

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
14	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
30	تفاعل	1.3
52	ترسیم کی منتقلی	1.4
72	تکوینیاتی تفاعل	1.5
93	حدود اور استمرار	2
93	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
110	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
123	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
143	تصور حد کی توسیع	2.4
163	استمرار	2.5
181	مماسی خط	2.6
195	تفرق	3
195	تفاعل کا تفرق	3.1
217	قواعد تفرق	3.2
236	تبدیلی کی شرح	3.3
253	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
274	زنجیری قاعدہ	3.5
291	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
308	دیگر شرح تبدیلی	3.7

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

7.2	قدرتی لوگار تھم	762
7.3	قوت نمائی تفاعل	779
7.4	$\log_a x$ اور $a^x$	794
7.5	افزائش اور تنزل	805
7.6	قاعدہ لھوپیٹال	819
7.7	اضافی شرح نمو	835
7.7.1	ترتیبی اور شمائی تلاش	840
7.8	الٹ نیکونائی تفاعل	846
7.9	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	862
7.10	ہذلولی تفاعل	879
7.11	یک رتبی تفرقی مساوات	900
7.12	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	918

8	تکمل کے طریقے	929
8.1	تکمل کے بنیادی کلیات	929
8.2	تکمل بالخص	945
8.2.1	بار بار استعمال	950
8.3	جزوی کسر	959
8.4	نیکونائی بدل	974
8.5	جدول تکمل اور کمپیوٹر	985
8.6	غیر مناسب تکمل	1002

9	لا متناہی تسلسل	1029
9.1	اعداد کی ترتیب کی حد	1029
9.2	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	1048
9.3	لا متناہی تسلسل	1064
9.4	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	1083
9.5	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	1093
9.6	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	1103
9.7	بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	1115
9.8	طاققی تسلسل	1129
9.9	ٹیبلر اور مکملارن تسلسل	1145
9.10	ٹیبلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلل کے اندازے	1156
9.11	طاققی تسلسل کے استعمال	1175

10	مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	1195
10.1	مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	1195
10.2	سک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	1219

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1344 . . . . .	11.2	کار تیزی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تکلی اور مربع سطحیں
1423 . . . . .	11.7	تکلی اور کروی محدود
1435 . . . . .	12	سمتی قیمت تعامل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تعامل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1475 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1497 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513 . . . . .	13	کثیر المتغیر تعامل اور جزوی تفرقات
1513 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تعامل
1528 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1543 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1560 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1592 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تعامل کے جزوی تفرقات
1599 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1638 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1655 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالکثرت
1663 . . . . .	14.1 دوہرا نکملات
1685	جوابات
1687	ا ضمیمہ اول
1689	ب ضمیمہ دوم
1691	ج ضمیمہ تین
1693	د ضمیمہ چار
1695	ه ضمیمہ پانچ
1697	و ضمیمہ چھ
1699	ز ضمیمہ سات
1701	ح ضمیمہ آٹھ
1703	ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## سوالات

تکلیف کے خطہ کی تلاش اور دوہرا انتگرال  
سوال 1 تا سوال 10 میں عمل کے خطے کا خاکہ بنائیں اور عمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1:  $\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx$

سوال 2:  $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2 y - 2xy) dy dx$

سوال 3:  $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1) dx dy$

سوال 4:  $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy$

سوال 5:  $\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y dy dx$

سوال 6:  $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy dx$

سوال 7:  $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy$

سوال 8:  $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx dy$

سوال 9:  $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx dy$

سوال 10:  $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}} dy dx$

سوال 11 تا سوال 16 میں  $f$  کو دیے ہوئے خطہ پر مکمل کریں۔  
سوال 11: ربع اول میں لکیر  $y = x$ ،  $y = 2x$ ،  $x = 1$  اور  $x = 2$  کے بیچ خطہ پر تقابل  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  کا  
مکمل۔

سوال 12: پکور  $1 \leq x \leq 2$ ،  $1 \leq y \leq 2$  پر تقابل  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  کا مکمل۔

سوال 13: مثلث خطہ جس کے راس  $(0, 0)$ ،  $(1, 0)$  اور  $(0, 1)$  ہیں میں تقابل  $f(x, y) = x^2 + y^2$  کا مکمل۔

سوال 14: مستطیل  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$  پر تفاعل  $f(x, y) = y \cos xy$  کا تکمیل۔

سوال 15: مستوی  $uv$  کے ربع اول میں کثیر  $u + v = 1$  کے نیچے تفاعل  $f(u, v) = v - \sqrt{u}$  کا تکمیل۔

سوال 16: مستوی  $st$  کے ربع اول میں منحنی  $s = \ln t$  کے اوپر جانب  $t = 1$  سے  $t = 2$  تک تفاعل  $f(s, t) = e^s \ln t$  کا تکمیل۔

سوال 17 تا سوال 20 میں تکملات دیے گئے ہیں۔ ان تکملات کے خطوں کا خاکہ بنائیں اور تکمیل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 17: مستوی  $p, v$   $\int_{-2}^0 \int_v^{-v} 2 \, dp \, dv$

سوال 18: مستوی  $s, t$   $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, dt \, ds$

سوال 19: مستوی  $t, u$   $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{\sec t} 3 \cos t \, du \, dt$

سوال 20: مستوی  $u, v$   $\int_0^3 \int_{-2}^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, dv \, du$

تکمیل کے الٹ ترتیب

سوال 21 تا سوال 30 میں تکمیل کے خط کا خاکہ بنا کر معادل الٹ ترتیب کا تکمیل لکھیں۔

سوال 21:  $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy \, dx$

سوال 22:  $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dx \, dy$

سوال 23:  $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx \, dy$

سوال 24:  $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} dy \, dx$

سوال 25:  $\int_0^1 \int_1^{e^x} dy \, dx$

سوال 26:  $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx \, dy$

سوال 27:  $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x \, dy \, dx$

سوال 28:  $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y \, dx \, dy$

سوال 29:  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y \, dx \, dy$

سوال 30:  $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x \, dy \, dx$

دوہرا تکامل کے قیمتے کا حصول

سوال 31 تا سوال 40 میں تکامل کے خطہ کا خاکہ بنا کر تکامل کی ترتیب تعین کرتے ہوئے تکامل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 31:  $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$

سوال 32:  $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy \, dy \, dx$

سوال 33:  $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \, dx \, dy$

سوال 34:  $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} \, dy \, dx$

سوال 35:  $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \, dx \, dy$

سوال 36:  $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3} \, dy \, dx$

سوال 37:  $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5) \, dx \, dy$

سوال 38:  $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy \, dx}{y^4 + 1}$

سوال 39:  $\iint_R (y - 2x^2) \, dS$  جہاں  $R$  پکڑ  $|x| + |y| = 1$  کا اندرونی خطہ ہے۔

سوال 40:  $\iint_R xy \, dS$  جہاں  $k$  پر  $y = x$  ،  $y = 2x$  اور  $x + y = 2$  کے قریب خطہ  $R$  ہے۔

سطح  $z = f(x, y)$  کے نیچے حجم

سوال 41: مستوی  $xy$  میں لکیر  $y = x$  ،  $x = 0$  اور  $x + y = 2$  کے قیچ مثلث کے اور قطع مکانی سطح  $z = x^2 + y^2$  کے نیچے خطہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 42: ایک ٹھوس جسم اوپر سے بیلن  $z = x^2$  اور نیچے سے مستوی  $xy$  میں لکیر  $y = x$  اور قطع مکانی  $y = 2 - x^2$  کے قیچ مثلث خطہ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 43: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ مستوی  $xy$  میں لکیر  $y = 3x$  اور قطع مکانی  $y = 4 - x^2$  کے قیچ خطہ ہے جبکہ اس کا بالائی سر مستوی  $z = x + 4$  پر مشتمل ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 44: ثمن اول میں محدودی مستویات، بیلن  $x^2 + y^2 = 4$  اور مستوی  $z + y = 3$  کے قیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 45: ثمن اول میں محدودی مستویات، مستوی  $x = 3$  اور قطع مکانی بیلن  $z = 4 - y^2$  کے قیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 46: ثمن اول سے سطح  $z = 4 - x^2 - y^2$  ایک ٹھوس جسم کا قیچ ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 47: ثمن اول سے بیلن  $z = 12 - 3y^2$  اور مستوی  $x + y = 2$  ایک پیچ کاٹے ہیں۔ اس پیچ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 48: چکور ستون  $|x| + |y| \leq 1$  سے مستویات  $z = 0$  اور  $3x + z = 3$  جس ٹھوس جسم کو کاٹتے ہیں اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 49: ایک ٹھوس جسم سامنے اور پشت سے مستویات  $x = 2$  اور  $x = 1$  ، اطراف سے بیلن  $y = \pm \frac{1}{x}$  ، اوپر سے مستوی  $z = x + 1$  اور نیچے سے مستوی  $z = 0$  میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 50: ایک جسم سامنے اور پشت سے مستویات  $x = \pm \frac{\pi}{3}$  ، اطراف سے بیلن  $y = \pm \sec x$  ، اوپر سے بیلن  $z = 1 + y^2$  اور نیچے سے مستوی  $xy$  میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

غیر محدود خطوط پر نکلاتے

سوال 51 تا سوال 54 میں غیر مناسب نکلاتے کو بار بار تکمل تصور کرتے ہوئے ان کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 51:  $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} dy dx$



سوال 52:  $\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1) dy dx$

سوال 53:  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} dx dy$

سوال 54:  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(x+2y)} dx dy$

### دوہرہ انتگرال کے تخمینے

سوال 55 اور سوال 56 میں تقابل  $f(x, y)$  کے دوہرہ انتگرال کے خطہ  $R$  کو انتصابی خط  $x = a$  اور افقی خط  $y = c$  خانہ بند کرتی ہیں۔ ہر ذیلی مستطیل میں دکھائے گئے  $(x_k, y_k)$  لیتے ہوئے درج ذیل تخمین استعمال کر کے دوہرہ انتگرال کی تخمینہ قیمتیں تلاش کریں۔

$$\iint_R f(x, y) dS \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

سوال 55: تقابل  $f(x, y) = x + y$  اور خطہ  $R$ ، جو نصف دائرہ  $y = \sqrt{1-x^2}$  اور محور  $x$  کے بیچ ہے۔ خانہ بندی  $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$  اور  $y = 0, 1/2, 1$  لیں۔ نقطہ  $(x_k, y_k)$  کو  $k$  واں خانے کا نچلا بائیں کوننا لیں بشرطیکہ یہ مستطیل  $R$  کے اندر پایا جاتا ہو۔

سوال 56: تقابل  $f(x, y) = x + 2y$  ہے جبکہ دائرہ  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$  کا اندرونی خطہ  $R$  ہے۔ خانہ بندی  $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$  اور  $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$  لیں۔ بشرطیکہ  $k$  واں مستطیل  $R$  میں پایا جاتا ہو،  $k$  ویں مستطیل کے وسطانی مرکز کو  $(x_k, y_k)$  لیں۔

### نظریہ اور مثالیں

سوال 57: قرص  $x^2 + y^2 \leq 4$  کو شعاع  $\theta = \frac{\pi}{6}$  اور  $\theta = \frac{\pi}{2}$  دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے چھوٹے ٹکڑے پر  $f(x, y) = \sqrt{4-x^2}$  کا تکامل لیں۔

سوال 58: لا متناہی مستطیل  $0 \leq y \leq 2$ ،  $2 \leq x \leq \infty$  پر  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2-x)(y-1)^{2/3}}$  کا تکامل لیں۔

سوال 59: ایک ٹھوس (غیر دائری) قائمہ بیلن کا قاعدہ  $xy$  مستوی ہے جبکہ اس کی بالائی سرحد قطع مکانی سطح  $z = x^2 + y^2$  ہے۔ اس بیلن کا حجم

$$H = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy$$

ہے۔ خطہ  $R$  کا خاکہ بنائیں اور نیلن کے حجم کو، مکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے، ایک بار مکمل کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔

سوال 60: درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: مکمل کو ایک مکمل کی صورت میں لکھیں۔)

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x) dx$$

سوال 61: مستوی  $xy$  میں کونسا خطہ  $R$  درج ذیل مکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بتاتا ہے؟

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2) dS$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 62: مستوی  $xy$  میں کونسا خطہ  $R$  درج ذیل مکمل کی قیمت کو کم سے کم بتاتا ہے؟

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9) dS$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 63: کیا استمراری تفاعل  $f(x, y)$  کا مستوی  $xy$  میں مستطیل خطہ پر مکمل کی ترتیب بدلتے ہوئے مختلف نتائج کا حصول ٹھیک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ بنائیں۔

سوال 64: ایک مثلث جس کے راس  $(0, 1)$ ،  $(2, 0)$  اور  $(1, 2)$  ہوں پر استمراری تفاعل  $f(x, y)$  کے دوہرا مکمل کی قیمت درکار ہے۔ آپ یہ قیمت کیسے حاصل کریں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 65: درج ذیل تعلق کو ثابت کریں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \int_{-b}^b e^{-x^2-y^2} dx dy = 4 \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

سوال 66: درج ذیل غیر مناسب مکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}} dy dx$$

اعداد ترکیب سے مکمل کی قیمت کی تلاش  
سوال 67 تا سوال 70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے اعدادی ترکیب سے دوہرا عملیات کی قیمتیں دریافت کریں۔

$$\text{سوال 67: } \int_1^3 \int_1^x \frac{1}{xy} dy dx$$

$$\text{سوال 68: } \int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2-y^2} dy dx$$

$$\text{سوال 69: } \int_0^1 \int_0^1 \tan^{-1} xy dy dx$$

$$\text{سوال 70: } \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$$

جوابات



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم





ضمیمہ ج

ضمیمہ تین



ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چھ





ضمیمہ ز

ضمیمہ سات



ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

