

# احصاء اور تحليلي علم الهندسه

(جلد اول)

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامسيٹ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
862	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	بدلولی تفاعل	7.10
900	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نکتہ بنائی بدل	
986	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1003	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1220	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1230 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1244 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1260 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1274 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1286 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1300 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1301 . . . . .	10.8.1	دائرے
1315 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں تحمل
1329 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1329 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1345 . . . . .	11.2	کارتیسی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1353 . . . . .	11.2.1	کرہ
1363 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1364 . . . . .	11.3.1	حساب
1378 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1393 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستویات
1408 . . . . .	11.6	تنگی اور مربع سطحیں
1426 . . . . .	11.7	تنگی اور کروی محدود
1437 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1437 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1460 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1469 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1478 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1499 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1515 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1515 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1530 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1545 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1562 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1579 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1594 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1601 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1622 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1631 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1640 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1657 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1665	14 تکمیل بالکثرت
1665 . . . . .	14.1 دوہرا نکملات
1685 . . . . .	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1701 . . . . .	14.3 دوہرا نکملات کا قطبی روپ
1712 . . . . .	14.4 کار تہی محدود میں تہرا نکمل
1727 . . . . .	14.5 تعین بعد میں کیت اور معیار اثر
1736 . . . . .	14.6 نکلی اور کردی محدود میں تہرا نکمل
1756 . . . . .	14.7 نکملات بالکثرت میں بدل
1771	15 سستی میدان میں تکمیل
1771 . . . . .	15.1 لکیری تکمیل
1774 . . . . .	15.1.1 جمع پذیری
1781 . . . . .	15.2 سستی میدان، کام، دائری بہاو، اور بہاو
1798 . . . . .	15.3 راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان
1812 . . . . .	15.4 مستوی میں مسئلہ گرین
1817	جوابات
1853	ا ضمیمہ اول
1855	ب ضمیمہ دوم
1857	ج ضمیمہ تین
1859	د ضمیمہ چار
1861	ه ضمیمہ پانچ
1863	و ضمیمہ چھ
1865	ز ضمیمہ سات
1867	ح ضمیمہ آٹھ
1869	ط ضمیمہ آٹھ
1871	ی نکملات کا مختصر جدول





## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## 15.4 مستوی میں مسئلہ گرین

ہم اب ایک ایسا مسئلہ پیش کرتے ہیں جو مستوی خطہ کی سرحد کی ہمراہ یا اس کو عبور کرتے ہوئے داب نا پذیر سیال کی بہاؤ اور خطہ کے اندر اس کی حرکت کے بیچ تعلق پیش کرتا ہے۔ پھیلاؤ اور گردش کے تصورات سیال کے سرحدی رویہ اور اندرونی رویہ کے بیچ تعلق پیش کرنا ممکن بناتے ہیں۔ سیال کی سمتی رفتاری میدان کا پھیلاؤ کسی نقطہ پر خطہ میں سیال کے دخول یا خروج کی ناپ ہے جبکہ گردش اس نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ ہے۔

مسئلہ گرین کہتا ہے کہ، چند ایسے شرائط مطمئن ہونے کی صورت میں جو عملی استعمال میں عموماً پورے ہوتے ہیں، مستوی خطہ کی سرحد سے خارجی بہاؤ سرحد کے اندر میدان کے پھیلاؤ کے دوہرا تکمیل کے برابر ہو گا۔ اس مسئلے کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ خطہ کی سرحد کی ہمراہ خلاف گھڑی دائری بہاؤ اس خطہ میں میدان کی گردش کے دوہرا تکمیل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ گرین، علم احصاء کے عظیم مسائل میں سے ایک ہے۔ یہ گہرا اور حیرت کن ہے اور اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ خالص ریاضیات میں مسئلہ گرین کی اہمیت، احصاء کے بنیادی مسئلہ کے برابر ہے۔ عملی ریاضیات میں مسئلہ گرین کا تین البادی روپ برقی، مقناطیسی، اور سیالی حرکیات کے مسائل کا بنیاد مہیا کرتا ہے۔

