

# احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کاميٽ، اسلام آباد

khalidyou safzai@comsats.edu.pk



# عنوان

ix	دیباچہ
xi	میری پہلی کتاب کا دیباچہ
1	1 ابتدائی معلومات
1	1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط
14	1.2 محدود، خطوط اور بڑھوتری
30	1.3 تفاعل
52	1.4 ترسیم کی منتقلی
72	1.5 تکنیکی تفاعل
93	2 حدود اور استمرار
93	2.1 تبدیلی کی شرح اور حد
110	2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد
123	2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
143	2.4 تصور حد کی توسیع
163	2.5 استمرار
181	2.6 مماسی خط
195	3 تفرق
195	3.1 تفاعل کا تفرق
217	3.2 قواعد تفرق
236	3.3 تبدیلی کی شرح
253	3.4 تکنیکی تفاعل کا تفرق
274	3.5 زنجیری قاعدہ
291	3.6 خفی تفرق اور نااطق قوت نما
308	3.7 دیگر شرح تبدیلی

323	4	تفرق کا استعمال
323	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
337	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
353	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
353	4.3.1	پرکھ
365	4.4	$y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم
388	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
415	4.6	بہترین بنانا
439	4.7	خط بندی اور تفرقات
460	4.8	ترکیب نیوٹن
471	5	تکمل
471	5.1	غیر قطعی تکملات
483	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
499	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
511	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
527	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
555	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
571	5.7	بنیادی مسئلہ
592	5.8	قطعی تکمل میں بدل
598	5.9	اعدادی تکمل
598	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
617	6	تکمل کا استعمال
617	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
621	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
632	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
639	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
654	6.4	تکلی چھلے
667	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
677	6.6	سطح طواف کا رقبہ
689	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
701	6.7.1	وسطانی مرکز
706	6.8	کام
720	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
730	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
743	7	ماورائی تفاعل
744	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

762	قدرتی لوگار تھم	7.2
779	قوت نمائی تفاعل	7.3
794	$\log_a x$ اور $a^x$	7.4
805	افزائش اور تنزل	7.5
819	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
835	اضافی شرح نمو	7.7
840	7.7.1 ترتیبی اور شمائی تلاش	
846	الٹ نیکونائی تفاعل	7.8
862	الٹ نیکونائی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
879	ہذلولی تفاعل	7.10
900	ایک رتبی تفرقی مساوات	7.11
918	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12

929	8 مکمل کے طریقے	
929	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
945	8.2 مکمل بالخص	
950	8.2.1 بار بار استعمال	
959	8.3 جزوی کسر	
974	8.4 نیکونائی بدل	
985	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1002	8.6 غیر مناسب مکمل	

1029	9 لامتناہی تسلسل	
1029	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1048	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1064	9.3 لامتناہی تسلسل	
1083	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکمیلی پرکھ	
1093	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1103	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تنابہی اور جذری پرکھ	
1115	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1129	9.8 طاقی تسلسل	
1145	9.9 ٹیلر اور مکملارن تسلسل	
1156	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلغل کے اندازے	
1175	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	

1195	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطعی محدود	
1195	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	10.2 سبک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	

1229 . . . . .	10.3	دو درجی مساوات اور گھومنا
1243 . . . . .	10.4	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
1259 . . . . .	10.5	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
1273 . . . . .	10.6	قطبی محدود
1285 . . . . .	10.7	قطبی محدود میں ترسیم
1299 . . . . .	10.8	مخروط حصوں کے قطبی مساوات
1300 . . . . .	10.8.1	دائرے
1314 . . . . .	10.9	قطبی محدود میں عمل
1327 . . . . .	11	سمتیات اور خلا میں تجلیلی جیومیٹری
1327 . . . . .	11.1	مستوی میں سمتیات
1344 . . . . .	11.2	کار تیزی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات
1351 . . . . .	11.2.1	کرہ
1361 . . . . .	11.3	ضرب نقطہ
1362 . . . . .	11.3.1	حساب
1376 . . . . .	11.4	صلیبی ضرب
1391 . . . . .	11.5	فضا میں خطوط اور مستوی
1405 . . . . .	11.6	تکلی اور مربع سطحیں
1423 . . . . .	11.7	تکلی اور کروی محدود
1435 . . . . .	12	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت
1435 . . . . .	12.1	سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات
1458 . . . . .	12.2	گولہ کی حرکت کی نمونہ کشی
1467 . . . . .	12.3	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$
1475 . . . . .	12.4	انحناء، مروڑ اور $TNB$ چھوٹ
1497 . . . . .	12.5	فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت
1513 . . . . .	13	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات
1513 . . . . .	13.1	کثیر متغیرات کے تفاعل
1528 . . . . .	13.2	حد اور استمرار
1543 . . . . .	13.3	جزوی تفرقات
1560 . . . . .	13.4	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات
1577 . . . . .	13.5	زنجیری قاعدہ
1592 . . . . .	13.6	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات
1599 . . . . .	13.7	رنجی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں
1620 . . . . .	13.8	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین
1629 . . . . .	13.8.1	نتیجہ
1638 . . . . .	13.9	لیگرینج ضاربین
1655 . . . . .	13.10	کلیہ نیلر

1663	14 تکمل بالشرت
1663 . . . . .	14.1 دوہرا نکملات
1683 . . . . .	14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کیت
1699	جوابات
1701	ا ضمیمہ اول
1703	ب ضمیمہ دوم
1705	ج ضمیمہ تین
1707	د ضمیمہ چار
1709	ه ضمیمہ پانچ
1711	و ضمیمہ چھ
1713	ز ضمیمہ سات
1715	ح ضمیمہ آٹھ
1717	ط ضمیمہ آٹھ





## دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔  
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry  
George B. Thomas, Jr  
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019



## میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

## سوالات

## رقبہ بذریعہ دوہرا تکامل

سوال 1 تا سوال 8 میں منحنیات اور کلیروں کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر اس خطے کے رقبہ کو بطور دوہرا بار بار تکامل لکھیں۔ اس تکامل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 1: محدب محور اور کلیر  $x + y = 2$

سوال 2: کلیر  $x = 0$  ،  $y = 2x$  اور  $y = 4$

سوال 3: قطع مکانی  $x = -y^2$  اور کلیر  $y = x + 2$

سوال 4: قطع مکانی  $x = y - y^2$  اور کلیر  $y = -x$

سوال 5: منحنی  $y = e^x$  اور کلیر  $y = 0$  ،  $x = 0$  اور  $x = \ln 2$

سوال 6: ربع اول میں منحنیات  $y = \ln x$  ،  $y = 2 \ln x$  اور کلیر  $x = e$

سوال 7: قطع مکانی  $x = y^2$  اور  $x = 2y - y^2$

سوال 8: قطع مکانی  $x = y^2 - 1$  اور  $x = 2y^2 - 2$

سوال 9 تا سوال 14 میں مستوی  $xy$  میں خطوں کے رقبات کو تکامل یا تکملات کے مجموعوں کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔ ان خطوں کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر ان کی مساواتیں لکھیں اور ان نقطوں کی نشاندہی کریں جہاں منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے بعد ان خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 9:  $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} dx dy$

سوال 10:  $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dy dx$

سوال 11:  $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx$

سوال 12:  $\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx dy$

سوال 13:  $\int_{-1}^0 dy dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy dx$

