احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جا سکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔حقیقی اعداد[1] وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

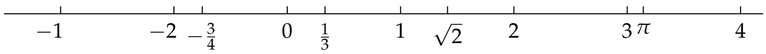
$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{4} &= -0.75000\cdots \\
\frac{1}{3} &= 0.33333\cdots \\
\sqrt{2} &= 1.4142\cdots
\end{aligned}
$$

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں $\cdots$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو لکیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اس لکیر کو حقیقی خط[2] کہتے ہیں۔

---

[1] real numbers
[2] real line



$\Re$ کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جا سکتے ہیں: الجبرائی خواص، رتبی خواص، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جا سکتے ہیں۔آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات
اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

1. $a + c < b + c \Longleftarrow a < b$
2. $a - c < b - c \Longleftarrow a < b$
3. $c > 0$ اور $ac < bc \Longleftarrow a < b$
4. $c < 0$ اور $bc < ac \Longleftarrow a < b$ خصوصی صورت: $-b < -a \Longleftarrow a < b$
5. $\frac{1}{a} > 0 \Longleftarrow a > 0$
6. اگر a اور b دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Longleftarrow a < b$

درج بالا میں $a + c < b + c \Longleftarrow a < b$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہو گی۔دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سوراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دارومدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

$\Re$ کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی سلسلوں[3] کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. قدرتی اعداد[4]، یعنی 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، $\cdots$

2. عدد صحیح، یعنی 0 ، ∓ 1 ، ∓ 2 ، ∓ 3 ، $\cdots$

3. ناطق اعداد[5]، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9}, \quad \frac{200}{13}, \quad 57 = \frac{57}{1}$$

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔
(الف) مختتم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000\cdots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909\cdots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور رتبی خواص رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سوراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں غیر ناطق اعداد[6] کہلاتے ہیں۔غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نا مختتم اور نا ہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

---

[3] sets
[4] natural numbers
[5] rational numbers
[6] irrational numbers

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو ارکان کے بیچ تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں وقفہ[7] کہلاتا ہے۔ مثال کے طور تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہٰذا -1 اور 1 کے بیچ تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔خطی قطع متناہی وقفہ[8] جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط لامتناہی وقفہ[9] کہلاتے ہیں۔

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ بند[10] کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ نصف کھلا[11] کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ کھلا[12] کہلاتا ہے۔وقفے کے سروں کو سرحدی نقطے[13] بھی کہتے ہیں۔یہ وقفہ کی سرحد[14] ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو اندرونی نقطے[15] کہتے ہیں۔تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی اندرون[16] کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسموں کو جدول 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔

عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

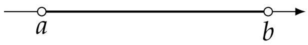
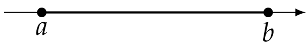
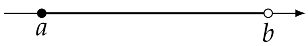
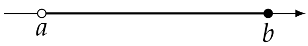
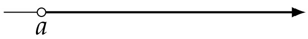
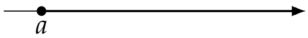
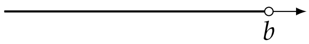
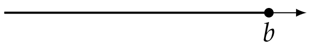
مثال 1.1:

1) $2x - 4 < x + 1$ 2) $-\frac{x}{3} < x - 1$ 3) $\frac{2}{x-1} \geq 4$

حل:

[7] interval
[8] finite interval
[9] infinite interval
[10] closed
[11] half-open
[12] open
[13] boundary points
[14] boundary
[15] interior points
[16] interior

جدول 1.1: وقفوں کی قسمیں

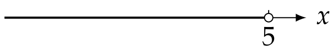
	علامت	سلسلہ	ترسیم
متناہی	(a,b)	$\{x\|a<x<b\}$	
	$[a,b]$	$\{x\|a\leq x\leq b\}$	
	$[a,b)$	$\{x\|a\leq x<b\}$	
	$(a,b]$	$\{x\|a<x\leq b\}$	
لا متناہی	(a,∞)	$\{x\|x>a\}$	
	$[a,\infty)$	$\{x\|x\geq a\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x\|x<b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x\|x\leq b\}$	
	$(-\infty,\infty)$	$\Re$	

1)

$$2x-4<x+1$$

$$2x<x+5 \qquad \text{دونوں ہاتھ 4 جمع کریں}$$

$$x<5 \qquad \text{دونوں ہاتھ سے } x \text{ منفی کریں}$$



حل سلسلہ وقفہ $(-\infty,5)$ ہے۔

2)

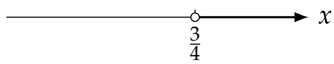
$$-\frac{x}{3}<x-1$$

$$-x<3x-3 \qquad \text{دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں}$$

$$0<4x-3 \qquad \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ } x \text{ جمع کریں}$$

$$3<4x \qquad \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں}$$

$$\frac{3}{4}<x \qquad \text{دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں}$$



وقفہ $(\frac{3}{4},\infty)$ حل سلسلہ ہے۔

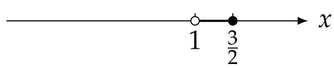
3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بایاں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بایاں ہاتھ غیر متعین ہے۔عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

$$2 \geq 4x - 4$$ دونوں ہاتھ کو $x-1$ سے ضرب دیں

$$6 \geq 4x$$ دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

$$\frac{3}{2} \geq x$$ دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$ ہے۔

□

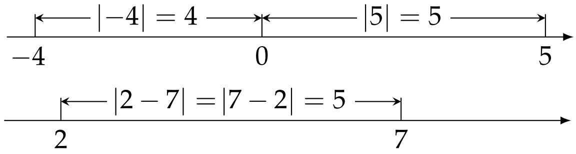
مطلق قیمت

عدد x کی مطلق قیمت[17] جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $|0.88| = 0.88, \quad |0| = 0, \quad |-13| = -(-13) = 13, \quad \big|-|a|\big| = |a|$ □

[17] absolute value



شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq$ ہو گی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہو گا۔چونکہ a کی غیر منفی جذر کو $\sqrt{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

آپ $|a| = \sqrt{a^2}$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہو گا۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

x اور y کے بیچ فاصلہ $= \left|x - y\right|$

ہو گا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

مطلق قیمت کے خواص درج ذیل ہیں۔

1. $|-a| = |a|$ کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔
2. $|ab| = |a||b|$ حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہو گا۔
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہو گی۔اس کو تکونی عدم مساوات کہتے ہیں۔

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a + b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہو گی۔اس کے علاوہ ہر صورت $|a + b| = |a| + |b|$ ہو گا۔

مثال 1.3:

$$\begin{aligned}
|-2+6| &= |4| = 4 < |-2| + |6| = 8 \\
|2+6| &= |8| = |2| + |6| \\
|-2-6| &= |-8| = 8 = |-2| + |-6|
\end{aligned}$$

$\square$

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x-1|=11$ کو حل کریں۔
حل: اس مساوات کے تحت $2x-1=\mp 11$ ہو سکتا ہے لہٰذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
2x-1&=11 & 2x-1&=-11\\
2x&=12 & 2x&=-10\\
x&=6 & x&=-5
\end{aligned}
$$

یوں $|2x-1|=11$ کا درکار حل $x=6$ اور $x=-5$ ہے۔ $\square$

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a|<D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

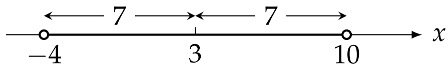
$$|a|<D \iff -D<a<D \tag{1.1}$$

$$|a|\le D \iff -D\le a\le D \tag{1.2}$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x-3|<7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔
حل:

$$
\begin{aligned}
|x-3|&<7 \\
-7<x-3&<7 && \text{مساوات 1.1}\\
-7+3<x&<7+3 && \text{دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں}\\
-4<x&<10
\end{aligned}
$$

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4,10)$ ہے۔



□

مثال 1.6: عدم مساوات $\left|3-\frac{2}{x}\right| < 1$ کو حل کریں۔

حل:

$\left\lvert 3-\frac{2}{x}\right\rvert < 1 \iff -1 < 3-\frac{2}{x} < 1$	مساوات 1.1
$-4 < -\frac{2}{x} < -2$	3 منفی کریں
$2 > \frac{1}{x} > 1$	$-\frac{1}{2}$ سے ضرب دیں
$\frac{1}{2} < x < 1$	معکوس لیں

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب معکوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہو گی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2}, 1)$ ہے۔ □

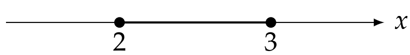
مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

(الف) $|2x-5| \leq 1$ (ب) $|2x-5| \geq 1$

حل: (الف)

$\lvert 2x-5\rvert \leq 1$	
$-1 \leq 2x-5 \leq 1$	مساوات 1.2
$4 \leq 2x \leq 6$	جمع 5
$2 \leq x \leq 3$	تقسیم 2

حل سلسلہ بند وقفہ $[2,3]$ ہے۔

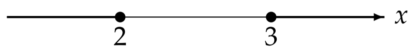


(ب)

$$|2x-5| \geq 1$$

$$\begin{array}{c|c} 2x-5 \geq 1 & -(2x-5) \geq 1 \\ 2x \geq 6 & 2x-5 \leq -1 \\ x \geq 3 & 2x \leq 4 \\ & x \leq 2 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty,2] \cup [3,\infty)$ ہے۔



□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی اشتراک[18] کی علامت $\cup$ استعمال کی گئی ہے۔دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔اسی طرح ہم تقاطع[19] کی علامت $\cap$ بھی استعمال کرتے ہیں۔دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔مثال کے طور پر $[1,3) \cap [2,4] = [2,3)$ ہو گا۔

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

جواب: $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}$

سوال 2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

[18] union
[19] intersection

ا $0 < x < 4$
ب $0 < x - 2 < 4$
ج $1 < \frac{x}{2} < 3$
د $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
ہ $1 < \frac{6}{x} < 3$
و $|x - 4| < 2$
ز $-6 < -x < 2$
ح $-6 < -x < -2$

سوال 4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $4 < y < 6$
ب $-6 < y < -4$
ج $y > 4$
د $y < 6$
ہ $0 < y - 4 < 2$
و $2 < \frac{y}{2} < 3$
ز $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$
ح $|y - 5| < 1$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

سوال 5: $-2x > 4$
جواب: $x < -2$

سوال 6: $8 - 3x \geq 5$

سوال 7: $5x - 3 \leq 7 - 3x$
جواب: $x \leq \frac{5}{4}$

سوال 8: $3(2 - x) > 2(3 + x)$

سوال 9: $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
جواب: $x \leq -\frac{1}{3}$

سوال 10: $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$

سوال 11: $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$
جواب: $x < -\frac{6}{7}$

سوال 12: $-\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}$

مطلق قیمت
سوال 13 تا سوال 18 میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال 13: $\left|y\right| = 3$
جواب: ∓ 3

سوال 14: $\left|y-3\right| = 7$

سوال 15: $|2t+5| = 4$
جواب: $-\frac{1}{2}, \quad -\frac{9}{2}$

سوال 16: $|1-t| = 1$

سوال 17: $|8-3s| = \frac{9}{2}$
جواب: $\frac{7}{6}, \quad \frac{25}{6}$

سوال 18: $\left|\frac{s}{2}-1\right| = 1$

سوال 19 تا سوال 34 میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ کو ترسیم کریں

سوال 19: $|x| < 2$
جواب: $-2 < x < 2$

سوال 20: $|x| \leq 2$

سوال 21: $|t-1| \leq 3$
جواب: $-2 \leq t \leq 4$

سوال 22: $|t+2| < 1$

سوال 23: $\left|3y-7\right| < 4$
جواب: $1 < y < \frac{11}{3}$

سوال 24: $\left|2y+5\right| < 1$

سوال 25: $\left|\frac{z}{5}-1\right| \leq 1$
جواب: $0 \leq z \leq 10$

سوال 26: $\left|\frac{3}{2}z-1\right| \leq 2$

سوال 27: $\left|3-\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{2}$
جواب: $\frac{10}{35}<x<\frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7}<y<\frac{11}{3}$

سوال 28: $\left|\frac{2}{x}-4\right|<3$

سوال 29: $|2s|\geq 4$
جواب: $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

سوال 30: $|s+3|\geq\frac{1}{2}$

سوال 31: $|1-x|>1$
جواب: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

سوال 32: $|2-3x|>5$

سوال 33: $\left|\frac{r+1}{2}\right|\geq 1$
جواب: $(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$

سوال 34: $\left|\frac{3}{5}r-1\right|>\frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات

سوال 35 تا سوال 42 میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2}=|a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 35: $x^2<2$
جواب $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

سوال 36: $4\leq x^2$

سوال 37: $4<x^2<9$
جواب $(-3,-2)\cup(2,3)$

سوال 38: $\frac{1}{9}<x^2<\frac{1}{4}$

سوال 39: $(x-1)^2<4$
جواب $(-1,3)$

سوال 40: $(x+3)^2 < 2$

سوال 41: $x^2 - x < 0$
جواب $(0,1)$

سوال 42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $|-a| = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔
جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 44: مساوات $|x-1| = 1-x$ کو حل کریں۔

سوال 45: تکونی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a+b| = (a+b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے تکونی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\
&\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
&= (|a| + |b|)^2 \\
|a+b| &\leq |a| + |b|
\end{aligned}$$

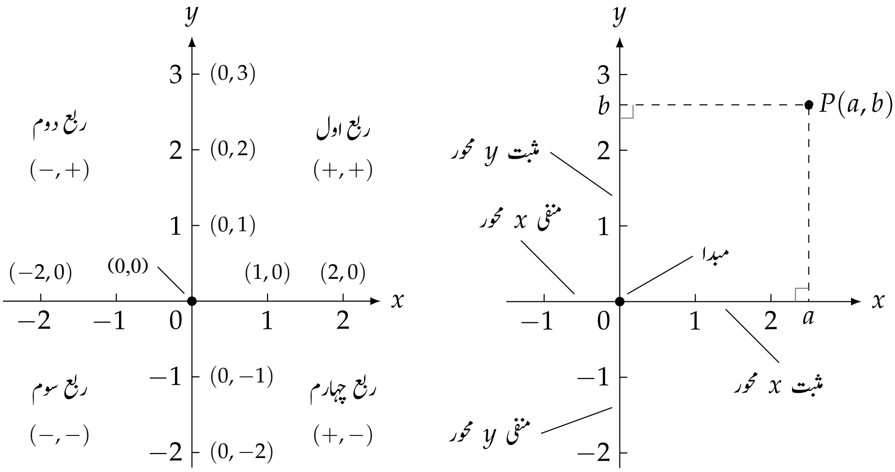
سوال 46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟
جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ کو ترسیم کریں۔

سوال 49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔
جواب: $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 50: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔



شکل 1.2: کارتیسی محدد

1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدد اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدد

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ان خطوط کو مستوی میں محددی محور[20] کہتے ہیں۔افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔انتصابی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محددی نظام کا مبدا[21] کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جا سکتے ہیں۔اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x محدد[22] a ہو گا۔اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y محدد[23]

---

[20] coordinate axis
[21] origin
[22] x-coordinate
[23] y-coordinate

b ہو گا۔ مرتب جوڑی (a,b) کو نقطے کی محددی جوڑی[24] کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محددی جوڑی کا y محدد 0 ہو گا جبکہ y محور پر ہر محددی جوڑی کا x محدد 0 ہو گا۔ محددی نظام کا مبدا نقطہ $(0,0)$ ہے۔

محور x کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدا کے دائیں جانب مثبت x محور[25] اور مبدا کے بائیں جانب منفی x محور[26] پایا جاتا ہے۔ اسی طرح مبدا y محور کو بھی مثبت y محور اور منفی y محور میں تقسیم کرتا ہے۔ محدد مستوی کو چار ربعات[27] میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پیما

ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی تناسب پہلو[28] ایک جیسے رکھتے ہیں لہٰذا دونوں محور پر پیمانہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدد میں کل تبدیلی کو بڑھوتری[29] کہتے ہیں۔ اختتامی محدد سے ابتدائی محدد منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

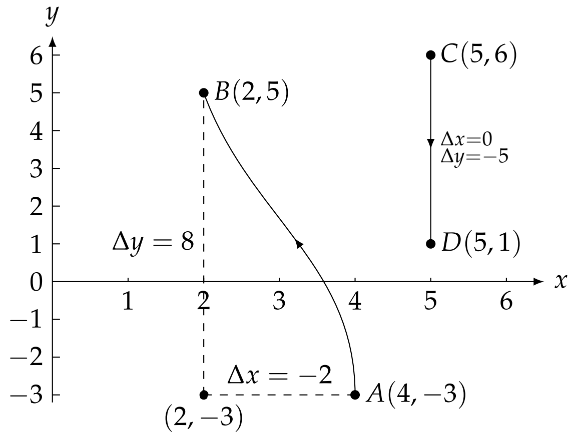
مثال 1.8: نقطہ $A(4,-3)$ سے نقطہ $B(2,5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = 2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

---

[24] coordinate pair
[25] positive x-axis
[26] negative x-axis
[27] quadrants
[28] aspect ratio
[29] increments



شکل 1.3: محددی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

□

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5,6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5,1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔

حل: $\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$ □

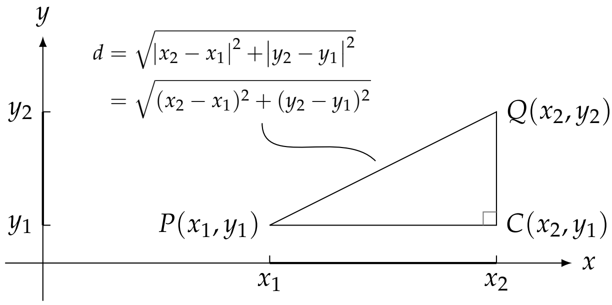
مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا (شکل 1.4)۔

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1.10: (الف) $P(-1,2)$ اور $Q(3,4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$



شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)

(ب) مبدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

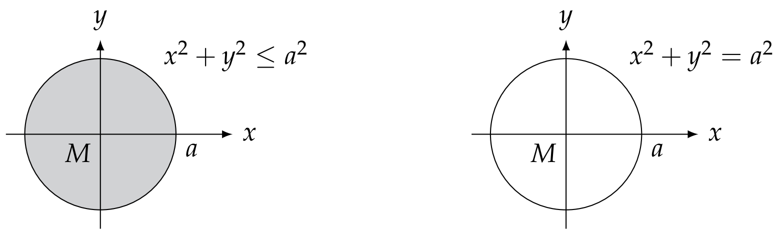
□

ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو
(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصل $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔
(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصل $\leq a$ ہے۔یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہو گی (شکل 1.5)۔ □

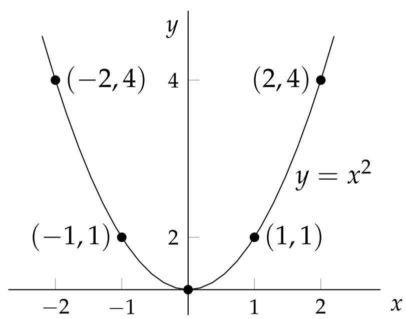
اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو اکائی دائرہ[30] کہتے ہیں۔



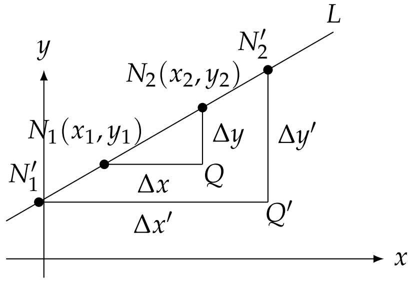
(ا) مساوات کی ترسیم

(ب) عدم مساوات کی ترسیم

شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)



شکل 1.6: قطع مکافی (مثال 1.12)



شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N_1'Q'N_2'$ متشابہ مثلثات ہیں لہٰذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(2, 4)$ اور $(-2, 4)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدد اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو قطع مکافی[31] کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکتا سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

کی قیمت ایک جیسی ہو گی (شکل 1.7)۔

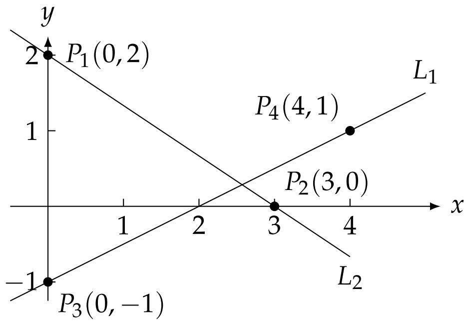
تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی ڈھلوان[32] کہلاتی ہے۔

---

unit circle[30]
parabola[31]
slope[32]



شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)

□

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لہٰذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا[33]۔یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں L_1 کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1-(-1)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔اسی طرح L_2 کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ ہے۔یوں دائیں رخ چلتے ہوئے □

خط کی چڑھائی یا اترائی کو زاویہ میلان[34] سے بھی ناپا جاتا ہے۔ x محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہجی ϕ سے ظاہر کیا جائے تب $0 \le \phi \le 180^\circ$ ہو گا۔

خط کی ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

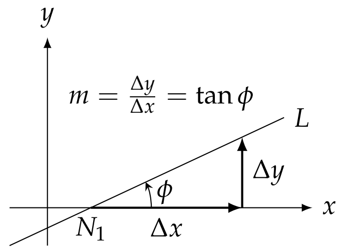
$$m = \tan\phi$$

---

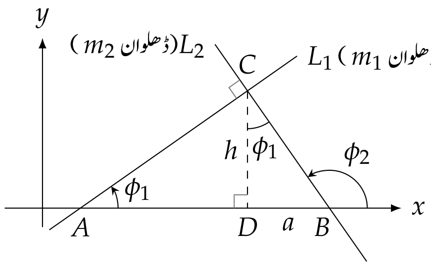
[33]چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔

[34]angle of inclination

شکل 1.9: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے



شکل 1.10: غیر انتصابی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجنٹ ہوتا ہے



شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق

متوازی اور قائمہ خطوط

متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا یہ متوازی ہوں گے۔

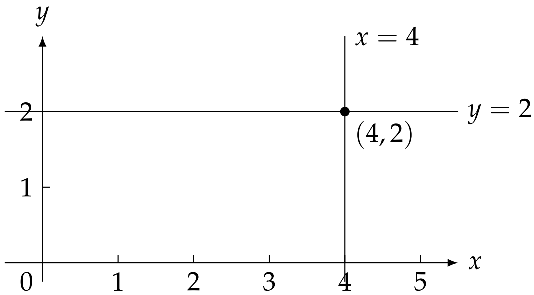
اگر غیر انتصابی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1 m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan\phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan\phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔یوں $m_1 m_2 = (\frac{a}{h})(-\frac{h}{a}) = -1$ ہو گا۔

خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ x محور کے نقطہ a سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی x محدد a ہو گی۔یوں اس انتصابی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔اسی طرح y محور کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔



شکل 1.12: افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

مثال 1.14: نقطہ $(4,2)$ سے گزرتے افقی اور انتصابی خطوط کے مساوات بالترتیب $y=2$ اور $x=4$ ہوں گی (شکل 1.12)۔ $\square$

اگر ہمیں غیر انتصابی سیدھے خط L کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1,y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر $N(x,y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad\implies\quad y=y_1+m(x-x_1)$$

لکھا جا سکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

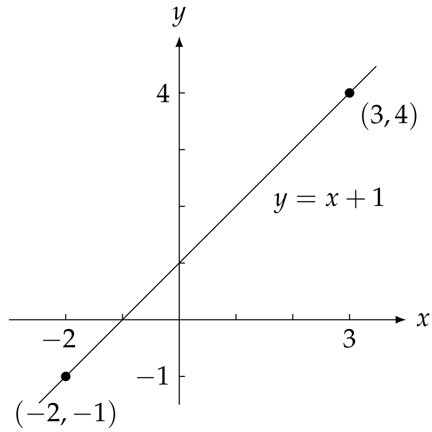
تعریف: نقطہ (x_1,y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان m ہو کی مساوات $y=y_1+m(x-x_1)$ ہو گی جس کو خط کی نقطہ۔ڈھلوان مساوات[35] ہے۔

$\square$

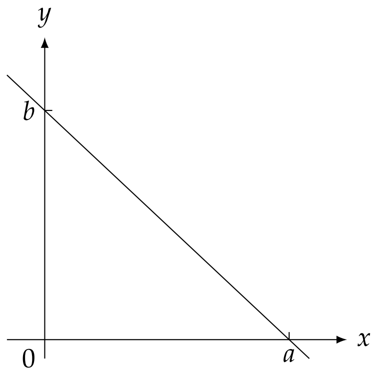
مثال 1.15: نقطہ $(3,2)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔
حل:

$$y=2-\frac{2}{3}(x-3) \quad\implies\quad y=-\frac{2}{3}x+4$$

[35] point-slope equation



شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال 1.16)



شکل 1.14: غیر انتصابی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات

□

مثال 1.16: نقطہ $(-2, -1)$ اور $(3, 4)$ سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔
حل: اس خط کی ڈھلوان

$$m = \frac{-1-4}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ہے۔ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ لیتے ہیں	نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ لیتے ہیں
$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$	$y = -1 + 1 \cdot (x - x(-2))$
$y = 4 + x - 3$	$y = -1 + x + 2$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔ □

غیر انتصابی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y قطع[36] کہتے ہیں۔اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر x محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا x قطع[37] کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

---

[36] y-intercept
[37] x-intercept

غیر انتصابی خط جو y محور کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \implies \quad y = mx + b$$

ہو گی۔

تعریف : درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \implies \quad y = mx + b$$

کو خط کی ڈھلوان۔قطع مساوات[38] کہتے ہیں۔اس خط کی ڈھلوان m ہے اور یہ y محور کو b پر قطع کرتا ہے۔

□

مثال 1.17: خط $y = 3x - 7$ کی ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ y محور کو -7 پر قطع کرتا ہے۔ □

درج ذیل مساوات کو عمومی خطی مساوات[39] کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \qquad (\text{دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں } B \text{ اور } A)$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 1.18: خط $8x + 5y = 20$ کی y قطع تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات کو ڈھلوان۔قطع روپ میں لکھ کر y قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

یوں خط کی ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور y قطع 4 ہے۔ □

مثال 1.19: مبدا سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔

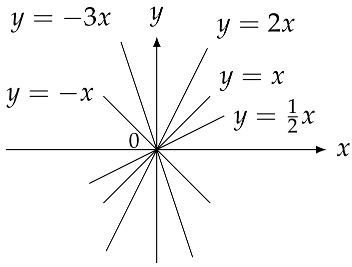
چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہو گا لہٰذا ان کی مساوات $y = mx$ ہو گی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔ □

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بنا سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں خطی مساوات[40] کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

---

[38] slope-intercept equation
[39] general linear equation
[40] linear equations



شکل 1.15: مبدا سے گزرتا خط کی مساوات $y = mx$ ہے جہاں m خط کی ڈھلوان ہے

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔یہ جانتے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباو V اور برقی رو I کا تعلق $V = IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔اس مساوات کی ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔ □

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی

سوال 1 تا سوال 4 میں ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1: $A(-3,2),\ B(-1,-2)$
جواب: $2, -4; 2\sqrt{5}$

سوال 2: $A(-1,-2),\ B(-3,2)$

سوال 3: $A(-3.2,-2),\ B(-8.1,-2)$
جواب: $-4.9, 0; 4.9$

سوال 4: $A(\sqrt{2},4),\ B(0,1.5)$

سوال 5 تا سوال 8 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 5: $x^2 + y^2 = 1$
جواب: اکائی دائرہ

سوال 6: $x^2 + y^2 = 2$

سوال 7: $x^2 + y^2 \leq 3$
جواب: رداس $\sqrt{3}$ کا دائرہ اور اس کی اندرون۔دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 8: $x^2 + y^2 = 0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

سوال 9 تا سوال 12 دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کی قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 9: $A(-1,2),\ B(-2,-1)$
جواب: $m_\perp = -\frac{1}{3}$

سوال 10: $A(-2,1),\ B(2,-2)$

سوال 11: $A(2,3),\ B(-1,3)$
جواب: $\mathrm{m}_\perp$ غیر معین ہے۔

سوال 12: $A(-2,0),\ B(-2,-2)$

سوال 13 تا سوال 16 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتا (الف) انتصابی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 13: $(-1, \frac{4}{3})$
جواب: (الف) $x = -1$ (ب) $y = \frac{4}{3}$

سوال 14: $(\sqrt{2}, -1.3)$

سوال 15: $(0, -\sqrt{2})$
جواب: (الف) $x = 0$ $y = -\sqrt{2}$

سوال 16: $(-\pi, 0)$

سوال 17 تا سوال 30 میں خط کی مساوات تلاش کریں۔ خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 17: نقطہ $(-1,1)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان -1 ہو۔
جواب: $y=-x$

سوال 18: نقطہ $(2,-3)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔

سوال 19: نقطہ $(3,4)$ اور $(-2,5)$ سے گزرتا خط۔
جواب: $y=-\frac{x}{5}+\frac{23}{5}$

سوال 20: نقطہ $(-8,0)$ اور $(-1,3)$ سے گزرتا خط۔

سوال 21: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔
جواب: $y=-\frac{5}{4}x+6$

سوال 22: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع -3 ہے۔

سوال 23: نقطہ $(-12,-9)$ سے گزرتا جس کی ڈھلوان 0 ہو۔
جواب: $y=-9$

سوال 24: نقطہ $(\frac{1}{3},2)$ سے گزرتا جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔

سوال 25: جس کا x قطع -1 اور y قطع 4 ہو۔
جواب: $y=4x+4$

سوال 26: جس کا x قطع 2 اور y قطع -6 ہو۔

سوال 27: جو نقطہ $(5,-1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x+5y=15$ کے متوازی ہو۔
جواب: $y=-\frac{2}{5}x+1$

سوال 28: جو نقطہ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x+5y=\sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔

سوال 29: نقطہ $4,10$ سے گزرتا اور خط $6x-3y=13$ کا قائمہ ہو۔
جواب: $y=-\frac{x}{2}+12$

سوال 30: نقطہ $(0,1)$ سے گزرتا اور خط $8x-13y=13$ کا قائمہ۔

خط کا x قطع اور y قطع تلاش کریں۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال 31 تا سوال 34)

سوال 31: $3x + 4y = 12$
جواب: قطع x $4 =$ ، قطع y $3 =$

سوال 32: $x + 2y = -4$

سوال 33: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
جواب: قطع x $\sqrt{3} =$ ، قطع y $-\sqrt{2} =$

سوال 34: $1.5x - y = -3$

سوال 35: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Bx - Ay = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔
جواب: جی ہاں۔ خطوط قائمہ ہیں چونکہ ان کی ڈھلوان $-\frac{A}{B}$ اور $\frac{B}{A}$ ایک دوسرے کے منفی معکوس ہیں۔

سوال 36: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Ax + By = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال 37: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(-2, 3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ ، $\Delta y = -6$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔
جواب: $(3, -3)$

سوال 38: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(6, 0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = -6$ ، $\Delta y = 0$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 39: ایک ذرہ $A(x, y)$ سے $B(3, -3)$ منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ اور $\Delta y = 6$ ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔
جواب: $(-2, -9)$

سوال 40: ایک ذرہ $A(1, 0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1, 0)$ کو واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محدد میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال 41: پانی میں دباو پانی میں d گہرائی پر غوطہ خور p دباو محسوس کرے گا جہاں $p = kd + 1$ ہے جہاں k مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر

دباو کیا ہو گا؟
جواب: 5.97 کرہ ہوائی دباو

سوال 42: انعکاس شعاع ربع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع x محور سے منعکس ہوتی ہے۔زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 43: سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟
جواب: جی ہاں۔ $C = F = -40^\circ$

نظریہ اور مثالیں

سوال 44: ایک مثلث کے راس $A(1, 2)$ ، $B(5, 5)$ اور $C(4, -2)$ پر پائے جاتے ہیں۔مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 45: ایک مثلث کے راس $A(0, 0)$ ، $B(1, \sqrt{3})$ اور $C(2, 0)$ ہیں۔دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

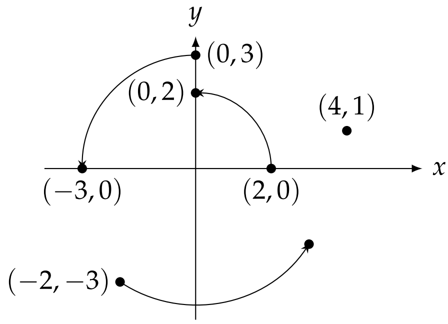
سوال 46: دکھائیں کہ $A(2, -1)$ ، $B(1, 3)$ اور $C(-3, 2)$ چکور کی راسیں ہیں۔چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 47: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1, 1)$ ، $(2, 0)$ اور $(2, 3)$ ہیں۔تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔
جواب: $(-1, 4), (-1, -2), (5, 2)$

سوال 48: مبدا کے گرد گھڑی مخالف 90° گھمانے سے نقطہ $(2, 0)$ اور $(0, 3)$ بالترتیب $(0, 2)$ اور $(-3, 0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

ا) $(4, 1)$
ب) $(-2, -3)$
ج) $(2, -5)$
د) $(x, 0)$
ہ) $(0, y)$
و) (x, y)
ز) کونسا نقطہ $(10, 3)$ پر منتقل ہو گا؟

سوال 49: k کی کس قیمت کے لئے خط $2x + ky = 3$ اور خط $4x + y = 1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟
جواب: $k = -8, \quad k = \frac{1}{2}$



شکل 1.16: گھڑی مخالف $90°$ گھومنا (سوال 48)

سوال 50: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1,2)$ اور خط $x+2y=3$ اور $2x-3y=-1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 51: دکھائیں کہ $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ کو ملانے والے قطع کا وسط $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہو گا۔

سوال 52: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0,y_0)$ سے خط $L: Ax+By=C$ تک فاصل درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

- L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔
- خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔
- N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصل تلاش کریں۔

ا) $N(2,1), L: y=x+2$

ب) $N(4,6), L: 4x+3y=12$

ج) $N(a,b), L: x=-1$

د) $N(x_0,y_0), L: Ax+By=C$

1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ابلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دارومدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔چونکہ y کی قیمت مکمل طور پر x تعین کرتا ہے لہٰذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چونکہ $A=\pi r^2$ ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا رقبہ A تفاعل ہے۔مساوات $A=\pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لئے A کی یکتا قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا دائرہ کار[41] کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا سعت[42] کہتے ہیں۔چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0,\infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

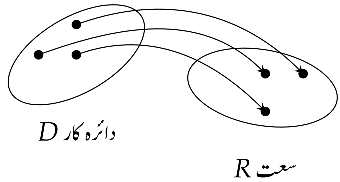
احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ہم

$$y=f(x) \qquad (y \text{ برابر ہے } f \text{ کا } x)$$

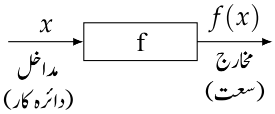
لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y، متغیر x کا تفاعل ہے۔یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت x غیر تابع متغیر[43] ہے اور خارجی قیمت y تابع متغیر[44] ہیں۔ x کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہو گی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہو گی۔

تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔

□



شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔



شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کا سعت R کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا
2. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f ، نا کہ $f(x)$ ، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

---

domain[41]
range[42]
independent variable[43]
dependent variable[44]

قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً حقیقی متغیرات[45] کے حقیقی قیمت تفاعل[46] پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$3\,\mathrm{m}$ رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi\,\mathrm{m}^2$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t-1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0 ، 2 ، $x+2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
F(0) &= 2(0-1)+3 = -2+3 = 1\\
F(2) &= 2(2-1)+3 = 2+3 = 5\\
F(x+2) &= 2(x+2-1)+3 = 2x+5\\
F(F(2)) &= F(5) = 2(5-1)+3 = 11
\end{aligned}$$

□

---

[45] real variables
[46] real valued function

روایت دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔اس کو تفاعل کا قدرتی دائرہ کار[47] کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم " $y = x^2, x \geq 2$ " لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔تفاعل $y = x^2$ کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کا سعت $[4, \infty)$ ہو گا جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

تفاعل	دائرہ کار(x)	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لئے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

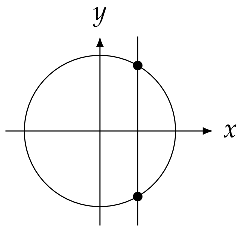
چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x = 0$، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لئے حقیقی y دیتا ہے۔تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔اس کا سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لئے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔تفاعل کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا۔ □

---

[47] natural domain



شکل 1.19: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط ہے۔

تفاعل کی ترسیم

تفاعل f کی تقسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدد تفاعل f کی داخلی، خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

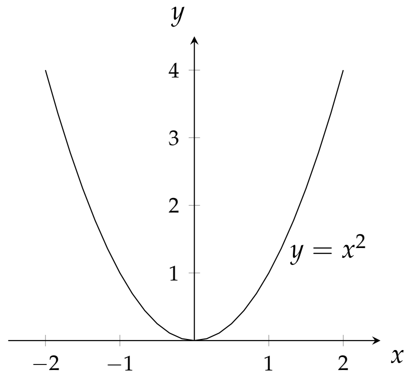
ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر x کے لئے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہٰذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہٰذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔اگر تفاعل f کی دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تفاعل کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

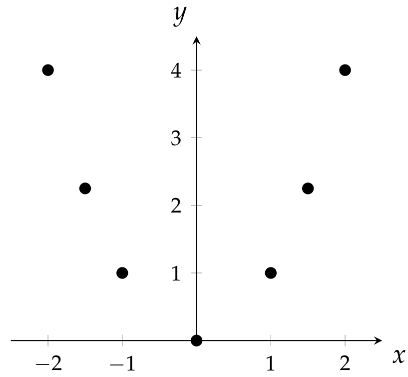
مثال 1.24: وقفہ $[-2, 2]$ پر تفاعل $y = x^2$ ترسیم کریں۔
حل: پہلا قدم: پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو xy مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔
تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچیں۔ منحنی پر سرخی لکھیں۔ □

احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔





شکل 1.20: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال 1.24)

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل $f+g$ ، $f-g$ اور fg کی تعریف درج ذیل ہے۔

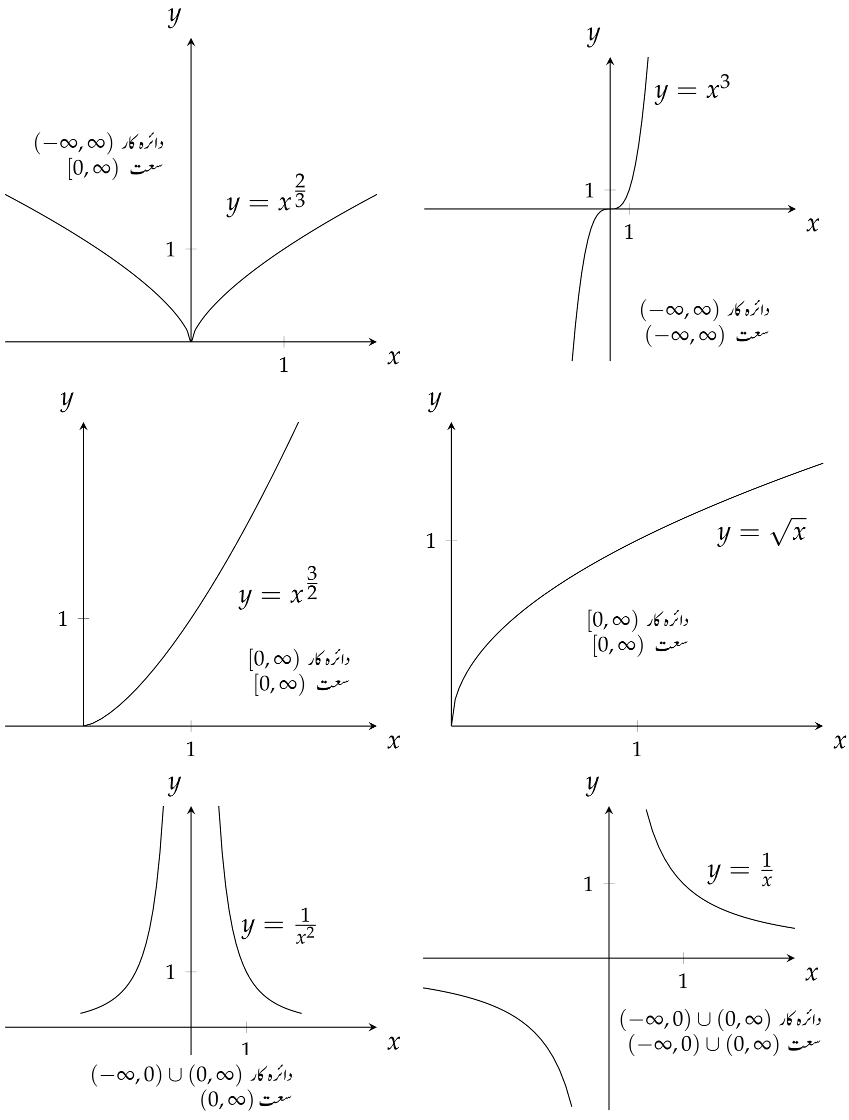
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

f اور g کی دائرہ کار کے اشتراک $D(f) \cap D(g)$ جہاں $g(x) \neq 0$ ہو ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔ یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہو گی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$



شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x)=\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
g	$g(x)=\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$3g$	$3g(x)=3\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]=D(f)\cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f\cdot g$	$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ ($x=1$ ماسوائے)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ ($x=0$ ماسوائے)

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جس کو مرکب تفاعل[48] $f\circ g$ کہتے ہیں۔

تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f\circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$f\circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

□

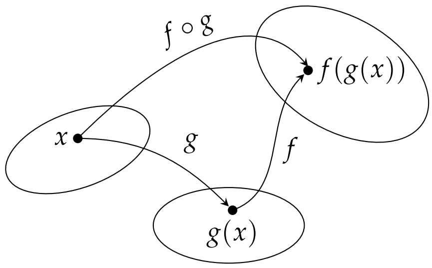
تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جا سکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔ $f\circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

معین $g\circ f$ حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $g\circ f$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f\circ g$ اور $g\circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ اور $g(x)=x+1$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

[48] composite function



شکل 1.22: مرکب تفاعل

ا. $(f \circ g)(x)$ ب. $(g \circ f)(x)$ ج. $(f \circ f)(x)$ د. $(g \circ g)(x)$

حل:

مرکب	دائرہ کار
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

یہ جاننے کے لئے کہ $f \circ g$ کا دائرہ کار کیوں $[-1, \infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x) = x + 1$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $x + 1 \geq 0$ یعنی $x \geq -1$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

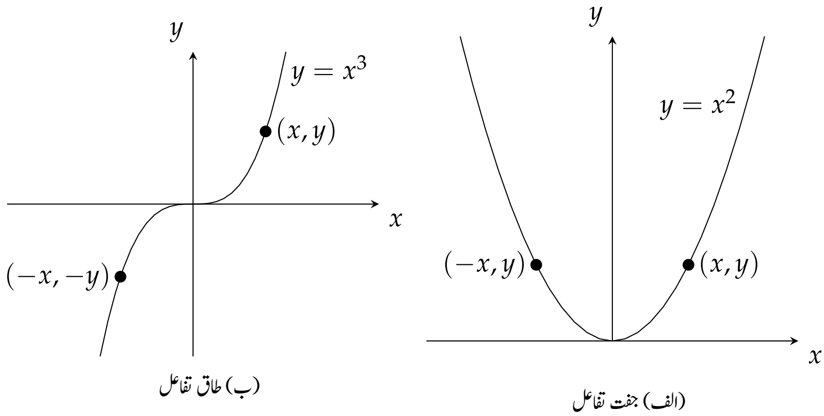
جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ جفت[49] کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔تفاعل $f(x) = x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ہے۔

چونکہ $f(-x) = f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔یوں جفت تفاعل کی ترسیم y محور کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-الف)۔ y محور کے ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جا سکتی ہے۔

---

[49] even



شکل 1.23: جفت اور طاق تفاعل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ طاق[50] کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔تفاعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

طاق تفاعل کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-ب)۔چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔یہاں بھی y محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جا سکتی ہے۔

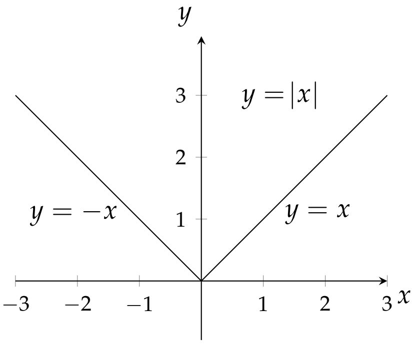
ٹکڑوں میں معین تفاعل

بعض اوقات ایک تفاعل کو اس کے دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات ظاہر کرتی ہیں۔اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفاعل ہے (شکل 1.24)۔

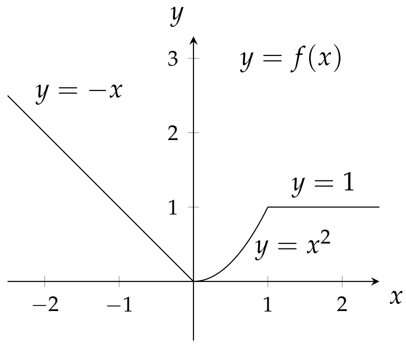
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔

odd[50]



شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل



شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل

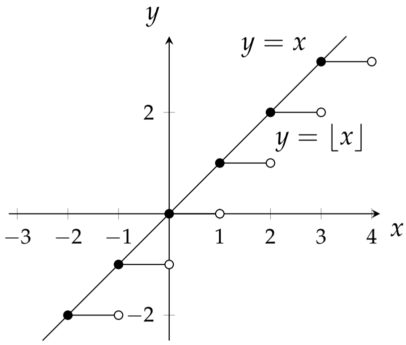
ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو بڑا ترین عدد صحیح تفاعل[51] یا عدد صحیح زمین تفاعل[52] کہلاتا جس کو $\lfloor x \rfloor$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} &\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2 \\ &\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2 \end{aligned}$$

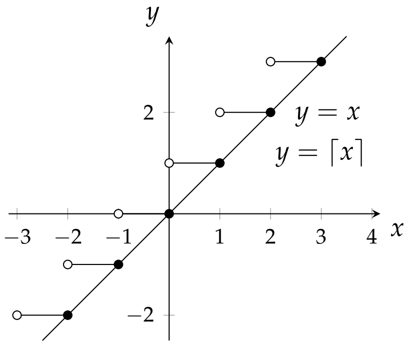
□

مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو کم ترین عدد صحیح تفاعل[53] یا عدد صحیح چھت تفاعل[54] کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ ۔اس کی مثال ٹیکسی کا کرایا

greatest integer function[51]
integer floor function[52]
least integer function[53]
integer ceiling function[54]



شکل 1.26: عدد صحیح زمین تفاعل (مثال 1.28)



شکل 1.27: عدد صحیح چھت تفاعل (مثال 1.29)

ہے جو فی کلومیٹر واجب الادا ہوتا ہے۔اضافی نامکمل کلومیٹر کی صورت میں مکمل کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔یوں 17.2 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہو گا۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{array}{llll} \lceil 3.2 \rceil = 4, & \lceil 2.9 \rceil = 3, & \lceil 0 \rceil = 0, & \lceil 2 \rceil = 2, \\ \lceil -5 \rceil = -5, & \lceil -5.6 \rceil = -5, & \lceil -0.9 \rceil = 0, & \lceil -7.2 \rceil = -7 \end{array}$$

□

سوالات

سوال 1 تا سوال 6 میں تفاعل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = 1 + x^2$

جواب: دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ، سعت $[1, \infty)$

سوال 2: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

سوال 3: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

جواب: دائرہ کار $(0, \infty)$ ، سعت $(0, \infty)$

سوال 4: $F(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}}$

(ب) (الف)

شکل 1.28: اشکال برائے سوال 7

(ب) (الف)

شکل 1.29: اشکال برائے سوال 8

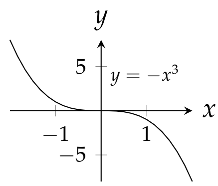
سوال 5: $g(z)=\sqrt{4-z^2}$
جواب: دائرہ کار $[-2,2]$ ، سعت $[0,2]$

سوال 6: $g(z)=\frac{1}{\sqrt{4-z^2}}$

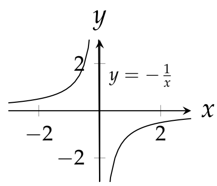
سوال 7: شکل 1.28 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) چونکہ چند x پر y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا x کا تفاعل نہیں ہے۔
(ب) چونکہ ہر x پر y کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہٰذا x کا تفاعل ہے۔

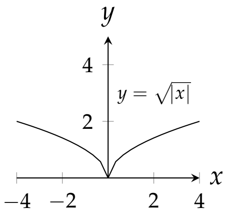
سوال 8: شکل 1.29 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔



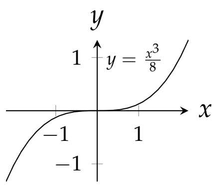
شکل 1.30



شکل 1.31



شکل 1.32



شکل 1.33

تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

سوال 9: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی x کا تفاعل لکھیں۔
جواب: $A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad p=3x$

سوال 10: چکور کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں چکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔اب چکور کے رقبہ کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال 11: مکعب کی ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتری لمبائی d کی صورت میں لکھیں۔مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو d کا تفاعل لکھیں۔
$x=\frac{d}{\sqrt{3}}, \quad A=2d^2, \quad V=\frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

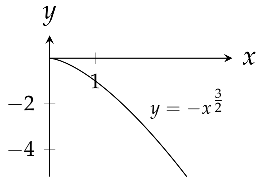
سوال 12: ربع اول میں نقطہ N تفاعل $f(x)=\sqrt{x}$ کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔ N کے محدد کو مبدا سے N تک خط کی ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

تفاعل اور ترسیم

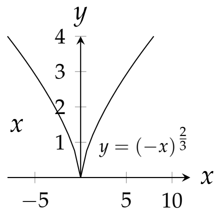
سوال 13 تا سوال 24 میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ان میں کونسی تشاکل پائی جاتی ہے (اگر پائی جاتی ہو تب)۔اشکال 1.21 میں دی ترسیم کا سہارا لیا جا سکتا ہے۔

سوال 13: $y=-x^3$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.30

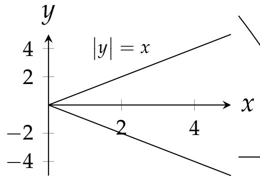
سوال 14: $y=-\frac{1}{x^2}$



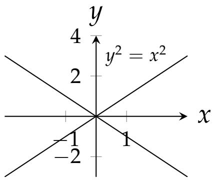
شکل 1.34



شکل 1.35



شکل 1.36



شکل 1.37

سوال 15: $y = -\frac{1}{x}$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.31

سوال 16: $y = \frac{1}{|x|}$

سوال 17: $y = \sqrt{|x|}$
جواب: y محدد کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.32

سوال 18: $y = \sqrt{-x}$

سوال 19: $y = \frac{x^3}{8}$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.33

سوال 20: $y = -4\sqrt{x}$

سوال 21: $y = -x^{\frac{3}{2}}$
جواب: کوئی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 1.34

سوال 22: $y = (-x)^{\frac{3}{2}}$

سوال 23: $y = (-x)^{\frac{2}{3}}$
جواب: y محور کے لحاظ سے تشاکل۔ شکل 1.35

سوال 24: $y = -x^{\frac{2}{3}}$

سوال 25: (الف) $x = |y|$ اور (ب) $y^2 = x^2$ ترسیم کریں۔ یہ مساوات x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) x کی ہر مثبت قیمت کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.36
(ب) ہر $x \neq 0$ کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.37

سوال 26: (الف) $|x| + |y| = 1$ اور (ب) $|x + y| = 1$ ترسیم کریں۔ یہ x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ وجہ پیش کریں۔

جفت اور طاق تفاعل

سوال 27 تا سوال 38 میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ جفت ہیں؟

سوال 27: $f(x) = 3$
جواب: جفت

سوال 28: $f(x) = x^{-5}$

سوال 29: $f(x) = x^2 + 1$
جواب: جفت

سوال 30: $f(x) = x^2 + x$

سوال 31: $g(x) = x^3 + x$
جواب: طاق

سوال 32: $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

سوال 33: $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
جواب: جفت

سوال 34: $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

سوال 35: $h(t) = \frac{1}{t-1}$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 36: $h(t) = \left|t^3\right|$

سوال 37: $h(t) = 2t + 1$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 38: $h(t) = 2|t| + 1$

مجموعے، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

سوال 39 تا سوال 40 میں f ، g ، $f+g$ اور $f \cdot g$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 39: $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

جوابات: $D_f : -\infty < x < \infty, , D_g : x \geq 1, , R_f : -\infty < y < \infty, , R_g : y \geq 0,$
$D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g, , R_{f+g} : y \geq 1, , R_{f \cdot g} : y \geq 0$

سوال 40: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 41 تا سوال 42 میں f ، g ، $\frac{f}{g}$ اور $\frac{g}{f}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 41: $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

جواب: $D_f : -\infty < x < \infty,\ D_g : -\infty < x < \infty,\ R_f : y = 2,\ R_g : y \geq 1,$
$D_{\frac{f}{g}} : -\infty < x < \infty,\ R_{\frac{f}{g}} : 0 < y \leq 2,\ D_{\frac{g}{f}} : -\infty < x < \infty,\ R_{\frac{g}{f}} : y \geq \frac{1}{2}$

سوال 42: $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تفاعل کے مرکب

سوال 43: اگر $f(x) = x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $f(g(0))$ ج. $f(g(x))$ ہ. $f(f(-5))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(0))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

جواب:

ا. 2 ج. x^2+2 ہ. 5 ز. $g+10$

ب. 22 د. $x^2+10x+22$ و. -2 ح. x^4-6x^2+6

سوال 44: اگر $f(x)=x-1$ اور $g(x)=\frac{1}{x+1}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $f(g(\frac{1}{2}))$ ج. $f(g(x))$ ہ. $f(f(2))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(\frac{1}{2}))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

سوال 45: اگر $u(x)=4x-5$ ، $v(x)=x^2$ اور $f(x)=\frac{1}{x}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $u(v(f(x)))$ ج. $v(u(f(x)))$ ہ. $f(u(v(x)))$

ب. $u(f(v(x)))$ د. $v(f(u(x)))$ و. $f(v(u(x)))$

جواب:

ا. $\frac{4}{x^2}-5$ ج. $(\frac{4}{x}-5)^2$ ہ. $\frac{1}{4x^2-5}$

ب. $\frac{4}{x^2}-5$ د. $(\frac{1}{4x-5})^2$ و. $\frac{1}{(4x-5)^2}$

سوال 46: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=\frac{x}{4}$ اور $h(x)=4x-8$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $h(g(f(x)))$ ج. $g(h(f(x)))$ ہ. $f(g(h(x)))$

ب. $h(f(g(x)))$ د. $g(f(h(x)))$ و. $f(h(g(x)))$

سوال 47 اور سوال 47 میں $f(x)=x-3$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، $h(x)=x^3$ اور $j(x)=2x$ لیں۔سوال کے ہر جزو کو تفاعل کا مرکب لکھیں۔مرکب میں f ، g ، h اور j میں سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل ہو سکتے ہیں۔

سوال 47:

ا. $y = \sqrt{x} - 3$ ج. $y = x^{\frac{1}{4}}$ ہ. $y = \sqrt{(x-3)^3}$

ب. $y = 2\sqrt{x}$ د. $y = 4x$ و. $y = (2x-6)^3$

جواب:

ا. $f(g(x))$ ج. $g(g(x))$ ہ. $g(h(f(x)))$

ب. $j(g(x))$ د. $j(j(x))$ و. $h(j(f(x)))$

سوال 48:

ا. $y = 2x - 3$ ج. $y = x^9$ ہ. $y = 2\sqrt{x-3}$

ب. $y = x^{\frac{3}{2}}$ د. $y = x - 6$ و. $y = \sqrt{x^3 - 3}$

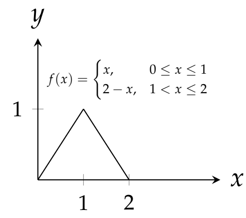
سوال 49: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x-7$	$\sqrt{x}$	
(ب)	$x+2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ہ)	$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{x}$	
(و)	$\frac{1}{x}$		x

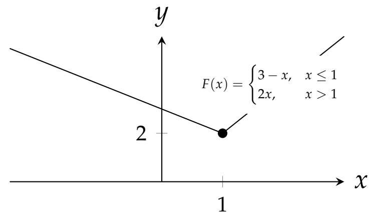
جواب:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x-7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(ب)	$x+2$	$3x$	$3x+6$
(ج)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(ہ)	$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{x}$	x
(و)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

سوال 50: کوئی عدد x لیں۔اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟



شکل 1.38



شکل 1.39

ٹکڑوں میں معین تفاعل

سوال 51 تا سوال 54 میں تفاعل ترسیم کریں۔

سوال 51:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جواب: شکل 1.38

سوال 52:

$$g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

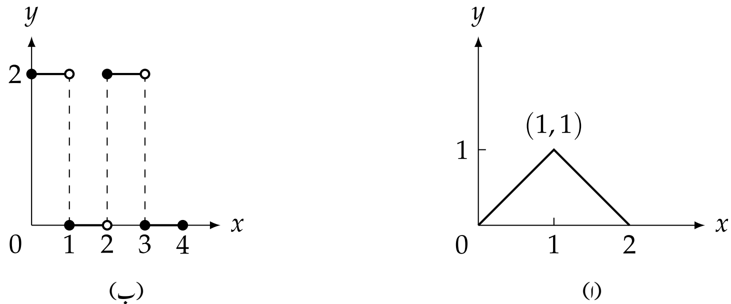
سوال 53:

$$F(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

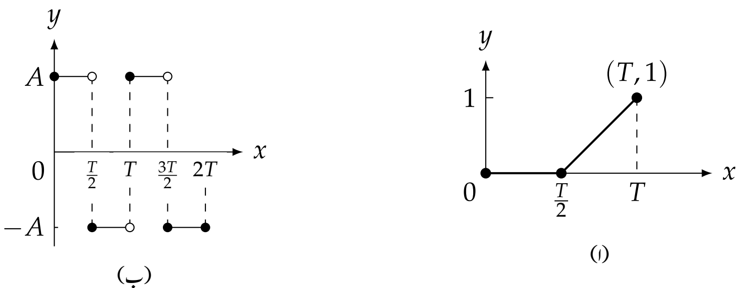
جواب: شکل 1.39

سوال 54:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$$



شکل 1.40: اشکال برائے سوال 55



شکل 1.41: اشکال برائے سوال 56

سوال 55: شکل 1.40 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

جواب: (الف) $y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ (ب) $y = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \text{ یا } 2 \le x < 3 \\ 0, & 1 \le x < 2 \text{ یا } 3 \le x \le 4 \end{cases}$

سوال 56: شکل 1.41 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چھت اور زمین تفاعل

سوال 57: x کی کن قیمتوں کے لئے (الف) $\lfloor x \rfloor = 0$ ہو گا؟ (ب) $\lceil x \rceil = 0$ ہو گا؟
جواب: الف $0 \le x < 1$ (ب) $-1 < x \le 0$

سوال 58: کون سے عدد صحیح x مساوات $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال 59: کیا تمام x کے لئے $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 60: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔ $f(x)$ کو x کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} \left|\lfloor x \rfloor\right|, x \geq 0 \\ \left|\lceil x \rceil\right|, \qquad x < 0 \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل

سوال 61: فرض کریں کہ f جفت تفاعل اور g طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط $\Re$ پر معین ہیں۔درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

ا. fg
ب. $\frac{f}{g}$
ج. $\frac{g}{f}$
د. $f^2 = ff$
ہ. $g^2 = gg$
و. $f \circ g$
ز. $g \circ f$
ح. $f \circ f$
ط. $g \circ g$

جواب:

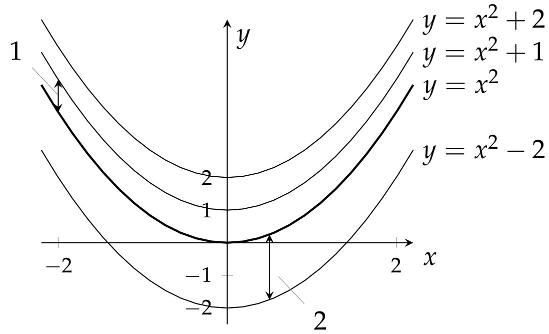
ا. طاق
ب. طاق
ج. طاق
د. جفت
ہ. جفت
و. جفت
ز. جفت
ح. جفت
ط. طاق

سوال 62: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

ترسیم

سوال 63: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = \sqrt{1-x}$ ترسیم کریں۔ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم کو بھی ترسیم کریں۔

سوال 64: فرض کریں کہ $f(x) = x - 7$ اور $g(x) = x^2$ ہیں۔ f اور g کے ساتھ $f \circ g$ اور $g \circ f$ کو بھی ترسیم کریں۔



شکل 1.42: تفاعل $f(x) = x^2$ کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال 1.30 اور مثال 1.31)۔

1.4 ترسیم کی منتقلی

اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ایسا کرنے سے نئی مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کا ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتا ہے۔ہم دائرہ اور قطع مکافی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر دیگر منحنیات پر بھی قابل لاگو ہے۔

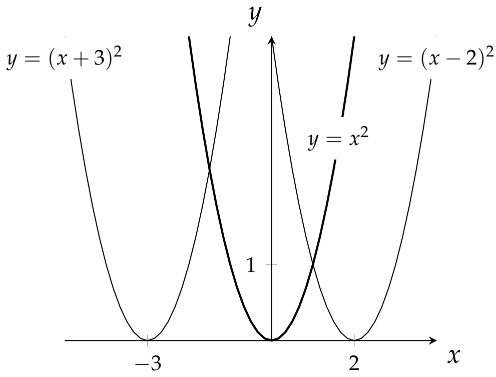
ترسیم کو کیسے منتقل کیا جاتا ہے

تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ $y = f(x)$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔

مثال 1.30: کلیہ $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے $y = x^2 + 1$ حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل 1.42)۔ □

مثال 1.31: مساوات $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = x^2 - 2$ ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل 1.42)۔ □

مثال 1.32: $y = x^2$ میں x کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل 1.43)۔ □



شکل 1.43: $y=x^2$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر x کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔دائیں منتقلی کی خطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال 1.32 اور مثال 1.33)

$y=f(x)$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لئے x کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال 1.33: $y=x^2$ میں x کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y=(x-2)^2$ حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل 1.43)۔ □

منتقلی کے کلیات

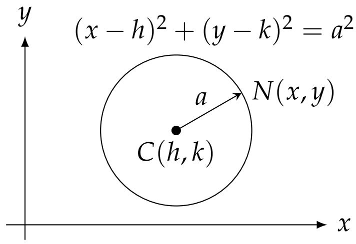
انتصابی منتقلی $$y=f(x)+k$$

$k>0$ کی صورت میں ترسیم k اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ $k<0$ کی صورت میں ترسیم $|k|$ اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

افقی منتقلی $$y=f(x-h)$$

$h>0$ کی صورت میں ترسیم h اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ $h<0$ کی صورت میں ترسیم $|h|$ اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

مثال 1.34: $y=(x-2)^2+3$ تفاعل $y=x^2$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ □



شکل 1.44: xy مستوی میں h,k کے گرد رداس a کا دائرہ

مساوات دائرہ

ایک مقررہ نقطہ سے یکساں فاصلے پر نقطوں کا سلسلہ دائرہ کہلاتا ہے۔ مقررہ نقطہ کو دائرے کا مرکز[55] کہتے ہیں جبکہ مرکز سے دائرے تک فاصلے کو دائرے کی رداس[56] کہتے ہیں (شکل 1.44)۔ ہم نے مثال 1.11 میں دیکھ کہ مبدا کے گرد رداس a کے دائرے کی مساوات $x^2+y^2=a^2$ ہے۔ مرکز کو (h,k) منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ حاصل ہوتی ہے۔

رداس a کا دائرہ جس کا مرکز (h,k) ہو کی معیاری مساوات

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \tag{1.3}$$

مثال 1.35: دائرہ $x^2+y^2=25$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔ نئی مساوات $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ ہو گی۔ اس کا مرکز $(-2,3)$ ہو گا۔ □

مثال 1.36: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز $3,4$ پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$$

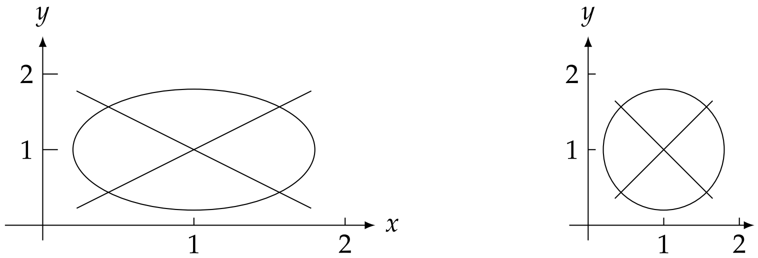
□

مثال 1.37: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x-1)^2+(y+5)^2=3$$

---

[55] center
[56] radius



(ا) چکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے

(ب) غیر چکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے

شکل 1.45: چکور اور غیر چکور نقش

حل: اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رداس $a = \sqrt{3}$ اور مرکز $(h, k) = (1, -5)$ لکھے جا سکتے ہیں۔ □

کمپیوٹر چکور نقش

چکور نقش سے مراد ایسا نقش ہے جس میں افقی اور انتصابی محدد کی پیمائش ایک جیسی ہو۔چکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔غیر چکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔چکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شیشہ نہیں ہے۔بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام x اور y محدد کی پیمائش غیر یکساں کرتے ہیں۔یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جا سکتا ہے کہ وہ چکور ترسیم ہی دکھائے۔شکل 1.45 میں چکور اور غیر چکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائری کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

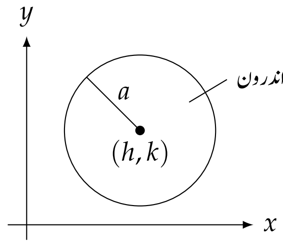
مثال 1.38: درج ذیل دائرہ کا رداس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 &= 0 \\
x^2 + 4x + y^2 - 6y &= 3 \\
x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 &= 3 \\
(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 &= 3 \\
(x+2)^2 + (y-3)^2 &= 16 = 4^2
\end{aligned}$$

یوں رداس $a = 4$ اور مرکز $(h, k) = (-2, 3)$ ہیں۔ □



شکل 1.46: دائرے کی اندرون

اندرون اور بیرون

دائرہ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے کم ہو۔یہ نقطے درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2+(y-k)^2<a^2$$

اس خطہ کو دائرے کی اندرون[57] کہتے ہیں (شکل 1.46)۔

دائرے کی بیرون[58] ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے زیادہ ہو۔ایسے نقطے درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

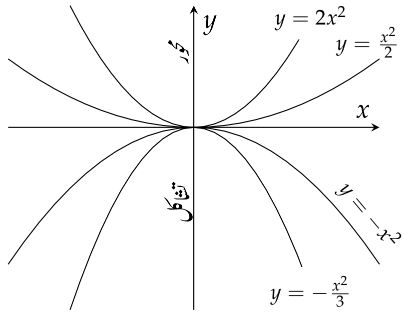
$$(x-h)^2+(y-k)^2>a^2$$

مثال 1.39:

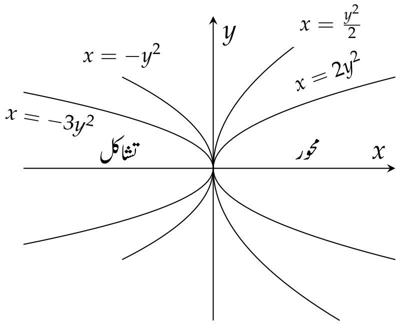
خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کی اندرون	$x^2+y^2<1$
اکائی دائرہ اور اس کی اندرون	$x^2+y^2\leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2+y^2>1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2+y^2\geq 1$

□

[57] interior
[58] exterior



شکل 1.47: قطع مکافی $y = ax^2$



شکل 1.48: قطع مکافی $x = ay^2$

قطع مکافی ترسیم

مساوات $y = 3x^2$ یا $y = -5x^2$ جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y = ax^2$$

کی ترسیم کو قطع مکافی[59] کہتے ہیں جس کی محور[60] تشاکل y محور ہے۔اس قطع مکافی کی راس[61] (جہاں قطع مکافی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبدا پر پائی جاتی ہے۔مثبت a $(a > 0)$ کی صورت میں یہ قطع مکافی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی a $a < 0$ کی صورت میں یہ قطع مکافی نیچے کو کھلتا ہے۔ $|a|$ کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکافی اتنا تنگ ہو گا (شکل 1.47)۔

