احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xi

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 14
1.3 تفاعل 30
1.4 ترسیم کی منتقلی 52
1.5 تکونیاتی تفاعل 72

2 حدود اور استمرار 93
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 93
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 110
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف 123
2.4 تصور حد کی توسیع 143
2.5 استمرار 163
2.6 مماسی خط 181

3 تفرق 195
3.1 تفاعل کا تفرق 195
3.2 قواعد تفرق 217
3.3 تبدیلی کی شرح 236
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 253
3.5 زنجیری قاعدہ 274
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 291
3.7 دیگر شرح تبدیلی 308

4 تفرق کا استعمال 323
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں . . . 323
4.2 مسئلہ اوسط قیمت . . . 337
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ . . . 353
4.3.1 پرکھ . . . 353
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم . . . 365
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء . . . 388
4.6 بہترین بنانا . . . 415
4.7 خط بندی اور تفرقات . . . 439
4.8 ترکیب نیوٹن . . . 460

5 تکمل 471
5.1 غیر قطعی تکملات . . . 471
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی . . . 483
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق . . . 499
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ . . . 511
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات . . . 527
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ . . . 555
5.7 بنیادی مسئلہ . . . 571
5.8 قطعی تکمل میں بدل . . . 592
5.9 اعدادی تکمل . . . 598
5.10 قاعدہ ذوزنقہ . . . 598

6 تکمل کا استعمال 617
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ . . . 617
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد . . . 621
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش . . . 632
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا . . . 639
6.4 نلکی چھلے . . . 654
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں . . . 667
6.6 سطح طواف کا رقبہ . . . 677
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت . . . 689
6.7.1 وسطانی مرکز . . . 701
6.8 کام . . . 706
6.9 فشار سیال اور قوت سیال . . . 720
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال . . . 730

7 ماورائی تفاعل 743
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرق . . . 744

7.2 قدرتی لوگارتھم 762
7.3 قوت نمائی تفاعل 779
7.4 a^x اور $\log_a x$ 794
7.5 افزائش اور تنزل 805
7.6 قاعدہ لھوپیٹال 819
7.7 اضافی شرح نمو 835
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش 840
7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل 846
7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل 862
7.10 ہذلولی تفاعل 879
7.11 یک رتبی تفرقی مساوات 900
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان 918

8 تکمل کے طریقے 929
8.1 تکمل کے بنیادی کلیات 929
8.2 تکمل بالحصص 945
8.2.1 بار بار استعمال 950
8.3 جزوی کسر 959
8.4 تکونیاتی بدل 974
8.5 جدول تکمل اور کمپیوٹر 985
8.6 غیر مناسب تکمل 1002

9 لامتناہی تسلسل 1029
9.1 اعداد کی ترتیب کی حد 1029
9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے 1048
9.3 لامتناہی تسلسل 1064
9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ 1083
9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ 1093
9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ 1103
9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز 1115
9.8 طاقتی تسلسل 1129
9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل 1145
9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے 1156
9.11 طاقتی تسلسل کے استعمال 1175

10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد 1195
10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں 1195
10.2 سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی 1219

10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا . . . 1229
10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول . . . 1243
10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات . . . 1259
10.6 قطبی محدد . . . 1273
10.7 قطبی محدد میں ترسیم . . . 1285
10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات . . . 1299
10.8.1 دائرے . . . 1300
10.9 قطبی محدد میں تکمل . . . 1314

11 سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری 1327
11.1 مستوی میں سمتیات . . . 1327
11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات . . . 1344
11.2.1 کرہ . . . 1351
11.3 ضرب نقطہ . . . 1361
11.3.1 حساب . . . 1362
11.4 صلیبی ضرب . . . 1376
11.5 فضا میں خطوط اور مستویات . . . 1391
11.6 نلکی اور مربع سطحیں . . . 1405
11.7 نلکی اور کروی محدد . . . 1423

12 سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت 1435
12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات . . . 1435
12.2 گولا کی حرکت کی نمونہ کشی . . . 1458
12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ . . . 1467
12.4 انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ . . . 1475
12.5 فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت . . . 1497