ہم سیال کی حرکت کی سمتی رفتاری میدان کی بات اس لئے کرتے ہیں کہ سیال کی حرکت کا ذہنی خاکہ بنانا آسان ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ مسئلہ گرین کسی بھی سمتی میدان، جو چند شرائط کو مطمئن کرتا ہو، کے لئے درست ہو گا۔ اس کی درستگی میدان کے کسی خصوصی طبعی خاصیت کے ہونے پر منحصر نہیں ہے۔

نقطہ پر کشاف بہاؤ: پھیلاؤ

مسئلہ گرین کے لئے ہمیں دو نئے تصورات کی ضرورت پیش آتی ہے۔ پہلا تصور، ایک نقطہ پر سمتی میدان کی کشاف بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں سمتی میدان کا پھیلاؤ کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

فرض کریں مستوی میں سمتی میدانی کا سیالی بہاؤ  $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$  ہے اور خطہ  $R$  کے ہر نقطہ پر  $M$  اور  $N$  کے یک رتبی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔ خطہ  $R$  میں  $(x, y)$  ایک نقطہ ہے اور  $S$  ایک ایسا چھوٹا مستطیل ہے جو مکمل طور پر  $R$  میں پایا جاتا ہے اور جس کا ایک راس  $(x, y)$  ہے۔ اس مستطیل کے اطراف محدود محور کے متوازی ہیں اور ان کی لمبائیاں  $\Delta x$  اور  $\Delta y$  ہیں۔ مستطیل کی چلی سرحد کو عبور کرتا ہوا خارجی سیال کی شرح تخمیناً نقطہ  $(x, y)$  پر باہر رخ عمودی سمتی رفتار کے غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع کے برابر ہو گی:

$$(15.19) \quad F(x, y) \cdot (-j)\Delta x = -N(x, y)\Delta x$$

یوں اگر سمتی رفتار کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ہو تب خارجی شرح کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ضرب میٹر یعنی مربع میٹر فی سیکنڈ ہو گی۔ باقی تین اطراف کے عمودی باہر رخ خارجی سیال کی شرح بھی اسی طرح حاصل کی جاسکتی ہیں۔ چاروں اطراف کے نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

$$(15.20) \quad \begin{aligned} F(x, y + \Delta y) \cdot j\Delta x &= N(x, y + \Delta y)\Delta x && \text{بالائی} \\ F(x, y) \cdot (-j)\Delta x &= -N(x, y)\Delta x && \text{چلی} \\ F(x + \Delta x, y) \cdot i\Delta y &= M(x + \Delta x, y)\Delta y && \text{دائیں} \\ F(x, y) \cdot (-i)\Delta y &= -M(x, y)\Delta y && \text{بائیں} \end{aligned}$$

مخالف اضلاع کی شرح کے مجموعات درج ذیل ہوں گے۔

$$(15.21) \quad [N(x, y + \Delta y) - N(x, y)]\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \quad \text{چُنْلی اور بالائی}$$

$$(15.22) \quad [M(x + \Delta x, y) - M(x, y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \quad \text{دائیں اور بائیں}$$

مساوات 15.21 اور مساوات 15.22 کا مجموعہ کل اخراج دیگا:

$$(15.23) \quad \text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

ہم اب  $\Delta x\Delta y$  سے تقسیم کر کے بہاؤ فی اکائی رقبہ یعنی بہاؤ کی کثافت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

آخر میں ہم  $\Delta x$  اور  $\Delta y$  کو صفر تک پہنچا کر نقطہ  $(x, y)$  پر  $\mathbf{F}$  کے کثافت بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں۔

ریاضیات میں ہم کثافت بہاؤ کو  $\mathbf{F}$  کا پھیلاؤ کہتے ہیں۔ میدان  $\mathbf{F}$  کے پھیلاؤ کو ہم پھیلاؤ  $\mathbf{F}$  لکھتے ہیں۔

تعریف: نقطہ  $(x, y)$  پر سمتی میدان  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  کا کثافت بہاؤ یا پھیلاؤ<sup>13</sup> درج ذیل ہوگا۔

$$(15.24) \quad \mathbf{F} \text{ پھیلاؤ} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