کلیہ $y = ax^2$ میں x اور y کو آپس میں ادل بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$x = ay^2$$

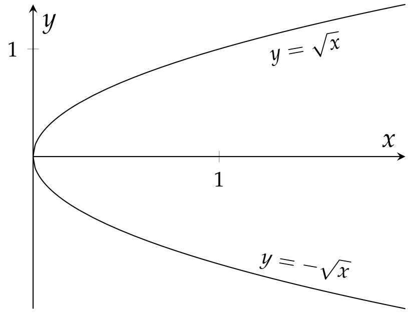
اس قطع مکافی کی ترسیم کا محور، x محور ہو گا اور اس کی راس مبدا پر پائی جائے گی (شکل 1.48)۔

مثال 1.40: کلیہ $x = y^2$ ہمیں x بطور y کا تفاعل دیتا ہے لیکن یہ ہمیں y بطور x کا تفاعل نہیں دیتا ہے۔ y کے لئے حل کرتے ہوئے $y = \mp\sqrt{x}$ حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت x کے لئے y کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تفاعل کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

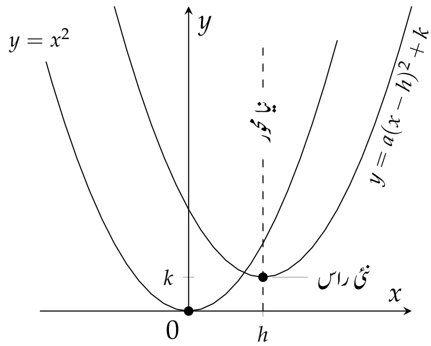
ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت x کے لئے یہ کلیات y کی ایک قیمت دیتے ہیں۔ $y = \sqrt{x}$ کی ترسیم قطع مکافی کا بالائی حصہ اور $y = -\sqrt{x}$ قطع مکافی کا نچلا حصہ دیتے ہیں (شکل 1.49)۔

□

[59] parabola
[60] axis
[61] vertex



شکل 1.49: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کی ترسیم مبدا پر ملتے ہیں اور مساوات $x = y^2$ کی ترسیم دیتے ہیں (مثال 1.40)



شکل 1.50: قطع مکافی $y = ax^2,\ a > 0$ کو h اکائیاں دائیں اور k اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے

دو درجی مساوات $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

قطع مکافی $y = ax^2$ کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y = a(x-h)^2 \tag{1.4}$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y - k = a(x-h)^2 \tag{1.5}$$

لکھتے ہیں۔دونوں منتقلی سے قطع مکافی کی راس (h, k) کو منتقل ہوتی ہے جبکہ اس کا محور $x = k$ ہو گا (شکل 1.50)۔

مساوات 1.5 کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.6}$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت $y = ax^2$ کی ترسیم ہو گی جس کو کہیں اور منتقل کیا گیا ہے۔کیوں؟ اس لئے کہ جس طرح مساوات 1.5 سے مساوات 1.6 حاصل کی گئی اسی طرح واپس مساوات 1.6 سے مساوات 1.5 بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ منحنی $y = ax^2 + bx + c$ اور $y = ax^2$ کی صورت اور سمت بندی ایک جیسی ہیں۔

قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c$ کا محور خط $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا۔اس کا قطع y حاصل کرنے کی خاطر $x = 0$ پر کیا جائے گا۔

منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کی ترسیم مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم قطع مکافی ہے جو $a > 0$ کی صورت میں اوپر رخ اور $a < 0$ کی صورت میں نیچے رخ کھلتا ہے۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{1.7}$$

اس کی راس اس نقطے پر ہو گی جہاں قطع مکافی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔راس کا x محدد $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا جس کو قطع مکافی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1.41: ترسیم قطع مکافی
مساوات $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ترسیم کریں۔
حل: پہلا قدم: مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

دوسرا قدم: چونکہ $a < 0$ ہے لہٰذا قطع مکافی نیچے کھلا ہے۔
تیسرا قدم: قطع مکافی کی محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

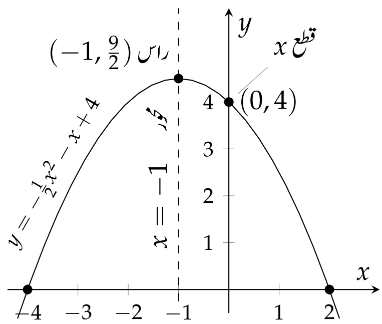
یوں راس کا x محدد -1 ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

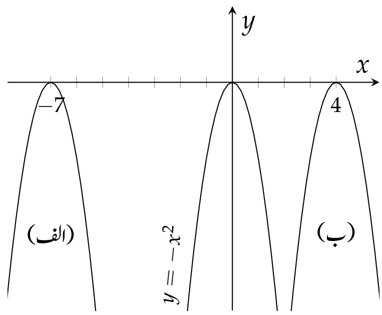
اس طرح راس $(-1, \frac{9}{2})$ ہو گی۔
چوتھا قدم: قطع x (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= 0 && \text{قطع مکافی کی مساوات میں } y = 0 \text{ پر کریں} \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 && \text{دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں} \quad (x-2)(x+4) = 0 \\ x = 2, \quad x &= -4 \end{aligned}$$

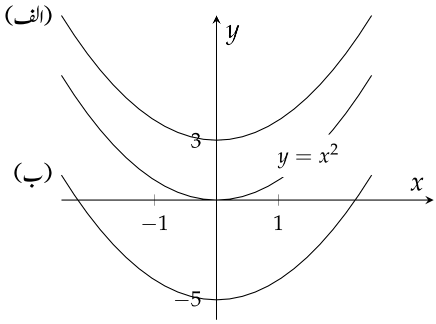
پانچواں قدم: $y = ax^2$ کا خاکہ بناتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کر کے منتقلی کے بعد کے xy محور کھینچیں (شکل 1.51)۔ □



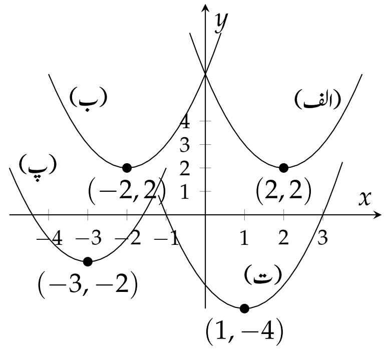
شکل 1.51: ترسیم قطع مکافی (مثال 1.41)



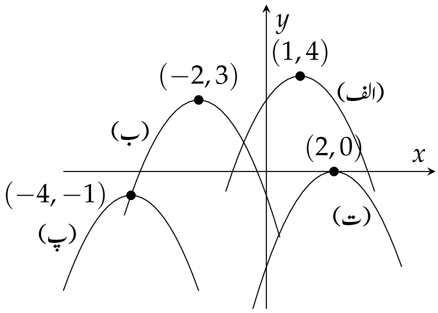
شکل 1.52: اشکال برائے سوال 1



شکل 1.53: اشکال برائے سوال 2



شکل 1.54: اشکال برائے سوال 3



شکل 1.55: اشکال برائے سوال 4

سوالات

ترسیم کی منتقلی

سوال 1: شکل 1.52 میں $y = -x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

جواب: (الف) $y = -(x+7)^2$ (ب) $y = -(x-4)^2$

سوال 2: شکل 1.53 میں $y = x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

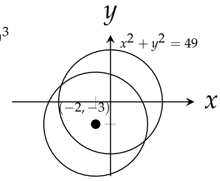
سوال 3: شکل 1.54 میں دکھائے گئے ترسیم کی مساوات درج ذیل میں سے منتخب کریں۔

$$y = (x-1)^2 - 4, \quad y = (x-2)^2 + 2, \quad y = (x+2)^2 + 2, \quad y = (x+3)^2 - 2$$

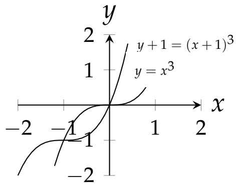
جواب: (الف) $y = (x-2)^2 + 2$ (ب) $y = (x+2)^2 + 2$ (پ) $y = (x+3)^2 - 2$ (ت) $y = (x-1)^2 - 4$

سوال 4: شکل 1.55 میں $y = -x^2$ کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔ چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔

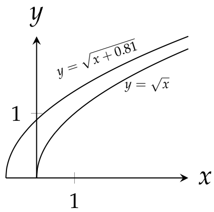
سوال 5 تا سوال 16 میں ترسیم منتقل کریں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساوات حاصل کریں۔ اصل اور منتقل شدہ ترسیم کھینچیں۔



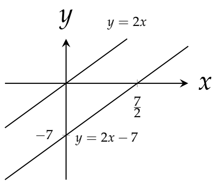
شکل 1.56



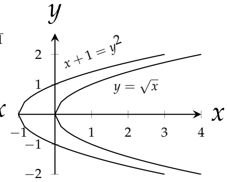
شکل 1.57



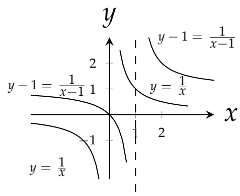
شکل 1.58



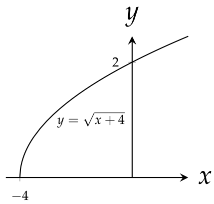
شکل 1.59



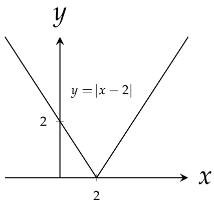
شکل 1.60



شکل 1.61



شکل 1.62



شکل 1.63

سوال 5: $x^2+y^2=49$ کو 3 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $(x+2)^2+(y+3)^2=49$ ، شکل 1.56

سوال 6: $x^2+y^2=25$ کو 3 اوپر، 4 بائیں منتقل کریں۔

سوال 7: $y=x^3$ کو 1 نیچے، 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y+1=(x+1)^3$ ، شکل 1.57

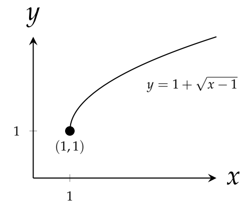
سوال 8: $y=x^{\frac{2}{3}}$ کو 1 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال 9: $y=\sqrt{x}$ کو 0.81 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y=\sqrt{x+0.81}$ ، شکل 1.58

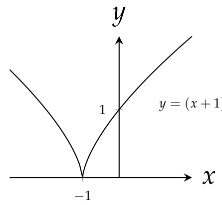
سوال 10: $y=-\sqrt{x}$ کو 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 11: $y=2x-7$ کو 7 اوپر منتقل کریں۔
جواب: $y=2x$ ، شکل 1.59

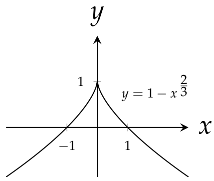
سوال 12: $y=\frac{1}{2}(x+1)+5$ کو 5 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔



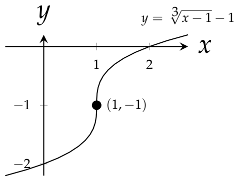
شکل 1.64



شکل 1.65



شکل 1.66



شکل 1.67

سوال 13: $y = x^2$ کو 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $x + 1 = y^2$ ، شکل 1.60

سوال 14: $x = -3y^2$ کو 2 اوپر، 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 15: $y = \frac{1}{x}$ کو 1 اوپر، 1 دائیں منتقل کریں۔
جواب: $y - 1 = \frac{1}{x-1}$ ، شکل 1.61

سوال 16: $y = \frac{1}{x^2}$ کو 1 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

سوال 17 تا سوال 36 میں تفاعل ترسیم کریں۔ صفحہ 38 پر شکل 1.21 میں دی گئی ترسیم کا سہارا لیں۔

سوال 17: $y = \sqrt{x+4}$
جواب: شکل 1.62

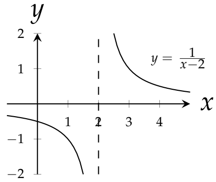
سوال 18: $y = \sqrt{9-x}$

سوال 19: $y = |x-2|$
جواب: شکل 1.63

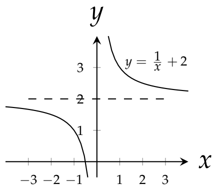
سوال 20: $y = |1-x| - 1$

سوال 21: $y = 1 + \sqrt{x-1}$
جواب: شکل 1.64

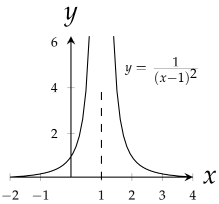
سوال 22: $y = 1 - \sqrt{x}$



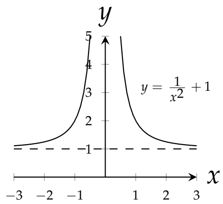
شکل 1.68



شکل 1.69



شکل 1.70



شکل 1.71

سوال 23: $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.65

سوال 24: $y = (x-8)^{\frac{2}{3}}$

سوال 25: $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.66

سوال 26: $y + 4 = x^{\frac{2}{3}}$

سوال 27: $y = \sqrt[3]{x-1} - 1$
جواب: شکل 1.67

سوال 28: $y = (x+2)^{\frac{3}{2}} + 1$

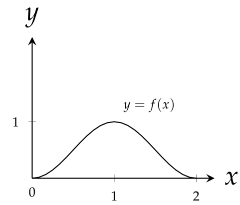
سوال 29: $y = \frac{1}{x-2}$
جواب: شکل 1.68

سوال 30: $y = \frac{1}{x} - 2$

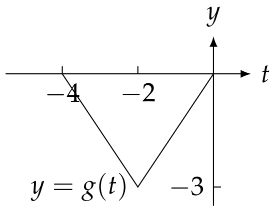
سوال 31: $y = \frac{1}{x} + 2$
جواب: شکل 1.69

سوال 32: $y = \frac{1}{x+2}$

سوال 33: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$
جواب: شکل 1.70



شکل 1.72: تفاعل برائے سوال 37



شکل 1.73: تفاعل برائے سوال 38

سوال 34: $y=\frac{1}{x^2}-1$

سوال 35: $y=\frac{1}{x^2}+1$
جواب: شکل 1.71

سوال 36: $y=\frac{1}{(x+1)^2}$

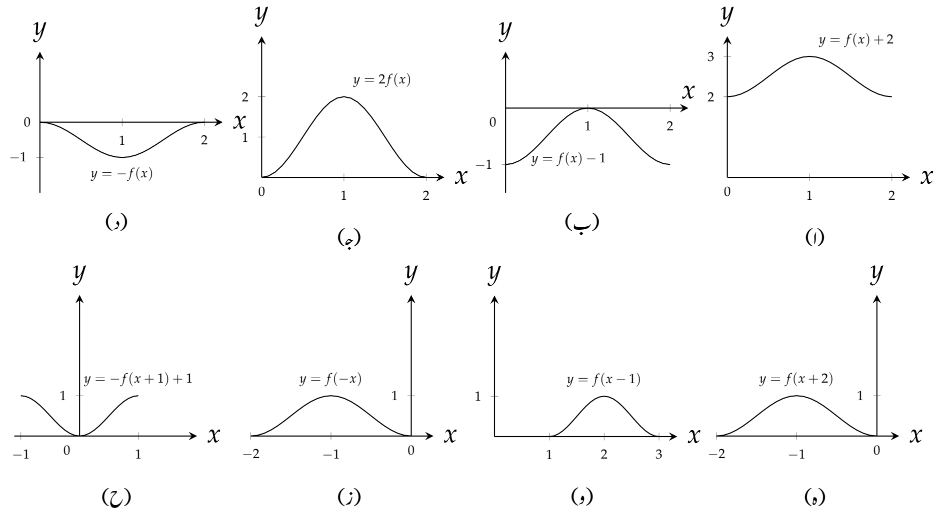
سوال 37: شکل 1.72 میں دکھائے گئے تفاعل $f(x)$ کا دائرہ کار $[0,2]$ اور سعت $[0,1]$ ہے۔درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔

ا. $f(x)+2$
ب. $f(x)-1$
ج. $2f(x)$
د. $-f(x)$
ہ. $f(x+2)$
و. $f(x-1)$
ز. $f(-x)$
ح. $-f(x+1)+1$

جوابات:اشکال کے لئے شکل 1.74 دیکھیں۔جبکہ دائرہ کار اور سعت درج ذیل ہیں۔

ا. $D:[0,2], R:[2,3]$
ب. $D:[0,2], R:[-1,0]$
ج. $D:[0,2], R=[0,2]$
د. $D:[0,2], R:[-1,0]$
ہ. $D:[-2,0], R:[0,1]$
و. $D:[1,3], R:[0,1]$
ز. $D:[-2,0], R:[0,1]$
ح. $D:[-1,1], R:[0,1]$

سوال 38: شکل 1.73 میں دکھائے گئے تفاعل $g(t)$ کا دائرہ کار $[-4,0]$ اور سعت $[-3,0]$ ہے۔درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔



شکل 1.74: اشکال برائے سوال 37 کے جوابات

ا. $g(-t)$

ب. $-g(t)$

ج. $g(t)+3$

د. $1-g(t)$

ہ. $g(-t+2)$

و. $g(t-2)$

ز. $g(1-t)$

ح. $-g(t-4)$

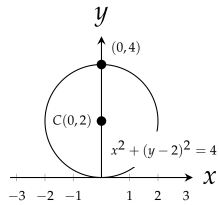
دائرے

سوال 39 تا سوال 44 میں دائرے کا رداس a اور مرکز $C(h,k)$ دیا گیا ہے۔دائرے کی مساوات لکھیں۔دائرہ اور دائرے کی مرکز کا xy مستوی میں خاکہ کھینچیں۔دائرے کا قطع x اور قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کی نشاندہی کریں اور اس کے محدد لکھیں۔

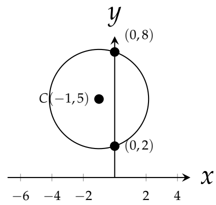
سوال 39: $C(0,2), \quad a=2$
جواب: $x^2+(y-2)^2=4$ ، شکل 1.75

سوال 40: $C(-3,0), \quad a=3$

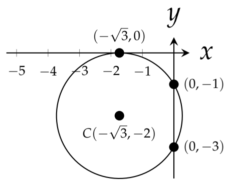
سوال 41: $C(-1,5), \quad a=\sqrt{10}$
جواب: $(x+1)^2+(y-5)^2=10$ ، شکل 1.76



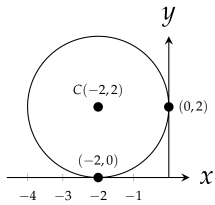
شکل 1.75



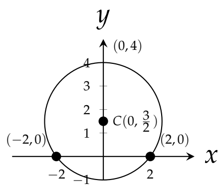
شکل 1.76



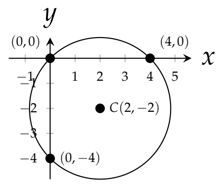
شکل 1.77



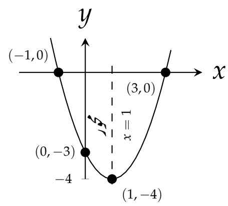
شکل 1.78



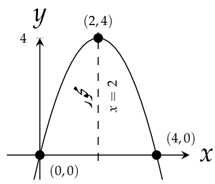
شکل 1.79



شکل 1.80



شکل 1.81



شکل 1.82

سوال 42: $\quad C(1,1), \quad a=\sqrt{2}$

سوال 43: $\quad C(-\sqrt{3},-2), \quad a=2$
جواب: $\quad (x+\sqrt{3})^2+(y+2)^2=4$ ، شکل 1.77

سوال 44: $\quad C(3,\frac{1}{2}), \quad a=5$

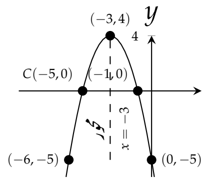
سوال 45 تا سوال 50 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔دائرے کا مرکز اور قطع x ، قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کے محدد دکھائیں۔

سوال 45: $\quad x^2+y^2+4x-4y+4=0$
جواب: $\quad (x+2)^2+(y-2)^2=4$ ، شکل 1.78

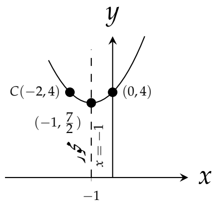
سوال 46: $\quad x^2+y^2-8x+4y+16=0$

سوال 47: $\quad x^2+y^2-3y-4=0$
$x^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$ ، شکل 1.79

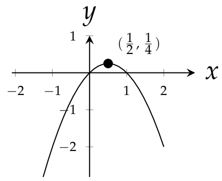
سوال 48: $\quad x^2+y^2-4x-\frac{9}{4}=0$



شکل 1.83



شکل 1.84



شکل 1.85

سوال 49: $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$
$(x-2)^2(y+2)^2 = 8$ ، شکل 1.80

سوال 50: $x^2 + y^2 + 2x = 3$

قطع مکافی

سوال 51 تا سوال 58 میں دیے گئے قطع مکافی ترسیم کریں۔ راس، محور اور قطع x ، قطع y بھی ظاہر کریں۔

سوال 51: $y = x^2 - 2x - 3$
$y = x^2 - 2x - 3$ ، شکل 1.81

سوال 52: $y = x^2 + 4x + 3$

سوال 53: $y = -x^2 + 4x$
جواب: $y = -x^2 + 4x$ شکل 1.82

سوال 54: $y = -x^2 + 4x - 5$

سوال 55: $y = -x^2 - 6x - 5$
جواب: شکل 1.83

سوال 56: $y = 2x^2 - x + 3$

سوال 57: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
جواب: شکل 1.84

سوال 58: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

سوال 59: قطع مکافی $y = x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔
جواب: شکل 1.85

سوال 60: قطع مکافی $y = 3 - 2x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $g(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

عدم مساوات

سوال 61 تا سوال 68 میں دیے گئے عدم مساوات اور عدم مساوات کی جوڑیوں پر تبصرہ کریں۔

سوال 61: $x^2 + y^2 > 7$
جواب: رداس $\sqrt{7}$ کے دائرے کی بیرون۔دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 62: $x^2 + y^2 < 5$

سوال 63: $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$
جواب: $(1,0)$ پر مرکز اور رداس 2 دائرے پر اور اس کے اندر۔

سوال 64: $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$

سوال 65: $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$
جواب: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ جھلی۔(وہ نقطے جن کا مبدا سے فاصلہ 1 اور 2 کے بیچ ہے۔)

سوال 66: $x^2 + y^2 \leq 4, \quad (x+2)^2 + y^2 \leq 4$

سوال 67: $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$
جواب: خط $y = -3$ کی بالائی جانب رداس 3 کے دائرہ کی اندرون۔دائرے کا مرکز $(0,-3)$ ہے۔

سوال 68: $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4, \quad x > 2$

سوال 69: ایسا عدم مساوات لکھیں جو رداس $\sqrt{6}$ کے دائرہ جس کا مرکز $(-2,1)$ ہو کے اندر نقطوں کو ظاہر کرتی ہو۔
جواب: $(x+2)^2+(y-1)^2<6$

سوال 70: رداس 4 اور مرکز $(-4,2)$ والے دائرے کے باہر نقطوں کے لئے عدم مساوات لکھیں۔

سوال 71: رداس 2 اور مرکز $(0,0)$ دائرے پر یا اس کے اندر، اور نقطہ $(1,0)$ سے گزرتا انتصابی خط پر یا اس کے دائیں جانب نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔
جواب: $x^2+y^2\leq 2, \quad x\geq 1$

سوال 72: رداس 2 اور مرکز $(0,0)$ والے دائرے کے باہر اور ایسے دائرا، جس کا مرکز $(1,3)$ ہو اور جو مبدا سے گزرتا ہو، کے اندر نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

منتقلی خطوط

سوال 73: خط $y=mx$ جو مبدا سے گزرتا ہے کو افقی اور انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تا کہ یہ نقطہ (x_0,y_0) سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں (جس کو نقطہ-ڈھلوان مساوات کہتے ہیں)۔
جواب: $y=y_0+m(x-x_0)$

سوال 74: خط $y=mx$ کو انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تا کہ یہ نقطہ $(0,b)$ سے گزرے۔نئے خط کی مساوات تلاش کریں۔

خطوط، دائرے اور قطع مکافی کا ایک دوسرے کو قطع ہونا

سوال 75 تا سوال 82 میں دیے دو مساوات ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

سوال 75: $y=2x, \quad x^2+y^2=1$
جواب: $(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$

سوال 76: $x+y=1, \quad (x-1)^2+y^2=1$

سوال 77: $y-x=1, \quad y=x^2$
جواب: $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}), \quad (\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2})$

سوال 78: $x+y=0, \quad y=-(x-1)^2$

سوال 79: $y=-x^2, \quad y=2x^2-1$
جواب: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

سوال 80: $y=\frac{1}{4}x^2, \quad y=(x-1)^2$

سوال 81: $x^2+y^2=1, \quad (x-1)^2+y^2=1$
جواب: $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

سوال 82: $x^2+y^2=1, \quad x^2+y=1$

سوال 83 تا سوال 86 میں مساوات $y=f(ax)$ میں مستقل a کی تبدیلی کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر ہم $y=f(ax)$ کو کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کرتے ہیں۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y=f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a=2,3,\cdots,10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y=f(ax)$ ترسیم کریں۔ a کی (مثبت) قیمت بڑھانے کے اثرات پر تبصرہ کریں۔

ب. $y=f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a=-2,-3,\cdots,-10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y=f(ax)$ ترسیم کریں۔ اب ترسیم پر اثرات کیا ہیں؟

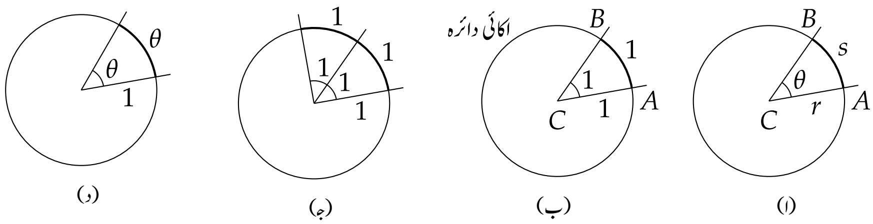
ج. $y=f(x)$ اور $y=f(ax)$ کو $a=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ کے لئے ترسیم کریں۔ ترسیم پر $|a|<1$ کا کیا اثر پایا جاتا ہے؟

سوال 83: $f(x)=\frac{5x}{x^2+4}, \quad [-10, 10]$

سوال 84: $f(x)=\frac{2x(x-1)}{x^2+1}, \quad [-3, -2]$

سوال 85: $f(x)=\frac{x+1}{2x^2+1}, \quad [-2, -2]$

سوال 86: $f(x)=\frac{x^4-4x^3+10}{x^2+4}, \quad [-1, 4]$



شکل 1.86: ریڈیئن کی تعریف

1.5 تکونیاتی تفاعل

اس حصہ میں ریڈیئن، تکونی تفاعل، دوریت اور بنیادی تکونی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

ریڈیئن

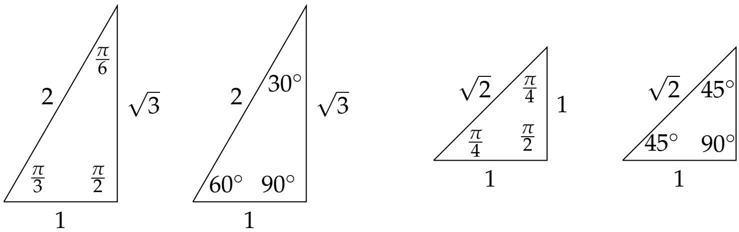
چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات کی صورت میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے جہاں 180° کو π ریڈیئن کہتے ہیں۔ ریڈیئن کی استعمال سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

شکل 1.86-ا میں رداس r کا دائرہ دکھایا گیا ہے جس کے مرکز C سے دو شعاعیں نکل رہی ہیں جو مرکز پر وسطی زاویہ θ بناتی ہیں۔ یہ شعاعیں دائرے کو A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ قوس AB کی لمبائی s ہے۔ اگر دائرے کا رداس 1 ہو تب ہم اس دائرے کو اکائی دائرہ[62] کہتے ہیں۔ اکائی دائرے پر اکائی لمبائی کا قوس جتنا زاویہ بناتی ہے اس کو ایک ریڈیئن زاویہ کہتے ہیں (یہی ایک ریڈیئن کی تعریف ہے)۔ شکل 1.86-ب میں ایک ریڈیئن کی اس تعریف کی وضاحت کی گئی ہے۔ شکل 1.86-ج میں اکائی لمبائی کے دو قوس ساتھ ساتھ رکھے گئے ہیں جو ایک ایک ریڈیئن کا وسطی زاویہ بناتے ہیں۔ یوں کل قوس کی لمبائی 2 ہے اور کل زاویہ 2 ریڈیئن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اکائی دائرے پر وسطی زاویہ کی ریڈیئن میں ناپ قوس کی لمبائی کے برابر ہو گی۔ شکل 1.86-د میں اس حقیقت کو دکھایا گیا ہے۔

زاویہ ACB کی ریڈیئن ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس AB کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط 2π ہے اور ایک مکمل چکر 360° ہے لہٰذا درج ذیل تعلق لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boxed{\pi \text{ ریڈیئن} = 180^\circ}$$

[62] unit circle



شکل 1.87: اشکال برائے مثال 1.42

مثال 1.42: درجہ سے ریڈیئن میں زاویے کی تبدیلی
$45°$ کو ریڈیئن میں لکھیں اور $\frac{\pi}{6}$ کو درجہ میں لکھیں۔
حل: شکل 1.87 دیکھیں۔

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈیئن}$$
$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30°$$

□

ریڈیئن اور درجہ

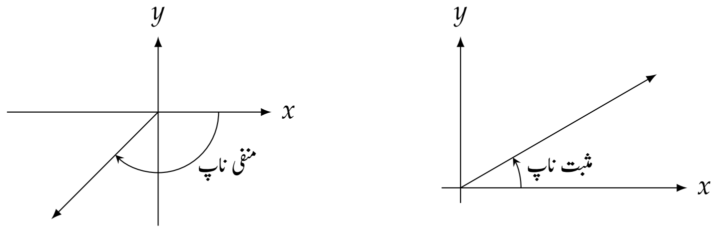
$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0.02 \text{ ریڈیئن}$$
$$1 \text{ ریڈیئن} = \frac{180}{\pi} \approx 57°$$

دھیان رہے کہ زاویے کی پیمائش درجات میں ہونے کو $°$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ریڈیئن کو بغیر علامت لکھا جاتا ہے۔یوں $\theta = 45°$ سے مراد پینتالیس درجہ ہو گا جبکہ $\theta = 3$ سے مراد تین ریڈیئن ہو گا۔

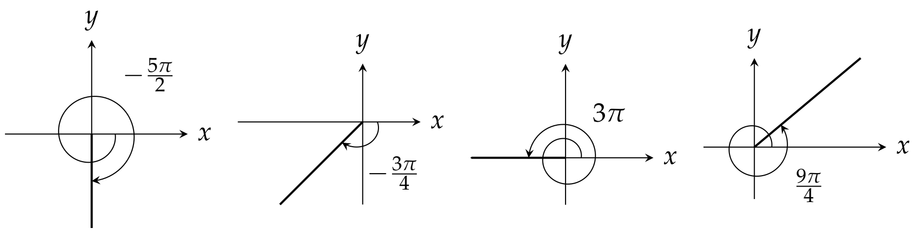
xy مستوی میں شعاع کا راس مبدا پر اور شعاع کا ابتدائی مقام مثبت x محور پر ہونے کی صورت میں زاویہ کے مقام کو معیاری مقام[63] کہتے ہیں۔مثبت x محور سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ زاویہ کی ناپ مثبت اور گھڑی کی سوئی کی رخ ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل 1.88)۔یوں مثبت x محور کا زاویہ 0 ریڈیئن اور منفی x محور کا زاویہ π ریڈیئن ہو گا۔

گھڑی مخالف چکر بیان کرتے ہوئے زاویے کی ناپ 2π یعنی $360°$ سے زیادہ ہو سکتی ہے۔اسی طرح گھڑی کی رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ کچھ بھی ممکن ہے (شکل 1.89)۔

[63] standard position

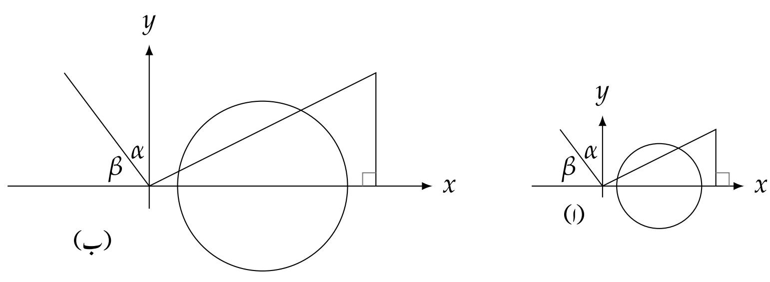


شکل 1.88: زاویے کی ناپ

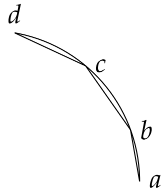


شکل 1.89: مثبت اور منفی ریڈیئن

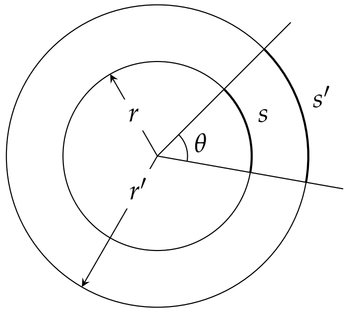
شکل 1.90-ا میں چند اشکال کو لچکدار xy مستوی پر دکھایا گیا ہے۔اس xy مستوی کو کھینچ کر x رخ اور y رخ کی لمبائیاں k گنا کرنے سے شکل 1.90-ب حاصل ہوتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ جسامت k گنا کر دی گئی ہے۔یوں اگر بائیں شکل کے تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہوں تب اس کی وتر کی لمبائی $\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گی۔دائیں شکل میں تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب ka اور kb ہوں گی لہٰذا اس کا وتر $\sqrt{(ka)^2+(kb)^2}=k\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گا۔آپ نے دیکھا کہ دائیں مستوی پر نا صرف افقی اور انتصابی خط بلکہ ترچھے خط کی لمبائی بھی k گنا ہو گئی ہے۔چونکہ ہر ترچھے خط کو کسی تکون کا وتر تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا دائیں مستوی پر (ہر افقی اور ہر انتصابی خط کے ساتھ ساتھ) ہر ترچھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی۔کیا جسامت k گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی k گنا ہو گی؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جس کا ثبوت اب پیش کرتے ہیں۔



