احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

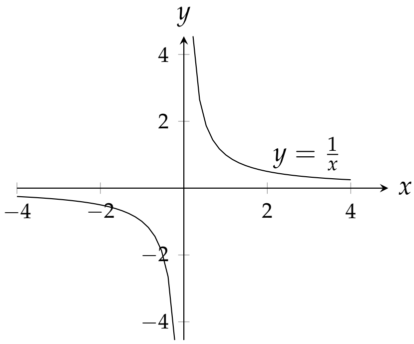
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 4.73: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \to \mp\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔

$x \to \mp\infty$ پر حد

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گھٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار بتدریج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \to \mp\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

2. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $\epsilon > \left|f(x) - L\right|$ ہو یعنی

$$x < N \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

□

لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہٰذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$x \to \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کے حد حاصل کیے۔اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کی بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

با ضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$\lim_{x\to\mp\infty} k = k, \quad \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{4.7}$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

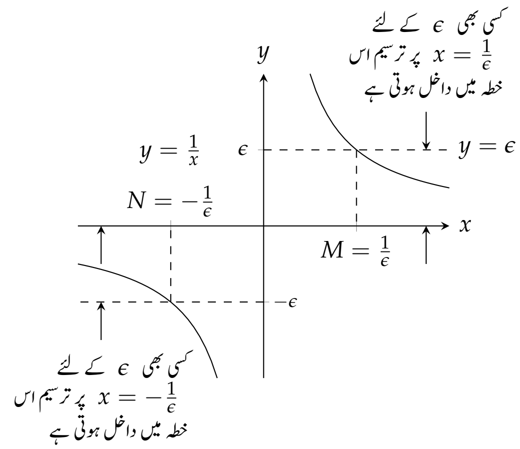
ب. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x > M, \quad \implies \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 74.4)۔



شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 20.4)

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \quad \implies \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$N = -\frac{1}{\epsilon}$ یا $-\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 74.4)۔

□

مساوات 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6: $x \to \mp\infty$ پر حل کے خواص
اگر $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) + g(x)] = L + M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) - g(x)] = L - M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to\mp\infty} kf(x) = kL$

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

یہ خواص بالکل مسئلہ 1.2 (صفحہ 113) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(5+\tfrac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ}\\
&= 5+0 = 5 && \text{معلوم قیمتیں}
\end{aligned}$$

ب.

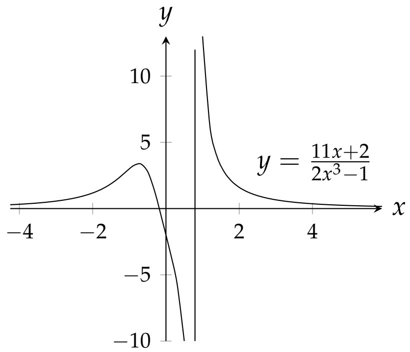
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب}\\
&= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں}
\end{aligned}$$

□

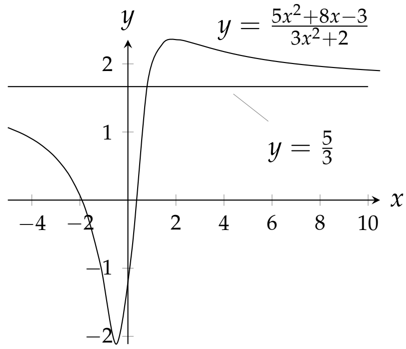
مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 75.4)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}\\
&= \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

□



شکل 4.76: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 23.4)



شکل 4.75: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 22.4)

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 76.4)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= \frac{0+0}{2-0} = 0$$

□

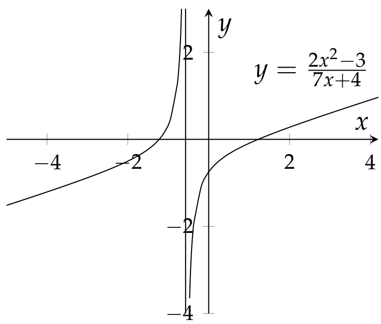
مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل 77.4

ا.

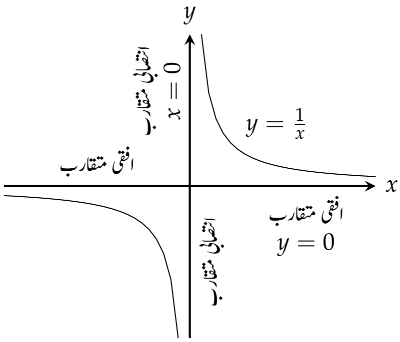
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= -\infty$$

ب.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= \frac{\infty}{2} = \infty$$



شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 24.4



شکل 4.78: محددی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے متقارب ہیں۔

$\square$

مثال 22.4 تا مثال 24.4 سے $x \to \mp\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mp\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انتصابی متقارب

اگر مبدا سے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصل صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا متقارب[12] کہتے ہیں۔

مثال 4.25: محددی محور تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل 78.4)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہیں لہٰذا x محور $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ہیں لہٰذا y محور بھی $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

یاد رہے کہ $x = 0$ پر نسب نما صفر ہے لہٰذا تفاعل غیر معین ہے۔ □

تعریف: تفاعل $y = f(x)$ کا خط $y = b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

ہو۔

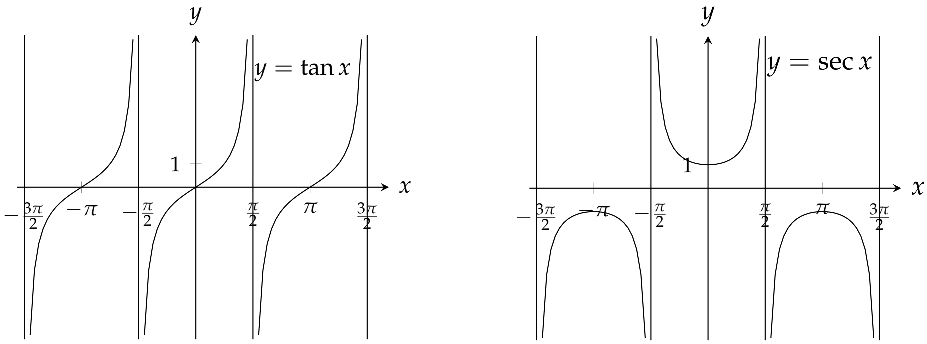
تفاعل $y = f(x)$ کا خط $x = a$ اس صورت انتصابی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$$

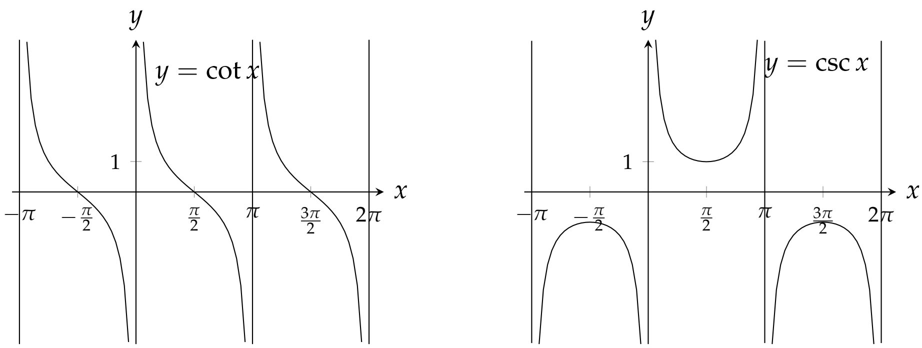
ہو۔

□

[12] asymptote



شکل 4.79: انتصابی متقارب (مثال 26.4)



شکل 4.80: انتصابی متقارب (مثال 26.4)

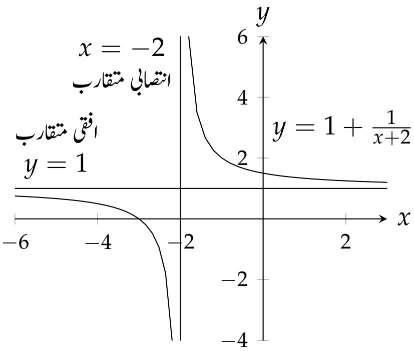
مثال 4.26: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 79.4)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

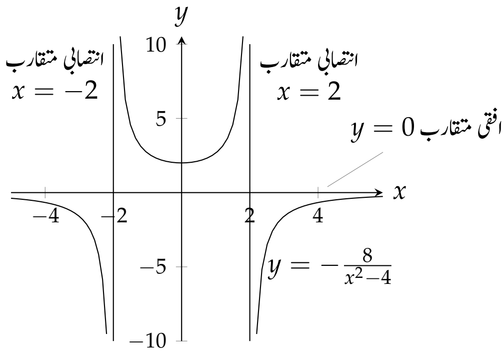
π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 80.4)۔

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

□



شکل 4.81: انتصابی متقارب (مثال 27.4)



شکل 4.82: انتصابی متقارب (مثال 28.4)

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے متقارب تلاش کریں۔

$$y=\frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم $x\to\mp\infty$ پر اور $x\to -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے $x+3$ اور $x+2$ سے تقسیم کر کے

$$y=\frac{x+3}{x+2}=1+\frac{1}{x+2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہو گی۔یوں محددی محور کی بجائے خط $y=1$ اور خط $x=-2$ متقارب خط ہوں گے۔

□

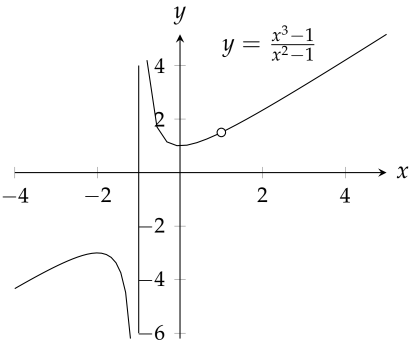
مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا متقارب تلاش کریں۔

$$y=-\frac{8}{x^2-4}$$

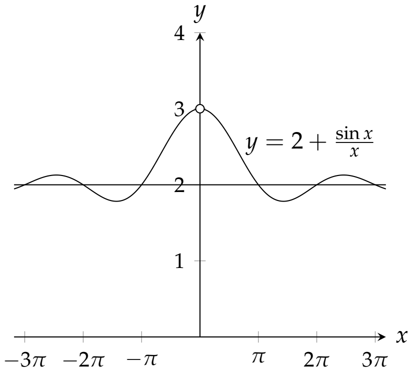
حل: ہم $x\to\mp\infty$ اور $x\to\mp 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

چونکہ $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=0$ لہٰذا افقی متقارب خط $y=0$ ہے (شکل 82.4)۔ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ سے $x=2$ متقاربی خط حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $x=-2$ بھی متقاربی خط حاصل ہو گا۔

□



شکل 4.83: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x = 1$ پر عدم استمرار قابل ہٹاو ہے لہٰذا اس کی صرف $x = -1$ پر متقاربی خط ہو گا۔



شکل 4.84: منحنی اپنے متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کر سکتی ہے (مثال 30.4)۔

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاو عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

کا $x = -1$ پر انتصابی متقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا عدم استمرار قابل ہٹاو ہے اور $x \to 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل 83.4)۔ $\square$

مسئلہ 4.2 (صفحہ 119 مسئلہ بیچ) بھی $x \to \mp\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال 4.30: مسئلہ بیچ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم $x \to 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \to \mp\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہٰذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

اور $\lim_{x\to\mp\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x\to\mp\infty}(2+\frac{\sin x}{x}) = 2+0 = 2$$

ہو گا لہٰذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط $y = 2$ ہو گا (شکل 84.4)۔ □

ترچھے متقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نا افقی اور نا انتصابی ہو گا۔

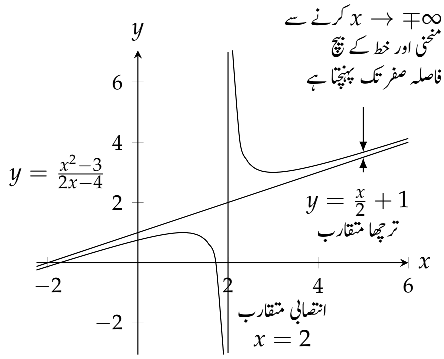
مثال 4.31: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ x^2-3 کو $2x-4$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x^2-3}{2x-4} = \frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x-4}$$

چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ ہیں لہٰذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔ $x \to \mp\infty$ پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \to \frac{x}{2}+1$ تک پہنچتی ہے۔ یوں $y = \frac{x}{2}+1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل 85.4)۔ □



شکل 4.85: ترچھا متقارب (مثال 31.4)

متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{کی بڑی قیمتوں کے لئے } x$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-4} \qquad \text{کے قریب } x \text{ کی قیمتوں کے لئے } 2$$

بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا للہذا $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا غلبہ[13] ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ غالب[14] ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

---

[13] dominates
[14] dominant

مثال 4.32: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3+1}{x}$$

حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاو، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔
پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔
دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \tag{4.8}$$

$|x|$ کی بڑی قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات 4.8 میں $x = 0$ پر انتصابی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔
تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاو۔ یک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - 1 &= 0 \\ x^3 &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8 \end{aligned}$$

$2x^3-1$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$y' = \frac{2x^3-1}{x^2}$	$-$	$-$	$+$
x	$\searrow$ 0	$\searrow$ 0.8	$\nearrow$

انتہا غیر موجود (0 پر)، مقامی کم سے کم (0.8 پر)

چوتھا قدم: مقعر۔ دو رتبی تفرق

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3}$$

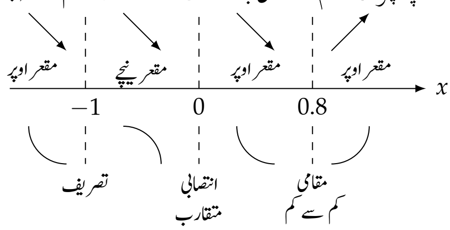
نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

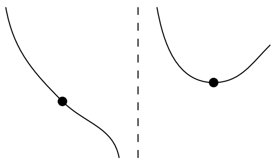
$$\begin{aligned} 2 + \frac{2}{x^3} &= 0 \\ 2x^3 + 2 &= 0 \\ x^3 &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$2x^3+2$	$-$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$
$y'' = \frac{2x^3+2}{x^3}$	$+$	$-$	$+$
x	مقعر اوپر -1	مقعر نیچے 0	مقعر اوپر

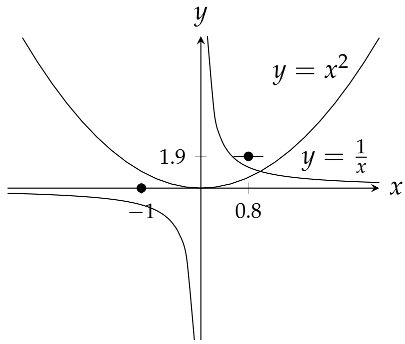
نقطہ تصریف (-1 پر)

پانچواں قدم: درج بالا معلومات کو اکٹھا کر کے ترسیم کا خاکہ بناتے ہیں۔

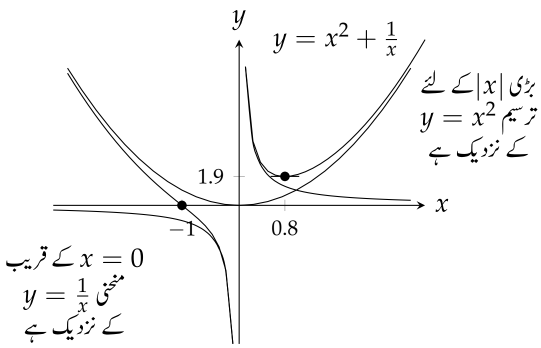




چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع مخنی اور افقی مماس۔ اس سے مخنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تشاکل کی نشاندہی کریں۔
   کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟

3. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔

4. متقارب خطوط اور قابل ہٹاو عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
$x \to \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

5. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاو دریافت کریں۔

6. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔

7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدد، پر f کی قیمت تلاش کریں۔

9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

$x \to \mp\infty$ پر حد کا حساب
سوال 1 تا سوال 6 میں (ا) $x \to \infty$ پر (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 1: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

سوال 2: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 3: $g(x) = \frac{1}{2+\frac{1}{x}}$

سوال 4: $g(x) = \frac{1}{8-\frac{5}{x^2}}$

سوال 5: $h(x) = \frac{-5+\frac{7}{x}}{3-\frac{1}{x^2}}$

سوال 6: $h(x) = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال 7 تا سوال 10 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x}$

سوال 8: $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\cos\theta}{3\theta}$

سوال 9: $\lim_{t\to-\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

سوال 10: $\lim_{r\to\infty} \frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

ناطق تفاعل کی حد

سوال 11 تا سوال 24 میں دیے ناطق تفاعل کی (ا) $x \to \infty$ اور (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔

سوال 11: $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

سوال 12: $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال 13: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

