احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

الجبرائی حساب

سوال 1 تا سوال 4 میں ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

سوال 1:

ا. $5^{\log_5 7}$

ب. $8^{\log_8 \sqrt{2}}$

ج. $1.3^{\log_{1.3} 75}$

د. $\log_4 16$

ہ. $\log_3 \sqrt{3}$

و. $\log_4 \left(\frac{1}{4}\right)$

سوال 2:

ا. $2^{\log_2 3}$

ب. $10^{\log_{10}(1/2)}$

ج. $\pi^{\log_\pi 7}$

د. $\log_{11} 121$

ہ. $\log_{121} 11$

و. $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$

سوال 3:

ا. $2^{\log_4 x}$

ب. $9^{\log 3x}$

ج. $\log_2(e^{(\ln 2)(\sin x)})$

سوال 4:

ا. $25^{\log_5(3x^2)}$

ب. $\log_e(e^x)$

ج. $\log_4(2^{e^x \sin x})$

سوال 5 اور سوال 6 میں نسبت کو قدرتی لوگارتھمی صورت میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 5:

ا. $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$

ب. $\dfrac{\log_2 x}{\log_8 x}$

ج. $\dfrac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

سوال 6:

ا. $\frac{\log_9 x}{\log_3 x}$ ب. $\frac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ ج. $\frac{\log_a b}{\log_b a}$

سوال 7 تا سوال 10 میں دی گئی مساوات حل کریں۔

سوال 7: $3^{\log_3(7)+2^{\log_2(5)}} = 5^{\log_5(x)}$

سوال 8: $8^{\log_8(3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$

سوال 9: $3^{\log_3(x^2)=5e^{\ln x}} - 3 \cdot 10^{\log_{10}(2)}$

سوال 10: $\ln e + 4^{-2\log_4(x)} = \frac{1}{x}\log_{10}(100)$

سوال 11 تا سوال 38 میں دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 11: $y = 2^x$

سوال 12: $y = 3^{-x}$

سوال 13: $y = 5^{\sqrt{s}}$

سوال 14: $y = 2^{s^2}$

سوال 15: $y = x^{\pi}$

سوال 16: $y = t^{1-e}$

سوال 17: $y = (\cos\theta)^{\sqrt{2}}$

سوال 18: $y = (\ln\theta)^{\pi}$

سوال 19: $y = 7\sec\theta\ln 7$

سوال 20: $y = 3^{\tan\theta}\ln 3$

سوال 21: $y = 2^{\sin 3t}$

سوال 22: $y = 5^{-\cos 2t}$

سوال 23: $y = \log_2 5\theta$

سوال 24: $y = \log_3(1 + \theta \ln 3)$

سوال 25: $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

سوال 26: $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

سوال 27: $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$

سوال 28: $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

سوال 29: $y = \log_3 \left((\frac{x+1}{x-1})^{\ln 3} \right)$

سوال 30: $y = \log_5 \sqrt{(\frac{7x}{3x+2})^{\ln 5}}$

سوال 31: $y = \theta \sin(\log_7 \theta)$

سوال 32: $y = \log_7(\frac{\sin\theta \cos\theta}{e^\theta 2^\theta})$

سوال 33: $y = \log_5 e^x$

سوال 34: $y = \log_2(\frac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}})$

سوال 35: $y = 3^{\log_2 t}$

سوال 36: $y = 3\log_8(\log_2 t)$

سوال 37: $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

سوال 38: $y = t\log_3(e^{(\sin t)(\ln 3)})$

لوگارتھمی تفرق

سوال 39 تا سوال 46 میں y کا لوگارتھمی تفرق دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے معلوم کریں۔

