

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نکتہ بنائی تفاعل	7.8
862	الٹ نکتہ بنائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	بدلولی تفاعل	7.10
900	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نکتہ بنائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا کتابی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملان تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	محروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں مکمل

1327	11	سمتیت اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیت
1344 . . . . .	11.2	کار تہی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیت
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1406 . . . . .	11.6	تکلی اور دو درجی سطحیں

1407	جوابات
1409	ا ضمیمہ اول
1411	ب ضمیمہ دوم
1413	ج ضمیمہ تین
1415	د ضمیمہ چار
1417	ه ضمیمہ پانچ
1419	و ضمیمہ چھ
1421	ز ضمیمہ سات
1423	ح ضمیمہ آٹھ
1425	ط ضمیمہ آٹھ

## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری  
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں  
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019





# میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## باب 11

# سمتیت اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

اس حصہ میں سمتیت اور سہ بعدی محدود نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محدود مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محدود خلا موزوں ہے۔ ہم محدود مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محدود خلا پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور  $xy$  مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

### 11.1 مستوی میں سمتیت

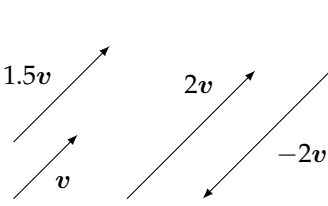
بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاؤ، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہوگی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہوگا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاؤ بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہوگا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہوگا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

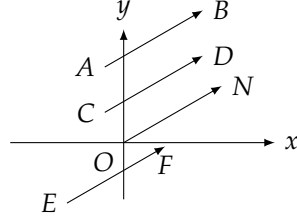
تیر دار لکیروں کو ہم سمت بند خطوط تصور کرتے اور سمتیت کہتے ہیں۔

تعریف: ایک مستوی میں سمت بند خط کو سمتیت<sup>1</sup> کہتے ہیں۔ دو سمتیت صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

vector<sup>1</sup>



شکل 11.2: سمتیہ کے غیر سمتی مضرب۔



شکل 11.1: یکساں لمبائی اور یکساں رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً  $v$ ، سے ظاہر کیا جائے گا۔<sup>2</sup> نقطہ  $A$  سے نقطہ  $B$  تک تیر کو ہم  $\vec{AB}$  لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل 11.1 میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{ON} = \vec{EF}$$

□

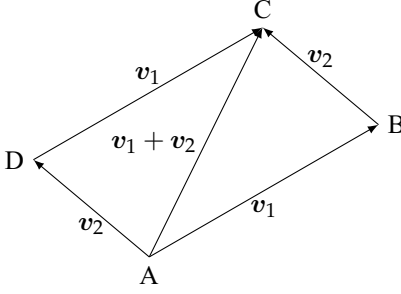
### غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل 11.2)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی 50% بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

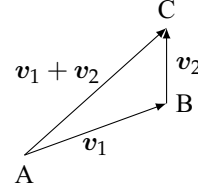
اگر  $c$  غیر صفر حقیقی عدد اور  $v$  ایک سمتیہ ہو تب مثبت  $c$  کی صورت میں  $v$  اور  $cv$  کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی  $c$  کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ غیر سمتی<sup>3</sup> کہلاتے ہیں جبکہ  $cv$  کے مضرب کو  $v$  کا غیر سمتی مضرب<sup>4</sup> کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے صفر سمتیہ  $0$  حاصل ہوگا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہوگا جس کی لمبائی صفر ہوگی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ  $0$  کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

<sup>2</sup> قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان  $\vec{v}$  یا نصف تیر کا نشان  $\vec{v}$  ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔  
<sup>3</sup> scalar  
<sup>4</sup> scalar multiple



شکل 11.4: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع یکساں لمبائی ہونے کی بنا پر ABCD متوازی الاضلاع ہو گا۔



شکل 11.3: سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  کا مجموعہ۔

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر  $v_1$  کا نمائندہ، مثلاً  $A$  سے  $B$  تک، ترسیم کر کے  $v_1$  کے اختتامی نقطہ (سر)  $B$  پر  $v_2$  کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل 11.3 میں  $\vec{BC} = v_2$  ہے۔ مجموعہ  $v_1 + v_2$  اب  $v_1$  کے دم  $A$  سے  $v_2$  کے سر  $C$  تک سمتیہ ہو گا۔ یوں اگر

$$v_1 = \vec{AB}, \quad v_2 = \vec{BC}$$

ہوں تب

$$v_1 + v_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں  $v_1 + v_2$  متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہذا اس عمل کو بعض اوقات قاعدہ متوازی الاضلاع<sup>5</sup> کہتے ہیں (شکل 11.4)۔

اجزاء

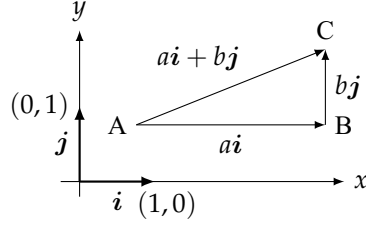
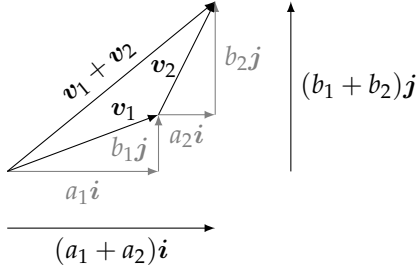
دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ  $v$  کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

$$v = v_1 + v_2$$

لکھنا ممکن ہو، سمتیات  $v_1$  اور  $v_2$  سمتیہ  $v$  کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ  $v$  کو اس کے اجزاء  $v_1$  اور  $v_2$  میں تحلیل کیا گیا ہے۔

<sup>5</sup> parallelogram law



شکل 11.6: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔

شکل 11.5: اساس سمتیات  $i$  اور  $j$  کو استعمال کر کے کسی بھی سمتیہ  $\vec{AC}$  کو دکھا جا سکتا ہے۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں اساس<sup>6</sup> سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت  $x$  محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ  $(0,0)$  سے نقطہ  $(1,0)$  تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت  $i$  ہے۔ مثبت  $y$  محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ  $(0,0)$  سے نقطہ  $(0,1)$  تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت  $j$  ہے۔ اب غیر سمتی  $a$  کے لئے محور  $x$  کے متوازی سمتیہ  $ai$  کی لمبائی  $|a|$  ہوگی جبکہ اس کا رخ  $a > 0$  کے لئے دایاں اور  $a < 0$  کے لئے بائیں ہوگا۔ اس طرح غیر سمتی  $b$  کے لئے محور  $y$  کے متوازی سمتیہ  $bj$  کی لمبائی  $|b|$  ہوگی جبکہ اس کا رخ  $b > 0$  کے لئے اوپر اور  $b < 0$  کے لئے نیچے ہوگا۔ شکل 11.5 میں سمتیہ  $\vec{v} = \vec{AC}$  کو اجزاء  $i$  اور  $j$  میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$\vec{v} = ai + bj$$

تعریف: اگر  $\vec{v} = ai + bj$  ہو تب  $i$  اور  $j$  کے رخ، سمتیہ  $v$  کے اجزاء سمتیات  $ai$  اور  $bj$  ہوں گے۔ اعداد  $a$  اور  $b$ ، اساسی سمتیات  $i$  اور  $j$  کے رخ، سمتیہ  $v$  کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

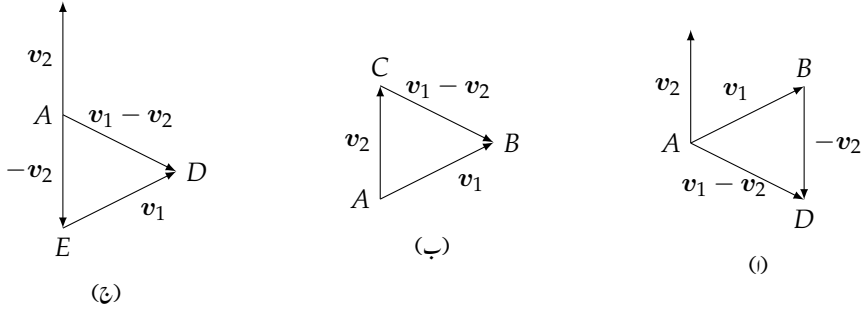
□

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$(11.1) \quad ai + bj = a'i + b'j \Leftrightarrow a = a', \quad b = b'$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب  $i$  اور  $j$  کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔



شکل 11.7: سمتیہ  $v_1 - v_2$  کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 11.6)۔

اگر  $v_1 = a_1i + b_1j$  اور  $v_2 = a_2i + b_2j$  ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j$$

مثال 11.2:

$$(2i - 4j) + (5i + 3j) = (2 + 5)i + (-4 + 3)j = 7i - j$$

□

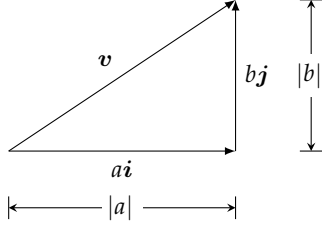
تفریق

ایک سمتیہ  $v$  کا منفی سمتیہ  $-v = (-1)v$  ہو گا۔ اس کی لمبائی  $v$  کی لمبائی ہو گی البتہ اس کا رخ  $v$  کا مخالف ہو گا۔ سمتیہ  $v_2$  کو سمتیہ  $v_1$  سے منفی کرنے کی خاطر ہم  $-v_2$  اور  $v_1$  کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم  $v_1$  کے سر سے  $-v_2$  کھینچ کر  $v_1$  کے دم سے  $-v_2$  کے سر تک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل 11.7-ا میں دکھایا گیا ہے جہاں

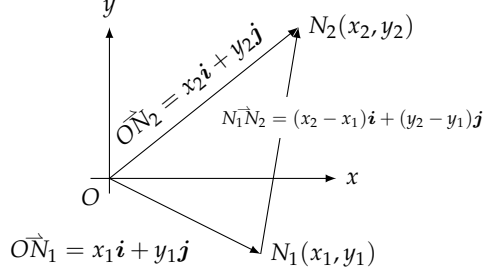
$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = v_1 + (-v_2) = v_1 - v_2$$

اس کے علاوہ  $v_1$  اور  $v_2$  کے دم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر  $v_1$  اور  $v_2$  ترسیم کر کے  $v_2$  کے سر سے  $v_1$  کے سر تک سمتیہ  $v_1 - v_2$  ہو گا۔ یہ عمل شکل 11.7-ب میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -v_2 + v_1 = v_1 - v_2$$



شکل 11.9: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جاسکتی ہے۔



شکل 11.8

مزید،  $-v_2$  کے سر سے  $v_1$  ترسیم کر کے  $v_1 - v_2$  حاصل کیا جاسکتا ہے (شکل 11.7-ج)۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

$$(11.2) \quad v_1 - v_2 = (a_1 - a_2)i + (b_1 - b_2)j$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

مثال 11.3:

$$(6i + 2j) - (3i - 5j) = (6 - 3)i + (2 - (-5))j = 3i + 7j$$

□

ہم نقطہ  $N_1(x_1, y_1)$  سے نقطہ  $N_2(x_2, y_2)$  تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے  $\vec{ON}_1 = x_1i + y_1j$  کے اجزاء کو  $\vec{ON}_2 = x_2i + y_2j$  کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔

$N_1(x_1, y_1)$  سے  $N_2(x_2, y_2)$  تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

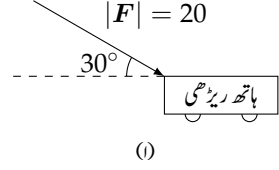
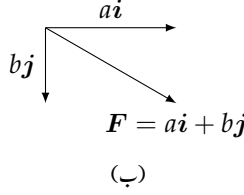
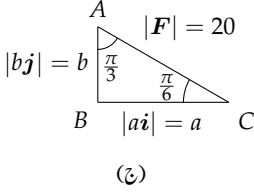
$$(11.3) \quad \vec{N_1N_2} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$$

مثال 11.4: نقطہ  $N_1(3, 4)$  سے نقطہ  $N_2(5, 1)$  تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\vec{N_1N_2} = (5 - 3)i + (1 - 4)j = 2i - 3j$$

□





شکل 11.10: ہاتھ ریڑھی (مثال 11.5)

مقدار

سمتیہ  $v = ai + bj$  کی لمبائی<sup>7</sup> یا مقدار<sup>8</sup>  $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$  ہے۔ سمتیہ  $v$  اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے (شکل 11.9)۔ سمتیہ کی لمبائی  $|v|$  میں دو انتضابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$(11.4) \quad |v| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad v = ai + bj$$

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ  $30^\circ$  زاویہ پر  $20\text{ N}$  کی قوت  $F$  سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں (شکل 11.10-ا)۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتضابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتضابی جزو معلوم کریں۔

حل: ہم قوت  $F = ai + bj$  اور اس کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں (شکل 11.10-ب اور شکل 11.10-ج)۔ اس مثلث سے  $a = 10\sqrt{3}$  اور  $b = 10$  حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو  $10\sqrt{3}i$  اور انتضابی جزو  $10j$  ہے۔ یوں  $F = 10\sqrt{3}i - 10j$  ہو گا۔ انتضابی جزو کا رخ نیچے ہے لہذا یہ منفی ہے۔ □

غیر سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اگر  $c$  ایک غیر سمتی اور  $v = ai + bj$  ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$(11.5) \quad cv = c(ai + bj) = (ca)i + (cb)j$$

سمتیہ  $cv$  کی لمبائی سمتیہ  $v$  کی لمبائی ضرب  $|c|$  ہو گا:

$$\begin{aligned}|cv| &= |(ca)i + (cb)j| \\ &= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{c^2} \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= |c||v|\end{aligned}$$

یوں اگر  $c$  غیر سمتی ہو اور  $v$  ایک سمتیہ ہو تب  $|cv| = |c||v|$  ہو گا۔

مثال 11.6: اگر  $c = -2$  اور  $v = -3i + 4j$  ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}|v| &= |-3i + 4j| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \\ |-2v| &= |(-2)(-3i + 4j)| = |6i - 8j| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||v|\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0i + 0j$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ  $\mathbf{0}$  کو ظاہر کرنے کے لئے  $\mathbf{0}$  کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔ صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

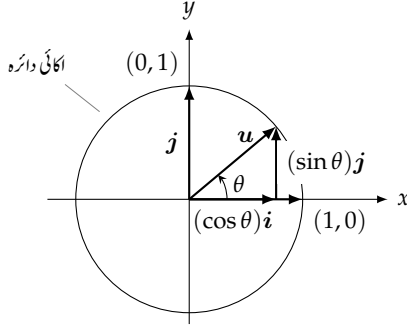
$$|ai + bj| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

اکائی سمتیات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو اکائی سمتیہ<sup>9</sup> کہلائے گا۔ سمتیات  $i$  اور  $j$  اکائی سمتیات ہیں۔

$$|i| = |1i + 0j| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad |j| = |0i + 1j| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

unit vector<sup>9</sup>



شکل 11.11: مستوی میں ہر اکائی سمتیہ کو  $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$  روپ میں لکھا جاسکتا ہے۔

سمتیہ  $u$  جو اکائی سمتیہ  $i$  کو  $\theta$  زاویہ ثابت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل 11.11)۔

$$(11.6) \quad u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی لہذا  $u$  بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|u| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ  $\theta$  کو  $0$  تا  $2\pi$  کرنے سے  $u$  کا سر  $N$  مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

لمبائی اور رخ

اگر  $v \neq 0$  ہو تب

$$\left| \frac{v}{|v|} \right| = \left| \frac{1}{|v|} v \right| = \frac{1}{|v|} |v| = 1$$

ہو گا لہذا  $\frac{v}{|v|}$  اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ  $v$  کا رخ ہو گا۔ یوں ہم  $v$  کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$v = |v| \left( \frac{v}{|v|} \right)$$

یوں اگر  $u \neq 0$  ہو تب

ا۔  $\frac{v}{|v|}$  اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ  $v$  کا رخ ہو گا۔ یوں ہم  $\frac{v}{|v|}$  کو  $v$  کا رخ کہتے ہیں۔

ب. مساوات  $v = |v| \left( \frac{v}{|v|} \right)$  سمتیہ  $v$  کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ  $v = 3i - 4j$  کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

حل:

$$|v| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad v \text{ کی لمبائی}$$

$$\frac{v}{|v|} = \frac{3i - 4j}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j \quad v \text{ کا رخ}$$

$$v = 3i - 4j = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}} \left( \underbrace{\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j}_{\text{رخ}} \right)$$

□

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتضابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں  $a \neq 0$  کی صورت میں سمتیہ  $v = ai + bj$  کا ڈھلوان  $\frac{b}{a}$  ہو گا (شکل 11.12)۔

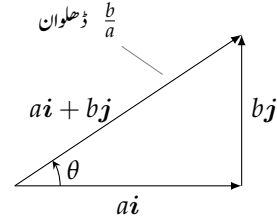
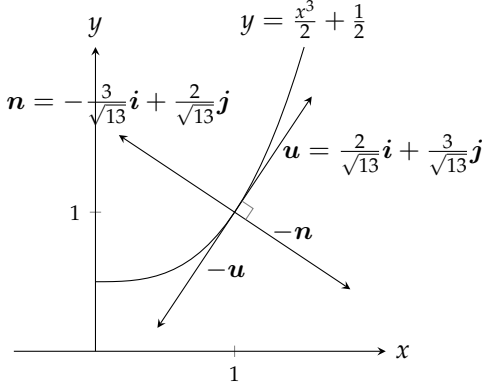
کسی نقطہ پر ایک مماسی کو ایک سمتیہ تب مماسی<sup>10</sup> یا عمودی<sup>11</sup> ہو گا جب اس نقطہ پر مماسی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال 11.8: نقطہ  $(1, 1)$  پر مماسی  $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$  کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

حل: ہم نقطہ  $(1, 0)$  پر مماسی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل 11.13)۔

اس نقطہ پر مماسی کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \frac{3x^2}{2} \Big|_{x=1} = \frac{3}{2}$$



شکل 11.12: اگر  $a \neq 0$  ہو تب سمتیہ  $v = ai + bj$  کی ڈھلوان  $\frac{b}{a}$  ہو گی۔

شکل 11.13: ایک نقطہ پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیہ (مثال 11.8)

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ  $v = 2i + 3j$  اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کی ڈھلوان  $\frac{3}{2}$  ہے۔ سمتیہ  $v$  کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی 1 ہو ہم  $v$  کو

$$|v| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

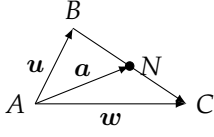
سمتیہ  $u$  کی لمبائی 1 ہے اور یہ  $(1, 1)$  پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-u = -\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

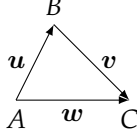
جو مخالف رخ ہے بھی  $(1, 1)$  پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جاسکتی ہے۔

نقطہ  $(1, 1)$  پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان  $u$  کی ڈھلوان کے بالعکس متناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم  $u$  کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

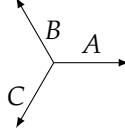
$$n = -\frac{3}{\sqrt{13}}i + \frac{2}{\sqrt{13}}j, \quad -n = \frac{3}{\sqrt{13}}i - \frac{2}{\sqrt{13}}j$$



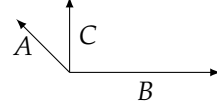
شکل 11.17



شکل 11.16



شکل 11.15



شکل 11.14

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں  $(1, 1)$  پر منحنی کو عمودی ہیں۔

□

## سوالات

ہیومیٹری اور حساب

سوال 1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا.  $A + B$       ب.  $A + B + C$       ج.  $A - 2B$       د.  $\frac{1}{2}A - C$

جوابات: شکل 11.18

سوال 2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کو شکل 11.15 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا.  $A - B$       ب.  $A + B + C$       ج.  $2A - \frac{1}{2}B$       د.  $A - (B - C)$

سوال 3 تا سوال 6 میں  $A = 2i - 7j$ ،  $B = i + 6j$  اور  $C = \sqrt{3}i - \pi j$  لیں۔ نتائج کو  $ai + bj$  روپ میں لکھیں۔

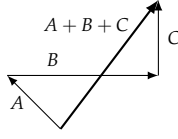
سوال 3:  $A + 2B$   
جواب:  $4i + 5j$

سوال 4:  $A + B - C$

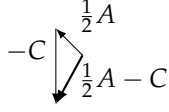
سوال 5:  $3A - \frac{1}{\pi}C$   
جواب:  $(6 - \frac{\sqrt{3}}{\pi})i - 20j$

سوال 6:  $2A - 3B + 32j$

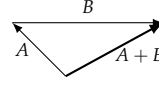
سوال 7: مثلث  $ABC$  کے اضلاع سمتیات  $u$ ،  $v$  اور  $w$  دیتے ہیں (شکل 11.16)۔



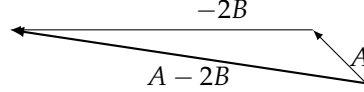
(ب)



(ج)



(i)



(ج)

شکل 11.18

ا.  $w$  کو  $u$  اور  $v$  کی صورت میں لکھیں۔

ب.  $v$  کو  $u$  اور  $w$  کی صورت میں لکھیں۔

جواب: (i)  $w = v + u$  (ب)  $v = w - u$

سوال 8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات  $u$  اور  $w$  دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے (شکل 11.17)۔ سمتیہ  $a$  کو  $u$  اور  $w$  کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9 تا سوال 16 میں سمتیہ کو  $ai + bj$  روپ میں لکھیں۔ محدودی سطح پر مبداء سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

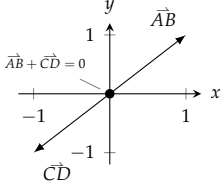
سوال 9: نقاط  $N_1(5, 7)$  اور  $N_2(2, 9)$  کے بیچ قطع  $\vec{N_1N_2}$  تلاش کریں۔  
جواب: شکل 11.19

سوال 10: نقاط  $N_1(1, 2)$  اور  $N_2(-3, 5)$  کے بیچ قطع  $\vec{N_1N_2}$  تلاش کریں۔

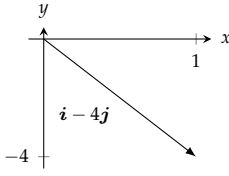
سوال 11: نقاط  $A(-5, 3)$  اور  $B(-10, 8)$  کے بیچ قطع  $\vec{AB}$  تلاش کریں۔  
جواب: شکل 11.20

سوال 12: نقاط  $A(-7, -8)$  اور  $B(6, 11)$  کے بیچ قطع  $\vec{AB}$  تلاش کریں۔

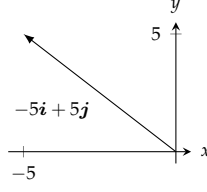
سوال 13: نقاط  $N_1(1, 3)$  اور  $N_2(2, -1)$  کے بیچ قطع  $\vec{N_1N_2}$  تلاش کریں۔  
جواب: شکل 11.21



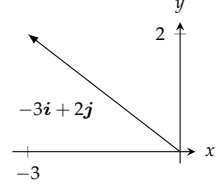
شکل 11.22



شکل 11.21



شکل 11.20



شکل 11.19

سوال 14: نقاط  $N_3(1,3)$  اور  $N_4$  کے بیچ قطع  $\vec{N_3N_4}$  تلاش کریں جہاں  $N_1(2, -1)$  اور  $N_2(-4, 3)$  کو ملانے والے قطع کا وسطی نقطہ  $N_4$  ہے۔

سوال 15: نقاط  $A(1, -1)$ ،  $B(2, 0)$ ،  $C(-1, 3)$  اور  $D(-2, 2)$  دیے گئے ہیں۔ سمتیات  $\vec{AB}$  اور  $\vec{CD}$  کا مجموعہ تلاش کریں۔  
جواب: شکل 11.22

سوال 16: نقطہ  $A$  سے مبداء تک سمتیہ، جہاں  $\vec{AB} = 4i - 2j$  اور  $B(-2, 5)$  ہیں۔

سوال 17: سمتیہ  $\vec{AB} = 3i - j$  اور نقطہ  $A(2, 9)$  دیا گیا ہے۔ نقطہ  $B$  تلاش کریں۔  
جواب:  $(5, 8)$

سوال 18: سمتیہ  $\vec{NQ} = -6i - 4j$  اور نقطہ  $Q(3, 3)$  دیا گیا ہے۔ نقطہ  $N$  تلاش کریں۔

### اکائی سمتیات

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو  $ai + bj$  روپ میں لکھیں۔

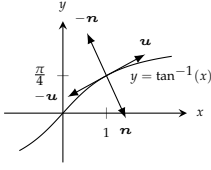
سوال 19: زاویہ  $\theta = \frac{\pi}{6}$  اور  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  کے لئے اکائی سمتیات  $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$  ترسیم کریں۔ دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  کی ترسیم بھی شامل کریں۔  
جواب: شکل 11.23

سوال 20: زاویہ  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  اور  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$  کے لئے اکائی سمتیات  $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$  ترسیم کریں۔ دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  کی ترسیم بھی شامل کریں۔

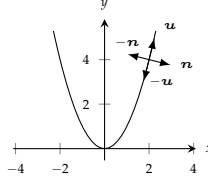
سوال 21: سمتیہ  $j$  کو مبداء کے گرد گھڑی کے الٹ رخ  $\frac{3\pi}{4}$  ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔  
جواب: شکل 11.24

سوال 22: سمتیہ  $j$  کو مبداء کے گرد گھڑی کے رخ  $\frac{2\pi}{3}$  ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

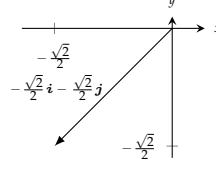




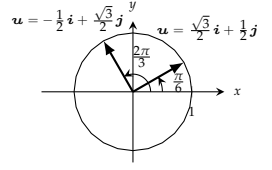
شکل 11.26



شکل 11.25



شکل 11.24



شکل 11.23

سوال 23 اور سوال 24 میں اکائی سمتیہ  $u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$  اسی رخ تلاش کریں۔

سوال 23:  $6i - 8j$   
جواب:  $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$

سوال 24:  $-i + 3j$

سوال 25 تا سوال 28 میں دیے گئے نقطہ پر ممحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ ممحنی اور اکائی سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہوگی۔)

سوال 25:  $y = x^2, (2, 4)$   
جواب:  $u = \frac{1}{\sqrt{17}}i + \frac{4}{\sqrt{17}}j, -u = -\frac{1}{\sqrt{17}}i - \frac{4}{\sqrt{17}}j$   
شکل 11.25  $n = \frac{4}{\sqrt{17}}i - \frac{1}{\sqrt{17}}j, -n = -\frac{4}{\sqrt{17}}i + \frac{1}{\sqrt{17}}j$

سوال 26:  $x^2 + 2y^2 = 6, (2, 1)$

سوال 27:  $y = \tan^{-1} x, (1, \frac{\pi}{4})$   
جواب:  $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j), -u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2i - j)$   
شکل 11.26  $n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-i + 2j), -n = \frac{1}{\sqrt{5}}(i - 2j)$

سوال 28:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (0, 1)$

سوال 29 تا سوال 32 میں دیے گئے نقطہ پر ممحنی کے مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

سوال 29:  $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0, (1, 0)$   
جواب:  $u = \pm \frac{1}{5}(-4i + 3j), v = \pm \frac{1}{5}(3i + 4j)$

سوال 30:  $x^2 - 6xy + 8y^2 - 2x - 1 = 0, \quad (1, 1)$

سوال 31:  $y = \int_0^x \sqrt{3 + t^4} dt, \quad (0, 0)$   
جواب:  $u = \pm \frac{1}{2}(i + \sqrt{3}j), \quad v = \pm \frac{1}{2}(-\sqrt{3}i + j)$

سوال 32:  $y = \int_e^x \ln(\ln t) dt, \quad (e, 0)$

لمبائی اور رخ

سوال 33 اور سوال 34 میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 33:  $5i + 12j$   
جواب:  $13(\frac{5}{13}i + \frac{12}{13}j)$

سوال 34:  $2i - 3j$

سوال 35: سمتیہ  $3i - 4j$  کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔  
جواب:  $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j, \quad -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$

سوال 36: سمتیہ  $A = -i + 2j$  کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 2 ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں؟

سوال 37: دکھائیں کہ  $A = 3i + 6$  اور  $B = -i - 2j$  ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

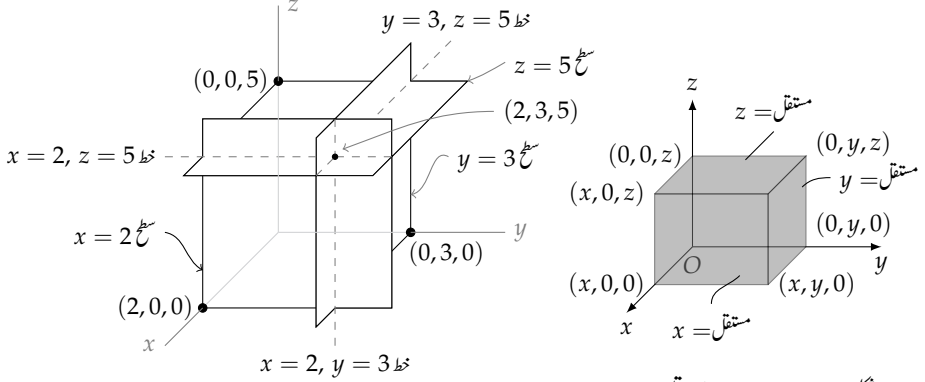
سوال 38: دکھائیں کہ  $A = 3i + 6$  اور  $B = \frac{1}{2}i + j$  کے رخ ایک دوسرے جیسے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: آپ ایک ریڑھی کو قوت  $F$  سے کھینچ رہے ہیں جس کی مقدار  $|F| = 10 \text{ N}$  ہے۔ زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ  $30^\circ$  ہے۔ اس قوت کے  $x$  اور  $y$  اجزاء تلاش کریں۔  
جواب:  $5\sqrt{3}i, \quad 5j$

سوال 40: پتنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ  $45^\circ$  زاویہ پر  $5 \text{ N}$  قوت سے کھینچتی ہے۔ اس قوت کے افقی اور ایتھابی اجزاء تلاش کریں۔

سوال 41: سمتیہ  $A = 2i + j$ ،  $B = i + j$  اور  $C = i - j$  دیے گئے ہیں۔ ایسے غیر سمتیات  $\alpha$  اور  $\beta$  کہ  $A = \alpha B + \beta C$  ہو۔  
جواب:  $\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$



شکل 11.27: دایاں ہاتھ کا ریتیسی نظام۔

شکل 11.28: سطح  $x = 2$ ،  $y = 3$  اور  $z = 5$  نقطہ  $(2, 3, 5)$  سے گزرتی تین خط تعین کرتے ہیں۔

سوال 42: سمتیات  $A = i - 2j$ ،  $B = 2i + 3j$  اور  $C = i + j$  دیے گئے ہیں۔ سمتیہ  $A = A_1 + A_2$  لکھیں جہاں  $A_1$  سمتیہ  $B$  کے متوازی اور  $A_2$  سمتیہ  $C$  کے متوازی ہے۔ (سوال 41 دیکھیں۔)

سوال 43: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شمال کی طرف  $60^\circ$  پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لئے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی  $xy$  کے مبداء پر گھونسلہ، مثبت  $x$  محور پر مشرق اور مثبت  $y$  محور پر شمال رکھ (i) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔  
جواب: (i)  $(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ ،  $(5 \cos 60^\circ, 5 \sin 60^\circ)$ ،  
(ب)  $(5 \cos 60 + 10 \cos 315, 5 \sin 60 + 10 \sin 315) = (\frac{5+\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2})$

سوال 44: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، شمال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد یہ مغرب سے  $30^\circ$  زاویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی  $xy$  کے مبداء پر گھونسلہ، مثبت  $x$  محور پر مشرق اور مثبت  $y$  محور پر شمال رکھ (i) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

سوال 45: مستوی میں  $v$  ایک سمتیہ ہے جو  $y$  محور کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ  $v$  کی ڈھلوان اور سمتیہ  $-v$  کی ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب:  $-v = -ai - bj$  کی ڈھلوان  $(\frac{-b}{-a})$  ہے۔ یہی  $v$  کی بھی ڈھلوان ہے۔

## 11.2 کار تیزی (مستطیل) محدود اور فضائیں سمتیات

ہم اب سہ بعدی کار تیزی محدود بیان کرتے ہیں اور فضا میں اپنا راستہ تلاش کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم فاصلہ کی تعریف جانیں گے، فضا میں سمتیات کے ساتھ کام کرنا (مستوی کے قواعد اب بھی لاگو ہوں گے، پس اب ایک محدود بڑھ جائے گا)، اور نقطوں کے سلسلہ کا مساوات اور عدم مساوات کے ساتھ تعلق سیکھیں گے۔

## کار تیزی محدود

فضا میں نقطہ کی تلاش کے لئے تین آپس میں عمودی محدودی محور استعمال کیے جاتے ہیں۔ شکل 11.27 میں محور  $Ox$ ،  $Oy$  اور  $Oz$  دایاں ہاتھ محدودی نظام دیتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کے نظام میں، انگوٹھے کو باقی انگلیوں کے ساتھ زاویہ قائمہ پر رکھتے ہوئے، اگر آپ اپنے دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو مثبت  $x$  محور پر رکھ کر انہیں مثبت  $y$  محور کی جانب موڑیں تب آپ کا انگوٹھا مثبت  $z$  محور پر ہو گا۔

فضا میں نقطہ  $N$  سے گزرتی، محوروں کے قائمہ سطحیں ان محور کو اعداد  $(x, y, z)$  پر قطع کریں گی۔ یہی اعداد نقطہ  $N$  کے کار تیزی محدود ہوں گے۔

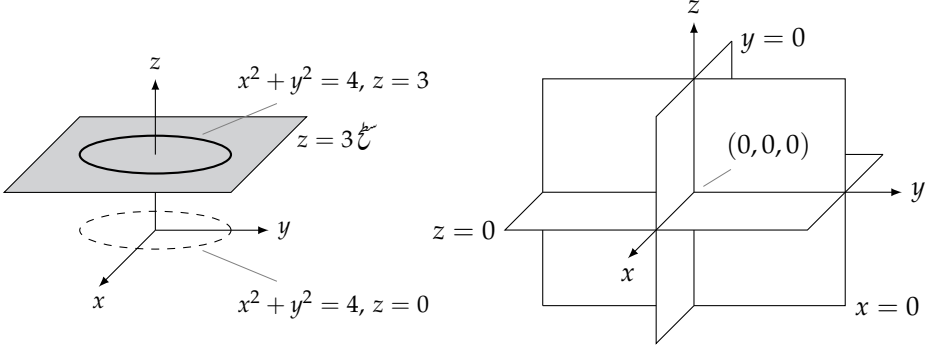
محور  $x$  پر نقطوں کے  $y$  اور  $z$  محدود صفر ہوں گے لہذا ان کے محدود کی صورت  $(x, 0, 0)$  ہو گی۔ اسی طرح محور  $y$  پر نقطوں کے  $x$  اور  $z$  محدود صفر ہوں گے لہذا ان نقطوں کے محدود کی صورت  $(0, y, 0)$  ہو گی۔ محور  $z$  پر نقطوں کے  $x$  اور  $y$  محدود صفر ہوں گے لہذا ان کے محدود کی صورت  $(0, 0, z)$  ہو گی۔

محور  $x$  کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا  $x$  محدود وہی ہو گا جس  $x$  محدود پر یہ سطح  $x$  محور کو قطع کرتا ہے۔ اس سطح پر نقطوں کے  $y$  اور  $z$  محدود کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح محور  $y$  کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک  $y$  محدود ہو گا اور محور  $z$  کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک  $z$  محدود ہو گا۔ ان سطحوں کی مساوات لکھتے ہوئے ہم اس مشترکہ محدود کی قیمت لکھتے ہیں۔ یوں مستوی  $x = 2$  محور  $x$  کو عمودی ہے اور یہ مستوی محور  $x$  کو نقطہ  $x = 2$  پر قطع کرتا ہے۔ مستوی  $y = 3$  محور  $y$  کو عمودی ہے اور اس کو نقطہ  $y = 3$  پر قطع کرتا ہے۔ مستوی  $z = 5$  محور  $z$  کو عمودی ہے اور اس محور کو نقطہ  $z = 5$  پر قطع کرتا ہے۔ شکل 11.28 میں مستوی  $x = 2$ ،  $y = 3$  اور  $z = 5$  دکھائے گئے ہیں۔ ان کا مشترک نقطہ بھی دکھایا گیا ہے جہاں یہ تینوں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مستوی  $x = 2$  اور  $y = 3$  ایک دوسرے کو ایک لکیر پر قطع کرتے ہیں (شکل 11.28) جو محور  $z$  کے متوازی ہے۔ اس لکیر کو جوڑی مساوات  $x = 2$ ،  $y = 3$  ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ  $(x, y, z)$  صرف اور صرف اس صورت اس لکیر پر پایا جائے گا جب  $x = 2$  اور  $y = 3$  ہوں۔ اسی طرح مستوی  $y = 3$  اور  $z = 5$  ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات  $y = 3$ ،  $z = 5$  ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور  $x$  کے متوازی ہو گی۔ مستوی  $x = 2$  اور  $z = 5$  ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات  $x = 2$ ،  $z = 5$  ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور  $y$  کے متوازی ہو گی۔

محدودی محوروں کے تین مستوی  $xy$ <sup>12</sup> جس کی معیاری مساوات  $z = 0$ ؛ مستوی  $yz$  جس کی معیاری مساوات  $x = 0$ ؛ اور مستوی  $xz$  جس کی معیاری مساوات  $y = 0$  ہے پائی جاتی ہیں۔ یہ تینوں مستوی مبدا  $(0, 0, 0)$  پر آپس میں ملتے ہیں (شکل 11.29)۔

<sup>12</sup>xy-plane



شکل 11.29: سطح  $x = 0$ ،  $y = 0$  اور  $z = 0$  فضا کو آٹھ ثمن میں تقسیم کرتے ہیں۔

شکل 11.30: بلند دائرہ (مثال 11.10)

تین محدود مستوی<sup>13</sup>  $x = 0$ ،  $y = 0$  اور  $z = 0$  فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں ثمن<sup>14</sup> کہتے ہیں۔ وہ ثمن جس میں تمام محدود مثبت ہیں پہلا ثمن<sup>15</sup> کہلاتا ہے۔ باقی سات ثمن کو نام دینے کا کوئی روایتی طریقہ نہیں پایا جاتا ہے۔

چونکہ فضا کے کارتیسی محدود ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں لہذا ان محدود کو مستطیل محدود<sup>16</sup> بھی کہتے ہیں۔

درج ذیل مثال میں ہم مساواتوں اور عدم مساواتوں کا خلا میں ہم پہلے نقطے تلاش کرتے ہیں۔

مثال 11.9:

<sup>13</sup> coordinate planes

<sup>14</sup> octant

<sup>15</sup> first octant

<sup>16</sup> rectangular coordinates

## تفصیل

مساوات اور عدم مساوات

$$\begin{aligned}
& z \geq 0 \quad xy \text{ مستوی میں اور اس سے اوپر نصف فضا میں تمام نقطے۔} \\
& x = -3 \quad \text{مستوی } x \text{ کو نقطہ } x = -3 \text{ پر عمودی سطح۔ یہ سطح } yz \text{ مستوی کے متوازی اور 3 اکائیاں} \\
& \quad \text{اس کے پیچھے ہے۔} \\
& z = 0, x \leq 0, y \geq 0 \quad \text{مستوی } xy \text{ کا ربع دوم۔} \\
& x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \text{پہلا شش۔} \\
& -1 \leq y \leq 1 \quad \text{سطح } y = -1 \text{ اور } y = 1 \text{ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔} \\
& y = -2, z = 2 \quad \text{وہ خط جس میں سطح } y = -2 \text{ اور سطح } z = 2 \text{ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، یا وہ خط جو} \\
& \quad \text{نقطہ } (0, -2, 2) \text{ سے گزرتا ہے اور محور } x \text{ کے متوازی ہے۔}
\end{aligned}$$

□

مثال 11.10: کون سے نقاط  $N(x, y, z)$  درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؟

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{اور} \quad z = 3$$

حل: یہ نقطے افقی سطح  $z = 3$  میں پائے جاتے ہیں اور اس سطح میں یہ دائرہ  $x^2 + y^2 = 4$  بناتے ہیں۔ ہم ان نقطوں کو "سطح  $z = 3$  میں دائرہ  $x^2 + y^2 = 4$  یا مختصراً "دائرہ  $z = 3$ ،  $x^2 + y^2 = 4$ " کہتے ہیں (شکل 11.30)۔ □

## فضا میں سمتیات

سمت بند خطوط کا سلسلہ جو قوت، ہٹاؤ، اور سمتی رفتار ظاہر کرتے ہوں سمتیات کہلاتے ہیں، جیسے یہ مستوی میں کہلائے جاتے ہیں۔ سمتی مجموعہ، سمتی تفریق اور غیر سمتی ضرب کے وہی قواعد یہاں بھی کارآمد ہوں گے۔

مبدأ سے نقاط  $(1, 0, 0)$ ،  $(0, 1, 0)$  اور  $(0, 0, 1)$  تک سمت بند خطوط اساسی سمتیات ہیں (شکل 11.31) جنہیں بالترتیب  $i$ ،  $j$  اور  $k$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مبدأ  $O$  سے عمومی نقطہ  $N(x, y, z)$  تک تعین کر سمتیہ  $r$  درج ذیل ہو گا۔

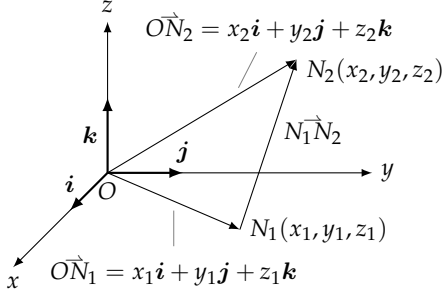
$$(11.7) \quad r = \vec{ON} = xi + yj + zk$$

تعریف: فضا میں سمتیہ کا مجموعہ اور تفریق

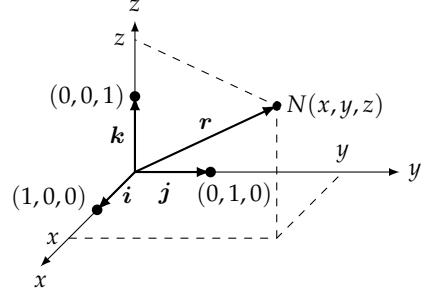
کسی بھی سمتیات  $A = a_1i + a_2j + a_3k$  اور  $B = b_1i + b_2j + b_3k$  کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$A + B = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

$$A - B = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$



شکل 11.32: دو نقطوں کے بیچ سمتیہ۔



شکل 11.31: فضا میں نقطے کا تعین گر سمتیہ۔

□

دو نقاط کے بیچ سمتیہ

ہم نقطہ  $N_1(x_1, y_1, z_1)$  اور  $N_2(x_2, y_2, z_2)$  کے بیچ سمتیہ  $N_1N_2$  کو

$$\begin{aligned} \vec{N_1N_2} &= \vec{ON_1} - \vec{ON_2} \\ &= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جو  $N_1$  اور  $N_2$  کے محدود کی صورت میں ہے (شکل 11.32)۔یوں نقطہ  $N_1(x_1, y_1, z_1)$  اور  $N_2(x_2, y_2, z_2)$  کے بیچ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$(11.8) \quad \vec{N_1N_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

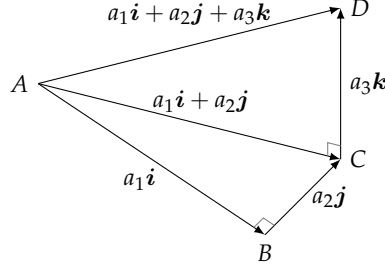
مقدار

جیسا ہم جانتے ہیں، سمتیہ کی مقدار اور سمت اس کے اہم خصوصیات ہیں۔ ہم مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے شکل 11.33 میں سمتیہ  $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  کی مقدار (لمبائی) کا کلیہ تلاش کرتے ہیں۔ مثلث ABC سے

$$|\vec{AC}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ہو گا لہذا مثلث ACD سے

$$|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}| = |\vec{AD}| = \sqrt{|\vec{AC}|^2 + |\vec{CD}|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



شکل 11.33: قائمہ مثلث ABC اور ACD پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے  $\vec{AD}$  کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔

ہو گا۔

یوں  $A = a_1i + a_2j + a_3k$  کی مقدار (لمبائی) درج ذیل ہوگی۔

$$(11.9) \quad |A| = |a_1i + a_2j + a_3k| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

غیر سمتی ضرب

تعریف: اگر  $c$  غیر سمتی اور  $A$  ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$cA = (ca_1)i + (ca_2)j + (ca_3)k$$

□

مثال 11.11: سمتیہ  $A = i - 2j + 3k$  کی لمبائی درج ذیل ہے۔

$$|A| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

□

اگر ہم سمتیہ  $A = a_1i + a_2j + a_3k$  کو غیر سمتی  $c$  سے ضرب دیں تب، مستوی میں غیر سمتی ضرب کی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا،  $cA$  کی لمبائی  $|c|$  ضرب  $A$  کی لمبائی ہوگی:

$$cA = ca_1i + ca_2j + ca_3k$$

$$(11.10) \quad \begin{aligned} |cA| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2} = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + c^2a_3^2} \\ &= |c| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |c||A| \end{aligned}$$



مثال 11.12: سمتیہ  $A$  مثال 11.11 میں دیا گیا ہے۔ یوں

$$2A = 2(i - 2j + 3k) = 2i - 4j + 6k$$

کی لمبائی درج ذیل ہو گی:

$$\begin{aligned}\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (6)^2} &= \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} \\ &= \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14} = 2|A|\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

فضا میں صفر سمتیہ سے مراد سمتیہ  $0 = 0i + 0j + 0k$  ہے۔ مستوی میں صفر سمتیہ کی طرح فضا میں  $0$  کی لمبائی صفر ہو گی اور اس کا کوئی رخ نہیں ہو گا۔

اکائی سمتیات

فضا میں اکائی سمتیہ کی لمبائی 1 ہو گی۔ اساسی سمتیات درج ذیل کی بنا اکائی سمتیات ہیں۔

$$\begin{aligned}|i| &= |1i + 0j + 0k| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\ |j| &= |0i + 1j + 0k| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \\ |k| &= |0i + 0j + 1k| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1\end{aligned}$$

مقدار اور رخ

اگر  $A \neq 0$  ہو تب  $\frac{A}{|A|}$  ایک اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ وہی ہو گا جو  $A$  کا رخ ہے۔ یوں ہم  $A$  کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(11.11) \quad A = |A| \cdot \frac{A}{|A|}$$

مثال 11.13: سمتیہ  $A = i - 2j + 3k$  کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

حل:

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad \text{مساوات 11.11}$$

$$= \sqrt{14} \cdot \frac{i - 2j + 3k}{\sqrt{14}} \quad \text{مثال 11.11}$$

$$= \sqrt{14} \left( \frac{1}{\sqrt{14}}i - \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{3}{\sqrt{14}}k \right) = (\text{رُخ } \mathbf{A}) \cdot (\text{لمبائی } \mathbf{A})$$

□

مثال 11.14: نقطہ  $N_1(1, 0, 1)$  سے نقطہ  $N_2(3, 2, 0)$  تک سمتیہ کے رخ میں اکائی سمتیہ  $\mathbf{u}$  تلاش کریں۔

حل: ہم  $\vec{N_1N_2}$  کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے  $\mathbf{u}$  حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} \vec{N_1N_2} &= (3 - 1)\mathbf{i} + (2 - 0)\mathbf{j} + (0 - 1)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ |\vec{N_1N_2}| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \\ \mathbf{u} &= \frac{\vec{N_1N_2}}{|\vec{N_1N_2}|} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \end{aligned}$$

□

مثال 11.15: سمتیہ  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 6 ہو۔

حل: ہم اس سمتیہ کے رخ اکائی سمتیہ کو 6 سے ضرب کر کے جواب حاصل کرتے ہیں:

$$6 \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = 6 \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6 \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

□

فضا میں فاصلہ

فضا میں نقاط  $N_1$  اور  $N_2$  کے بیچ فاصلہ، سمتیہ  $\vec{N_1N_2}$  کی لمبائی  $|\vec{N_1N_2}|$  ہوگی۔

نقاط  $N_1(x_1, y_1, z_1)$  اور  $N_2(x_2, y_2, z_2)$  کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$(11.12) \quad |\vec{N_1N_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال 11.16: نقاط  $N_1(2, 1, 5)$  اور  $N_2(-2, 3, 0)$  کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} |\vec{N_1N_2}| &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (0 - 5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 25} \\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

□

### 11.2.1 کرہ

ہم مساوات 11.12 استعمال کر کے اس کرہ کی مساوات لکھتے ہیں جس کا مرکز  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  اور رداس  $a$  ہو۔ نقطہ  $N(x, y, z)$  اس صورت اس کرہ پر پایا جائے گا جب  $|\vec{N_0N_1}| = a$  ہو یعنی:

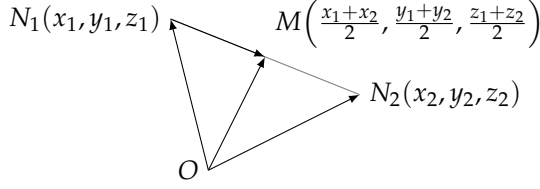
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

ایک کرہ جس کا مرکز  $(x_0, y_0, z_0)$  اور رداس  $a$  ہو، کے معیار مساوات درج ذیل ہے۔

$$(11.13) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

مثال 11.17: درج ذیل کرہ کا مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$



شکل 11.34: نقاط  $N_1$  اور  $N_2$  کے محدود کی اوسط قطع  $N_1N_2$  کے وسطی نقطہ کے محدود ہوں گے۔

حل: ہم مستوی میں دائرے کا مرکز اور رداس حاصل کرنے کی طرح یہاں بھی  $x$ ،  $y$  اور  $z$  کے مربع مکمل کر کے معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کر کے مرکز اور رداس دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 &= 0 \\
 (x^2 + 3x) + y^2 + (z^2 - 4z) &= -1 \\
 \left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + y^2 + \left(z^2 - 4z + \left(-\frac{4}{2}\right)^2\right) &= -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{2}\right)^2 \\
 \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 &= -1 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{21}{4}
 \end{aligned}$$

یہ مساوات 11.13 ہے لہذا  $x_0 = -\frac{3}{2}$ ،  $y_0 = 0$ ،  $z_0 = 2$  اور  $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$  ہیں۔ یوں مرکز  $(-\frac{3}{2}, 0, 2)$  اور رداس  $\frac{\sqrt{21}}{2}$  ہو گا۔

□

مثال 11.18:

مساوات اور عدم مساوات تفصیل

□	<p>کرہ <math>x^2 + y^2 + z^2 = 4</math> کا اندرون۔</p> <p>کرہ <math>x^2 + y^2 + z^2 = 4</math> کا اندرون پر مشتمل ٹھوس کرہ یا سطح</p> <p>کرہ <math>x^2 + y^2 + z^2 = 4</math> میں محدود گیند۔</p> <p>کرہ <math>x^2 + y^2 + z^2 = 4</math> کا بیرون۔</p> <p>کرہ <math>x^2 + y^2 + z^2 = 4</math> کا نچلا نصف حصہ۔</p>	<p><math>x^2 + y^2 + z^2 &lt; 4</math></p> <p><math>x^2 + y^2 + z^2 \leq 4</math></p> <p><math>x^2 + y^2 + z^2 &gt; 4</math></p> <p><math>x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0</math></p>
---	--	--

وسطی نقاط

کسی بھی قطع کا وسطی نقطہ اوسط کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ نقطہ  $N_1(x_1, y_1, z_1)$  اور  $N_2(x_2, y_2, z_2)$  کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

اس کی وجہ درج ذیل ہے (شکل 11.34)۔

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{ON_1} + \frac{1}{2} \vec{N_1N_2} = \vec{ON_1} + \frac{1}{2} (\vec{ON_2} - \vec{ON_1}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{ON_1} + \vec{ON_2}) \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2} \mathbf{i} + \frac{y_1 + y_2}{2} \mathbf{j} + \frac{z_1 + z_2}{2} \mathbf{k}\end{aligned}$$

مثال 11.19: نقطہ  $N_1(3, -2, 0)$  اور  $N_2(7, 4, 4)$  کو ملانے والی قطع کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left( \frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = (5, 1, 2)$$

□

### سوالات

سلسلہ، مساوات اور عدم مساوات

سوال 1 تا سوال 12 میں ان نقطوں کے سلسلہ کی جیومیٹریائی تفصیل بیان کریں جو دی گئی جوڑی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 1:  $x = 2, y = 3$

جواب: محور  $z$  کے متوازی نقطہ  $(2, 3, 0)$  سے گزرتا ہوا خط۔

سوال 2:  $x = -1, z = 0$

سوال 3:  $y = 0, z = 0$

جواب: محور  $x$

سوال 4:  $x = 1, y = 0$

سوال 5:  $x^2 + y^2 = 4, z = 0$

جواب: مستوی  $xy$  میں دائرہ  $x^2 + y^2 = 4$

سوال 6:  $x^2 + y^2 = 4, z = -2$

سوال 7:  $x^2 + z^2 = 4, y = 0$

جواب: مستوی  $xz$  میں دائرہ  $x^2 + z^2 = 4$

سوال 8:  $y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

سوال 9:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$   
جواب: مستوی  $yz$  میں دائرہ  $y^2 + z^2 = 1$

سوال 10:  $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad y = -4$

سوال 11:  $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25, \quad z = 0$   
جواب: مستوی  $xy$  میں دائرہ  $x^2 + y^2 = 16$

سوال 12:  $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

سوال 13 تا سوال 18 میں ان نقاط کے سلسلہ کو جیومیٹریائی بیان کریں جو دی گئی عدم مساوات یا مساوات اور عدم مساوات کی جوڑی کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 13: (i)  $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 0$  (ب)  $x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad z = 0$   
جواب: (i) مستوی  $xy$  کا ربع اول۔ (ب) مستوی  $xy$  کا ربع چہارم۔

سوال 14:

ا.  $0 \leq x \leq 1$

ب.  $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$

ج.  $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$

سوال 15:

ا.  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

ب.  $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

جواب: (i) رداس 1 کا گیند جس کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ب) مبدا سے 1 اکائی سے زیادہ دور تمام نقاط۔

سوال 16: (i)  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$  (ب)  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 3$  (ج)  $x^2 + y^2 \leq 1$  جہاں  $z$  پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال 17: (i)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  (ب)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$  (ج)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  جہاں  $z$  پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال 18: (i)  $x = y, z = 0$  (ب)  $x = y, z$  جہاں  $z$  پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے سلسلہ کو ایک مساوات یا جوڑی مساوات سے ظاہر کریں۔

سوال 19: وہ مستوی جو (i) نقطہ  $(3, 0, 0)$  پر محور  $x$ ، (ب) نقطہ  $(0, -1, 0)$  پر محور  $y$ ، (ج) نقطہ  $(0, 0, -2)$  پر محور  $z$  کو عمودی ہے۔  
جواب: (i)  $x = 3$  (ب)  $y = -1$  (ج)  $z = -2$

سوال 20: ایک مستوی جو نقطہ  $(3, -1, 2)$  پر (i) محور  $x$ ، (ب) محور  $y$ ، (ج) محور  $z$  کو عمودی ہے۔

سوال 21: ایک مستوی جو نقطہ  $(3, -1, 1)$  پر (i) مستوی  $xy$ ، (ب) مستوی  $yz$ ، (ج) مستوی  $xz$  کے متوازی ہے۔  
جواب: (i)  $z = 1$  (ب)  $x = 3$  (ج)  $y = -1$

سوال 22: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز  $(0, 0, 0)$  ہو اور جو (i) مستوی  $xy$ ، (ب) مستوی  $yz$ ، (ج) مستوی  $xz$  میں پایا جاتا ہو۔

سوال 23: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز  $(0, 2, 0)$  ہو اور جو (i) مستوی  $xy$ ، (ب) مستوی  $yz$ ، (ج) مستوی  $y = 2$  میں پایا جاتا ہو۔  
جواب: (i)  $x^2 + (y - 2)^2 = 4, z = 0$  (ب)  $x = 0, (y - 2)^2 + z^2 = 4$  (ج)  $x^2 + z^2 = 4, y = 2$

سوال 24: وہ دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز  $(-3, 4, 1)$  ہو اور جو (i) مستوی  $xy$ ، (ب) مستوی  $yz$ ، (ج) مستوی  $xz$  کے متوازی سطح میں پایا جاتا ہو۔

سوال 25: نقطہ  $(1, 3, -1)$  سے گزرتا خط جو (i) محور  $x$ ، (ب) محور  $y$ ، (ج) محور  $z$  کے متوازی ہو۔  
جواب: (i)  $y = 3, z = -1$  (ب)  $x = 1, z = -1$  (ج)  $x = 1, y = 3$

سوال 26: فضا میں وہ نقطے معلوم کریں جن کا فاصلہ مبدا اور نقطہ  $(0, 2, 0)$  سے یکساں ہو۔

سوال 27: وہ دائرہ معلوم کریں جس میں نقطہ  $(1, 1, 3)$  سے گزرتا ہوا ایسا مستوی جو محور  $z$  کے عمودی ہو ایک ایسے دائرہ کو جاملتا ہو جس کا رداس 5 اور مرکز  $(0, 0, 0)$  ہو۔  
جواب:  $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 3$

سوال 28: فضا میں ان نقطوں کا سلسلہ جن کا فاصلہ  $(0, 0, 1)$  سے 2 اور  $(0, 0, -1)$  سے 2 ہو۔

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے سلسلہ کی عدم مساوات پیش کریں۔

سوال 29: سطح  $z = 0$  اور  $z = 1$  کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔  
جواب:  $0 \leq z \leq 1$

سوال 30: پہلے ثمن میں محدود سطحوں اور سطحوں  $x = 2$ ،  $y = 2$  اور  $z = 2$  میں محدود ٹھوس مکعب۔

سوال 31: نصف فضا جو مستوی  $xy$  اور اس کے نیچے نقطوں پر مشتمل ہے۔  
جواب:  $z \leq 0$

سوال 32: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو کا بالائی نصف حصہ۔

سوال 33: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز  $(1, 1, 1)$  ہو کا (ا) اندرون، (ب) بیرون۔  
جواب: (ا)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 < 1$ ، (ب)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1$

سوال 34: رداس 1 اور 2 کے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں میں بند خطہ۔ (بند خطہ سے مراد ہے کہ کرہ کی سطحیں بھی اس خطہ میں شامل ہوں گی۔ کروی سطحوں کو شامل نہ کرنے کے لئے ہم آزاد خطے کی اصطلاح استعمال کرتے ہیں۔)

### لمبائی اور رخ

سوال 35 تا سوال 44 میں دیے سمتیہ کو اس کی لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 35:  $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$   
جواب:  $3(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k})$

سوال 36:  $3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

سوال 37:  $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$   
جواب:  $9(\frac{1}{9}\mathbf{i} + \frac{4}{9}\mathbf{j} - \frac{8}{9}\mathbf{k})$



سوال 38:  $9i - 2j + 6k$

سوال 39:  $5k$

جواب:  $5(k)$

سوال 40:  $-4j$

سوال 41:  $\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k$

جواب:  $1(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k)$

سوال 42:  $\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}k$

سوال 43:  $\frac{1}{\sqrt{6}}i - \frac{1}{\sqrt{6}}i - \frac{1}{\sqrt{6}}k$

جواب:  $\sqrt{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k)$

سوال 44:  $\frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{j}{\sqrt{3}} + \frac{k}{\sqrt{3}}$

سوال 45: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

رخ	لمبائی	شمار
$i$	2	(ا)
$-k$	$\sqrt{3}$	(ب)
$\frac{3}{5}j + \frac{4}{5}k$	$\frac{1}{2}$	(ج)
$\frac{6}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k$	7	(د)

جواب: (ا)  $2i$ ، (ب)  $-\sqrt{3}k$ ، (ج)  $\frac{3}{10}j + \frac{2}{5}k$ ، (د)  $6i - 2j + 3k$

سوال 46: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	7	$-j$
(ب)	$\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}k$
(ج)	$\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}i - \frac{4}{13}j - \frac{12}{13}k$
(د)	$a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{6}}k$

سوال 47: سمتیہ  $A = 12i - 5k$  کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔  
جواب:  $\frac{7}{13}(12i - 5k)$

سوال 48: سمتیہ  $A = i + j + k$  کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی  $\sqrt{5}$  ہو۔

سوال 49: سمتیہ  $A = 2i - 3j + 6k$  کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 5 ہو۔  
جواب:  $-\frac{10}{7}i + \frac{15}{7}j - \frac{30}{7}k$

سوال 50: سمتیہ  $A = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k$  کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 3 ہو۔

سمتیات کا تعین بذریعہ نقاط، وسطی نقاط اور فاصلہ

سوال 51 تا سوال 56 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. نقاط  $N_1$  اور  $N_2$  کے بیچ فاصلہ،

ب. رخ  $\vec{N_1N_2}$ ،

ج. قطع  $N_1N_2$  کا وسطی نقطہ۔

سوال 51:  $N_1(1, 1, 1)$ ،  $N_2(3, 3, 0)$   
جواب: (ا) 3، (ب)  $\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$ ، (ج)  $(2, 2, \frac{1}{2})$

سوال 52:  $N_1(-1, 1, 5)$ ،  $N_2(2, 5, 0)$

سوال 53:  $N_1(1, 4, 5)$ ،  $N_2(4, -2, 7)$   
جواب: (ا) 7، (ب)  $\frac{3}{7}i - \frac{6}{7}j + \frac{2}{7}k$ ، (ج)  $(\frac{5}{2}, 1, 6)$

سوال 54:  $N_1(3, 4, 5)$ ،  $N_2(2, 3, 4)$

سوال 55:  $N_1(0,0,0)$ ,  $N_2(2,-2,-2)$  (ا)  $2\sqrt{3}$ , (ب)  $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ , (ج)  $(1,-1,-1)$  جواب:

سوال 56:  $N_1(5,3,-2)$ ,  $N_2(0,0,0)$

سوال 57: اگر  $\vec{AB} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  اور نقطہ  $B(5,1,3)$  ہو تب نقطہ  $A$  تلاش کریں۔  
جواب:  $A(4,-3,5)$

سوال 58: اگر  $\vec{AB} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$  اور نقطہ  $A(-2,-3,6)$  ہو تب نقطہ  $B$  تلاش کریں۔

کرہ  
سوال 59 تا سوال 62 میں کرہ کے رداس اور مراکز تلاش کریں۔

سوال 59:  $(x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$   
جواب:  $C(-2,0,2)$ ,  $a = 2\sqrt{2}$

سوال 60:  $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{21}{4}$

سوال 61:  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 + (z + \sqrt{2})^2 = 2$   
جواب:  $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $a = \sqrt{2}$

سوال 62:  $x^2 + (y + \frac{1}{3})^2 + (z - \frac{1}{3})^2 = \frac{29}{9}$

سوال 63 تا سوال 66 میں کرہ کے رداس اور مراکز دیے گئے ہیں۔ ان کرہ کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 63: رداس  $\sqrt{14}$ , مرکز  $(1,2,3)$   
جواب:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

سوال 64: رداس 2, مرکز  $(0,-1,5)$

سوال 65: رداس  $\sqrt{3}$ , مرکز  $(-2,0,0)$   
جواب:  $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 3$

سوال 66: رداس 7، مرکز  $(0, -7, 0)$

سوال 67 تا سوال 70 میں دیے کردہ کے رداس اور مراکز دریافت کریں۔

سوال 67:  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$

جواب:  $C(-2, 0, 2), a = \sqrt{8}$

سوال 68:  $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z = 0$

سوال 69:  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$

جواب:  $C(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), a = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

سوال 70:  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z = 9$

سوال 71: نقطہ  $N(x, y, z)$  سے (ا) محور  $x$ ، (ب) محور  $y$ ، (ج) محور  $z$  تک فاصلہ تلاش کریں۔

جواب: (ا)  $\sqrt{y^2 + z^2}$ ، (ب)  $\sqrt{x^2 + z^2}$ ، (ج)  $\sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 72: نقطہ  $N(x, y, z)$  سے (ا) سطح  $xy$ ، (ب) سطح  $yz$ ، (ج) سطح  $xz$  تک فاصلہ تلاش کریں۔

### سمتیائے اور جیومیٹری

سوال 73: نقاط  $A(4, 2, 0)$ ،  $B(1, 3, 0)$  اور  $C(1, 1, 3)$  یکساں کشادگی کے باریک مثلث کے راس ہیں۔

ا. نقطہ  $C$  سے  $AB$  کے وسطی نقطہ  $M$  تک سمتیہ تلاش کریں۔

ب. نقطہ  $C$  سے وسطانیہ  $CM$  پر  $C$  سے  $\frac{2}{3}$  فاصلہ تک سمتیہ تلاش کریں۔

ج. مثلث  $ABC$  کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع کے محدود تلاش کریں۔

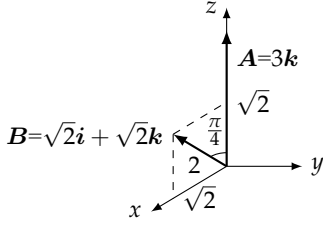
جواب: (ا)  $\frac{3}{2}i + \frac{3}{2}j - 3k$ ، (ب)  $i + j - 2k$ ، (ج)  $(2, 2, 1)$

سوال 74: ایک مثلث جس کے راس  $A(1, -1, 2)$ ،  $B(2, 1, 3)$  اور  $C(-1, 2, -1)$  ہیں کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع تک مبداء سے سمتیہ تلاش کریں۔

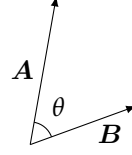
سوال 75: فضا میں چار اضلاع کے راس  $A$ ،  $B$ ،  $C$  اور  $D$  ہیں۔ یہ چار اضلاع ضروری نہیں کہ مستوی ہو۔ دکھائیں کہ مخالف اضلاع کے وسطانی نقطوں کو جوڑنے والے قطعات ایک دوسرے کو نصف میں قطع کرتے ہیں۔ (اشارہ: دکھائیں کہ ان قطعات کے وسطی نقاط یکساں ہیں۔)

سوال 76: منظم  $n$  کثیر الاضلاع کے مرکز سے اس کے راس تک سمتیات بنائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ ان سمتیات کا مجموعہ صفر ہو گا۔ (اشارہ: کثیر الاضلاع کو اپنے مرکز کے گرد گھمانے سے اس مجموعہ پر کیا اثر ہو گا؟)

سوال 77: فرض کریں ایک مثلث کے راس  $A$ ،  $B$  اور  $C$  ہیں جبکہ مطابقتی مخالف اضلاع کے وسطی نقاط  $a$ ،  $b$  اور  $c$  ہیں۔ دکھائیں کہ  $\vec{Aa} + \vec{Bb} + \vec{Cc} = 0$  ہو گا۔



شکل 11.36: سمتیات برائے مثال 11.20



شکل 11.35: سمتیات A اور B کے بیچ زاویہ۔

### 11.3 ضرب نقطہ

ہم اب ضرب نقطہ پر غور کرتے ہیں جو سمتیات کو آپس میں ضرب دینے کے دو طریقوں میں سے ایک ہے۔ چونکہ ضرب نقطہ کا نتیجہ غیر سمتی ہوتا ہے لہذا ضرب نقطہ کو غیر سمتی ضرب<sup>18</sup> بھی کہتے ہیں۔

#### ضرب نقطہ

جب دو غیر صفر سمتیات A اور B کے ابتدائی نقاط کو ایک ہی نقطہ پر رکھا جائے تب ان سمتیات کے بیچ زاویہ  $0 \leq \theta \leq \pi$  پایا جاتا ہے۔ یہ زاویہ A اور B کے بیچ زاویہ کہلاتا ہے۔

تعریف: سمتیات A اور B کے غیر سمتی ضرب (ضرب نقطہ) سے مراد درج ذیل عدد ہے

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta \quad (11.14)$$

جہاں  $\theta$  سمتیات A اور B کے بیچ زاویہ ہے (شکل 11.35)۔

□

الفاظ میں،  $A \cdot B$  سے مراد A کی لمبائی ضرب B کی لمبائی ضرب اس زاویہ کا کوسائن جو ان سمتیات کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سمتیات A اور B کے ضرب نقطہ کو A اور B کے بیچ نقطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی  $A \cdot B$  جس کی بنیاد ضرب نقطہ کہلاتا ہے۔

مثال 11.20: سمتیات  $A = 3k$  اور  $B = \sqrt{2}i + \sqrt{2}k$  کے ضرب نقطہ درج ذیل ہوگا (شکل 11.36)۔

$$A \cdot A = |A||B| \cos \theta = (3)(2) \cos \frac{\pi}{4} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

<sup>18</sup> scalar product

□

چونکہ غیر سمتی ضرب کی علامت  $\cos \theta$  پر منحصر ہے لہذا غیر سمتی ضرب کا نتیجہ زاویہ حادہ کی صورت میں مثبت، زاویہ منفرجہ کی صورت میں منفی (اور زاویہ قائمہ کی صورت میں صفر ہوگا)۔

چونکہ سمتیہ  $A$  کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے اور  $\cos 0 = 1$  ہوتا ہے لہذا

$$A \cdot A = |A||A| \cos 0 = |A||A| (1) = |A|^2$$

یعنی

$$(11.15) \quad |A| = \sqrt{A \cdot A}$$

ہوگا۔

### 11.3.1 حساب

کارتمی نظام میں  $A \cdot B$  کا حساب  $A$  اور  $B$  کے اجزاء سے حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

$$B = b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

$$C = B - A = (b_1 - a_1)i + (b_2 - a_2)j + (b_3 - a_3)k$$

ایک مثلث جس کے اضلاع  $A$ ،  $B$  اور  $C$  ہوں کے لئے قاعدہ کوسائن درج ذیل ہوگا (شکل 11.37)۔

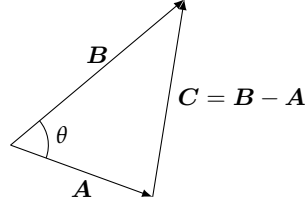
$$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B| \cos \theta$$

$$|A||B| \cos \theta = \frac{|A|^2 + |B|^2 - |C|^2}{2}$$

اس مساوات کا بایاں ہاتھ  $A \cdot B$  ہے۔ ہم  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کے اجزاء کا مربع لے کر مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت حاصل کرتے ہیں (مساوات 11.9)۔ یوں

$$(11.16) \quad A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

حاصل ہوتا ہے لہذا دو سمتیات کا غیر سمتی ضرب لینے کی خاطر ہم اس کے مطابق  $i$ ،  $j$  اور  $a$  اجزاء کو ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔



شکل 11.37: ایک مثلث جس کے اضلاع  $A$ ،  $B$  اور  $C = B - A$  ہوں پر قاعدہ کوسائن کے اطلاق سے مساوات 11.16 حاصل ہو گا۔

مساوات 11.14 کو  $\theta$  کے لئے حل کر کے ان سمتیات کے بیچ زاویہ حاصل ہو گا۔

$$(11.17) \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{A \cdot B}{|A||B|} \right) \quad \text{سمتیات کے بیچ زاویہ}$$

چونکہ الٹ کوسائن کی قیمت  $[0, \pi]$  میں پائی جاتی ہے لہذا مساوات 11.17 خود بخود  $A$  اور  $B$  کے بیچ زاویہ دیتی ہے۔

مثال 11.21: سمتیات  $A = i - 2j - 2k$  اور  $B = 6i + 3j + 2k$  کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 11.17 استعمال کرتے ہیں۔

$$A \cdot B = (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4$$

$$|A| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|B| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left( \frac{A \cdot B}{|A||B|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{-4}{(3)(7)} \right) = \cos^{-1} \left( -\frac{4}{21} \right) \approx 1.76 \text{ ریڈین} \end{aligned}$$

□

قواعد ضرب نقطہ

ہم ضرب نقطہ کی مساوات  $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + c_1c_2$  سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(11.18) \quad A \cdot B = B \cdot A$$

دوسرے لفظوں میں، ضرب نقطہ قابل تبادلہ<sup>19</sup> ہے۔ ہم مساوات 11.16 سے یہ بھی دیکھتے ہیں کہ مستقل (یا غیر سمتی) عدد  $c$  کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$(11.19) \quad (cA) \cdot B = A \cdot (cB) = c(A \cdot B)$$

اگر  $C = c_1i + c_2j + c_3k$  کوئی تیسرا سمتیہ ہو تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= A \cdot B + A \cdot C \end{aligned}$$

اس طرح ضرب نقطہ قانون تقسیم (درج ذیل) کو مطمئن کرتا ہے۔

$$(11.20) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

اس کو مساوات 11.18 کے ساتھ ملا کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.21) \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

مساوات 11.20 اور مساوات 11.21 ہمیں سمتیات کے مجموعوں کو، الجبرا کے قواعد کے مطابق، آپس میں ضرب دینے کی اجازت دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$(11.22) \quad (A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

### عمودی سمتیات

دو غیر صفر سمتیات  $A$  اور  $B$  تب عمودی<sup>20</sup> ہوں گے جب ان کے بیچ زاویہ  $\frac{\pi}{2}$  ہو۔ یوں  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  کی بنا عمودی سمتیات کے لئے  $A \cdot B = 0$  ہو گا۔ اسی طرح اگر  $A$  اور  $B$  غیر صفر سمتیات ہوں اور  $A \cdot B = |A||B| \cos \theta = 0$  ہو تب  $\cos \theta = 0$  یعنی  $\theta = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$  ہو گا۔

دو غیر صفر سمتیات  $A$  اور  $B$  صرف اور صرف اس صورت عمودی ہوں گے جب  $A \cdot B = 0$  ہو۔

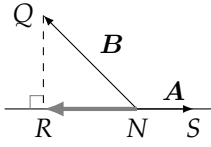
مثال 11.22: سمتیات  $A = 3i - 2j + k$  اور  $B = 2j + 4k$  درج ذیل کی بنا عمودی ہیں۔

$$A \cdot B = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = 0$$

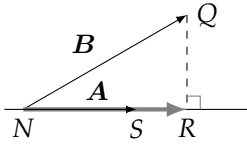
□

<sup>19</sup>commutative  
<sup>20</sup>orthogonal

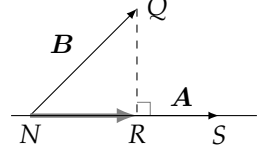




(ا)

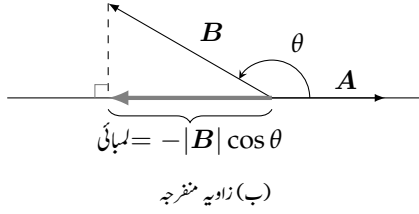


(ب)

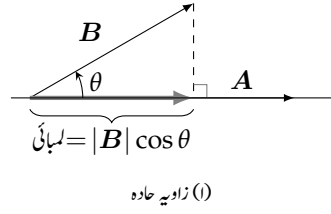


(ج)

شکل 11.38:  $B$  کا  $A$  پر سمتی تقطیل



(ب) زاویہ منفرجہ



(ج) زاویہ حادہ

شکل 11.39:  $A$  پر  $B$  کے تقطیل کی لمبائی

تقطیل سمتیہ

سمتیہ  $B = \vec{NQ}$  کا غیر صفر سمتیہ  $A = \vec{NS}$  پر تقطیل سمتیہ  $\vec{NR}$  تعین کرنے کی خاطر  $Q$  سے (مبسوط) خط  $NS$  پر عمود گرایا جاتا ہے (شکل 11.38)۔ اس سمتیہ کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$\text{proj}_A B$

$B$  کا  $A$  پر سمتی تقطیل

اگر  $B$  قوت کو ظاہر کرتا ہو، تب  $\text{proj}_A B$  سمتیہ  $A$  کے رخ اثر انداز ہونے والی قوت ہوگی۔

اگر  $A$  اور  $B$  کے بیچ زاویہ حادہ ہو تب  $A$  پر تقطیل  $B$  کی لمبائی  $|B| \cos \theta$  اور رخ  $\frac{A}{|A|}$  ہوگا (شکل 11.39)۔ اگر  $\theta$  زاویہ منفرجہ ہو تب  $\cos \theta < 0$  ہوگا اور  $A$  پر تقطیل  $B$  کی لمبائی  $-|B| \cos \theta$  اور رخ  $-\frac{A}{|A|}$  ہوگا۔ ان دونوں صورتوں میں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \text{proj}_A B &= (|B| \cos \theta) \frac{A}{|A|} \\ &= \left( \frac{A \cdot B}{|A|} \right) \frac{A}{|A|} \\ &= \left( B \cdot \frac{A}{|A|} \right) \frac{A}{|A|} \end{aligned}$$

$$|B| \cos \theta = \frac{|A||B| \cos \theta}{|A|} = \frac{A \cdot B}{|A|}$$

$$(11.23) \quad \text{proj}_A B = \left( B \cdot \frac{A}{|A|} \right) \frac{A}{|A|} = \left( \frac{B \cdot A}{A \cdot A} \right) A$$

عدد  $|B| \cos \theta$  کو  $B$  کا  $A$  کے رخ غیر سمتی جزو کہتے ہیں۔ درج ذیل کی بنا

$$(11.24) \quad |B| \cos \theta = B \cdot \frac{A}{|A|}$$

ہم غیر سمتی جزو حاصل کرنے کی خاطر  $B$  کا ضرب نقطہ  $A$  کے رخ کے ساتھ لیں گے۔ مساوات 11.23 کہتی ہے کہ  $B$  کا  $A$  پر تھلیل،  $A$  کے رخ  $B$  کے غیر سمتی جزو ضرب رخ  $A$  کے برابر ہو گا۔

جہاں مساوات 11.23 کا پہلا حصہ  $A$  کے رخ  $B$  کے اثر کی بات کرتی ہے، اس کا دوسرا حصہ حساب کے لئے موزوں ہے چونکہ یہ جذر سے چھٹکارا دیتا ہے۔

مثال 11.23: سمتیہ  $B = 6i + 3j + 2k$  کا  $A = i - 2j - 2k$  پر سمتی تھلیل تلاش کریں اور  $A$  کے رخ  $B$  کا غیر سمتی جزو تلاش کریں۔

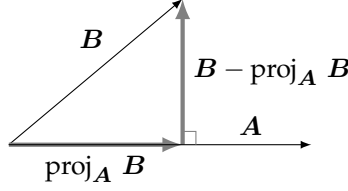
حل: ہم مساوات 11.23 استعمال کر کے سمتی تھلیل تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{proj}_A B &= \frac{B \cdot A}{A \cdot A} A = \frac{6 - 6 - 4}{1 + 4 + 4} (i - 2j - 2k) \\ &= -\frac{4}{9} (i - 2j - 2k) = -\frac{4}{9} i + \frac{8}{9} j + \frac{8}{9} k \end{aligned}$$

ہم  $A$  کے رخ  $B$  کا غیر سمتی جزو مساوات 11.24 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |B| \cos \theta &= B \cdot \frac{A}{|A|} = (6i + 3j + 2k) \cdot \left( \frac{1}{3} i - \frac{2}{3} j - \frac{2}{3} k \right) \\ &= 2 - 2 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

□



شکل 11.40: سمتیہ  $B$  کو سمتیہ  $A$  کے عمودی اور متوازی سمتیہات کا مجموعہ لکھنا۔

سمتیہ کو عمودی سمتیہات کا مجموعہ لکھنا

میکانیات میں ہمیں عموماً ایک سمتیہ  $B$  کو سمتیہ  $A$  کے متوازی سمتیہ اور  $A$  کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ کی صورت میں لکھنا ہوتا ہے۔ ہم ایسا درج ذیل مساوات کی مدد سے کر سکتے ہیں (شکل 11.40)۔

$$\begin{aligned}
 B &= \text{proj}_A B + (B - \text{proj}_A B) \\
 (11.25) \quad &= \underbrace{\left( \frac{B \cdot A}{A \cdot A} \right) A}_{A \text{ کا متوازی}} + \underbrace{\left( B - \left( \frac{B \cdot A}{A \cdot A} \right) A \right)}_{A \text{ کا عمودی}}
 \end{aligned}$$

مثال 11.24: سمتیہ  $B = 2i + j - 3k$  کو سمتیہ  $A = 3i - j$  کے متوازی سمتیہ اور  $A$  کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

حل: ہم درج ذیل

$$A \cdot B = 6 - 1 = 5, \quad A \cdot A = 9 + 1 = 10$$

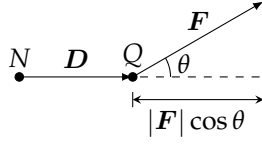
کو مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{B \cdot A}{A \cdot A} A + \left( B - \frac{B \cdot A}{A \cdot A} A \right) = \frac{5}{10}(3i - j) + \left( 2i + j - 3k - \frac{5}{10}(3i - j) \right) \\
 &= \left( \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}j \right) + \left( \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}j - 3k \right)
 \end{aligned}$$

آپ تسلی کر لیں کہ دائیں ہاتھ پہلا جزو  $\frac{1}{2}A$  کے برابر ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرا جزو درج ذیل کی بنا  $A$  کو عمودی ہے۔

$$\left( \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}j - 3k \right) \cdot (3i - j) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

□



شکل 11.41: ہٹا  $D$  کے دوران مستقل قوت  $F$  کا کام  $(|F| \cos \theta)|D|$  ہو گا۔

کام

ہم نے حصہ 6.8 میں مستقل قوت  $F$  جو ایک جسم پر عمل کر کے اس کو قوت کے رخ  $d$  فاصلہ منتقل کرتی ہے کا کام کلیہ  $W = Fd$  سے دریافت کیا۔ یہ کلیہ صرف اس صورت درست ہو گا جب قوت کا رخ اور حرکت کا رخ ایک ہوں۔ اگر مستقل قوت  $F$  اور جسم کے ہٹا  $\vec{D} = \vec{NQ}$  کے رخ مختلف ہوں تب  $D$  کے رخ،  $F$  کا جزو کام کرے گا۔ اگر  $F$  اور  $D$  کے بیچ زاویہ  $\theta$  ہو تب کام درج ذیل ہو گا (شکل 11.41)۔

$$\begin{aligned} \text{کام} &= (D \text{ کی لمبائی}) (D \text{ کے رخ } F \text{ کا غیر سمتی جزو}) \\ &= (|F| \cos \theta) |D| \\ &= F \cdot D \end{aligned}$$

تعریف: ہٹا  $D = \vec{NQ}$  کے دوران مستقل قوت  $F$  کا کام

$$(11.26) \quad W = F \cdot D = |F| |D| \cos \theta$$

ہو گا جہاں ہٹا اور قوت کے بیچ زاویہ  $\theta$  ہے۔

□

کام کی اکائی نیوٹن ضرب میٹر ہے جس کو عموماً **جاؤل**<sup>21</sup> کہتے ہیں۔

مثال 11.25: اگر  $|F| = 40 \text{ N}$  اور  $|D| = 3 \text{ m}$  ہوں اور  $\theta = 60^\circ$  ہو تب کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \text{کام} &= |F| |D| \cos \theta \\ &= (40)(3) \cos 60^\circ \\ &= (120) \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 60 \text{ J} \end{aligned}$$

□

## سوالات

سوال 1 تا سوال 10 میں درج ذیل دریافت کریں۔

ا.  $|B|$  ،  $|A|$  ،  $A \cdot B$

ب.  $A$  اور  $B$  کے بیچ زاویہ کا کوسائن۔

ج.  $A$  کے رخ  $B$  کا غیر سمتی جزو۔

د. سمتیہ  $\text{proj}_A B$

سوال 1:  $A = 2i - 4j + \sqrt{5}k$ ،  $B = -2i + 4j - \sqrt{5}k$   
جواب: (ا)  $-25$ ، (ب)  $-1$ ، (ج)  $-5$ ، (د)  $-2i + 4j - \sqrt{5}k$

سوال 2:  $A = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k$ ،  $B = 5i + 12j$

سوال 3:  $A = 10i + 11j - 2k$ ،  $B = 3j + 4k$   
جواب: (ا)  $25$ ،  $15$ ،  $5$ ، (ب)  $\frac{1}{3}$ ، (ج)  $\frac{5}{3}$ ، (د)  $\frac{1}{9}(10i + 11j - 2k)$

سوال 4:  $A = 2i + 10j - 11k$ ،  $B = 2i + 2j + k$

سوال 5:  $A = -2i + 7j$ ،  $B = k$   
جواب: (ا)  $\sqrt{53}$ ، (ب)  $0$ ، (ج)  $0$ ، (د)  $0$

سوال 6:  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k$ ،  $B = \frac{1}{\sqrt{2}}j - k$

سوال 7:  $A = 5j - 3k$ ،  $B = i + j + k$   
جواب: (ا)  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{34}$ ،  $2$ ، (ب)  $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ ، (ج)  $\frac{2}{\sqrt{34}}$ ، (د)  $\frac{1}{17}(5j - 3k)$

سوال 8:  $A = i + k$ ،  $B = i + j + k$

سوال 9:  $A = -i + j$ ،  $B = \sqrt{2}i + \sqrt{3}j + 2k$   
جواب: (ا)  $3$ ،  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ، (ب)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ، (ج)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ، (د)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}(-i + j)$

سوال 10:  $A = -5i + j$ ،  $B = 2i + \sqrt{17}j + 10k$

سوال 11: سمتیہ  $B = 3j + 4k$  کو سمتیہ  $A = i + j$  کے عمودی سمتیہ اور  $A$  کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔  
جواب:  $(\frac{3}{2}i + \frac{3}{2}j) + (-\frac{3}{2}i + \frac{3}{2}j + 4k)$

سوال 12: سمتیہ  $B = j + k$  کو سمتیہ  $A = i + j$  کے عمودی سمتیہ اور  $A$  کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 13: سمتیہ  $B = 8i + 4j - 12k$  کو سمتیہ  $A = i + 2j - k$  کے عمودی سمتیہ اور  $A$  کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔  
جواب:  $(\frac{14}{3}i + \frac{28}{3}j - \frac{14}{3}k) + (\frac{10}{3}i - \frac{16}{3}j - \frac{22}{3}k)$

سوال 14: سمتیہ  $B = i + (j + k)$  پہلے سے سمتیہ  $i$  کے متوازی سمتیہ اور  $i$  کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ ہے۔ اگر مساوات 11.25 میں  $A = i$  ہو تب کیا  $B_{\parallel A} = i$  اور  $B_{\perp A} = j + k$  ملتے ہیں۔ (متوازی اور عمودی اجزاء کو بالترتیب زیر نوشت  $\parallel$  اور  $\perp$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔)

### حیومیٹری

سوال 15: مجموعات اور فرق۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ شکل 11.42 میں  $v_1 + v_2$  اور  $v_1 - v_2$  عمودی ہیں۔ کیا یہ محض ایک اتفاق ہے یا ہم توقع کر سکتے ہیں کہ کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ اور فرق عمودی ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب: یکساں مقدار کے دو سمتیات کا مجموعہ اور تفریق ہر صورت ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہو گا۔

$$(v_1 - v_2) \cdot (v_1 + v_2) = v_1 \cdot v_1 + v_1 \cdot v_2 - v_2 \cdot v_1 - v_2 \cdot v_2 = |v_1|^2 - |v_2|^2$$

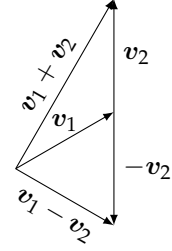
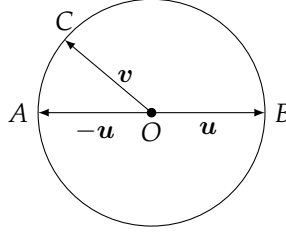
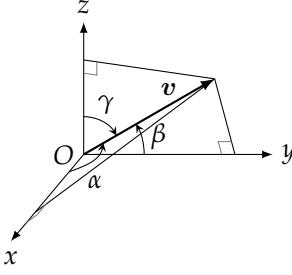
سوال 16: ایک دائرہ جس کا مرکز  $O$  ہے قطر  $AB$  ہے۔ نقطہ  $C$  دائرے پر پایا جاتا ہے (شکل 11.43)۔ دکھائیں کہ  $\vec{CA}$  اور  $\vec{CB}$  عمودی ہوں گے۔

سوال 17: دکھائیں کہ یکساں اضلاع کے متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔

سوال 18: دکھائیں کہ مربع وہ واحد مستطیل ہے جس کے وتر عمودی ہوتے ہیں۔

سوال 19: ثابت کریں کہ ایک متوازی الاضلاع صرف اور صرف اس صورت میں مستطیل ہو گا جب اس کے وتر کی لمبائی ایک جیسی ہو۔  
ترکھان اس حقیقت کو عموماً استعمال کرتا ہے۔

سوال 20: متوازی الاضلاع کے قریبی ضلع  $u$  اور  $v$  ہیں۔ دکھائیں کہ ان کے مشترک راس سے مخالف راس تک وتر، سمتیات  $u$  اور  $v$  کے بیچ زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل 11.44: زاویات رخ اور کوسائن رخ کی تعریف برائے سوال 22۔

شکل 11.43: دائرہ برائے سوال 16

شکل 11.42: سمتیات برائے سوال 15

سوال 21: ایک اہرام کے مربع قاعدہ  $OABC$  کے ضلع کی لمبائی 1 اکائی ہے اور اہرام کی چوٹی  $D$  ہے۔ اہرام کا قد بھی 1 اکائی ہے۔ یوں نقطہ  $D$  ٹھیک وتر  $OB$  کے وسطی نقطہ کے سیدھا اوپر ہو گا۔ قطع  $\vec{OB}$  اور  $\vec{OD}$  کے قع زاویہ تلاش کریں۔  
جواب:  $\tan^{-1} \sqrt{2}$

سوال 22: زاویات رخ اور کوسائن رخ سمتیہ  $v = ai + bj + ck$  کے زاویات رخ  $\alpha$ ،  $\beta$  اور  $\gamma$  کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 11.44)۔

مثبت محور  $x$  اور  $v$  کے قع زاویہ  $\alpha$  ہے  $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ ،

مثبت محور  $y$  اور  $v$  کے قع زاویہ  $\beta$  ہے  $(0 \leq \beta \leq \pi)$ ،

مثبت محور  $z$  اور  $v$  کے قع زاویہ  $\gamma$  ہے  $(0 \leq \gamma \leq \pi)$ ۔

ا. درج ذیل

$$\cos \alpha = \frac{a}{|v|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|v|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|v|}$$

اور  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  دکھائیں۔ ان کوسائن کو کوسائن رخ<sup>22</sup> کہتے ہیں۔

ب. کوسائن رخ اور اکائی سمتیات۔ دکھائیں کہ اگر  $v = ai + bj + ck$  ایک اکائی سمتیہ ہو تب  $a$ ،  $b$  اور  $c$  سمتیہ  $v$  کے کوسائن رخ ہوں گے۔

## سمتیات کے بیچ زاویے

سوال 23 تا سوال 26 میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 23:  $A = 2i + j, \quad B = i + 2j - k$   
جواب: 0.75 ریڈیئن

سوال 24:  $A = 2i - 2j + k, \quad B = 3i + 4k$

سوال 25:  $A = \sqrt{3}i - 7j, \quad B = \sqrt{3}i + j - 2k$   
جواب: 1.77 ریڈیئن

سوال 26:  $A = i + \sqrt{2}j - \sqrt{2}k, \quad B = -i + j + k$

سوال 27 تا سوال 29 میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 27: مثلث  $ABC$  کے اندرونی زاویات۔ مثلث کے راس  $A(-1, 0, 2)$ ،  $B(2, 1, -1)$  اور  $C(1, -2, 2)$  ہیں۔

جواب:  $\angle A \approx 1.24, \angle B \approx 0.66, \angle C \approx 1.24$

سوال 28: سمتیات  $A = 2i + 2j + k$  اور  $B = 2i + 10j - 11k$  کے بیچ زاویہ۔

سوال 29: مکعب کے وتر اور مکعب کی ایک سطح کے وتر کے بیچ زاویہ۔ (اشارہ: ایسا مکعب استعمال کریں جس کے کنارے  $i$ ،  $j$  اور  $k$  ہوں۔)  
جواب: 0.62 ریڈیئن

سوال 30: پانی کی نالی میں ایک جوڑ ہے۔ اس جوڑ سے شمال رخ نالی کی ڈھلوان 10% ہے جبکہ جوڑ سے مشرق رخ نالی کی ڈھلوان 20% ہے۔ اس جوڑ پر نالی کے دو حصوں کے بیچ زاویہ کتنا ہوگا؟

## نظریہ اور مثالیں

سوال 31:

ا. کسی بھی سمتیات  $u$  اور  $v$  کے لئے عدم مساوات  $|u \cdot v| \leq |u||v|$  کو  $u \cdot v = |u||v| \cos \theta$  کی مدد سے دکھائیں۔



ب. کیا کبھی  $|u \cdot v| = |u||v|$  ہو سکتا ہے؟ اگر ہو سکتا ہے تب کب ایسا ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (i) چونکہ  $|\cos \theta| \leq 1$  ہوتا ہے لہذا  $|u||v| \cos \theta \leq |u||v| (1) = |u||v|$  جب  $|\cos \theta| = 1$  ہو یا  $u$  اور  $v$  میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ غیر صفر سمتیات کی صورت میں مساوات تب درست ہوگا جب سمتیات متوازی ہوں یعنی جب  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$  ہو۔

سوال 32: مستوی  $xy$  میں عمومی سمتیہ  $v$  بنائیں۔ اب ان نقطوں  $(x, y)$  کی نشاندہی کریں جن پر  $(xi + yj) \cdot v = 0$  ہو گا۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: اگر  $u_1$  اور  $u_2$  عمودی اکائی سمتیات ہوں اور  $v = au_1 + bu_2$  ہو تب  $v \cdot u_1$  تلاش کریں۔  
جواب:  $a$

سوال 34: ضرب نقطہ میں مشترک اجزاء کی منسوخی حقیقی اعداد کے ضرب میں اگر  $ab_1 = ab_2$  ہو اور  $a$  غیر صفر ہو تب دونوں اطراف  $a$  کو منسوخ کر کے  $b_1 = b_2$  لکھا جاسکتا ہے۔ کیا ضرب نقطہ میں ایسا کرنا ممکن ہوگا؟ یعنی اگر  $A \cdot B_1 = A \cdot B_2$  ہو تب کیا دونوں اطراف  $A$  منسوخ کر کے  $B_1 = B_2$  لکھا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35: فرض کریں  $A$ ،  $B$  اور  $C$  آپس میں عمودی سمتیات ہیں۔ اب  $D = 5A - 6B + 3C$  لیں۔

ا. اگر  $A$ ،  $B$  اور  $C$  اکائی سمتیات ہوں تب  $D$  کی مقدار  $|D|$  تلاش کریں۔

ب. اگر  $|A| = 2$ ،  $|B| = 3$  اور  $|C| = 4$  ہوں تب  $|D|$  کتنا ہوگا؟

جواب: (i)  $\sqrt{70}$ ، (ب)  $\sqrt{568}$

سوال 36: فرض کریں  $A$ ،  $B$  اور  $C$  آپس میں عمودی اکائی سمتیات ہیں۔ اگر  $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$  ہو جہاں  $\alpha$ ،  $\beta$  اور  $\gamma$  غیر سمتی ہیں تب دکھائیں کہ  $\alpha = D \cdot A$ ،  $\beta = D \cdot B$  اور  $\gamma = D \cdot C$  ہوں گے۔

کام

سوال 37: قوت  $F = 5k$  (مقدار 5 نیوٹن) سیدھی لکیر پر مبدا سے نقطہ  $(1, 1, 1)$  تک ایک جسم کو منتقل کرتا ہے (فاصلہ میٹر میں ہے)۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟  
جواب: 5 J

سوال 38: ایک ریل گاڑی کا انجن 6000 ٹن کمیت کی ریل گاڑی کو 602148 N قوت سے کھینچ سکتا ہے۔ ایک افقی سیدھی پٹری پر 605 کلو میٹر فاصلہ طے کر کے یہ انجن کتنا کام کرتا ہے؟

سوال 39: ایک بوجھ کو 20 m لمبی ڈھلوان پر 200 N قوت کھینچتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ یہ قوت  $30^\circ$  کا زاویہ بناتی ہے۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟  
جواب: 3464.10 J

سوال 40: ایک کشتی کے بادبان پر ہوا 2000 N قوت لگاتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ قوت کا زاویہ  $60^\circ$  ہے۔ ایک کلومیٹر فاصل طے کرنے میں یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

### سمتیوں میں خط کی مساواتیں

سوال 41: دکھائیں کہ سمتیہ  $v = ai + bj$  لکیر  $ax + by = c$  کو عمودی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ اس لکیر کی ڈھلوان، اس سمتیہ کی ڈھلوان کے بالکل متناسب کا نفی ہے۔

سوال 42: دکھائی کہ سمتیہ  $v = ai + bj$  لکیر  $bx - ay = c$  کے متوازی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ لکیر کی ڈھلوان اور سمتیہ کی ڈھلوان ایک دوسرے جیسے ہیں۔

سوال 43 تا سوال 46 میں سوال 41 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ  $N$  پر  $v$  کے عمودی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبداء پر اس عمودی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 43:  $N(2,1), v = i + 2j$   
جواب:  $x + 2y = 4$  شکل 11.45

سوال 44:  $N(-1,2), v = -2i - j$

سوال 45:  $N(-2,-7), v = -2i + j$   
جواب:  $-2x + y = -3$  شکل 11.46

سوال 46:  $N(11,10), v = 2i - 3j$

سوال 47 تا سوال 50 میں سوال 42 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ  $N$  پر  $v$  کے متوازی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبداء پر اس متوازی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 47:  $N(-2,1), v = i - j$   
جواب:  $x + y = -1$  شکل 11.47

سوال 48:  $N(0, -2), \quad v = 2i + 3j$

سوال 49:  $N(1, 2), \quad v = -i - 2j$

جواب:  $2x - y = 0$  شکل 11.48

سوال 50:  $N(1, 3), \quad v = 3i - 2j$

### مستوی میں خطوط کے بیچ زاویے

دو مستوی خط جن کے بیچ زاویہ حادہ جو قائمہ نہ ہو وہی ہو گا جو ان خطوط کے عمودی دو سمتیات کے بیچ یا ان خطوط کے متوازی دو سمتیات کے بیچ ہو گا۔ اس حقیقت کے ساتھ سوال 41 یا سوال 42 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے سوال 51 تا سوال 54 میں خطوط کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال 51:  $3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$   
جواب:  $\frac{\pi}{4}$

سوال 52:  $y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

سوال 53:  $\sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$   
جواب:  $\frac{\pi}{6}$

سوال 54:  $x + \sqrt{3}y = 1, \quad (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8$

سوال 55 اور سوال 56 میں خطوط کے بیچ ایک ریڈیئن کے سوا حصہ تک زاویہ حادہ تلاش کریں۔

سوال 55:  $3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$   
جواب:  $0.14$

سوال 56:  $12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$

### قابل تفرق منحنیات کے بیچ زاویہ

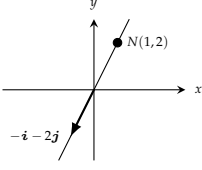
دو قابل تفرق منحنیات کے نقطہ تقاطع پر ان کے بیچ زاویہ سے مراد اس نقطہ پر منحنیات کے مماس کے بیچ زاویہ ہے۔ سوال 57 تا سوال 60 میں منحنیات کے بیچ زاویات دو نقاط تقاطع پر معلوم کریں۔ (آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔)

سوال 57:  $y = \frac{3}{2} - x^2, \quad y = x^2$   
جواب:  $\frac{\pi}{3}$  اور  $\frac{2\pi}{3}$  دونوں نقطوں پر۔

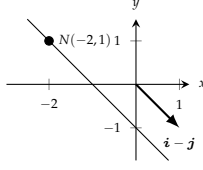
سوال 58:  $x = \frac{3}{4} - y^2, \quad x = y^2 - \frac{3}{4}$

سوال 59:  $y = x^3, \quad x = y^2$   
جواب: نقطہ  $(0, 0)$  پر  $\frac{\pi}{2}$ ؛ نقطہ  $(1, 1)$  پر  $\frac{\pi}{4}$  اور  $\frac{3\pi}{4}$

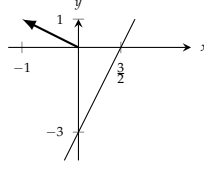
سوال 60:  $y = -x^2, \quad y = \sqrt[3]{x}$



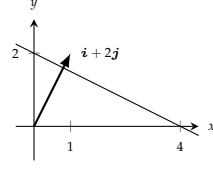
شکل 11.48



شکل 11.47



شکل 11.46



شکل 11.45

## 11.4 صلیبی ضرب

اس حصہ میں سمتیات کے ضرب کی دوسری قسم پر غور کیا جائے گا جس کو صلیبی ضرب کہتے ہیں۔ چونکہ صلیبی ضرب کا حاصل سمتی ہوتا ہے لہذا اس ضرب کو سمتی ضرب<sup>23</sup> بھی کہتے ہیں۔

برقیات، مقناطیسیات، صلیبی ضرب، حرکت سیال اور میکانیات مدار میں قوتوں کے اثرات پر غور میں صلیبی ضرب اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ انہیں صلیبی ضرب کے خواص پر غور کریں۔

### دو سمتیات کا صلیبی ضرب

ہم خلا میں دو غیر صفر سمتیات  $A$  اور  $B$  سے شروع کرتے ہیں۔ غیر متوازی سمتیات  $A$  اور  $B$  سطح کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم دائیہ ہاتھ قاعدہ سے اس سطح پر عمودی اکائی سمتیہ  $n$  منتخب کرتے ہیں۔ یوں سطح میں  $A$  سے  $B$  کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیاں، زاویہ  $\theta$  موڑنے سے، انگوٹھا  $n$  کا رخ دے گا (شکل 11.49)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ  $0 \leq \theta \leq \pi$  لیا جاتا ہے۔ ہم سمتی ضرب  $A \times B$  کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

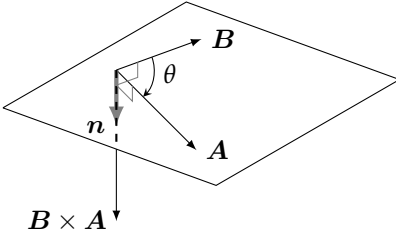
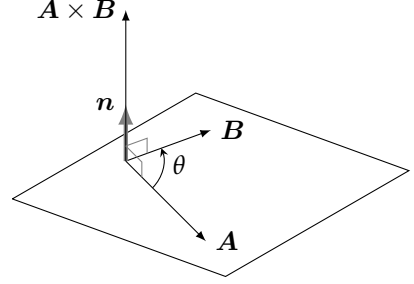
تعریف:

$$(11.27) \quad A \times B = (|A||B| \sin \theta)n$$

□

چونکہ سمتیہ  $A \times B$  اکائی عمودی سمتیہ  $n$  کا غیر سمتی مضرب ہے لہذا یہ  $A$  اور  $B$  دونوں کو عمودی ہوگا۔ سمتیات  $A$  اور  $B$  کے سمتی ضرب کو عموماً  $A$  اور  $B$  کا صلیبی ضرب<sup>24</sup> کہتے ہیں۔ صلیبی ضرب کو صلیب کے نشان  $\times$  سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسی کی بنا یہ صلیبی ضرب کہلاتا ہے۔

vector product<sup>23</sup>  
cross product<sup>24</sup>

شکل 11.50: صلیبی ضرب  $B \times A$ شکل 11.49: صلیبی ضرب  $A \times B$ 

چونکہ 0 اور  $\pi$  کے سائن صفر ہوتے ہیں لہذا ہم مساوات 11.27 میں دو غیر صفر متوازی سمتیات کے صلیبی ضرب کی تعریف 0 لیں گے۔

اگر  $A$  یا  $B$  صفر ہوں تب ہم  $A \times B$  کی قیمت صفر لیں گے۔ یوں دو سمتیات  $A$  اور  $B$  کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب  $A$  اور  $B$  متوازی ہوں یا ان میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ اس طرح غیر صفر سمتیات کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب یہ متوازی ہوں۔

### $A \times B$ بالقابل $B \times A$

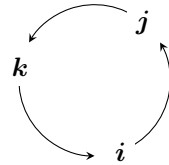
غیر صفر سمتی ضرب میں سمتیات کی ترتیب بدلنے سے حاصل ضرب کی سمت الٹ ہوتی ہے۔ اگر ہم سمتیہ  $B$  سے  $A$  کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیوں کو، زاویہ  $\theta$  موڑیں، تب ہمارا انگٹھا پہلے رخ کا مخالف رخ دے گا (یہاں پہلے رخ سے مراد  $A \times B$  کے حصول میں انگٹھے کا رخ ہے)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ  $0 \leq \theta \leq \pi$  لیا جاتا ہے۔ شکل 11.50 میں ان نتائج کو دکھایا گیا ہے۔ یوں تمام سمتیات  $A$  اور  $B$  کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(11.28) \quad B \times A = -(A \times B)$$

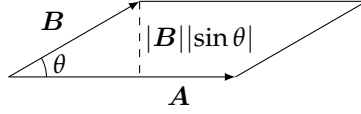
ضرب نقطہ کے برعکس صلیبی ضرب ناقابل تبادلہ<sup>25</sup> ہے۔

صلیبی ضرب کی تعریف  $i$ ،  $j$  اور  $k$  کی جوڑیوں پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جنہیں دکھائے گئے دائرے سے با آسانی یاد رکھا جاسکتا ہے۔

$$(11.29) \quad \begin{aligned} i \times j &= -(j \times i) = k \\ j \times k &= -(k \times j) = i \\ k \times i &= -(i \times k) = j \end{aligned}$$



non commutative<sup>25</sup>



شکل 11.51: متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ ضرب قد کے برابر ہوتا ہے۔

اکائی سمتیات کے ہم صلیبی ضرب صفر ہوں گے:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = (|\mathbf{i}||\mathbf{i}| \sin 0^\circ) \mathbf{n} = ((1)(1)(0)) \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = (|\mathbf{j}||\mathbf{j}| \sin 0^\circ) \mathbf{n} = ((1)(1)(0)) \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = (|\mathbf{k}||\mathbf{k}| \sin 0^\circ) \mathbf{n} = ((1)(1)(0)) \mathbf{n} = 0$$

صلیبی ضرب  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  متوازی الاضلاع کا رقبہ ہو گا

چونکہ  $\mathbf{n}$  اکائی سمتیہ ہے لہذا  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  کی مقدار

$$(11.30) \quad |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta |\mathbf{n}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta$$

ہو گی جو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جس کے ضلع  $\mathbf{A}$  اور  $\mathbf{B}$  ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ  $|\mathbf{A}|$  جبکہ اس کا قد  $|\mathbf{B} \sin \theta|$  ہے (شکل 11.51)۔

قوت مروڑ

نقطہ  $N$  پر چول کے ساتھ سلاخ کا ایک سر منسلک ہے جس کے دوسرے سے پر قوت  $\mathbf{F}$  عمل کرتی ہے۔ چول سے سلاخ کے دوسرے سر تک ہٹاؤ کو سمتیہ  $\mathbf{r}$  ظاہر کرتا ہے (شکل 11.52)۔ قوت مروڑ کی مقدار سے مراد ہم  $\mathbf{r}$  کی لمبائی ضرب قوت کا وہ حصہ جو  $\mathbf{r}$  کو عمودی ہے، لیتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار کو

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار} = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin \theta$$

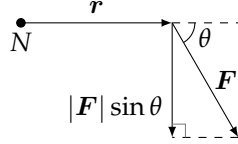
یا  $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$  لکھ سکتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ قاعدہ سے حاصل اکائی سمتیہ  $\mathbf{n}$  استعمال کرتے ہوئے قوت مروڑ سمتیہ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ} = (|\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin \theta) \mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

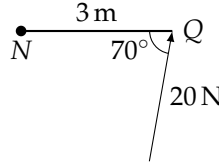
یاد رہے کہ (غیر صفر سمتیات کی صورت میں)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  تب 0 ہوتا ہے جب  $\mathbf{A}$  اور  $\mathbf{B}$  متوازی ہوں۔ قوت مروڑ کی تعریف عین اس حقیقت کے مطابق ہے۔ یوں اگر قوت عین سلاخ کے متوازی عمل کرے تب حاصل قوت مروڑ صفر ہو گا۔

مثال 11.26: قوت مروڑ کی مقدار شکل 11.53 میں درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} |\vec{NQ} \times \mathbf{F}| &= |\vec{NQ}| |\mathbf{F}| \sin 70^\circ && \text{مساوات 11.30} \\ &\approx (3)(20)(0.94) \\ &\approx 56.4 \text{ N m} \end{aligned}$$



شکل 11.52: قوت مردڑ۔



شکل 11.53: قوت مردڑ (مثال 11.26)۔

□

قوانین تلازم اور تقسیم

صلیبی ضرب عام طور غیر تلازمی ہو گا چونکہ  $(A \times B) \times C$  سمتیات  $A$  اور  $B$  کے مستوی میں پایا جاتا ہے جبکہ  $A \times (B \times C)$  سمتیات  $B$  اور  $C$  کے مستوی میں پایا جاتا ہے۔ اس کے باوجود درج ذیل قواعد مطمئن ہوتے ہیں۔

$$(11.31) \quad (rA) \times (sB) = (rs)(A \times B) \quad \text{غیر سمتی قاعدہ تقسیم}$$

$$(11.32) \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{سمتی قاعدہ تقسیم}$$

$$(11.33) \quad (B + C) \times A = B \times A + C \times A \quad \text{سمتی قاعدہ تقسیم}$$

مساوات 11.31 کی ایک مخصوص صورت درج ذیل ہے۔

$$(11.34) \quad (-A) \times B = A \times (-B) = -(A \times B)$$

غیر سمتی قاعدہ تقسیم ثابت کرنے کی خاطر مساوات 11.31 کے دونوں اطراف پر مساوات 11.27 عائد کر کے نتائج کا موازنہ کریں۔ سمتی قاعدہ تقسیم مساوات 11.32 کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس کی حقیقت کو یہاں تسلیم کرتے ہیں۔ اس کا ثبوت ضمیمہ Z میں پیش کیا گیا ہے۔ مساوات 11.33 کو مساوات 11.32 سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 11.32 کے دونوں اطراف کو  $-1$  سے ضرب کر کے حاصل اجزاء کے مقام تبدیل کریں۔

$A \times B$  کا کلیہ بذریعہ مقطع

ہم  $A \times B$  کا حساب کارتیسی ممدی نظام میں  $A$  اور  $B$  سے کرنا چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad B = b_1 i + b_2 j + a_3 k$$

قواعد تقسیم اور  $i$ ،  $j$  اور  $k$  کے قواعد ضرب سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} A \times B &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + a_3 k) \\ &= a_1 b_1 i \times i + a_1 b_2 i \times j + a_1 b_3 i \times k \\ &\quad + a_2 b_1 j \times i + a_2 b_2 j \times j + a_2 b_3 j \times k \\ &\quad + a_3 b_1 k \times i + a_3 b_2 k \times j + a_3 b_3 k \times k \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \end{aligned}$$

مذکورہ بالا مساوات کا آخری حصہ قالب

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

کو کھول کر ملتا ہے۔

یوں اگر سمتیات  $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$  اور  $B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$  ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$(11.35) \quad A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال 11.27:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

□

مثال 11.28:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$



□

مثال 11.29:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

□

مثال 11.30:

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5(1-3) - 3(2+4) + 1(6+4) = 10 - 18 + 10 = 2$$

□

مثال 11.31: صلیبی ضرب  $A \times B$  اور  $B \times A$  درج ذیل سمتیات کے لئے حاصل کریں۔

$$A = 2i + j + k, \quad B = -4i + 3j + k$$

حل:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$= -2i - 6j + 10k$$

$$B \times A = -(A \times B) = 2i + 6j - 10k$$

□

مثال 11.32: ایک مستوی پر نقاط  $P(1, -1, 0)$ ،  $Q(2, 1, -1)$  اور  $R(-1, 1, 2)$  پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کو عمودی سمتیہ تلاش کریں۔

حل: سمتیات  $\vec{PQ}$  اور  $\vec{PR}$  اس سطح میں پائے جائیں گے۔ چونکہ سمتیہ  $\vec{PQ} \times \vec{PR}$  ان دونوں سمتیات کو عمودی ہے لہذا یہ مستوی کو بھی عمودی ہو گا۔ اجزاء کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= (2-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (-1-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \vec{PR} &= (-1-1)\mathbf{i} + (1+1)\mathbf{j} + (2-0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}\end{aligned}$$

□

مثال 11.33: ایک مثلث کے راس  $P(1, -1, 0)$ ،  $Q(2, 1, -1)$  اور  $R(-1, 1, 2)$  ہیں۔ اس مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: سمتیات  $\vec{PQ}$  اور  $\vec{PR}$  جس متوازی الاضلاع کے ضلع ہوں اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}|\vec{PQ} \times \vec{PR}| &= |6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

مثال 11.32

□

مثلث کا رقبہ اس کا نصف  $3\sqrt{2}$  ہو گا۔

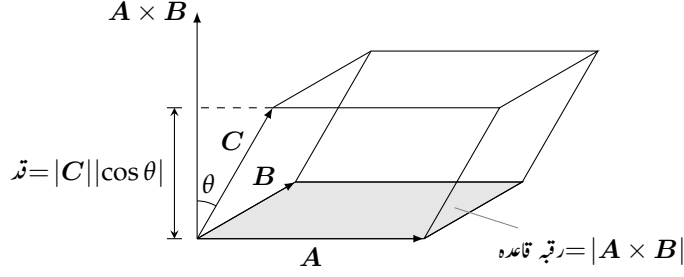
مثال 11.34: سطح  $P(1, -1, 0)$ ،  $Q(2, 1, -1)$  اور  $R(-1, 1, 2)$  کا عمودی اکائی سمتیہ  $\mathbf{n}$  دریافت کریں۔

حل: چونکہ  $\vec{PQ} \times \vec{PR}$  مستوی کو عمودی ہے لہذا  $\mathbf{n}$  کا رخ یہی سمتیہ دے گا۔ ہم اس سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کر کے عمودی اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں۔

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

چونکہ سطح کے دو آپس میں مخالف رخ عمودی سمتیات پائے جاتے ہیں لہذا اس سطح کا دوسرا عمودی اکائی سمتیہ  $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$  ہو گا۔

□



شکل 11.54: مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ ضرب قد کے برابر ہو گا۔

غیر سمتی سے ضرب

ضرب  $(A \times B) \cdot C$  کو  $A$ ،  $B$  اور  $C$  کا غیر سمتی سے ضرب کہتے ہیں جہاں سمتیات کی ترتیب یہی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں (شکل 11.54) کہ غیر سمتی سے ضرب کی مطلق قیمت

$$|(A \times B) \cdot C| = |A \times B| |C| \cos \theta$$

اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم دیتی ہے جس کے اضلاع  $A$ ،  $B$  اور  $C$  ہوں۔ مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ  $|A \times B|$  اور اس کے قد  $|C| \cos \theta$  کا حاصل ضرب نقطہ

$$\begin{aligned} \text{حجم} &= (\text{قد}) \cdot (\text{رقبہ قاعدہ}) \\ &= |A \times B| \cdot |C| \cos \theta \\ &= |(A \times B) \cdot C| \end{aligned}$$

ہو گا۔

سمتیات  $A$  اور  $B$  کی سطح کو شکل 11.54 میں قاعدہ دکھایا گیا ہے۔ ہم سمتیات  $B$  اور  $C$  کی سطح یا سمتیات  $C$  اور  $A$  کی سطح کو قاعدہ لے کر بھی حجم تلاش کر سکتے ہیں۔ چونکہ حجم اہل قیمت ہے لہذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(11.36) \quad (A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$$

اب غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے لہذا مساوات 11.36 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(11.37) \quad (A \times B) \cdot C = A \cdot (A \times C)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر سمتی سے ضرب میں سمتیات کا مقام تبدیل کئے بغیر صلیبی ضرب اور نقطہ ضرب کے مقامات کو بدلا جاسکتا ہے۔

غیر سمتی سہ ضرب کی قیمت مقطع سے حاصل کی جاسکتی ہے:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= A \cdot \left[ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k \right] \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$(11.38) \quad A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال 11.35: سمتیات  $A = i + 2j - k$ ،  $B = -2i + 3k$  اور  $C = 7j - 4k$  ایک مستطیلی متوازی السطوح بناتے ہیں۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -21 - 16 + 13 = -23 \end{aligned}$$

□

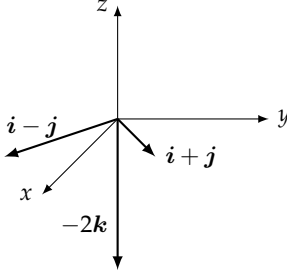
یوں حجم  $|A \cdot (B \times C)| = 23$  ہو گا۔

### سوالات

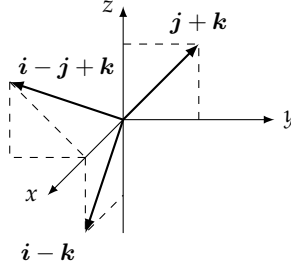
حصہ

سوال 1 تا سوال 8 میں  $A \times B$  اور  $B \times A$  (اگر معین ہو) کی لمبائیاں اور مقدار معلوم کریں۔

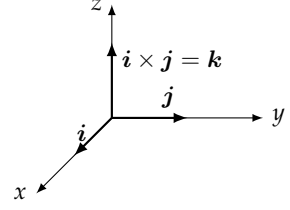
سوال 1:  $A = 2i - 2j - k$ ،  $B = i - k$ ، رخ  $|B \times A| = 3$ ، رخ  $|A \times B| = 3$ ، جواب:  $-\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$



شکل 11.57



شکل 11.56



شکل 11.55

سوال 2:  $A = 2i + 3j$ ,  $B = -i + j$

سوال 3:  $A = 2i - 2j + 4k$ ,  $B = -i + j - 2k$  جواب:  $|A \times B| = 0$ ، کوئی رخ نہیں ہے؛  $|B \times A| = 0$  کوئی رخ نہیں ہے۔

سوال 4:  $A = i + j - k$ ,  $B = 0$

سوال 5:  $A = 2i$ ,  $B = -3j$  جواب:  $|A \times B| = 6$  رخ  $-k$ ؛  $|B \times A| = 6$  رخ  $k$

سوال 6:  $A = i \times j$ ,  $B = j \times k$

سوال 7:  $A = -8i - 2j - 4k$ ,  $B = 2i + 2j + k$  جواب:  $|A \times B| = 6\sqrt{5}$  رخ  $\frac{1}{\sqrt{5}}i - \frac{2}{\sqrt{5}}k$ ؛  $|B \times A| = 6\sqrt{5}$  رخ  $-\frac{1}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}k$

سوال 8:  $A = \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}j + k$ ,  $B = i + j + 2k$

سوال 9 تا سوال 14 میں محدودی محور کے مہدای پر  $A$ ،  $B$  اور  $A \times B$  ترسیم کریں۔

سوال 9:  $A = i$ ,  $B = j$

جواب: شکل 11.55

سوال 10:  $A = i - k$ ,  $B = j$

سوال 11:  $A = i - k$ ,  $B = j + k$

جواب: شکل 11.56

سوال 12:  $A = 2i - j$ ,  $B = i + 2j$

سوال 13:  $A = i + j$ ,  $B = i - j$   
جواب: شکل 11.57

سوال 14:  $A = j + 2k$ ,  $B = i$

سوال 15 تا سوال 18 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. اس مثلث کا رقبہ تلاش کریں جس کے راس نقاط  $P$ ،  $Q$  اور  $R$  ہوں۔

ب. سطح  $PQR$  کا ایک عمودی اکائی سمتیہ تلاش کریں۔

سوال 15:  $P(1, -1, 2)$ ,  $Q(2, 0, -1)$ ,  $R(0, 2, 1)$   
جواب: (i)  $2\sqrt{6}$ , (ب)  $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2i + j + k)$

سوال 16:  $P(1, 1, 1)$ ,  $Q(2, 1, 3)$ ,  $R(3, -1, 1)$

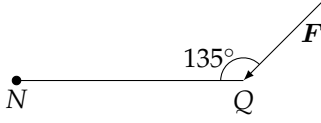
سوال 17:  $P(2, -2, 1)$ ,  $Q(3, -1, 2)$ ,  $R(3, -1, 1)$   
جواب: (i)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , (ب)  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$

سوال 18:  $P(-2, 2, 0)$ ,  $Q(0, 1, -1)$ ,  $R(-1, 2, -2)$

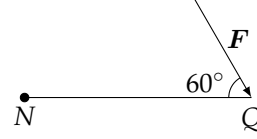
سوال 19: سمتیات  $A = 5i - j + k$ ,  $B = j - 5k$  اور  $C = -15i + 3j - 3k$  لیں۔ ان میں کون سے سمتیات (اگر ہوں) عمودی (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔  
جواب: (i) نہیں (ب)  $A$  اور  $C$

سوال 20: سمتیات  $A = i + 2j - k$ ,  $B = -i + j + k$ ,  $C = i + k$  اور  $D = -\frac{\pi}{2}i - \pi j + \frac{\pi}{2}k$  لیں۔ کون سے سمتیات (اگر ہوں) عمودی اور (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 21 اور سوال 22 میں  $N$  پر  $F$  کا قوت مروز تلاش کریں جہاں  $|\vec{NQ}| = 80 \text{ cm}$  اور  $F = 30 \text{ N}$  ہیں۔



شکل 11.59: خاکہ برائے سوال 22



شکل 11.58: خاکہ برائے سوال 21

سوال 21: خاکہ شکل 11.58 میں دیا گیا ہے۔

جواب:  $4\sqrt{3} \text{ Nm}$

سوال 22: خاکہ شکل 11.59 میں دیا گیا ہے۔

سوال 23 تا سوال 26 میں دکھائیں کہ  $(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$  ہے۔ اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم تلاش کریں جس کے اضلاع  $A$ ،  $B$  اور  $C$  ہوں۔

سوال 23:  $C = 2k$ ،  $B = 2j$ ،  $A = 2i$

جواب: 8

سوال 24:  $C = -i + 2j - k$ ،  $B = 2i + j - 2k$ ،  $A = i - j + k$

سوال 25:  $C = i + 2k$ ،  $B = 2i - j + k$ ،  $A = 2i + j$

جواب: 7

سوال 26:  $C = 2i + 4j - 2k$ ،  $B = -i - k$ ،  $A = i + j - 2k$

نظریہ اور مثالیں

سوال 27: درج ذیل میں کون سے حل صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا.  $|A| = \sqrt{A \cdot A}$

ب.  $A \cdot A = |A|$

ج.  $A \times 0 = 0 \times A = 0$

د.  $A \times (-A) = 0$

$$A \times B = B \times A \quad \text{ا.}$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{و.}$$

$$(A \times B) \cdot B = 0 \quad \text{ز.}$$

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C) \quad \text{ح.}$$

جواب: (ا) درست، (ب) بعض اوقات درست، (ج) درست، (د) درست، (و) بعض اوقات درست، (و) درست، (ز) درست، (ح) درست

سوال 28: درج ذیل میں کون سے ہر صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$A \cdot B = B \cdot A \quad \text{ا.}$$

$$A \times B = -(B \times A) \quad \text{ب.}$$

$$(-A) \times B = -(A \times B) \quad \text{ج.}$$

$$(cA) \cdot B = A \cdot (cB) = c(A \cdot B) \quad \text{د. جہاں } c \text{ مستقل ہے۔}$$

$$c(A \times B) = (cA) \times B = A \times (cB) \quad \text{و. جہاں } c \text{ مستقل ہے۔}$$

$$A \cdot A = |A|^2 \quad \text{و.}$$

$$(A \times A) \cdot A = 0 \quad \text{ز.}$$

$$(A \times B) \cdot A = B \cdot (A \times B) \quad \text{ح.}$$

سوال 29: سمتیات  $A$ ،  $B$  اور  $C$  غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

$$\text{ا. } B \text{ پر } A \text{ کا سمتی تظلیل۔}$$

$$\text{ب. } A \text{ اور } B \text{ کو عمودی سمتیہ۔}$$

$$\text{ج. } C \text{ اور } A \times B \text{ کو عمودی سمتیہ۔}$$

$$\text{د. اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم جس کے اضلاع } A, B \text{ اور } C \text{ ہوں۔}$$



جواب: (ا)  $\text{proj}_B A = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} B$ ، (ب)  $\pm A \times B$ ، (ج)  $\pm(A \times B) \times C$ ، (د)  $|(A \times B) \cdot C|$

سوال 30: سمتیات  $A$ ،  $B$  اور  $C$  غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

ا.  $A \times B$  اور  $A \times C$  کو عمودی سمتیہ۔

ب.  $A + B$  اور  $A - B$  کو عمودی سمتیہ۔

ج. ایک سمتیہ جس کی لمبائی  $|A|$  اور جو  $B$  کے رخ ہو۔

د. اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جس کے اضلاع  $A$  اور  $C$  ہوں۔

سوال 31: فرض کریں  $A$ ،  $B$  اور  $C$  سمتیات ہیں۔ درج ذیل میں کن کا معنی ہے اور کن کا کوئی معنی نہیں ہے؟

ا.  $(A \times B) \cdot C$

ب.  $A \times (B \cdot C)$

ج.  $A \times (B \times C)$

د.  $A \cdot (B \cdot C)$

جواب: (ا) ہاں، (ب) نہیں، (ج) ہاں، (د) نہیں

سوال 32: دکھائیں کہ ماسوائے اخطاطی صورت  $A$  اور  $B$  کے مستوی میں  $(A \times B) \times C$  پایا جائے گا جبکہ  $B$  اور  $C$  کے مستوی میں  $A \times (B \times C)$  پایا جائے گا۔ اخطاطی صورت کسے کہتے ہیں؟

سوال 33: صلیبی ضرب میں منسوخی

کیا  $A \times B = A \times C$  اور  $A \neq 0$  کی صورت میں  $B = C$  ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) نہیں۔ ضروری نہیں کہ  $B$  اور  $C$  برابر ہوں۔ مثال کے طور پر  $i + j \neq -i + j$  ہے لیکن

$$i \times (i + j) = i \times i + i \times j = 0 + k = k$$

$$i \times (-i + j) = -i \times i + i \times j = 0 + k = k$$

سوال 34: دو گنا منسوخی

کیا  $A \times B = A \times C$  اور  $A \cdot B = A \cdot C$  کی صورت میں  $B = C$  ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

## مستوی میں رقبہ

سوال 35 تا سوال 38 میں متوازی الاضلاع کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 35:  $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$   
جواب: 2

سوال 36:  $A(0,0), B(7,3), C(9,8), D(2,5)$

سوال 37:  $A(-1,2), B(2,0), C(7,1), D(4,3)$   
جواب: 13

سوال 38:  $A(-6,0), B(1,-4), C(3,1), D(-4,5)$

سوال 39 تا سوال 42 میں مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 39:  $A(0,0), B(-2,3), C(3,1)$   
جواب:  $\frac{11}{2}$

سوال 40:  $A(-1,-1), B(3,3), C(2,1)$

سوال 41:  $A(-5,3), B(1,-2), C(6,-2)$   
جواب:  $\frac{25}{2}$

سوال 42:  $A(-6,0), B(10,-5), C(-2,4)$

سوال 43: مستوی  $xy$  میں ایک مثلث کے راس  $(0,0)$ ،  $(a_1, a_2)$  اور  $(b_1, b_2)$  ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ معلوم کریں۔ اپنے کام کی وضاحت کریں۔

جواب: اگر  $A = a_1i + a_2j$  اور  $B = b_1i + b_2j$  ہوں تب

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

ہو گا لہذا مثلث کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{2} |A \times B| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر  $xy$  مستوی میں گھڑی کے الٹ رخ  $A$  سے  $B$  چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہو تب  $(+)$  علامت جبکہ گھڑی کے رخ چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہونے کی صورت میں  $(-)$  علامت استعمال ہو گی۔

سوال 44: ایک مثلث کے راس  $(a_1, a_2)$ ،  $(b_1, b_2)$  اور  $(c_1, c_2)$  ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ اخذ کریں۔

## 11.5 فضائیں خطوط اور مستوی

اس حصہ میں غیر سمتی ضرب اور سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے فضا میں خطوط، قطعات اور مستوی کے مساوات لکھنا سکھایا جائے گا۔

## فضا میں خطوط اور قطعات

فرض کریں فضا میں نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  سے گزرتا اور سمتیہ  $v = Ai + Bj + Ck$  کے متوازی ایک خط  $L$  ہے۔ تب  $L$  ان تمام نقطوں  $N(x, y, z)$  کا سلسلہ ہو گا جن کے لئے  $\vec{N_0N}$  سمتیہ  $v$  کے متوازی ہو۔ یعنی  $L$  پر  $N$  صرف اور صرف اس صورت پایا جائے گا جب  $\vec{N_0N}$  سمتیہ  $v$  کا غیر سمتی مضرب ہو۔

سمتیہ  $v$  کا متوازی خط جو نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  سے گزرتا ہو کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$(11.39) \quad \vec{N_0N} = tv, \quad -\infty < t < \infty$$

مساوات 11.39 کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر لکھتے ہوئے تین غیر سمتی مساوات حاصل ہوں گے جن میں مقدار معلوم  $t$  پایا جائے گا:

$$\begin{aligned} (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k &= t(Ai + Bj + Ck) && \text{اتساع مساوات 11.39} \\ x - x_0 = tA, \quad y - y_0 = tB, \quad z - z_0 = tC &&& \text{مطابقتی اجزاء} \end{aligned}$$

ان مساوات سے وقفہ  $-\infty < t < \infty$  پر سمتیہ  $v$  کے متوازی نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  سے گزرتے خط کی درج ذیل معیاری مقدار معلوم مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$(11.40) \quad x = x_0 + tA, \quad y = y_0 + tB, \quad z = z_0 + tC, \quad -\infty < t < \infty$$

مثال 11.36: سمتیہ  $v = 2i + 4j - 2k$  کے متوازی خط جو نقطہ  $(-2, 0, 4)$  سے گزرتا ہو کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: دی گئی معلومات کو مساوات 11.40 میں پر کر کے خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x = -2 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 4 - 2t$$

□

مثال 11.37: نقطہ  $N(-3, 2, -3)$  اور  $Q(1, -1, 4)$  سے گزرتے ہوئے خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: ان نقطوں کے بیچ خط کا متوازی سمتیہ

$$\vec{NQ} = (1 - (-3))\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (4 - (-3))\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

ہے جس کو مساوات 11.40 میں  $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$  کے ساتھ لیتے ہوئے مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $t = 0$  پر  $x = -3 + 4(0) = -3$ ،  $y = 2 - 3(0) = 2$  اور  $z = -3 + 7(0) = -3$  یعنی ابتدائی نقطہ  $(-3, 2, -3)$  حاصل ہوتا ہے۔ ہم نقطہ  $Q(1, -1, 4)$  کو بھی ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے درج ذیل مساوات حاصل ہو گا۔

$$x = 1 + 4t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 4 + 7t$$

اب  $t = 0$  پر  $x = 1$ ،  $y = -1$  اور  $z = 4$  یعنی ابتدائی نقطہ  $(1, -1, 4)$  حاصل ہوتا ہے۔ درج بالا دونوں مساوات درست ہیں۔ ان کے ابتدائی نقطے مختلف ہیں۔ □

دو نقطوں کے بیچ خطی قطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کرنے کی خاطر ہم پہلے ان نقطوں کے بیچ خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم قطع کے آخری سروں پر  $t$  کی قیمتیں تلاش کر کے  $t$  کو ان قیمتوں کے بیچ بند وقفہ پر رہنے کا پابند بناتے ہیں۔ خط کی مساوات بشمول پابند وقفہ قطع کی مقدار معلوم مساوات ہو گی۔

مثال 11.38: نقطہ  $N(-3, 2, -3)$  اور  $Q(1, -1, 4)$  کے بیچ قطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے نقاط  $N$  اور  $Q$  سے گزرتے ہوئے خط کی مساوات تلاش کرنی ہو گی۔ ہم مثال 11.37 میں اس کو حاصل کر چکے ہیں:

$$(11.41) \quad x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t$$

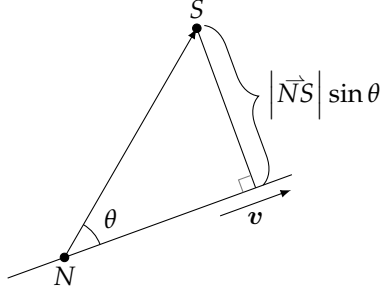
درج ذیل نقطہ  $t = 0$  پر نقطہ  $N(-3, 2, -3)$  اور  $t = 1$  پر نقطہ  $Q(1, -1, 4)$  دیتا ہے۔

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

مساوات 11.41 بشمول  $0 \leq t \leq 1$  کی پابندی قطع کی مقدار معلوم مساوات ہو گی:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

□



شکل 11.60: نقطہ S سے سمتیہ  $v$  کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ۔

فضا میں ایک نقطہ سے ایک خط تک فاصلہ

نقطہ S سے سمتیہ  $v$  کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ  $d$  جاننے کی خاطر ہم اس خط کے عمودی قطع  $\vec{NS}$  کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔ شکل 11.60 سے واضح ہے کہ یہ لمبائی  $|\vec{NS}| \sin \theta$  یعنی  $\frac{|\vec{NS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$  ہوگی۔

$$(11.42) \quad d = \frac{|\vec{NS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \quad \text{لکیر سے نقطے کا فاصلہ}$$

مثال 11.39: نقطہ  $S(1, 1, 5)$  سے درج ذیل لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

$$L: \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2t$$

حل: ہم  $\mathbf{v} = i - j + 2k$  کے متوازی لکیر L جو  $N(1, 3, 0)$  سے گزرتی ہو کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اب

$$\vec{NS} = (1 - 1)i + (1 - 3)j + (5 - 0)k = -2j + 5k$$

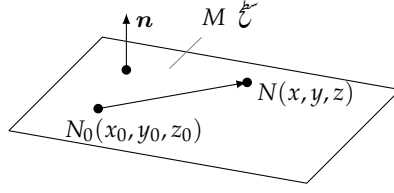
اور

$$\vec{NS} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i + 5j + 2k$$

لیتے ہوئے مساوات 11.42 درج ذیل فاصلہ دیتی ہے۔

$$d = \frac{|\vec{NS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{1 + 25 + 4}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

□



شکل 11.61: سطح میں نقاط  $N_0$  اور  $N$  کے بیچ سمتی قطع اور سطح کا قائمہ سمتیہ  $n$  ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

فضا میں مستوی کی مساوات

فرض کریں سطح  $M$  نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  سے گزرتا ہے اور اس سطح کو سمتیہ  $n = Ai + Bj + Ck$  قائمہ ہے۔ تب ان تمام نقطوں  $N(x, y, z)$  کا سلسلہ، جن کے لئے  $N_0N$  اور  $n$  ایک دوسرے کے عمودی ہوں،  $M$  ہو گا (شکل 11.61)۔  
یعنی  $N$  صرف اور صرف اس صورت  $M$  پر واقع ہو گا جب  $n \cdot \vec{N_0N} = 0$  ہو۔ یہ مساوات

$$(Ai + Bj + Ck) \cdot [(x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k] = 0$$

یا

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

کے مترادف ہے۔

نقطہ  $N_0(x_0, y_0, z_0)$  سے گزرتا ہوا اور  $n$  کو عمودیت سطح کی مساوات

$$(11.43) \quad n \cdot \vec{N_0N} = 0 \quad \text{سمتی مساوات}$$

$$(11.44) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{آزادی مساوات}$$

مثال 11.40: نقطہ  $N(-3, 0, 7)$  سے گزرتا سطح جو  $n = 5i + 2j - k$  کو عمودی ہو کی مساوات تلاش کریں۔

حل:

$$5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) = 0 \quad \text{مساوات 11.43}$$

$$5x + 15 + 2y - z + 7 = 0$$

$$5x + 2y - z = -22$$

□

آپ مثال 11.40 میں دیکھ سکتے ہیں کہ  $n = 5i + 2j - k$  کے عددی سر مساوات  $5x + 2y - z = -22$  میں  $x$  ،  $y$  اور  $z$  کے عددی سر کی طور پر ابھرتے ہیں۔ ایسا واقعاتی طور پر نہیں ہوا بلکہ مساوات 11.44 کو  $Ax + By + Cz = D$  لکھنا ممکن ہے جہاں  $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$  ہو گا۔ یوں

$$Ax + By + Cz = D \quad \text{اور} \quad Ai + Bj + Ck$$

ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

مثال 11.41: تین نقطے سطح تعین کرتے ہیں  
نقاط  $A(0, 0, 1)$  ،  $B(2, 0, 0)$  اور  $C(0, 3, 0)$  سے گزرتے ہوئے مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم ان نقاط کو استعمال کرتے ہوئے سطح کا عمودی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3i + 2j + 6k$$

ہم اس عمودی سمتیہ کے اجزاء اور (سطح پر کسی بھی) نقطہ  $(0, 0, 1)$  کو مساوات 11.44 میں پر کر کے مستوی کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3(x - 0) + 2(y - 0) + 6(z - 1) &= 0 \\ 3x + 2y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

□

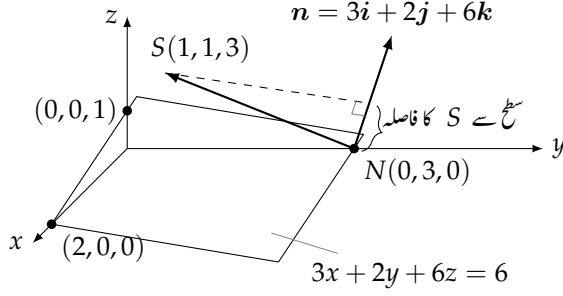
مثال 11.42: سطح اور کلیئر کی انقطاع  
وہ نقطہ دریافت کریں جہاں خط

$$x = \frac{8}{3} + 2t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + t$$

مستوی  $3x + 2y + 6z = 6$  کو قطع کرتا ہو۔

حل: نقطہ

$$\left( \frac{8}{3} + 2t, -2t, 1 + t \right)$$



شکل 11.62: نقطہ S سے سطح تک فاصلہ  $\vec{NS}$  کی  $n$  پر سمتیہ تقطیل کی لمبائی کے برابر ہو گا۔

اس سطح میں پایا جاتا ہے جو مستوی کی (درج ذیل) مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1+t) &= 6 \\ 8 + 6t - 4t + 6 + 6t &= 6 \\ 8t &= -8 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

نقطہ تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$(x, y, z)|_{t=-1} = \left(\frac{8}{3} - 2, 2, 1 - 1\right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$$

□

مثال 11.43: نقطہ سے مستوی تک فاصلہ

نقطہ  $S(1, 1, 3)$  سے سطح  $3x + 2y + 6z = 6$  تک فاصلہ کتنا ہے؟

حل: ہم مستوی میں نقطہ  $N$  تلاش کر کے سمتیہ  $\vec{NS}$  کا  $n$  پر تقطیل معلوم کر کے فاصلہ حاصل کرتے ہیں (شکل 11.62)۔

مساوات  $3x + 2y + 6z = 6$  کے سمدی سروں سے درج ذیل عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$n = 3i + 2j + 6k$$

مستوی کی مساوات سے مستوی میں نقاط حاصل کرتے ہیں۔ ان میں محوری قطعات معلوم کرنا بہت آسان ہوتا ہے۔ اگر ہم قطع  $y$  کو  $N$  لیں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \vec{NS} &= (1-0)i + (1-3)j + (3-0)k \\ &= i - 2j + 3k \end{aligned}$$

$$|n| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$



نقطہ S سے سطح تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} d &= \left| \vec{NS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \\ &= \left| (i - 2j + 3k) \cdot \left( \frac{3}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k \right) \right| \\ &= \left| \frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{18}{7} \right| = \frac{17}{7} \end{aligned}$$

□

سطحوں کے بیچ زاویات؛ خطوط تقاطع

دو متقاطع سطحوں کے بیچ زاویہ سے مراد ان کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ عادیہ ہے (شکل 11.63)۔

مثال 11.44: سطح  $3x - 6y - 2z = 15$  اور سطح  $2x + y - 2z = 5$  کے بیچ زاویہ دریافت کریں۔

حل: ان سطحوں کے عمودی سمتیات درج ذیل ہیں۔

$$\vec{n}_1 = 3i - 6j - 2k, \quad \vec{n}_2 = 2i + j - 2k$$

ان کے بیچ زاویہ درج ذیل ہو گا۔

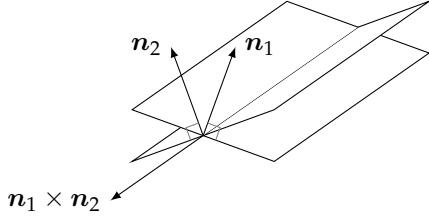
$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left( \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right) && \text{مساوات 11.17} \\ &= \cos^{-1} \left( \frac{4}{21} \right) \\ &\approx 1.38 \text{ ریڈین} \end{aligned}$$

□

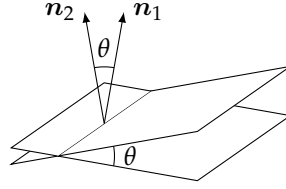
مثال 11.45: سطح  $3x - 6y - 2z = 15$  اور سطح  $2x + y - 2z = 5$  کے خط تقاطع کی مساوات تلاش کریں۔

حل: سطحوں کے عمودی سمتیات  $\vec{n}_1$ ،  $\vec{n}_2$  خط تقاطع کے عمودی ہوں گے لہذا خط تقاطع اور  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے (شکل 11.64)۔ اس کو دوسری نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  خط تقاطع کے متوازی ہو گا۔ موجودہ مثال میں درج ذیل ہو گا۔

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14i + 2j + 15k$$



شکل 11.64: سطحوں کا خط تقاطع کا سطحوں کے عمودی سمتیات کے ساتھ تعلق۔



شکل 11.63: دو سطحوں کے بیچ زاویہ، ان سطحوں کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