سوال 14: $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال 15: $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

سوال 16: $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال 17: $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

سوال 18: $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

سوال 19: $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$

سوال 20: $g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

سوال 21: $g(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$

سوال 22: $h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$

سوال 23: $h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

سوال 24: $h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9}$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت

ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔ نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 25 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 25: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$

سوال 26: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

سوال 27: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

سوال 28: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$

سوال 29: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$

سوال 30: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال 31 تا سوال 34 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہٰذا کارتیسی محدد پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔(ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہٰذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

سوال 31: $f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x\to-\infty} = -1, \lim_{x\to\infty} = 1$

سوال 32: $f(0) = 0, \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to 0^+} = 2, \lim_{x\to 0^-} = -2$

سوال 33: $f(0) = 0, \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty,$
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

سوال 34: $f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty,$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

تفاعل کی ایجاد

سوال 35 تا سوال 38 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہٰذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

سوال 35: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

سوال 36: $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = 0, \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty, \lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$

سوال 37: $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1, \lim_{x\to\infty} h(x) = 1, \lim_{x\to 0^-} h(x) = -1, \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$

سوال 38: $\lim_{x\to\mp\infty} k(x) = 1, \lim_{x\to 1^-} k(x) = \infty, \lim_{x\to 1^+} (x) = -\infty$

ناطق تفاعل کی ترسیم

سوال 39 تا سوال 66 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ متقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

سوال 39: $y = \frac{1}{x-1}$

سوال 40: $y = \frac{1}{x+1}$

سوال 41: $y = \frac{1}{2x+4}$

سوال 42: $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 43: $y = \frac{x+3}{x+2}$

سوال 44: $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 45: $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

سوال 46: $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 47: $y = \frac{x^2-1}{x}$

سوال 48: $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 49: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$

سوال 50: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 51: $y = \frac{1}{x^2-1}$

سوال 52: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 53: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$

سوال 54: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

سوال 55: $y = \frac{x^2}{x-1}$

سوال 56: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 57: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

سوال 58: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

سوال 59: $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

سوال 60: $y = -\frac{x^2-x+1}{x-1}$

سوال 61: $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

سوال 62: $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$

سوال 63: $y = \frac{x}{x^2-1}$

سوال 64: $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

سوال 65: $y = \frac{8}{x^2+4}$

سوال 66: $y = \frac{4x}{x^2+4}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 67 تا سوال 72 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

سوال 67: $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

سوال 68: $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

سوال 69: $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$

سوال 70: $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

سوال 71: $y = \sin(\frac{\pi}{x^2+1})$

سوال 72: $y = -\cos(\frac{\pi}{x^2+1})$

اجزاء کی ترسیمات

سوال 73 تا سوال 76 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

سوال 73: $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 74: $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 75: $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 76: $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 77: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا c پایا جاتا ہے کہ $f(c)$ کی قیمت درج ذیل ہو۔

ا. -2 ب. $\cos 3$ ج. $5\,000\,000$

سوال 78: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$ تلاش کریں۔

سوال 79: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x > 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔وقفہ $x < 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

سوال 80: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x < 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔وقفہ $x > 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

سوال 81: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔کیا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بین کریں۔

سوال 82: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں۔ اگر $g(x)$ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی ترسیم کا متقارب ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 83: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 84: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 85:

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال 30.4) متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $x \to \infty$ پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

1) $x > 0$ پر f قابل تفرق ہے۔

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

3) $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ غیر موجود ہے۔

سوال 86: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2+3x+7}{x+2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = x+1+\frac{5}{x+2}$$

جس کی ترچھی متقارب $y = x+1$ ہے۔

اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = \frac{x+3+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

ملتا ہے جس کی متقارب $y = x+3$ ہے۔

ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 87 اور سوال 88 میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \to \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 87: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

سوال 88: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے

سوال 89 تا سوال 92 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال 89: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

سوال 90: $y = \frac{x^2+x-6}{2x-2}$

سوال 91: $y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$

سوال 92: $y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2}$

سوال 93 تا سوال 98 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

سوال 93: $y = x^3 + \frac{3}{x}$

سوال 94: $y = x^3 - \frac{3}{x}$

سوال 95: $y = 2\sin x + \frac{1}{x}$

سوال 96: $y = 2\cos x - \frac{1}{x}$

سوال 97: $y = \frac{x^2}{2} + 3\sin 2x$

سوال 98: $y = (x-1)^{11} + 2\sin 2\pi x$

سوال 99 اور سوال 100 کا تفاعل ترسیم کریں۔اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. $x \to 0^+$ اور $x \to 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب. $x \to \mp\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج. $x \to 1$ اور $x \to -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 99: $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})^{2/3}$

سوال 100: $y = \frac{3}{2}(\frac{x}{x-1})^{2/3}$

سوال 101: تفاعل $y = -\frac{x^3-2}{x^2+1}$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

ا. $-9 \le x \le 9$ ب. $-90 \le x \le 90$ ج. $-900 \le x \le 900$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہو گی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہو گا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال 102: تفاعل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$ کو وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا

بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔مثال کے طور پر

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta \qquad (\theta = \tfrac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جا سکتا ہے۔سوال 108 تا سوال 103 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تا کہ ترسیم پر حد کو دیکھا جا سکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

سوال 103: $\lim_{x\to\mp\infty} x\sin\frac{1}{x}$

سوال 104: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

سوال 105: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5}$

سوال 106: $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^{1/x}$

سوال 107: $\lim_{x\to\mp\infty} (3+\frac{2}{x})(\cos\frac{1}{x})$

سوال 108: $\lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x^2} - \cos\frac{1}{x})(1+\sin\frac{1}{x})$

