احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 13

کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات

جائزہ

سائنس میں دو یا دو سے زائد غیر تابع متغیرات کے تفاعل ایک متغیر کے تفاعل سے زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں اور ان کی علم احصاء زیادہ عمدہ ہوتی ہے۔زیادہ متغیرات ایک دوسرے پر زیادہ طریقوں سے اثر انداز ہو سکتے ہیں جس کی بنا ان کے تفرقات مختلف اور زیادہ دلچسپ صورتیں اختیار کر سکتے ہیں۔ ان کے تکملات زیادہ اقسام کے عملی مسائل میں کام آتے ہیں۔ احتمال، سیالی حرکیات، اور برقیات، وغیرہ، پر غور کے دوران ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں۔ان تفاعل کی ریاضیات، سائنس کی عظیم کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل

کئی تفاعل ایک سے زائد متغیرات کے تابع ہوتے ہیں۔دائری نلکی کا حجم، اس کے رداس اور قد سے، تفاعل $H = \pi r^2 h$ دیتا ہے۔ مستوی xy میں نقطہ $N(x, y)$ کے دو محدد سے، قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا قد تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ دیتا ہے۔اس حصہ میں ہم ایک سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل متعارف کرتے ہیں اور ان کو ترسیم کرنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

تفاعل اور متغیرات

کثیر غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی تعریف بالکل واحد متغیر کے تفاعل کی طرح کی جاتی ہے۔ان کے وقفے حقیقی (تین، چار، وغیرہ) اعداد کے مرتب جوڑی کے سلسلے ہوں گے اور ان کی سعت، اس طرح کے حقیقی اعداد کے سلسلے ہوں گے جن کے ساتھ ہم کام کرتے آرہے ہیں۔

تعریفات: فرض کریں n عدد حقیقی اعداد $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کا سلسلہ D ہے۔ تب D پر **حقیقی قیمت تفاعل**[1] f سے مراد وہ قاعدہ ہے جو D کے ہر رکن کو حقیقی عدد

$$w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

مختص کرتا ہو۔ سلسلہ D اس تفاعل کا **دائرہ کار**[2] ہو گا۔ تفاعل f کی w قیمتوں کا سلسلہ f کی **سعت**[3] ہو گی۔ علامت w تفاعل f کا **تابع متغیر**[4] ہو گا اور f کو n **غیر تابع متغیرات**[5] x_1 تا x_n کا تفاعل کہتے ہیں۔ ہم ان x کو تفاعل کے **داخلی متغیرات**[6] اور w کو تفاعل کا **خارجی متغیر**[7] بھی کہتے ہیں۔

□

اگر f دو غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب عموماً ہم ان غیر تابع متغیرات کو x اور y کہتے ہیں اور f کے دائرہ کار کو مستوی xy میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔ اگر f تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب ہم ان متغیرات کو x ، y اور z کہتے ہیں اور تفاعل کے دائرہ کار کو فضا میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ہم وہ حروف استعمال کرتے ہیں جو ہمیں ان چیزوں کی یاد دلا سکیں جن کے لئے یہ متغیرات استعمال کیے گئے ہوں۔ یہ کہنے کی خاطر کہ دائری نلکی کا حجم اس کے رداس r اور قد h کا تفاعل ہو گا، ہم $H = f(r, h)$ لکھ سکتے ہیں۔ بالخصوص ہم $f(r, h)$ کی جگہ وہ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں جو r اور h کی قیمتوں سے H کی قیمت دیتا ہو، یعنی ہم $H = \pi r^2 h$ لکھ سکتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں r اور h غیر تابع متغیرات ہوں گے اور H تابع متغیر ہو گا۔

ہمیشہ کی طرح، ہم تفاعل کی تعریفی کلیہ میں غیر تابع متغیرات کی قیمتیں پر کر کے مطابقتی تابع متغیر کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 13.1: نقطہ $(3, 0, 4)$ پر تفاعل $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

---

real valued function[1]
domain[2]
range[3]
dependent variable[4]
independent variable[5]
input variable[6]
output variable[7]

وقفے

ایک سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کی تعریف میں، ہمیشہ کی طرح، ہم ان مداخل کو شامل نہیں کرتے ہیں جو مخلوط اعداد دیتے ہوں یا جن کی وجہ سے تقسیم صفر کا عمل پیدا ہوتا ہو۔یوں $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ میں y کی قیمت x^2 کی قیمت سے کم نہیں ہو سکتی ہے اور $f(x,y)=\frac{1}{xy}$ میں xy کی قیمت صفر نہیں ہو سکتی ہے۔ان شرائط کو مطمئن کرتے ہوئے، تفاعل کے دائرہ کار سے مراد وہ بڑے سے بڑا سلسلہ ہو گا جس پر تفاعل کا تعریفی قاعدہ حقیقی اعداد پیدا کرتا ہو۔

مثال 13.2: دو متغیرات کے تفاعل

سعت	دائرہ کار	تفاعل
$[0,\infty)$	$y \geq x^2$	$w=\sqrt{y-x^2}$
$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$	$xy \neq 0$	$w=\frac{1}{xy}$
$[-1,1]$	پورا مستوی	$w=\sin xy$

□

مثال 13.3: تین متغیرات کے تفاعل

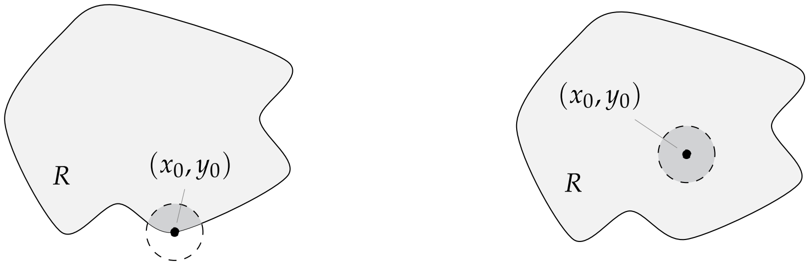
سعت	دائرہ کار	تفاعل
$[0,\infty)$	پوری فضا	$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$(0,\infty)$	$(x,y,z)\neq(0,0,0)$	$w=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$
$(-\infty,\infty)$	نصف فضا z>0	$w=xy\ln z$

□

بالکل حقیقی لکیر کے وقفوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کی طرح، مستوی کے حصوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے ہو سکتے ہیں۔

تعریفات: مستوی xy میں خطہ (سلسلہ) R میں نقطہ (x_0,y_0) تب R کا **اندرونی نقطہ**[8] ہو گا جب یہ اس قرص کا مرکز ہو جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہو (شکل 13.1)۔ نقطہ (x_0,y_0) تب R کا **سرحدی نقطہ**[9] ہو گا جب ہر اس قرص میں، جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو، R کے بیرونی اور R کے اندرونی نقطے پائے جاتے ہوں۔(ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ ازخود R میں شامل ہو۔)

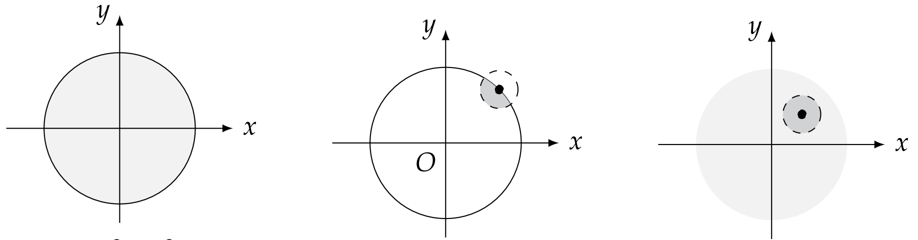
[8] interior point
[9] boundary point



(ب) سرحدی نقطہ

(ا) اندرونی نقطہ

شکل 13.1: مستوی خطہ R کا اندرونی نقطہ اور سرحدی نقطہ۔اندرونی نقطہ لازماً R کا حصہ ہو گا جبکہ ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ کا حصہ ہو۔



(ا) $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$
کھلا قرص۔ ہر نقطہ اندرونی نقطہ ہے۔

(ب) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$
اکائی قرص کی سرحد۔ (اکائی دائرہ۔)

(ج) $\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$
بند اکائی قرص۔تمام سرحدی نقطے اس میں شامل ہیں۔

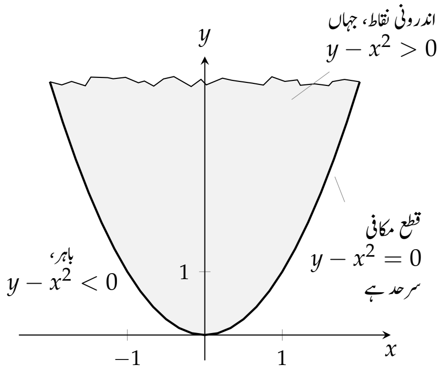
شکل 13.2: مستوی میں اکائی قرص کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے۔

ایک خطہ کے اندرونی نقطے، بطور ایک سلسلہ، اس خطہ کی **اندرون**[10] ہوں گے۔ اس خطہ کے سرحدی نقطے اس کی **سرحد**[11] ہیں۔ایسا خطہ جو مکمل طور پر اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو **کھلا**[12] خطہ کہلاتا ہے۔ ایسا خطہ جس میں اس کے تمام سرحدی نقطے شامل ہوں **بند**[13] خطہ کہلاتا ہے۔

□

حقیقی اعداد کے وقفوں کی طرح، مستوی میں بعض خطے نا کھلا اور نا ہی بند ہوتے ہیں۔ شکل 13.2 کے کھلا قرص میں چند، نا کہ تمام، سرحدی نقطے شامل کرنے سے ایسا خطہ حاصل ہو گا جو نا کھلا ہو گا اور نا ہی بند ہو گا۔اس میں شامل سرحدی نقطے اس کو کھلا وقفہ بننے سے روکتے ہیں جبکہ اس میں نا شامل سرحدی نقطے اس کو بند خطہ بننے سے روکتے ہیں۔

interior[10]
boundary[11]
open[12]
closed[13]



شکل 13.3: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار سایہ دار خطہ ہے اور اس کی سرحد قطع مکافی $y = x^2$ ہے۔

تعریف: مستوی میں مقررہ رداس کے قرص میں پائے جانے والا خطہ **محدود**[14] ہو گا۔ ایسا خطہ جو محدود نا ہو **غیر محدود**[15] ہو گا۔

□

مثال 13.4:

مستوی میں محدود سلسلے: خطی قطعات؛ مثلثیں؛ مثلثوں کی اندرون؛ مستطیلیں؛ اقراص۔

مستوی میں غیر محدود سلسلے: خطوط؛ محددی محور؛ لا متناہی وقفہ پر معین تفاعل کی ترسیم؛ ربعات، نصف مستوی؛ مستوی از خود۔

□

مثال 13.5: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار بند اور غیر محدود ہے (شکل 13.3)۔ قطع مکافی $y = x^2$ اس دائرہ کار کی سرحد ہے۔ قطع مکافی سے اوپر نقطے دائرہ کار کی اندرون ہیں۔ □

فضا میں اندرون، سرحد، کھلا، بند، محدود اور غیر محدود کی تعریفیں عین مستوی میں انہیں کی تعریفوں کی طرح ہیں۔ اضافی بعد کی بنا ہم قرص کی بجائے گیند لیتے ہیں۔ **بند گیند**[16] میں کرہ کی اندرونی نقطوں کے ساتھ گیند بھی شامل ہو گا۔ **کھلا گیند**[17] میں گیند کی اندرونی نقطے شامل ہوں گے جبکہ گیند از خود اس میں شامل نہیں ہو گا۔

---

[14] bounded
[15] unbounded
[16] closed ball
[17] open ball

تعریفات: فضا میں خطہ D میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) اس صورت D کا **اندرونی نقطہ**[18] ہو گا جب یہ نقطہ ایسے گیند کا مرکز ہو جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔اگر ہر گیند، جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) ہو، میں شامل نقطوں میں کچھ نقطے D کے اندرونی اور کچھ اس کے بیرونی نقطے ہوں تب یہ نقطہ D کا **سرحدی نقطہ**[19] ہو گا۔خطہ D کے اندرونی نقطوں کا سلسلہ D کا **اندرون**[20] ہو گا۔ خطہ D کے سرحدی نقطوں کا سلسلہ D کا **سرحد**[21] ہو گا۔

ایک ایسا خطہ جو صرف اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو **کھلا**[22] خطہ کہلائے گا۔ ایک خطہ جس میں خطے کا پورا سرحد شامل ہو **بند**[23] خطہ کہلائے گا۔

□

مثال 13.6:

فضا میں کھلا سلسلے کھلا گیند؛کھلا نصف فضا $z > 0$ ؛ ربع اول (بغیر تحدیدی سطحیں) ؛ فضا از خود

فضا میں بند سلسلے خطوط؛ مستوی؛ بند گیند؛ بند نصف فضا $z \geq 0$ ؛ ربع اول بمع اس کے تحدیدی سطحیں؛ فضا از خود

نا کھلا اور نا بند بند گیند جس میں تحدیدی کرہ کا کچھ حصہ شامل نہ ہو؛ ٹھوس مربع جس میں ایک تحدیدی سطح یا کنارہ یا کونا شامل نہ ہو

□

دو متغیرات کے تفاعل کی ترسیمات اور ہم قد منحنیات

تفاعل $f(x, y)$ کی تصویر کشی دو طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔اول، ہم اس دائرہ کار میں f کی منحنیات ترسیم کر سکتے ہیں جس پر f کی قیمت مستقل ہو۔ دوم، ہم فضا میں سطح $z = f(x, y)$ ترسیم کر سکتے ہیں۔

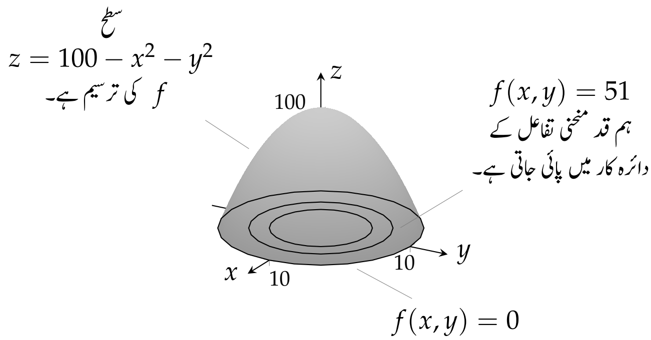
تعریفات: اس مستوی میں نقطوں کا سلسلہ جہاں $f(x, y)$ کی قیمت ایک مستقل $f(x, y) = c$ ہو، f کی **ہم قد منحنی**[24] کہلاتا ہے۔فضا میں f کے دائرہ کار میں (x, y) کے لئے تمام نقطوں $(x, y, f(x, y))$ کا سلسلہ f کی **ترسیم**[25] کہلاتا ہے۔تفاعل f کی ترسیم کو **سطح**[26] $z = f(x, y)$ بھی کہتے ہیں۔

□

دھیان رہے کہ ہم قد منحنیات اس مستوی میں پائی جاتی ہیں جس پر تفاعل کا دائرہ کار پایا جاتا ہو۔

---

interior point[18]
boundary point[19]
interior[20]
boundary[21]
open[22]
closed[23]
level curve[24]
graph[25]
surface[26]