□

سمتیہ  $14i + 2j + 15k$  کا ہر غیر صفر غیر سمتی مضرب بھی درست جواب ہو گا۔

مثال 11.46: اس لکیر کی مساوات تلاش کریں جس پر سطح  $3x - 6y - 2z = 15$  اور سطح  $2x + y - 2z = 5$  ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

حل: ہم اس لکیر کے متوازی خط کی مساوات اور لکیر پر ایک نقطہ تلاش کر کے مساوات 11.40 استعمال کرتے ہیں۔

ہم مثال 11.45 میں خط تقاطع کا متوازی خط  $v = 14i + 2j + 15k$  تلاش کر چکے ہیں۔ خط پر نقطہ معلوم کرنے کی خاطر ہم دونوں سطحوں کا کوئی بھی مشترک نقطہ لے سکتے ہیں۔ یوں  $z = 0$  لے کر دونوں سطحوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کر کے نقطہ  $(3, -1, 0)$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں خط تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$x = 3 + 14t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 15t$$

□

### سوالات

#### خطوط اور خطی قطعات

سوال 1 تا سوال 12 میں خطوط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال 1: سمتیہ  $i + j + k$  کا متوازی اور نقطہ  $N(3, -4, -1)$  سے گزرتا خط۔

سوال 2: نقاط  $N(1, 2, -1)$  اور  $Q(-1, 0, 1)$  سے گزرتا خط۔

سوال 3: نقاط  $N(-2, 0, 3)$  اور  $Q(3, 5, -2)$  سے گزرتا خط۔

سوال 4: نقاط  $N(1, 2, 0)$  اور  $Q(1, 1, -1)$  سے گزرتا خط۔

سوال 5: سمتیہ  $2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  کا متوازی اور مبدا سے گزرتا خط۔

سوال 6: نقطہ  $N(3, -2, 1)$  سے گزرتا اور لکیر  $x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 3t$  کا متوازی خط۔

سوال 7: محور  $z$  کا متوازی لکیر  $(1, 1, 1)$  کا متوازی خط۔

سوال 8: نقطہ  $(2, 4, 5)$  سے گزرتا اور سطح  $3x + 7y - 5z = 21$  کا قائمہ خط۔

سوال 9: نقطہ  $(0, -7, 0)$  سے گزرتا اور سطح  $x + 2y + 2z = 13$  کا قائمہ خط۔

سوال 10: نقطہ  $(2, 3, 0)$  سے گزرتا خط جو سمتیات  $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  اور  $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  کا قائمہ ہو۔

سوال 11: محور  $x$

سوال 12: محور  $z$

سوال 13 تا سوال 20 میں دیے گئے نقطوں کے بیچ قطعات کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ محدود محور کھینچ کر قطعات دکھائیں۔ بڑھتے ہوئے  $t$  کے رخ کی نشاندہی کریں۔

سوال 13:  $(0, 0, 0)$ ،  $(1, 1, 3/2)$

سوال 14:  $(0, 0, 0)$ ،  $(1, 0, 0)$

سوال 15:  $(1, 0, 0)$ ،  $(1, 1, 0)$

سوال 16:  $(1, 1, 0)$ ،  $(1, 1, 1)$

سوال 17:  $(0, 1, 1)$ ،  $(0, -1, 1)$

سوال 18:  $(0, 2, 0)$ ،  $(3, 0, 0)$

سوال 19:  $(2, 0, 2)$ ،  $(0, 2, 0)$

سوال 20:  $(1, 0, -1)$  ،  $(0, 3, 0)$

سطحیں

سوال 21 تا سوال 28 میں سطحیں کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 21: نقطہ  $N_0(0, 2, -1)$  سے گزرتا سمتیہ  $n = 3i - 2j - k$  کا عمودی سطح۔

سوال 22: نقطہ  $(1, -1, 3)$  سے گزرتا سمتیہ  $3x + y + z = 7$  کا متوازی سطح۔

سوال 23: نقاط  $(1, 1, -1)$  ،  $(2, 0, 2)$  اور  $(0, -2, 1)$  سے گزرتا سطح۔

سوال 24: نقاط  $(2, 4, 5)$  ،  $(1, 5, 7)$  اور  $(-1, 6, 8)$  سے گزرتا سطح۔

سوال 25: نقطہ  $N_0(2, 4, 5)$  سے گزرتا لکیر  $x = 5 + t$ ،  $y = 1 + 3t$ ،  $z = 4t$  کا قائمہ سطح۔

سوال 26: نقطہ  $A(1, -2, 1)$  سے گزرتا ہوا سطح جو مہدا سے  $A$  تک سمتیہ کا قائمہ ہو۔

سوال 27: خطوط  $x = 2t + 1$ ،  $y = 3t + 2$ ،  $z = 4t + 3$  اور  $x = s + 2$ ،  $y = 2s + 4$ ،  $z = -4s - 1$  کا نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

سوال 28: خطوط  $x = t$ ،  $y = -t + 2$ ،  $z = t + 1$  اور  $x = 2s + 2$ ،  $y = s + 3$ ،  $z = 5s + 6$  کا نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

سوال 29 اور سوال 30 میں مقطع خطوط سطح تعین کرتے ہیں۔ اس سطح کو تلاش کریں۔

سوال 29:

$$L_1: x = -1 + t, y = 2 + t, z = 1 - t, -\infty < t < \infty$$

$$L_2: x = 1 - 4s, y = 1 + 2s, z = 2 - 2s, -\infty < s < \infty$$

سوال 30:

$$L_1: x = t, y = 3 - 3t, z = -2 - t, -\infty < t < \infty$$

$$L_2: x = 1 + s, y = 4 + s, z = -1 + s, -\infty < s < \infty$$

سوال 31: سطحیں  $2x + y - z = 3$ ,  $x + 2y + z = 2$  کے خط تقاطع کا قائمہ سطح جو نقطہ  $N_0(2, 1, -1)$  سے گزرتا ہو تلاش کریں۔

سوال 32: سطح  $4x - y + 2z = 7$  کا قائمہ اور نقاط  $N_1(1, 2, 3)$ ،  $N_2(3, 2, 1)$  سے گزرتا سطح تلاش کریں۔

### فاصلہ

سوال 33 تا سوال 38 میں نقطہ اور لکیر کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔

سوال 33:  $(0, 0, 12)$ :  $x = 4t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = 2t$

سوال 34:  $(0, 0, 0)$ :  $x = 5 + 3t$ ,  $y = 5 + 4t$ ,  $z = -3 - 5t$

سوال 35:  $(2, 1, 3)$ :  $x = 2 + 2t$ ,  $y = 1 + 6t$ ,  $z = 3$

سوال 36:  $(2, 1, -1)$ :  $x = 2t$ ,  $y = 1 + 2t$ ,  $z = 2t$

سوال 37:  $(3, -1, 4)$ :  $x = 4 - t$ ,  $y = 3 + 2t$ ,  $z = -5 + 3t$

سوال 38:  $(-1, 4, 3)$ :  $x = 10 + 4t$ ,  $y = -3$ ,  $z = 4t$

سوال 39 تا سوال 44 میں نقطہ سے لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

سوال 39:  $(2, -3, 4)$ ,  $x + 2y + 2z = 13$

سوال 40:  $(0, 0, 0)$ ,  $3x + 2y + 6z = 6$

سوال 41:  $(0, 1, 1)$ ,  $4y + 3z = -12$

سوال 42:  $(2, 2, 3)$ ,  $2x + y + 2z = 4$

سوال 43:  $(0, -1, 0)$ ,  $2x + y + 2z = 4$

سوال 44:  $(1, 0, -1)$ ,  $-4x + y + z = 4$

سوال 45: سطح  $x + 2y + 6z = 1$  سے سطح  $x + 2y + 6z = 10$  تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 46: لکیر  $x = 2 + t$ ,  $y = 1 + t$ ,  $z = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$  سے سطح  $x + 2y + 6z = 10$  تک فاصلہ معلوم کریں۔

زاویاتے۔

سوال 47 اور سوال 48 میں سطحوں کے بیچ زاویات تلاش کریں۔ آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

$$\text{سوال 47: } x + y = 1, \quad 2x + y - 2z = 2$$

$$\text{سوال 48: } 5x + y - z = 10, \quad x - 2y + 3z = -1$$

سوال 49 تا سوال 52 میں سطحوں کے بیچ زاویہ حادثہ کو کیلکولیٹر کی مدد سے تلاش کریں۔ جواب ایک ریڈیئن کے سوال حصہ تک درست ہو۔

$$\text{سوال 49: } 2x + 2y + 2z = 3, \quad 2x - 2y - z = 5$$

$$\text{سوال 50: } x + y + z = 1, \quad z = 0$$

$$\text{سوال 51: } 2x + 2y - z = 3, \quad x + 2y + z = 2$$

$$\text{سوال 52: } 4y + 3z = -12, \quad 3x + 2y + 6z = 6$$

مقطع خطوط اور سطحیں

سوال 53 تا سوال 56 میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں دی گئی لکیر سطح کو مس کرتی ہے۔

$$\text{سوال 53: } x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t; \quad 2x - y + 3z = 6$$

$$\text{سوال 54: } x = 2, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -2 - 2t; \quad 6x + 3y - 4z = -12$$

$$\text{سوال 55: } x = 1 + 2t, \quad y = 1 + 5t, \quad z = 3t; \quad x + y + z = 2$$

$$\text{سوال 56: } x = -1 + 3t, \quad y = -2, \quad z = 5t; \quad 2x - 3z = 7$$

سوال 57 تا سوال 60 میں سطحوں کے خط تقاطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

$$\text{سوال 57: } x + y + z = 1, \quad x + y = 2$$

$$\text{سوال 58: } 3x - 6y - 2z = 3, \quad 2x + y - 2z = 2$$

$$\text{سوال 59: } x - 2y + 4z = 2, \quad x + y - 2z = 5$$

$$\text{سوال 60: } 5x - 2y = 11, \quad 4y - 5z = -17$$

فضا میں دو ہمسطی خطوط متوازی ہوں گے، یا ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔ غیر ہمسطی خطوط ایک دوسرے کے غیر متوازی ہوں گے اور یہ ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔ سوال 61 اور سوال 62 میں تین لکیریں دی گئی ہیں۔ ایک وقت میں دو خطوط لیتے ہوئے دیکھیں آیا یہ متوازی ہیں، ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں یا یہ غیر ہمسطی ہیں؟

سوال 61:

$$L_1 : x = 3 + 2t, y = -1 + 4t, z = 2 - t, -\infty < t < \infty$$

$$L_2 : x = 1 + 4s, y = 1 + 2s, z = -3 + 4s, -\infty < s < \infty$$

$$L_3 : x = 3 + 2r, y = 2 + r, z = -2 + 2r, -\infty < r < \infty$$

سوال 62:

$$L_1 : x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t, -\infty < t < \infty$$

$$L_2 : x = 2 - s, y = 3s, z = 1 + s, -\infty < s < \infty$$

$$L_3 : x = 5 + 2r, y = 1 - r, z = 8 + 3r, -\infty < r < \infty$$

### نظریہ اور مثالیں

سوال 63: نقطہ  $N_1(2, -4, 7)$  سے گزرتا خط جو  $v_1 = 2i - j + 3k$  کے متوازی ہو کی مقدار معلوم مساوات کو مساوات 11.40 کی مدد سے دریافت کریں۔ اس کے بعد نقطہ  $N_2(3, -2, 0)$  اور سمتیہ  $v_2 = -i + \frac{1}{2}j - \frac{3}{2}k$  استعمال کرتے ہوئے اس کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

سوال 64: نقطہ  $N_1(4, 1, 5)$  سے گزرتی  $n_1 = i - 2j + k$  کی قائمہ سطح کی مساوات کو مساوات 11.44 کی مدد سے حاصل کریں۔ اب نقطہ  $N_2(3, -2, 0)$  اور عمودی سمتیہ  $n_2 = -\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}j - \sqrt{2}k$  استعمال کرتے ہوئے اس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 65: وہ نقاط تلاش کریں جن پر لکیر  $x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$  محوری مستوی کو مس کرتی ہو۔ جواب تک پہنچنے کے لئے اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال 66: سطح  $z = 3$  میں اس خط کی مساوات تلاش کریں جو  $i$  کے ساتھ  $\frac{\pi}{6}$  ریڈین اور  $i$  کے ساتھ  $\frac{\pi}{3}$  ریڈین زاویہ بناتا ہو۔ اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال 67: کیا خط  $x = 1 - 2t, y = 2 + 5t, z = -3t$  سطح  $2x + y - z = 8$  کا متوازی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 68: آپ کس طرح بتا سکتے ہیں کہ سطح  $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$  اور سطح  $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$  ایک دوسرے کے متوازی یا قائمہ ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 69: دو سطحوں کا خط تقاطع  $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3 + 2t$  ہے۔ ان سطحوں کی مساوات تلاش کریں۔ مساوات کی صورت  $Ax + By + Cz = D$  ہو۔

سوال 70: وہ سطح دریافت کریں جس مبدا سے گزرتا ہو اور سطح  $2x + 3y + z = 12$  کا قائمہ ہو۔ آپ کیسے جانتے ہیں کہ یہ سطحیں ایک دوسرے کے قائمہ ہیں؟

سوال 71: غیر صفر اعداد  $a, b, c$  کے لئے  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  کی ترسیم ایک سطح ہوگی۔ کن سطحوں کی مساوات ایسی ہوگی؟

سوال 72: فرض کریں  $L_1$  اور  $L_2$  غیر تقاطع، غیر متوازی خطوط ہیں۔ کیا کوئی غیر صفر سمتیہ ان دونوں کا قائمہ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

### کمپیوٹر کا استعمال

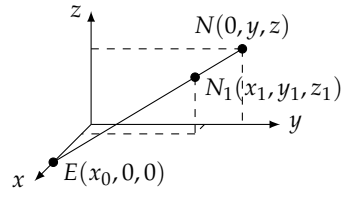
سوال 73: کمپیوٹر تصویر کشی ہم تین بعدی اجسام کو عموماً ایک مستوی پر ظاہر کرتے ہیں۔ فرض کریں آپ کی آنکھ  $E(x_0, 0, 0)$  پر ہے اور ہم نقطہ  $N_1(x_1, y_1, z_1)$  کو مستوی  $yz$  پر ظاہر کرنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم  $E$  سے  $N_1$  تک شعاع استعمال کرتے ہوئے  $N_1$  کی تکمیل مستوی پر بناتے ہیں۔ یوں مستوی ہر  $N_1$  بطور  $N(0, y, z)$  نظر آئے گا۔ ہمیں بطور تریسی تخلیق کار معلوم  $E$  اور  $N_1$  سے  $y$  اور  $z$  حاصل کرنا ہے (شکل 11.65)۔

ا.  $\vec{EN}_1$  اور  $\vec{EN}$  کے تعلق کی سمتی مساوات لکھیں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے  $y$  اور  $z$  کو  $x_1, x_0, y_1$  اور  $z_1$  کی صورت میں لکھیں۔

ب. جزو-ا میں حاصل نتائج کو پرکھنے کی خاطر  $x_1 = 0$  اور  $x_1 = x_0$  پر  $y$  اور  $z$  کا رویہ دیکھیں اور  $x_0 \rightarrow \infty$  کرتے ہوئے دیکھیں کیا ہوتا ہے۔

سوال 74: کمپیوٹر تصویر کشی کے ایک مسئلہ پر غور کرتے ہیں۔ آپ کی آنکھ  $(4, 0, 0)$  پر ہے۔ آپ مثلث چادر کو دیکھ رہے ہیں جس کے راس  $(1, 0, 1)$ ،  $(1, 1, 0)$  اور  $(-2, 2, 2)$  ہیں۔ نقطہ  $(1, 0, 0)$  سے  $(0, 2, 2)$  تک قطع اس چادر کو چھیر کر گزرتا ہے۔ اس قطع کا کون سا حصہ نظر سے اوجھل ہوگا؟





شکل 11.65: تقابلی (سوال 73)

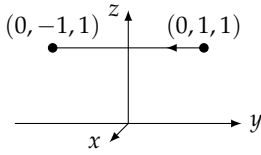
## 11.6 نلکی اور دو درجی سطحیں

واحد متغیر کے تفاعل کی احصاء میں ہم نے خطوط سے شروع کیا اور خطوط کے بارے میں اپنا علم استعمال کرتے ہوئے مستوی قوسین کا مطالعہ کیا۔ ہم نے مماس پر غور کیا اور دیکھا کہ کسی بھی قابل تفرق منحنی کے چھوٹے حصہ کو خطی تصور کیا جاسکتا ہے۔ خاص اہمیت کے حامل منحنیات میں مخروطی قطعات، اور دو درجی منحنیات شامل ہیں جنہیں متغیر  $x$  اور  $y$  کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

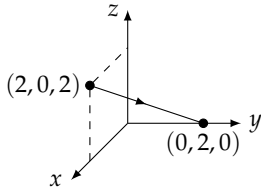
ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل کی احصاء کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اسی طرح کی راہ پر چلتے ہیں۔ ہم دو بعدی سطح سے شروع کر کے اس سطح کے بارے میں اپنا علم استعمال کر کر فضا میں تین بعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔ خاص اہمیت کے حامل سطحوں میں نلکیاں اور دو درجی سطحیں شامل ہیں جنہیں  $x$ ،  $y$ ،  $z$  کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

## جوابات

صفحة 1398 11.5



$$x = 2 - 2t, y = 2t, z = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1 \quad (19)$$



$$3x - 2y - z = -3 \quad (21)$$

$$7x - 5y - 4z = 6 \quad (23)$$

$$x + 3y + 4z = 34 \quad (25)$$

$$(1, 2, 3), -20x + 12y + z = 7 \quad (27)$$

$$y + z = 3 \quad (29)$$

$$x - y + z = 0 \quad (31)$$

$$2\sqrt{30} \quad (33)$$

$$0 \quad (35)$$

$$\frac{9\sqrt{42}}{7} \quad (37)$$

$$3 \quad (39)$$

$$19/5 \quad (41)$$

$$x = 3 + t, y = -4 + t, z = -1 + t \quad (1)$$

$$x = -2 + 5t, y = 5t, z = 3 - 5t \quad (3)$$

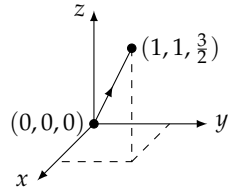
$$x = 0, y = 2t, z = t \quad (5)$$

$$x = 1, y = 1, z = 1 + t \quad (7)$$

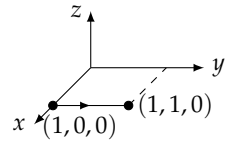
$$x = t, y = -7 + 2t, z = 2t \quad (9)$$

$$x = t, y = 0, z = 0 \quad (11)$$

$$x = t, y = t, z = 3/2t, 0 \leq t \leq 1 \quad (13)$$



$$x = 1, y = 1 + t, z = 0, -1 \leq t \leq 0 \quad (15)$$



$$x = 0, y = 1 - 2t, z = 1, 0 \leq t \leq 1 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2t, y = -4 - t, z = 7 + 3t; \\ x &= -2 - t, y = -2 + t/2, z = 1 - 3/2t \end{aligned} \quad (63)$$

$$(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (-1, 0, -3), (1, -1, 0) \quad (65)$$

$$\begin{aligned} &\text{بہت سارے مختلف جوابات ممکن ہیں۔ ان میں سے ایک جواب ہے:} \\ x + y &= 3, 2y + z = 7 \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} &\text{ماسوائے ان سطحوں کے جو مہداسے گزرتے ہوں یا جو محدودی محور کے} \\ &\text{متوازی ہوں تمام سطحوں کو } x/a + y/b + z/c = 1 \quad (71) \\ &\text{سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔} \end{aligned}$$

$$5/3 \quad (43)$$

$$9/\sqrt{41} \quad (45)$$

$$\pi/4 \quad (47)$$

$$1.76 \text{ ریڈیئن} \quad (49)$$

$$0.82 \text{ ریڈیئن} \quad (51)$$

$$(3/2, -3/2, 1/2) \quad (53)$$

$$(1, 1, 0) \quad (55)$$

$$x = 1 - t, y = 1 + t, z = -1 \quad (57)$$

$$x = 4, y = 3 + 6t, z = 1 + 3t \quad (59)$$

$$\begin{aligned} &L_1 \text{ اور } L_2 \text{ متقاطع ہیں؛ } L_2 \text{ اور } L_3 \text{ متوازی ہیں؛ } L_1 \\ &\text{اور } L_3 \text{ غیر ہسطمی ہیں۔} \end{aligned} \quad (61)$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم





ضمیمہ ج

ضمیمہ تین



ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چھ





ضمیمہ ز

ضمیمہ سات



ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