شکل 1.90: شکل بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر اثر نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 1.91: قوس کی لمبائی



شکل 1.92: محیط دائرہ

شکل 1.93: قوس، رداس اور زاویے کا تعلق۔

شکل 1.91 میں قوس کی لمبائی جاننے کی خطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی تصور کیا جا سکتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔اب اگر اس قوس کی جسامت کو k گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی لہٰذا ان کی مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی k گنا ہو گی۔(ثبوت مکمل ہوا۔)

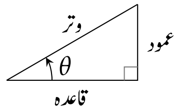
شکل 1.93-ا میں رداس r کے دائرے پر قوس s اور وسطی زاویہ θ دکھائے گئے ہیں۔اس دائرے کے مرکز پر ہم 1 رداس کا دائرہ بناتے ہیں (شکل 1.93-ب؛ اگر دیے گئے دائرے کا رداس اکائی سے کم ہو تب یہ دائرہ اکائی دائرے کے اندر نظر آئے گا)۔ (جیسا شکل 1.93-ب میں دکھایا گیا ہے) ریڈیئن کی تعریف کی رو سے اکائی دائرے پر قوس اور زاویہ آپس میں برابر ہوں گے۔شکل 1.93-ب میں دونوں دائروں پر قوس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{s}{\theta}$ اور دائروں کے رداس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{r}{1}$ ایک جیسا ہوں گے، یعنی $\frac{s}{\theta}=\frac{r}{1}$ جس سے درج ذیل اہم ترین کلیہ ملتا ہے۔

قوس، رداس اور زاویے کا تعلق

$$s=r\theta$$

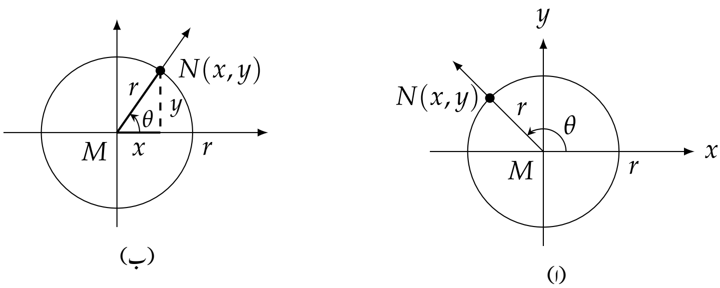
زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں

یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔یوں اگر ہم زاویہ $\frac{\pi}{6}$ کی بات کریں تب اس سے مراد $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن کا زاویہ ہو گا نا کہ $\frac{\pi}{6}$ درجے کا زاویہ۔



سائن	$\sin\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}},$	کوسیکنٹ	$\csc = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$
کوسائن	$\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}},$	سیکنٹ	$\sec = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$
ٹینجنٹ	$\tan\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}},$	کوٹینجنٹ	$\cot = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$

شکل 1.94: قائمہ مثلث اور تکونیاتی تفاعل



شکل 1.95: تکونیاتی تفاعل

مثال 1.43: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر 2π لمبائی کا قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بناتا ہے۔ (ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو $\frac{3\pi}{4}$ وسطی زاویہ بناتا ہو۔
حل:

$$\text{(الف)} \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(ب)} \quad s = r\theta = 8(\tfrac{3\pi}{4}) = 6\pi$$

□

چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل

آپ زاویہ حادہ کے تکونیاتی تفاعل سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل 1.94)۔ ہم انہیں تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرجہ اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس r کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب ان تکونیاتی تفاعل کو نقطہ $N(x, y)$ کے محدد کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتا ہوا شعاع دائرے کو $N(x, y)$ پر قطع کرتا ہے۔

شکل 1.95-ا کو دیکھتے ہوئے ان تفاعل کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

چھ تکونیاتی تفاعل

$$\begin{aligned} \text{سائن} \quad \sin\theta &= \frac{y}{r} & \text{کوسیکنٹ} \quad \csc\theta &= \frac{r}{y} \\ \text{کوسائن} \quad \cos\theta &= \frac{x}{r} & \text{سیکنٹ} \quad \sec\theta &= \frac{r}{x} \\ \text{ٹینجنٹ} \quad \tan\theta &= \frac{y}{x} & \text{کوٹینجنٹ} \quad \cot\theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

آپ شکل 1.95-ب سے دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ حادہ کی صورت میں تکونیاتی تفاعل کی توسیعی تعریف اور قائمہ زاویہ تکونی تعریف ایک جیسے ہیں۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $x = 0$ کی صورت میں $\tan\theta$ اور $\sec\theta$ غیر معین ہیں (چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے)۔یوں یہ $\theta = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots$ کے لئے غیر معین ہیں۔اسی طرح $y = 0$ یعنی $\theta = 0, \mp\pi, \mp2\pi, \cdots$ کے لئے $\cot\theta$ اور $\csc\theta$ غیر معین ہیں۔

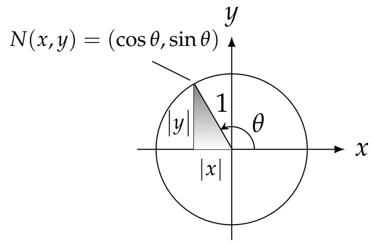
اسی طرح درج ذیل تعریف بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

تکونیاتی تفاعل کے باہمی تعلقات

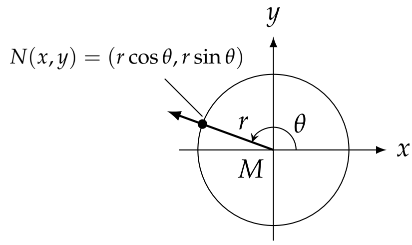
$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} & \cot\theta &= \frac{1}{\tan\theta} \\ \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} & \csc\theta &= \frac{1}{\sin\theta} \end{aligned}$$

مستوی میں نقطہ $N(x, y)$ کو مبدا سے فاصلہ r اور زاویہ θ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے (شکل 1.96)۔چونکہ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ اور $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$



شکل 1.97: زاویہ θ کے لئے زاویہ حادہ تکون



شکل 1.96: مستوی میں کارتیسی محدد کا r اور θ میں اظہار۔

تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں

شکل 1.95 کے دائرے میں $r = 1$ ہونے کی صورت میں $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی تعارفی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\cos\theta = x, \quad \sin\theta = y$$

یوں ہم سائن اور کوسائن کی قیمتوں کو بالترتیب نقطہ $N(x,y)$ کی x اور y محدد سے پڑھ سکتے ہیں۔نقطہ N سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون سے بھی انہیں حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 1.97)۔ہم x اور y کی قیمتیں تکون کی اطراف سے ناپتے ہیں۔ x اور y کی علامتیں اس ربع سے تعین کی جاتی ہیں جس میں تکون پایا جاتا ہو۔

مثال 1.44: $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

حل: پہلا قدم زاویے کو معیاری مقام پر اکائی دائرے میں بنائیں۔حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.98)۔

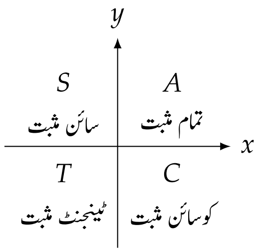
دوسرا قدم جہاں اکائی دائرے کو شعاع قطع کرتی ہے اس نقطے کے محدد دریافت کریں:

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{3} &= N \text{ کا محدد } x = -\frac{1}{2}\\ \sin\frac{2\pi}{3} &= N \text{ کا محدد } y = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

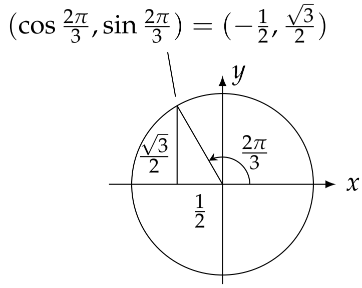
تکونیاتی تفاعل کی قیمتوں کی علامت جاننے کے لئے شکل 1.99 میں دکھایا گیا $CAST$ کا قاعدہ یاد رکھیں۔ □

مثال 1.45: $-\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

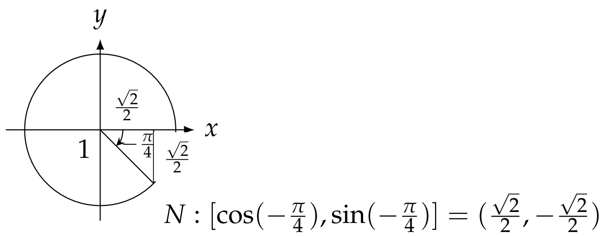
حل: پہلا قدم: معیاری مقام پر اکائی دائرے میں زاویہ کھینچ کر حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.100)۔



شکل 1.99: قاعدہ $CAST$



شکل 1.98: تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں (مثال 1.44)



شکل 1.100: شکل برائے مثال 1.45

دوسرا قدم: نقطہ N کے محدد تلاش کریں۔

$$\cos(-\tfrac{\pi}{4}) = \text{کا محدد } x \text{ } N = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(-\tfrac{\pi}{4}) = \text{کا محدد } y \text{ } N = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

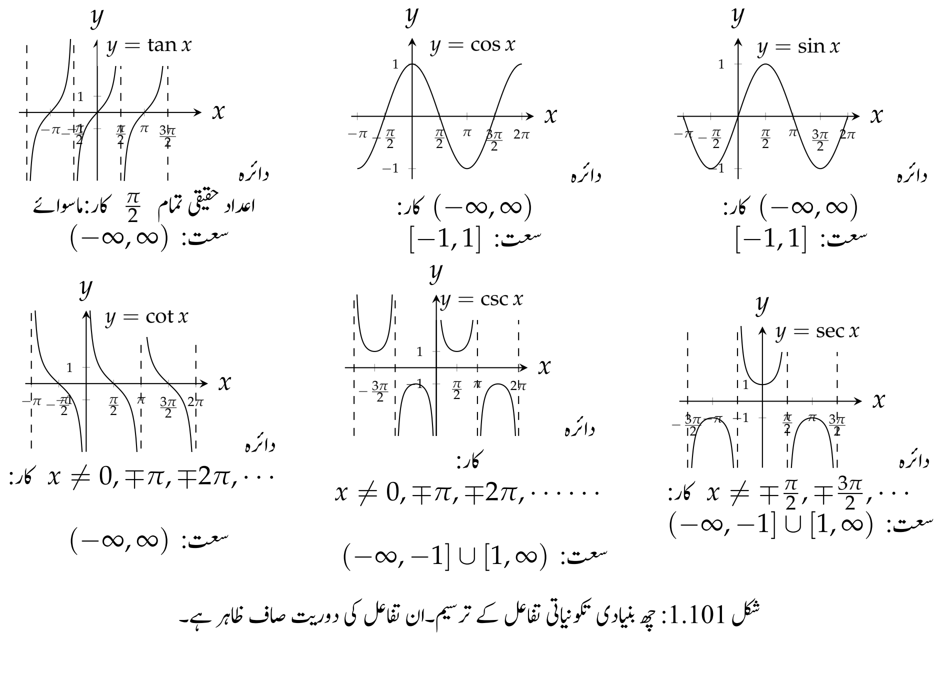
□

درج بالا دو مثالوں کی طرح حل کرتے ہوئے جدول میں دیے قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔

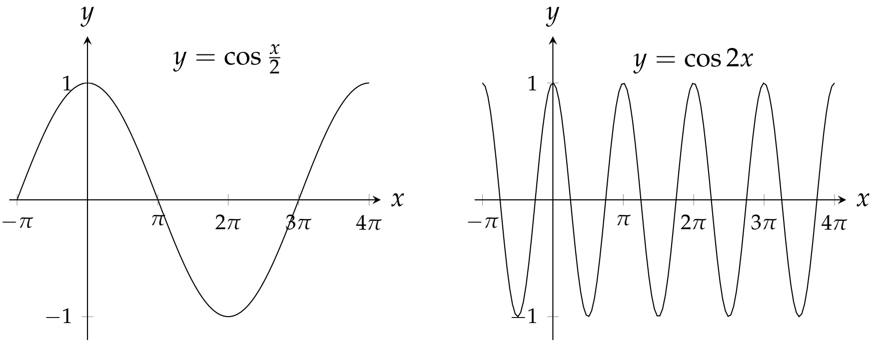
ترسیم

تکونیاتی تفاعل کو کارتیسی محدد میں ترسیم کرتے ہوئے ہم عموماً غیر تابع متغیر θ کو x سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 1.101)۔

درجہ	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°
ریڈیئن	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0



شکل 1.101: چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کے ترسیم۔ان تفاعل کی دوریت صاف ظاہر ہے۔



(ب) (ا)

شکل 1.102: $\cos 2x$ کا دوری عرصہ کم ہے جبکہ $\cos\frac{x}{2}$ کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

دوریت

معیاری مقام پر زاویہ x اور زاویہ $x+2\pi$ ہم مکان ہوں گے۔یوں ان دونوں زاویوں کے تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔مثال کے طور پر $\cos(x+2\pi)=\cos x$ ہو گا۔ایسے تفاعل جن کی قیمت مقررہ وقفوں سے دہراتی ہو دوری[64] کہلاتا ہے۔

تعریف: اگر کسی مثبت عدد p کے لئے تمام x پر $f(x+p)=f(x)$ ہو تب تفاعل $f(x)$ دوری کہلاتا ہے۔ p کی ایسی کم سے کم قیمت کو $f(x)$ کا دوری عرصہ[65] کہتے ہیں۔

□

ہم شکل 1.101 سے دیکھ سکتے ہیں کہ ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ تفاعل کا دوری عرصہ $p=\pi$ ہے جبکہ باقی چار تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔

شکل 1.102 میں $y=\cos 2x$ اور $y=\cos\frac{x}{2}$ ترسیم کیے گئے ہیں۔تکونیاتی تفاعل میں x کو 1 سے بڑی عدد سے ضرب کرنے سے تفاعل تیز ہو جاتا ہے (اس کی تعدد بڑھ جاتی ہے اور اس کا دوری عرصہ کم ہو جاتا ہے) جبکہ 1 سے کم عدد سے x کو ضرب کرنے سے تفاعل آہستہ ہو جاتا ہے جس سے اس کا دوری عرصہ بڑھ جاتا ہے۔

دوری تفاعل کی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ سائنس میں عموماً طبعی نظام جن پر ہم غور کرتے ہیں کا رویہ دوری ہوتا ہے۔دل کی دھڑکن، دماغی لہریں اور گھریلو استعمال کی 220 وولٹ کی بجلی دوری ہیں۔اسی طرح خرد امواج تندور میں برقناطیسی میدان جو خوراک کو گرم کرتی ہیں دوری

---

periodic[64]
period[65]

ہوتی ہیں۔ موسمی کاروبار میں سرمایہ کی آمد و رفت اور گھومنے والی مشین کا رویہ بھی دوری ہوتا ہے۔ ہمارے پاس پختہ شواہد موجود ہیں جن کے تحت دنیا پر برفانی عہد تقریباً 90 000 تا 100 000 سال کے وقفہ سے دہراتا ہے۔

اگر اتنے زیادہ چیزیں دوری ہیں تب ہم صرف تکونیاتی تفاعل پر کیوں غور کرنا چاہتے ہیں؟ اس کا جواب اعلٰی احصاء کا ایک حیرت کن مسئلہ دیتا ہے جس کے تحت ہر دوری تفاعل، جسے ہم ریاضی نمونہ میں استعمال کرنا چاہیں گے، کو ہم سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں۔ یوں سائن اور کوسائن تفاعل کا احصاء جانتے ہوئے ہم کسی بھی دوری تفاعل کا ریاضی نمونہ اخذ کر سکیں گے۔

جفت بالمقابل طاق

شکل 1.101 سے ظاہر ہے کہ کوسائن اور سیکنٹ تفاعل جفت ہیں جبکہ باقی چار تفاعل طاق ہیں:

جفت	طاق
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

مماثل

اکائی دائرے پر نقطہ $N(\cos\theta, \sin\theta)$ سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے درج ذیل ملتا ہے (شکل 1.103)۔

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1.8}$$

یہ مساوات θ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اور غالباً یہ اہم ترین تکونیاتی مماثل ہے۔

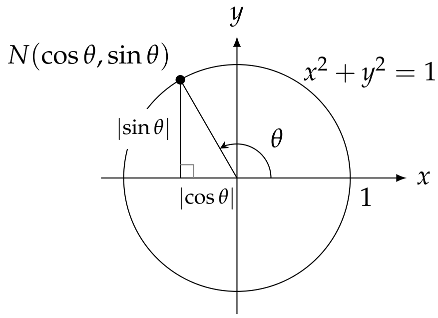
مساوات 1.8 کے دونوں ہاتھ کو ایک بار $\cos^2\theta$ اور ایک بار $\sin^2\theta$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

آپ درج ذیل مماثل سے بخوبی واقف ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B \\ \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B \end{aligned} \tag{1.9}$$

مجموعہ زاویہ کلیات



شکل 1.103: عمومی زاویہ θ کے لئے حوالہ تکون۔

اس کتاب میں تمام درکار مماثل کو مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 1.9 A اور B کی ہر قیمت کے لئے درست ہیں۔ $\cos(A-B)$ اور $\sin(A-B)$ کے لئے بھی اسی طرح کے کلیات پائے جاتے ہیں (سوال 35 اور سوال 36)۔

مجموعہ زاویہ کلیات میں A اور B دونوں کے لئے θ پر کرنے سے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \qquad \text{دوہرا زاویہ کلیات} \tag{1.10}$$

درج ذیل کلیات

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

کو آپس میں جمع کرنے سے $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ اور تفریق کرنے سے $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ حاصل ہوتا ہے جن سے دوہرا زاویے کے درج ذیل مزید دو کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{1.11}$$

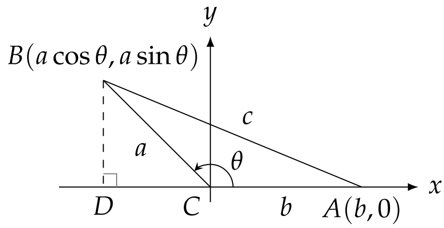
$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{1.12}$$

درج بالا میں θ کی جگہ $\frac{\theta}{2}$ لکھنے سے نصف زاویہ کلیات[66] حاصل ہوتے ہیں۔

قاعدہ کوسائن

اگر تکون ABC کے اضلاع a ، b اور c ہوں اور c کے سامنے زاویہ θ ہو تب درج ذیل ہو گا (شکل 1.104)۔

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{1.13}$$



شکل 1.104: قاعدہ کوسائن

اس مساوات کو قاعدہ کوسائن[67] کہتے ہیں۔

اس کلیہ کو حاصل کرنے کی خاطر تکون کو کارتیسی محدد پر یوں بنائیں کہ اس کا ایک راس مبدا پر اور ایک ضلع x محور پر ہو (شکل 1.104)۔ راس B سے x محور پر قائمہ گرائیں۔ یوں حاصل قائمہ مثلث ABD پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق کرتے ہیں جہاں A سے D تک فاصلہ $b - a\cos\theta$ لکھا جائے گا (مثلاً $b = 3$ اور $a\cos\theta = -2$ کی صورت میں $AD = 3 - (-2) = 5$ ہو گا اور $a\cos\theta = 1$ کی صورت میں $AD = 3 - 1 = 2$ ہو گا)۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
c^2 &= (b - a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 \\
&= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 - 2ab\cos\theta \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}
$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ کا سہارا لیا گیا ہے۔

قاعدہ کوسائن مسئلہ فیثاغورث کو عمومی بناتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی صورت میں $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ کی بنا قاعدہ کوسائن سے $c^2 = a^2 + b^2$ یعنی مسئلہ فیثاغورث حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

ریڈیئن، درجہ اور دائری قوس

سوال 1: رداس $10\,\text{cm}$ کے دائرے پر کتنی لمبائی کا قوس (الف) $\frac{4\pi}{5}$ ریڈیئن (ب) 110° کا وسطی زاویہ بنائے گا؟
جواب: (الف) 8π سنٹی میٹر (ب) 0.19 میٹر

---

[66] half angle formulae
[67] law of cosines

سوال 2: رداس 8 کے دائرے پر 10π لمبائی کا قوس، مرکز پر کتنا وسطی زاویہ بناتا ہے؟ جواب درجات اور ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 3: کیلکولیٹر 80° کا وسطی زاویہ بنانے کی خاطر آپ $30\,\text{cm}$ قطر کے قرص پر مرکز سے دو خط کھینچنا چاہتے ہیں۔ محیط پر قرص کی لمبائی $1\,\text{mm}$ درستگی تک تلاش کریں۔
جواب: $20.9\,\text{cm}$

سوال 4: کیلکولیٹر ایک میٹر قطر کے پہیا کو ہموار زمین پر $30\,\text{cm}$ چلایا جاتا ہے۔ پہیا کتنا زاویہ گھوما ہو گا؟ جواب (الف) ریڈیئن کے دسواں حصہ اور (ب) درجہ کے ایک حصہ درستگی تک تلاش کریں۔

تکونیاتی تفاعل کی قدر پیمائی

سوال 5: درج ذیل بایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

θ	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

سوال 6: درج بالا دایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

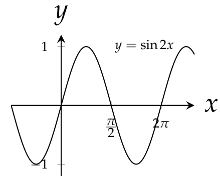
سوال 7 تا سوال 12 میں $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ میں سے ایک دیا گیا ہے۔ باقی دو تفاعل کو دیے گئے وقفے کے اندر تلاش کریں۔

سوال 7: کار: دائرہ $[\frac{\pi}{2},\pi]$، $\sin x = \frac{3}{5}$
جواب: $\cos x = -\frac{4}{5},\quad \tan x = -\frac{3}{4}$

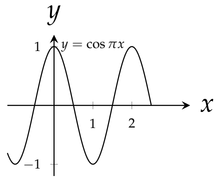
سوال 8: کار: دائرہ $[0,\frac{\pi}{2}]$، $\tan x = 2$

سوال 9: کار: دائرہ $[-\frac{\pi}{2},0]$، $\cos x = \frac{1}{3}$
جواب: $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3},\quad \tan x = -\sqrt{8}$

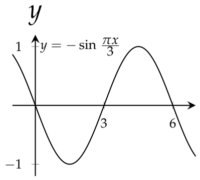
سوال 10: کار: دائرہ $[\frac{\pi}{2},\pi]$، $\cos x = -\frac{5}{13}$



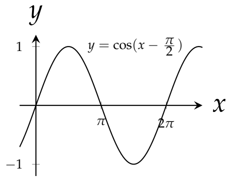
شکل 1.105



شکل 1.106



شکل 1.107



شکل 1.108

سوال 11: دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، $\tan x = \frac{1}{2}$

جواب: $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 12: دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، $\sin x = -\frac{1}{2}$

تکونیاتی تفاعل کی ترسیم

سوال 13 تا سوال 22 میں دیا گیا تفاعل ترسیم کریں۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ تلاش کریں۔

سوال 13: $\sin 2x$

جواب: دوری عرصہ π ہے۔ شکل 1.105

سوال 14: $\sin \frac{x}{2}$

سوال 15: $\cos \pi x$

جواب: دائرہ کار: 2 ، شکل 1.106

سوال 16: $\cos \frac{\pi x}{2}$

سوال 17: $-\sin \frac{\pi x}{3}$

جواب: دائرہ کار: 6 ، شکل 1.107

سوال 18: $-\cos 2\pi x$

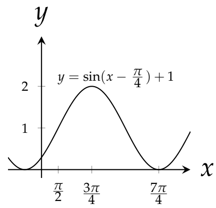
سوال 19: $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.108

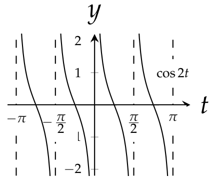
سوال 20: $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

سوال 21: $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$

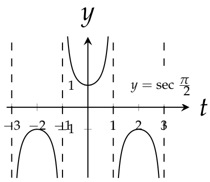
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.109



شکل 1.109



شکل 1.110



شکل 1.111

سوال 22: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے تفاعل کو ts مستوی میں ترسیم کریں جہاں افقی محور t ہو۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ اور تشاکل تلاش کریں۔

سوال 23: $s = \cot 2t$
جواب: دائرہ کار: $\frac{\pi}{2}$ ، شکل 1.110

سوال 24: $s = -\tan \pi t$

سوال 25: $s = \sec \frac{\pi t}{2}$
جواب: دائرہ کار: 4 ، شکل 1.111

سوال 26: $s = \csc \frac{t}{2}$

سوال 27: کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے
(الف) $y = \cos x$ اور $y = \sec x$ کو $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\sec x$ کے رویہ پر $\cos x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔
(ب) $-pi \le x \le 2\pi$ کے لئے $y = \sin x$ اور $y = \csc x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\csc x$ کے رویہ پر $\sin x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

سوال 28: $-7 \le x7$ کے لئے $y = \tan x$ اور $y = \cot x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\tan x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے $\cot x$ پر تبصرہ کریں۔

سوال 29: $y = \sin x$ اور $y = \lfloor \sin x \rfloor$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lfloor \sin x \rfloor$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 30: $y = \sin x$ اور $y = \lceil \sin x \rceil$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lceil \sin x \rceil$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

اضافی تکونیاتی مماثل

مجموعہ زاویہ کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال 31 تا سوال 36 میں دیے گئے مماثل حاصل کریں۔

سوال 31: $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

سوال 32: $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

سوال 33: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

سوال 34: $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$

سوال 35: $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

سوال 36: $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

سوال 37: اگر سوال 35 میں $B = A$ پر کیا جائے تب کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ حاصل کردہ مماثل کو پہلے سے جانتے ہیں؟

سوال 38: مجموعہ زاویہ کلیات میں $B = 2\pi$ لینے سے کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ نتائج سے مطمئن ہیں؟

مجموعہ زاویہ کلیات کا استعمال
سوال 39 تا سوال 42 میں دی گئی مقدار کو $\sin x$ اور $\cos x$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 39: $\cos(\pi + x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 40: $\sin(2\pi - x)$

سوال 41: $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 42: $\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

سوال 43: $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\sin\frac{7\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

سوال 44: $\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\cos\frac{11\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 45: $\cos\frac{\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

سوال 46: $\sin\frac{5\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

دوہرا زاویہ کلیات کا استعمال
سوال 47 تا سوال 50 میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 47: $\cos^2\frac{\pi}{8}$
جواب: $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

سوال 48: $\cos^2\frac{\pi}{12}$

سوال 49: $\sin^2\frac{\pi}{12}$
جواب: $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

سوال 50: $\sin^2\frac{\pi}{8}$

نظریہ اور مثالیں

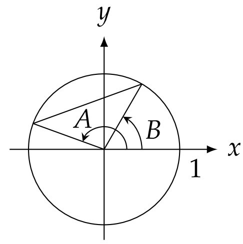
سوال 51: ٹینجنٹ مجموعہ زاویہ کا کلیہ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ ہے۔اس کلیہ کو اخذ کریں۔

سوال 52: $\tan(A-B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

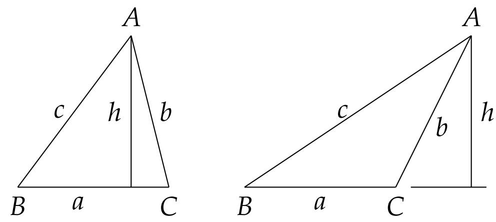
سوال 53: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A-B)$ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 54: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 کی طرز کے شکل پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A+B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔یہ شکل کیسا ہو گا۔

سوال 55: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a=2$ ، $b=3$ اور زاویہ $C=60^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔
جواب: $c=\sqrt{7}\approx 2.646$



شکل 1.112: شکل برائے سوال 53



شکل 1.113: اشکال برائے سوال 57

سوال 56: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 40°$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 57: قاعدہ سائن قاعدہ سائن کہتا ہے کہ اگر مثلث کے زاویے A ، B ، C کے سامنے اضلاع بالترتیب a ، b ، c ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

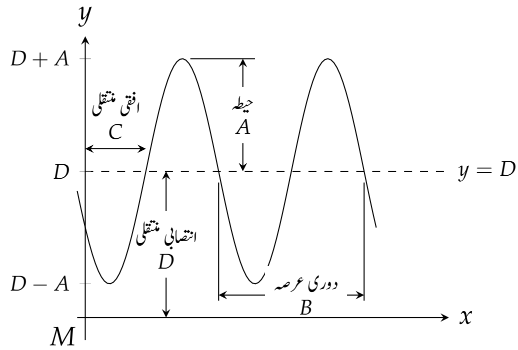
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اشکال 1.113 اور مماثل $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ استعمال کرتے ہوئے اس قاعدہ کو اخذ کریں۔

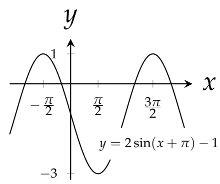
سوال 58: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 60°$ ہیں۔ $\sin B$ کو قاعدہ سائن سے حاصل کریں۔

سوال 59: کیلکولیٹر ایک مثلث کا ضلع $c = 2$ اور زاویے $A = \frac{\pi}{4}$ اور $B = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔ زاویہ A کا مخالف ضلع a اور تلاش کریں۔
جواب: $a = 1.464$

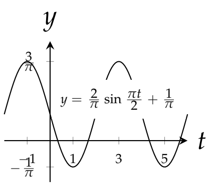
سوال 60: تخمین $\sin x \approx x$ x کی چھوٹی قیمتوں کے لئے $\sin x \approx x$ ہوتا ہے جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ اس کی وجہ تیسرے باب میں بتلائی جائے گی۔ $|x| < 0.1$ کے لئے تخمینی خلل 5000 میں 1 حصہ سے کم ہو گا۔
(الف) کمپیوٹر پر $y = x$ اور $y = \sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(ب) کمپیوٹر پر $y = x$ اور $y = \sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی پیمائش درجات میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(پ) کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے $x = 0.1$ کے لئے $\sin x$ حاصل کریں۔ اگر آپ کا کیلکولیٹر ریڈیئن استعمال کر رہا ہو تب جواب تقریباً 0.1 ہی ہو گا۔ اگر کیلکولیٹر درجات استعمال کر رہا ہو تب جواب مختلف ہو گا۔



شکل 1.114: عمومی سائن تفاعل



شکل 1.115



شکل 1.116

عمومی سائن ترسیم

شکل 1.114 میں درج ذیل تفاعل کی ترسیم یعنی عمومی سائن ترسیم دکھائی گئی ہے جہاں $|A|$ حیطہ، $|B|$ دوری عرصہ، C افقی منتقلی اور D انتصابی منتقلی ہے۔سوال 61 تا سوال 64 میں عمومی سائن تفاعل کے A ، B ، C اور D تلاش کریں۔تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

سوال 61: $y = 2\sin(x + \pi) - 1$

جواب: $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$ ؛ شکل 1.115

سوال 62: $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

سوال 63: $y = -\frac{2}{\pi}\sin(-\frac{\pi t}{2}) + \frac{1}{\pi}$

جواب: $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$ ؛ شکل 1.116

سوال 64: $y = \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

سوال 65 تا سوال 65 میں عمومی سائن تفاعل $f(x) = A\sin(\frac{2\pi}{B}(x - C)) + D$ پر ترسیم کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ ترسیم کے لئے کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال 65: دوری عرصہ $A = 3, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ کے لئے وقفہ $-4\pi \le x \le 4\pi$ پر تفاعل ترسیم کریں۔ دوری عرصہ بڑھانے سے تفاعل کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ (ب) B کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $B = -3$ اور $B = -2\pi$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں۔

سوال 66: افقی منتقلی $A = 3, B = 6, D = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $C = 0, 1, 2$ کے لئے وقفہ $-4\pi \le x \le 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ C کی بڑھتے مثبت قیمت کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) C کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی۔ (پ) صفر افقی منتقلی کے لئے C کی کم تر مثبت قیمت کیا ہو گی؟ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 67: انتصابی منتقلی $A = 3, B = 6, C = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $D = 0, 1, 3$ کے لئے وقفہ $-4\pi \le x \le 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ D کی بڑھتی مثبت قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) D کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

سوال 68: حیطہ $B = 6, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) A کی مثبت بڑھتی قیمتوں کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $f(x)$ کو $A = 1, 5, 9$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔ (ب) A کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

باب 2

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکونیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں با ضابطہ وضع کرتے ہیں۔ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔تفاعل کی تفرق، جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 2.1: ایک پتھر $100\,\mathrm{m}$ اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے دارانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔یوں پہلی t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

(الف) پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2-0} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔

(ب) پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(1)^2}{2-1} = 14.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔ $\square$

مثال 2.2: پتھر کی رفتار $t = 1\,\mathrm{s}$ اور $t = 2\,\mathrm{s}$ پر تلاش کریں۔

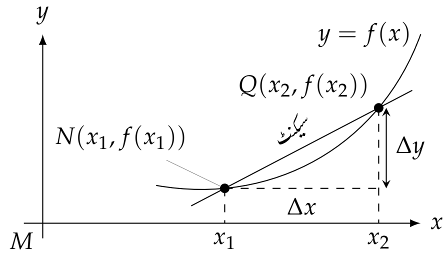
حل: ہم وقتی وقفہ $[t_0, t_0 + h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا درج بالا کلیہ میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے "لمحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔یوں $t_0 = 1$ اور $t_0 = 2$ کے لئے $h = 0.1, 0.01, \cdots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

h	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ کے لئے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ پر پتھر کی رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔اسی طرح $t_0 = 2$ پر پتھر کی رفتار $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ نظر آئے گی۔ $\square$



شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

اوسط شرح تبدیلی اور سیکنٹ خطوط

x کے لحاظ سے تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1, x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1, x_2]$ پر $y = f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

□

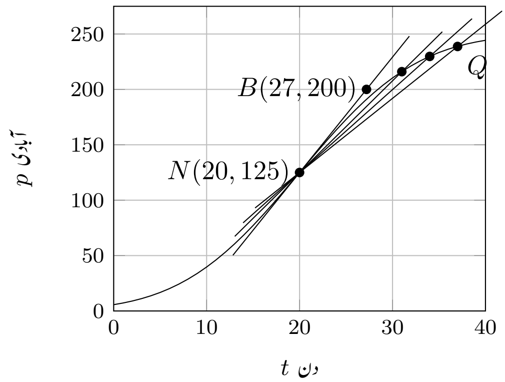
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔ جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گزرتے ہوئے خط کو ترسیم کا سیکنٹ[1] کہتے ہیں۔ یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

مثال 2.3: نمو آبادی کی اوسط شرح
ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔ تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

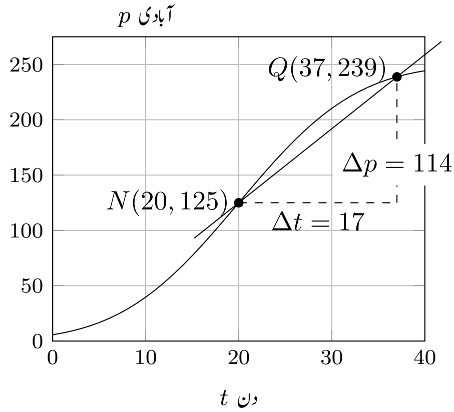
حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔ یوں $37 - 20 = 17$ دنوں میں آبادی میں $239 - 125 = 114$ تبدیل رونما ہوئی۔ یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7(\text{مکھیاں فی دن})$$

[1] secant



شکل 2.3: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی



شکل 2.2: مکھی کی نمو آبادی

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔ □

درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

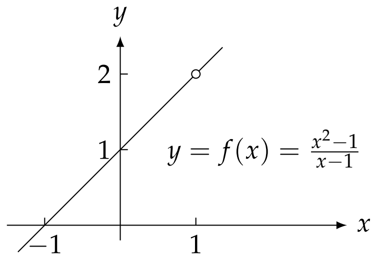
مثال 2.4: مثال 2.3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
$(37,239)$	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
$(35,230)$	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
$(32,216)$	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
$(27,200)$	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو مس کرتا ہے۔اس خط کو دیے گئے منحنی کا مماس[2] کہتے ہیں۔اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 مکھیاں فی دن ہو گی۔ □

[2] tangent



شکل 2.4: شکل برائے مثال 2.5

لمحہ $t = 1$ اور لمحہ $t = 2$ پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو لمحاتی شرح تبدیلی[3] کہتے ہیں۔جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لمحاتی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔لمحاتی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم حد[4] کہتے ہیں۔

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 2.5: تفاعل $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ نقطہ $x = 1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟
حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x = 1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے f تعین کرتا ہے۔کسی بھی $x \neq 1$ کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \qquad (x \neq 1)$$

یوں خط $y = x + 1$ جس سے نقطہ $x = 1$ یعنی $(1,2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

---

[3] instantaneous rates of change
[4] limits

$x(\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1,\ (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 تک پہنچنے سے $f(x)$ کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا x ایک تک پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

x کی قیمت x_0 تک پہنچنے کو $x \to x_0$ لکھا جاتا ہے۔ □

تعریف: حد کی غیر رسمی تعریف

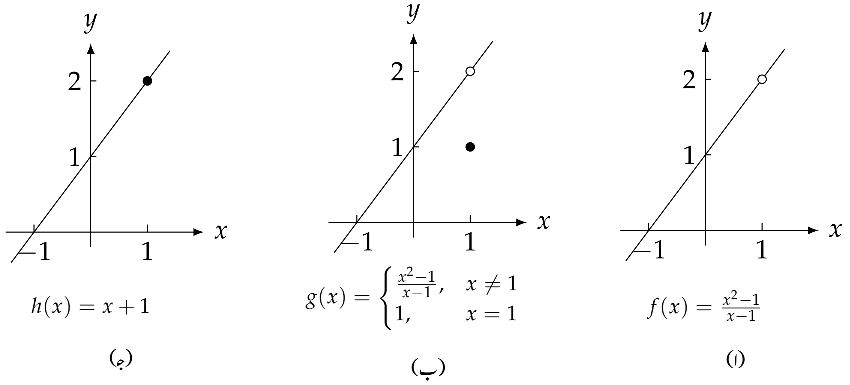
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ پر تفاعل $f(x)$ معین ہے جبکہ عین نقطہ x_0 پر $f(x)$ غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لئے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 تک پہنچنے سے f کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

□

اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراد پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد $10\,\mu\text{m}$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف جلد پیش کریں گے۔

مثال 2.6: $x \to x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجودیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں f کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تفاعل g کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تفاعل h کا $x \to 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں یعنی $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$۔ □



شکل 2.5: $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 2$

بعض اوقات $\lim_{x \to x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔اس کی مثال تفاعل $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور تکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہو۔

مثال 2.7:

ا. $\lim_{x \to 2} (4) = 4$

ب. $\lim_{x \to 13} (4) = 4$

ج. $\lim_{x \to 3} x = 3$

د. $\lim_{x \to 2} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$

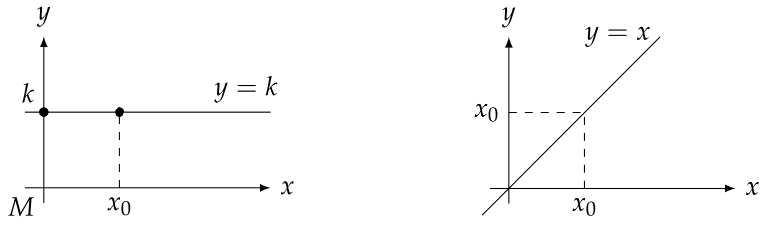
ہ. $\lim_{x \to -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3}$

□

مثال 2.8:

ا. اگر f مماثلی تفاعل $f(x) = x$ ہو تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ل)۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$



(ب) مستقل تفاعل

(ا) مماثل تفاعل

شکل 2.6: اشکال برائے مثال 2.7

ب. اگر f مستقل تفاعل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k$$

□

مثال 2.9: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔
درج ذیل تفاعل کا $x \to 0$ پر رویہ کیسا ہو گا؟

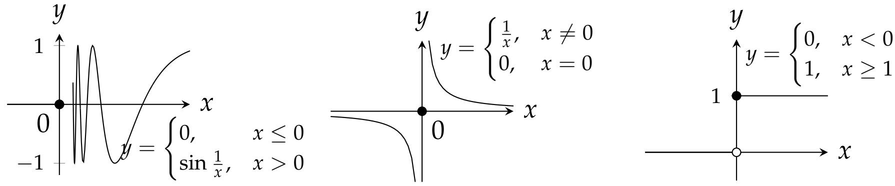
ا. $$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ب. $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ج. $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

حل:

ا. اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ کا $x \to 0$ پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تفاعل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لئے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لئے U کی قیمت 1 ہے۔یوں 0 کے قریب پہنچنے سے U کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔



(ا) اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ (ب) $g(x)$ (ج) $f(x)$

شکل 2.7: اشکال برائے مثال 2.9

ب. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

□

سوالات 2.1

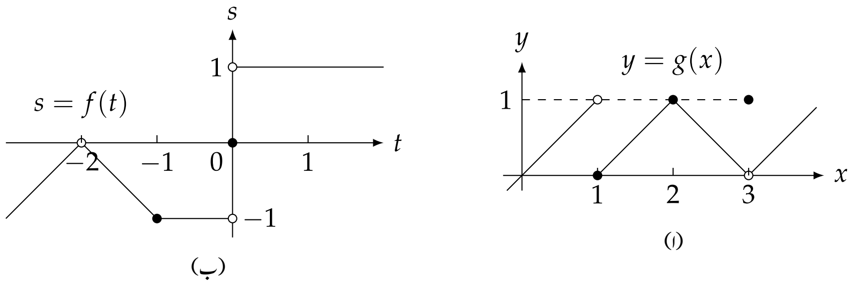
ترسیم سے حد

سوال 1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

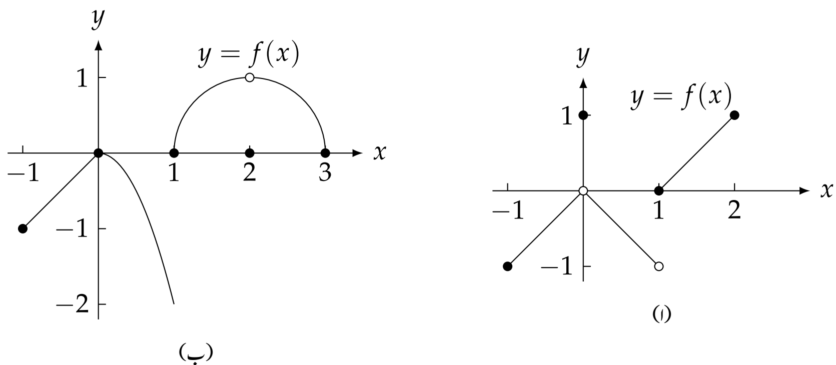
ا. $\lim_{x\to1} g(x)$ ب. $\lim_{x\to2} g(x)$ ج. $\lim_{x\to3} g(x)$

جواب: (ا) موجود نہیں ہے۔جیسے جیسے x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 0 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔یوں x کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہونے سے L کی یکتا قیمت کے نزدیک تر $g(x)$ نہیں پہنچتا ہے۔(ب) 1 (ج) 0

سوال 2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔



شکل 2.8: اشکال برائے سوال 1 اور سوال 2



شکل 2.9: اشکال برائے سوال 3 اور سوال 4

ا. $\lim_{t\to -2} f(t)$ ب. $\lim_{t\to -1} f(t)$ ج. $\lim_{t\to 0} f(t)$

سوال 3: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ا) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

ا. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے

ب. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ج. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

د. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

ہ. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

و. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے

جواب: (ا) درست (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ہ) غلط (و) درست

سوال 4: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

ا. $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود نہیں ہے

ب. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

ج. $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے

د. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

ہ. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(1,3)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

وجودیت اور حد

سوال 5 اور سوال 6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

سوال 5: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

جواب: جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے ۔جب x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔یوں x کا 1 کے نزدیک تر ہونے سے $\frac{x}{|x|}$ کسی یکتا قیمت کے نزدیک تر نہیں ہوتی ہے۔

سوال 6: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

سوال 7: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے۔کیا $\lim_{x\to x_0} f(x)$ کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 8: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1,1]$ میں تمام x کے لئے معین ہے۔کیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 9: اگر $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

سوال 10: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ لازماً موجود ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ لازماً ہو گا؟ کیا ہم $\lim_{x\to 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11: $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $x = -3.1, -3.01, -3.001, \cdots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔اس جدول سے $\lim_{x\to -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔اس کے برعکس نقاط $x = -2.9, -2.99, \cdots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. تفاعل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \to -3$ کے لئے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

جواب: (ا)

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(ج) $\lim_{x\to -3} f(x) = -6$

سوال 12: $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینی قیمتوں $x = 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ پر تفاعل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0 = \sqrt{2}$ کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ $x \to \sqrt{2}$ کے لئے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 13: $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $x = -5.9, -5.99, -5.999, \cdots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x\to -6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس $x = -6.1, -6.01, -6.001, \cdots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہو گا؟

ب. G کو $x_0 = 6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x \to -6$ کے لئے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \to -6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	-0.126582	-0.1251564	-0.1250156	-0.1250015	-0.1250001	-0.1250000

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	-0.123456	-0.124843	-0.124984	-0.124998	-0.124999	-0.124999

(ج) $\lim_{x \to -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0.125$

سوال 14: $h(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$ لیں۔

ا. نقاط $x = 2.9, 2.99, 2.999, \cdots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x \to 3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔اس کے برعکس $x = 3.1, 3.01, 3.001, \cdots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. $x_0 = 3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x \to 3$ کے لئے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \to 3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 15: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x \to -1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -1$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x \to -1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	-0.99999	-0.999999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

(ج) $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$

سوال 16: $F(x) = \frac{x^2+3x+2}{2-|x|}$ لیں۔

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -2$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim\limits_{x\to -2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -2$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim\limits_{x\to -2} F(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 17: $g(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ لیں۔

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim\limits_{x\to 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب:(ا)

θ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

θ	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

(ج) $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = 1$

سوال 18: $G(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ لیں۔

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $t_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{t\to 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔کیا x کی قیمت $x \to 1$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب: (ا)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$f(x)$	0.348678	0.366032	0.367695	0.367861	0.367877	0.367879

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	0.385543	0.369711	0.368063	0.367897	0.367881	0.367878

(ج) $\lim_{x\to 1} f(x) \approx 0.36788$

سوال 20: $f(x) = \frac{3^x - 1}{x}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔کیا x کی قیمت $x \to 0$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 21 تا سوال 28 میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو تفاعل میں پر کرتے ہوئے تفاعل کی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x\to 2} 2x$

جواب: 4

سوال 22: $\lim_{x\to 0} 2x$

سوال 23: $\lim_{x\to \frac{1}{3}} (3x-1)$
جواب: 0

سوال 24: $\lim_{x\to 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال 25: $\lim_{x\to -1} 3x(2x-1)$
جواب: 9

سوال 26: $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 27: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sin x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 28: $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال 29 تا سوال 34 میں دیے وقفہ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

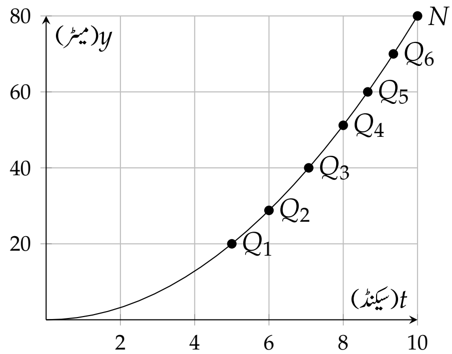
سوال 29: $f(x)=x^3+1$؛ (الف) $[2,3]$، (ب) $[-1,1]$
جواب: (ا) 19 (ب) 1

سوال 30: $g(x)=x^2$؛ (الف) $[-1,1]$، (ب) $[-2,0]$

سوال 31: $h(t)=\cos t$؛ (الف) $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$، (ب) $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$
جواب: (ا) $-\frac{4}{\pi}$ (ب) $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

سوال 32: $g(t)=2+\cos t$؛ (الف) $[0,\pi]$، (ب) $[-\pi,\pi]$

سوال 33: $R(\theta)=\sqrt{4\theta+1}$؛ $[0,2]$
جواب: 1



شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم

سوال 34: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ ؛ $[1,2]$

سوال 35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ NQ_1 ، NQ_2 ، $\cdots$ ، NQ_6 کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10\,\mathrm{s}$ پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔ (الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے 1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

جواب: (ب) $5600000 \approx$ سالانہ (پ) $4200000 \approx$ سالانہ

سوال 37: تفاعل $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x = 2$ ، $\frac{11}{10}$ ، $\frac{101}{100}$ ، $\frac{1001}{1000}$ ، $\frac{10001}{10000}$ اور $x = 1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔ (الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $x \neq 1$ کے لئے وقفہ $[1, x]$ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔ (ب) $x = 1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔ اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 38: $x \geq 0$ کے لئے $g(x) = \sqrt{x}$ لیں۔

ا. وقفہ $[1,2]$ ، $[1,1.5]$ اور $[1,1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ کے لئے x کے لحاظ سے وقفہ $[1,1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x=1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h \to 0$ کے لئے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا) $0.414213, 0.449489, \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ (ب)

$1+h$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1+h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.000005	1.000005
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(ج) 0.5 (د) 0.5

سوال 39: $t \neq 0$ کے لئے $f(t) = \frac{1}{t}$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t=2$ تا $t=3$ اور (ب) وقفہ $t=2$ تا $t=T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T=2.1$ ، $T=2.01$ ، $T=2.001$ ، $T=2.0001$ ، $T=2.00001$ اور $T=2.000001$ ، کے لئے وقفہ $[2,T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t=2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2,T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \to 2$ کے لئے تلاش کریں۔($T=2$ پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال 40 تا سوال 45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔(الف) نقطہ x_0 کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر تفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 40: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

سوال 41: $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2}$

سوال 42: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

سوال 43: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

سوال 44: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$

سوال 45: $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3-3\cos x}$

2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔پہلے تین مسئلے مثال 2.8 کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 2.1: حد کے خواص
اگر $\lim_{x\to c} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ہوں،جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = L+M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = L-M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to c} kf(x) = kL$ (k مستقل عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ہو گا بشرطیکہ $L^{\frac{m}{n}}$ حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا مجموعہ ہو گا۔
2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا فرق ہو گا۔
3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہو گا۔
5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل تقسیم ہو گا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔
6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہو گا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ ب میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلٰی کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 2.10: $\lim_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}$ تلاش کریں۔

حل: مثال 2.8 کے نتائج $\lim_{x\to c} x = c$ اور $\lim_{x\to c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 2.1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

ا. $\lim_{x\to c} x^2 = (\lim_{x\to c} x)(\lim_{x\to c} x) = c \cdot c = c^2$ حاصل ضرب یا طاقت

ب. $\lim_{x\to c}(x^2+5) = \lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5 = c^2 + 5$ مجموعہ اور (ا)

ج. $\lim_{x\to c} 4x^2 = 4\lim_{x\to c} x^2 = 4c^2$ ضرب مستقل اور (ا)

د. $\lim_{x\to c}(4x^2-3) = \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 = 4c^2 - 3$ فرق اور (ج)

ہ. $\lim_{x\to c} x^3 = (\lim_{x\to c} x^2)(\lim_{x\to c} x) = c^2 \cdot c = c^3$ حاصل ضرب اور (ا) یا طاقت

و. $\lim_{x\to c}(x^3+4x-3)=\lim_{x\to c}x^3+\lim_{x\to c}(4x^2-3)=c^3+4c^2-3$ مجموعہ، (ج) اور (د)

ز. $\lim_{x\to c}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}=\frac{\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)}{\lim_{x\to c}(x^2+5)}=\frac{c^3+4c^2-3}{c^2+5}$ حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب)

□

مثال 2.11: $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}$ تلاش کریں۔

حل:

مثال 2.10-د اور $n=\frac{1}{2}$ کے ساتھ قاعدہ طاقت

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}&=\sqrt{4(-2)^2-3}\\&=\sqrt{16-3}=\sqrt{13}\end{aligned}$$

□

مسئلہ 2.1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x\to c$ کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں۔ناطق تفاعل کا حد $x\to c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2.2: کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا
اگر $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to c}P(x)=P(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_0$$

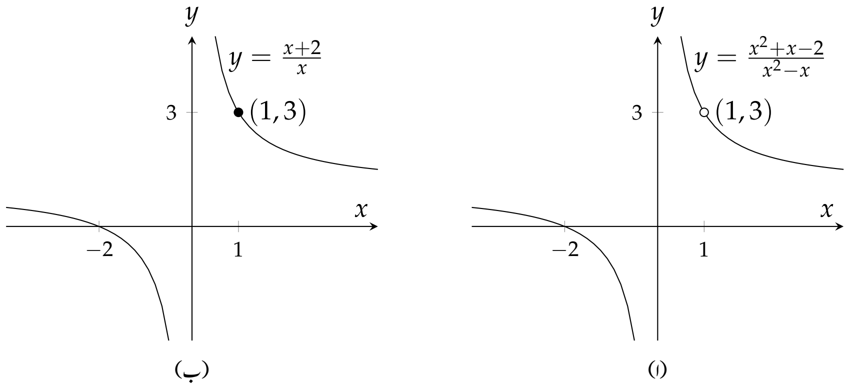
مسئلہ 2.3: غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا
فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c)\neq 0$ ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 2.12:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}=\frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5}=\frac{0}{6}=0$$

یہ ایک ہی قدم میں مثال 2.10 کا حل ہے۔ □



شکل 2.11: ماسوائے نقطہ $(1,3)$ کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے اسقاط

مسئلہ 2.3 ناطق تفاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تفاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹتے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پر کرنے سے حد حاصل کیا جا سکتا ہے۔درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x=1$ پر صفر ہیں۔یوں $(x-1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جا سکتا ہے۔

مثال 2.13: یکساں جزو کی منسوخی
$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $x=1$ پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہو گا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے۔البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x}$$

اب $x\neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

شکل 2.11 میں $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ اور $y=\frac{x+2}{x}$ کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔یہ ترسیم صرف نقطہ $(1,3)$ پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔البتہ اس نقطہ پر دونوں تفاعل کا حد ایک جیسا ہے۔ □

مثال 2.14: ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا
$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $h=0$ پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق[5] $\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔نسب نما میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}\\
&= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} && \text{مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} && \text{جس کو ہم کاٹتے ہیں}
\end{aligned}
$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

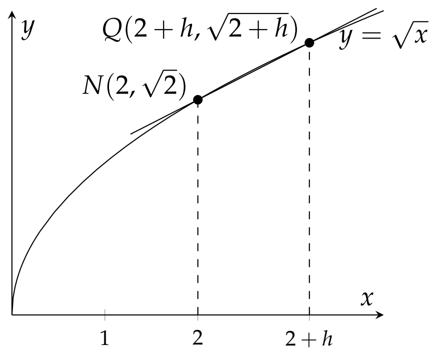
$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}} && \text{نسب نما اب } h=0 \text{ پر صفر نہیں ہے}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

دھیان رہے کہ تفاعل $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ درحقیقت تفاعل $y=\sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2,\sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h,\sqrt{2+h})$ کے بیچ سیکنٹ کی ڈھلوان ہے اور $h\to 0$ کرنے سے مراد $Q\to N$ ہے۔نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ہم نے دیکھا کہ اس سیکنٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □

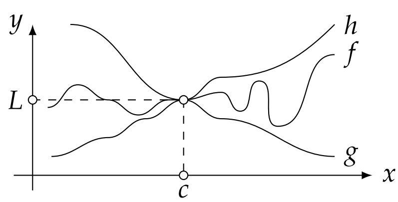
مسئلہ بیچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔اس کو مسئلہ بیچ[6] اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل f سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل g اور تفاعل h کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تفاعل کے بیچ پھنسے ہوئے تفاعل کی قیمت L ہو گی (شکل 2.13)۔اس کا ثبوت ضمیمہ ب میں دیا گیا ہے۔

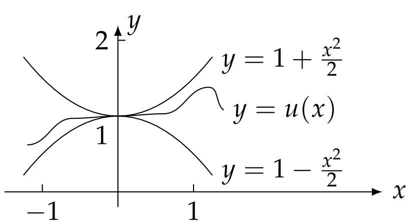
[5] conjugate expression
[6] sandwich theorem



شکل 2.12: $N \to Q$ کرنے سے سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے



شکل 2.13: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔



شکل 2.14: شکل برائے مثال 2.15

مسئلہ 2.4: مسئلہ بیچ
فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو، میں (ممکن ہے کہ) ماسوائے $x = c$ پر تمام x کے لئے

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

ہے۔ مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

ہے۔ تب $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ہو گا۔

مثال 2.15: اگر تمام $x \ne 0$ کے لئے $1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} u(x)$ تلاش کریں۔
حل: چونکہ

$$\lim_{x\to 0}(1 - \tfrac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0}(1 + \tfrac{x^2}{2}) = 1$$

ہیں لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل 2.14)۔ □

مثال 2.16: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$ ہو تب $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ہو گا۔
حل: چونکہ $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ ہے، اور $-|f(x)|$ اور $|f(x)|$ کا حد 0 ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $f(x)$ کا حد بھی 0 ہو گا۔ □

سوالات 2.2

حد کا حساب

سوال 1 تا سوال 16 میں حد تلاش کریں۔

سوال 1: $\lim_{x\to -7}(2x+5)$
جواب: -9

سوال 2: $\lim_{x\to 12}(10-3x)$

سوال 3: $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$

جواب: 4

سوال 4: $\lim_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$

سوال 5: $\lim_{t\to 6}8(t-5)(t-7)$

جواب: -8

سوال 6: $\lim_{s\to \frac{2}{3}}3s(2s-1)$

سوال 7: $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$

جواب: $\frac{5}{8}$

سوال 8: $\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-7}$

سوال 9: $\lim_{y\to -5}\frac{y^2}{5-y}$

جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 10: $\lim_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 11: $\lim_{x\to -1}3(2x-1)^2$

جواب: 27

سوال 12: $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

سوال 13: $\lim_{y\to -3}(5-y)^{\frac{4}{3}}$

جواب: 16

سوال 14: $\lim_{z\to 0}(2z-8)^{\frac{1}{3}}$

سوال 15: $\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 16: $\lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال 17 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 17: $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$
جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 18: $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال 19: $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$
جواب: -7

سوال 20: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال 21: $\lim_{t\to 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 22: $\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال 23: $\lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 24: $\lim_{y\to 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال 25: $\lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$
جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 26: $\lim_{v\to 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال 27: $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 28: $\lim_{x\to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

سوال 29: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$
جواب: 4

سوال 30: $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

قواعد حد کا استعمال

سوال 31: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0}(f(x)+7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)}\\
&= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)}\\
&= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

جواب: (ا) قاعدہ حاصل تقسیم (ب) فرق اور قاعدہ طاقت (پ) مجموعہ اور ضرب مستقل قاعدہ

سوال 32: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} &= \frac{\lim_{x\to 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{(\lim_{x\to 1} p(x))(\lim_{x\to 1}(4-r(x)))} && \text{(ب)}\\
&= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{(\lim_{x\to 1} p(x))(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x))} && \text{(پ)}\\
&= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

سوال 33: $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ اور $\lim_{x\to c} g(x) = -2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$
ب. $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$
ج. $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x))$
د. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

جواب:(ا) -10 (ب) -20 (ج) -1 (د) $\frac{5}{7}$

سوال 34: $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ اور $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$
ب. $\lim_{x\to 4} xf(x)$
ج. $\lim_{x\to 4}(g(x))^2$
د. $\lim_{x\to 4} \frac{g(x)}{f(x)-1}$

سوال 35: $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ اور $\lim_{x\to b} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$
ب. $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$
ج. $\lim_{x\to b} 4g(x)$
د. $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$

جواب:(ا) 4 (ب) -21 (ج) -12 (د) $-\frac{7}{3}$

سوال 36: $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$ ، $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$ اور $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x))$
ب. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$
ج. $\lim_{x\to -2} \frac{-4p(x)+5r(x)}{s(x)}$

اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لمحاتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنا پہ احصاء میں عموماً درپیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

سوال 37 تا سوال 42 میں اس حد کو دیے گئے x پر تفاعل $f(x)$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 37: $f(x) = x^2, \quad x = 1$
جواب: 2

سوال 38: $f(x) = x^2, \quad x = -2$

سوال 39: $f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$
جواب: 3

سوال 40: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = -2$

سوال 41: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

سوال 42: $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$

مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 43: اگر $-1 \le x \le 1$ کے لئے $\sqrt{5-x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-2x}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} f(x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sqrt{5}$

سوال 44: اگر تمام x کے لئے $2 - x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ ہو تب $\lim_{x\to 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال 45: (الف) یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x}$$

(ب) $-2 \le x \le 2$ کے لئے $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ ، $y = \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x}$ اور $y = 1$ ترسیم کریں۔ $x \to 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔
جواب: (ا) حد 1 ہے۔

سوال 46: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لئے مطمئن ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}<\frac{1-\cos x}{x^2}<\frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

(ب) $-2\le x\le 2$ کے لئے $y=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}$ ، $y=\frac{1-\cos x}{x^2}$ اور $y=\frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ان ترسیم کا رویہ $x\to 0$ کرتے ہوئے کیسا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر $[-1,1]$ میں x کے لئے $x^4\le f(x)\le x^2$ اور $x<-1$ اور $x>1$ کے لئے $x^2\le f(x)\le x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x\to c}f(x)$ خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 48: فرض کریں کہ تمام $x\ne 2$ کے لئے $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}h(x)=-5$ ہے۔کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا $f(2)=0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x\to 2}f(2)=0$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہات پیش کریں۔

سوال 49: اگر $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2}=1$ ہو تب $\lim_{x\to 4}f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: 7

سوال 50: اگر $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to -2}f(x)$ (ب) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال 51: (الف) اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3$ ہو تب $\lim_{x\to 2}f(x)$ کیا ہو گا؟
(ب) اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=4$ ہو تب $\lim_{x\to 2}f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: (ا) 5 (ب) 5

سوال 52: اگر $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to 0}f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گے؟

کمپیوٹر

سوال 53: (الف) $\lim_{x\to 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 54: (الف) $h(x) = x^2\cos\frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x\to 0} h(x)$ تلاش کریں۔
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبرا سے حاصل کریں۔

2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی با ضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہو گی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

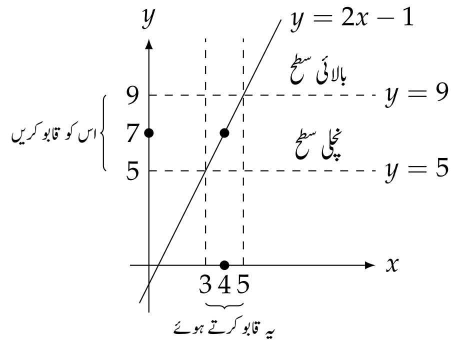
ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دارومدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مستری انجن کی سلنڈر کا قطر $50\,\mu\mathrm{m}$ درستگی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

مثال 2.17: خطی تفاعل قابو کرنا
تفاعل $y = 2x - 1$ کے خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟
حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لئے $\left|y-7\right| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $\left|y-7\right|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

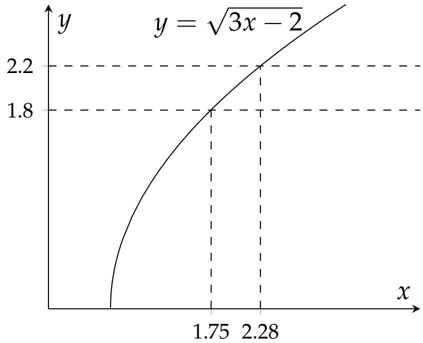
$$\left|y-7\right| = \left|(2x-1)-7\right| = \left|2x-8\right|$$

یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $\left|2x-8\right| < 2$ کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\left|2x-8\right| &< 2\\
-2 < 2x-8 &< 2\\
6 < 2x &< 10\\
3 < x &< 5\\
-1 < x-4 &< 1
\end{aligned}$$



شکل 2.15: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 2.17)



شکل 2.16: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔

x کو $x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □

فنیات

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جا سکتے ہیں۔ درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور نچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی لکیروں سے ظاہر کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفہ میں تفاعل کا رویہ دیکھا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ کے ترسیم پر y محور کے مطلوبہ وقفہ $(1.8, 2.2)$ پر غور کریں۔ یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل 2.16)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ $(1.98, 2.02)$ اور $(1.9998, 2.0002)$ پر بھی تفاعل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2.18: 6 cm اندرونی قطر کے ایک لٹر پیمائشی پیالے پر 1 mm وقفہ پر افقی لکیریں کیوں کھینچی گئی ہیں۔
پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ ایک لٹر $(1000\,\mathrm{cm}^3)$ پانی ناپنے کی خاطر h کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل $1\,\%$ سے کم ہونا چاہیے۔
حل: ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \le 10$$

یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
|36\pi h - 1000| &\le 10 \\
-10 \le 36\pi h - 1000 &\le 10 \\
990 \le 36\pi h &\le 1010 \\
\tfrac{990}{36\pi} \le h &\le \tfrac{1010}{36\pi} \\
8.8 \le h &\le 8.9
\end{aligned}
$$

یوں $1\,\%$ درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1\,\mathrm{cm}$ یعنی $1\,\mathrm{mm}$ ہے۔پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر افقی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مائع ناپنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ $\square$

حد کی باضابطہ تعریف

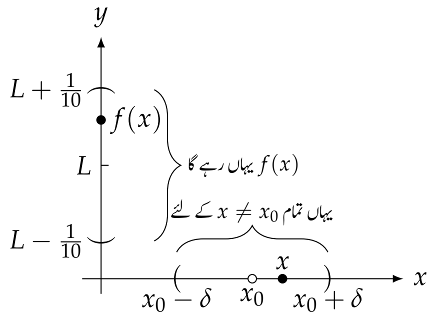
مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \to x_0$ کرنے سے $f(x)$ کا حد L حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہو گی (شکل 2.17)۔البتہ اتنا جاننا کافی نہیں ہے چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھراتی ہو۔

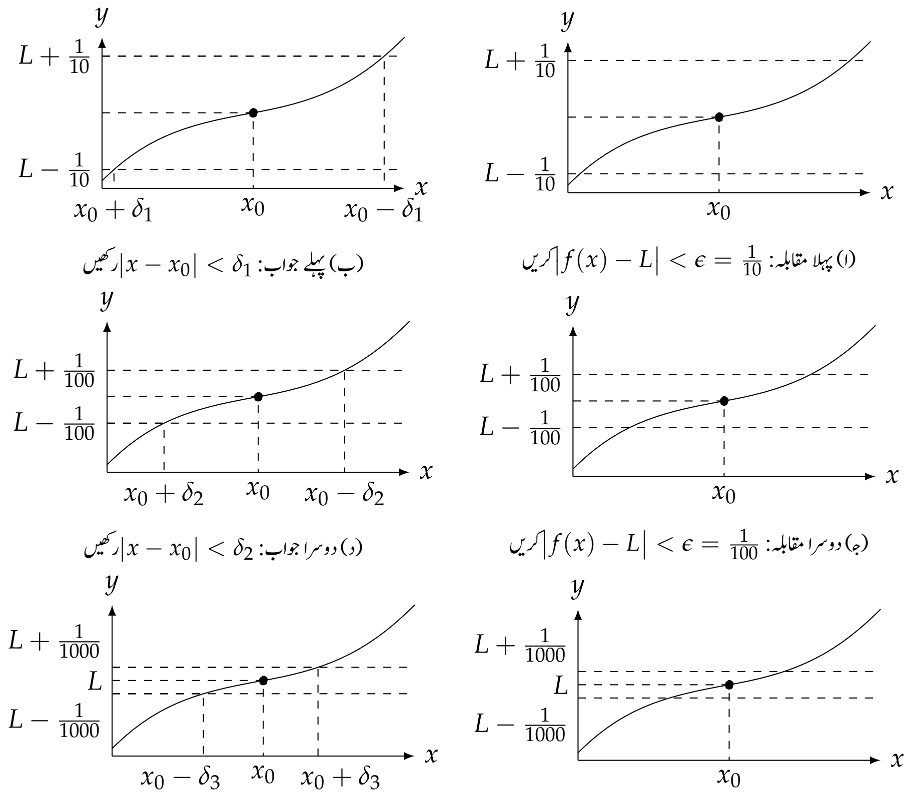
ہمیں سے کہا جا سکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100{,}000}$ ہے۔ہر مرتبہ ہم x_0 کے ارد گرد ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جا سکتا ہے۔البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جا سکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھر تھراہٹ کا شکار ہوتے ہوئے L تک نہ پہنچتی ہو۔

شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔شکی انسان قابل قبول چھوٹ ϵ چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔

اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لئے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔



شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم



(ا) پہلا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں

(ب) پہلے جواب: $|x - x_0| < \delta_1$ رکھیں

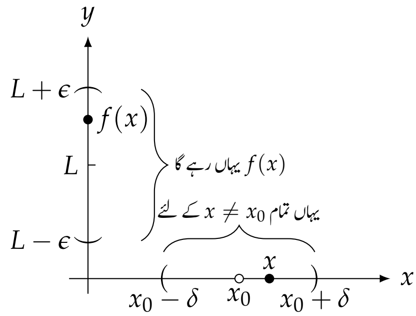
(ج) دوسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں

(د) دوسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_2$ رکھیں

(ہ) تیسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں

(و) تیسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_3$ رکھیں

شکل 2.18: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ



شکل 2.19: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی قریب ہو گی۔

تعریف: حد کی با ضابطہ تعریف
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں $f(x)$ معین ہے جبکہ نقطہ x_0 پر عین ممکن ہے کہ $f(x)$ معین نہ ہو۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

□

مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ آپ خراد کی مشین پر قطر L کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔ اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج نہیں دیتی ہے لہٰذا آپ کو $f(x)$ قطر یعنی $L-\epsilon$ اور $L+\epsilon$ کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہو گا۔ دھرا کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لئے x کو قابو میں رکھنا ضروری ہو گا لہٰذا x کو $x-\delta$ اور $x+\delta$ کے بیچ رکھنا ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ ϵ کم کی جائے، آپ کو ویسے ویسے δ کو درست کرنا ہو گا۔

تعریف کو پرکھنے کی مثالیں

حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی ہے البتہ اس سے حد کی درستگی کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 2.19: دکھائیں کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$ ہے۔
حل: حد کی تعریف میں $x_0=1$ ، $f(x)=5x-3$ اور $L=2$ لیں۔کسی بھی دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ہمیں موزوں $\delta>0$ تلاش کرنا ہو گا تاکہ اگر $x\neq 1$ ہو اور $x_0=1$ سے x کا فاصلہ δ سے کم ہو یعنی اگر

$$0<|x-a|<\delta$$

ہو تب $L=2$ سے $f(x)$ کا فاصلہ ϵ سے کم ہو گا یعنی:

$$\left|f(x)-2\right|<\epsilon$$

ہم ϵ کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے δ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\left|(5x-3)-2\right| &= |5x-5|<\epsilon\\ 5|x-1|&<\epsilon\\ |x-1|&<\frac{\epsilon}{5}\end{aligned}$$

یوں ہم $\delta=\frac{\epsilon}{5}$ لے سکتے ہیں (شکل 2.20)۔اب اگر $0<|x-1|<\delta=\frac{\epsilon}{5}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

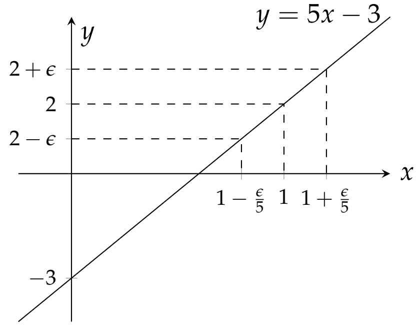
$$\left|(5x-3)-2\right|=|5x-5|=5|x-1|<5(\tfrac{\epsilon}{5})=\epsilon$$

اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$ ہے۔

$\delta=\frac{\epsilon}{5}$ وہ واحد قیمت نہیں ہے جس کے لئے $0<|x-1|<\delta$ سے مراد $|5x-5|<\epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔ δ کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لئے بھی $0<|x-1|<\delta$ سے مراد $|5x-5|<\epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔حد کی تعریف بہترین δ کی بات نہیں کرتی ہے بلکہ δ کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو کی بات کرتی ہے۔ $\square$

مثال 2.20: دو اہم حد
تصدیق کریں: (ا) $\lim_{x\to x_0} x=x_0$ (ب) $\lim_{x\to x_0} k=k$ جہاں k مستقل ہے۔
حل: (ا) فرض کریں کہ $\epsilon>0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا $\delta>0$ تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لئے

$0<|x-x_0|<\delta$ سے مراد $|x-x_0|<\epsilon$ ہو۔



شکل 2.20: تفاعل $f(x) = 5x - 3$ کے لئے $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{5}$ کی صورت میں $\left|f(x) - 2\right| < \epsilon$ ہو گا (مثال 2.19)۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ δ کی قیمت ϵ کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل 2.21-ا)۔ یوں ثابت ہو کہ $\lim_{x\to x_0} = x_0$ ہے۔

(ب) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا δ تلاش کرنا ہے کہ ہر x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{سے مراد} \quad |k - k| < \epsilon \quad \text{ہو۔}$$

چونکہ $k - k = 0$ ہے لہٰذا کسی بھی مثبت عدد کو δ لیا جا سکتا ہے (شکل 2.21-ب)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to x_0} k = k$ ہے۔ □

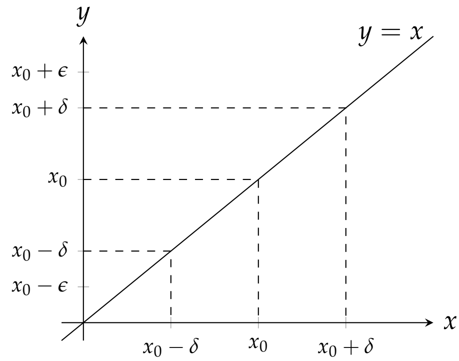
دیے گئے ϵ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

مثال 2.19 اور مثال 2.20 میں x_0 کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر $\left|f(x) - L\right|$ کی قیمت ϵ سے کم تھی x_0 کے لحاظ سے تشاکلی تھا۔ یوں ہم δ کو وقفہ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشاکل نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا ہے، ہم x_0 سے وقفے کے قریبی سر تک فاصلے کو δ لے سکتے ہیں۔

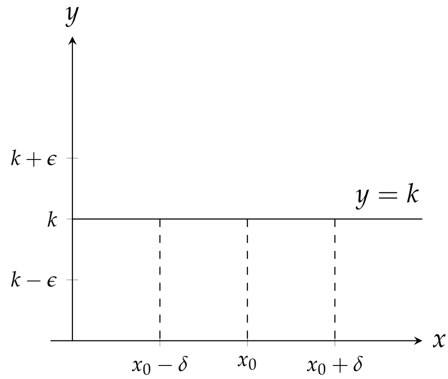
مثال 2.21: حد $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$ کے لئے $\epsilon = 1$ کے لحاظ سے $\delta > 0$ تلاش کریں۔ یعنی ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $0 < |x-5| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت $\implies$ کو پڑھیں "سے مراد"۔)

$$0 < |x-5| < \delta \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$

حل: اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ (a, b) تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد



(ا) $0 < |x - x_0| < \delta$ کی صورت میں $f(x) = x$ کے لئے جب بھی $\delta \leq \epsilon$ ہو تب $|f(x) - x_0| < \epsilon$ ہو گا۔



(ب) تفاعل $f(x) = k$ کے لئے کسی بھی مثبت δ کی صورت میں $|f(x) - k| < \epsilon$ ہو گا۔

شکل 2.21: اشکال برائے مثال 2.20

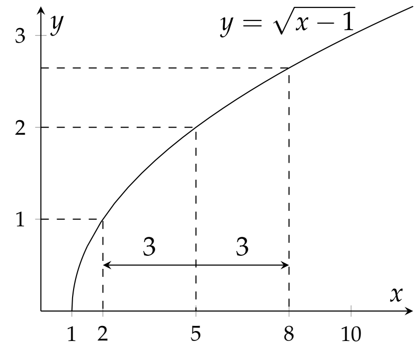
$\delta > 0$ حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کا وسط نقطہ x_0 ہو اور یہ وقفہ (a, b) کے اندر پایا جاتا ہو۔
پہلا قدم: عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں کہ اس وقفے پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x-1} - 2\right| &< 1 \\
-1 < \sqrt{x-1} - 2 &< 1 \\
1 < \sqrt{x-1} &< 3 \\
1 < x - 1 &< 9 \\
2 < x &< 10
\end{aligned}$$

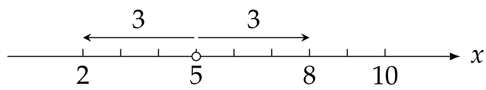
عدم مساوات کھلے وقفہ $(2, 10)$ پر تمام نقطوں کے لئے مطمئن ہوتی ہے لہٰذا یہ اس وقفے پر تمام $x \neq 5$ کے لئے بھی مطمئن ہو گی۔
دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کو وقفہ $(2, 10)$ میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ $(2, 10)$ کے قریبی سر کا فاصلہ 3 ہے۔اس طرح $\delta = 3$ یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے $0 < |x - 5| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x وقفہ $(2, 10)$ میں پائے جائیں گے جس سے $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 5| < 3 \quad \implies \quad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$

□



(ب) تفاعل اور وقفہ



(ا) $5 = x_0$ کے ارد گرد رداس 3 کا کھلا وقفہ $(2, 10)$ کے اندر پایا جائے گا۔

شکل 2.22: اشکال برائے مثال 2.21

دیے گئے f ، L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

ایسا $\delta > 0$ کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

کو دو قدموں میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ (a, b) حاصل کریں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو کھلا وقفہ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، جس کا وسط x_0 ہے، کو (a, b) کے اندر رکھے۔اس δ وقفہ میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہو گی۔

مثال 2.22: ثابت کریں کہ درج ذیل تفاعل کے لئے $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

حل: ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ $0 < |x - 2| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - 4\right| < \epsilon$$

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|f(x) - 4\right| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 2$ کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔اب $x \neq x_0 = 2$ کے لئے $f(x) = x^2$ ہے لہٰذا عدم مساوات کی صورت $\left|x^2 - 4\right| < \epsilon$ ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\left|x^2 - 4\right| &< \epsilon \\
-\epsilon < x^2 - 4 &< \epsilon \\
4 - \epsilon < x^2 &< 4 + \epsilon \\
\sqrt{4-\epsilon} < |x| &< \sqrt{4+\epsilon} \qquad \text{فرض کریں کہ } \epsilon < 4 \text{ ہے} \\
\sqrt{4-\epsilon} < x &< \sqrt{4+\epsilon}
\end{aligned}$$

کھلا وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$ میں تمام $x \neq 2$ کے لئے عدم مساوات $\left|f(x) - 4\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ $(2-\delta, 2+\delta)$ کو $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$ کے اندر رکھتا ہو۔نقطہ $x_0 = 2$ سے کھلا وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$ کے قریبی سر کا فاصلہ δ ہو گا۔یوں $2 - \sqrt{4-\epsilon}$ اور $\sqrt{4+\epsilon} - 2$ میں سے کم قیمت δ کے برابر ہو گی۔ δ کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لئے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - 4\right| < \epsilon$$

$\square$

درج بالا مثال میں ہم نے $\epsilon < 4$ کیوں فرض کیا؟ اس لئے کہ تمام x کے لئے ایسا δ کہ $0 < |x-2| < \delta$ سے مراد $\left|f(x) - 4\right| < \epsilon < 4$ ہو میں ہم نے δ کی وہ قیمت دریافت کی جو ϵ کے کسی بھی بڑی قیمت کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسئلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی با ضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے ہیں۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسئلوں (بالخصوص حصہ 2.2 کے مسئلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کیے جاتے ہیں۔آئیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال 2.23: قاعدہ مجموعہ
اگر $\lim_{x\to c} f(x) = L$ اور $\lim_{z\to c} g(x) + M$ ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$$

حل: فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہم ایسا مثبت عدد δ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ $0 < |x-c| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| &= \left|(f(x)-L)+(g(x)-M)\right| \\ &\le \left|f(x)-L\right| + \left|g(x)-M\right| \qquad \text{تکونی عدم مساوات}\end{aligned}$$

چونکہ $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_1 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \sigma_1 \quad \implies \quad \left|f(x)-L\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ $\lim_{x\to c} g(x) = M$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_2 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \sigma_2 \quad \implies \quad \left|g(x)-M\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ δ_1 اور δ_2 میں سے چھوٹی قیمت δ کے برابر ہے۔اب اگر $0 < |x-c| < \delta$ ہو تب

$$\left|f(x)-L\right| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x-c| < \delta_1$$

ہوں گے، اور $|x-c| < \delta_2$ اور $\left|g(x)-M\right| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔اس طرح

$$\left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا۔اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$ ہے۔ □

2.3 سوالات

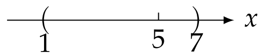
نقطہ x_0 پر وقفے کا وسط لانا

سوال 1 تا سوال 6 میں x محور پر وقفہ (a,b) ترسیم کریں جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے۔اس کے بعد ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $|x-x_0| < \delta$ سے مراد $a < x < b$ ہو۔

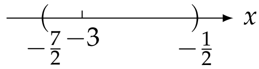
سوال 1: $a=1, b=7, x_0=5$

جواب: $\delta = 2$ شکل 2.23

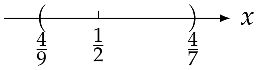
سوال 2: $a=1, b=7, x_0=2$



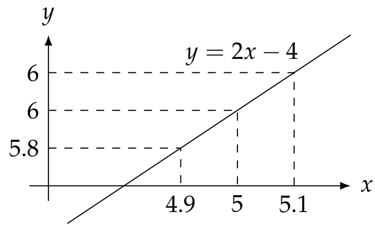
شکل 2.23



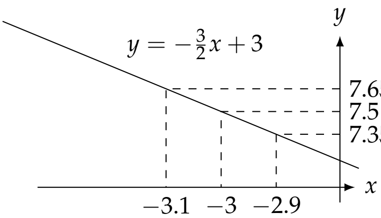
شکل 2.24



شکل 2.25



شکل 2.26: ترسیم برائے سوال 7



شکل 2.27: ترسیم برائے سوال 8

سوال 3: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -3$
جواب: $\delta = \frac{1}{2}$ شکل 2.24

سوال 4: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 5: $a = \frac{4}{9}, b = \frac{4}{7}, x_0 = \frac{1}{2}$
جواب: $\delta = \frac{1}{18}$ شکل 2.25

سوال 6: $a = 2.7591, b = 3.2391, x_0 = 3$

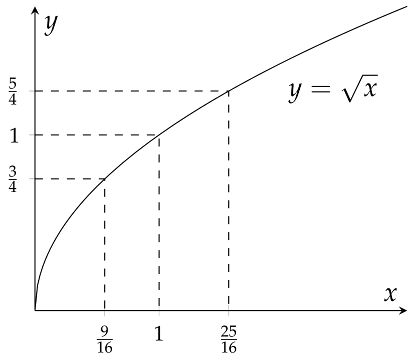
δ کا حصول بذریعہ ترسیم

سوال 7 تا سوال 14 میں ترسیم سے ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

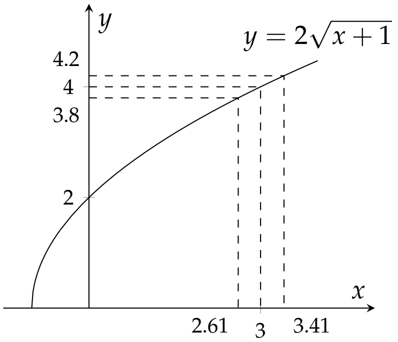
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad 0 < \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

سوال 7: $f(x) = 2x - 4, x_0 = 5, L = 6, \epsilon = 0.2$ شکل 2.26
جواب: $\delta = 0.1$

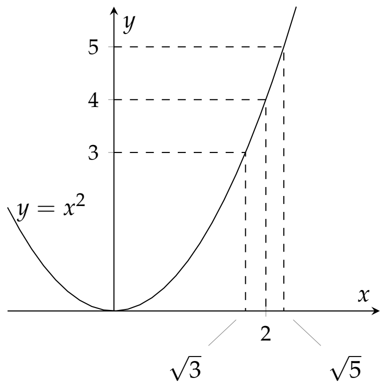
سوال 8: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3, x_0 = -3, L = 7.5, \epsilon = 0.15$ شکل 2.27



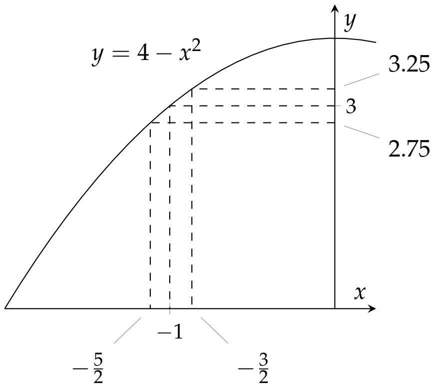
شکل 2.28: ترسیم برائے سوال 9



شکل 2.29: ترسیم برائے سوال 10



شکل 2.30: ترسیم برائے سوال 11



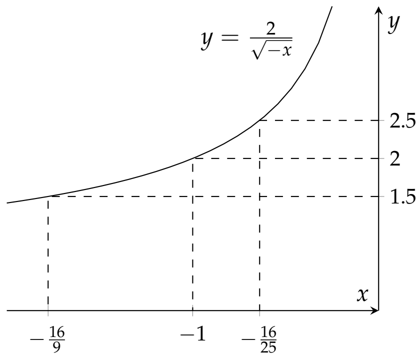
شکل 2.31: ترسیم برائے سوال 12

سوال 9: $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, L = 1, \epsilon = \frac{1}{4}$ شکل 2.28
جواب: $\delta = \frac{7}{16}$

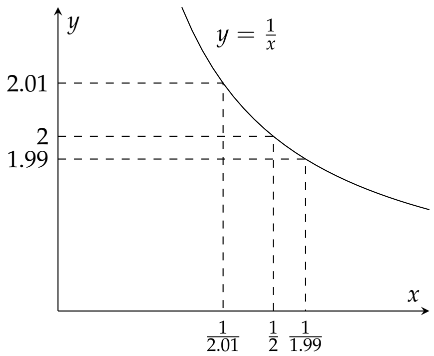
سوال 10: $f(x) = 2\sqrt{x+1}, x_0 = 3, L = 4, \epsilon = 0.2$ شکل 2.29

سوال 11: $f(x) = x^2, x_0 = 2, L = 4, \epsilon = 1$ شکل 2.30
جواب: $\delta = \sqrt{5} - 2$

سوال 12: $f(x) = 4 - x^2, x_0 = -1, L = 3, \epsilon = 0.25$ شکل 2.31



شکل 2.32: ترسیم برائے سوال 13



شکل 2.33: ترسیم برائے سوال 14

سوال 13: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}, x_0 = -1, L = 2, \epsilon = 0.5$ شکل 2.32
جواب: $\delta = 0.36$

سوال 14: $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}, L = 2, \epsilon = 0.01$ شکل 2.33

δ کا الجبرائی حصول
سوال 15 تا سوال 30 میں $f(x)$ اور اعداد L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ دیے گئے ہیں۔ ہر سوال میں x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کریں جس پر عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد $\delta > 0$ کی ایسی قیمت تلاش کریں کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے ہر x کے لئے عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

سوال 15: $f(x) = x + 1, L = 5, x_0 = 4, \epsilon = 0.01$
جواب: $\delta = 0.01, \quad (3.99, 4.01)$

سوال 16: $f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \epsilon = 0.02$

سوال 17: $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, x_0 = 0, \epsilon = 0.1$
جواب: $\delta = 0.19, \quad (-0.19, 0.21)$

سوال 18: $f(x) = \sqrt{x}, L = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{4}, \epsilon = 0.1$

سوال 19: $f(x) = \sqrt{19 - x}, L = 3, x_0 = 10, \epsilon = 1$
جواب: $\delta = 5, \quad (3, 15)$

سوال 20: $f(x) = \sqrt{x - 7}, L = 4, x_0 = 23, \epsilon = 1$

سوال 21: $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, x_0 = 4, \epsilon = 0.05$
جواب: $\delta = \frac{2}{3}, \quad (\frac{10}{3}, 5)$

سوال 22: $f(x) = x^2, L = 3, x_0 = \sqrt{3}, \epsilon = 0.1$

سوال 23: $f(x) = x^2, L = 4, x_0 = -2, \epsilon = 0.5$
جواب: $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12, \quad (-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$

سوال 24: $f(x) = \frac{1}{x}, L = -1, x_0 = -1, \epsilon = 0.1$

سوال 25: $f(x) = x^2 - 5, L = 11, x_0 = 4, \epsilon = 1$
جواب: $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12, \quad (\sqrt{15}, \sqrt{17})$

سوال 26: $f(x) = \frac{120}{x}, L = 5, x_0 = 24, \epsilon = 1$

سوال 27: $f(x) = mx, m > 0, L = 2m, x_0 = 2, \epsilon = 0.03$
جواب: $\delta = \frac{0.03}{m}, \quad (2 - \frac{0.03}{m}, 2 + \frac{0.03}{m})$

سوال 28: $f(x) = mx, m > 0, L = 3m, x_0 = 3, \epsilon = c > 0$

سوال 29: $f(x) = mx + b, m > 0, L = \frac{m}{2} + b, x_0 = \frac{1}{2}, \epsilon = c > 0$
جواب: $\delta = \frac{c}{m}, \quad (\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{1}{2} + \frac{c}{m})$

سوال 30: $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, x_0 = 1, \epsilon = 0.05$

با ضابطہ حد پر مزید سوالات

سوال 31 تا سوال 36 میں تفاعل $f(x)$، نقطہ x_0 اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ تلاش کریں۔اس کے بعد ایسا عدد $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

سوال 31: $f(x) = 3 - 2x, x_0 = 3, \epsilon = 0.02$
جواب: $\delta = 0.01, \quad L = -3$

سوال 32: $f(x) = -3x - 2, x_0 = -1, \epsilon = 0.03$

سوال 33: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x_0 = 2, \epsilon = 0.05$
جواب: $\delta = 0.05, \quad L = 4$

سوال 34: $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+5}, x_0 = -5, \epsilon = 0.05$

سوال 35: $f(x) = \sqrt{1-5x}, x_0 = -3, \epsilon = 0.5$
جواب: $\delta = 0.75, \quad L = 4$

سوال 36: $f(x) = \frac{4}{x}, x_0 = 2, \epsilon = 0.4$

سوال 37 تا سوال 50 میں دیا گیا فقرہ حد ثابت کریں۔

سوال 37: $\lim_{x\to 4}(9-x) = 5$

سوال 38: $\lim_{x\to 3}(3x-7) = 2$

سوال 39: $\lim_{x\to 9}\sqrt{x-5} = 2$

سوال 40: $\lim_{x\to 0}\sqrt{4-x} = 2$

سوال 41: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

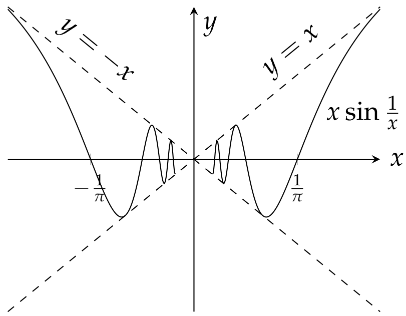
سوال 42: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$

سوال 43: $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$

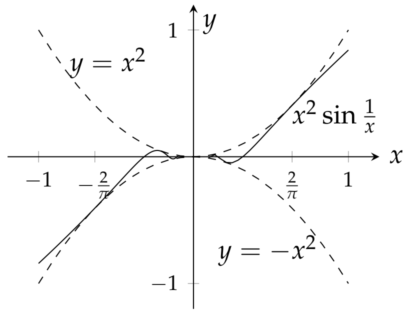
سوال 44: $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$

سوال 45: $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} = -6$

سوال 46: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$



شکل 2.34: ترسیم برائے سوال 49



شکل 2.35: ترسیم برائے سوال 50

سوال 47: $f(x)=\begin{cases}4-2x, & x<1\\ 6x-4, & x\geq 1\end{cases}$ کے لئے $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

سوال 48: $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ \frac{x}{2}, & x\geq 0\end{cases}$ کے لئے $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

سوال 49: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ شکل 2.34

سوال 50: $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$ شکل 2.35

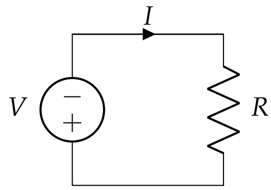
نظریہ اور مثالیں

سوال 51: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

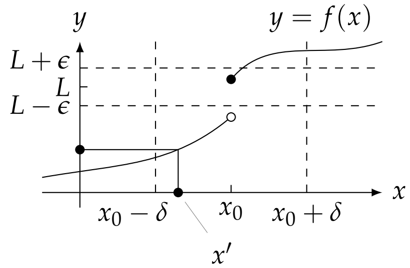
سوال 52: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=k$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 53: یہ کہنا کہ "جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت L کے قریب ہوتی جاتی ہے" سے یہ اخذ نہیں کیا جا سکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال 54: یہ کہنا کہ "کسی بھی دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $\left|f(x)-L\right|<\epsilon$ ہے" سے یہ مراد نہیں لیا جا سکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔



شکل 2.36: قانون اوہم (سوال 56)



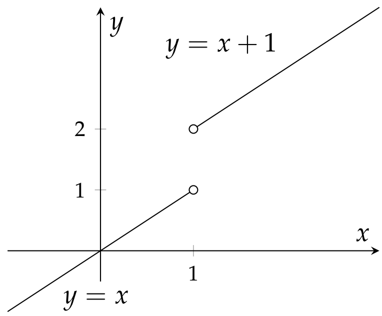
شکل 2.37

سوال 55: انجن کی سلنڈر کی رگڑائی
انجن سلنڈر کا رقبہ عمودی تراش $58\,\mathrm{cm}^2$ حاصل کرنے کے لئے رگڑائی کرنے سے پہلے آپ جاننا چاہیں گے کہ سلنڈر کے رقبہ میں خلل کو $\mp 0.06\,\mathrm{cm}^2$ درستگی کے اندر رکھنے کے لئے درکار $8.593\,\mathrm{cm}$ قطر میں چھوٹ کتنی ہے۔ یہ جاننے کی خاطر آپ $A = \frac{\pi d^2}{4}$ لکھ کر $|A - 58| \le 0.06$ کو حل کرتے ہوئے قطر d تلاش کرتے ہو۔ قطر کا کیا وقفہ حاصل ہو گا؟
جواب: $[8.589, 8.598]$

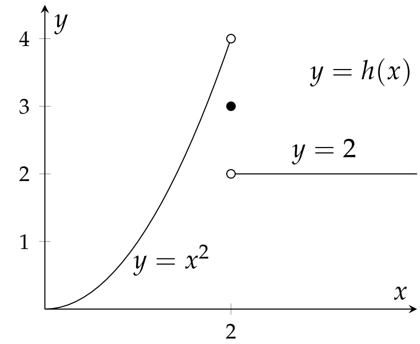
سوال 56: اوہم کا قانون کہتا ہے کہ $V = IR$ ہو گا جہاں V برقی دباو، I برقی رو اور R برقی مزاحمت ہیں جن کی اکائیاں بالترتیب وولٹ V، ایمپیئر A اور اوہم Ω ہیں (شکل 2.36)۔ آپ کے ادارے کو کہا گیا ہے کہ وہ برقی مزاحمت فراہم کرے۔ برقی دباو $220\,\mathrm{V}$ ہو گی جبکہ برقی رو $10\,\mathrm{mA} \mp 0.1\,\mathrm{mA}$ ہونی ضروری ہے۔ مطلوبہ برقی رو $10\,\mathrm{mA}$ میں چھوٹ $0.1\,\mathrm{mA}$ ہے۔ درکار برقی مزاحمت کا وقفہ کیا ہو گا؟

کب $x \to x_0$ کرنے سے عدد L تفاعل $f(x)$ کا حد نہیں ہو گا؟
یہ ثابت کرنے کی خاطر آپ کو ایسا $\epsilon > 0$ تلاش کرنا ہو گا جس کے لئے ایسا کوئی $\delta > 0$ نہیں پایا جاتا ہو کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر ہم اس ϵ کے لئے ثابت کریں گے کہ ہر $\delta > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ اور $|f(x) - L| \ge \epsilon$ ہوں (مثلاً شکل 2.37 میں نقطہ $x = x'$)۔

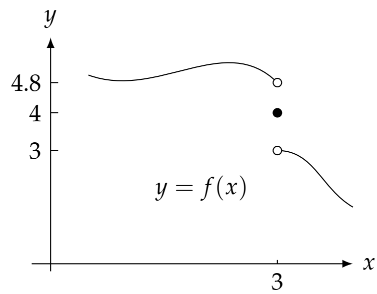
سوال 57: فرض کریں $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ہے جس کو شکل 2.38 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) $\epsilon = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدم مساوات $0 < |x - 1| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے کوئی بھی $\delta > 0$ عدم مساوات $|f(x) - 2| < \frac{1}{2}$ کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ یعنی ہر δ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $0 < |x - 1| < \delta$ اور $|f(x) - 2| \ge \frac{1}{2}$ ہوتے ہیں۔ یوں $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$ ہو گا۔
(ب) دکھائیں $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1$
(پ) دکھائیں $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1.5$



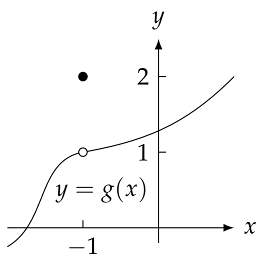
شکل 2.38: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 57



شکل 2.39: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 58



شکل 2.40: ترسیم برائے سوال 59



شکل 2.41: ترسیم برائے سوال 60

سوال 58: تفاعل (شکل 2.39) $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$ کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 3$

(پ) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 2$

سوال 59: تفاعل کی ترسیم شکل 2.40 اس کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 4.2$

(پ) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 3$

سوال 60: دکھائیں کہ شکل 2.41 کی ترسیم کے لئے $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 2$ ہے۔ کیا ایسا نظر آتا ہے جیسے حد $\lim_{x\to -1} g(x)$ موجود ہے؟ اگر حد موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر حد نہیں پایا جاتا تو اس کی وجہ پیش کریں۔

حد بذریعہ ترسیم۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 61 تا سوال 66 میں آپ نے ترسیم کے ذریعہ δ تلاش کرنا ہو گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

(الف) تفاعل $y = f(x)$ کو نقطہ x_0 کے قریب ترسیم کریں۔

(ب) ترسیم کو دیکھ کر حد کا اندازہ لگائیں۔ حد کو حساب کے ذریعہ تلاش کرتے ہوئے اپنے اندازے کی تصدیق کریں۔

(پ) $\epsilon = 0.2$ لیتے ہوئے تحدیدی خطوط $y_1 = L - \epsilon$ اور $y_2 = L + \epsilon$ کھینچیں۔ ساتھ ہی x_0 کے قریب تفاعل f ترسیم کریں۔

(ت) درج بالا جزو (پ) سے ایسے $\delta > 0$ کا اندازہ لگائیں کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتے ہوں۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

اپنا اندازہ پرکھنے کی خاطر f ، y_1 اور y_2 کو وقفہ $0 < |x - x_0| < \delta$ پر ترسیم کریں۔ اگر تفاعل کی کوئی قیمت وقفہ $[L - \epsilon, L + \epsilon]$ کے باہر پائی جاتی ہو تب منتخب کردہ δ بہت بڑا تھا لہٰذا δ کی چھوٹی قیمت لیتے ہوئے دوبارہ کوشش کریں۔

(ٹ) جزو (پ) اور (ت) کو $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ کے لئے دہرائیں۔

سوال 61: $f(x) = \frac{x^4-81}{x-3}, x_0 = 3$

سوال 62: $f(x) = \frac{5x^3+9x^2}{2x^5+3x^2}, x_0 = 0$

سوال 63: $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}, x_0 = 0$

سوال 64: $f(x) = \frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}, x_0 = 0$

سوال 65: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, x_0 = 1$

سوال 66: $f(x) = \frac{3x^2-(7x+1)\sqrt{x}+5}{x-1}, x_0 = 1$

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. یک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب بائیں ہاتھ حد[7] حاصل ہو گا۔اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب دائیں ہاتھ حد[8] حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

یک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔اسی لئے عام حد کو بعض اوقات دو طرفہ حد[9] بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر یک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

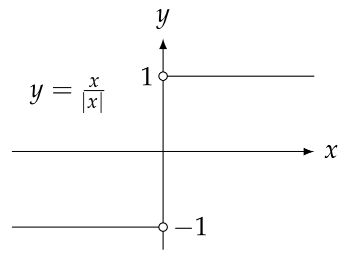
تعریف: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) ، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

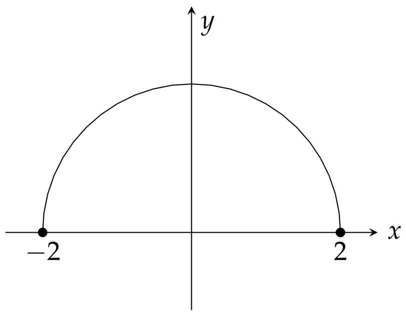
فرض کریں کہ وقفہ (c, a) ، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

---
[7] left-handed limit
[8] right-handed limit
[9] two-sided limit



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔



شکل 2.43: تفاعل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔

شکل 2.42 میں تفاعل $f(x)=\frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=1, \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-1$$

□

$x \to a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x \to a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تفاعل $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ کا دائرہ کار $[-2,2]$ ہے۔ تفاعل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2}=0, \quad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2}=0$$

نقطہ $x=-2$ پر تفاعل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x=2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x=-2$ اور $x=2$ پر تفاعل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ □

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تفاعل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تفاعل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: یک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$ پر: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$ پر: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔(دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$ پر: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(2) = 2$ ہے۔

$x = 3$ پر: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

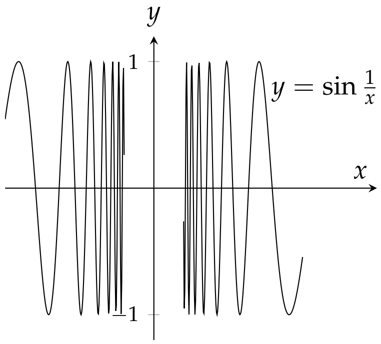
$x = 4$ پر: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔(نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ $[0,4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ □

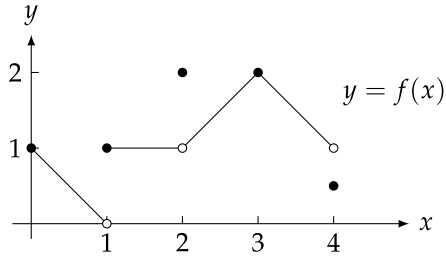
اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا یک طرفہ حد موجود تھا۔درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نا ہی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin\frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔

حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ایسا کوئی یکتا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔یوں $x = 0$ پر $\sin\frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نا کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ □



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

لامتناہی حد

آئیں تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے $x\to 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔ یوں $x\to 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x\to 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

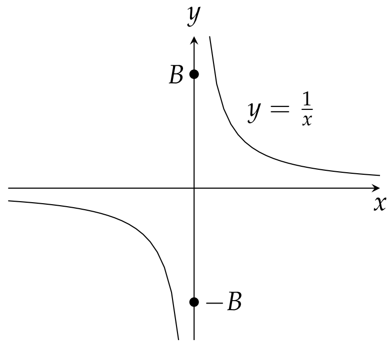
یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x\to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x\to 0^-$ کرنے سے $f(x)=\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

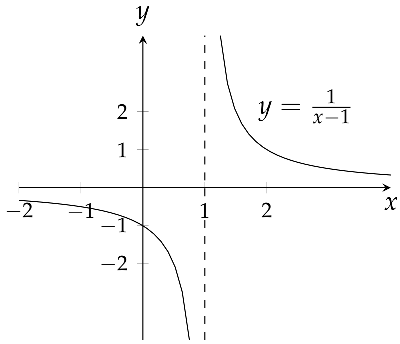
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x\to 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: یک طرفہ حد
$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.46: تفاعل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27

حل: ترسیمی حل: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x - 1$ اور اس کے بالعکس متناسب پر غور کریں۔ $x \to 1^+$ کرنے سے $(x-1) \to 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \to \infty$ ملتے ہیں۔ $x \to 1^-$ کرنے سے $(x-1) \to 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ ملتے ہیں۔ □

مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد
(ا) $x = 0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x = -3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔

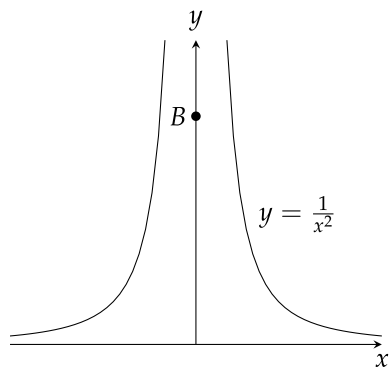
حل: (ا) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

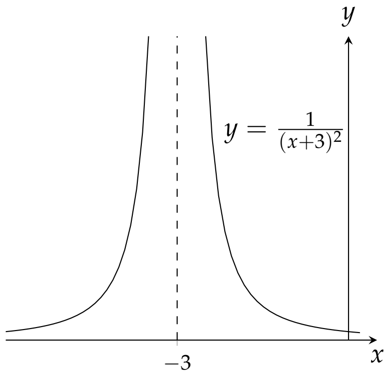
(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x \to -3} g(x) = \lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.48: تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.49: تفاعل $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \to 0^-$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \to 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: ناطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \qquad (\text{ا})$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \qquad (\text{ب})$$

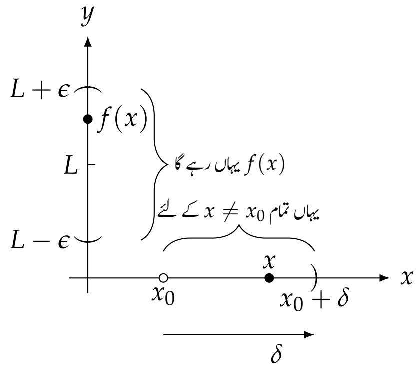
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \qquad (\text{ج})$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \qquad (\text{د})$$

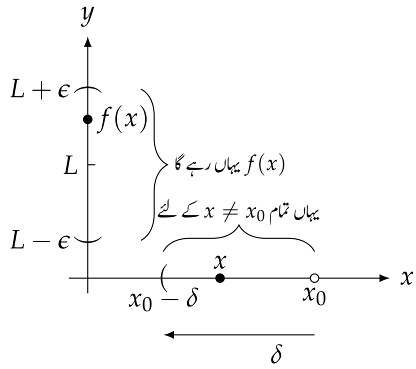
$$\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \qquad (\text{و})$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \qquad (\text{ہ})$$

جزو (ا) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہٰذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔جزو (ہ) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جا سکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.1}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

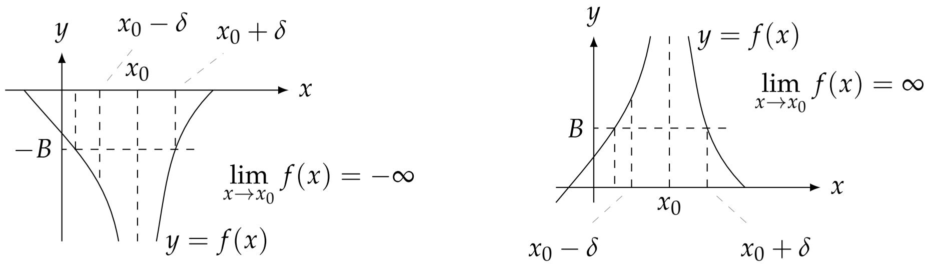
بائیں ہاتھ حد
اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.2}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

□



شکل 2.52: لامتناہی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$0 < x - x_0 < \delta \quad \implies \quad \left| f(x) - L \right| < \epsilon \tag{2.3}$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\delta < x - x_0 < 0 \quad \implies \quad \left| f(x) - L \right| < \epsilon \tag{2.4}$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad \left| f(x) - L \right| < \epsilon \tag{2.5}$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبدا سے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لامتناہی حد

(ا) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

□

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

ج. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

د. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ہ. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے۔

و. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ز. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

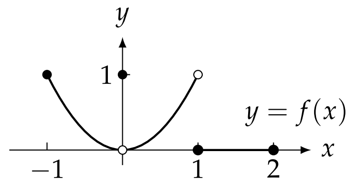
ح. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

ط. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

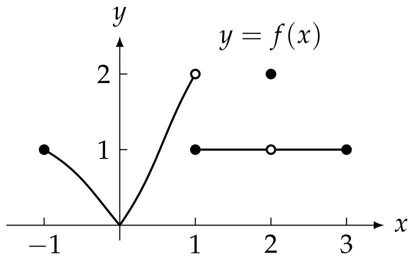
ي. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

یا. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ غیر موجود ہے۔

یب. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$



شکل 2.53: تفاعل برائے سوال 1



شکل 2.54: تفاعل برائے سوال 2

جواب:

ا. درست ج. غلط ہ. درست ز. غلط ط. غلط یا. درست

ب. درست د. درست و. درست ح. غلط ي. غلط یب. غلط

سوال 2: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تفاعل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔

ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim_{x\to 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

د. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

ہ. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

و. $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ز. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

ح. کھلے وقفہ $(-1,1)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

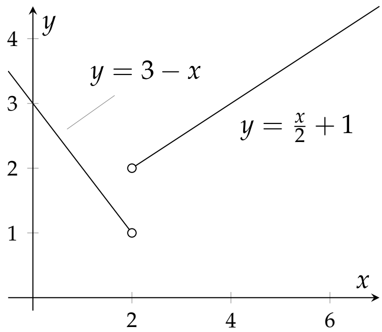
ط. کھلے وقفہ $(1,3)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

ي. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$

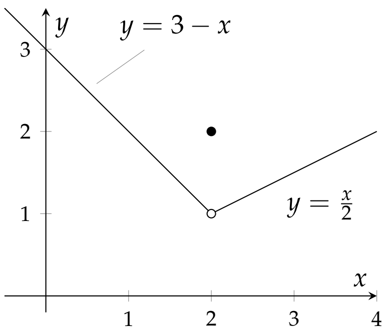
یا. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ غیر موجود ہے۔

سوال 3: درج ذیل تفاعل کو شکل 3 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x<2 \\ \frac{x}{2}+1, & x>2 \end{cases}$$



شکل 2.55: تفاعل برائے سوال 3



شکل 2.56: تفاعل برائے سوال 4

ا. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود ہے۔اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تا نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $2, 1$ ، (ب) نہیں $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ ، (ج) $3, 3$ ، (د) ہاں، 3

سوال 4: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

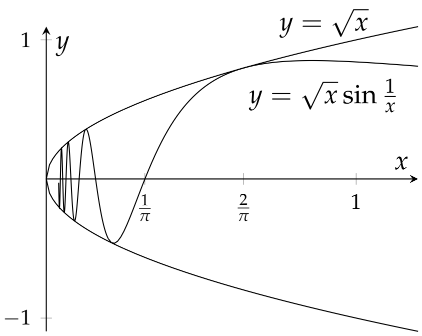
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

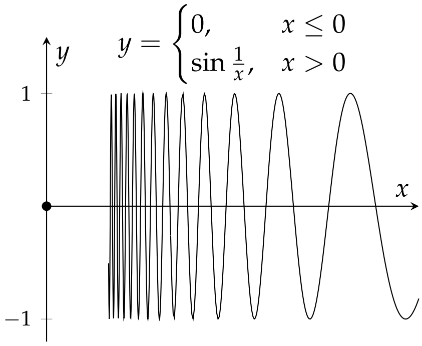
ب. کیا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ اور $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 6



شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 5

سوال 5: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$g(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$$

ا. کیا $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) نہیں (ب) ہاں، 0 (ج) نہیں

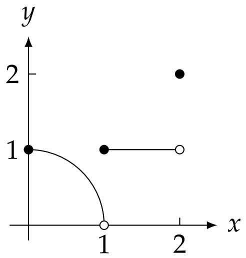
سوال 6: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

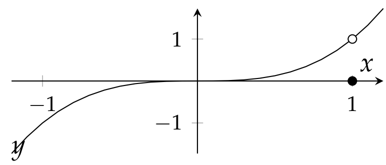
ب. کیا $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7:



شکل 2.60: ترسیم برائے سوال 9



شکل 2.59: ترسیم برائے سوال 7

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) شکل 2.59 (ب) $1, 1$ (ج) ہاں، 1

سوال 8:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9 اور سوال 10 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

سوال 9: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 0\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$

جواب: شکل 9 (ا) $D: 0\le x\le 2$ ، $R: 0<y\le 1$ اور $y=2$ (ب) $(0,1)\cup(1,2)$ (ج) $x=2$ (د) $x=0$

سوال 10: $f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0 \text{ یا } 0<x\le 1\\ 1, & x=0\\ 0, & x<-1 \text{ یا } x>1\end{cases}$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 11 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

سوال 11: $\lim\limits_{x\to -0.5^-}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

جواب: $\sqrt{3}$

سوال 12: $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

سوال 13: $\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$

جواب: 1

سوال 14: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

سوال 15: $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

جواب: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 16: $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

سوال 17: (ا) $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$ (ب) $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

جواب: (ا) 1 (ب) -1

سوال 18: (ا) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 19: (ا) $\lim_{\theta\to 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta\to 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$

جواب: (ا) 1 (ب) $\frac{2}{3}$

سوال 20: (ا) $\lim_{t\to 4^+} (t-|t|)$ (ب) $\lim_{t\to 4^-} (t-|t|)$

لامتناہی حد: سوال 21 تا سوال 32 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}$

جواب: ∞

سوال 22: $\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 23: $\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$

جواب: $-\infty$

سوال 24: $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 25: $\lim_{x\to -8^+} \frac{2x}{x+8}$

جواب: $-\infty$

سوال 26: $\lim_{x\to -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 27: $\lim_{x\to 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

جواب: ∞

سوال 28: $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 29: (ا) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

جواب: (ا) ∞ (ب) $-\infty$

سوال 30: (ا) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

سوال 31: $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$
جواب: ∞

سوال 32: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 33 تا سوال 36 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x$
جواب: ∞

سوال 34: $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 35: $\lim_{\theta\to 0^-} (1+\csc\theta)$
جواب: $-\infty$

سوال 36: $\lim_{\theta\to 0}(2-\cot\theta)$

مزید حساب: سوال 37 تا سوال 42 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 37: $\lim \frac{1}{x^2-4}$

ا. $x\to 2^+$ ب. $x\to 2^-$ ج. $x\to -2^+$ د. $x\to -2^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) $-\infty$ (ج) $-\infty$ (د) ∞

سوال 38: $\lim \frac{x}{x^2-1}$

ا. $x\to 1^+$ ب. $x\to 1^-$ ج. $x\to -1^+$ د. $x\to -1^-$

سوال 39: $\lim(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to \sqrt[3]{2}$ د. $x \to -1$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞ (ج) 0 (د) $\frac{3}{2}$

سوال 40: $\lim \frac{x^2-1}{2x+4}$

ا. $x \to -2^+$ ب. $x \to -2^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 0^-$

سوال 41: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 2^+$ ج. $x \to 2^-$ د. $x \to 2$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $-\infty$ ہو گا۔

سوال 42: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

ا. $x \to 2^+$ ب. $x \to -2^+$ ج. $x \to 0^-$ د. $x \to 1^+$

سوال 43 تا سوال 46 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

سوال 43: $\lim(2 - \frac{3}{t^{1/3}})$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞

سوال 44: $\lim(\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

سوال 45: $\lim(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) ∞ (ج) ∞ (د) ∞

سوال 46: $\lim(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x\to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x\to a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x\to c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

یک طرفہ حد کی با ضابطہ تعریف

سوال 51: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5+\delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟
جواب: $\delta = \epsilon^2, \lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

سوال 52: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4-\delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 53 اور سوال 54 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 53: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$

سوال 54: $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

سوال 55: (ا) $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔
جواب: (ا) 400 (ب) 399 (ج) حد غیر موجود ہے۔

سوال 56: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔(ا) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ تلاش کریں۔اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے فقروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

سوال 57: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

سوال 58: $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

سوال 59: $\lim_{x\to 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty$

سوال 60: $\lim_{x\to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

یک طرفہ لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لا متناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to x_0^+} = \infty$$

$\square$

سوال 61: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

ا. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$
ب. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
ج. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

جواب: (ا) ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہے۔ (ب) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔ (ج) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔

یک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 62 تا سوال 67 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 62: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

سوال 63: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

سوال 64: $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

سوال 65: $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

سوال 66: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$

سوال 67: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے ناکہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظرانداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اتنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاہد ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مالیکیول میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی در حقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے ناکہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

عملاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی اندرونی نقطے[10] (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، بائیں سر نقطے[11] اور دائیں سر نقطے[12]۔

تعریف: اندرونی نقطہ پر استمرار
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ $x = c$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر f استمراری ہو گا۔

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

□

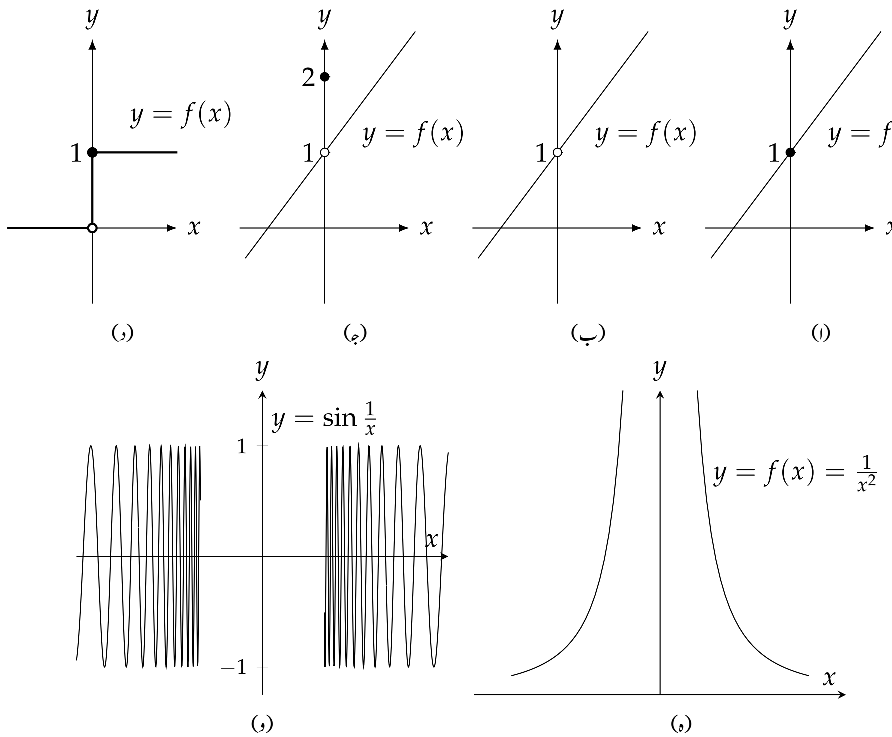
شکل 2.61 میں $x = 0$ پر (ا) استمراری ہے۔اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کی بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔انہیں قابل ہٹاو[13] عدم استمرار کہتے ہیں۔ان دونوں میں $x \to 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر پر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے۔

شکل 2.61 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تشویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں لہٰذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جا سکتی ہے۔ (د) میں چھلانگ عدم استمرار[14] پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (ہ) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا لا متناہی عدم استمرار[15] پایا جاتا ہے۔ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لئے غیر استمراری ہے کہ $x \to 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں ارتعاشی عدم استمرار[16] پایا جاتا ہے۔

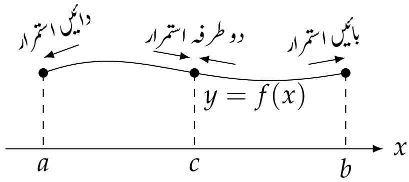
کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

---

[10] interior points
[11] left endpoints
[12] right endpoints
[13] removable
[14] jump discontinuity
[15] infinite discontinuity
[16] oscillating discontinuity



شکل 2.61: $x = 0$ پر تفاعل (ا) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (و) غیر استمراری ہیں۔



شکل 2.62: نقطہ a ، b اور c پر استمرار

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

تعریف: بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔

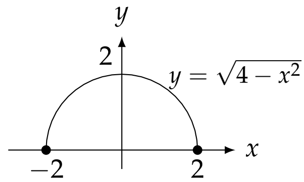
□

عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل دائیں استمراری[17] ہو گا۔اسی طرح تفاعل f اس صورت بائیں استمراری[18] ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.62)۔

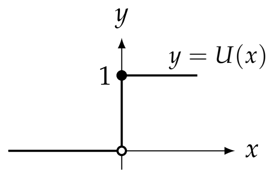
مثال 2.30: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل 2.63)۔

□

[17] right-continuous
[18] left-continuous



شکل 2.63: پورے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری



شکل 2.64: یہ تفاعل مبدا پر دائیں استمراری ہے

مثال 2.31: شکل 2.64 میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ نا بائیں استمراری ہے اور نا ہی استمراری ہے۔ □

ہم نقطے پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

پرکھ استمرار
نقطہ $x = c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

1. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)

2. $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے ($x \to c$ پر f کا حد پایا جاتا ہے)

3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

یک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.65 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔نقطہ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

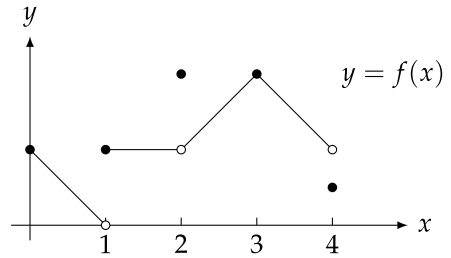
حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

ا. $x = 0$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(0)$ موجود ہے $(f(0) = 1)$

2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)

3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں)



شکل 2.65: تفاعل f بند وقفہ $[0,4]$ پر معین ہے۔یہ تفاعل $x = 1, 2, 4$ پر غیر استمراری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استمراری ہے۔

ب. چونکہ $\lim_{x\to1} f(x)$ غیر موجود ہے لہٰذا $x = 1$ پر f غیر استمراری ہے۔پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استمراری ہے چونکہ

1. $f(1)$ موجود ہے ($f(1) = 1$)
2. $\lim_{x\to1^+} f(x) = 1$ (نقطہ $x = 1$ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)
3. $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ (دائیں ہاتھ حد اور تفاعل کی قیمتیں برابر ہیں۔)

ج. $\lim_{x\to2} f(x) \neq f(2)$ کی بنا $x = 2$ پر f غیر استمراری ہے۔پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

د. $x = 3$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(3)$ موجود ہے ($f(3) = 2$)
2. $\lim_{x\to3} f(x) = 2$ (نقطہ $x = 2$ پر حد موجود ہے۔)
3. $\lim_{x\to3} f(x) = f(3)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)

ہ. چونکہ $\lim_{x\to4^-} f(x) \neq f(4)$ ہے لہٰذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استمراری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار
اگر نقطہ $x = c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x = c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

1. $f + g$ اور $f - g$
2. fg
3. kf ، جہاں k کوئی عدد ہے
4. $\frac{f}{g}$ (بشرطیکہ $g(c) \neq 0$ ہو)
5. $(f(x))^{m/n}$ (بشرطیکہ $(f(x))^{m/n}$ اس وقفے پر معین ہو جس پر c پایا جاتا ہے، اور m اور n عدد صحیح ہیں۔)

درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

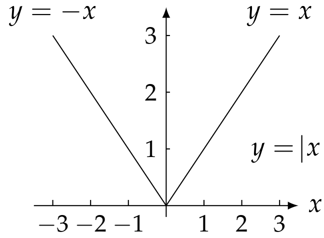
مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار
حقیقی خط کے ہر نقطہ پر ہر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال 2.33: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = x^4 + 20$ اور $g(x) = 5x(x-2)$ استمراری ہیں۔تفاعل

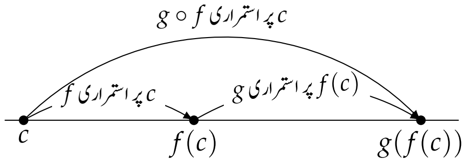
$$r(x) = \frac{x^2 + 20}{5x(x-2)}$$

ماسوائے $x = 0$ اور $x = 2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔ □

مثال 2.34: $f(x) = |x|$ کی استمرار
x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = |x|$ استمراری ہے (شکل 2.66)۔ $x > 0$ کے لئے $f(x) = x$ ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔اسی



شکل 2.66: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔



شکل 2.67: مرکب تفاعل کی استمرار۔

طرح $x < 0$ کے لئے $f(x) = -x$ ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔ آخر میں مبدا پر $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$ ہے۔
$\square$

مثال 2.35: تکونیاتی تفاعل کی استمرار

اگلے باب میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استمراری ہے لہٰذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$\square$

مسئلہ 2.8: مرکبات کی استمرار

اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استمراری ہوں تب c پر $g \circ f$ استمراری ہو گا (شکل 2.67)۔

مرکب کی استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

(ا) $y = \sqrt{x}$ — مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت)

(ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ — مسئلہ 2.7 اور مسئلہ 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب)

(ج) $y = \dfrac{x\cos(x^{2/3})}{1+x^4}$ — مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی)

(د) $y = \left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$ — مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حتمی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب)

□

نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔ اگر $f(c)$ غیر معین ہو لیکن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل F نقطہ $x = c$ پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو f کی نقطہ $x = c$ تک استمراری توسیع[19] کہتے ہیں اور توسیع شدہ تفاعل کو وسیع تفاعل[20] کہتے ہیں۔ ناطق تفاعل f کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا $x = 2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

حل: اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x \neq 2$ پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل $x \neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x = 2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

یوں f کی نقطہ $x = 2$ تک توسیع تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

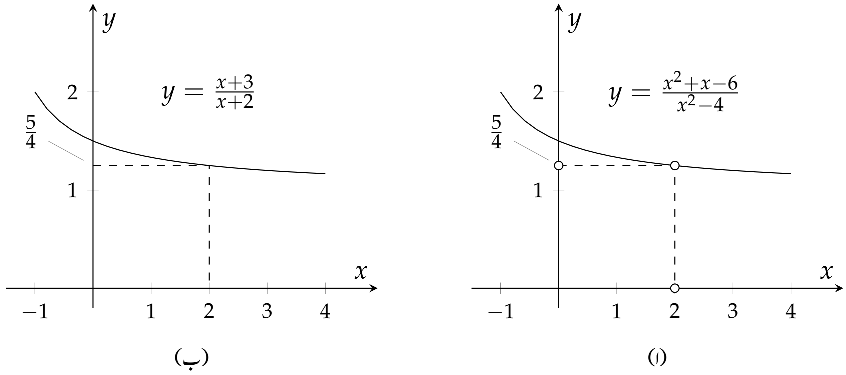
تفاعل f کی ترسیم شکل 2.68 میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی یہی ترسیم ہے مگر اس میں $(2, \frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

□

---

[19] continuous extension
[20] extended function



شکل 2.68: تفاعل $f(x)$ اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تفاعل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ایسا تفاعل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تفاعل کی قیمت برابر ہوں تب f وقفہ پر استمراری[21] کہلائے گا۔جو تفاعل I پر استمراری ہو یہ تفاعل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

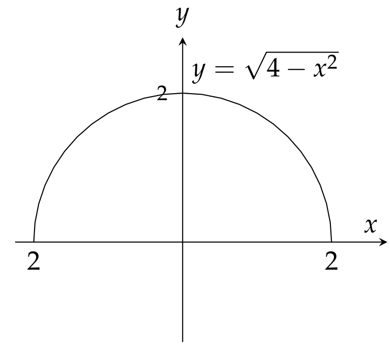
مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تفاعل
شکل 2.69 میں وقفوں پر استمراری تفاعل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔ □

وقفوں پر استمراری تفاعل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ان میں ایک متوسط قیمت خاصیت[22] ہے۔ اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تفاعل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تفاعل متوسط قیمت خاصیت رکھتا ہے۔

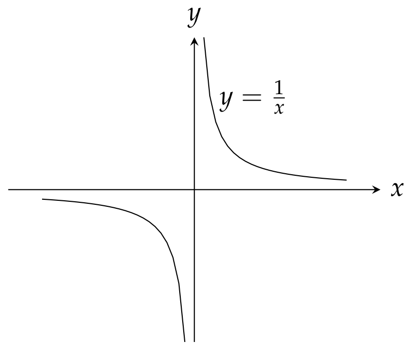
مسئلہ 2.9: مسئلہ متوسط قیمت
فرض کریں کہ تفاعل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ تب اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا کہ $f(c) = y_0$ ہو (شکل 2.70)۔

---

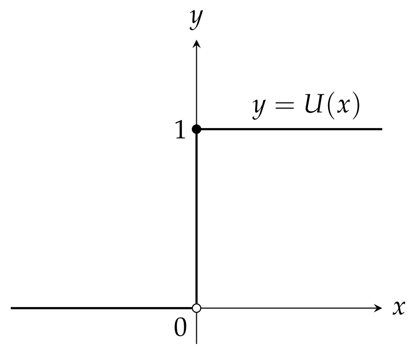
[21] continuous on interval
[22] intermediate value property



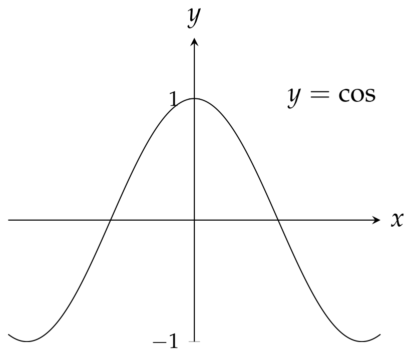
(ا) $[-2,2]$ پر استمراری



(ب) $(-\infty,0)$ اور $(0,\infty)$ پر استمراری

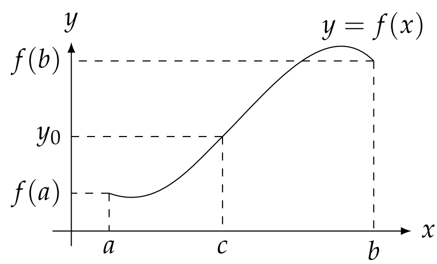


(ج) $(-\infty,0)$ اور $[0,\infty)$ پر استمراری

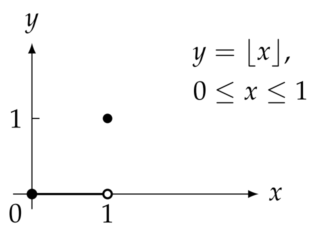


(د) $(-\infty,\infty)$ پر استمراری

شکل 2.69: وقفوں پر استمراری تفاعل (مثال 2.38)



شکل 2.70: وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ ہر قیمت رکھتا ہے



شکل 2.71: تفاعل $y=\lfloor x\rfloor, 0\leq x\leq 1$ کوئی بھی قیمت $f(0)=0$ اور $f(1)=1$ کے بیچ قبول نہیں کرتا ہے۔

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلٰی کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کی استمرار ضروری ہے۔اگر I میں صرف ایک نقطے پر بھی f غیر استمراری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔اس کی ایک مثال شکل 2.71 میں دی گئی ہے۔

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ I پر استمراری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔اس میں عددی صحیح زمین تفاعل $\lfloor x \rfloor$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نا ہی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

تلاش جذر

مساوات $f(x) = 0$ کے حل کو $f(x)$ کا صفر[23] یا جذر[24] کہتے ہیں۔مسئلہ 2.9 کے تحت استمراری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت $(\pm)$ تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں f استمراری ہے)۔ مساوات کی ترسیم x محور کو f کی جذر پر قطع کرتی ہے۔ہم $y = f(x)$ کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ یہ کہاں x محور کو قطع کرتی ہے۔ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت دیکھتے ہیں۔اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک کا جذر تلاش کیا جا سکتا ہے۔شکل 2.72 میں، قدم با قدم، اس عمل سے $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

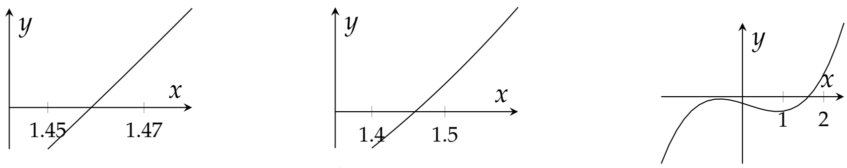
ترسیم سے مساوات کو حل کرتے ہوئے تفاعل کے جذر حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔اس سے کم دورانیے میں جذر کو بذریعہ اعدادی تراکیب حاصل کیا جا سکتا ہے جن پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

سوالات

استمرار بذریعہ ترسیم
سوال 1 تا سوال 4 میں دریافت کریں کہ آیا تفاعل وقفہ $[-1, 3]$ پر استمراری ہے۔نا ہونے کی صورت میں کہاں تفاعل غیر استمراری ہے اور ایسا کیوں ہے؟

سوال 1: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.73-ا میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: نہیں؛ $x = 2$ پر غیر استمراری ہے؛ $x = 2$ پر غیر معین ہے۔

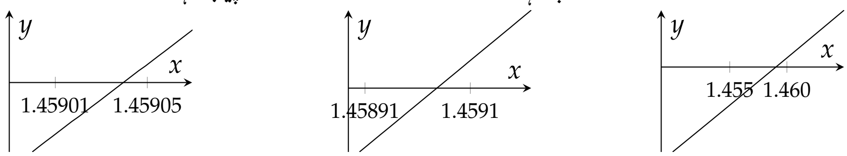
[23] zero
[24] root



(ا) جذر (صفر) 1 اور 2 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

(ب) جذر (صفر) 1.4 اور 1.5 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

(ج) جذر (صفر) 1.45 اور 1.47 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

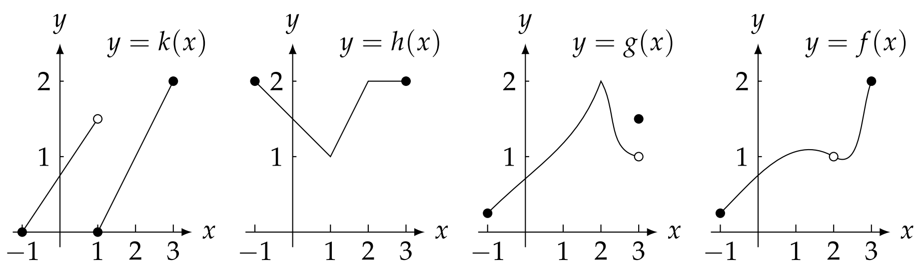


(د) جذر (صفر) 1.455 اور 1.460 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

(ہ) جذر (صفر) 1.45891 اور 1.4591 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

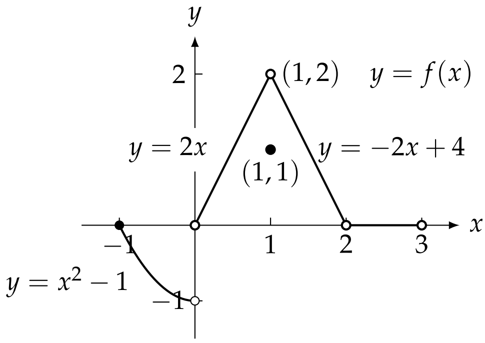
(و) جذر (صفر) 1.45901 اور 1.45905 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

شکل 2.72: ترسیم کے ذریعہ $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کے جذر کا قدم با قدم حصول۔



(ا) (ب) (ج) (د)

شکل 2.73: اشکال برائے سوال 1 تا سوال 4



شکل 2.74: ترسیم برائے سوال 5 تا سوال 10

سوال 2: تفاعل $y = g(x)$ جسے شکل 2.73-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3: تفاعل $y = h(x)$ جسے شکل 2.73-ج میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: استمراری

سوال 4: تفاعل $y = k(x)$ جسے شکل 2.73-د میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5 تا سوال 10 درج ذیل تفاعل کے بارے میں ہیں جس کو شکل 2.74 میں ترسیم کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

سوال 5: (ا) کیا $f(-1)$ موجود ہے؟
(ب) کیا $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ موجود ہے؟
(ج) کیا $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ ہے؟
(د) کیا $x = -1$ پر $f(x)$ استمراری ہے؟
جواب: (ا) ہاں، (ب) ہاں، (ج) ہاں، (د) ہاں

سوال 6: (ا) کیا $f(x)$ موجود ہے؟
(ب) کیا $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجود ہے؟
(ج) کیا $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ ہے؟
(د) کیا $x = 1$ پر f استمراری ہے؟

سوال 7: (ا) کیا $x=2$ پر f معین ہے؟
(ب) کیا $=2$ پر f استمراری ہے؟
جواب: (ا) نہیں، (ب) نہیں