سوال 14:  $\int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$

## اوسط قیمت

سوال 15: تقابل  $f(x, y) = \sin(x + y)$  کی اوسط قیمت درج ذیل خطوں پر تلاش کریں۔

ا. مستطیل  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$

ب. مستطیل  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2$

سوال 16: کیا چکور  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  یا ربع اول میں دائرہ  $x^2 + y^2 = 1$  میں  $f(x, y) = xy$  کی اوسط قیمت زیادہ ہوگی؟ ان دونوں خطوں میں اوسط کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 17: چکور  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$  میں قطع مکانی  $z = x^2 + y^2$  کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 18: چکور  $\ln 2 \leq x \leq 2 \ln 2, \ln 2 \leq y \leq 2 \ln 2$  میں  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$  کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

### مستقل کثافت

سوال 19: ربع اول میں قطع مکانی  $y = 2 - x^2$  اور لکیر  $x = 0$ ،  $y = x$  کے بیچ ایک باریک چادر جس کی کثافت  $\delta = 3$  ہو پائی جاتی ہے۔ اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 20: ربع اول میں محدودی محور اور لکیر  $x = 3$  اور  $y = 3$  کے بیچ مستقل کثافت کی باریک مستطیل چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مجموعی معیار اثر اور رداس دوام تلاش کریں۔

سوال 21: ربع اول میں محور  $x$ ، قطع مکانی  $y^2 = 2x$  اور لکیر  $x + y = 4$  کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 22: ربع اول سے لکیر  $x + y = 3$  ایک تکوئی خطہ کا بنتی ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 23: محور  $x$  اور منحنی  $y = \sqrt{1 - x^2}$  کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 24: ربع اول میں قطع مکانی  $y = 6x - x^2$  اور لکیر  $y = 2x$  کے بیچ خطے کا رقبہ  $\frac{125}{6}$  ہے۔ اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 25: ربع اول سے دائرہ  $x^2 + y^2 = a^2$  ایک خطہ کا بنتا ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 26: دائرہ  $x^2 + y^2 = 4$  کے بیچ کثافت  $\delta = 1$  کی باریک چادر کی محور  $x$  کے لحاظ سے مجموعی معیار اثر تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کی  $I_y$  اور  $I_0$  دریافت کریں۔

سوال 27: محور  $x$  اور قوس  $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$  کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 28: محور  $x$  اور منحنی  $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$  کے بیچ وقفہ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  پر کثافت  $\delta = 1$  کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ محور  $y$  کے لحاظ سے اس کی مجموعی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 29: لامتناہی خط کا وسطانی مرکز  
ربع دوم میں محدودی محور اور منحنی  $y = e^x$  کے بیچ خط کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (کمیت اور معیار اثر کے کلیات میں آپ کو غیر مناسب  
تکملات استعمال کرنے ہوں گے۔)

سوال 30: لامتناہی چادر کا پہلا معیار اثر  
ربع اول میں منحنی  $y = e^{-x^2/2}$  کے نیچے کثافت  $\delta = 1$  کے لامتناہی جسامت کی چادر کا محور  $y$  کے لحاظ سے پہلا معیار اثر تلاش  
کریں۔

### متغیر کثافت

سوال 31: قطع مکانی  $x = y - y^2$  اور لکیر  $x + y = 0$  کے بیچ باریک چادر کی کثافت  $\delta(x, y) = x + y$  ہے۔  
محور  $x$  کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 32: ترخیم  $x^2 + 4y^2 = 12$  سے قطع مکانی  $x = 4y^2$  جس چھوٹے حصہ کو کاٹتا ہے، اس کی کثافت  $\delta(x, y) = 5x$  ہے۔ اس کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 33: محور  $y$  اور لکیر  $y = x$  اور  $y = 2 - x$  کے بیچ ٹکوئی چادر کی کثافت  $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$  ہے۔ اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 34: منحنیات  $x = y^2$  اور  $x = 2y - y^2$  کے بیچ باریک چادر کی کثافت  $\delta(x, y) = y + 1$  ہے۔ اس کی  
کمیت اور محور  $x$  کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 35: ربع اول سے خطوط  $x = 6$  اور  $y = 1$  ایک مستطیل باریک چادر کاٹتے ہیں جس کی کثافت  $\delta(x, y) = x + y + 1$  ہے۔ اس کی مرکز کمیت اور محور  $y$  کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 36: قطع مکانی  $y = x^2$  اور لکیر  $y = x$  کے بیچ باریک چادر کی کثافت  $\delta(x, y) = y + 1$  ہے۔ اس کا مرکز  
کمیت اور محور  $y$  کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 37: قطع مکانی  $y = x^2$ ، محور  $x$  اور لکیر  $x = \pm 1$  کے بیچ باریک چادر کی کثافت  $\delta(x, y) = 7y + 1$  ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور  $y$  کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 38: خطوط  $x = 0$ ، محور  $x = 20$ ،  $y = -1$  اور  $y = 1$  کے بیچ باریک چادر کی کثافت  $\delta(x, y) = 1 + x/20$  ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور  $x$  کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 39: لکیر  $y = x$ ،  $y = -x$  اور  $y = 1$  کے بیچ ٹکوئی چادر کی کثافت  $\delta(x, y) = y + 1$  ہے۔ اس کا مرکز  
کمیت اور محدودی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔ اس کا قطبی جمودی معیار اثر اور رداس دوار بھی تلاش کریں۔

سوال 40: کثافت  $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$  لیتے ہوئے سوال 39 کو دوبارہ حل کریں۔

## نظریہ اور مثالیں

سوال 41: مستوی  $xy$  میں جراثیم کی تعدادی کثافت  $f(x, y) = \frac{10000e^y}{1+|x|/2}$  ہے جہاں  $x$  اور  $y$  کی ناپ سنٹی میٹر میں ہے۔ مستطیل  $-5 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 0$  میں جراثیم کی کل تعداد تلاش کریں۔

سوال 42: سطح زمین پر کثافت آبادی  $f(x, y) = 100(y + 1)$  ہے جہاں  $x$  اور  $y$  کلومیٹر میں ہیں۔ منحنیات  $x = y^2$  اور  $x = 2y - y^2$  کے بیچ کل آبادی کتنی ہوگی؟

سوال 43: مستقل کثافت کا ایک برتن مستوی  $xy$  میں خطہ  $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a(1 - x^2)$  پر واقع ہے۔ یہ برتن  $45^\circ$  تک ٹیڑھا کرنے تک واپس اپنی جگہ پر آن گرتا ہے۔ مستقل  $a$  کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 44: جمودی معیار اثر کم سے کم کرنا  $\delta * x, y) = 1$  کی چادر لکیر  $x = 4$  اور  $y = 2$  کے بیچ پائی جاتی ہے۔ لکیر  $y = a$  کے لحاظ سے اس چادر کی جمودی معیار اثر  $I_a$  درج ذیل ہے۔

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 dy dx$$

مستقل  $a$  کی وہ قیمت تلاش کریں جو  $I_a$  کو کم سے کم کرتا ہو۔

سوال 45: مستوی  $xy$  میں لکیر  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ،  $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ،  $x = 0$  اور  $x = 1$  کے بیچ لائٹناہی خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 46: ایک پتلی چھڑی کی مستقل خطی کثافت  $\delta \text{ g cm}^{-1}$  اور لمبائی  $L$  ہے۔ اس کا رداس دوار دیے گئے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

ا. چھڑی کے محور کو عمودی اور اس کی مرکز کیت سے گزرتے ہوا خط۔

ب. چھڑی کے ایک سر پر چھڑی کے محور کو عمودی خط۔

سوال 47: مستوی  $xy$  میں مستقل کثافت  $\delta$  کی چادر منحنیات  $x = y^2$  اور  $x = 2y - y^2$  کے بیچ پائی جاتی ہے۔

ا. ایسا  $\delta$  دریافت کریں کہ چادر کی کیت سوال 34 کے چادر کی کیت کے برابر ہو۔

ب. جزو-ا میں حاصل  $\delta$  کی قیمت کا اس خطہ پر  $\delta(x, y) = y + 1$  کی اوسط قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔



سوال 48: دائرہ  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  کی کثافت مستقل ہے۔ محوروں کے لحاظ سے اس کے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

### مسئلہ متوازی محور

مستوی  $xy$  میں ایک خطہ پر کمیت  $m$  کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مرکز کمیت سے خط  $L_{c,m}$  گزرتا ہے۔ خط  $L_{c,m}$  کے متوازی  $h$  اکائیاں دور خط  $L$  پایا جاتا ہے۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ  $L_{c,m}$  اور  $L$  کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر  $I_{c,m}$  اور  $I_L$  درج ذیل کلیہ کو مطمئن کریں گے۔

$$(14.20) \quad I_L = I_{c,m} + mh^2$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک جمودی معیار اثر سے دوسرا با آسانی دریافت کیا جاسکتا ہے۔

سوال 49: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

(i) دکھائیں کہ باریک چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی خط کے لحاظ سے چادر کا جمودی معیار اثر صفر ہو گا۔ (اشارہ: مرکز کمیت کو مبدا پر رکھیں اور خط کو محور  $y$  پر رکھیں۔ کلیہ  $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$  کیا دیگا؟) (ب) جزو-۱ کے نتیجے سے مسئلہ متوازی محور اخذ کریں۔ (اشارہ: خط  $L_{c,m}$  کو محور  $y$  اور  $L$  کو  $x = h$  پر رکھ کر  $I_L$  کے مکمل کو دو حصوں میں لکھیں۔)

سوال 50: (i) مسئلہ متوازی محور استعمال کرتے ہوئے مثال 14.8 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے اس مثال میں چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی افقی اور انتصابی خطوط کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ (ب) جزو-۱ کے نتائج استعمال کرتے ہوئے خطوط  $x = 1$  اور  $y = 2$  کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

### کلیہ پاپس

جناب پاپس نے حصہ 6.10 کا مسئلہ پاپس بیان کیا۔ اس کے علاوہ وہ جانتے تھے کہ ایک دوسرے کو نہ ڈھانچتے ہوئے دو مستوی خطوط کا وسطانی مرکز ان خطوط کے وسطانی مراکز سے گزرتے ہوئے خط پر پایا جاتا ہے۔ مستوی  $xy$  میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانچتی ہوئی دو باریک چادر  $P_1$  اور  $P_2$  فرض کریں، جن کی کمیت بالترتیب  $m_1$  اور  $m_2$  ہو۔ مبدا سے بالترتیب ان چادروں کے مراکز کمیت تک سمتیات  $c_1$  اور  $c_2$  لیں۔ اب اشتراک  $P_1 \cup P_2$  کا مرکز کمیت درج ذیل سمتیہ دیگا۔

$$(14.21) \quad c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$$

مساوات 14.21 کو کلیہ پاپس<sup>11</sup> کہتے ہیں۔ ایک دوسرے کو نہ ڈھانچتی ہوئی دو سے زیادہ (لیکن تنہا تعداد کی) چادروں کے لئے درج ذیل کلیہ ہو گا۔

$$(14.22) \quad c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

یہ کلیہ بالخصوص وہاں فائدہ مند ہو گا جہاں غیر منظم شکل و صورت کی چادر کے حصوں کے وسطانی مراکز ہم جیومیٹری سے علیحدہ علیحدہ طور پر جانتے ہوں اور جہاں ہر حصہ از خود مستقل کثافت کا ہو۔ ہم اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے پوری چادر کا وسطانی مرکز معلوم کر سکتے ہیں۔



جوابات



ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول



ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم





ضمیمہ ج

ضمیمہ تین



ضمیمہ د

ضمیمہ چار



ضمیمہ ۵

ضمیمہ پانچ



ضمیمہ و

ضمیمہ چھ





ضمیمہ ز

ضمیمہ سات



ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ



ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