شکل 13.4: تفاعل کی ترسیم اور منتخب ہم قد منحنیات۔

سوالات

مثال 13.7: تفاعل $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ ترسیم کریں اور مستوی میں f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنیات $f(x, y) = 0$ ، $f(x, y) = 51$ اور $f(x, y) = 75$ ترسیم کریں۔

حل: تفاعل f کا دائرہ کار پورا xy مستوی ہے جبکہ اس کی سعت 100 جتنا یا اس سے کم تمام حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔ قطع مکافی $z = 100 - x^2 - y^2$ اس کی ترسیم ہے جس کا کچھ حصہ شکل 13.4 میں دکھایا گیا ہے۔

مستوی xy میں ان نقطوں کا سلسلہ جن پر درج ذیل ہو، ہم قد منحنی $f(x, y) = 0$ ہو گی جو ایک دائرہ ہے جس کا رداس 10 اور جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \text{یعنی} \quad f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0$$

اسی طرح ہم قد منحنیات $f(x, y) = 51$ اور $f(x, y) = 75$ درج ذیل دائرے ہوں گے جو xy مستوی میں پائے جاتے ہیں اور جن کے مراکز عین مبدا پر پائے جاتے ہیں۔

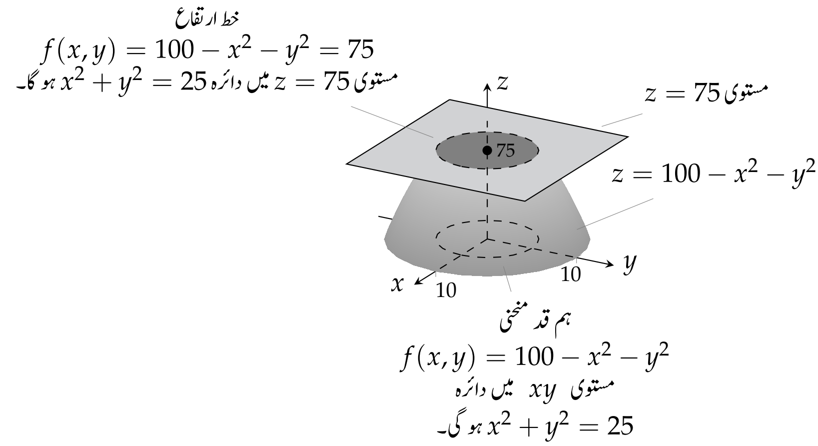
$$x^2 + y^2 = 49 \quad \text{یعنی} \quad f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51$$
$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{یعنی} \quad f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$$

ہم قد منحنی $f(x, y) = 100$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔(اس کے باوجود یہ ایک ہم قد منحنی ہے۔) □

خطوط ارتفاع

فضا میں وہ منحنی جس میں مستوی $z = c$ سطح $z = f(x, y)$ کو مس کرتا ہو، ان نقطوں پر مشتمل ہو گی جو تفاعل $f(x, y) = c$ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کو **خط ارتفاع**[27] $f(x, y) = c$ کہتے ہیں تاکہ اس کے بیچ اور f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x, y) = c$

[27] contour line



شکل 13.5: تفاعل $f(x,y)=100-x^2-y^2$ کی ترسیم اور مستوی $z=75$ کے ساتھ اس کا تقاطع۔

کے بیچ تمیز کرنا ممکن ہو۔ شکل 13.5 میں تفاعل $f(x,y)=100-x^2-y^2$ کی سطح $z=100-x^2-y^2$ پر خط ارتفاع $f(x,y)=75$ دکھایا گیا ہے۔ یہ خط ارتفاع ٹھیک دائرہ $x^2+y^2=25$ ، جو تفاعل کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x,y)=75$ ہے، کے اوپر کچھ بلندی پر پایا جاتا ہے۔

بعض ریاضی دان خط ارتفاع اور ہم قد منحنی میں تمیز نہیں کرتے ہیں اور دونوں کو کسی ایک نام سے پکارتے ہیں۔ ایسی صورت میں متن سے آپ جان سکتے ہیں کہ کس کی بات کی گئی ہے۔ عموماً نقشات پر (سطح سمندر سے) مستقل بلندی کو ظاہر کرنے والی منحنیات کو خط ارتفاع پکارا جاتا ہے نا کہ ہم قد منحنیات۔

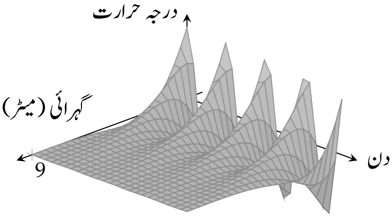
سہ متغیری تفاعل کی ہم قد منحنیات

مستوی میں جن نقطوں پر دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x,y)=c$ ہو اس تفاعل کے دائرہ کار میں ایک منحنی تشکیل دیتے ہیں۔ فضا میں جن نقطوں پر تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x,y,z)=c$ ہو اس تفاعل کے دائرہ کار ایک سطح تشکیل دیتے ہیں۔

تعریف: فضا میں ان نقطوں (x,y,z) کا سلسلہ جن پر تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x,y,z)=c$ ہو، f کی **ہم قد سطح**[28] کہلاتا ہے۔

□

[28] level surface



شکل 13.6: سطح زمین کی نسبت سے گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت۔

مثال 13.8: درج ذیل تفاعل کے ہم قد سطحوں پر تبصرہ کریں۔

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

حل: تفاعل f کی قیمت، مبدا سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ ہو گا۔ ہر ہم قد سطح $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c,\ c > 0$ رداس c کا کرہ ہو گا جس کا مرکز مبدا پر ہو گا۔ ہم قد سطح $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔

ہم یہاں تفاعل کو ترسیم نہیں کر رہے ہیں۔ایک تفاعل جو نقاط $(x, y, z, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ پر مشتمل ہو، چار متغیری فضا میں پایا جائے گا۔اس کی بجائے ہم تفاعل کے دائرہ کار میں ہم قد سطحوں کو دیکھ رہے ہیں۔

اس تفاعل کی ہم قد سطحیں ہمیں تفاعل کے دائرہ کار میں چلتے ہوئے تفاعل کی قیمت کی تبدیلی دکھاتی ہیں۔اگر ہم رداس c کے کرہ، جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر چہل قدمی کریں تب تفاعل کی قیمت بدستور c رہے گی۔ایک کرہ سے دوسری کرہ منتقل ہونے پر تفاعل کی قیمت تبدیل ہو گی۔مبدا سے دوری تفاعل کی قیمت بڑھاتی ہے جبکہ مبدا کے قریب ہونے سے اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا دارومدار ہمارے چلنے کے رخ پر ہو گا۔تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا رخ پر انحصار ایک اہم حقیقت ہے جس پر بعد کے حصہ میں غور کیا جائے گا۔ □

کمپیوٹر ترسیم کشی

کمپیوٹر کی مدد سے دو متغیرات کا تفاعل با آسانی ترسیم کیا جا سکتا ہے۔عموماً ترسیم ہمیں کلیہ سے زیادہ معلومات جلدی فراہم کرتی ہے۔

مثال 13.9: تفاعل $w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.656x)e^{-0.656x}$ کی ترسیم کو شکل 13.6 میں دکھایا گیا ہے، جہاں وقت کو t اور فاصلہ کو x ظاہر کرتے ہیں۔یہ ترسیم سطح زمین سے نیچے درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت دکھاتی ہے۔گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی w کو سطحی تبدیلی کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔چار میٹر کی گہرائی پر سطح تبدیلی کے 6.3 فی صد جتنی تبدیلی پائی جاتی ہے۔نو میٹر گہرائی پر پورے سال درجہ حرارت میں تبدیلی قابل نظر انداز ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 4 میٹر گہرائی پر درجہ حرارت سطحی درجہ حرارت سے تقریباً آدھا سال پیچھے ہے۔یوں اس گہرائی پر گرمی کی موسم میں کم سے کم اور سردی کی موسم میں زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت ہو گا۔(میں مشورہ دوں گا کہ زیر زمین ایک کمرہ ضرور بنائیں۔) □

سوالات

دائرہ کار، سعت اور ہم قد منحنیات

سوال 1 تا سوال 12 میں (ا) تفاعل کا دائرہ کار تلاش کریں، (ب) تفاعل کی سعت تلاش کریں، (ج) تفاعل کی ہم قد منحنی پر تبصرہ کریں، (د) تفاعل کے دائرہ کار کی سرحد معلوم کریں، (ہ) کیا دائرہ کار کھلا خطہ، بند خطہ یا دونوں میں سے کوئی نہیں ہے، (و) کیا دائرہ کار محدود یا غیر محدود ہے؟

سوال 1: $f(x,y)=y-x$

سوال 2: $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

سوال 3: $f(x,y)=4x^2+9y^2$

سوال 4: $f(x,y)=x^2-y^2$

سوال 5: $f(x,y)=xy$

سوال 6: $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$

سوال 7: $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

سوال 8: $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

سوال 9: $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

سوال 10: $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$

سوال 11: $f(x,y)=\sin^{-1}(y-x)$

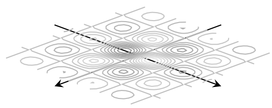
سوال 12: $f(x,y)=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$

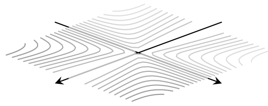
ہم قد ترسیمات اور تفاعل کی پہچان

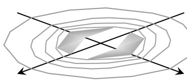
سوال 13 تا سوال 18 میں دی گئی ہم قد ترسیمات کی سطحیں شکل 13.18 تا شکل 13.17 میں دی گئی ہیں۔ ہم قد ترسیمات کی سطح پہچانیے۔

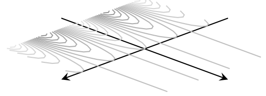
سوال 13: ہم قد ترسیم شکل 13.7 میں دی گئی ہے۔

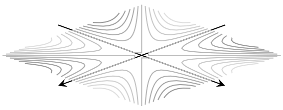
سوال 14: ہم قد ترسیم شکل 13.8 میں دی گئی ہے۔

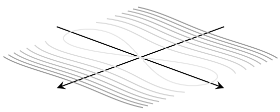

شکل 13.7

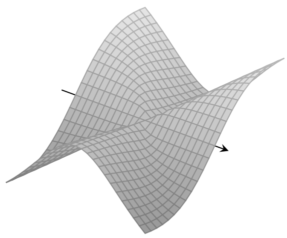

شکل 13.8

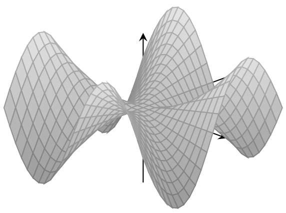

شکل 13.9

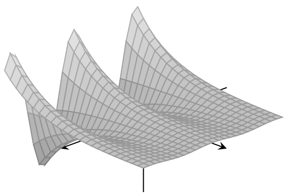

شکل 13.10

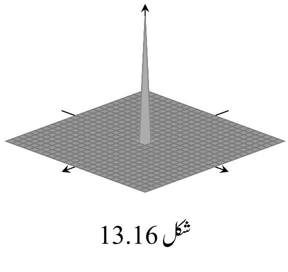

شکل 13.11

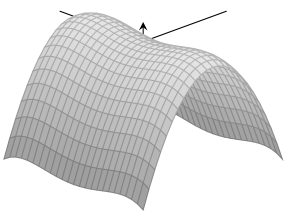

شکل 13.12

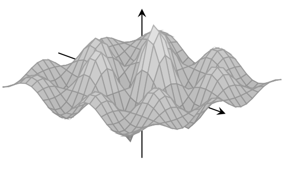

شکل 13.13


شکل 13.14


شکل 13.15


شکل 13.16


شکل 13.17


شکل 13.18

سوال 15: ہم قد ترسیم شکل 13.9 میں دی گئی ہے۔

سوال 16: ہم قد ترسیم شکل 13.10 میں دی گئی ہے۔

سوال 17: ہم قد ترسیم شکل 13.11 میں دی گئی ہے۔

سوال 18: ہم قد ترسیم شکل 13.12 میں دی گئی ہے۔

دو متغیرات کے تفاعل کی پہچان

سوال 19 تا سوال 28 میں تفاعل کی قیمتوں کو دو طرح دکھائیں۔ (ا) سطح $z = f(x,y)$ کو ترسیم کرتے ہوئے اور (ب) تفاعل کے دائرہ کار میں منتخب ہم قد منحنیات ترسیم کرتے ہوئے۔ ہر ایک ہم قد منحنی کی نشاندہی تفاعل کی قیمت سے کریں۔

سوال 19: $f(x,y) = y^2$

سوال 20: $f(x,y) = 4 - y^2$

سوال 21: $f(x,y) = x^2 + y^2$

سوال 22: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 23: $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$

سوال 24: $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

سوال 25: $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

سوال 26: $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$

سوال 27: $f(x,y) = 1 - |y|$

سوال 28: $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$

ہم قد سطحیں

سوال 29 تا سوال 36 میں تفاعل کا ایک علامتی ہم قد سطح کا خاکہ بنائیں۔

سوال 29: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

سوال 30: $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$

سوال 31: $f(x,y,z)=x+z$

سوال 32: $f(x,y,z)=z$

سوال 33: $f(x,y,z)=x^2+y^2$

سوال 34: $f(x,y,z)=y^2+z^2$

سوال 35: $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

سوال 36: $f(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}$

ہم قد منحنی کی تلاش

سوال 37 تا سوال 40 میں تفاعل $f(x,y)$ کی اس ہم قد منحنی کی مساوات تلاش کریں جو دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہو۔

سوال 37: $f(x,y)=16-x^2-y^2,\quad (2\sqrt{2},\sqrt{2})$

سوال 38: $f(x,y)=\sqrt{x^2-1},\quad (1,0)$

سوال 39: $f(x,y)=\int\limits_x^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\quad (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

سوال 40: $f(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n,\quad (1,2)$

ہم قد سطح کی تلاش

سوال 41 تا سوال 44 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہم قد سطح کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 41: $f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z,\quad (3,-1,1)$

سوال 42: $f(x,y,z)=\ln(x^2+y+z^2), \quad (-1,2,1)$

سوال 43: $g(x,y,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!z^n}, \quad (\ln 2,\ln 4,3)$

سوال 44: $g(x,y,z)=\int\limits_{x}^{y}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}+\int\limits_{\sqrt{2}}^{z}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}, \quad (0,\frac{1}{2},2)$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: فضا میں ایک لکیر پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت۔
کیا لکیر $x=20-t,\ y=t,\ z=20$ پر تفاعل $f(x,y,z)=xyz$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ: اس لکیر پر $w=(f,y,z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال 46: فضا میں ایک لکیر پر تفاعل کی کم سے کم قیمت۔
کیا لکیر $x=t-1,\ y=t-2,\ z=t+7$ پر تفاعل $f(x,y,z)=xy-z$ کی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ: اس لکیر پر $w=(f,y,z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال 47: جہاز کا صوتی دھماکا
ایک جہاز کے نیچے زمین پر اس خطہ کی چوڑائی w جہاں جہاز کا صوتی دھماکا انسان برائے راست (جو فضا میں ہوا کی مختلف سطحوں سے منعکس نہ ہو) سن سکتا ہو، درج ذیل کا تفاعل ہو گا۔