13 کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات 1513
13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل . . . 1513
13.2 حد اور استمرار . . . 1528
13.3 جزوی تفرقات . . . 1543
13.4 تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات . . . 1560
13.5 زنجیری قاعدہ . . . 1577
13.6 پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات . . . 1592
13.7 رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں . . . 1599
13.8 انتہائی قیمتیں اور نقاط زین . . . 1620
13.8.1 نتیجہ . . . 1629
13.9 لیگرینج ضارബین . . . 1638
13.10 کلیہ ٹیلر . . . 1655

14 تکمل بالکثرت 1663
14.1 دوہرا تکملات 1663
14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت 1683
14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ 1699
14.4 کارتیسی محدد میں تہرا تکمل 1710
14.5 تعین بعدی کمیت اور معیار اثر 1724
14.6 نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل 1733
14.7 تکملات بالکثرت میں بدل 1749

جوابات 1757

ا ضمیمہ اول 1759

ب ضمیمہ دوم 1761

ج ضمیمہ تین 1763

د ضمیمہ چار 1765

ھ ضمیمہ پانچ 1767

و ضمیمہ چھ 1769

ز ضمیمہ سات 1771

ح ضمیمہ آٹھ 1773

ط ضمیمہ آٹھ 1775

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

14.7 تکملات بالکثرت میں بدل

اس حصہ میں بارہا تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل سکھایا جائے گا۔ واحد تکمل کی طرح یہاں بھی پیچیدہ تکمل کو سادہ تکمل سے بدلا جاتا ہے۔ بدل سے متکمل یا تکمل کی حدوں یا ان دونوں کی سادہ روپ استعمال کی جاتی ہے۔

دوہرا تکملات میں بدل

ہم قطبی محدد کی بدل کا استعمال حصہ 14.3 میں دیکھ چکے ہیں جو دہرا تکملات کی بدل، جس میں متغیرات کی تبدیلی کو خطے کی تبدیلی تصور کیا جاتا ہے، کی ایک مخصوص شکل ہے۔

فرض کریں مستوی uv کے خطہ G کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ مساوات

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

کے ذریعہ مستوی xy کے خطہ R میں بدلا جاتا ہے۔ ہم R کو اس بدل میں G کا **عکس**[18] اور G کو R کا **قبل عکس**[19] کہتے ہیں۔خطہ R کسی بھی تفاعل $f(x, y)$ کو خطہ G میں معین تفاعل $f(g(u, v), h(u, v))$ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خطہ R میں $f(x, y)$ کے تکمل کا خطہ G میں $f(g(u, v), h(u, v))$ کے تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

اس کا جواب: اگر g ، h اور f کے جزوی تفرقات استمراری ہوں اور $J(u, v)$ (جس پر جلد تبصرہ کیا جائے گا) صرف تنہا نقطوں پر صفر ہو (اگر صفر ہو بھی) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(g(u, v), h(u, v))\big|J(u, v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.42}$$

مذکورہ بالا مساوات میں $J(u, v)$ ، جو یعقوبی کہلاتا ہے، کی مطلق قیمت استعمال کی گئی۔

تعریف: **یعقوبی مقطع** یا محددی بدل $x = g(u, v)$ ، $y = h(u, v)$ کے **یعقوبی**[20] سے مراد درج ذیل ہے:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{14.43}$$

□

---

[18] image
[19] preimage
[20] Jacobian

یعقوبی کو

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے جو ہمیں یاد دلاتا ہے کہ x اور y کی جزوی تفرقات سے یعقوبی (مساوات 14.43) حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.42 کی استخراج آپ کو اعلیٰ احصاء کے نصاب میں ملے گی جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

قطبی محدد میں میں u اور v کی جگہ r اور θ ہوں گے لہٰذا $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ لیتے ہوئے یعقوبی

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

ہو گا اور مساوات 14.42 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جو حصہ 14.3 کی مساوات 14.28 ہے۔

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &=\iint\limits_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \quad \text{اگر } r\ge 0 \text{ ہو}\end{aligned}\tag{14.44}$$

شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کس طرح مستطیل $G:0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2$ کو مساوات $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ ایک چوتھائی دائرہ R ، جس کی سرحد ربع اول میں مستوی xy پر $x^2+y^2=1$ ہے، میں بدلتے ہیں۔

دھیان رہے کہ مساوات 14.44 کی دائیں ہاتھ میں قطبی محددی مستوی میں کسی خطہ پر $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ کا تکمل نہیں بلکہ کارتیسی r,θ مستوی کے خطہ G میں $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ اور r کے حاصل ضرب کا تکمل ہے۔

آئیں بدل کی دوسری مثال دیکھیں۔

مثال 14.24: مستوی uv میں موزوں خطہ پر بدل

$$u=\frac{2x-y}{2},\quad v=\frac{y}{2}\tag{14.45}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=y/2+1}\frac{2x-y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

حل: ہم مستوی xy میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔

مساوات 14.42 استعمال کرنے کی خاطر ہمیں مستوی uv میں مطابقتی خطہ G اور بدل کا یعقوبی معلوم کرنے ہوں گے۔ انہیں دریافت کرنے کے لئے ہم مساوات 14.45 کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x = u + v, \quad y = 2v \tag{14.46}$$

اس کے بعد ہم R کی سرحدوں کی مساوات میں انہیں پر کر کے G کی سرحدیں دریافت کرتے ہیں۔

خطہ R کی سرحد کی xy مساواتیں	خطہ G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	uv مساواتوں کی سادہ صورت
$x = \frac{y}{2}$	$u + v = \frac{2v}{2} = v$	$u = 0$
$x = \frac{y}{2} + 1$	$u + v = \frac{2v}{2} + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

بدل کا یعقوبی (مساوات 14.46 سے) درج ذیل ہو گا۔

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

ہم اب مساوات 14.42 استعمال کرنے کی تمام معلومات جانتے ہیں:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^2 \Big[u^2 \Big]_0^1 \mathrm{d}v = \int_0^2 \mathrm{d}v = 2 \end{aligned}$$

□

مثال 14.25: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

حل: ہم مستویxy میں تکمل کے خطہ R کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔ متکمل کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ بدل $u = x + y$ اور $v = y - 2x$ استعمال کیا جائے جنہیں u اور v کی صورت میں x اور y کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \quad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \tag{14.47}$$

ہم مساوات 14.47 سے مستوی uv میں خطہ G کی سرحدیں معلوم کرتے ہیں۔

uv مساواتوں کی سادہ صورت	G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	R کی سرحد کی xy مساواتیں
$u = 1$	$\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$	$x + y = 1$
$v = u$	$\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$	$x = 0$
$v = -2u$	$\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$	$y = 0$

مساوات 14.47 میں دیے بدل کا یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

ہم مساوات 14.42 سے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} \, v^2 \big|J(u,v)\big| \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2} \, v^2 \left(\frac{1}{3}\right) \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3} \int_0^1 u^{1/2} \left(\frac{1}{3} v^3\right)_{v=-2u}^{v=u} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{9} \int_0^1 u^{1/2} (u^3 + 8u^3) \, \mathrm{d}u = \int_0^1 u^{7/2} \, \mathrm{d}u = \frac{2}{9} u^{9/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

□

تہرا تکملات میں بدل

تہرا تکملات کے متغیرات کی تبدیلی کو تین بعدی خطہ کا بدل تصور کرنے والے ترکیب کی خصوصی صورتیں نلکی اور کروی محددی بدل ہیں۔ یہ ترکیب دوہرا تکملات کی ترکیب کی طرح ہے، بس اب ہم دو کی بجائے تین بعد میں کام کرتے ہیں۔

فرض کریں uvw فضا میں خطہ G کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ xyz فضا کے خطہ D میں درج ذیل روپ کی مساواتوں سے بدلا جاتا ہے۔

$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w)$$

تب D میں کسی بھی تفاعل $F(x, y, z)$ کو G میں معین تفاعل

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

تصور کیا جا سکتا ہے۔اگر g ، h اور k کے اول جزوی تفرقات استمراری ہوں تب D پر F کے تکمل کا G پر $H(u, v, w)$ کے تکمل کے ساتھ تعلق درج ذیل مساوات دیگی۔

$$\iiint\limits_D F(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(u, v, w) \left| J(u, v, w) \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w \tag{14.48}$$

