

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامسٲٲ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
463	4.8	ترکیب نیوٹن
475	5	تکمل
475	5.1	غیر قطعی تکملات
487	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
503	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
514	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
532	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
559	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
576	5.7	بنیادی مسئلہ
597	5.8	قطعی تکمل میں بدل
603	5.9	اعدادی تکمل
603	5.10	قاعدہ ذوزنقہ
623	6	تکمل کا استعمال
623	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
627	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
638	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
646	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
661	6.4	تکلی چھلے
674	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
685	6.6	سطح طواف کا رقبہ
697	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
709	6.7.1	وسطانی مرکز
714	6.8	کام
729	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
738	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
753	7	ماورائی تفاعل
754	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

772	قدرتی لوگار تھم	7.2
790	قوت نمائی تفاعل	7.3
805	a^x اور $\log_a x$	7.4
816	افزائش اور تنزل	7.5
830	قاعدہ لھو پیٹال	7.6
846	اضافی شرح نمو	7.7
851	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
857	الٹ بکونیاتی تفاعل	7.8
873	الٹ بکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
890	ہذلولی تفاعل	7.10
911	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
930	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

935 ا ضمیمہ اول

937 ب ضمیمہ دوم

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان

بعض اوقات ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $y = f(x, y), y(x_0) = y_0$ کا بالکل درست حل معلوم نہیں کر سکتے ہیں یا نہیں کرنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں ہم عموماً کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے موزوں وقفہ پر ہر x کے لئے y کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ایسے حل کو ہم اعدادی حل³⁸ کہتے ہیں اور اس حل کو حاصل کرنے کے طریقہ کو اعدادی ترکیب³⁹ کہتے ہیں۔ اعدادی ترکیب عموماً بہت کم وقت میں درست نتائج دیتے ہیں اور جہاں بھی تحلیلی حل ناممکن، غیر ضروری یا پیچیدہ ہو، وہاں اعدادی ترکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ اس حصہ میں ہم ایسے ایک ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو ترکیب یولر⁴⁰ کہتے ہیں۔

میدان ڈھلوان

ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ پر یہ شرط مسلط کرتی ہے کہ تفرقی مساوات کا حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے گا اور اس نقطہ ہر حل کا ڈھلوان $f(x_0, y_0)$ ہو گا۔ ہم f کے دائرہ کار میں منتخب نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ ڈھلوان والی قلیل سیدھے خطوط بنا کر اس ڈھلوان کو تصویری جامہ پہنا سکتے ہیں۔ نقطہ (x, y) سے گزرتے ہوئے حل کی ڈھلوان اس نقطہ پر بنائے گئے قلیل خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا لہذا یہ خط اس نقطہ پر حل کا مماس ہو گا۔ ہم ان مماس پر نظر دوڑا کر حل کے رویہ کو جان سکتے ہیں۔

قلم و کاغذ کے ساتھ میدان ڈھلوان بنانا تھکا دینے والا کام ہے۔ اس کتاب میں تمام مثالوں میں میدان ڈھلوان کمپیوٹر کی مدد سے بنائے گئے۔ آپ کمپیوٹر کی مدد سے مخفی حل کے حصول پر غور کریں۔

خط بندی کا استعمال

دیے گئے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ سے ہم مخفی حل $y = y(x)$ کی تخمینہ درج ذیل خط بندی

$$L(x) = y(x_0) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

یا

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

numerical solution³⁸numerical method³⁹Euler' method⁴⁰

سے کر سکتے ہیں۔ x_0 کی بالکل پڑوس میں تقابل $L(x)$ اصل حل $y(x)$ کا اچھا تخمینہ ہو گا۔ ترکیب یولر میں اس طرح کے خط بندیوں کو آپس میں جوڑ کر زیادہ لمبے فاصلہ کے لئے حل تلاش کیا جاتا ہے۔ اب اس ترکیب پر غور کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (x_0, y_0) مخفی حل پر پایا جاتا ہے۔ فرض کریں ہم غیر تابع متغیر کی ایک نئی قیمت $x_0 = x_0 + dx$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر بڑھوتری dx بہت کم ہو تب

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0) dx$$

اصل حل $y = y(x_1)$ کا اچھا تخمینہ ہو گا۔ یوں نقطہ (x_0, y_0) سے، جو ٹھیک مخفی حل پر پایا جاتا ہے، ہم نقطہ (x_1, y_1) حاصل کر پائیں ہیں جو مخفی حل پر نقطہ $(x_1, y(x_1))$ کے بہت قریب ہو گا۔

نقطہ (x_1, y_1) اور ڈھلوان $f(x_1, y_1)$ لیتے ہوئے ہم دوسرا قدم لیتے ہیں۔ ہم $x_2 = x_1 + dx$ لے کر

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) dx$$

سے، مخفی حل $y = y(x)$ کے ساتھ، دوسرا تخمینہ نقطہ (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔ اسی طرح چلتے ہوئے تیسرے قدم پر ہم نقطہ (x_2, y_2) اور ڈھلوان $f(x_2, y_2)$ سے

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) dx$$

حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

مثال 7.84: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے لئے ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی تین تخمینے y_1 ، y_2 اور y_3 حاصل کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

ابتدا $x_0 = 0$ سے کریں اور $dx = 0.1$ لیں۔

حل: قدم اول:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) dx \\ &= y_0 + (1 + y_0) dx \\ &= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \end{aligned}$$

قدم دوم:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1) dx \\ &= y_1 + (1 + y_1) dx \\ &= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \end{aligned}$$

قدم سوم:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2) dx \\ &= y_2 + (1 + y_2) dx \\ &= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662 \end{aligned}$$

□

ترکیب یولر

ترکیب یولر سے ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

کے حل کی تخمینہ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم غیر تابع متغیر کے منتخب کردہ قیمتوں کے بیچ یکساں فاصلہ رکھیں اور n عدد ایسے نقطے منتخب کریں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + dx \\ x_2 &= x_1 + dx \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + dx \end{aligned} \quad (7.68)$$

اس کے بعد ہم متواتر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) dx \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1) dx \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) dx \end{aligned} \quad (7.69)$$

ہم قدموں کی تعداد n جتنی چاہیں رکھ سکتے ہیں، البتہ، n کو بہت بڑا رکھنے سے نتائج میں خلل جمع ہو گا۔

مثال 7.85: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

$x_0 = 0$ سے شروع کریں اور $dx = 0.1$ لیں۔

حل: اس مسئلے کا بالکل درست تحلیلی حل $y = 2e^x - 1$ ہے۔ جدول 7.13 میں، مساوات 7.68 اور مساوات 7.69 استعمال کرتے ہوئے، ترکیب یولر سے حاصل 4 اعشاریہ درست تخمینہ نتائج کا تحلیل حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ دس قدم بعد $x = 1$ تک پہنچ کر ترکیب یولر سے حاصل تخمینہ حل میں 5.6 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال 7.86:

□

جدول 7.13: تحلیل حل اور ترکیب پولر سے حاصل تخمینی حل کا موازنہ (مثال 7.85)

x	تخمینی y	تحلیلی y	خلل = تخمینی y - تحلیلی y
0	1	1	0
0.1	1.2	1.2103	0.0103
0.2	1.42	1.4428	0.0228
0.3	1.662	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