□

اگر نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر ایک باریک سوراخ سے سیال ایک خطہ میں داخل ہو تب اس سوراخ سے سیال پھیلے گا جس کی بنا اس کو یہی نام دیا گیا ہے۔ چھوٹے مستطیل میں نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر سوراخ سے سیال داخل ہونے کی صورت میں پھیلاؤ مثبت ہو گا جبکہ خطہ سے سیال کی اخراج کی صورت میں پھیلاؤ کی قیمت منفی ہوگی۔

مثال 15.14: سمتی میدان  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}$  کا پھیلاؤ تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 15.24 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \text{ پھیلاؤ} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) \\ &= 2x - 1 - 2y = 2x - 2y - 1 \end{aligned}$$

□

ایک نقطہ پر کثافت دائری بہاؤ

مسئلہ گرین کے لئے درکار دوسرا نیا تصور ایک نقطہ پر سمتی میدان  $F$  کی کثافت دائری بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں  $F$  کی گردش کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کی خاطر ہم وہی سمتی میدان

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$$

اور نقطہ  $(x, y)$  پر چھوٹا مستطیل رقبہ  $S$  لیتے ہیں۔ اس مستطیل کو یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔

رقبہ  $S$  کے گرد خلاف گھڑی  $F$  کا دائری بہاؤ مستطیل  $S$  کی اطراف کی ہمراہ بہاؤ کی شرح کا مجموعہ ہو گا۔ اکائی مماسی سمتیہ  $i$  کے رخ سمتی رفتار  $F$  کا غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع تخمیناً نیچے ضلع کی ہمراہ بہاؤ کے برابر ہو گا:

$$(15.25) \quad F(x, y) \cdot i \Delta x = M(x, y) \Delta x$$

باقی اطراف کی ہمراہ خلاف گھڑی بہاؤ اسی طرح حاصل کی جاسکتی ہیں۔ چاروں اضلاع کے نتائج درج ذیل ہوں گے۔

$$(15.26) \quad \begin{aligned} F(x, y + \Delta y) \cdot (-i) \Delta x &= -M(x, y + \Delta y) \Delta x && \text{بالائی} \\ F(x, y) \cdot i \Delta x &= M(x, y) \Delta x && \text{نیچلی} \\ F(x + \Delta x, y) \cdot j \Delta y &= N(x + \Delta x, y) \Delta y && \text{دائیں} \\ F(x, y) \cdot (-j) \Delta y &= -N(x, y) \Delta y && \text{بائیں} \end{aligned}$$

ہم مخالف اطراف کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(15.27) \quad -[M(x, y + \Delta y) - M(x, y)] \Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \quad \text{بالائی اور نیچلی}$$

$$(15.28) \quad [N(x + \Delta x, y) - N(x, y)] \Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \quad \text{دائیں اور بائیں}$$

مساوات 15.27 اور مساوات 15.28 کے مجموعہ کو  $\delta x \Delta y$  سے تقسیم کر کے مستطیل کی کثافت دائری بہاؤ کی تخمینی قیمت حاصل ہو گی:

$$\frac{\text{مستطیل کے گرد دائری بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

آخر میں ہم  $\Delta x$  اور  $\Delta y$  کو صفر تک پہنچا کر نقطہ  $(x, y)$  پر  $F$  کی کثافت دائری بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں جس کو ریاضیات میں  $F$  کی گردش کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ  $(x, y)$  پر سمتی میدان  $F$  کی کثافت دائری بہاؤ یا گردش<sup>14</sup> درج ذیل ہو گی۔

$$(15.29) \quad F \text{ گردش} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

□

مستوی  $xy$  میں نہایت کم گہرائی کے رواں پانی میں نقطہ  $(x_0, y_0)$  پر گردش یا کثافت دائری بہاؤ، اس نقطہ پر نسب چرخ، جس کا محور مستوی کو عمودی ہو، کی حرکت کی رفتار اور رخ کی پیمائش ہو گی۔

مثال 15.15: درج ذیل سمتی میدان کی گردش تلاش کریں۔

$$F(x, y) = (x^2 - y)i + (xy - y^2)j$$

حل: ہم مساوات 15.29 استعمال کرتے ہیں۔

$$F \text{ گردش} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) = y + 1$$

□

مستوی میں مسئلہ گرین

مسئلہ گرین کا ایک روپ کہتا ہے کہ موزوں حالات میں مستوی میں سادہ بند منحنی سے سمتی میدان کا خارجی بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کے پھیلاؤ کے دہرائے کے برابر ہو گا۔ مساوات 15.8 اور مساوات 15.9 میں بہاؤ کے کلیات پر دوبارہ نظر ڈالیں۔

مسئلہ 15.3: مسئلہ گرین (پھیلاؤ-بہاؤ یا عمودی روپ)

سادہ بند منحنی  $C$  سے میدان  $F = Mi + Nj$  کا خارجی بہاؤ،  $C$  میں محیط خطہ  $R$  پر  $F$  کے پھیلاؤ کے دہرائے کے برابر ہو گا۔

$$(15.30) \quad \oint_C F \cdot n \, dS = \oint_C M \, dy - N \, dx = \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy$$

اخراجی بہاؤ

مکمل پھیلاؤ

مسئلہ گرین کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ ایک سادہ بند منحنی کی ہمراہ، خلاف گھڑی ایک میدان کا دائری بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کی گردش کے دہرائے کے برابر ہو گا۔

مسئلہ 15.4: مسئلہ گرین (دائری بہاو-گردش یا ماس روپ)

مستوی میں ایک سادہ بند منحنی  $C$  کی ہمراہ خلاف گھڑی، میدان  $F = Mi + Nj$  کی دائری بہاو، منحنی میں محیط خطہ  $R$  پر میدان کی گردش کے دہرائی کے برابر ہو گا۔

$$(15.31) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

خلاف گھڑی دائری بہاو

تکمل گردش

□

میدان  $F = Mi + Nj$  کے لئے مساوات 15.7 میں دائری بہاو کے لئے دیا گیا تکمل درج ذیل معادل روپ اختیار کرے گا۔

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C M \, dx + N \, dy$$

مسئلہ گرین کے دو روپ ایک دوسرے کے معادل ہیں۔ میدان  $G_1 = Ni - Mj$  پر مساوات 15.30 کا اطلاق مساوات 15.31 دے گی جبکہ میدان  $G_2 = -Ni + Mj$  پر مساوات 15.31 کا اطلاق مساوات 15.30 دے گی۔

مسئلہ گرین کے لئے ضروری ہے دو مفروضے مطمئن ہوتے ہوں۔ اول ہمیں  $M$  اور  $N$  پر ایسا شرائط مسلط کرنے ہوں گے کہ مسئلہ گرین میں پائے جانے والے تعلقات موجود ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے کھلا خطہ، جس میں  $C$  اور  $R$  پائے جاتے ہوں، کے ہر نقطہ پر  $M$  اور  $N$  اور ان کے یک رتبی تفرقات استمراری ہوں گے۔ دوم، ہمیں منحنی  $C$  پر ہندسی شرائط مسلط کرنے ہوں گے۔ منحنی سادہ، بند اور ایسے ٹکڑوں پر مشتمل ہونی چاہیے جن کی ہمراہ  $M$  اور  $N$  قابل تکمل ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ  $C$  ٹکڑوں میں ہموار ہے۔ ہم جو ثبوت مسئلہ گرین کے لئے پیش کرتے ہیں اس میں  $R$  کی شکل و صورت پر بھی شرائط مسلط کئے گئے ہیں۔ اعلیٰ نصاب کی کتب میں نسبتاً کم شرائط پر مبنی ثبوت موجود ہیں۔ انہیں پہلے چند مثالیں دیکھیں۔

مثال 15.16: مسئلہ گرین کے دونوں روپ کی تصدیق میدان

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

کے لئے اکائی دائرہ  $C$  میں خطہ  $R$  پر کریں۔

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

□

جوابات