بہترین بنانا

کسی چیز کو بہترین بنانے سے مراد اس چیز کی کسی خاصیت کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ بنانا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل بنانے پر کم تر لاگت آتی ہے؟ $30\,\mathrm{cm}$ قطر لکڑ سے کتنی مضبوط ترین شہتیر حاصل کی جا سکتی ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرتے ہیں۔

کاروبار اور صنعتی مثالیں

مثال 4.33: دھاتی چادر کا استعمال
ایک چکور چادر جس کا ضلع $30\,\mathrm{cm}$ ہے کے کونوں سے چھوٹے چکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہو گا؟

حل: شکل 86.4 میں کٹا ہوا چادر دکھایا گیا ہے۔ کٹے ہوئے چکور کا ضلع x سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم H مربع سنٹی میٹر

$$H(x)=x(30-2x)^2=4x^3-120x^2+900x$$

ہو گا۔چونکہ چادر کے ضلع $30\,\mathrm{cm}$ ہے لہٰذا $0\le x\le 15$ ہو گا جو تفاعل H کا دائرہ کار ہے۔

شکل 87.4 میں حجم بالمقابل x دکھایا گیا ہے جس کے تحت $x=0$ اور $x=15$ پر حجم صفر ہو گا۔زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خطر x کے لحاظ سے H کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

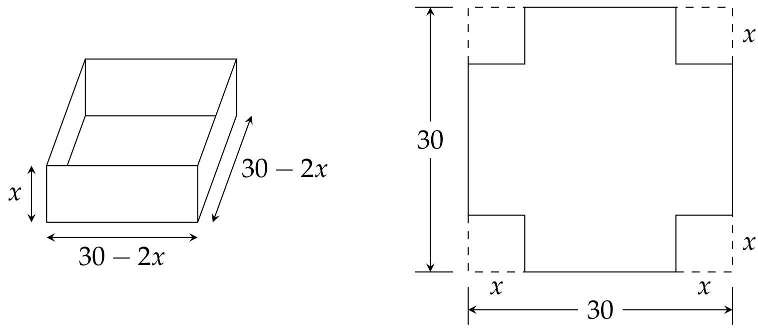
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}=12x^2-240x+900=12(x-15)(x-5)=0,$$

یوں $x=5$ اور $x=15$ ملتا ہے جن میں سے صرف $x=5$ دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر H کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

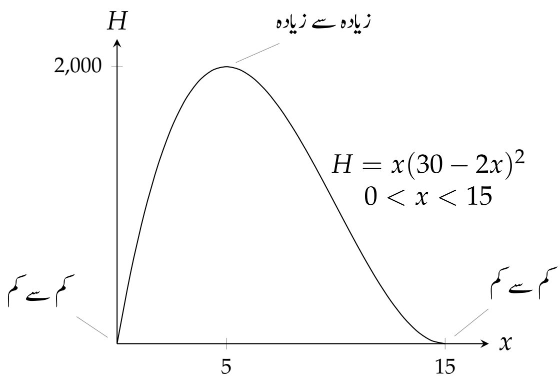
$$H(5)=2000, \qquad \text{نقطہ فاصل}$$
$$H(0)=0,\quad H(15)=0 \qquad \text{آخری نقطے}$$

یوں زیادہ سے زیادہ حجم $2000\,\mathrm{cm}^3$ ہے جو $5\,\mathrm{cm}$ ضلع چکور کاٹنے سے ملے گا۔ □

مثال 4.34: بیلن
آپ کو ایک لٹر تیل کا بلیینی ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔



شکل 4.86: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال 33.4)۔



شکل 4.87: حجم بالمقابل x (مثال 33.4)۔

حل: ٹین ڈبے کی لمبائی h اور اس کا رداس r لیتے ہیں (شکل 88.4)۔ اگر h اور r کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$H = \pi r^2 * h = 1000 \qquad (1000\,\mathrm{cm}^3 = \text{ایک لٹر}) \tag{4.9}$$

درکار ہے۔ کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال میں ٹین کے ضیاع کو شامل کیا گیا ہے۔) ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ بیلن میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{بیلن کے دو سر}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{بیلنی دیوار}} \tag{4.10}$$

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ $\pi r^2 h = 1000$ کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مساوات 4.10 میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات 4.9 اور مساوات 4.10 کو ملا کر ایک متغیر کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات 4.9 کو h کے لئے حل کرتے ہوئے

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

اس کو مساوات 4.10 میں پر کرتے ہوئے h سے چھٹکارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

r کی چھوٹی قیمت کے لئے $\frac{2000}{r}$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نلکی یا پائپ نما ہو گا۔ r کی بڑی قیمت کے لئے $2\pi r^2$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چپٹی صورت کا ہو گا۔ r کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ کم سے کم حاصل ہو گا۔

S اپنے پورے دائرہ کار $(0, r)$ میں قابل تفرق ہے لہٰذا کم سے کم S قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے نقطہ فاصل r کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{تفرق} \\
4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 && \text{تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں} \\
4\pi r^3 &= 2000 && r \text{ کے لئے حل کریں} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} && \text{نقطہ فاصل}
\end{aligned}$$

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے کہ S کی کم سے کم قیمت کتنی ہے اور کہاں پائی جاتی ہے۔چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں ہے لہٰذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہو گا۔ ہم تفاعل کا دو رتبی تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2000}{r}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^2}$$

پر غور کرتے ہیں جو S کی پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل 88.4)۔یوں پورے دائرہ کار پر S کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی اور $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ پر S کی قیمت کم سے کم ہو گی۔ جب

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

ہو۔ اس کے تحت کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42\,\mathrm{cm}, \quad h \approx 10.84\,\mathrm{cm}$$