- T زمین پر ہوا کی درجہ حرارت (کیلون)
- h جہاز کی بلندی (کلو میٹر)
- d درجہ حرارت کی انتصابی شرح تبدیلی (کیلون فی کلو میٹر)

اس چوڑائی کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$w=4\sqrt{\frac{Th}{d}}$$

یہ جہاز $16.8\,\mathrm{km}$ کی بلندی پر پرواز کرتا ہوا بحیرہ عرب سے کراچی شہر پہنچ رہا ہے۔ اگر سطحی درجہ حرارت $290\,\mathrm{K}$ اور انتصابی شرح حرارت $5\,\mathrm{K\,km^{-1}}$ ہو تب جہاز ساحل سے کتنا دور ہو گا جب اس کا صوتی دھماکا سنائی دے۔

سوال 48: جیسا کہ آپ جانتے ہیں، واحد حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم دو محددی فضا کا سلسلہ ہو تا ہے۔ دو غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم تین محددی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ تین غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم چار محددی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ آپ چار غیر تابع متغیرات کے تفاعل $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟۔ آپ n غیر تابع متغیرات کے تفاعل $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟

کمپیوٹر کا استعمال۔ صریح سطح

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال 49 تا سوال 52 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے مستطیل پر سطح ترسیم کریں۔

ب. اس مستطیل میں کئی ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی f کی ہم قد منحنی ترسیم کریں۔

سوال 49: $f(x,y) = x\sin\frac{y}{2} + y\sin 2x, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi$

سوال 50: $f(x,y) = (\sin x)(\cos x)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi$

سوال 51: $f(x,y) = \sin(x + 2\cos y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le 2\pi$

سوال 52: $f(x,y) = e^{(x^{0.1}-y)}\sin(x^2+y^2), \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le \pi$

کمپیوٹر کا استعمال۔ خفی سطح

سوال 53 تا سوال 56 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ہم قد سطحیں ترسیم کریں۔

سوال 53: $4\ln(x^2+y^2+z^2) = 1$

سوال 54: $x^2 + z^2 = 1$

سوال 55: $x + y^2 - 3z^2 = 1$

سوال 56: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2+z^2} = 2$

کمپیوٹر کا استعمال۔ مقدار معلوم سطح

جیسا آپ کسی مقدار معلوم وقفہ I پر مستوی میں منحنیات کو مقدار معلوم مساوات $x = f(t), y = g(t)$ کی روپ میں لکھتے

ہیں، آپ بعض اوقات کسی مقدار معلوم مستطیل $a \leq u \leq b,\ c \leq v \leq d$ وقفہ پر فضا میں سطحوں کو مقدار معلوم تین مساوات $x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v)$ کی روپ میں لکھ سکتے ہیں۔کمپیوٹر اس قسم کی مقدار معلوم مساواتوں سے سطح ترسیم کر سکتا ہے۔سوال 57 تا سوال 60 میں کمپیوٹر کی مدد سے سطحیں ترسیم کریں۔ساتھ ہی xy مستوی میں چند ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 57: $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

سوال 58: $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

سوال 59: $x = (2+\cos u)\cos v,\ y = (2+\cos u)\sin v,\ z = \sin u,$
$0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi$

سوال 60: $x = 2\cos u\cos v, \quad y = 2\cos u\sin v, \quad z = 2\sin u$
$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi$

13.2 حد اور استمرار

اس حصہ میں کثیر المتغیر تفاعل کی حد اور استمرار پر غور کیا جائے گا۔

حد

اگر نقطہ (x_0, y_0) کے قریب تمام نقاط (x, y) کے لئے تفاعل $f(x,y)$ کی قیمتیں کسی مقررہ حقیقی عدد L کے بہت زیادہ قریب ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے (x,y) نقطہ (x_0,y_0) تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، تفاعل f کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ تعریف، واحد متغیر کے تفاعل کی حد کی تعریف کی مانند ہے۔البتہ، دھیان رہے کہ اگر (x_0,y_0) تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون میں پایا جاتا ہو تب (x,y) نقطہ (x_0,y_0) تک کسی بھی رخ سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔جیسا آپ نیچے دی گئی مثالوں میں سے چند میں دیکھیں گے، قریب پہنچنے کا رخ بعض اوقات مسئلہ کھڑا کر سکتا ہے۔

تعریف: اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ f کے دائرہ کار میں تمام (x,y) کے لئے

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \implies \left|f(x,y) - L\right| < \epsilon \tag{13.1}$$

ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ (x_0, y_0) تک (x, y) پہنچنے سے $f(x, y)$ کی قیمت حد[29] L تک پہنچتی ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

□

حد کی تعریف میں $\delta\sigma$ کی شرط اس کی معادل ہے کہ، کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{اور} \quad 0 < |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon \tag{13.2}$$

یوں حد کی قیمت تلاش کرتے ہوئے ہم مستوی میں فاصلوں کی صورت یا محدد میں فرق کی صورت میں سوچ سکتے ہیں۔

حد کی تعریف، تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون کے ساتھ سرحدی نقاط (x_0, y_0) کے لئے بھی کارآمد ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x, y) ہر وقت دائرہ کار کے اندر رہے۔

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح درج ذیل دکھائے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0 \\ &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0 \\ &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k \quad \text{کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے } k \end{aligned} \tag{13.3}$$

یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ دو تفاعل کے مجموعہ کا حد، ان تفاعل کے انفرادی حد (اگر دونوں موجود ہوں) کا مجموعہ ہو گا۔اسی طرح کے نتائج فرق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، مستقل مضرب اور طاقت کے لئے بھی دکھائے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ 13.1: **دو متغیرات کے تفاعل کی حد کے خواص**
اگر

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$$

ہوں تب درج ذیل قواعد کارآمد ہوں گے۔

---

[29] limit

قاعدہ مجموعہ: $\lim[f(x,y)+g(x,y)] = L+M$

قاعدہ فرق: $\lim[f(x,y)-g(x,y)] = L-M$

قاعدہ مستقل مضرب: $\lim kf(x,y) = kL$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ اگر $M \neq 0$ ہو۔

قاعدہ طاقت: $\lim[f(x,y)]^{m/n} = L^{m/n}$ اگر m اور n اعداد صحیح اور $L^{m/n}$ ایک حقیقی عدد ہو۔

تمام حد $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کی صورت میں حاصل کیے جائیں گے اور L، M کا حقیقی اعداد ہونا لازمی ہے۔

مساوات 13.3 پر مسئلہ 13.1 کے اطلاق سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کرتے ہوئے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی حد ہم (x_0,y_0) پر تفاعل کی قیمت سے حاصل کرتے ہیں۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x_0,y_0) پر تفاعل معین ہو۔

مثال 13.10:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-(0)(1)+3}{(0)^2(1)+5(0)(1)-(1)^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

مثال 13.11: درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

حل: چونکہ $(x,y) \to (0,0)$ پر نسب نما 0 کو پہنچتا ہے لہٰذا ہم قاعدہ حاصل تقسیم (مسئلہ 13.1) استعمال نہیں کر سکتے ہیں۔ البتہ نسب نما اور شمار کنندہ کو $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ سے ضرب دے کر ایسا معادل حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے جس کا حد ہم تلاش کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} && \text{الجبرا} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) && \text{جزو } (x-y) \text{ کاٹا گیا} \\
&= 0(\sqrt{0}+\sqrt{0}) = 0
\end{aligned}$$

□

استمرار

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمرار کی تعریف حد کی صورت میں کی جاتی ہے۔

تعریف: اگر

ا. f پر (x_0, y_0) معین ہو،

ب. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود ہو،

ج. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ہو،

تب تفاعل f **نقطہ** (x_0, y_0) **پر استمراری**[30] ہو گا۔ ایک تفاعل جو اپنے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری ہو **استمراری**[31] ہو گا۔

□

حد کی تعریف کی طرح، استمرار کی تعریف بھی f کے دائرہ کار کے تمام اندرونی نقاط کے ساتھ ساتھ سرحدی نقاط پر بھی قابل اطلاق ہوتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ پورے وقت نقطہ (x, y) تفاعل کے دائرہ کار میں رہے۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، مسئلہ 13.1 کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ استمراری تفاعل کے الجبرائی جوڑ ہر اس نقطہ پر استمراری ہوں گے جس پر تمام شامل تفاعل استمراری ہوں۔اس کا مطلب ہے کہ جہاں تمام استمراری تفاعل استمراری ہوں وہاں ان کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، مستقل مضرب، حاصل تقسیم اور طاقت استمراری ہوں گے۔ بالخصوص دو متغیرات کی کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

اگر x اور y کا استمراری تفاعل $z = f(x,y)$ ہو جبکہ z کا استمراری تفاعل $w = g(z)$ ہو، تب مرکب $g(f(x,y))$ استمراری ہو گا۔یوں ہر نقطہ (x, y) پر درج ذیل استمراری ہوں گے۔

$$e^{x-y}, \quad \cos\frac{xy}{x^2+1}, \quad \ln(1+x^2y^2)$$

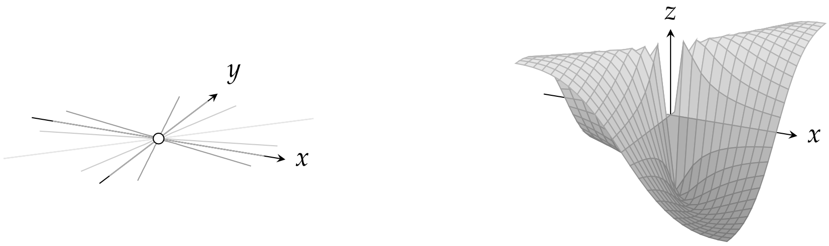
واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمراری تفاعل کا مرکب بھی استمراری ہو گا، بس اتنا ضروری ہے کہ وہاں ہر تفاعل استمراری ہو۔

مثال 13.12: دکھائیں کہ ماسوائے مبدا درج ذیل ہر نقطہ پر استمراری ہے (شکل 13.19)۔

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

---

[30] continuous
[31] continuous



شکل 13.19: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تفاعل $f(x,y)$ استمراری ہے۔

حل: ہر نقطہ $(x,y) \neq (0,0)$ پر تفاعل کی قیمت x اور y کے ناطق تفاعل سے حاصل کی جاتی ہے لہٰذا f استمراری ہو گا۔

نقطہ $(0,0)$ پر f کی قیمت معین ہے، لیکن ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ $(x,y) \to (0,0)$ کرتے ہوئے اس کا حد غیر موجود ہے۔اس کی وجہ، جیسا ہم دیکھیں گے، یہ ہے کہ مبدا تک مختلف راہوں سے پہنچتے ہوئے مختلف نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

درج ذیل کی بنا، سوراخ دار لکیر $y = mx,\ x \neq 0$ پر m کی ہر قیمت کے لئے تفاعل f کی ایک مستقل قیمت ہو گی۔

$$f(x,y)\big|_{y=mx} = \left.\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

یوں اس لکیر پر جیسے جیسے (x,y) مبدا تک پہنچتا ہے، f کی حد اتنی ہو گی:

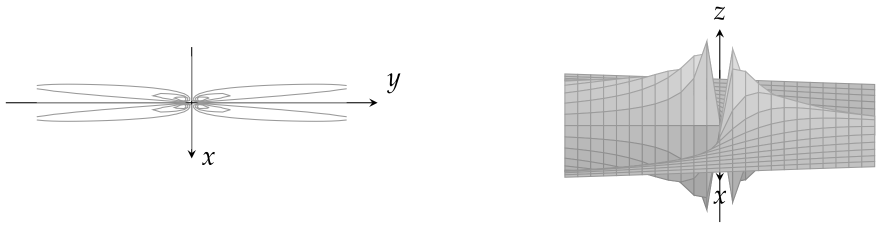
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx \text{ خط پر}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x,y)\big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1+m^2}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ حد کی قیمت m پر منحصر ہے۔یوں ایسی کوئی یکتا قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کو مبدا تک (x,y) پہنچنے پر ہم f کی حد کہہ سکیں۔ مبدا پر حد غیر موجود ہے لہٰذا مبدا پر تفاعل غیر استمراری ہو گا۔ □

دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل کے حد کے بارے میں ایک اہم نقطہ مثال 13.12 میں اجاگر ہوا۔ ایک نقطہ پر حد کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ اس نقطہ تک تمام آمد راہوں پر حد کی قیمت ایک جیسی ہو۔ یوں جب بھی ہم ایک نقطہ تک ایسی راہیں تلاش کریں جن پر حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب اس نقطہ پر تفاعل کا حد غیر موجود ہو گا۔

حد کی غیر موجودگی کی دو راہ پرکھ

اگر (x,y) تک نقطہ (x_0,y_0) ایسی دو مختلف راہوں سے پہنچے جن پر $f(x,y)$ کے حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ غیر موجود ہو گا۔



شکل 13.20: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تفاعل $f(x,y) = 2x^2y/(x^4+y^2)$ استمراری ہے۔

□

مثال 13.13: دکھائیں کہ $(0,0)$ تک (x,y) پہنچنے سے درج ذیل تفاعل کا کوئی حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 13.20)۔

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

حل: منحنی $y = kx^2,\ x \neq 0$ پر اس تفاعل کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$f(x,y)\big|_{y=kx^2} = \left.\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

یوں

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2 \text{ پر}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\, f(x,y)\big|_{y=kx^2} \right] = \frac{2k}{1+k^2}$$

ہو گا جو آمد راہ پر منحصر ہے۔ اگر (x,y) نقطہ $(0,0)$ تک قطع مکافی $y = x^2$ راہ پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k=1$ ہے، تب حد 1 کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ اگر (x,y) نقطہ $(0,0)$ تک محور x پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k=0$ ہے، تب حد 0 کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں دو راہ پرکھ کے تحت $(0,0)$ تک (x,y) کے پہنچنے سے f کا کوئی حد حاصل نہیں ہو گا۔ □

یہاں آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ مبدا تک نقطہ (x,y) کے پہنچنے سے بہت سارے مختلف حد ملتے ہیں لہٰذا یہ کہنا درست نہیں کہ f کا حد غیر موجود ہے۔ یہی وہ نقطہ ہے جسے سمجھنا ضروری ہے۔ حد کی تعریف کہتی ہے کہ حد کی قیمت راہ پر منحصر نہیں ہو سکتی۔

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو متغیرات کے تفاعل کے حد اور استمرار کی تعریف اور ان تفاعل کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، طاقت اور مرکب کے بارے میں حاصل نتائج تین یا تین سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہیں۔ درج ذیل تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہیں

$$\ln(x+y+z) \quad \text{اور} \quad \frac{y\sin z}{x-1}$$

اور درج ذیل طرز کا حد، جہاں N نقطہ (x,y,z) کو ظاہر کرتا ہے، حاصل کرنے کے لئے تفاعل میں نقطہ پر کیا جاتا ہے۔

$$\lim_{N\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

سوالات

حد کی قیمت کی تلاش

سوال 1 تا سوال 12 میں حد کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

سوال 2: $\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$

سوال 3: $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

سوال 4: $\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

سوال 5: $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x\tan y$

سوال 6: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{x^2+y^3}{x+y+1}$

سوال 7: $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

سوال 8: $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left|1+x^2y^2\right|$

سوال 9: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

سوال 10: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{\lvert xy\rvert - 1}$

سوال 11: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$

سوال 12: $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{\cos y+1}{y-\sin x}$

حاصل تقسیم کے حد

حاصل تقسیم کو ترتیب دیتے ہوئے سوال 13 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

سوال 13: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

سوال 14: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

سوال 15: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$

سوال 16: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq x^2}} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

سوال 17: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

سوال 18: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

سوال 19: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

سوال 20: $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

تین متغیرات کے تفاعل کا حد

سوال 21 تا سوال 26 میں حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\displaystyle\lim_{N\to(1,3,4)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

سوال 22: $\displaystyle\lim_{N\to(1,-1,-1)} \frac{2xy+yz}{x^2+z^2}$

سوال 23: $\displaystyle\lim_{N\to(3,3,0)} (\sin^2 x+\cos^2 y+\sec^2 z)$

سوال 24: $\displaystyle\lim_{N\to(-1/4,\pi/2,2)} \tan^{-1} xyz$

سوال 25: $\displaystyle\lim_{N\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$

سوال 26: $\displaystyle\lim_{N\to(0,-2,0)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مستوی میں استمرار

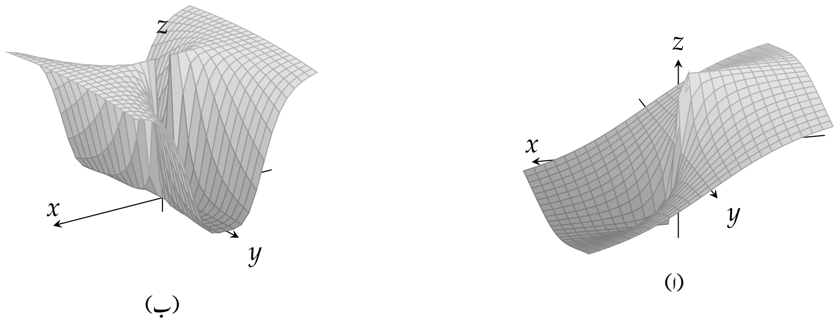
سوال 27 تا سوال 30 میں کس نقطہ (x,y) پر مستوی میں تفاعل استمراری ہیں؟

سوال 27: (ا) $f(x,y)=\sin(x+y)$ (ب) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

سوال 28: (ا) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ (ب) $f(x,y)=\frac{y}{x^2+1}$

سوال 29: (ا) $g(x,y)=\sin\frac{1}{xy}$ (ب) $g(x,y)=\frac{x+y}{2+\cos x}$

سوال 30: (ا) $g(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$ (ب) $g(x,y)=\frac{1}{x^2-y}$



شکل 13.21

فضا میں استمرار

سوال 31 تا سوال 34 میں کس نقطہ (x, y, z) پر فضا میں تفاعل استمراری ہیں؟

سوال 31: (ا) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ (ب) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

سوال 32: (ا) $f(x,y,z) = \ln xyz$ (ب) $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z$

سوال 33: (ا) $h(x,y,z) = xy\sin\frac{1}{z}$ (ب) $h(x,y,z) = \frac{1}{x^2+z^2-1}$

سوال 34: (ا) $h(x,y,z) = \frac{1}{\lvert y\rvert+\lvert z\rvert}$ (ب) $h(x,y,z) = \frac{1}{\lvert xy\rvert+\lvert z\rvert}$

نقطہ پر حد غیر موجود

نقطہ تک مختلف راہ پر پہنچتے ہوئے سوال 35 تا سوال 42 میں دکھائیں کہ $(x,y) \to (0,0)$ کرتے ہوئے تفاعل کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 35: $f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (شکل 13.21-ا)

سوال 36: $h(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$ (شکل 13.21-ب)

سوال 37: $h(x,y) = \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

سوال 38: $f(x,y) = \frac{xy}{\lvert xy\rvert}$

سوال 39: $g(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

سوال 40: $g(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$

سوال 41: $h(x,y)=\frac{x^2+y}{y}$

سوال 42: $h(x,y)=\frac{x^2}{x^2-y}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 43: کیا $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ کی صورت میں (x_0,y_0) کا معین ہونا لازمی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 44: اگر $f(x_0,y_0)=3$ ہو تب درج ذیل کے بارے میں (ا) (x_0,y_0) پر استمراری f کی صورت میں،

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

(ب) (x_0,y_0) پر غیر استمراری f کی صورت میں کیا کہا جا سکتا ہے۔ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

دو متغیرات کے تفاعل کا مسئلہ بیچ کہتا ہے کہ اگر ایک قرص، جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو، کے اندر تمام $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ پر $g(x,y)\le f(x,y)\le h(x,y)$ ہو، اور $(x,y)\to(x_0,y_0)$ کرتے ہوئے g اور h دونوں کا حد متناہی اور L ہو تب

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

ہو گا۔ سوال 45 تا سوال 50 میں اس نتیجہ کا سہارا لیتے ہوئے جواب دیں۔

سوال 45: کیا

$$1-\frac{x^2y^2}{3}<\frac{\tan^{-1}xy}{xy}<1$$

جانتے ہوئے آپ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan^{-1}xy}{xy}$$

کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 46: کیا

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

جانتے ہوئے

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 47: کیا $1 \leq |\sin(1/x)|$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

سوال 48: کیا $1 \leq |\cos(1/y)|$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$$

سوال 49: (ا)دوبارہ مثال 13.12 کو پڑھیں۔اب درج ذیل کلیہ میں $m = \tan\theta$ پر کر کے اس کی سادہ صورت حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ f کی قیمت لکیر کے زاویہ میلان پر منحصر ہی گی۔

$$f(x,y)\big|_{y=mx} = \frac{2m}{1+m^2}$$

(ب) جزو-ا میں حاصل کلیہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ لکیر $y = mx$ پر چلتے ہوئے $(x,y) \to (0,0)$ کرنے سے f کے حد کی قیمت -1 تا 1 ہو سکتی ہے جو قریب پہنچنے کی راہ کے زاویہ پر منحصر ہو گی۔

سوال 50: $f(0,0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں جو درج ذیل کو مبدا پر بھی استمراری بناتا ہو۔

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

قطبی محدد میں تبادلہ

اگر کارتیسی محدد میں $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ کے حصول میں پیش رفت نہ ہو تب قطبی محدد میں حد تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ کرتے ہوئے $r \to 0$ کے لئے حاصل تفاعل کا حد تلاش کریں۔ دوسرے الفاظ میں یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ آیا کوئی ایسا عدد L پایا جاتا ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو:

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کا ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام r اور θ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$|r| < \delta \implies \left|f(r,\theta) - L\right| < \epsilon$$

اگر ایسا L موجود ہو تب

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = L \tag{13.4}$$

ہو گا۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0$$

ہو گا۔ آخری عدم مساوات کی تصدیق کرنے کی خاطر ہمیں دکھانا ہو گا کہ $f(r,\theta) = r\cos^3\theta$ اور L مساوات 13.4 کو مطمئن کرتے ہیں۔ یعنی ہمیں دکھانا ہو گا کہ کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام r اور θ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$|r| < \delta \implies \left|r\cos^3\theta - 0\right| < \epsilon \tag{13.5}$$

چونکہ

$$\left|r\cos^3\theta\right| = |r|\left|\cos^3\theta\right| \le |r|\cdot 1 = |r|$$

ہوتا ہے لہٰذا $\delta = \epsilon$ لینے سے تمام r اور θ کے لئے مساوات 13.5 مطمئن ہو گا۔

اس کے برعکس $|r|$ جتنا بھی چھوٹا کیوں نا ہو درج ذیل تفاعل کی قیمت 0 سے 1 تک ہو سکتی ہے لہٰذا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ غیر موجود ہو گا۔

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

درج بالا دو تفاعل میں $r \to 0$ کرتے ہوئے حد کی موجودگی یا غیر موجودگی کا مسئلہ سیدھا تھا۔ البتہ ضروری نہیں کہ قطبی محدد میں تبادلہ سود مند ثابت ہو، بلکہ بعض اوقات ایسا کرنے سے ہم بالکل غلط نتیجہ کی طرف راغب ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، تمام سیدھے خطوط $\theta = c$

، جہاں c مستقل ہے، پر حد موجود ہو سکتا ہے اگرچہ وسیع معنوں میں حد غیر موجود ہو گا۔ مثال 13.13 میں اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے۔ قطبی محدد میں $r \neq 0$ کے لئے $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ درج ذیل ہو گا۔

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

اب θ برقرار رکھتے ہوئے $r \to 0$ کرنے سے حد 0 ملتا ہے۔ البتہ راہ $y = x^2$ پر $r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + (r\cos^2\theta)^2} \\ &= \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1 \end{aligned}$$

سوال 51 تا سوال 56 میں $(x,y) \to (0,0)$ کرتے ہوئے f کا حد تلاش کریں یا دکھائیں کہ اس کا حد غیر موجود ہے۔

سوال 51: $f(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

سوال 52: $f(x,y) = \cos\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$

سوال 53: $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$

سوال 54: $f(x,y) = \frac{2x}{x^2+x+y^2}$

سوال 55: $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$

سوال 56: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 57 اور سوال 58 میں $f(0,0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں کہ f مبدا پر بھی استمراری ہو۔

سوال 57: $f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$

سوال 58: $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$

$\delta\epsilon$ تعریفات کا استعمال

سوال 59: دکھائیں کہ حد کی تعریف (مساوات 13.1) میں $\delta\epsilon$ پر عائد شرط مساوات 13.2 میں دی گئی شرط کے مترادف ہے۔

سوال 60: $(x, y) \to (x_0, y_0)$ کرتے ہوئے تفاعل $f(x, y)$ کے حد کی باضابطہ $\delta\epsilon$ تعریف کو مد نظر رکھتے ہوئے $(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)$ کرتے ہوئے $g(x, y, z)$ کے حد کی تعریف پیش کریں۔چار غیر تابع متغیرات کے تفاعل $h(x, y, z, t)$ کی حد کی تعریف کیا ہو گی؟

سوال 61 تا سوال 64 میں تفاعل $f(x, y)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یا دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ (x, y) کے لئے

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies \left|f(x, y) - f(0, 0)\right| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے یا دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام (x, y) کے لئے

$$|x| < \delta, \quad |y| < \delta \implies \left|f(x, y) - f(0, 0)\right| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے۔ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

سوال 61: $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \epsilon = 0.01$

سوال 62: $f(x, y) = \frac{y}{x^2+1}, \quad \epsilon = 0.05$

سوال 63: $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+1}, \quad \epsilon = 0.01$

سوال 64: $f(x, y) = \frac{x+y}{2+\cos x}, \quad \epsilon = 0.02$

سوال 65 تا سوال 68 میں تفاعل $f(x, y, z)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یا دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ (x, y, z) کے لئے

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta \implies \left|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)\right| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے یا دکھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام (x, y, z) کے لئے

$$|x| < \delta, \quad |y| < \delta, \quad |z| < \delta \implies |f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے۔ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

سوال 65: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.015$

سوال 66: $f(x, y, z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008$

سوال 67: $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}, \quad \epsilon = 0.015$

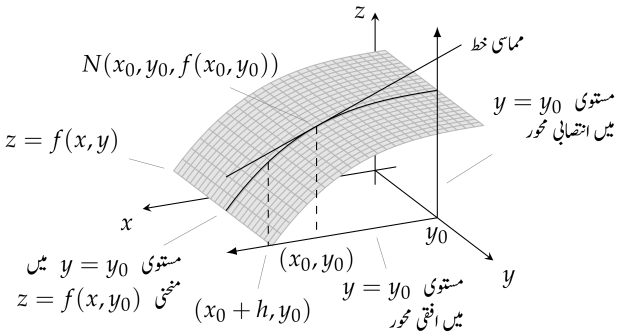
سوال 68: $f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03$

سوال 69: دکھائیں کہ ہر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل $f(x, y, z) = x + y - z$ استمراری ہے۔

سوال 70: دکھائیں کہ مبدا پر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ استمراری ہے۔

13.3 جزوی تفرقات

جب ماسوائے ایک غیر تابع متغیر کے ہم باقی تمام کو برقرار رکھیں اور اس ایک متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا تفرق لیں تو ہمیں "جزوی" تفرق حاصل ہوتا ہے۔ اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ جزوی تفرقات کیسے پائے جاتے ہیں اور واحد متغیر کے تفاعل کے تفرق کے قواعد بروئے کار لاتے ہوئے جزوی تفرقات کی قیمت کے حصول کے بارے میں بتایا جائے گا۔



شکل 13.22: مستوی $y=y_0$ اور سطح $z=f(x,y)$ کا تقاطع۔

تعریفات اور علامتیت

اگر تفاعل $f(x,y)$ کے دائرہ کار میں (x_0,y_0) ایک نقطہ ہو تب انتصابی سطح $y=y_0$ سطح $z=f(x,y)$ کو منحنی $z=f(x,y_0)$ میں مس کرے گا (شکل 13.22)۔ یہ منحنی مستوی $y=y_0$ میں تفاعل $z=f(x,y_0)$ کی ترسیم ہو گی۔اس مستوی میں افقی محدد x ہے؛ انتصابی محدد z ہے۔

ہم نقطہ (x_0,y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق سے مراد نقطہ $x=x_0$ پر $f(x,y_0)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0,y_0) پر x کے لحاظ سے $f(x,y)$ **کا جزوی تفرق**[32]

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \tag{13.6}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔(آپ ∂ کو d کی ایک قسم تصور کریں۔)

□

نقطہ $N(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ پر مستوی $y=y_0$ میں منحنی $z=f(x,y_0)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0,y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے۔ نقطہ N پر منحنی کا مماسی خط، مستوی $y=y_0$ میں وہ خط ہے جو N سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب y کی قیمت برقرار y_0 رکھی جائے تب x کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0,y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0,y_0) پر $\boldsymbol{i}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

partial derivative[32]

جزوی تفرق کی علامت اس چیز پر منحصر ہو گی جس پر ہم زور دینا چاہتے ہیں۔یوں درج ذیل علامت اس وقت استعمال کیے جائیں گے جب ہم نقطہ (x_0, y_0) پر زور دینا چاہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

سائنس اور انجینئری میں درج ذیل علامت مقبول ہے جہاں تفاعل کا صریحاً ذکر کیے بغیر نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے z کا جزوی تفرق لیا گیا ہے۔

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

جہاں جزوی تفرق کو ایک تفاعل تصور کرنا مقصود ہو وہاں درج ذیل علامت استعمال کیے جائیں گے، جہاں x لے لحاظ سے f (یا z) کے جزوی تفرقات لیے گئے ہیں۔

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے $f(x, y)$ کے جزوی تفرق کی تعریف، x کے لحاظ سے f کی جزوی تفرق کی تعریف کی طرح ہے۔ہم x کو x_0 رکھتے ہوئے y_0 پر y کے لحاظ سے $f(x_0, y)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے $f(x, y)$ **کا جزوی تفرق**[33]

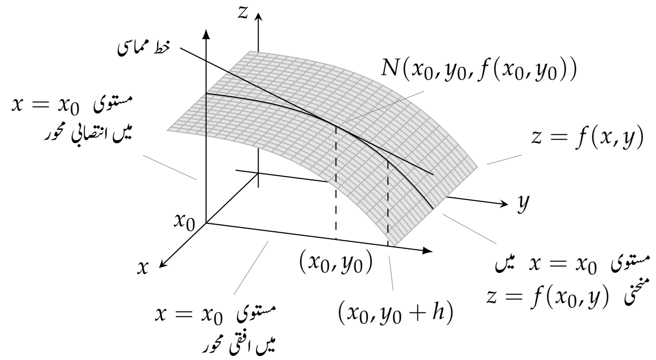
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{13.7}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

نقطہ $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر مستوی $x = x_0$ میں منحنی $z = f(x_0, y)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے (شکل 13.23)۔ نقطہ N پر منحنی کا مماسی خط، مستوی $x = x_0$ میں وہ خط ہے جو N سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب x کی قیمت برقرار x_0 رکھی جائے تب y کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0, y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0, y_0) پر $\boldsymbol{j}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

partial derivative[33]



شکل 13.23: مستوی $x = x_0$ اور سطح $z = f(x, y)$ کا تقاطع۔

متغیر y کے لحاظ سے جزوی تفرق کو x کے لحاظ سے جزوی تفرق کی طرح لکھا جاتا ہے:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y$$

دھیان رہے کہ نقطہ (x_0, y_0) پر اب سطح $z = f(x, y)$ کے ساتھ دو مماسی خط منسلک ہیں (شکل 13.24)۔ شکل 13.24 میں ظاہری طور پر دو مماس کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔کیا ایسے دو مماسی کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی ہو گا؟ جزوی تفرق کے بارے میں مزید معلومات جاننے کے بعد ہم اس سوال کا جواب دے پائیں گے۔

حساب

جیسا ہم مساوات 13.6 سے جانتے ہیں، y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیگا۔اسی طرح مساوات 13.7 کہتی ہے کہ x کو مستقل رکھتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیگا۔

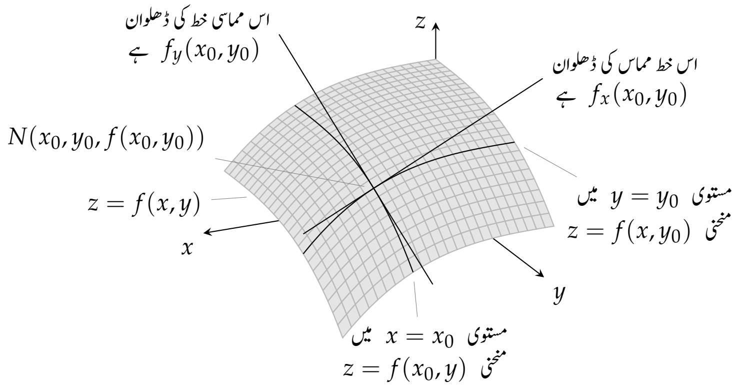
مثال 13.14: نقطہ $(4, -5)$ پر درج ذیل کے لئے $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

حل: ہم y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial x}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

نقطہ $(4, -5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial x}$ کی قیمت $2(4) + 3(-5) = -7$ ہو گی۔



شکل 13.24: نقطہ N پر دو مماس کا تعین کردہ سطح ظاہری طور پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔

اسی طرح ہم x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial y}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1$$

نقطہ $(4, -5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمت $3(4) + 1 = 13$ ہو گی۔ □

مثال 13.15: تفاعل $f(x, y) = y \sin xy$ کا $\frac{\partial f}{\partial y}$ معلوم کریں۔

حل: ہم x کو مستقل تصور جبکہ f کو y اور $\sin xy$ کا حاصل ضرب تصور کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy\end{aligned}$$

□

فنیات

جزوی تفرق کمپیوٹر آپ کو حساب میں کئی بعد تک مدد فراہم کر سکتا ہے۔ آپ ایک غیر تابع متغیر کے علاوہ تمام متغیرات کی قیمتیں فراہم کر کے واحد متغیر کے لحاظ سے جزوی تفرق معلوم کر کے ترسیم کر سکتے ہیں۔ جزوی تفرق اور سادہ تفرق کے لئے کمپیوٹر کی زبان میں عموماً ایک جیسی اصطلاح استعمال کی جاتی ہے۔ جزوی تفرقات کے حصول میں کمپیوٹر ضرور استعمال کریں۔

مثال 13.16: تفاعل $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$ کے لئے f_x تلاش کریں۔

حل: ہم f کو حاصل تقسیم تصور کر کے y کو مستقل رکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f_x=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2y}{y+\cos x}\Big)&=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}\\ &=\frac{(y+\cos x)(0)-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}\end{aligned}$$

□

مثال 13.17: مستوی $x=1$ قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ کو قطع مکافی میں قطع کرتا ہے۔نقطہ $(1,2,5)$ پر اس قطع مکافی کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

حل: مماس کی ڈھلوان نقطہ $(1,2)$ پر جزوی تفرق $\frac{\partial z}{\partial y}$ کی قیمت ہو گی:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,2)}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\bigg|_{(1,2)}=2y|_{(1,2)}=2(2)=4$$

تصدیق کی خاطر ہم قطع مکافی کو واحد متغیر تفاعل $z=(1)^2+y^2=1+y^2$ کی مستوی $x=1$ میں ترسیم تصور کر کے $y=2$ پر اس کی ڈھلوان حاصل کرتے ہیں۔ یہ ڈھلوان جس کو سادہ تفرق سے حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\bigg|_{y=2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(1+y^2)\bigg|_{y=2}=2y|_{y=2}=4$$

□

سادہ تفرق کی طرح جزوی تفرق کے لئے بھی خفی تفرق کار آمد ہے۔

مثال 13.18: اگر درج ذیل مساوات دو غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z دیتی ہو جس کا جزوی تفرق موجود ہو تب $\frac{\partial z}{\partial x}$ تلاش کریں۔

$$yz-\ln z=x+y$$

حل: ہم y کو مستقل اور z کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \\
y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 + 0 && y \text{ مستقل} \\
\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 && \tfrac{\partial}{\partial x}(yz) = y\tfrac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{z}{yz - 1}
\end{aligned}
$$

□

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی تعریف، دو متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی طرح ہے۔یہ ایک متغیر کے لحاظ سے سادہ تفرق ہوتے ہیں جبکہ باقی تمام متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔

مثال 13.19: اگر x ، y اور z غیر تابع متغیرات ہوں جن کا تفاعل

$$f(x, y, z) = x\sin(y + 3z)$$

ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y + 3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\sin(y + 3z) \\
&= x\cos(y + 3z)\frac{\partial}{\partial z}(y + 3z) = 3x\cos(y + 3z)
\end{aligned}
$$

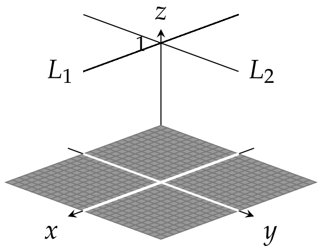
□

مثال 13.20: متوازی جڑے برقی مزاحمت

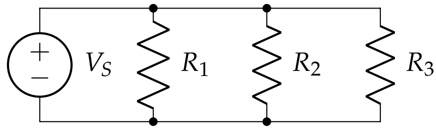
اگر R_1 ، R_2 اور R_3 مزاحمت متوازی جڑے ہوں تب ان کا معادل مزاحمت R درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 13.25)۔

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \tag{13.8}$$

برقی مزاحمتوں کی قیمتیں $R_1 = 30\,\Omega$ ، $R_2 = 45\,\Omega$ ، $R_3 = 90\,\Omega$ لیتے ہوئے جزوی تفرق $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ حاصل کریں۔



شکل 13.26: تفاعل f چار کھلے ربعات اور لکیر L_1، L_2 پر مشتمل ہے (مثال 13.21)۔



شکل 13.25: اس طرح جوڑے گئے مزاحمتوں کو متوازی جڑا کہتے ہیں۔

حل: ہم R_1 اور R_3 کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ تلاش کرنے کی خاطر مساوات 13.8 کے دونوں اطراف کا R_2 کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$
$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = 0 - \frac{1}{R_2^2} + 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

مزاحمتوں کی دی گئی قیمتیں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90} = \frac{3+2+1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

یوں $R = 15\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

□

استمرار اور جزوی تفرق کی موجودگی کا تعلق

ایک نقطہ پر ایک تفاعل کا x اور y دونوں کے لحاظ سے جزوی تفرق موجود ہونے کے باوجود تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ یہ واحد متغیر تفاعل سے مختلف ہے جہاں تفاعل کے تفرق کی موجودگی اس کی استمرار یقینی بناتی ہے۔ ہاں (جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے)، اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، $f(x,y)$ کے جزوی تفرق موجود ہوں جو پورے قرص میں استمراری ہوں تب (x_0, y_0) پر f استمراری ہو گا۔

مثال 13.21: درج ذیل تفاعل

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$$

نقطہ $(0,0)$ پر غیر استمراری ہے (شکل 13.26)۔ لکیر $y=x$ پر چلتے ہوئے نقطہ (x,y) کا (x_0,y_0) تک پہنچنے سے f کا حد 0 حاصل ہوتا ہے جبکہ $f(0,0)=1$ ہے۔ نقطہ $(0,0)$ پر f کے جزوی تفرقات f_x ، f_y ، جو شکل میں خط L_1 اور L_2 کی ڈھلوان ہیں، دونوں موجود ہیں۔ □

دو رتبی جزوی تفرقات

تفاعل $f(x,y)$ کو دو بار تفرق کرنے سے ہمیں اس تفاعل کا دو رتبی تفرق ملتا ہے۔ان تفرقات کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{یا} \quad f_{xx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{یا} \quad f_{yy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \quad \text{یا} \quad f_{yx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \quad \text{یا} \quad f_{xy}$$

ان کی تعریفی مساوات درج ذیل ہیں

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

جہاں تفرق لینے کی ترتیب دھیان سے دیکھیں۔

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

پہلے y اور بعد میں x کے ساتھ تفرق لیں

$$f_{yx}=(f_y)_x$$

ان کا بھی یہی مطلب ہے۔

مثال 13.22: اگر $f(x,y)=x\cos y+ye^x$ ہو تب

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos y+ye^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-\sin y+e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=ye^x$$

اور درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= -x\sin y + e^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x\cos y
\end{aligned}$$

□

مسئلہ یولر

آپ نے مثال 13.22 میں دھیان دیا ہو گا کہ مدغم دو رتبی جزوی تفرقات

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

کی قیمتیں ایک جیسی تھیں۔یہ محض اتفاق نہیں ہے۔جہاں بھی f ، f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} استمراری ہوں یہ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 13.2: مدغم تفرق مسئلہ یا مسئلہ یولر
اگر ایک کھلے خطہ میں، جس میں نقطہ (a,b) پایا جاتا ہو، $f(x,y)$ اور اس کے جزوی تفرقات f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} معین ہوں اور (a,b) پر یہ تمام استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) \tag{13.9}$$

مسئلہ یولر (مسئلہ 13.2) کا ثبوت آپ کو ضمیمہ ط میں ملے گا۔

مسئلہ 13.2 کہتا ہے کہ مدغم دو رتبی جزوی تفرق کے حصول میں ہم کسی بھی ترتیب سے تفرق لے سکتے ہیں۔ بعض اوقات ایسا مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

مثال 13.23: درج ذیل تفاعل کے لئے $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ تلاش کریں۔

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$$

حل: ہمیں $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ کہتا ہے کہ کہ پہلے y کے لحاظ سے تفرق لیں اور بعد میں x کے لحاظ سے تفرق لیں۔البتہ اگر ہم پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تفرق لیں تب نتیجہ زیادہ جلدی اور زیادہ آسانی سے صرف دو قدموں میں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1$$

اب پہلے y اور بعد میں x کا تفرق لیتے ہوئے اسی کو دوبارہ حل کر کے دیکھیں۔ □

مزید بلند رتبہ کے جزوی تفرقات

عملی استعمال میں یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں عموماً انہیں سے واسطہ ہو گا۔جہاں تک تفاعل کے بلند تفرقات کی بات ہے، ہم ایک تفاعل کا تفرق جتنی بار چاہیں لیں سکتے ہیں بشرطیکہ ایسے تفرقات موجود ہوں۔ یوں ہم تین رتبی اور چار رتبی تفرقات لے سکتے ہیں جنہیں درج ذیل علامتوں کی طرز پر ظاہر کیا جائے گا۔

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y} = f_{yyx}$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y} = f_{yyxx}$$

دو رتبی تفرق کی طرح، تفرق کی ترتیب غیر اہم ہے جب تک تمام تفرقات استمراری ہوں۔

سوالات

یک رتبی جزوی تفرق کی تلاش

سوال 1 تا سوال 22 میں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$

سوال 2: $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

سوال 3: $f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$

سوال 4: $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

سوال 5: $f(x,y) = (xy-1)^2$

سوال 6: $f(x,y) = (2x-3y)^3$

سوال 7: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

سوال 8: $f(x,y) = (x^3+y/2)^{2/3}$

سوال 9: $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$

سوال 10: $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

سوال 11: $f(x,y) = \frac{x+y}{xy-1}$

سوال 12: $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

سوال 13: $f(x,y) = e^{x+y+1}$

سوال 14: $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+y)$

سوال 15: $f(x,y) = \ln(x+y)$

سوال 16: $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

سوال 17: $f(x,y) = \sin^2(x-3y)$

سوال 18: $f(x,y) = \cos^2(3x-y^2)$

سوال 19: $f(x,y) = x^y$

سوال 20: $f(x,y) = \log_y x$

سوال 21: تمام t کے لئے g استمراری ہے $f(x,y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$

سوال 22: $f(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(xy)^n \quad (\lvert xy\rvert < 1)$

سوال 23 تا سوال 34 میں f_x ، f_y اور f_z تلاش کریں۔

سوال 23: $f(x,y,z)=1+xy^2-2z^2$

سوال 24: $f(x,y,z)=xy+yz+xz$

سوال 25: $f(x,y,z)=x-\sqrt{y^2+z^2}$

سوال 26: $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال 27: $f(x,y,z)=\sin^{-1}(xyz)$

سوال 28: $f(x,y,z)=\sec^{-1}(x+yz)$

سوال 29: $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$

سوال 30: $f(x,y,z)=yz\ln(xy)$

سوال 31: $f(x,y,z)=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

سوال 32: $f(x,y,z)=e^{-xyz}$

سوال 33: $f(x,y,z)=\tanh(x+2y+3z)$

سوال 34: $f(x,y,z)=\sinh(xy-z^2)$

سوال 35 تا سوال 40 میں ہر متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا جزوی تفرق تلاش کریں۔

سوال 35: $f(t,\alpha)=\cos(2\pi t-\alpha)$

سوال 36: $g(u,v)=v^2e^{2u/v}$

سوال 37: $h(\rho,\theta,\phi)=\rho\sin\theta\cos\phi$

سوال 38: $g(r,\theta,z)=r(1-\cos\theta)-z$

سوال 39: قلب کا کام

$W(P,H,\delta,v,g)=PH+\frac{H\delta v^2}{2g}$

سوال 40: $A(c,h,k,m,q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$

دو رتبی جزوی تفرق کا حصول

سوال 41 تا سوال 46 میں تفاعل کے تمام دو رتبی جزوی تفرقات تلاش کریں۔

سوال 41: $f(x,y) = x + y + xy$

سوال 42: $f(x,y) = \sin xy$

سوال 43: $g(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$

سوال 44: $h(x,y) = xe^y + y + 1$

سوال 45: $r(x,y) = \ln(x,y)$

سوال 46: $s(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

مدغم جزوی تفرقات

سوال 47 تا سوال 50 میں $w_{xy} = w_{yx}$ کی تصدیق کریں۔

سوال 47: $w = \ln(2x + 3y)$

سوال 48: $w = e^x + x\ln y + y\ln x$

سوال 49: $w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

سوال 50: $w = x\sin y + y\sin x + xy$

سوال 51: بغیر قلم اٹھائے بتائیں کہ درج ذیل میں x کے لحاظ سے پہلے اور y کے لحاظ سے بعد میں یا اس کے الٹ حل کرتے ہوئے f_{xy} زیادہ جلدی حاصل ہو گا۔

ا. $f(x,y) = x\sin y + e^y$

ب. $f(x,y) = \frac{1}{x}$

ج. $f(x,y) = y + \frac{x}{y}$

د. $f(x,y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2+1)$

ھ. $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

و. $f(x,y) = x \ln xy$

سوال 52: درج ذیل میں تمام کا پانچ رتبی جزوی تفرق $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$ صفر کے برابر ہے۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر آپ کس متغیر کے لحاظ سے پہلے جزوی تفرق لیں گے؟ بغیر کچھ لکھے جواب دینے کی کوشش کریں۔

ا. $f(x,y) = y^2x^4e^x + 2$

ب. $f(x,y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$

ج. $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

د. $f(x,y) = xe^{y^2/2}$

جزوی تفرق کی تعریف کا استعمال

سوال 53 اور سوال 54 میں جزوی تفرق کی تعریف بذریعہ حد استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ پر تفاعل کا جزوی تفرق حاصل کریں۔

سوال 53: $f(x,y) = 1 - x + y - 3x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (1,2)$

سوال 54: $f(x,y) = 4 + 2x - 3y - xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (-2,1)$

سوال 55: فرض کریں $w = f(x,y,z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial z}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(1,2,3)$ پر $f(x,y,z) = x^2yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

سوال 56: فرض کریں $w = f(x,y,z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(-1,0,3)$ پر $f(x,y,z) = -2xy^2 + yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

خفی جزوی تفرقات

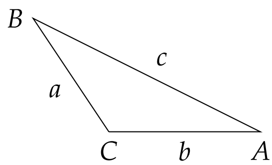
سوال 57: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1, 1, 1)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

سوال 58: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1, -1, -3)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xz + y\ln x - x^2 + 4 = 0$$

سوال 59 اور سوال 59 درج ذیل مثلث کے بارے میں ہے۔



سوال 59: A کو خفی طور پر a ، b اور c کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial A}{\partial a}$ اور $\frac{\partial A}{\partial b}$ تلاش کریں۔

سوال 60: a کو خفی طور پر A ، b اور B کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial a}{\partial A}$ اور $\frac{\partial a}{\partial B}$ تلاش کریں۔

سوال 61: غیر تابع متغیرات x اور y کی صورت میں تفاعل u اور v مساوات $x = v\ln u$ اور $y = u\ln v$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق v_x ، جو موجود ہے، کو u اور v کی صورت میں لکھیں۔ (اشارہ: دونوں مساوات کا تفرق x کے لحاظ سے لے کر v_x کے لئے حل کریں۔)

سوال 62: غیر تابع متغیرات u اور v کی صورت میں تفاعل x اور y مساوات $u = x^2 - y^2$ اور $v = x^2 - y$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق $\frac{\partial x}{\partial u}$ اور $\frac{\partial y}{\partial u}$ ، جو موجود ہیں تلاش کریں۔ (اشارہ: سوال 61 میں دیا گیا اشارہ دیکھیں۔) اب $s = x^2 + y$ لیتے ہوئے $\frac{\partial s}{\partial u}$ حاصل کریں۔

مساوات لاپلاس

تین بعدی مساوات لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \tag{13.10}$$

کو فضا میں برقرار حال حراری تقسیم $T = f(x, y, z)$ ، تجاذبی مخفی قوہ اور برقی ساکن مخفی قوہ مطمئن کرتے ہیں۔ مساوات 13.10 سے جزو $\frac{\partial f}{\partial z}$ نکالنے سے دو بعدی مساوات لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{13.11}$$

حاصل ہوتی ہے جو مستوی میں مخفی قوہ اور برقرار حال حراری تقسیم بیان کرتی ہے۔

دکھائیں کہ سوال 63 تا سوال 68 میں دیا ہر ایک تفاعل مساوات لاپلاس میں سے کسی ایک کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 63: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

سوال 64: $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$

سوال 65: $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

سوال 66: $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 67: $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

سوال 68: $f(x, y, z) = e^{2x+4y} \cos 5z$

مساوات موج

سمندر کے کنارے کھڑے ہو کر سمندری امواج کی لی گئی تصویر میں نشیب و فراز کا ایک منظم نقش نظر آتا ہے۔ ہمیں فضا میں فاصلہ کے لحاظ سے دوری انتصابی حرکت نظر آتی ہے۔ پانی میں کھڑے ہو کر ہم گزرتی امواج کی بنا پانی کا اتار چھڑاو محسوس کرتے ہیں۔ ہم وقت کے لحاظ سے دوری انتصابی حرکت دیکھتے ہیں۔ طبیعیات میں اس خوبصورت تشاکلی کو یک بعدی مساوات موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{13.12}$$

بیان کرتی ہے جہاں قد موج w ، فاصلاتی متغیر x ، لمحاتی متغیر t اور موج کی رفتار c ہے۔

سمندری سطح پر فاصلہ x ہو گا لیکن دیگر عملی استعمال میں x ارتعاش پذیر تار کے ساتھ ساتھ فاصلہ، ہوا میں فاصلہ (صوتی امواج)، یا فضا میں فاصلہ (امواج نور) ہو سکتا ہے۔ عدد c کی قیمت موج کی قسم اور ذریعہ پر منحصر ہو گا۔

دکھائیں کہ سوال 69 تا سوال 75 میں تمام تفاعل مساوات موج کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 69: $w = \sin(x + ct)$

سوال 70: $w = \cos(2x + 2ct)$

سوال 71: $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$

سوال 72: $w = \ln(2x + 2ct)$

سوال 73: $w = \tan(2x - 2ct)$

سوال 74: $w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

سوال 75: $w = f(u)$ ؛ جہاں f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل، $u = a(x + ct)$ اور a مستقل ہیں۔

13.4 تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات

اس حصہ میں ہم تفرق پذیری کی تعریف کے بعد خط بندی اور تفریقیں پیش کرتے ہیں۔ اس حصہ کے ریاضی نتائج مسئلہ بڑھوتری کی بنا ہیں۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، کثیر المتغیر تفاعل کے زنجیری قاعدہ کی بنیاد بھی یہی مسئلہ ہے۔

تفرق پذیری

تفرق پذیری کا ابتدا نقطہ بڑھوتری کا تصور ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ اگر $x = x_0$ پر ایک متغیر کا تفاعل $y = f(x)$ قابل تفرق ہو تب x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \Delta x$ کرنے سے f کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x \tag{13.13}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\Delta x \to 0$ اور $\epsilon \to 0$ ہیں۔دو متغیرات کے تفاعل کے لئے یہی خاصیت تفرق پذیری کی تعریف بنتی ہے۔اعلٰی احصاء کا مسئلہ بڑھوتری ہمیں یقین دلاتا ہے کہ یہ خاصیت کار آمد رہے گی:

مسئلہ 13.3: **دو متغیرات کے تفاعل کا مسئلہ بڑھوتری**
فرض کریں پورا کھلا خطہ R میں، جس میں نقطہ (x_0, y_0) پایا جاتا ہو، $f(x, y)$ کے جزوی اول تفرقات معین ہیں اور (x_0, y_0) پر f_x اور f_y استمراری ہیں۔تب نقطہ (x_0, y_0) کو R میں دوسری جگہ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ منتقل کرنے سے f میں رونما ہونے والی تبدیلی

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

درج ذیل روپ کی مساوات کو مطمئن کرے گی جہاں $\Delta x,\, \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1,\, \epsilon_2 \to 0$ ہوں گے۔

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{13.14}$$

آپ ضمیمہ ط میں اس کا ثبوت دیکھ کر جان سکیں گے کہ ϵ_1 ، ϵ_2 کہاں سے آتے ہیں۔ آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ اسی طرح کے نتائج دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کے تفاعل کے لئے کار آمد ہوں گے۔

تعریف: اگر $f_x(x_0, y_0)$ اور $f_y(x_0, y_0)$ موجود ہوں اور (x_0, y_0) پر f مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو تب (x_0, y_0) پر $f(x, y)$ **قابل تفرق** ہو گا۔ اگر f اپنے دائرہ کار کے اندر ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب f **قابل تفرق**[34] ہو گا۔

□

اس تعریف کی روشنی میں ہمیں مسئلہ 13.3 کا ضمنی نتیجہ ملتا ہے جس کے تحت جس تفاعل کے جزوی اول تفرقات استمراری ہوں وہ تفاعل قابل تفرق ہو گا۔

ضمنی نتیجہ 13.1: **برائے مسئلہ 3۔13** اگر پورے کھلا وقفہ R میں تفاعل $f(x, y)$ کے جزوی تفرقات f_x اور f_x استمراری ہوں تب R کے ہر نقطہ پر f تفرق پذیر ہو گا۔

ہم مساوات 13.14 میں z کی جگہ $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ پر کر کے اس کو

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{13.15}$$

لکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ اگر Δx اور Δy صفر کے قریب پہنچنے کی کوشش کرے تب نئی مساوات کا دایاں ہاتھ $f(x_0, y_0)$ کے قریب پہنچتا ہے۔اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل $f(x, y)$ ان تمام نقطوں پر استمراری ہو ہو گا جہاں یہ تفرق پذیر ہو۔

مسئلہ 13.4: اگر نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل $f(x, y)$ تفرق پذیر ہو تب (x_0, y_0) پر f استمراری ہو گا۔

ہم مسئلہ 13.3 اور مسئلہ 13.4 سے دیکھتے ہیں کہ اگر اس پورے خطہ میں، جس میں نقطہ (x_0, y_0) پایا جاتا ہو، f_x اور f_y استمراری ہوں تب (x_0, y_0) پر $f(x, y)$ لازماً استمراری ہو گا۔ یاد رہے کہ دو متغیرات کا تفاعل اس نقطہ پر غیر استمراری ہو سکتا ہے جہاں اس کا جزوی اول تفرق موجود ہو (مثال 13.21)۔ صرف موجودگی کافی نہیں ہے۔

---

[34] differentiable

دو متغیرات کے تفاعل کی خط بندی

دو متغیرات کے تفاعل پیچیدہ ہو سکتے ہیں اور بعض اوقات ہم چاہیں گے کہ ان کی جگہ ایسے نسبتاً سادہ تفاعل استعمال کریں جن کے ساتھ کام کرنا آسان ہو اور جو مخصوص عملی استعمال میں درکار درستگی دیتے ہوں۔ہم واحد متغیر کے تفاعل کی خط بندی کی طرز پر ایسا کرتے ہیں (حصہ 4.7)۔

فرض کریں تفاعل $z = f(x, y)$ نقطہ (x_0, y_0) پر قابل تفرق ہے اور ہم اس نقطہ پر f ، f_x اور f_y کی قیمتیں جانتے ہیں۔ ہم اس تفاعل کا ایسا متبادل چاہتے ہیں جو (x_0, y_0) کے قریب موثر ہو۔ چونکہ f قابل تفرق ہے لہٰذا نقطہ (x_0, y_0) پر مساوات 13.15 تفاعل f کے لئے کار آمد ہو گا۔یوں $\Delta x = x - x_0$ اور $\Delta y = y - y_0$ کی بڑھوتری سے (x_0, y_0) سے نقطہ (x, y) منتقل ہونے سے f کی نئی قیمت

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

ملتی ہے جہاں $\Delta x, \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ہو گا۔اگر Δx اور Δy چھوٹے ہوں تب $\epsilon_1 \Delta x$ اور $\epsilon_2 \Delta y$ آخر کار مزید چھوٹے ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{L(x,y)}$$

دوسرے لفظوں میں، جب تک Δx اور Δy چھوٹے ہوں، f کی قیمت تقریباً وہی ہو گی جو خطی تفاعل L کی ہو گی۔اگر f کے ساتھ کام کرنا دشوار ہو اور L ہمیں درکار درستگی دیتا ہو تب ہم f کی جگہ L استعمال کر سکتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر، جہاں تفاعل $f(x, y)$ قابل تفرق ہو، f کا **خط بند**[35] تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{13.16}$$

درج ذیل تخمین

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل f کی **معیاری خطی تخمین**[36] ہے۔

□

ہم دیکھیں گے کہ مستوی $z = L(x, y)$ سطح $z = f(x, y)$ کو نقطہ (x_0, y_0) پر مماسی ہے۔یوں جیسا واحد متغیر کی خط بندی مماسی خط تخمین دیتی ہے، اسی طرح دو متغیرات کے تفاعل کی خط بندی ہمیں مماسی مستوی تخمین دیتی ہے۔

---

[35] linearization
[36] standard linear approximation

مثال 13.24: نقطہ $(3,2)$ پر درج ذیل کی خط بند تخمین تلاش کریں۔

$$f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$$

حل: ہم مساوات 13.16 میں درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(x_0,y_0)&=\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}=8\\
f_x(x_0,y_0)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}=(2x-y)_{(3,2)}=4\\
f_y(x_0,y_0)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}=(-x+y)_{(3,2)}=-1
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
L(x,y)&=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad \text{13.16 مساوات}\\
&=8+(4)(x-3)+(-1)(y-2)=4x-y-2
\end{aligned}$$

نقطہ $(3,2)$ پر f کی خط بندی $L(x,y)=4x-y-2$ ہے۔ □

معیاری خطی تخمین کی درستگی

تخمین $f(x,y)\approx L(x,y)$ میں خلل کی تلاش میں ہم f کے دو رتبی جزوی تفرقات استعمال کرتے ہیں۔ فرض کریں ایک کھلا سلسلہ میں f کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں اور اس سلسلہ میں ایک مستطیل خطہ R جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو پایا جاتا ہو۔ اس مستطیل خطہ کو درج ذیل عدم مساوات ظاہر کرتے ہیں۔

$$|x-x_0|\le h,\quad |y-y_0|\le k$$

چونکہ R بند اور محدود ہے لہٰذا R میں تمام دو رتبی جزوی تفرقات کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں ہوں گی۔ اگر ان میں B سب سے بڑی قیمت ہو تب، جیسا آگے حصہ میں سمجھایا گیا ہے، پورے R میں معیاری خطی تخمین میں خلل $E(x,y)=f(x,y)-L(x,y)$ درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\left|E(x,y)\right|\le\frac{1}{2}B\left(|x-x_0|+|y-y_0|\right)^2$$