اس مساوات میں $J(u, v, w)$ کی مطلق قیمت استعمال کی گئی ہے جو درج ذیل **یعقوبی مقطع**[21] ہے۔

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \tag{14.49}$$

متغیرات کی تبدیلی کا کلیہ، جس کو مساوات 14.48 میں پیش کیا گیا ہے، پیچیدہ ہے اور دو بعدی صورت کی طرح ، اس کی اشتقاق کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

نلکی محدد میں u ، v اور w کی جگہ ρ ، ϕ اور z ہوں گے۔کارتیسی $\rho\phi z$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں بدل درج ذیل مساوات دیں گی۔

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

اس بدل کا یعقوبی

$$\begin{aligned} J(\rho, \phi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho \end{aligned}$$

---

[21] Jacobian determinant

ہو گا۔یوں مساوات 14.48 درج ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\iiint\limits_{D} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{G} H(\rho,\phi,z)\left|\rho\right|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \tag{14.50}$$

جب بھی $\rho \geq 0$ ہو، ہم مطلق کی علامت سے چھٹکارا حاصل کر سکتے ہیں۔

کروی محدد میں u ، v اور w کی جگہ r ، θ اور ϕ ہوں گے۔ کارتیسی $r\theta\phi$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں بدل درج ذیل مساوات دیں گی۔

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$

اس بدل کا یعقوبی

$$J(\rho,\phi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

ہو گا۔یوں مساوات 14.48 درج ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\iiint\limits_{D} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{G} H(r,\theta,\phi)\left|r^2\sin\theta\right|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.51}$$

کروی محدد میں $0 \leq \theta \leq \pi$ کی بنا $\sin\theta$ کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا مطلق کی علامت لکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

آئیں بدل کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.26: درج ذیل بدل

$$u = (2x-y)/2, \quad v = y/2, \quad w = z/3 \tag{14.52}$$

استعمال کرتے ہوئے uvw فضا میں موزوں خطہ پر تکمل لے کر درج ذیل تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

$$\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=y/2+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

حل: ہم xyz فضا میں تکمل کے خطہ D کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں۔ یہاں سرحدی سطحیں مستویات ہیں۔

مساوات 14.48 استعمال کرنے کے لئے ہمیں uvw فضا میں مطابقتی خطہ G اور بدل کا یعقوبی جاننا ہو گا۔ ہم مساوات 14.52 کو x ، y اور z کے لئے u ، v اور w کی صورت میں حل کر کے

$$x = u+v, \quad y = 2v, \quad z = 3w \tag{14.53}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم D کی سرحدوں کی مساوات میں یہ قیمتیں پر کر کے G کی سرحدوں کی مساواتیں دریافت کرتے ہیں:

مساواتوں uvw کی سادہ صورتیں	G کی سرحدوں کی مطابقتی uvw مساواتیں	D کی سرحدوں کی xyz مساواتیں
$u=0$	$u+v=2v/2=v$	$x=y/2$
$u=1$	$u+v=2v/2+1=v+1$	$x=y/2+1$
$v=0$	$2v=0$	$y=0$
$v=2$	$2v=4$	$y=4$
$w=0$	$3w=0$	$z=0$
$w=1$	$3w=3$	$z=3$

ہم مساوات 14.53 استعمال کرتے ہوئے یعقوبی تلاش کرتے ہیں۔

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

ہم مساوات 14.48 استعمال کرنے کے لئے درکار تمام معلوم جان چکے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=y/2+1}\Big(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\int_0^2\int_0^1(u+w)\big|J(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&=\int_0^1\int_0^2\int_0^1(u+w)(6)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=6\int_0^1\int_0^2\Big[\frac{u^2}{2}+uw\Big]_0^1\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&=6\int_0^1\int_0^2\Big(\frac{1}{2}+w\Big)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=6\int_0^1\Big[\frac{v}{2}+vw\Big]_0^2\mathrm{d}w=6\int_0^1(1+2w)\,\mathrm{d}w\\
&=6\Big[w+w^2\Big]_0^1=6(2)=12\end{aligned}$$

□

سوالات

جوابات

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضميمہ ج

ضميمہ تين

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