سوال 39: $y = (x+1)^x$

سوال 40: $y = x^{(x+1)}$

سوال 41: $y = (\sqrt{t})^t$

سوال 42: $y = t^{\sqrt{t}}$

سوال 43: $y = (\sin x)^x$

سوال 44: $y = x^{\sin x}$

سوال 45: $y = x^{\ln x}$

سوال 46: $y = (\ln x)^{\ln x}$

تکمل

سوال 47 تا سوال 56 میں تکمل تلاش کریں۔

سوال 47: $\int 5^x \, dx$

سوال 48: $\int (1.3)^x \, dx$

سوال 49: $\int_0^1 2^{-\theta} \, d\theta$

سوال 50: $\int_{-2}^0 5^{-\theta} \, d\theta$

سوال 51: $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)} \, dx$

سوال 52: $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

سوال 53: $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \sin t \, dt$

سوال 54: $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t \, dt$

سوال 55: $\int_2^4 x^{2x}(1 + \ln x) \, dx$

سوال 56: $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} \, dx$

سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

سوال 57: $\int 3x^{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$

سوال 58: $\int x^{\sqrt{2}-1}\,\mathrm{d}x$

سوال 59: $\int_0^3 (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$

سوال 60: $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}$

سوال 61 تا سوال 70 میں دیے تکمل کو حل کریں۔

سوال 61: $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 62: $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 63: $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 64: $\int_1^e \frac{2\ln 10 \log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 65: $\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2}\,\mathrm{d}x$

سوال 66: $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 67: $\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x$

سوال 68: $\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,\mathrm{d}x$

سوال 69: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log_{10} x}$

سوال 70: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\log_8 x)^2}$

سوال 71 تا سوال 74 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 71: $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 1$

سوال 72: $\int_1^{e^x} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$

سوال 73: $\int_1^{1/x} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t, \quad x > 0$

سوال 74: $\frac{1}{\ln a} \int_1^{x} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t, \quad x > 0$

نظریہ اور استعمال

سوال 75: منحنی $y = \frac{2x}{1+x^2}$ اور محور x پر $-2 \le x \le 2$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 76: منحنی $y = 2^{1-x}$ اور محور x پر $-1 \le x \le 1$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 77: انسانی خون کا pH
انسانی خون کے pH کی قیمت 7.37 سے 7.44 تک ہوتی ہے۔ انسانی خون میں برق پارہ $[\mathrm{H_3O^+}]$ کے مطابقتی حدود تلاش کریں۔

سوال 78: دماغی سیال کا pH
دماغی سیال میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ کا گاڑھا پن تقریباً $4.8 \times 10^{-8}\,\mathrm{mol\,L^{-1}}$ ہے۔ اس سیال کا pH تلاش کریں۔

سوال 79: افزائش کار (ایمپلی فائر) سے حاصل صدا کو جزو k سے ضرب دے کر اس سطح صدا کو $10\,\mathrm{dB}$ مزید بلن کیا جاتا ہے۔ جزو k کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 80: ایک افزائش کار صدا کی شدت کو 10 سے ضرب دیتا ہے۔ صدا میں کتنے dB کا اضافہ پیدا ہو گا؟

سوال 81: کسی بھی محلول میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کی گاڑھا پن کا حاصل ضرب 10^{-14} ہوتا ہے۔

ا. $[\mathrm{H_3O^+}]$ کی کیا قیمت گاڑھا پن کی مجموعی $S = [\mathrm{H_3O^+}] + [\mathrm{OH^-}]$ کو کم سے کم کرتی ہے؟

ب. اس محلول کی pH تلاش کریں جس میں S کی قیمت کم سے کم ہو۔

ج. $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کی کون سی نسبت S کو کم سے کم بناتی ہے؟

سوال 82: کیا $\log_a b$ کی قیمت $\frac{1}{\log_b a}$ کے برابر ہو سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 83: مساوات $x^2 = 2^x$ کے دو حل $x = 2$ اور $x = 4$ ہیں جبکہ اس کا تیسرا حل بھی پایا جاتا ہے۔ ترسیم کی مدد سے تیسرا حل تلاش کریں۔

سوال 84: کیا $x > 0$ کے لئے $x^{\ln 2}$ اور $2^{\ln x}$ ایک دوسرے کے برابر ہو سکتے ہیں؟ دونوں تفاعل ترسیم کرتے ہوئے بتائیں کیا ہوتا ہے۔

سوال 85: 2^x کی خط بندی
(ا) نقطہ $x = 0$ پر $f(x) = 2^x$ کی خط بندی دریافت کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ پور و پور کریں۔ (ب) وقفہ $-3 \le x \le 3$ اور وقفہ $-1 \le x \le 1$ کے لئے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 86: $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی
(ا) نقطہ $x = 3$ پر $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ تک پور و پور کریں۔
(ب) وقفہ $0 \le x \le 8$ اور $2 \le x \le$ کے لئے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

دیگر اساس کے ساتھ حساب کتاب

سوال 87: عموماً کیلکولیٹروں میں $\log_{10} x$ اور $\ln x$ پائے جاتے ہیں۔ دیگر اساس کے لوگارتھم تلاش کرنے کی خاطر ہم درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$$

کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے 5 اعشاریہ درستگی تک (ا) $\log_3 8$ ، (ب) $\log_7 0.5$ ، (ج) $\log_{2_-} 17$ ، (د) $\log_{0.5} 7$ تلاش کریں۔ درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے $\ln x$ تلاش کریں۔ (ہ) $\log_{10} x = 2.3$ ، (و) $\log_2 x = 1.4$ ، (ز) $\log_2 x = -1.5$ ، (ح) $\log_{10} x = -0.7$

سوال 88: تبدیلی پیمانہ
(ا) دکھائیں کہ اساس 10 لوگارتھم کو اساس 2 لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

(ب) دکھائیں کہ اساس a لوگارتھم کو اساس b لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

7.5 افزائش اور تنزل

اس حصہ میں ہم قوت نما تبدیلی کے قاعدہ کو حاصل کریں گے۔ اس کے علاوہ ان عملی استعمال پر غور کیا جائے گا جن کی بنا لوگارتھمی اور قوت نمائی تفاعل اہمیت کے حامل ہیں۔

قوت نما تبدیلی کا قاعدہ

فرض کریں ہم کسی مقدار y (جو سمتی رفتار، درجہ حرارت، برقی رو، یا کچھ اور ہو سکتا ہے) میں دلچسپی رکھتے ہیں جس میں کسی بھی لمحہ t پر اضافہ یا کمی اس لمحہ موجود مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر ہمیں لمحہ $t = 0$ پر مقدار کی قیمت y_0 بھی معلوم ہو تب ہم متغیر t کے تفاعل y کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ky && \text{تفرقی مساوات} \\
y &= y_0, \quad t = 0 && \text{ابتدائی معلومات}
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

اگر y مثبت ہو اور بڑھ رہا ہو تب k مثبت ہو گا اور مساوات 7.21 کہتی ہے کہ اضافہ کی شرح جمع کیے گئے مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر y منفی ہو اور گھٹ رہا ہو تب k منفی ہو گا اور مساوات 7.21 کہتی ہے کہ تنزل کی شرح، رہ گئی مقدار کے راست متناسب ہے۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 7.21 کا ایک حل $y = 0$ ہے۔ غیر صفر حل حاصل کرنے کے لئے ہم مساوات 7.21 کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کر کے حل کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= k \\
\ln\lvert y\rvert &= kt + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } t \\
\lvert y\rvert &= e^{kt+C} && \text{قوت نما صورت} \\
\lvert y\rvert &= e^{C}\cdot e^{kt} && e^{a+b} = e^{a}\cdot e^{b} \\
y &= \mp e^{C}e^{kt} && \text{اگر } \lvert y\rvert = r \text{ ہو تب } y = \mp r \text{ ہو گا} \\
y &= Ae^{kt} && \text{مستقل } \mp e^{C} \text{ کو سادہ علامت } A \text{ سے ظاہر کرتے ہیں}
\end{aligned}
$$

ہم $\mp e^{C}$ کی تمام ممکنہ قیمتوں کے علاوہ 0 کو بھی A کی قیمت لے کر حل $y = 0$ کو بھی اس کلیہ میں شامل کرتے ہیں۔

ہم ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے A کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر $t = 0$ پر $y = y_0$ کو پر کرتے ہیں۔

$$y_0 = Ae^{k\cdot 0} = A$$

یوں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔

درج ذیل قوت نما تبدیلی کا قاعدہ ہے جس میں k کو شرحی مستقل[12] کہتے ہیں۔

$$y = y_0 e^{kt}, \quad k > 0 \text{ اضافہ}, \quad k < 0 \text{ تنزل} \qquad \text{قوت نما تبدیلی کا قاعدہ} \tag{7.22}$$

مساوات 7.22 کا حصول ہمیں دکھاتا ہے کہ صرف قوت نما تفاعل کا مستقل مضرب اپنے آپ کا تفرق ہو سکتا ہے۔

نمو آبادی

کوئی بھی آبادی (انسانی، نباتاتی، جراثیمی، وغیرہ) غیر استمراری تفاعل ہو گا چونکہ یہ صرف غیر مسلسل قیمتیں اختیار کرتی ہے۔ اس کے باوجود جب آبادی میں فردی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس آبادی کو نا صرف استمراری بلکہ قابل تفرق تفاعل سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ آبادی میں بچے پیدا کرنے والوں کی تناسب برقرار رہتی ہے تب کسی بھی لمحہ t پر بچوں کی پیدائشی شرح اس لمحے پر افراد کی تعداد $y(t)$ کے راست تناسب ہو گی۔ اگر ہم باہر سے آنے اور جانے والوں کو رد کریں اور ساتھ ہی مرنے والوں کی تعداد کو بھی رد کریں تب نمو آبادی کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ پیدائشی شرح ky کے برابر ہو گی۔یوں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$ لہٰذا $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ حقیقت میں کسی بھی آبادی پر دیگر عوامل بھی اثر انداز ہوں گے جن پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔

مثال 7.29: بیماری کی پھیلاو کا ایک نمونہ فرض کرتا ہے کہ بیمار ہونے والوں کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس وقت کی تعداد y کے راست تناسب ہے۔ یوں جتنے زیادہ افراد کو بیماری لاحق ہو، بیماری اتنی زیادہ تیزی سے پھیلے گی۔

فرض کریں کہ ایک سال کے عرصہ میں کسی بیماری میں مبتلا افراد کی تعداد میں 20 % کی رونما ہوتی ہے۔ اگر آج 10 000 افراد بیمار ہوں تب کتنے سالوں میں بیمار افراد کی تعداد 1000 ہو گی؟

حل: ہم مساوات $y = y_0 e^{kt}$ استعمال کرتے ہیں۔ہمیں تین چیزیں معلوم کرنی ہیں۔

ا. y_0 کی قیمت،

ب. k کی قیمت،

ج. $y = 1000$ کرنے کے لئے درکار t کی قیمت۔

---

[12] rate constant

پہلا قدم: y_0 کی قیمت: ہم آج کو لمحہ $t = 0$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $y = 10\,000$ ہے۔ یوں ہماری مساوات درج ذیل ہے۔

$$y = 10\,000e^{kt}$$

دوسرا قدم: k کی قیمت: ایک سال کے بعد بیماروں کی تعداد، آج کی تعداد کے $80\,\%$ یعنی 8000 ہو گی۔ آئیں k حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} 8000 &= 10\,000e^{k(1)} \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 \\ k &= \ln 0.8 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = 10\,000e^{(\ln 0.8)T} \tag{7.23}$$

تیسرا قدم: t کی وہ قیمت جو $y = 1000$ دیتی ہے: ہم مساوات 7.23 میں $y = 1000$ پر کر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1000 &= 10\,000e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \end{aligned}$$

یوں بیماروں کی تعداد 1000 کرنے کے لئے ہمیں دس سال سے کچھ زیادہ انتظار کرنا ہو گا۔ □

مسلسل سود در سود

اگر آپ A_0 روپیہ کاروبار میں ڈالیں اور ایک سال میں اس سے r' روپیہ کمانے کی امید رکھتے ہوں، جہاں $r' = r \times A_0$ ہے، تب ایک سال کے آخر میں آپ کے پاس $A_0 + r' = A_0(1 + r)$ روپیہ ہوں گے۔

ربا پر کاروبار کرنے والا بینک ایک شخص کو A_0 روپیہ سود پر دیتا ہے۔ ایک سال بعد اس شخص پر $r \times A_0$ کا سود واجب الادا ہو گا لہٰذا ایک سال بعد اس شخص پر کل $A_0 + rA_0 = A_0(1 + r)$ قرضہ ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ سالانہ سود کی شرح r ہے۔ فرض کریں کہ یہ شخص سالانہ سود ادا نہیں کرتا ہے۔ یوں دوسرے سال کی ابتدا میں اس شخص پر $A_0(1 + r)$ قرضہ ہو گا اور بینک اگلے سال اس

مقدار پر سود حاصل کرے گا۔ چونکہ سود کی شرح r ہے لہٰذا دوسرے سال اس شخص پر سود $r \times A_0(1+r)$ ہو گا اور دوسرے سال کے آخر میں اس پر کل قرضہ

$$A_0(1+r) + rA_0(1+r) = A_0(1+r)(1+r) = A_0(1+r)^2$$

ہو گا۔ اسی طرح تین سال بعد قرضہ $A_0(1+r)^2 + rA_0(1+r)^2 = A_0(1+r)^3$ اور t سال بعد قرضہ

$$A_0(1+r)^t$$

ہو گا۔

اب بینک کہہ سکتا ہے کہ سال میں ایک بار کی بجائے وہ ماہوار $\frac{r}{12}$ شرح سے سود وصول کرے گا (جو ظاہری طور پر ربا کی وہی شرح معلوم ہوتی ہے)۔ یوں پہلے مہینے کی آخر میں واجب الادا ربا کی مقدار $\frac{r}{12}A_0$ اور قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})$ ہو گا۔ اسی طرح دوسرے مہینے کی آخر میں قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})^2$ ہو گا۔ ایک سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})^{12}$ اور t سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})^{12t}$ ہو گا جس کو $A_t = A_0(1+\frac{r}{k})^{kt}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $k = 12$ ہو گا۔

یہ بینک ماہوار کی بجائے ہفتہ وار سود بھی وصول کر سکتا ہے۔ چونکہ سال میں 52 ہفتے ہوتے ہیں لہٰذا ایسی صورت میں $k = 52$ ہو گا اور t سال بعد قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$A_t = A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

سود پر چلنے والا بینک زیادہ سے زیادہ ربا حاصل کرنے کی خاطر، سال میں زیادہ سے زیادہ مرتبہ ربا حاصل کرنا چاہے گا۔ آئیں دیکھیں کہ $k \to \infty$ کرنے سے t سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_t &= \lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}\\ &= A_0e^{rt}\end{aligned}$$

درج بالا حد کا حصول اگلے حصہ میں سکھایا جائے گا۔ یوں t سال بعد اس شخص پر قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$A(t) = A_0e^{rt} \tag{7.24}$$

اس کلیہ کے تحت ربا کو مسلسل سود در سود[13] کہتے ہیں۔

مثال 7.30: آپ آج بینک سے مسلسل سود در سود کی سالانہ 15 % شرح پر 100 000 روپیہ حاصل کرتے ہیں۔ پانچ سال بعد آپ کو کتنی مقدار واپس کرنی ہو گی؟ اگر بینک سالانہ سود وصول کرتا ہو تب پانچ سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

حل: ہم $A_0 = 100\,000$ ، $r = 0.15$ اور $t = 5$ لیتے ہوئے مساوات 7.24 استعمال کرتے ہیں۔

$$A(5) = 100\,000e^{(0.15)(5)} = 211\,700$$

[13] compound continuous interest

اگر بینک سال میں ایک بار ربا وصول کرے تب پانچ سال بعد آپ کو درج ذیل قرضہ دینا ہو گا۔

$$A(5) = 100\,000(1+0.15)^5 = 201\,136$$

□

سوال 1: سالانہ افراط زر[14] سے مراد ایک سال میں روپیہ کی قدر میں کمی ہے۔ یوں $10\,\%$ افراط زر کا مطلب ہے کہ ایک سال بعد روپیہ کی قیمت $90\,\%$ ہو گی۔

ایک شخص $5\,000\,000$ روپیہ بینک میں پانچ سال کے لئے جمع کرتا ہے۔بینک ہر مہینہ اس شخص کو $40\,000$ روپیہ دیگا اور پانچ سال کے آخر میں اس کو پورے 5000000 روپیہ واپس کرے گا۔ اگر سالانہ افراط زر $12\,\%$ ہو تب اس شخص نے کیا پایا اور کیا کھویا؟

حل: پانچ سالوں میں بینک اس شخص کو

$$40\,000 \times 12 \times 5 = 2\,400\,000$$

روپیہ دیتا ہے۔پانچ سال بعد شخص کو 5000000 روپیہ دیے جاتے ہیں جن کی اصل قدر

$$5\,000\,000 \times 0.88^5 = 2\,638\,660$$

ہو گی۔ یاد رہے کہ ہر مہینہ روپیہ کا قدر کم ہو گا لہٰذا پہلے مہینہ کے 40000 اور آخری مہینہ کے 40000 روپیہ کے قدر ایک جیسے نہیں ہوں گے۔ہم حساب کو آسان بنانے کی خاطر تصور کرتے ہیں کہ اس شخص کو ماہوار کی بجائے ہر سال $40\,000 \times 12 = 480\,000$ روپیہ ملتے ہیں جن کی اصل قدر

$$
\begin{aligned}
480\,000 \times 0.88^1 &= 422\,400\\
480\,000 \times 0.88^2 &= 371\,712\\
480\,000 \times 0.88^3 &= 327\,107\\
480\,000 \times 0.88^4 &= 287\,854\\
480\,000 \times 0.88^5 &= 253\,311
\end{aligned}
$$

ہو گی لہٰذا پانچ سال میں اس کو ماہوار دیے گئے رقم کی اصل قدر درج بالا کا مجموعہ $1\,434\,404$ ہو گا۔

اس شخص کو کل $2\,638\,660 + 1\,434\,404 = 4\,073\,064$ قدر کے روپیہ واپس ہوتے ہیں۔

[14] inflation

تابکاری

ایک ایٹم اپنی کمیت کا کچھ حصہ خارج کر کے دوسرے ایٹم میں تبدیل ہوتا ہے۔ اس عمل کو تابکاری تحلیل[15] کہتے ہیں اور جس ایٹم نے مادہ خارج کیا ہو اس کو تابکار[16] کہتے ہیں۔ تابکار کاربن 14 مادہ خارج کر کے نائٹروجن میں تبدیل ہوتا ہے، ریڈیم کئی درمیانی عمل تابکاری سے گزر کر آخر کار سیسہ میں تبدیل ہوتا ہے۔

تجربہ سے دیکھا گیا ہے کہ اکائی وقت میں خارج ذرات کی تعداد، اس وقت تابکار ایٹوں کی تعداد کے تقریباً راست تناسب ہوتا ہے۔ یوں تابکار تحلیل کو مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky,\ k > 0$ ظاہر کرتی ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر تابکار ایٹوں کی تعداد y_0 ہو تب لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0 \qquad \text{مساوات تابکاری} \tag{7.25}$$

مثال 7.31: نصف زندگی

کسی عنصر کے آدھے ایٹوں کو تابکاری کے ذریعہ تبدیل ہونے کے لئے درکار وقت کو اس عنصر کی نصف زندگی[17] کہتے ہیں۔ کسی بھی عنصر کی نصف زندگی، ابتدائی ایٹوں کی تعداد پر نہیں بلکہ عنصر پر منحصر ہوتی ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں ہوتا ہے ہم ایک عنصر کو لیتے ہیں جس میں لمحہ $t = 0$ پر y_0 ایٹم پائے جاتے ہوں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کتنے وقت کے بعد اس میں نصف یعنی $\frac{y_0}{2}$ ایٹم پائے جائیں گے۔ ہم مساوات 7.25 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y\frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

اس قیمت $\left(t = \frac{\ln 2}{k}\right)$ کو نصف زندگی کہتے ہیں جو صرف k پر منحصر ہے نا کہ ابتدائی ایٹوں کی تعداد پر۔ □

$$\text{نصف زندگی} = \frac{\ln 2}{k} \tag{7.26}$$

[15] radioactive decay
[16] radioactive
[17] half life

ریڈان 222 گیس کے لئے $k = 0.18$ دن ہے لہٰذا اس کی نصف زندگی 3.8 دن ہو گی جبکہ رات کی تاریکی میں نظر آنے کی خاطر گھڑیوں میں استعمال ہونے والے ریڈیم 226 کا $k = 4.3 \times 10^{-4}$ سال ہے لہٰذا اس کی نصف زندگی 1600 سال ہو گی۔

مثال 7.32: پولونیم 210
پولونیم 210 کی نصف زندگی کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ اگر $t = 0$ پر پولونیم 210 کے y_0 ایٹم پائے جاتے ہوں تب t دنوں بعد اس کے $y = y_0 e^{-5\times 10^{-3}t}$ ایٹم ہوں گے۔ اس عنصر کی نصف زندگی تلاش کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\text{نصف زندگی} &= \frac{\ln 2}{k} \\
&= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \\
&\approx 139 \; \text{دن}
\end{aligned}
$$

□

مثال 7.33: کاربن 14
کاربن 14 جس کی نصف زندگی 5700 سال ہے، کو عموماً قدیم چیزوں کی عمر معلوم کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک نمونہ میں 10 % تابکار کاربن کے ایٹم تبدیل تبدیل ہو چکے ہیں۔ اس نمونے کی عمر تلاش کریں۔

حل: ہمیں پہلے k تلاش کرنا ہے۔اس کے بعد ہم درکار وقت معلوم کریں گے۔ ہم مساوات 7.25 استعمال کرتے ہیں۔ پہلا قدم: k کی تلاش۔

$$
k = \frac{\ln 2}{\quad} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 1.2 \times 10^{-4}
$$

دوسرا قدم: درکار وقت جس میں 90 % ایٹم باقی رہ جائے۔

$$
\begin{aligned}
0.9y_0 &= y_0 e^{-\frac{\ln 2}{5700}t} \\
-\frac{\ln 2}{5700}t &= \ln 0.9 \\
t &= -\frac{5700(\ln 0.9)}{\ln 2} \approx 866 \; \text{سال}
\end{aligned}
$$

نمونہ 866 سال پرانا ہے۔ □

منتقلی حرارت: نیوٹن کا قانون ٹھنڈک

کوئی بھی گرم جسم کچھ دیر میں ٹھنڈا ہو کر ارد گرد ماحول کے درجہ حرارت پر آن پہنچتا ہے۔ جسم کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح، جسم اور ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست متناسب ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کہتے ہیں۔

گر لمحہ t پر جسم کا درجہ حرارت متغیر T ہو اور ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت مستقل T_S ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_S) \tag{7.27}$$

ہو گا۔اگر ہم $(T - T_S)$ کی جگہ y پر کریں تب

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T - T_S) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}T_S}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - 0 && T_S \text{ مستقل} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

ہو گا۔یوں y کے لحاظ سے مساوات 7.27 درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$$

جس کا حل $y = y_0 e^{-kt}$ ہے۔یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک[18]

$$T - T_S = (T_0 - T_S)e^{-kt} \qquad \text{نیوٹن کا قانون ٹھنڈک} \tag{7.28}$$

ہو گا جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کا درجہ حرارت T_S ہے۔

مثال 7.34: ایک انڈے کو $98\,^\circ\mathrm{C}$ پر ابالنے کے بعد $18\,^\circ\mathrm{C}$ گرم پانی سے بھرے ہوئے بالٹی میں ڈالا جاتا ہے۔پانچ منٹ گزرنے کے بعد انڈے کا درجہ حرارت $38\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ بالٹی میں پانی کے درجہ حرارت میں تبدیلی کو رد کریں۔ انڈا کتنی دیر میں $20\,^\circ\mathrm{C}$ تک پہنچے گا؟

حل: ہم پانچ منٹ بعد کی معلومات استعمال کرتے ہوئے پہلے k تلاش کرتے ہیں۔ مساوات 7.28 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$T = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}$$

---

[18] newton's law of cooling

پانچ منٹ بعد $T = 38$ ہو گا جس سے

$$
\begin{aligned}
38 &= 18 + 80e^{-5k} \\
e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\
-5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\
k &= \frac{\ln 4}{5} = 0.2\ln 4 \approx 0.28
\end{aligned}
$$

یوں لمحہ t پر $T = 18 + 80^{-(0.2\ln 4)t}$ ہو گا۔ ہمیں وہ t درکار ہے جس پر $T = 20$ ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
20 = 18 &= 80e^{-(0.2\ln 4)t} \\
80e^{-(0.2\ln 4)t} &= 2 \\
e^{-(0.2\ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\
-(0.2\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\
t &= \frac{\ln 40}{0.2\ln 4} \approx 13\,\text{منٹ}
\end{aligned}
$$

بالٹی میں ڈالنے کے تقریباً 13 منٹ بعد انڈے کا درجہ حرارت $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہو گا۔ □

سوالات

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم