

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
278	زنجیری قاعدہ	3.5
295	خفی تفرق اور ناطق قوت نما	3.6
311	دیگر شرح تبدیلی	3.7

327	4	تفرق کا استعمال
327	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
347	۱	ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 4

تفرق کا استعمال

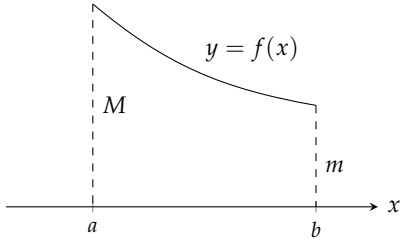
اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ ہم تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی کرتے ہیں اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کی صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔ مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ مکمل احصاء کی راہ ہموار کرتا ہے۔

4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں

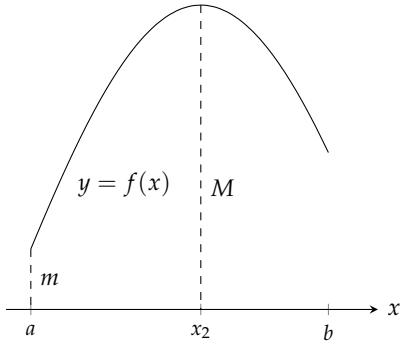
اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

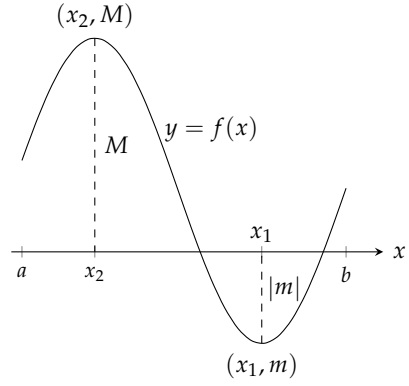
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کا اس دائرہ کار پر مطلق بلند تر قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت ہو گا جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں ان انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ مکمل احصاء کی نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔



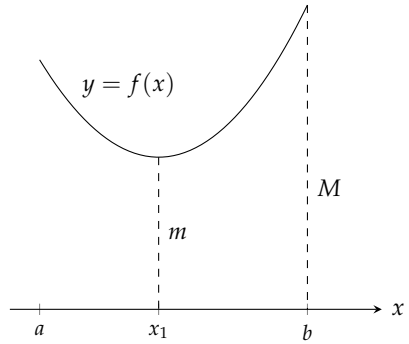
(ب) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم آخری نقطوں پر ہے۔



(د) زیادہ سے زیادہ اندرونی نقطہ جبکہ کم سے کم آخری نقطہ پر ہے۔

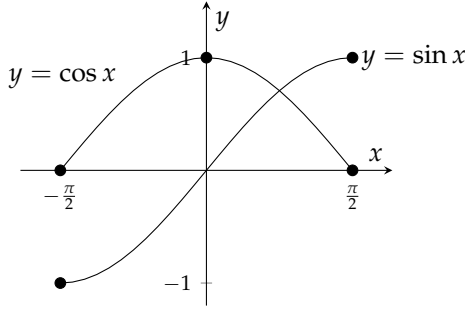


(ل) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔



(ج) کم سے کم اندرونی نقطہ جبکہ زیادہ سے زیادہ آخری نقطہ ہے۔

شکل 4.1: زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔



شکل 4.2: ترسیم برائے مثال 4.1

مسئلہ 4.1: استمراری تفاعل کا مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ
بند دائرہ کار I کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل f کا I پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت M اور مطلق کم سے کم قیمت m پایا جائے گا۔ یعنی I میں ایسا x_1 اور x_2 پایا جائے گا کہ $f(x_1) = m$ اور $f(x_2) = M$ ہوں اور I میں تمام x کے لئے $m \leq f(x) \leq M$ ہو (شکل 4.1)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

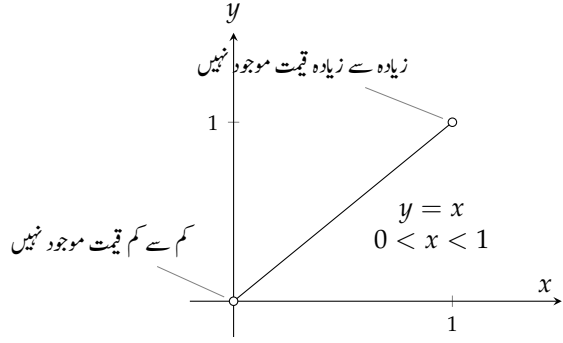
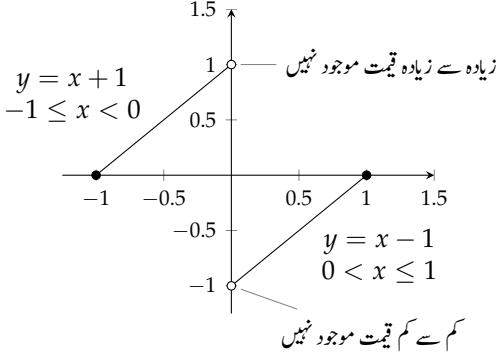
مثال 4.1: وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور دو بار کم سے کم قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔ اسی وقفے پر تفاعل $g(x) = \sin x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور ایک بار کم سے کم قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل 4.2)۔ □

جیسا شکل 4.3 اور شکل 4.4 واضح کرتے ہیں مسئلہ 4.1 میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.4 میں تفاعل

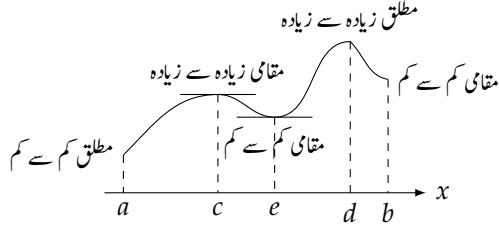
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-1, 1]$ پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ $x = 0$ پر، جس کی بنا تفاعل کا نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی اس کی کوئی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔



شکل 4.4: واحد ایک نقطہ عدم استمرار کی بنا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں غیر یقینی ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.3: کھلا وقفہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں ہے۔



شکل 4.5: مقامی اور مطلق انتہا۔

مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

شکل 4.5 میں تقابل کے پانچ انتہا نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اس تقابل کا کم سے کم نقطہ a پر ہے اگرچہ e پر بھی x کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے f کی قیمت کم ہے۔ نقطہ c پر تقابل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے جبکہ d پر اس کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔

تعریف: مطلق انتہائی قیمتیں

فرض کریں تقابل f کا دائرہ کار D ہے۔ نقطہ c پر تقابل f کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تب پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \leq f(c)$$

اور D میں c پر تب f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \geq f(c)$$

□

مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم کو مطلق انتہا¹ کہتے ہیں۔ انہیں عالمگیر² انتہا بھی کہتے ہیں۔

ایک جیسے قاعدہ کے تفاعل کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

مثال 4.2:

مطلق انتہا	دائرہ کار D	قاعدہ تفاعل
مطلق زیادہ سے زیادہ نہیں ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے	$(-\infty, \infty)$	(i) $y = x^2$
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے	$[0, 2]$	(ب) $y = x^2$
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت موجود نہیں ہے	$(0, 2]$	(ج) $y = x^2$
کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے	$(0, 2)$	(د) $y = x^2$

□

شکل 4.6 دیکھیں۔

تعریف: مقامی انتہا قیمت

تفاعل f کا کھلے دائرہ کار D میں اندرونی نقطہ c پر اس صورت مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جب D میں کسی بھی کھلا وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں تمام x کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ c پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

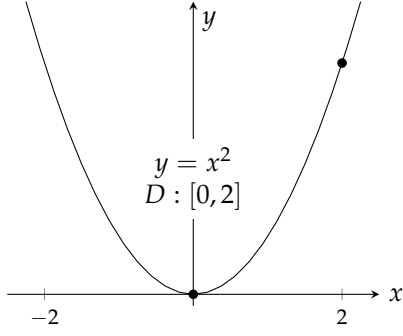
$$f(x) \geq f(c)$$

□

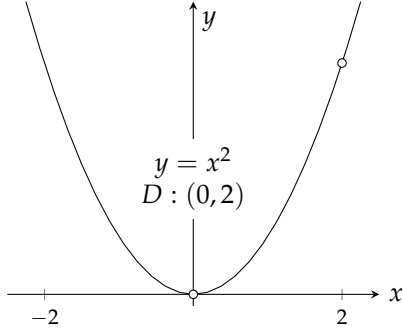
ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفہ کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔ یوں آخری سر c پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلا وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل 4.5 میں تفاعل f کا c اور d پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ a ، e اور b پر اس کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہیں۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت بھی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اپنی پڑوس میں بھی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ یوں تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتوں کی جدول میں مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی کم سے کم قیمتوں کی جدول میں مطلق کم سے کم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

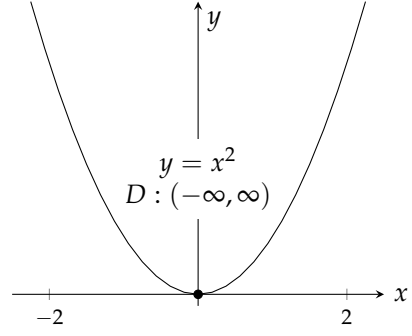
extrema¹
global²



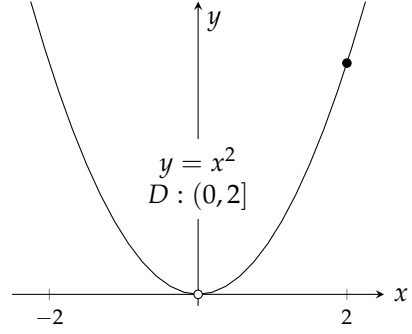
(ب) مطلق کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہیں



(د) نا مطلق زیادہ سے زیادہ اور نا مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(i) مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے

شکل 4.6: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال 4.2)۔

انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھاتا ہے تفاعل کے انتہا کی حصول کے لئے صرف چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہوگی۔

مسئلہ 4.2: یک درجی مسئلہ برائے مقامی انتہا فرض کریں تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ c پر f کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو اور c پر f' معین ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر $f'(c)$ کی قیمت صفر ہوگی ہم دکھاتے ہیں کہ $f'(c)$ مثبت نہیں ہو سکتا ہے اور کہ $f'(c)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے۔ صفر وہ واحد عدد ہے جو نا مثبت اور نا منفی ہے لہذا $f'(c)$ صفر ہوگا۔

فرض کریں کہ c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.7)۔ یوں c کے قریبی پڑوس میں تمام x پر $f(x) - f(c) \leq 0$ ہوگا۔ چونکہ c اندرونی نقطہ ہے لہذا $f'(c)$ کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہوگی۔

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ $x = c$ پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور $f'(c)$ کے برابر ہیں۔ ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔ چونکہ c کے دائیں جانب $x - c > 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہذا

$$(4.1) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ہوگا۔ اسی طرح c کے بائیں جانب $x - c < 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہذا

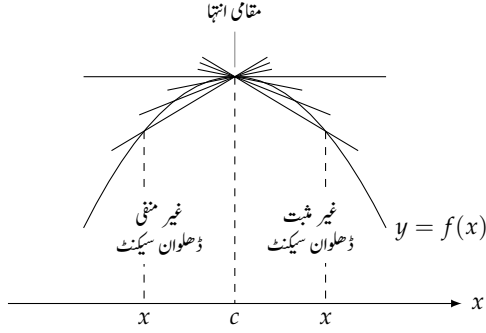
$$(4.2) \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

ہوگا۔ مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کو ملا کر $f'(c) = 0$ ملتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔ مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے $f(x) \geq f(c)$ استعمال کرنا ہوگا جس سے مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب $f'(c) = 0$ ہوگا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔



شکل 4.7: اندرونی نقطہ پر مقامی انتہا پر ڈھلوان صفر ہو گی (مسئلہ 4.2)۔

1. اندرونی نقطہ جہاں $f' = 0$ ہو۔

2. اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین ہو۔

3. f کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل f کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین یا صفر ہو کو نقطہ فاصل³ کہتے ہیں۔

□

خلاصہ

تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کی دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں۔

عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ 4.1 ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔ اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جاسکتا ہے کہ آیا نقطہ پر زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.3: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔
 حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا واحد نقطہ فاصل $f'(x) = 2x = 0$ یعنی $x = 0$ پر ہوگا۔ ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل $x = 0$ اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 1$ پر دیکھنی ہوں گی۔

$f(0) = 0$	نقطہ فاصل پر قیمت
$f(-2) = 4$	آخری نقطہ پر قیمت
$f(1) = 1$	آخری نقطہ پر قیمت

تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 ہے جو نقطہ $x = -2$ پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے۔ □

سوال 1: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $g(t) = 8t - t^4$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔
 حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہوگا جہاں $g'(t) = 0$ ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\ t^3 &= 2 \\ t &= 2^{1/3} \end{aligned}$$

ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں ہے۔ یوں تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی: (شکل 4.8)

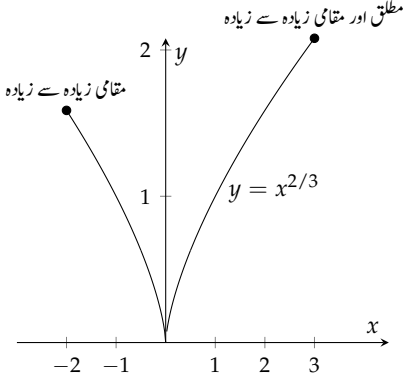
$g(-2) = -32$	مطلق کم سے کم قیمت
$g(1) = 7$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت

سوال 2: تفاعل $h(x) = x^{2/3}$ کی $[-2, -3]$ پر مطلق انتہائی تلاش کریں۔
 حل: یک درجی تفرق

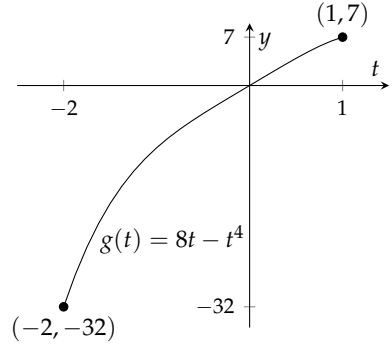
$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا ہے البتہ $x = 0$ پر یہ غیر معین ہے۔ اس نقطہ پر اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 3$ پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

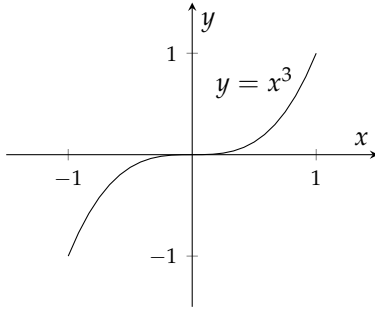
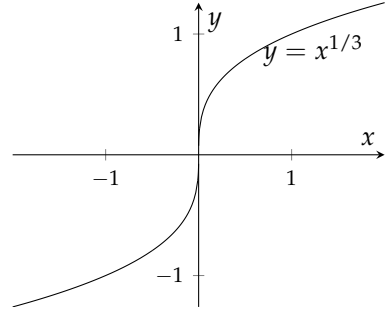
$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\ h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3} \end{aligned}$$



شکل 4.9: ترسیم برائے مثال 2



شکل 4.8: ترسیم برائے مثال 1

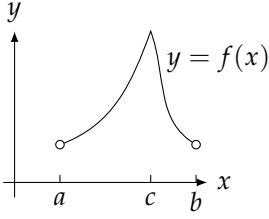
شکل 4.11: $x = 0$ پر $y = x^3$ کا کوئی انتہا نہیں پایا جاتا ہے اگرچہ اس نقطے پر $y' = 3x^2 = 0$ ہے۔شکل 4.10: نقطہ فاصل $x = 0$ پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $9^{1/3}$ ہے جو نقطہ $x = 3$ پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے (شکل 4.9)۔

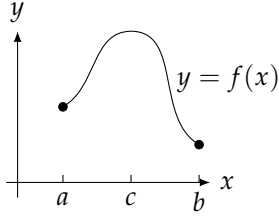
اگرچہ تفاعل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جاسکتی ہیں، ضروری نہیں ہے کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطہ پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل 4.10 اور شکل 4.11 اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

سوالات

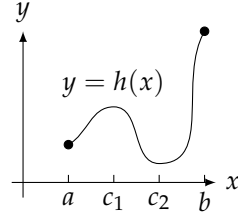
ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول



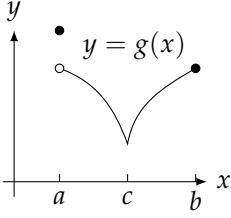
(ا)



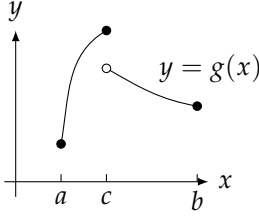
(ب)



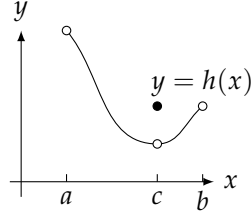
(ج)



(د)



(ه)



(و)

شکل 4.12: اشکال برائے سوال 3 تا سوال 8

کیا سوال 3 تا سوال 8 میں $[a, b]$ کے بچے تفاعل کے مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ سمجھائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ 4.1 میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 3: شکل 4.12-ا

سوال 4: شکل 4.12-ب

سوال 5: شکل 4.12-ج

سوال 6: شکل 4.12-د

سوال 7: شکل 4.12-ه

سوال 8: شکل 4.12-و

بند وقفہ پر مطلق انتہا

سوال 9 تا سوال 24 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 9: $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

سوال 10: $f(x) = -x - 4, \quad -4 \leq x \leq 1$

سوال 11: $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 2$

سوال 12: $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

سوال 13: $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \leq x \leq 2$

سوال 14: $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$

سوال 15: $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 16: $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال 17: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1$

سوال 18: $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \leq x \leq 0$

سوال 19: $f(\theta) = \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

سوال 20: $f(x) = \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

سوال 21: $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

سوال 22: $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

سوال 23: $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \leq t \leq 3$

سوال 24: $f(t) = |t - 5|, \quad -4 \leq t \leq 7$

سوال 25 تا سوال 28 میں تفاعل کی مطلق کم سے کم اور مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال 25: $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 26: $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \leq x \leq 8$

سوال 27: $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \leq \theta \leq 1$

سوال 28: $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \leq \theta \leq 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال 29 تا سوال 29 میں دی گئے دائرہ کار پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال 29:

$$k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < \infty \quad .$$

$$f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x \leq 2 \quad .$$

$$g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \leq x < 2 \quad .$$

$$l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty \quad .$$

$$h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2 \quad .$$

سوال 30:

$$k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \leq 1 \quad .$$

$$f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad .$$

$$g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \leq 1 \quad .$$

$$l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0 \quad .$$

$$h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1 \quad .$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 31: اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ ناقابل تفرق ہے نقطہ $x = 0$ پر f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ کیا یہ مسئلہ 4.2 کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ c ہو تب مسئلہ 4.2 کیوں ناقابل استعمال ہوگا؟

سوال 33: اگر جفت تفاعل $f(x)$ کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 34: اگر طاق تفاعل $g(x)$ کی مقامی کم سے کم قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب کیا $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جاسکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونا کی صورت میں کیا ہوگا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 36: وقفہ $[0, 1]$ پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا $x = 0$ پر ناکوئی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 37 تا سوال 42 میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں $f' = 0$ ہو۔ بعض اوقات f' ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں f' غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ه. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں اور جن نقطوں پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں تلاش کریں۔

$$\text{سوال 37: } f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad \left[-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}\right]$$

$$\text{سوال 38: } f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad \left[-\frac{3}{4}, 3\right]$$

$$\text{سوال 39: } f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$$

$$\text{سوال 40: } f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad \left[-1, \frac{10}{3}\right]$$

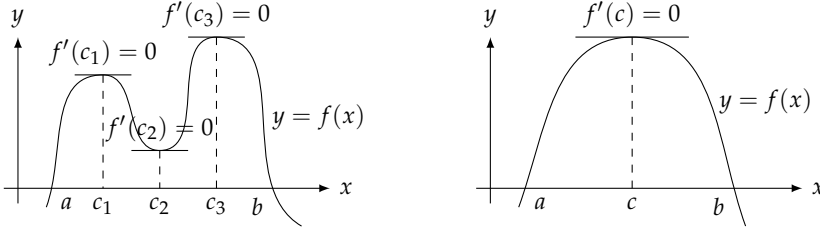
$$\text{سوال 41: } f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$$

$$\text{سوال 42: } f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$$

4.2 مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لحہ $t = 0$) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی t سیکنڈوں میں $s = 4.9t^2$ m کا فاصلہ طے کرے گا۔ اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لحہ t پر اس جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt} = 9.8 \text{ m s}^{-1}$ اور اسراع $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ہو گی۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کی اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاؤ تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ نتیجہ صریح کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔



شکل 4.13: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل x محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل $f(x)$ محور x کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب $f(x)$ کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مثل رول (1652 – 1719) کا 300 سال پرانا مسئلہ رول ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

مسئلہ 4.3: مسئلہ رول⁴

فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $y = f(x)$ استمراری ہے اور وقفہ کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

$$f(a) = f(b) = 0$$

تب (a, b) میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ c ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل 4.13)۔

$$f'(c) = 0$$

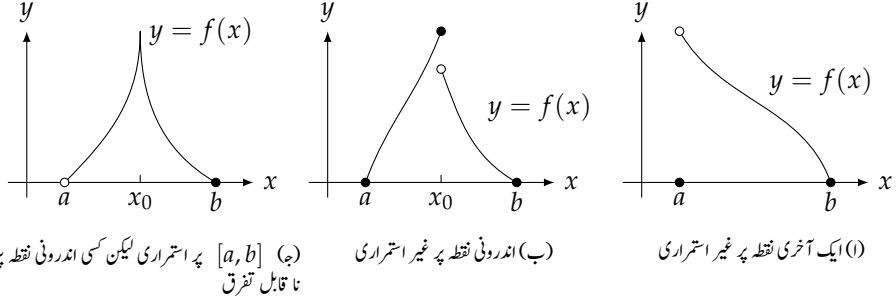
ثبوت: چونکہ f استمراری ہے لہذا $[a, b]$ پر f کے مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

1. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' ہو۔

2. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' غیر معین ہو۔

3. تفاعل کے دائرہ کار کی آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں a اور b ہیں۔

⁴Rolle's theorem



شکل 4.14: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر f کا تفریق پایا جاتا ہے۔ یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ c پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ 4.2 کے تحت $f'(c) = 0$ ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت دونوں a یا b پر پائے جاتے ہوں تب f مستقل ہو گا۔ یوں $f' = 0$ ہو گا لہذا وقفے کے کسی بھی نقطہ کو c لیا جاسکتا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

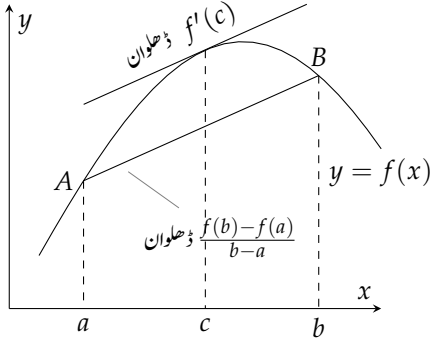
مسئلہ 4.3 میں دیے شرائط لازمی ہیں۔ اگر صرف ایک نقطہ پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترمیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل 4.14)۔

مثال 4.4: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ $[-3, 3]$ کے ہر نقطہ پر استمراری ہے اور $(-3, 3)$ کے ہر نقطہ پر قابل تفریق ہے۔

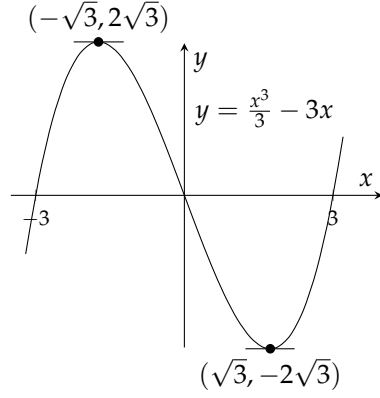
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

چونکہ $f(-3) = f(3) = 0$ ہے لہذا مسئلہ رول کے تحت $a = -3$ اور $b = 3$ کھلا وقفہ کے بیچ کم سے کم ایک نقطہ پر $f' = 0$ ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں $f'(x) = x^2 - 3$ دو نقطوں $x = \sqrt{3}$ اور $x = -\sqrt{3}$ پر صفر کے برابر ہے (شکل 4.15)۔

□



شکل 4.16: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ A اور B کے بیچ کہیں پر تقاطع کا مماس قطع AB کے متوازی ہو گا۔



شکل 4.15: ترسیم برائے مثال 4.4

مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترجمانی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل 4.16)۔ قطع AB کے متوازی نقطہ A اور B کے بیچ کہیں پر تقاطع کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کی ڈھلوان قطع کی ڈھلوان کے برابر ہوگی۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ اوسط قیمت فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر $y = f(x)$ استمراری ہے اور اس کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہے تب (a, b) میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

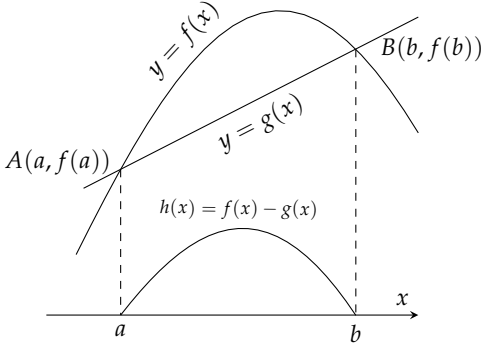
$$(4.3) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ثبوت: ہم f کی ترسیم پر دو نقطوں $A(a, f(a))$ اور $B(b, f(b))$ کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل 4.17)۔ یہ لکیر درج ذیل تقاطع کی ترسیم ہوگی۔

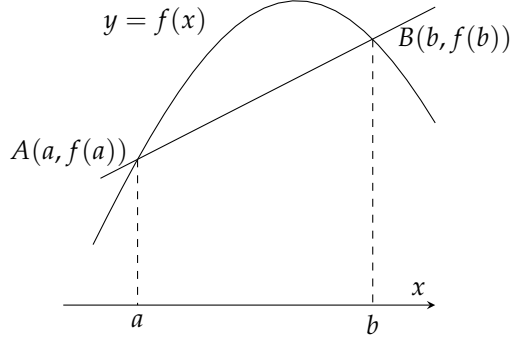
$$(4.4) \quad g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (\text{نقطہ ڈھلوان صورت})$$

نقطہ x پر f اور g کے بیچ انتصابی فاصلہ

$$(4.5) \quad \begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned}$$



(ب) $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ افقی فاصلہ $h(x)$ ہے۔



(i) وقفہ $[a, b]$ پر f اور قطع AB کے ترسیم۔

شکل 4.17: مسئلہ اوسط قیمت۔

ہو گا۔ شکل 4.17-ب میں f ، g اور h دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفہ پر f اور g استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ f اور g دونوں نقطہ A اور B سے گزرتے ہیں لہذا $h(a) = h(b) = 0$ ہے۔ یوں (a, b) میں کسی نقطہ c پر $h'(c) = 0$ ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات 4.3 میں درکار ہے۔

مساوات 4.3 کی تصدیق کی خاطر ہم x کے لحاظ سے مساوات 4.5 کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں $x = c$ پر کرتے ہیں۔

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{تفرق})$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x = c)$$

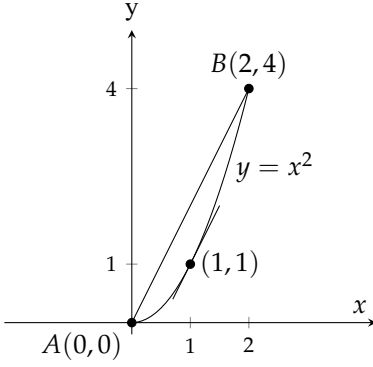
$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (h'(c) = 0)$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

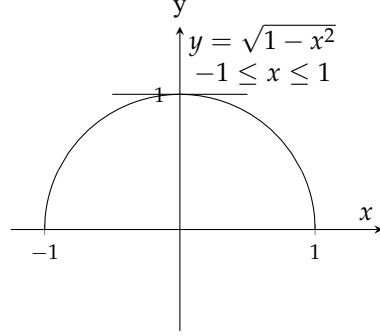
یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ a یا b پر f کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں ہے البتہ ان نقطوں پر f کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل 4.18)۔ ہم عموماً c کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ، c موجود ہے۔ اگلی مثال کی طرح



شکل 4.19: نقطہ $c = 1$ پر مماس قطع AB کے متوازی ہے (مثال 4.5)



شکل 4.18: اگرچہ $y = \sqrt{1-x^2}$ نقطہ -1 اور 1 پر ناقابل تفرق ہے یہ $[-1, 1]$ پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔

بعض اوقات ہم c کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذ و نادر ہو گا۔

مثال 4.5: وقفہ $0 \leq x \leq 2$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ استمراری ہے اور $0 < x < 2$ پر یہ قابل تفرق ہے (شکل 4.19)۔ چونکہ $f(0) = 0$ اور $f(2) = 4$ ہیں لہذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ c پر تفرق $f'(x) = 2x$ کی قیمت لازماً $2 = \frac{4-0}{2-0}$ ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم $2x = 2$ کو حل کرتے ہوئے $x = c = 1$ حاصل کر پاتے ہیں۔ □

طبعی تشریح

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