□

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

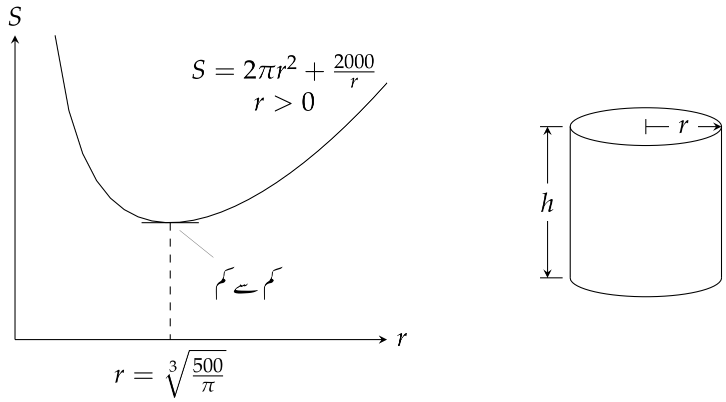
1. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلوم دی گئی ہے؟ کون سی نہیں دی گئی ہے؟ کیا مطلوب ہے؟

2. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔

3. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلہ میں ہر تعلق کو مساوات کی صورت میں لکھیں۔

4. نا معلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نا معلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کہیں مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔

5. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتبی اور دو رتبی تفرق سے نقطہ فاصل (جہاں $f' = 0$ یا غیر معین ہو گا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔



شکل 4.88: ٹین کا ڈبہ (مثال 34.4)

ریاضیات سے چند مثالیں

مثال 4.35: اعداد کا حاصل ضرب
ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں کی ان کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔

حل: اگر پہلا عدد x ہو تب دوسرا عدد $20 - x$ ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔ f کا دائرہ کار بند وقفہ $0 \leq x \leq 20$ ہے۔

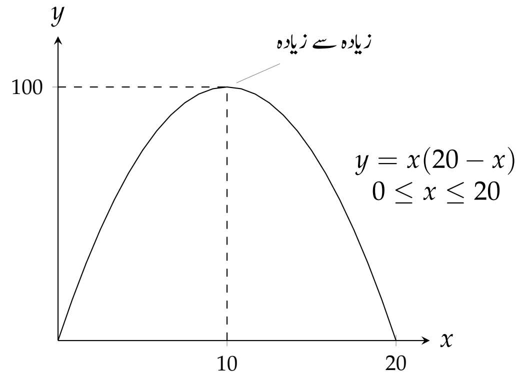
ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر f کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

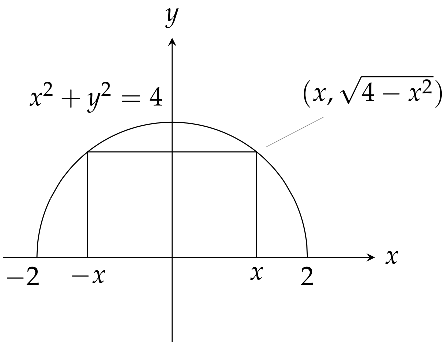
پورے وقفہ $0 \leq x \leq 20$ پر معین ہے اور صرف $x = 10$ پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$
$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

ہیں۔ یوں $f(10) = 100$ زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی اور درکار اعداد 10 اور $(20 - 10) = 10$ ہوں گے (شکل 89.4)۔
□



شکل 4.89: x اور $(20 - x)$ کے حاصل ضرب کی زیادہ سے زیادہ قیمت 100 ہے (مثال 35.4)۔



شکل 4.90: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال 36.4)۔

مثال 4.36: جیومیٹری
رداس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

حل: نصف دائرے کو کارتیسی محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل 90.4 میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا x پر ہے۔ ہم مستطیل کے اضلاع اور رقبہ S کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\text{لمبائی} : 2x, \quad \text{چوڑائی} : \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{رقبہ} : 2x\sqrt{4 - x^2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ $0 \le x \le 2$ میں پائی جاتی ہے۔

ہمیں استمراری تفاعل

$$S = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت وقفہ $[0, 2]$ پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل S کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

نقطہ $x=2$ پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}+2\sqrt{4-x^2}&=0\\ -2x^2+2(4-x^2)&=0 && \text{دونوں اطراف کو } \sqrt{4-x^2} \text{ سے ضرب دیں}\\ 8-4x^2&=0\\ x^2&=2\\ x&=\mp\sqrt{2}\end{aligned}$$

$x=-\sqrt{2}$ اور $x=\sqrt{2}$ میں سے صرف $x=\sqrt{2}$ تفاعل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔ دائرہ کار کی آخری نقطوں اور اس اکلوتے نقطہ فاصل پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}S(\sqrt{2})&=2\sqrt{2}\sqrt{4-2}=4 && \text{نقطہ فاصل پر قیمت}\\ S(0)&=0,\quad S(2)=0 && \text{آخری نقطوں پر قیمت}\end{aligned}$$

یوں مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ 4 ہے جب اس کی لمبائی $2x=2\sqrt{2}$ اور چوڑائی $\sqrt{4-x^2=\sqrt{2}}$ ہو گی۔ □

پیئغ د فغما اور قانون ابن سھل

خلا میں روشنی کی رفتار $3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے (تقریباً اس کے $\frac{2}{3}$ تیز)۔

بصریات میں اصول فغما[15] کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

مثال 4.37: ہوا میں روشنی کی رفتار c_1 اور پانی میں روشنی کی رفتار c_2 لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ A سے پانی میں نقطہ B تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ہوا اور پانی کا سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل: ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو x محور پر رکھتے ہوئے A تا B وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہو گا (شکل 91.4)۔ ایک یکساں ذریعہ میں شعاع کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی ہے لہٰذا اس میں کم سے کم وقت سے مراد کم سے کم فاصلہ ہے اور شعاع دو نقطوں کے بیچ سیدھے خط پر حرکت کرتی ہے۔یوں A تا B راہ دو سیدھے خطوط پر مشتمل ہو گی۔پہلا خط A

[15] Fermat's principle

سے N تک ہو گا اور دوسرا خط N سے B تک ہو گا۔ N وہ نقطہ ہے جہاں شعاع ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتی ہے۔فاصل اور وقت کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\text{وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$$

یوں A سے N تک درکار وقت

$$t_1 = \frac{AN}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$$

اور N سے B تک درکار وقت

$$t_2 = \frac{NB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

ہو گا۔ A سے B تک پہنچنے کے لئے درکار کل وقت دونوں کا مجموعہ ہو گا۔

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2} \tag{4.11}$$

اس مساوات میں t متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے اور تفاعل کا دائرہ کار $[0, d]$ ہے۔ہم اس بند دائرہ کار پر کم سے کم وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ہم تفرق

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \tag{4.12}$$

لیتے ہیں جس کو شکل 91.4 کی مدد سے θ_1 اور θ_2 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{4.13}$$

مساوات 4.12 سے ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} < 0$ اور $x = d$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} > 0$ ہو گا۔یوں ان نقطوں کے درمیان کسی نقطہ x_0 پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا۔چونکہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ مسلسل بڑھتا تفاعل ہے للذا صرف ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو گا۔

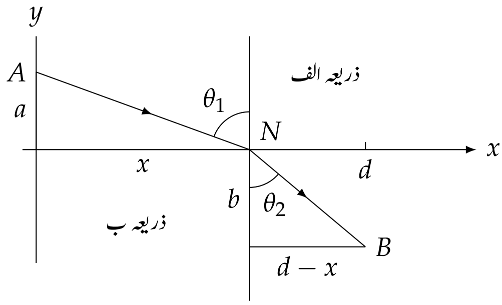
$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{4.14}$$

مساوات 4.14 کو ابن سہل کا قانون انعطاف[16] کہتے ہیں[17]۔ □

---

[16] Ibn Sahl's law of relection

[17] مغربی دنیا میں اس کو Snell's law کہتے ہیں۔



شکل 4.91: ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتے ہوئے شعاع کی راہ (مثال 37.4)

معاشیات میں لاگت اور آمدنی

نظریہ معاشیات میں احصاء کے اہم کردار ہے۔اس کی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال لاگت، آمدنی اور منافع کے تعلق کے بارے میں ہے۔

فرض کریں کہ

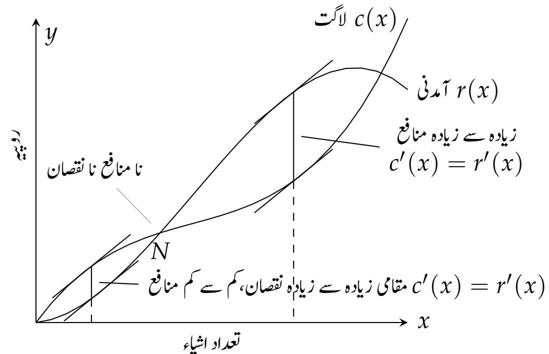
- x ارکان فروخت کرنے سے آمدنی $r(x)$ ہے۔
- x ارکان کی لاگت پیداوار $c(x)$ ہے۔
- x ارکان فروخت کرنے سے منافع $p(x) = r(x) - c(x)$ ہے۔

حاشیہ آمدنی اور حاشیہ لاگت پیداوار درج ذیل ہیں۔

$$\text{حاشیہ آمدنی} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}$$
$$\text{حاشیہ لاگت} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$$

ان تفرق کا آمدنی کے ساتھ تعلق کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 4.7: زیادہ سے زیادہ منافع (اگر پایا جاتا ہو) اس صورت ہو گا جب حاشیہ لاگت پیداوار اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔



شکل 4.92: عموماً تفاعل لاگت کا مقعر پہلے نیچے اور بعد میں اوپر ہوتا ہے۔ تفاعل لاگت تفاعل آمدنی کو نا منافع نا نقصان کے نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ N کے بائیں خسارہ اور اس کے دائیں منافع ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام $x > 0$ پر $r(x)$ اور $c(x)$ قابل تفرق ہیں للذا $p(x) = r(x) - c(x)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر پائی جاتی ہو) $p'(x) = 0$ پر پائی جائے گی۔چونکہ $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ ہے للذا $p'(x) = 0$ سے مراد

$$r'(x) - c'(x) = 0, \quad \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \quad r'(x) = c'(x)$$

ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے (شکل 92.4)۔

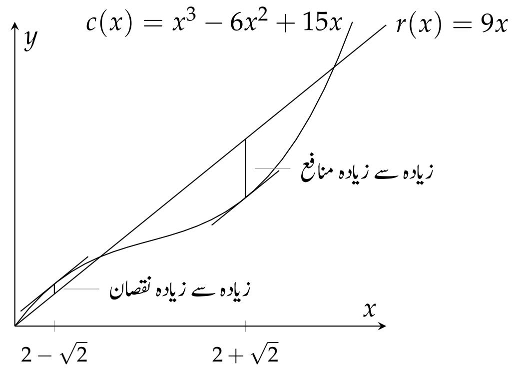
□

ہمیں مسئلہ 7.4 سے کیا ہدایت ملتی ہے؟ ایسی سطح پیداوار جہاں $p'(x) = 0$ ہو، پر زیادہ سے زیادہ منافع یا زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ لیکن معاشی پیشنگوئی کرتے ہوئے پیداوار کی ان سطحوں پر نظر رکھیں جہاں حاشیہ لاگت اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔اگر زیادہ سے زیادہ منافع پایا جاتا ہو، وہ ان سطح پیداوار میں سے ایک پر ہو گا۔

مثال 4.38: لاگت اور آمدنی تفاعل درج ذیل ہیں

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

جہاں تعداد پیداوار x ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار پائی جاتی ہے جس پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب زیادہ سے زیادہ منافع کس سطح پیداوار پر ہو گا؟



شکل 4.93: لاگت بالمقابل منافع (مثال 38.4)

حل:

$$
\begin{aligned}
r(x) &= 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \\
r'(x) &= 9, \quad c'(x) = 3x^2 - 12x + 15 && \text{تلاش کریں } c' \text{ اور } r' \\
3x^2 - 12x + 15 &= 9 && \text{ایک دوسرے کے برابر پر کریں} \\
3x^2 - 12x + 6 &= 0 && \text{ترتیب دیں} \\
x^2 - 4x + 2 &= 0 \\
x &= \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} && \text{دو درجی مساوات حل کریں} \\
&= \frac{4 \mp \sqrt{2}}{2} \\
&= 2 \mp \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

زیادہ سے زیادہ منافع کا امکان $2 + \sqrt{2}$ یا $2 - \sqrt{2}$ سطح پیداوار پر حاصل ہو گا (شکل 93.4)۔ آپ دونوں نقطوں پر آمدنی کا حساب کر کے دیکھیں گے کہ $x = 2 + \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ منافع حاصل ہو گا جبکہ $x = 2 - \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ □

بہترین سطح پیداوار کو کم سے کم اوسط لاگت والی سطح پیداوار تصور کیا جا سکتا ہے۔ اگلے مسئلہ میں یہ سطح پیداوار حاصل کی گئی ہے۔

مسئلہ 4.8: اوسط کم سے کم لاگت پیداوار (اگر پائی جاتی ہو) اس سطح پیداوار پر ہو گی جس پر اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

$x > 0$ اشیاء کی لاگت پیداوار $c(x)$

x اشیاء کی اوسط لاگت پیداوار $\frac{c(x)}{x}$

قابل تفرق ہیں۔

اگر لاگت کو کم سے کم کرنا ممکن ہو، یہ اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 0 \\
\frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} &= 0 && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
xc'(x) - c(x) &= 0 && x^2 \text{ سے ضرب دیں} \\
\underbrace{c'(x)}_{\text{حاشیہ لاگت}} &= \underbrace{\frac{c(x)}{x}}_{\text{اوسط لاگت}}
\end{aligned}$$

$\square$

ہمیں دھیان سے مسئلہ 8.4 استعمال کرنا ہو گا جو یہ نہیں کہتا ہے کہ کم سے کم اوسط لاگت کی سطح پیداوار موجود ہے بلکہ کہتا ہے کہ اگر ایسی سطح موجود ہو تب اس کو کہاں تلاش کرنا چاہیے۔ جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں وہاں دیکھیں کہ آیا کم سے کم اوسط لاگت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.39: تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار ہے جہاں اوسط لاگت کم سے کم ہو؟ اگر ایسا ہو تب اس سطح پیداوار کو تلاش کریں۔

حل: ہم جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں، وہاں دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x && \text{لاگت} \\
c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15 && \text{حاشیہ لاگت} \\
\frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\
3x^2 - 12x + 15 &= x^2 - 6x + 15 \\
2x^2 - 6x &= 0 \\
2x(x-3) &= 0 \\
x = 0, &\quad x = 3
\end{aligned}$$

چونکہ $x > 0$ ہے لہٰذا کم سے کم اوسط لاگت صرف $x = 3$ ہزار کی پیداوار پر ممکن ہے۔

ہم تفرق کو دیکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 2x - 6 \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 2 > 0
\end{aligned}
$$

دو رتبی تفرق مثبت ہے لہٰذا $x = 3$ پر مطلق کم سے کم ہو گا۔ □

غیر مسلسل مظہر کا نمونہ بذریعہ تفرقی تفاعل

اگر آپ سوچ رہے ہوں کہ جب x عدد صحیح ہے (چونکہ مکمل اشیاء پیدا کیے جاتے ہیں) تب ہم لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرنے کے لئے قابل تفرق تفاعل $c(x)$ اور $r(x)$ کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔اس پر غور کرتے ہیں۔

جب x کی قیمت بڑی ہو تب ہم لاگت اور آمدنی کو ہموار منحنیات $c(x)$ اور $r(x)$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جو نا صرف x کی عدد صحیح قیمتوں بالکل ان کے بیچ تمام قیمتوں پر قابل تفرق ہیں۔ان قابل تفرق تفاعل، جو x کی عدد صحیح قیمتوں کے لئے لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرتے ہیں، کی قیمتوں پر ہم احصاء کی مدد سے غور کر سکتے ہیں۔یوں حاصل نتائج کو ہم حقیقی دنیا میں منتقل کرتے ہوئے امید کرتے ہیں کہ ہم اس سے فائدہ اٹھا سکیں۔جب ہم ایسا کرتے ہوں، جیسا نظریہ معاشیات میں ہم نے کیا، ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل حقیقت کا اچھا نمونہ ہے۔

ایسی صورتوں میں جب احصاء کہتا ہو کہ بہترین پیداوار x کی غیر عدد صحیح قیمت پر ہو گی، جیسا مثال 38.4 میں $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کا جواب حاصل ہوا، تب ہم اس کا قریب ترین موزوں عدد صحیح لیتے ہیں۔اگر ہم 20 اشیاء کو ڈبوں میں بند کرتے ہوں تب $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کی صورت میں ہم 3410 یا 3420 لے سکتے ہیں۔

سوالات

جیومیٹری کے مسائل

سوال 109:

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم