}{5} + C && \text{بدلیں } u
\end{aligned}$$

□

ترکیب بدل کی کامیابی اس بات پر منحصر ہے کہ ہم ایسا بدل تلاش کر سکیں جو مشکل تکمل کو جانے پہچانے تکمل میں تبدیل کرتا ہو۔ بعض اوقات پہلے بدل کے بعد دوسرا اور تیسرا بدل بھی درکار ہوتا ہے یا ہم کوئی دوسرا بدل استعمال کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات کئی مختلف بدل قابل استعمال ہوں گے (اگلا مثال)۔

مثال 5.15: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

حل: ہم متکمل کے مشکل ترین حصے کی سادہ صورت تلاش کرنے کی غرض سے $u = z^2 + 1$ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z \, dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} && u = z^2 + 1,\ du = 2z \, dz \\
&= \int u^{-1/3} \, du \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{3/2} + C && \text{کا بدل } z^2+1 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

مثال 5.16:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y \, dy &= \int u^{1/2} \, du && u = 1 + y^2,\ du = 2y \, dy \\
&= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C && \text{کی جگہ } 1+y^2 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

مثال 5.17:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4t-1}\,\mathrm{d}t &= \int u^{1/2}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}u && u=4t-1,\ \mathrm{d}u=4\,\mathrm{d}t,\ \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}+C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u\\
&= \frac{1}{6}u^{3/2}+C\\
&= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2}+C && \text{کی جگہ } 4t-1 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

تکونیاتی تفاعل

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $\sin u$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ زنجیری قاعدہ ہمیں $\sin u$ کا تفرق دیتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u=\cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

اسی مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sin u$ مضرب $\cos u\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا الٹ تفرق ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int\Big(\cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)\,\mathrm{d}x=\sin u+C$$

بائیں ہاتھ دونوں $\mathrm{d}x$ کو باضابطہ کاٹ کر درج ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\int\cos u\,\mathrm{d}u=\sin u+C \tag{5.5}$$

مساوات 5.5 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو $\int\cos u\,\mathrm{d}u$ روپ میں لکھ سکیں، ہم u کے لحاظ سے اس کا تکمل لیتے ہوئے $\sin u+C$ حاصل کریں گے۔

مثال 5.18:

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,\mathrm{d}\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u && u = 7\theta+5, \mathrm{d}u = 7\,\mathrm{d}\theta, \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{u کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C && \text{u کی جگہ $7\theta+5$ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

مساوات 5.5 کی جوڑی مساوات درج ذیل ہے جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے۔

$$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C \tag{5.6}$$

مثال 5.19:

$$\begin{aligned}
\int x^2\sin(x^3)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x^3)\cdot x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u && u = x^3, \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x, \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}(-\cos u + C') && \text{u کے لحاظ سے تکمل} \\
&= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C && \text{$u = x^3$ اور $\frac{C'}{3} = C$ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

قابل تفرق تفاعل u کے لئے زنجیری قاعدہ کی مدد سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C \tag{5.7}$$

$$\int \csc^2 u\,\mathrm{d}u = -\cot u + C \tag{5.8}$$

$$\int \sec u \tan u\,\mathrm{d}u = \sec u + C \tag{5.9}$$

$$\int \csc u \cot u\,\mathrm{d}u = -\csc u + C \tag{5.10}$$

ہر کلیہ میں u حقیقی متغیر کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کلیہ کو پرکھنے کے لئے دائیں ہاتھ کا u کے لحاظ تفرق حاصل کریں۔ ایسا کرنے سے بائیں ہاتھ کا متکمل حاصل ہو گا۔

مثال 5.20:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int \sec^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta && \sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta}\\
&= \int \sec^2 u\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u && u = 2\theta, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\tan u + C && \text{مساوات } 5.7\\
&= \frac{1}{2}\tan 2\theta + C && u \text{ کی جگہ } 2\theta \text{ پر کریں}
\end{aligned}
$$

□

تکمل کا ترکیب بدل

مذکورہ بالا تمام مثالیں درج ذیل عمومی کلیہ کی انفرادی مثالیں ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(u)\,\mathrm{d}u && u = g(x),\ \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= F(u) + C && f(u) \text{ کا الٹ تفرق } F(u)\\
&= F(g(x)) + C && u \text{ کی جگہ } g(x) \text{ پر کریں}
\end{aligned}
$$

یہ تین اقدام تکمل کا ترکیب بدل ہیں۔ یہ ترکیب اس لئے کام کرتی ہے کہ $f(g(x))\cdot g'(x)$ کا الٹ تفرق $F(g(x))$ ہے جہاں f کا الٹ تفرق F ہے:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) &= F'(g(x))\cdot g'(x) && \text{زنجیری قاعدہ}\\
&= f(g(x))\cdot g'(x) && \text{چونکہ } F' = f \text{ ہے}
\end{aligned}
$$

ترکیب بدل پر مزید غور اگلے ابواب میں کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں دیا گیا بدل استعمال کرتے ہوئے غیر قطعی تکمل کو معیاری روپ میں لاتے ہوئے حل کریں۔

سوال 1: $\int \sin 3x \,\mathrm{d}x, \quad u = 3x$

سوال 2: $\int x \sin(2x^2) \,\mathrm{d}x, \quad u = 2x^2$

سوال 3: $\int \sec 2t \tan 2t \,\mathrm{d}t, \quad u = 2t$

سوال 4: $\int (1 - \cos \frac{t}{2})^2 \sin \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2}$

سوال 5: $\int 28(7x - 2)^{-5} \,\mathrm{d}x, \quad u = 7x - 2$

سوال 6: $\int x^3(x^4 - 1)^2 \,\mathrm{d}x, \quad u = x^4 - 1$

سوال 7: $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} \,\mathrm{d}r, \quad u = 1 - r^3$

سوال 8: $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y) \,\mathrm{d}y, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

سوال 9: $\int \sqrt{x} \sin^2(x^{3/2} - 1) \,\mathrm{d}x, \quad u = x^{3/2} - 1$

سوال 10: $\int \frac{1}{x^2} \cos^2(\frac{1}{x}) \,\mathrm{d}x, \quad u = -\frac{1}{x}$

سوال 11: $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta \,\mathrm{d}\theta, \quad u = \cot 2\theta, \quad u = \csc 2\theta$

سوال 12: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+8}}, \quad u = 5x + 8, \quad u = \sqrt{5x + 8}$

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم