

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
278	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
311	دیگر شرح تبدیلی	3.7

327	4	تفرق کا استعمال
327	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک درجی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
365	4.4	'y اور 'y کے ساتھ ترسیم
385	4.5	حد؟؟؟؟
387	1	ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyousofzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

سوالات

ترسیم شدہ تفاعل کا تجزیہ

سوال 1 تا سوال 8 میں دیے ترسیم کی نقطہ تصریف، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ کی نشاندہی کریں۔ ان وقفوں کی نشاندہی کریں جن پر ترسیم اوپر مقعر اور جن پر نیچے مقعر ہے۔

سوال 1: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$ ، شکل 4.49

جواب: $x = -1$ پر $\frac{3}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = 2$ پر -3 مقامی کم سے کم، نقطہ تصریف $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ ، چڑھاؤ $(-\infty, -1)$ اور $(2, \infty)$ پر، اتار $(-1, 2)$ پر، اوپر مقعر $(\frac{1}{2}, \infty)$ پر جبکہ نیچے مقعر $(-\infty, \frac{1}{2})$ پر۔

سوال 2: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$ ، شکل 4.50

سوال 3: $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$ ، شکل 4.51

جواب: $x = 0$ پر $\frac{3}{4}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = \pm 1$ پر 0 مقامی کم سے کم، $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ اور $(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ پر نقطہ تصریف، چڑھاؤ $(-1, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر، اتار $(-\infty, -1)$ اور $(0, 1)$ پر، $(-\infty, -\sqrt{3})$ اور $(\sqrt{3}, \infty)$ پر مقعر اوپر، $(-\sqrt{3}, 3)$ پر مقعر نیچے۔

سوال 4: $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$ ، شکل 4.52

سوال 5: $y = x + \sin 2x$ ، $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ ، شکل 4.53

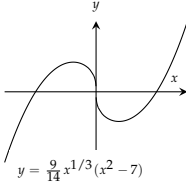
جواب: $x = -\frac{\pi}{3}$ پر $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -\frac{\pi}{3}$ پر $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی کم سے کم، $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ، $(0, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پر نقطہ تصریف، $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ پر چڑھاؤ، $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ اور $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ پر اتار، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ پر مقعر اوپر، $(0, \frac{\pi}{2})$ اور $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$ پر مقعر نیچے۔

سوال 6: $y = \tan x - 4x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، شکل 4.54

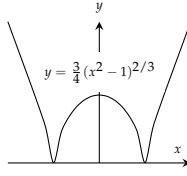
سوال 7: $y = \sin|x|$ ، $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ، شکل 4.55

جواب: $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر 1 مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -2\pi$ ، $x = 0$ اور $x = 2\pi$ پر صفر، $x = -\frac{3\pi}{2}$ اور $x = \frac{3\pi}{2}$ پر -1 مقامی کم سے کم، $(-\pi, 0)$ اور $(\pi, 0)$ نقطہ تصریف، $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ، $(0, \frac{\pi}{2})$ اور $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ پر چڑھاؤ، $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$ ، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ پر اتار، $(-2\pi, -\pi)$ اور $(\pi, 2\pi)$ پر مقعر اوپر، $(-\pi, \pi)$ پر مقعر نیچے۔

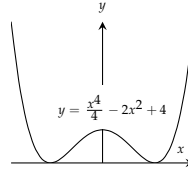
سوال 8: $y = 2 \cos x - \sqrt{2}x$ ، $-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ، شکل 4.56



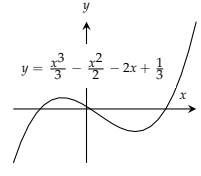
شکل 4.52



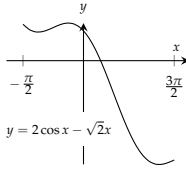
شکل 4.51



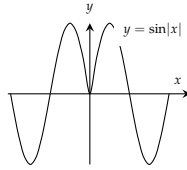
شکل 4.50



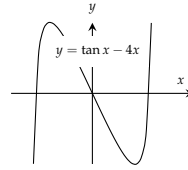
شکل 4.49



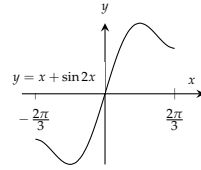
شکل 4.56



شکل 4.55



شکل 4.54



شکل 4.53

مساوات کی ترسیم

صفحہ 371 پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے سوال 9 تا سوال 40 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ مقامی انتہا اور نقطہ تقریب کی نشاندہی کریں۔

سوال 9: $y = x^2 - 4x + 3$
جواب: شکل 4.57

سوال 10: $y = 6 - 2x - x^2$

سوال 11: $y = x^3 - 3x + 3$
جواب: شکل 4.58

سوال 12: $y = x(6 - 2x)^2$

سوال 13: $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
جواب: شکل 4.59

سوال 14: $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

سوال 15: $y = (x - 2)^3 + 1$
جواب: شکل 4.60

$$y = 1 - (x + 1)^3 \quad \text{سوال 16:}$$

$$y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) \quad \text{سوال 17:}$$

$$y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4 \quad \text{سوال 18:}$$

$$y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x) \quad \text{سوال 19:}$$

$$y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2) \quad \text{سوال 20:}$$

$$y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5) \quad \text{سوال 21:}$$

$$y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4 \quad \text{سوال 22:}$$

$$y = x + \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{سوال 23:}$$

$$y = x - \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{سوال 24:}$$

$$y = x^{1/5} \quad \text{سوال 25:}$$

$$y = x^{3/5} \quad \text{سوال 26:}$$

$$y = x^{2/5} \quad \text{سوال 27:}$$

$$y = x^{4/5} \quad \text{سوال 28:}$$

$$y = 2x - 3x^{2/3} \quad \text{سوال 29:}$$

$$y = 5x^{2/5} - 2x \quad \text{سوال 30:}$$

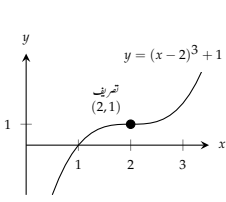
$$y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right) \quad \text{سوال 31:}$$

$$y = x^{2/3}(x - 5) \quad \text{سوال 32:}$$

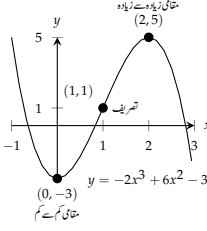
$$y = x\sqrt{8 - x^2} \quad \text{سوال 33:}$$

$$y = (2 - x^2)^{3/2} \quad \text{سوال 34:}$$

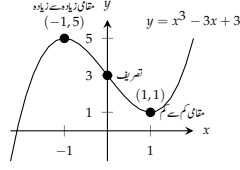
$$y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, x \neq 2 \quad \text{سوال 35:}$$



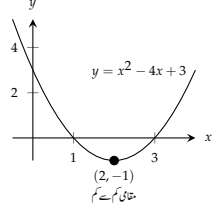
شکل 4.60: حل سوال 15



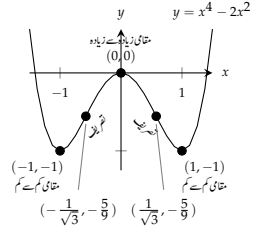
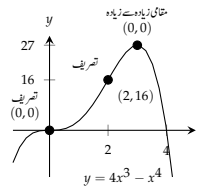
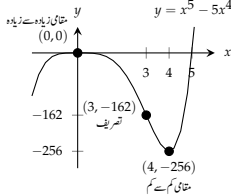
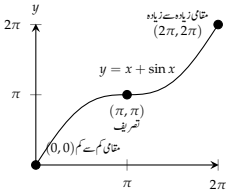
شکل 4.59: حل سوال 13



شکل 4.58: حل سوال 11



شکل 4.57: حل سوال 9



$$y = \frac{x^3}{3x^2+1} \quad \text{سوال 36}$$

$$y = |x^2 - 1| \quad \text{سوال 37}$$

$$y = |x^2 - 2x| \quad \text{سوال 38}$$

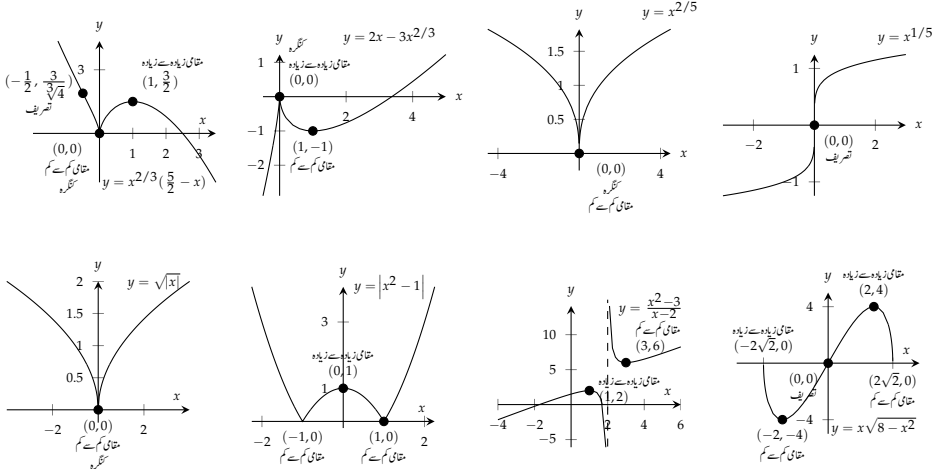
$$y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{سوال 39}$$

$$y = \sqrt{|x-4|} \quad \text{سوال 40}$$

y' سے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ
سوال 41 تا سوال 62 میں استمراری تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق y' دیا گیا ہے۔ y'' تلاش کرتے ہوئے صفحہ 371 پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

$$y' = 2 + x - x^2 \quad \text{سوال 41}$$

$$y' = x^2 - x - 6 \quad \text{سوال 42}$$



سوال 43: $y' = x(x-3)^2$

سوال 44: $y' = x^2(2-x)$

سوال 45: $y' = x(x^2 - 12)$

سوال 46: $y' = (x-1)^2(2x+3)$

سوال 47: $y' = (8x-5x^2)(4-x)^2$

سوال 48: $y' = (x^2 - 2x)(x-5)^2$

سوال 49: $y' = \sec^2 x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

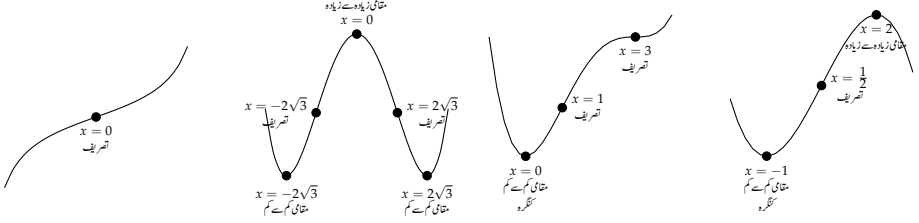
سوال 50: $y' = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 51: $y' = \cot \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$

سوال 52: $y' = \csc^2 \frac{\theta}{2}, 0 < \theta < 2\pi$

سوال 53: $y' = \tan^2 \theta - 1, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

سوال 54: $y' = 1 - \cot^2 \theta, 0 < \theta < \pi$



سوال 55: $y' = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 56: $y' = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال 57: $y' = (x+1)^{-2/3}$

سوال 58: $y' = (x-2)^{-1/3}$

سوال 59: $y' = x^{-2/3}(x-1)$

سوال 60: $y' = x^{-4/5}(x+1)$

سوال 61: $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

سوال 62: $y' = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

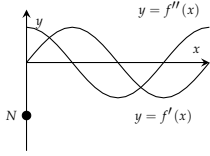
سوال 63 اور 66: y' اور y'' سے y کا خاکہ بنانا
 سوال 63 اور 66: N سے گزرتے ہوئے تفاعل $y = f(x)$ کے یک درجی تفرق y' اور دو درجی تفرق y'' کی ترسیم دی گئیں ہیں۔ ان کی نقل کر کے اس پر y کی تخمینی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 63: ترسیمات شکل 4.61 میں دیے گئے ہیں۔

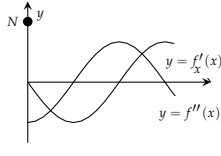
سوال 64: ترسیمات شکل 4.62 میں دیے گئے ہیں۔

سوال 65: ترسیمات شکل 4.63 میں دیے گئے ہیں۔

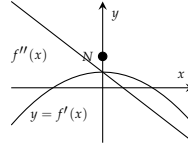
سوال 66: ترسیمات شکل 4.64 میں دیے گئے ہیں۔



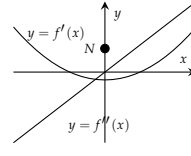
شکل 4.64



شکل 4.63



شکل 4.62

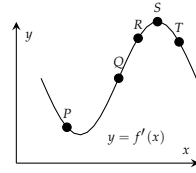


شکل 4.61

$$y' : \begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ -2 & 0 & 2 & \end{array}$$

$$y'' : \begin{array}{cccc} - & + & - & \\ -1 & 1 & \end{array}$$

شکل 4.66: تفرق کا نقش برائے سوال 70



شکل 4.65: ترسیم برائے سوال 67

نظریہ اور مثالیں

سوال 67: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 4.65 میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے پانچ نقطوں پر بتائیں کہ y' اور y'' مثبت، منفی یا صفر ہیں۔

سوال 68: درج ذیل پر پورا اترتا ہوا ہموار ترسیم کھینچیں۔

$$f(-2) = 8,$$

$$f(0) = 4,$$

$$f(2) = 0,$$

$$f'(x) > 0, |x| > 2,$$

$$f'(2) = f'(-2) = 0$$

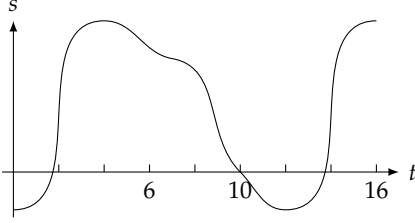
$$f'(x) < 0, |x| < 2$$

$$f''(x) < 0, x < 0$$

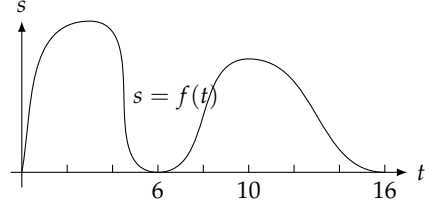
$$f''(x) > 0, x > 0$$

سوال 69: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو کو ترسیم کریں۔

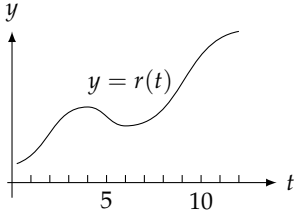
x	y	تفرق
$x < 2$		$y < 0, y'' > 0$
2	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
4	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
6	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$



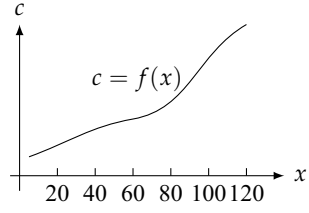
شکل 4.68: ترسیم برائے سوال 72



شکل 4.67: ترسیم برائے سوال 71



شکل 4.70: آمدن بالمقابل سال (سوال 74)



شکل 4.69: لاگت بالمقابل پیداوار (سوال 73)

سوال 70: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو نقطہ $(-2, 2)$ ، $(-1, 1)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ اور $(2, 2)$ سے گزرتا ہے اور جس کے یک درجی تفرق کی علامت کا نقش شکل 4.66 میں دیا گیا ہے کو ترسیم کریں۔

سوال 71: سمتی رفتار اور اسراع محدودی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.67 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

سوال 72: سمتی رفتار اور اسراع محدودی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.68 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

سوال 73: حاشیہ لاگت x اشیاء پیدا کرنے پر لاگت $c = f(x)$ کو شکل 4.69 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کتنی پیداوار پر حاشیہ لاگت گٹھنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے؟ جواب: تقریباً 60 پیداوار پر۔

سوال 74: ماہانہ آمدنی $y = r(t)$ بالمقابل مہینہ کو شکل 4.70 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کس دوران حاشیہ آمدنی بڑھ رہی ہے اور کب گھٹ رہی ہے؟

سوال 75: متقابل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ (اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)$$

سوال 76: متقابل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ (اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4)$$

سوال 77: $x > 0$ کے لئے ایسا متقابل $y = f(x)$ ترسیم کریں جس کا $f(1) = 0$ اور $f'(x) = \frac{1}{x}$ ہے۔ کیا متقابل کی مقعر کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 78: متقابل $y = f(x)$ کا دودرجی تفرق استمراری اور غیر صفر ہے۔ کیا اس کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 79: مستقل c ، b اور d کی صورت میں b کی کس قیمت کے لئے منحنی $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 80: افقی مماس۔ درست یا غلط؟ سمجھائیں

1. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت جفت ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

2. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت طاق ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

سوال 81: قطع مکانی

1. قطع مکانی $y = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ کا کنگرہ تلاش کریں۔

2. قطع مکانی کب اوپر مقعر اور کب نیچے مقعر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 82: کیا یہ درست ہے کہ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی مقررہ ایسے نقطہ پر تبدیل ہوتی ہے جہاں $f''(x) = 0$ ہو؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 83: دو درجی معنی۔ آپ دو درجی معنی $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 84: کعبی معنی۔ آپ کعبی معنی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 85 تا 88 میں تفاعل کی ترسیم پر نقطہ تصریف (اگر موجود ہو)، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطے تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کی نشاندہی کریں۔ ساتھ ہی تفاعل کا ایک درجی تفرق اور دو درجی تفرق بھی ترسیم کریں۔ جہاں یہ ترسیمات x محور کو قطع کرتی ہیں، ان کا تفاعل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اس کے علاوہ تفرق کے تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلقات ہیں؟

سوال 85: $y = x^6 - 5x^4 - 240$

سوال 86: $y = x^3 - 12x^2$

سوال 87: $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

سوال 88: $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

سوال 89: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ اور اس کے پہلے دو تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 90: تفاعل $f(x) = x \cos x$ اور اس کے پہلے دو تفرق کو $0 \leq x \leq 2\pi$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 91:

1. $k = 0$ اور اس کی قریبی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + kx$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ k کی قیمت کا ترسیم کی صورت پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟

2. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

3. k کی دیگر قیمتوں کے ساتھ تجربہ کر کے دیکھیں۔ $k \rightarrow \infty$ اور $k \rightarrow -\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

سوال 92:

ا. $k = -4$ اور اس کے قریبی قیمتوں کے لئے ایک ساتھ $-1 \leq x \leq 4$ پر $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$ ترسیم کریں۔ k کی قیمت ترسیم کی صورت پر کس طرح اثر انداز ہوتی ہے؟

ب. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا میز تلاش کریں $(ax^2 + bx + c)$ کا میز $b^2 - 4ac$ ہے۔ k کی کن قیمتوں کے لئے میز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

سوال 93:

ا. $-3 \leq x \leq 3$ کے لئے $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی استعمال سے مقعر، اٹھان اور نیچے گرنے کی تصدیق کریں۔ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر مخنی کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال 94:

ا. $-0.5 \leq x \leq 1.5$ پر $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی مدد سے مقعر، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطوں کی تصدیق کریں۔ مبدا کے بائیں جانب کون سی مقعر ہے؟ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر ترسیم کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال 95: کیا $x = -3$ کے قریب $y = x^2 + 3 \sin 2x$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