جب ہم اس عدم مساوات کو E کی اندازاً قیمت حاصل کرنے کے لئے استعمال کریں تب ہم f_{xx}، f_{yy} اور f_{xy}، جو B تعین کرتے ہیں، حاصل کرنے سے قاصر ہوں گے لہٰذا ہمیں بالائی حد بندی یعنی بد ترین قیمت پر گزارہ کرنا ہو گا۔ اگر R میں $\left|f_{xx}\right|$، $\left|f_{yy}\right|$

اور $\left|f_{xy}\right|$ کی مشترک بالائی حد بندی M ہو، تب B کی قیمت M کے برابر یا اس سے کم ہو گی لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\left|E(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2$$

اس عدم مساوات سے عموماً E کی تخمینی قیمت حاصل کی جاتی ہے۔ کسی M کے لئے $\left|E(x,y)\right|$ کی قیمت کم کرنے کے لئے ہم $|x-x_0|$ اور $|y-y_0|$ کو چھوٹا بناتے ہیں۔

معیاری خطی تخمین میں خلل

اگر ایک کھلا سلسلہ میں f کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں اور اس سلسلہ میں ایک مستطیل خطہ R جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو پایا جاتا ہو اور R پر $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ اور $|f_{xy}|$ کی بالائی حد بندی M ہو تب R پر $f(x,y)$ کا متبادل

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

استعمال کرنے سے پیدا خلل $E(x,y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\left|E(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2 \tag{13.17}$$

مثال 13.25: ہم نے مثال 13.24 میں $(3,2)$ پر درج ذیل کی خط بندی کی۔

$$f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

مستطیل

$$R: \quad |x-3| \leq 0.1, \quad |y-2| \leq 0.1$$

پر تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ کے خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔ اس حد بندی کو مستطیل کے مرکز پر f کی قیمت $f(3,2)$ کا فی صد لکھیں۔

حل: ہم درج ذیل عدم مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\left|E(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2 \qquad \text{مساوات } 13.17$$

ہم معمول کے تفرق سے دیکھتے ہیں کہ f_{xx}، f_{yy} اور f_{xy} تینوں مستقل ہیں:

$$\left|f_{xx}\right| = |2| = 2, \quad \left|f_{xy}\right| = |-1| = 1, \quad \left|f_{yy}\right| = |1| = 1$$

ان تمام میں سب سے بڑی قیمت 2 ہے لہٰذا ہم M کو 2 کے برابر رکھ سکتے ہیں۔ اب $(x_0, y_0) = (3, 2)$ کے لئے R میں درج ذیل ہو گا۔

$$\left|E(x,y)\right| \le \frac{1}{2}(2)(|x-3| + |y-2|)^2$$

آخر میں چونکہ $|x-3| \le 0.1$ اور $|y-2| \le 0.1$ ہیں لہٰذا R پر

$$\left|E(x,y)\right| \le (0.1+0.1)^2 = 0.04$$

ہو گا۔ جب تب (x, y) مستطیل R میں رہے تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ میں خلل 0.04 سے زیادہ نہیں ہو گی جو R کے مرکز پر f کی قیمت کا $0.5\,\%$ ہے۔ $\square$

تفریق سے تبدیلی کی پیش گوئی

فرض کریں ہم نقطہ (x_0, y_0) پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ اور اس کے یک رتبی تفرقات کی قیمتیں جانتے ہیں اور ہم قریبی نقطہ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ پر منتقل ہونے سے f کی قیمت میں تبدیلی جاننا چاہتے ہیں۔ اگر Δx اور Δy چھوٹے ہوں تب (x_0, y_0) پر f اور اس کی خط بندی کی قیمت میں تبدیلی تقریباً ایک دوسرے جیسی ہو گی لہٰذا L کی تبدیلی سے ہمیں عملاً f کی تبدیلی حاصل ہو گی۔

تفاعل f میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

ہم مساوات 13.16 میں $x - x_0 = \Delta x$ اور $y - y_0 = \Delta y$ لیتے ہوئے L میں تبدیلی

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0+\Delta x, y_0+\delta y) - L(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ عموماً ΔL کے کلیہ کے ساتھ کام کرنا اتنا ہی مشکل ہو گا جتنا Δf کے کلیہ کے ساتھ کام کرنا مشکل ہو گا۔ البتہ L میں تبدیلی f کے کلیہ سے حاصل کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔ خطی تخمین L میں تبدیلی، ایک معلوم مستقل ضرب Δx جمع دوسرا معلوم مستقل ضرب Δy ہوتا ہے۔

ہم تبدیلی ΔL کو عموماً درج ذیل خیال آفریں علامتی روپ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x اور y میں تبدیلی Δx اور Δy کی بنا خط بندی میں تبدیلی کو $\mathrm{d}f$ ظاہر کرتی ہے۔

$$\mathrm{d}f = f_x(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y$$

حسب معمول ہم $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ کو x اور y کی تفریق کہتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کی مطابقتی تفریق کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) سے قریبی نقطہ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ منتقلی کی بنا f کی **تفریق**[37] درج ذیل ہو گی۔

$$\mathrm{d}f = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y \tag{13.18}$$

تفاعل f کی خط بندی میں اس تبدیلی کو f **کی کل تفریق**[38] کہتے ہیں۔

□

مثال 13.26: تبدیلی کے لئے حساسیت
آپ کا ادارہ دائری نلکی حوض بناتا ہے جس کا قد $25\,\mathrm{m}$ اور رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے۔ قد اور رداس میں چھوٹی تبدیلی کو حوض کے حجم کی حساسیت تلاش کریں۔

حل: حوض کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H(r,h) = \pi r^2 h$$

قد اور رداس میں چھوٹی تبدیلیوں $\mathrm{d}h$ اور $\mathrm{d}r$ کی بنا حوض کے حجم میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= H_r(5,25)\,\mathrm{d}r + H_h(5,25)\,\mathrm{d}h && \text{مساوات } 13.18\\
&= (2\pi rh)_{(5,25)}\,\mathrm{d}r + (\pi r^2)_{(5,25)}\,\mathrm{d}h\\
&= 250\pi\,\mathrm{d}r + 25\pi\,\mathrm{d}h
\end{aligned}$$

یوں r میں 1 اکائی تبدیلی H میں 250π اکائیاں تبدیلی پیدا کرتی ہے جبکہ h میں 1 اکائی تبدیلی H میں 25π اکائیاں تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ حوض کا حجم r میں چھوٹی تبدیلی کو، h میں چھوٹی تبدیلی کے لحاظ سے 10 گنّا زیادہ حساس ہے۔ یوں آپ کو رداس پر کھڑی نظر رکھنی ہو گی۔

اس کے برعکس اگر r اور h کی قیمتیں آپس میں بدل دی جائیں تا کہ $r = 25\,\mathrm{m}$ اور $h = 5\,\mathrm{m}$ ہوں تب کل تفریقی حجم

$$\mathrm{d}H = (2\pi rh)_{(25,5)}\,\mathrm{d}h + (\pi r^2)_{(25,5)}\,\mathrm{d}r = 250\pi\,\mathrm{d}r + 625\pi\,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔اب حوض کا حجم قد میں تبدیلی کو زیادہ حساس ہے۔

اس مثال سے ہم یہ قاعدہ سیکھتے ہیں کہ تفاعل ان متغیرات کو زیادہ حساس ہوتے ہیں جو سب سے بڑا جزوی تفرق دیتا ہو۔ □

---
[37] differential
[38] total differential

مطلق، نسبتی اور فی صف تبدیلی

ایک نقطہ (x_0, y_0) سے قریبی نقطہ منتقلی کی بنا تفاعل $f(x, y)$ کی قیمت میں تبدیلی کو تین مختلف طریقوں سے بیان کیا جا سکتا ہے:

	درست	اندازاً
مطلق تبدیلی	Δf	$\mathrm{d}f$
نسبتی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0,y_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0,y_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0,y_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0,y_0)} \times 100$

مثال 13.27: فرض کریں متغیرات r اور h کی قیمتوں $(r_0, h_0) = (1, 5)$ میں تبدیلی $\mathrm{d}r = 0.03$ اور $\mathrm{d}h = -0.1$ ہو۔ تفاعل $H = \pi r^2 h$ کی قیمت میں مطلق، نسبتی اور فی صد تبدیلی کتنی ہو گی؟

حل: تفاعل H میں تبدیلی جاننے کے لئے ہم

$$\mathrm{d}H = H_r(r_0, h_0)\,\mathrm{d}r + H_h(r_0, h_0)\,\mathrm{d}h$$

کی قیمت تلاش کر کے

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= 2\pi r_0 h_0\,\mathrm{d}r + \pi r_0^2 h\,\mathrm{d}h \\ &= 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) = 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں جبکہ $H(1, 5) = \pi(1)^2(5) = 5\pi$ ہے۔ یوں مطلق تبدیلی 0.2π ، نسبتی تبدیلی $\frac{0.2\pi}{5\pi} = 0.04$ اور فی صف تبدیلی $4\,\%$ ہو گی۔ □

مثال 13.28: ایک دائری بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ اس کا رداس اور قد ناپ کر حاصل کیا جاتا ہے۔ فرض کریں رداس اور قد کی ناپ میں خلل بالترتیب $2\,\%$ اور $0.5\,\%$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے۔ حجم کی قیمت حاصل کرنے میں خلل کتنا ہو سکتا ہے؟

حل: ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہیں۔

$$\left|\frac{\mathrm{d}r}{r} \times 100\right| \le 2, \quad \left|\frac{\mathrm{d}h}{h} \times 100\right| \le 0.5$$

چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{2\pi r h\,\mathrm{d}r + \pi r^2\,\mathrm{d}h}{\pi r^2 h} = \frac{2\,\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

ہے لہٰذا

$$\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\times 100\right| = \left|2\frac{\mathrm{d}r}{r}\times 100 + \frac{\mathrm{d}h}{h}\times 100\right|$$
$$\le 2\left|\frac{\mathrm{d}r}{r}\times 100\right| + \left|\frac{\mathrm{d}h}{h}\times 100\right| \le 2(2) + 0.5 = 4.5$$

ہو گا۔ہمارا اندازہ ہے کہ حجم کے حساب میں خلل $4.5\,\%$ سے زیادہ نہیں ہو گا۔ □

ہمیں r اور h کتنی درستگی سے ناپنا ہو گا تا کہ حجم کے حساب میں خلل مثلاً $2\,\%$ سے زیادہ نہ ہو؟ اس طرح کے سوالات کا جواب دینا مشکل ہے چونکہ اس کا کوئی ایک صحیح جواب نہیں پایا جاتا ہے۔چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = 2\frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}H}{H}$ کو $\frac{\mathrm{d}r}{r}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{h}$ مل کر قابو کرتے ہیں۔اگر ہم h درست ناپ سکیں تب عین ممکن ہے کہ r کی ناپ زیادہ درست نہ ہونے کی صورت میں بھی ہمیں درکار نتائج ملیں۔ اس کے برعکس h کی ناپ اتنی ناقص ہو سکتی ہے کہ ہم جتنا چاہیں r کی ناپ درست رکھیں، نتائج قابل قبول نہ ہوں۔

ایسی صورت میں ہم ناپی گئی قیمتوں (r_0, h_0) کو مرکز رکھتے ہوئے ایک مربع منتخب کرتے ہیں جس میں H کی قیمت $\pi r_0^2 h_0$ سے قابل قبول حد سے زیادہ تجاوز نہ کرتا ہو۔

مثال 13.29: نقطہ $(r_0, h_0 = (5, 12)$ کو مرکز رکھتے ہوئے ایسا مربع تلاش کریں جس میں حجم $H = \pi r^2 h$ کی قیمت ± 0.1 سے زیادہ تجاوز نہ کرے۔

حل: ہم $\mathrm{d}H$ کی درج ذیل تخمین لیتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = 2\pi r_0 h_0\,\mathrm{d}r + \pi r_0^2\,\mathrm{d}h = 2\pi(5)(12)\,\mathrm{d}r + \pi(5)^2\,\mathrm{d}h = 120\pi\,\mathrm{d}r + 25\pi\,\mathrm{d}h$$

چونکہ ہم جس خطہ کے اندر رہنا چاہتے ہیں وہ خطہ ایک مربع ہے لہٰذا ہم $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r$ لے کر

$$\mathrm{d}H = 120\pi\,\mathrm{d}r + 25\pi\,\mathrm{d}r = 145\pi\,\mathrm{d}r$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم اب پوچھتے ہیں، $\mathrm{d}r$ کتنا چھوٹا ہونا چاہیے تا کہ $|\mathrm{d}H|$ ی قیمت 0.1 سے کسی صورت زیادہ نہ ہو؟ ہم عدم مساوات

$$|\mathrm{d}H| \le 0.1$$

سے شروع کر کے dH کو dr کی صورت

$$|145\pi\,\mathrm{d}r| \le 0.1$$

میں لکھ کر dr کی بالائی حد بندی تلاش کرتے ہیں:

$$|\mathrm{d}r| \le \frac{0.1}{145\pi} \approx 2.1\times10^{-4} \qquad \text{نیچے پورا کرتے ہیں تاکہ غلطی سے } \mathrm{d}r \text{ بڑا نہ ہو جائے}$$

اب $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r$ کی بنا ہمارا مربع درج ذیل مساوات دیں گے۔

$$|r-5| \le 2.1\times10^{-4}, \quad |h-12| \le 2.1\times10^{-4}$$

جب تک (r,h) اس مربع میں رہیں، ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $|\mathrm{d}H|$ کی قیمت 0.1 کے برابر یا اس سے کم ہو گی اور ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $|\Delta H|$ بھی تقریباً اتنا ہو گا۔ $\square$

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی ایسا ہو گا۔

1. نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ پر تفاعل $f(x,y,z)$ کی خط بندی درج ذیل ہو گی۔

$$L(x,y,z) = f(N_0) + f_x(N_0)(x-x_0) + f_y(N_0)(y-y_0) + f_z(N_0)(z-z_0) \tag{13.19}$$

2. فرض کریں بند ٹھوس مستطیل R کا مرکز N_0 ہے۔ یہ مستطیل ایسے خطہ میں پایا جاتا ہے جہاں f کے دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ پورے R پر $|f_{xx}|$ ، $|f_{yy}|$ ، $|f_{zz}|$ ، $|f_{xy}|$ ، $|f_{xz}|$ اور $|f_{yz}|$ کی قیمتیں M کے برابر یا اس سے کم ہیں۔ تب پورے R میں f کی تخمین L میں **غلطی**[39] $E(x,y,z) = f(x,y,z) - L(x,y,z)$ کی بالائی حد بندی درج ذیل عدم مساوات دے گی۔

$$|E| \le \frac{1}{2}M(|x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|)^2 \tag{13.20}$$

3. اگر f کے دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں اور x ، y ، z کی قیمتیں چھوٹی تبدیلیوں $\mathrm{d}x$ ، $\mathrm{d}y$ ، $\mathrm{d}z$ کی بنا x_0 ، y_0 ، z_0 سے تبدیل ہو جائیں، تب کل تفریق

$$\mathrm{d} = f_x(N_0)\,\mathrm{d}x + f_y(N_0)\,\mathrm{d}y + f_z(N_0)\,\mathrm{d}z$$

تفاعل f میں نتیجتاً تبدیلی کی اچھی تخمین ہو گی۔

---

[39] error

مثال 13.30: نقطہ $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$ پر درج ذیل تفاعل کی خط بندی $L(x, y, z)$ تلاش کریں۔

$$f(x, y, z) = x^2 - xy + 3\sin z$$

تفاعل f کی جگہ تخمین L استعمال کرنے سے درج ذیل مستطیل میں پیدا خلل کی بالائی حد بندی دریافت کریں۔

$$R: \quad |x-2| \le 0.01, \quad |y-1| \le 0.02, \quad |z| \le 0.01$$

حل: ہم پہلے درج ذیل معلوم کرتے ہیں۔

$$f(2,1,0) = 2, f_x(2,1,0) = 3, f_y(2,1,0) = -2, f_z(2,1,0) = 3$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.19 درج ذیل دیتی ہے۔

$$L(x, y, z) = 2 + 3(x-2) + (-2)(y-1) + 3(z-0) = 3x - 2y + 3z - 2$$

اسی طرح پہلے دو رتبی جزوی تفرقات حاصل کرتے ہیں۔

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 0, f_{zz} = -3\sin z, f_{xy} = -1, f_{xz} = 0, f_{yz} = 0$$

مساوات 13.20 میں M کو $|-3\sin z|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی 3 لے سکتے ہیں۔یوں

$$|E| \le \frac{1}{2}(3)(0.01 + 0.02 + 0.01)^2 = 0.0024$$

ہو گا لہذا خلل 0.0024 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ □

مثال 13.31: یکساں بار بردار شہتیر کی جھول
ایک افقی مستطیل شہتیر جس کے دونوں سروں کو سہارا دیا گیا اور جس پر یکساں بوجھ (یکساں وزن فی میٹر لمبائی) ڈالا گیا ہو اس بوجھ کے نیچے جھک جائے گا۔ جھکاو S کو درج ذیل کلیہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$S = C\frac{px^4}{wh}$$

اس مساوات میں متغیرات کی تفصیل درج ذیل ہے۔

- p بوجھ (شہتیر کے ایک میٹر پر وزن۔وزن کی اکائی نیوٹن ہے۔)
- x دونوں سروں پر سہارا کے بیچ فاصلہ (میٹر)
- w شہتیر کی چوڑائی (میٹر)

h شہتیر کا قد (میٹر)

C ایک مستقل جو اس مادہ پر منحصر ہو گا جس سے شہتیر بنایا گیا ہو۔

ایک شہتیر کی لمبائی $4\,\mathrm{m}$ ، چوڑائی $10\,\mathrm{cm}$ اور قد $20\,\mathrm{cm}$ ہیں۔اس پر $100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ بوجھ ڈالا گیا ہے۔ جھول میں تبدیلی $\mathrm{d}S$ سے شہتیر کے بارے میں کیا نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے؟

حل: چونکہ S چار متغیرات p ، x ، w ، h کا تفاعل ہے لہٰذا اس کی کل تفریق $\mathrm{d}S$ درج ذیل ہو گی۔

$$\mathrm{d}S = S_p\,\mathrm{d}p + S_x\,\mathrm{d}x + S_w\,\mathrm{d}w + S_h\,\mathrm{d}h$$

کسی مخصوص p_0 ، x_0 ، w_0 ، h_0 کے لئے اس کو حل کرتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے سے

$$\mathrm{d}S = S_0\Big(\frac{\mathrm{d}p}{p_0} + \frac{4\,\mathrm{d}x}{x_0} - \frac{\mathrm{d}w}{w_0} - \frac{3\,\mathrm{d}h}{h_0}\Big)$$

ملتا ہے جہاں $S_0 = S(p_0, x_0, w_0, h_0) = Cp_0x_0^4/(w_0h_0^3)$ ہے۔

اگر $p_0 = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ، $x_0 = 4\,\mathrm{m}$ ، $w_0 = 0.1\,\mathrm{m}$ اور $h_0 = 0.2\,\mathrm{m}$ ہوں تب

$$\mathrm{d}S = S_0\Big(\frac{\mathrm{d}p}{100} + \mathrm{d}x - 10\,\mathrm{d}w - 15\,\mathrm{d}h\Big) \tag{13.21}$$

اس مساوات میں چونکہ $\mathrm{d}p$ اور $\mathrm{d}x$ کے عددی سر مثبت ہیں لہٰذا p اور x جھول بڑھاتے ہیں۔ اس کے برعکس $\mathrm{d}w$ اور $\mathrm{d}h$ کے عددی سر منفی ہیں لہٰذا w اور h جھول کم کرتے ہیں۔ چونکہ $\mathrm{d}p$ کا عددی سر $\frac{1}{100}$ ہے لہٰذا بوجھ کا جھول پر زیادہ اثر نہیں ہو گا۔ چونکہ $\mathrm{d}h$ کا عددی سر $\mathrm{d}w$ کے عدی سر سے بڑا ہے لہٰذا شہتیر کا قد $1\,\mathrm{cm}$ بڑھانے سے جھول زیادہ کم ہو گا۔ □

سوالات

جوابات

حصہ 13.1 صفحہ 1521

1) (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) خطوط $y - x = c$ ، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

3) (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) $z \geq 0$ ، (ج) $f(x,y) = 0$ کے لئے مرکز عین مبدا پر ہے؛ $f(x,y) \neq 0$ کے لئے وہ ترخیم جس کا مرکز $(0,0)$ جبکہ محور اکبر اور محور اصغر بالترتیب محور x اور محور y پر ہوں، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے، (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

5) (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) $f(x,y) = 0$ کے لئے محور x اور محور y جبکہ $f(x,y) \neq 0$ کے لئے قطع زائد جس کے متقارب محور x اور محور y ہیں ، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے، (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

7) (ا) وہ تمام (x,y) جو $x^2 + y^2 < 16$ کو مطمئن کرتے ہوں، (ب) $z \geq \frac{1}{4}$ ، (ج) وہ دائرے جن کے مرکز مبدا پر ہوں اور جن کے رداس $r < 4$ ہوں، (د) دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ سرحد ہے، (ہ) کھلا، (و) محدود

9) (ا) $(x,y) \neq (0,0)$ ، (ب) تمام حقیقی، (ج) وہ دائرے جن کے مراکز مبدا پر ہوں اور جن کے رداس $r > 0$ ہوں، (د) واحد نقطہ $(0,0)$ سرحدی نقطہ ہے، (ہ) کھلا، (و) غیر محدود

11) (ا) وہ تمام (x,y) جو $-1 \leq y - x \leq 1$ کو مطمئن کرتے ہوں، (ب) $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ ، (ج) $y - x = c$ طرز کے خطوط جہاں $-1 \leq c \leq 1$ ہے، (د) دو سیدھے خطوط $y = 1 + x$ اور $y = -1 + x$ سرحد ہیں، (ہ) بند، (و) غیر محدود

13) شکل 13.18 جو تفاعل $z = \cos x \cos y e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$ ہے۔

14) شکل 13.13 جو تفاعل $z = -\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ ہے۔

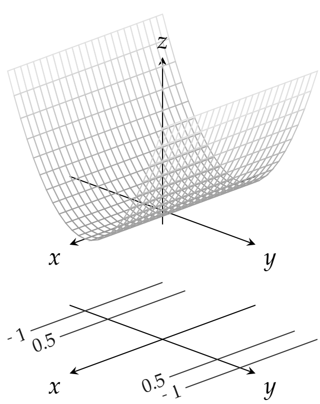
15) شکل 13.16 جو تفاعل $z = \frac{1}{4x^2+y^2}$ ہے۔

16) شکل 13.15 جو تفاعل $z = e^{-y} \cos x$ ہے۔

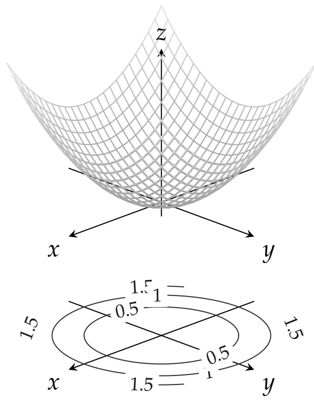
17) شکل 13.14 جو تفاعل $z = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ ہے۔

18) شکل 13.17 جو تفاعل $z = y^2 - y^4 - x^2$ ہے۔

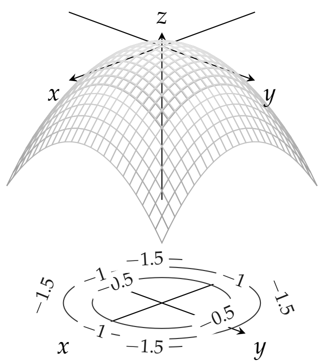
19)



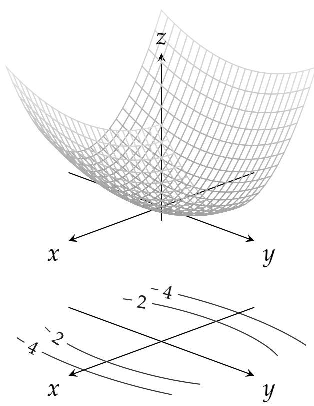
(21



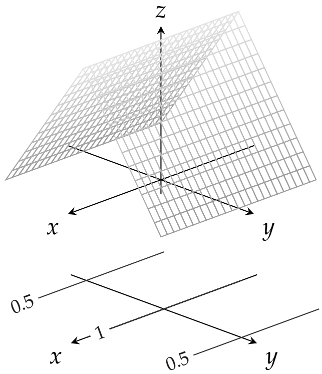
(23



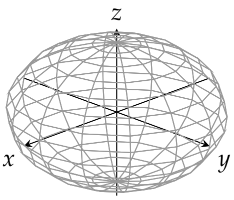
(25



(27

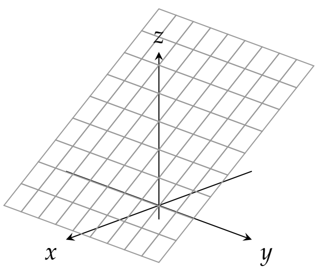


(29



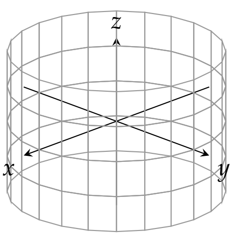
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$$

(31

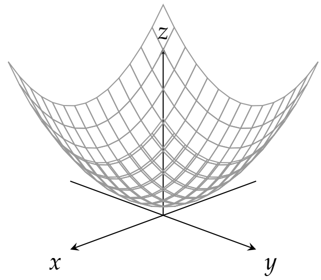


$$f(x,y,z)=x+z=1$$

(33



$$f(x,y,z)=x^2+y^2=1$$



35) $f(x,y,z)=z-x^2-y^2=1$ یعنی $z=x^2+y^2+1$

37) $x^2+y^2=10$

39) $\tan^{-1}y-\tan^{-1}x=2\tan^{-1}\sqrt{2}$

41) $\sqrt{x-y}-\ln z=2$

43) $\frac{x+y}{z}=\ln 2$

45) جی ہاں، 2000

47) 63 km

حصہ 13.2 صفحہ 1534

1) $\frac{5}{2}$

3) $2\sqrt{6}$

5) 1

7) $\frac{1}{2}$

9) 1

11) 0

13) 0

15) -1

17) 2

19) $\frac{1}{4}$

21) $\frac{19}{12}$

23) 2

25) 3

27) (ا) تمام (x,y)، (ب) ماسوائے $(0,0)$ تمام (x,y)

29) (ا) تمام (x,y) ماسوائے جہاں $x=0$ یا $y=0$ ہو، (ب) تمام (x,y)

31) (ا) تمام (x,y,z)، (ب) نلکی $x^2+y^2=1$ کی اندرون کے علاوہ تمام (x,y,z)

33) (ا) وہ تمام (x,y,z) جہاں $z\neq 0$ ہو، (ب) وہ تمام (x,y,z) جہاں $x^2+y^2\neq 1$ ہو۔

35) راہ $y=x, x>0$ اور $y=x, x<0$ لیں۔

37) راہ $y=kx^2$ لیں جہاں k ایک مستقل ہو۔

39) راہ $y=mx$ لیں جہاں m ایک مستقل $m\neq -1$ ہو۔

41) راہ $y=kx^2$ لیں جہاں k ایک مستقل $k\neq 0$ ہو۔

43) نہیں

45) حد 1 ہے۔

47) حد 0 ہے۔

49) (ا) $f(x,y)\big|_{y=mx}=\sin 2\theta$ جہاں $\tan\theta=m$ ہے۔

51) 0

53) غیر موجود ہے۔

55) $\frac{\pi}{2}$

57) $f(0,0)=\ln 3$

61) $\delta=0.1$

63) $\delta=0.005$

65) $\delta=\sqrt{0.015}$

67) $\delta=0.005$

حصہ 13.3 صفحہ 1553

1) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-3$

3) $\frac{\partial f}{\partial x}=2x(y+2),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1$

5) $\frac{\partial f}{\partial x}=2y(xy-1),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2x(xy-1)$

7) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

9) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-1}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{(x+y)^2}$

11) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y^2-1}{(xy-1)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$

13) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y+1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y+1}$

15) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x+y}$

17) $\frac{\partial f}{\partial x}=2\sin(x-3y)\cos(x-3y),$
$\frac{\partial f}{\partial y}=-6\sin(x-3y)\cos(x-3y)$

19) $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$

21) $\frac{\partial f}{\partial x}=-g(x),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=g(y)$

23) $f_x=y^2,\quad f_y=2xy,\quad f_z=-4z$

25) $f_x=1, f_y=-y(y^2+z^2)^{-1/2},$
$f_z=-z(y^2+z^2)^{-1/2}$

27) $f_x=\frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, f_y=\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}},$
$f_z=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

29) $f_x=\frac{1}{x+2y+3z}, f_y=\frac{2}{x+2y+3z},$
$f_z=\frac{3}{x+2y+3z}$

(31 $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad f_y = -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad f_z = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

(33 $f_x = \operatorname{sech}^2(x+2y+3z), \quad f_y = 2\operatorname{sech}^2(x+2y+3z), \quad f_z = 3\operatorname{sech}^2(x+2y+3z)$

(35 $\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi\sin(2\pi t - \alpha), \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin(2\pi t - \alpha)$

(37 $\frac{\partial h}{\partial \rho} = \sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = \rho\cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial h}{\partial \phi} = -\rho\sin\theta\sin\phi$

(39 $W_P(P,H,\delta,v,g) = H, \quad W_H(P,H,\delta,v,g) = P + \frac{\delta v^2}{2g}, \quad W_\delta(P,H,\delta,v,g) = \frac{Hv^2}{2g}, \quad W_v(P,H,\delta,v,g) = \frac{H\delta v}{g}, \quad W_g(P,H,\delta,v,g) = -\frac{H\delta v^2}{2g^2}$

(41 $\frac{\partial f}{\partial x} = 1+y, \frac{\partial f}{\partial y} = 1+x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

(43 $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y\cos x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 - \sin y + \sin x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y - y\sin x, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + \cos x$

(45 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

(47 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y}, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-6}{(2x+3y)^2}$

(49 $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$

(51 (ا) پہلے x ، (ب) پہلے y ، (ج) پہلے x ، (د) پہلے x ، (ہ) پہلے y ، (و) پہلے y

(53 $f_x(1,2) = -13, f_y(1,2) = -2$

(55 12

(57 -2

(59 $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc\sin A}, \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c\cos A - b}{bc\sin A}$

(61 $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ہ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