سوال 8: x کی کس قیمت پر f استمراری ہے؟

سوال 9: $x=2$ پر توسیع کردہ تفاعل کو استمراری بنانے کی خاطر $f(2)$ کی کیا قیمت ہونی چاہیے؟
جواب: 0

سوال 10: $f(1)$ کی کیا قیمت غیر استمرار کو ختم کرے گی؟

پرکھ استمرار کا استعمال
کن نقطوں پر سوال 11 اور سوال 12 میں دیے گئے تفاعل غیر استمراری ہیں۔ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم کیا جا سکتا ہے؟ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم نہیں کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11: حصہ 2.4 میں سوال 1 کے تفاعل۔
جواب: 1 نا قابل ہٹاو؛ 0 قابل ہٹاو

سوال 12: حصہ 2.4 سوال 2 میں کے تفاعل۔

سوال 13 تا سوال 28 میں کن نقطوں پر تفاعل استمراری ہیں۔

سوال 13: $y=\frac{1}{x-2}-3x$
جواب: تمام ماسوائے $x=2$

سوال 14: $y=\frac{1}{(x+2)^2}+4$

سوال 15: $y=\frac{x+1}{x^2-4x+3}$
جواب: تمام ماسوائے $x=3$ اور $x=1$

سوال 16: $y=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$

سوال 17: $y=|x-1|+\sin x$
جواب: تمام x

سوال 18: $y=\frac{1}{|x|+1}-\frac{x^2}{2}$

سوال 19: $y = \frac{\cos x}{x}$
جواب: تمام ماسوائے $x = 0$

سوال 20: $y = \frac{x+2}{\cos x}$

سوال 21: $y = \csc x$
جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 22: $y = \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 23: $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n طاق عدد صحیح ہے۔

سوال 24: $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

سوال 25: $y = \sqrt{2x+3}$
جواب: تمام $x > -\frac{3}{2}$

سوال 26: $y = \sqrt[4]{3x-1}$

سوال 27: $y = (2x-1)^{1/3}$
جواب: تمام x

سوال 28: $y = (2-x)^{1/5}$

مرکب تفاعل کے حد
سوال 29 تا سوال 34 میں حد تلاش کریں۔

سوال 29: $\lim_{x\to\pi} \sin(x - \sin x)$
جواب: 0

سوال 30: $\lim_{t\to 0} \sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan t))$

سوال 31: $\lim_{y\to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
جواب: 1

سوال 32: $\lim_{x\to 0} \tan(\frac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3}))$

سوال 33: $\lim_{t\to 0} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{19-3\sec 2t}})$
جواب: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوال 34: $\lim_{x\to \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

استمراری توسیع

سوال 35: $g(3)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x = 3$ پر $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ کی استمراری توسیع ہو۔
جواب: $g(3) = 6$

سوال 36: $h(2)$ کی تعریف یوں کریں کہ $t = 2$ پر $h(t) = \frac{t^2+3t-10}{t-2}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 37: $f(1)$ کی تعریف یوں کریں کہ $s = 1$ پر $f(s) = \frac{s^3-1}{s^2-1}$ کی استمراری توسیع ہو۔
جواب: $f(1) = \frac{3}{2}$

سوال 38: $g(4)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x = 4$ پر $g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 39: a کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$ استمراری ہے؟
جواب: $a = \frac{4}{3}$

سوال 40: b کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$ استمراری ہے؟

استمراری توسیع۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 41 تا سوال 44 میں تفاعل f کو ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کہ آیا مبدا پر اس کا استمراری توسیع پایا جاتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب $x = 0$ پر وسیع تفاعل کی موزوں قیمت تلاش کریں۔ اگر تفاعل کی استمراری توسیع ممکن نہ ہو، تب کیا اس کو مبدا پر دائیں یا بائیں سے استمراری بنایا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں مبدا پر وسیع تفاعل کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 41: $f(x) = \frac{10^x-1}{x}$

سوال 42: $f(x) = \frac{10^{|x|}-1}{x}$

سوال 43: $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

سوال 44: $f(x) = (1+2x)^{1/x}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 45: ایک استمراری تفاعل کی قیمت $x=0$ پر منفی اور $x=1$ پر مثبت ہے۔ $x=0$ اور $x=1$ کے بیچ مساوات $f(x)=0$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟ ایک خاکہ کھینچ کر وجہ بیان کریں۔

سوال 46: مساوات $\cos x = x$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟

سوال 47: دکھائیں کہ وقفہ $[-4,4]$ میں مساوات $x^3-15x+1=0$ کے تین حل پائے جاتے ہیں۔

سوال 48: دکھائیں کہ کسی x پر تفاعل $F(x)=(x-a)^2(x-b)^2+x$ کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

سوال 49: دکھائیں کہ c کی ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جن پر تفاعل $f(x)=x^3-8x+10$ کی قیمت (ا) π؛ (ب) $-\sqrt{3}$؛ (ج) $5\,000\,000$ ہوں گی۔

سوال 50: سمجھائیں کہ درج ذیل جملے ایک ہی معلومات پوچھتی ہیں۔
(ا) $f(x)=x^3-3x-1$ کے جذر تلاش کریں۔
(ب) اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جہاں $y=x^3$ اور $y=3x+1$ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔
(ج) وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جن پر $x^3-3x=1$ ہو گا۔
(د) ان نقطوں کے x محدد تلاش کریں جہاں منحنی $y=x^3-3x$ خط $y=1$ کو قطع کرتی ہے۔
(ہ) مساوات $x^3-3x-1=0$ کو حل کریں۔

سوال 51: ایسا تفاعل $f(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x=2$ پر جہاں اس کا قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x=2$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار قابل ہٹاو ہے۔

سوال 52: ایسا تفاعل $g(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x=-1$ پر جہاں اس کا نا قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x=1$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار نا قابل ہٹاو ہے۔

سوال 53: تمام نقطوں پر غیر استمراری تفاعل

(ا) اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہوئے، کہ حقیقی اعداد کا ہر غیر خالی وقفہ ناطق اور غیر ناطق اعداد پر مشتمل ہے، دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل ہر نقطے پر عدم استمراری ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ناطق } x \\ 0 & \text{غیر ناطق } x \end{cases}$$

(ب) کیا کسی نقطے پر f دائیں استمراری یا بائیں استمراری ہے؟

سوال 54: اگر $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ استمراری ہوں تب کیا $[0, 1]$ کے کسی نقطے پر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: اگر تفاعل $h(x) = f(h) \cdot g(x)$ نقطہ $x = 0$ پر استمراری ہو تب کیا $f(x)$ اور $g(x)$ ضرور $x = 0$ پر استمراری ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 56: ایسے تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی مثال دیں جو $x = 0$ پر استمراری ہوں لیکن ان کا مرکب تفاعل $f \circ g$ نقطہ $x = 0$ پر عدم استمراری ہو۔ کیا یہ مسئلہ 2.8 کی خلاف ورزی کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 57: کیا یہ کہنا درست ہو گا کہ جو تفاعل کسی وقفے پر کبھی صفر نہیں ہوتا ہے وہ تفاعل اس وقفہ پر کبھی علامت تبدیل نہیں کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 58: کیا یہ درست ہے کہ ربڑ کی پٹی کو دونوں سروں سے کھینچنے کے باوجود پٹی پر ایک نقطہ ایسا پایا جاتا ہے جو اپنی جگہ بر قرار رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 59: مسئلہ مقررہ نقطہ

فرض کریں کہ وقفہ $0, 1$ میں تفاعل f استمراری ہے اور $[0, 1]$ میں ہر x کے لئے $0 \leq f(x) \leq 1$ ہے۔ دکھائیں کہ $[0, 1]$ میں ایسا نقطہ c پایا جاتا ہے جس پر $f(c) = c$ ہو گا۔ c کو f کا مقررہ نقطہ[25] کہتے ہیں۔

سوال 60: استمراری تفاعل کی علامت بر قرار رکھنے کی خاصیت

فرض کریں کہ وقفہ (a, b) پر تفاعل f معین ہے اور نقطہ c جہاں f استمراری ہے پر $f(c) \neq 0$ ہے۔ دکھائیں کہ c کے ارد گرد وقفہ $c - \delta, c + \delta$ میں f کی علامت وہی ہو گی جو c پر $f(c)$ کی ہے۔ یہ ایک غیر معمولی نتیجہ ہے۔ اگرچہ (a, b) پر f معین ہے، کسی بھی نقطے پر تفاعل کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے ماسوائے نقطہ c پر۔ اس کے ساتھ شرط $f(c) \neq 0$ ملانے سے f غیر صفر حاصل ہوتا ہے یعنی پورے وقفے پر f مثبت یا منفی ہو گا۔

سوال 61: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 سے اس حصے کا مسئلہ 2.6 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے۔

---

[25] fixed point

سوال 62: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.2 اور مسئلہ 2.3 سے موجودہ حصے کا مسئلہ 2.7 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے؟

سوال کا حل بذریعہ ترسیم

کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کھینچ کر درج ذیل سوالات حل کریں۔

سوال 63: $x^3 - 3x - 1 = 0$

جواب: $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$

سوال 64: $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

سوال 65: $x(x-1)^2 = 1$

جواب: $x \approx 1.7549$ ایک جذر حاصل کریں۔

سوال 66: $x^x = 2$

سوال 67: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$

جواب: $x \approx 3.5156$

سوال 68: $x^3 - 15x + 1 = 0$ تین جذر تلاش کریں۔

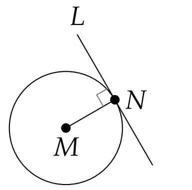
سوال 69: $\cos x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

جواب: $x \approx 0.7391$

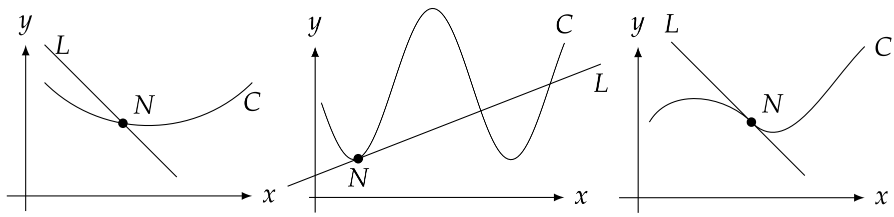
سوال 70: $2\sin x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

2.6 مماسی خط

حصہ 2.1 میں سیکنٹ اور مماس پر بحث کی گئی۔اس بحث کو اس حصے میں جاری رکھتے ہیں۔ہم سیکنٹ کی ڈھلوان کا حد تلاش کرتے ہوئے منحنی کا مماس حاصل کریں گے۔



شکل 2.75: نقطہ N پر مماس اور رداس آپس میں عمودی ہیں۔



(ا) N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کے دونوں اطراف پر پایا جاتا ہے۔

(ب) نقطہ N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کو کئی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

(ج) اگرچہ L منحنی C کو ایک نقطہ N پر مس کرتا ہے، یہ منحنی کا مماس نہیں ہے۔

شکل 2.76: عمومی منحنی کے مماس۔

منحنی کے مماس سے کیا مراد ہے؟

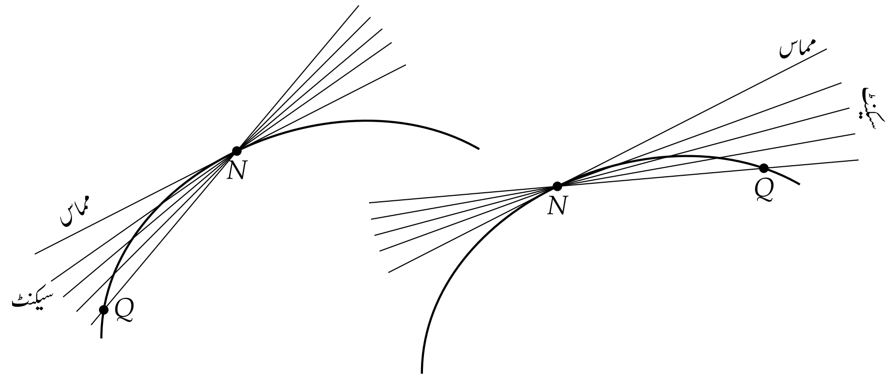
دائرے کی مماس کا مطلب سیدھا سادہ ہے۔نقطہ N پر دائرہ C کے مماس سے مراد خط L ہے جو نقطہ N سے گزرتا ہے اور N پر رداس کو عمودی ہے (شکل 2.75)۔ نقطہ N پر کسی اور منحنی C کے مماس سے کیا مطلب ہے؟ دائرے کی جیومیٹری کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مماس کا مطلب درج ذیل میں سے ایک ہو سکتا ہے۔

1. N سے C کی مرکز تک خط کو عمودی خط L ،

2. خط L منحنی C کو صرف ایک نقطہ، یعنی N پر مس کرتا ہے،

3. خط L نقطہ N سے گزرتا ہے اور منحنی C کے ایک جانب رہتا ہے۔

اگرچہ یہ تینوں جملے دائرے کی صورت میں درست ہیں البتہ یہ ہر منحنی کے لئے بلا تضاد درست نہیں ہیں۔عموماً منحنیات کا مرکز نہیں پایا جاتا ہے، اور نقطہ N پر جس خط کو ہم C کا مماس کہنا چاہتے ہیں وہ C کو کہیں اور یا N پر منقطع سکتا ہے۔اس کے علاوہ ضروری نہیں ہے کہ منحنی کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہوا سیدھا خط منحنی کا مماس ہو (شکل 2.76)۔



شکل 2.77: نقطہ N کے دائیں یا بائیں جانب منحنی C پر نقطہ Q کو N کے قریب تر کرنے سے N پر C کا مماس حاصل ہو گا۔

عمومی منحنی کا مماس متعارف کرنے کی خاطر ہمیں متحرک حکمت عملی سے کام لینا ہو گا۔ ہم نقطہ N اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے سیکنٹ پر نظر رکھتے ہوئے Q کو منحنی پر رکھتے ہوئے N کے نزدیک لاتے ہیں (شکل 2.77)۔اس حکمت عملی میں ہم درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

1. ہم سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حساب لگاتے ہیں۔

2. منحنی پر رہتے ہوئے Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد پر غور کرتے ہیں۔

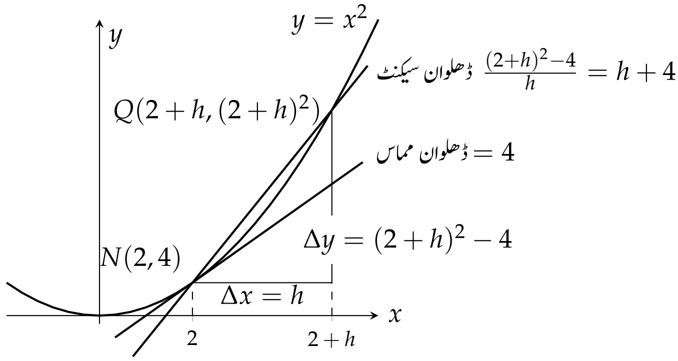
3. اگر یہ حد موجود ہو تب اس کو N پر منحنی کی ڈھلوان تسلیم کرتے ہوئے اس خط کو N پر C کا مماس تسلیم کریں جس کی ڈھلوان اس حد کے برابر ہو اور جو N سے گزرتا ہو۔

مثال 2.39: نقطہ $N(2,4)$ پر قطع مکافی $y = x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔اس نقطے پر قطع مکافی کی مماس کی مساوات حاصل کریں (شکل 2.78)۔
حل: ہم $N(2,4)$ اور $Q(2+h,(2+h)^2)$ سے سیکنٹ گزار کر اس کی ڈھلوان کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$\text{سیکنٹ کی ڈھلوان} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h)-(2)} = \frac{h^2+4h+4-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

اگر $h > 0$ ہو تب N کی دائیں جانب اور اس سے اوپر نقطہ Q پایا جائے گا۔اگر $h < 0$ ہو تب N کی بائیں جانب اور اس سے نیچے نقطہ Q پایا جائے گا۔دونوں صورتوں میں قطع مکافی پر رہتے ہوئے جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ N کے نزدیک پہنچتا ہے ویسے ویسے h کی قیمت صفر کے نزدیک پہنچتی ہے جس سے سیکنٹ کی ڈھلوان کی درج ذیل حد حاصل ہوتی ہے۔

$$\lim_{h \to 0}(h+4) = 4$$



شکل 2.78: قطع مکافی کا مماس (مثال 2.39)

ہم N پر قطع مکافی کی ڈھلوان 4 تسلیم کرتے ہیں۔نقطہ N پر قطع مکافی کا مماس وہ خط ہے جس کی ڈھلوان 4 ہے اور جو نقطہ $(2,4)$ سے گزرتا ہے۔اس مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x-2) && \text{نقطہ ڈھلوان مساوات} \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

□

تفاعل کی ترسیم کا مماس

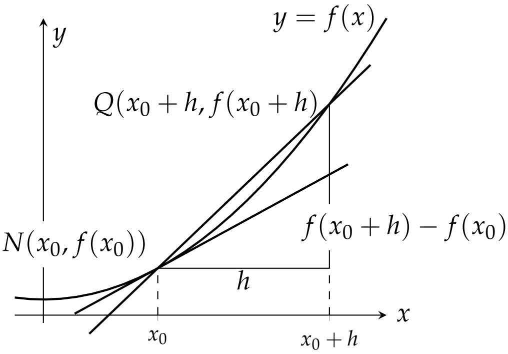
نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس اسی متحرک حکمت عملی سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم N اور $Q(x_0 + h, f(x_0+h))$ سے گزرتا ہوا سیکنٹ بناتے ہیں۔اس کے بعد $h \to 0$ کرتے ہوئے اس سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہیں (شکل 2.79)۔اگر یہ حد موجود ہو، اس کو N پر منحنی کے مماس کا ڈھلوان مانا جاتا ہے اور اتنی ڈھلوان کا سیدھا خط جو N سے گزرتا ہو کو N پر منحنی کا مماس قبول کیا جاتا ہے۔

تعریف: نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان درج ذیل عدد کو کہتے ہیں۔

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔)}$$

N پر اس ڈھلوان کے خط کو اس نقطے پر منحنی کا مماس کہتے ہیں۔

□



شکل 2.79: مماس کی ڈھلوان $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ہو گی۔

نئی تعریف پیش کرنے کے بعد اس کو جانی پہچانی صورتوں میں استعمال کرتے ہوئے متوقع جوابات حاصل کر کے یقین دہانی ہوتی ہے۔درج ذیل مثال دکھاتا ہے کہ ڈھلوان کی موجودہ تعریف ہمیں غیر انتصابی لکیروں کی صورت میں متوقع جوابات دیتی ہے۔

مثال 2.40: ڈھلوان کی تعریف کا استعمال
دکھائیں کہ نقطہ $(x_0, mx_0 + b)$ پر خط $y = mx + b$ کا مماس یہی خط ہے۔
حل: ہم $f(x) = mx + b$ لیتے ہوئے قد با قدم چلتے ہیں۔
پہلا قدم: $f(x_0)$ اور $f(x_0 = h)$ ڈھوڈتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f(x_0) &= mx_0 + b \\ f(x_0 + h) &= m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b \end{aligned}$$

دوسرا قدم: ڈھلوان تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(mx_0 + mh + b) - (mx_0 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned}$$

تیسرا قدم: نقطہ ڈھلوان مساوات استعمال کرتے ہوئے مماس کی مساوات لکھتے ہیں۔نقطہ $x_0, mx_0 + b$ پر مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= (mx_0 + b) + m(x - x_0) \\ &= mx_0 + b + mx - mx_0 \\ &= mx + b \end{aligned}$$

□

مثال 2.41: (ا) $x = a$ پر منحنی $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
(ب) کس نقطے پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ کے برابر ہے؟
(ج) a تبدیل کرنے سے نقطہ $a, \frac{1}{a}$ پر مماس کو کیا ہو گا؟
حل: (ا) یہاں $f(x) = \frac{1}{x}$ ہے اور $(a, \frac{1}{a})$ پر ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{a-(a-h)}{a(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ ہمیں اس وقت تک $\lim_{h\to 0}$ بار بار لکھنا پڑا جب تک ہم $h = 0$ پر کرنے کے قابل نہیں ہوئے۔
(ب) نقطہ $x = a$ پر $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہے جس کو $-\frac{1}{4}$ کے برابر پر کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

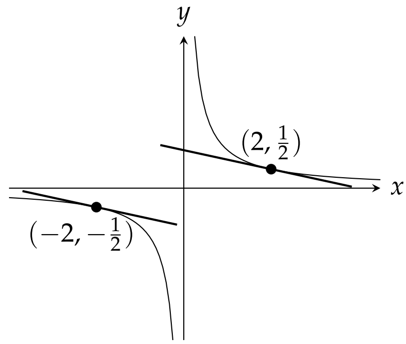
اس کے حل $a = 2$ اور $a = -2$ ہیں لہٰذا منحنی $y = \frac{1}{x}$ کا دو نقطوں یعنی $(2, \frac{1}{2})$ اور $(-2, -\frac{1}{2})$ پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے (شکل 2.80-ا)۔
(ج) ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہر صورت منفی رہے گی۔یوں $a \to 0^+$ کی صورت میں ڈھلوان $-\infty$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے اور مماس انتصابی صورت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے۔یہی کچھ $a \to 0^-$ کرتے ہوئے بھی نظر آتا ہے۔جیسے جیسے مبدا سے a دور ہٹتا ہے ویسے ویسے مماس افقی صورت اختیار کرتا ہے (شکل 2.80-ب)۔ □

شرح تبدیلی

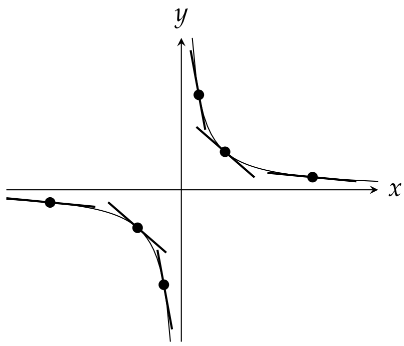
درج ذیل الجبرائی فقرے کو x_0 پر f کا تفریقی حاصل تقسیم[26] کہتے ہیں۔اگر h کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے تفریقی حاصل تقسیم کا حد پایا جاتا ہو، اس حد کو x_0 پر f کا تفرق[27] کہتے ہیں۔اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو سیکنٹ کی ڈھلوان تصور کریں تب تفرق نقطہ x_0 پر منحنی اور مماس کی ڈھلوان دیتا ہے۔اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو اوسط تبدیلی شرح تصور کریں (جیسا ہم نے حصہ 2.1 میں کیا) تب تفرق نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل کی شرح تبدیلی دیتا ہے۔ احصاء میں دو اہم ترین ریاضیاتی تصور میں سے ایک تفرق ہے جس پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

---

[26] difference quotient
[27] derivative



(ا) دو نقطوں پر مماس کی ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے۔



(ب) مبدا کے قریب ڈھلوان زیادہ ہے۔

شکل 2.80: اشکال برائے مثال 2.41

مثال 2.42: لمحاتی رفتار (حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2)
حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2 میں سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے پتھر پر غور کیا گیا۔ ہم جانتے تھے کہ پہلی t سیکنڈوں میں یہ $y = 4.9t^2$ میٹر فاصلہ طے کرتا ہے اور بتدریج کم دورانیہ میں اوسط رفتار سے ہم نے $t = 1$ پر اس کی لمحاتی رفتار معلوم کی۔ ٹھیک $t = 1$ پر لمحاتی رفتار کیا ہو گی؟
حل: ہم $f(t) = 4.9t^2$ لیتے ہیں۔یوں $t = 1$ اور $t = 1 + h$ کے دوران اوسط رفتار

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} = \frac{4.9(2th + h^2)}{h} = 4.9(2t + h)$$

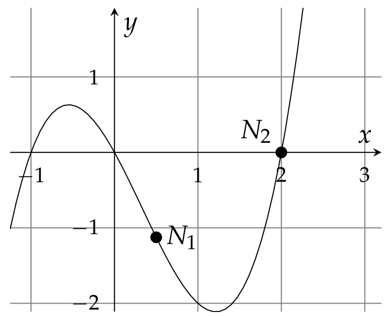
ہو گی۔ٹھیک لمحہ $t = 1$ پر پتھر کی رفتار درج ذیل ہو گی جو ہماری پہلی جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

$$\lim_{h \to 0} 4.9(2 + h) = 4.9(2 + 0) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

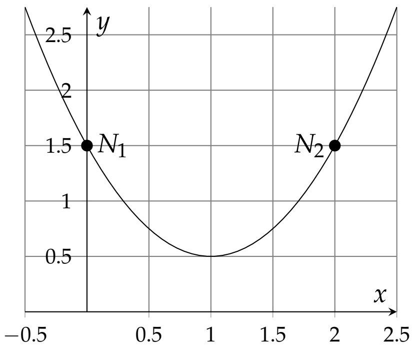
□

سوالات

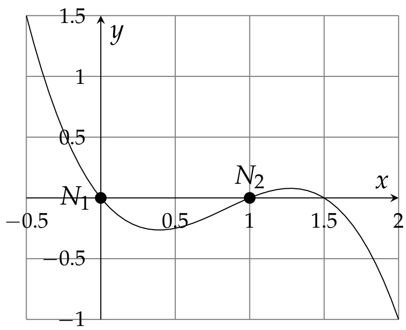
سوال 1 تا سوال 4 میں نقطہ N_1 اور N_2 پر منحنی کی ڈھلوان کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ نقطے پر فیتہ یا کوئی دوسرا سیدھا کنارہ رکھ کر سیکنٹ کی حد سے ڈھلوان حاصل کریں۔ (ترسیم سے عموماً بالکل ٹھیک جواب حاصل نہیں ہوتا ہے لہٰذا آپ کے جواب میں اور دیے گئے جواب میں فرق ہو سکتا ہے۔)



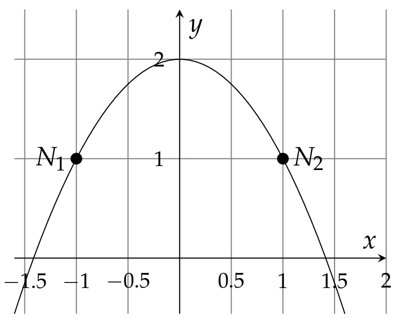
شکل 2.81: منحنی برائے سوال 1



شکل 2.82: منحنی برائے سوال 2



شکل 2.83: منحنی برائے سوال 3



شکل 2.84: منحنی برائے سوال 4

سوال 1: شکل 2.81
جواب: $N_1 : m = -2.25, \quad N_2 : m = 6$

سوال 2: شکل 2.82
جواب: $N_1 : m = -2, \quad N_2 : m = 2$

سوال 3: شکل 2.83
جواب: $N_1 : m = -1.5, \quad N_2 : m = 0.5$

سوال 4: شکل 2.84
جواب: $N_1 : m = 2, \quad N_2 : m = -2$

سوال 5 تا سوال 10 میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔تفاعل اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 5: $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$
جواب: $y = 2x + 5$ شکل 2.85

سوال 6: $y = (x-1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

سوال 7: $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$
جواب: $y = x + 1$ شکل 2.86

سوال 8: $y = \frac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

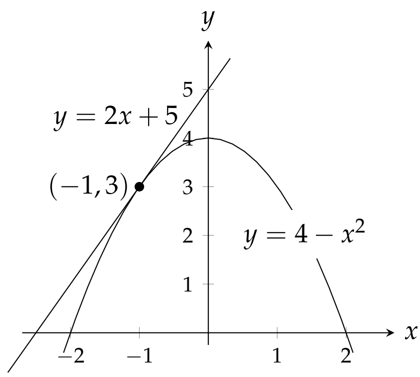
سوال 9: $y = x^3, \quad (-2, -8)$
جواب: $y = 12x + 16$ شکل 2.87

سوال 10: $y = \frac{1}{x^3}, \quad (-2, -\frac{1}{8})$

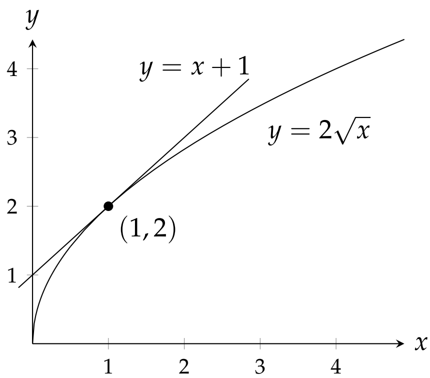
سوال 11 تا سوال 18 میں دیے نقطے پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔اس نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11: $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$
جواب: $m = 4, \quad y - 5 = 4(x - 2)$

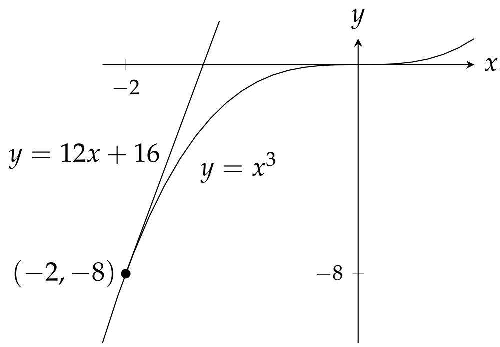
سوال 12: $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$



شکل 2.85: ترسیم برائے سوال 5



شکل 2.86: ترسیم برائے سوال 7



شکل 2.87: ترسیم برائے سوال 9

سوال 13: $g(x) = \frac{x}{x-2}, \quad (3,3)$
جواب: $m = -2, \quad y - 3 = -2(x-3)$

سوال 14: $g(x) = \frac{8}{x^2}, \quad (2,2)$

سوال 15: $h(t) = t^3, \quad (2,8)$
جواب: $m = 12, \quad y - 8 = 12(t-2)$

سوال 16: $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1,4)$

سوال 17: $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4,2)$
جواب: $m = \frac{1}{4}, \quad y - 2 = \frac{1}{4}(x-4)$

سوال 18: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad (8,3)$

سوال 19 تا سوال 22 میں دیے گئے نقطے پر ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 19: $y = 5x^2, \quad x = -1$
جواب: $m = -10$

سوال 20: $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

سوال 21: $y = \frac{1}{x-1}, \quad x = 3$
جواب: $m = -\frac{1}{4}$

سوال 22: $y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x = 0$

مخصوص ڈھلوان کے مماس

سوال 23: کس نقطے پر تفاعل $f(x) = x^2 + 4x - 1$ کا مماس افقی ہے؟
جواب: $(-2, -5)$

سوال 24: کس نقطے پر تفاعل $g(x) = x^3 - 3x$ کا مماس افقی ہے؟

سوال 25: ان تمام خطوط کی مساوات حاصل کریں جن کی ڈھلوان -1 ہے اور جو تفاعل $y = \frac{1}{x-1}$ کی مماس ہیں۔
جواب: $y = -(x+1), \quad y = -(x-3)$

سوال 26: اس سیدھے خط کی مساوات تلاش کریں جو تفاعل $y = \sqrt{x}$ کا مماس اور جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے۔

شرح تبدیلی

سوال 27: ایک جسم کو ساکن حالت سے $100\,\mathrm{m}$ بلند عمارت سے گرایا جاتا ہے۔ t سیکنڈ بعد زمین سے اس کا فاصلہ $100 - 4.9t^2$ میٹر ہو گا۔ گرنے کے 2 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟
جواب: $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 28: اڑان کے t سیکنڈ بعد ایک مزائل $3t^2$ میٹر بلندی پر ہے۔ 10 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہے؟

سوال 29: ایک دائرے کے رقبہ $A = \pi r^2$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیل $r = 3$ پر کیا ہو گی؟
جواب: 6π

سوال 30: ایک گیند کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیلی $r = 2$ پر کیا ہو گی؟

مماس کے لئے پرکھ

سوال 31: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

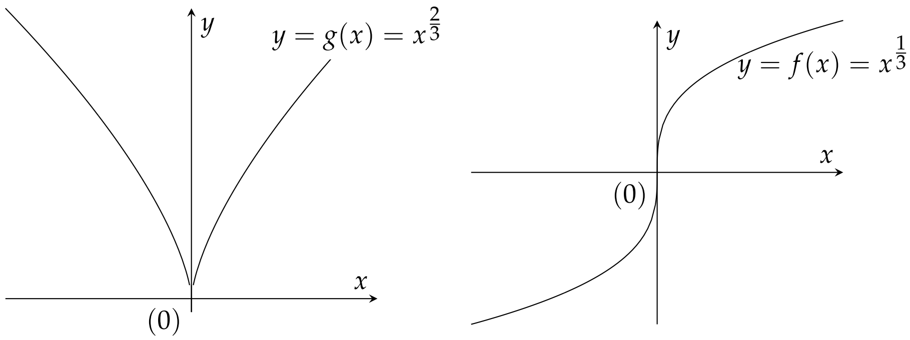
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 32: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

انتصابی مماس
اگر $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$ یا $-\infty$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس انتصابی ہے۔



(ا) مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے۔

(ب) مبدا پر انتصابی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 2.88: انتصابی مماس

نقطہ $x = 0$ پر تفاعل $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کا مماس درج ذیل ہو گا (شکل 2.88-ا)۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

آئیں اب مبدا پر تفاعل $y = g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (شکل 2.88-ب) کا مماس حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$

اب چونکہ مبدا تک دائیں سے پہنچنے سے حد ∞ جبکہ مبدا تک بائیں سے پہنچنے سے حد $-\infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مبدا پر درج بالا حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 33: کیا درج ذیل تفاعل کا مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 34: کیا درج ذیل تفاعل کا نقطہ $(0, 1)$ پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ انتصابی مماس

سوال 35 تا سوال 44 میں دیا گیا تفاعل کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کریں۔ترسیم کا مماس کہاں انتصابی نظر آتا ہے؟ حساب سے انتصابی مماس کی تصدیق کریں۔

سوال 35: $y = x^{\frac{2}{5}}$

جواب: (ا) کہیں نہیں

سوال 36: $y = x^{\frac{4}{5}}$

سوال 37: $y = x^{\frac{1}{5}}$

جواب: (ا) $x = 0$ پر

سوال 38: $y = x^{\frac{3}{5}}$

سوال 39: $y = 4x^{\frac{2}{5}} - 2x$

جواب: (ا) کہیں نہیں

سوال 40: $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$

سوال 41: $y = x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}$

جواب: (ا) $x = 1$ پر

سوال 42: $y = x^{\frac{1}{3}} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

سوال 43: $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

جواب: (ا) $x = 0$ پر

سوال 44: $y = \sqrt{|4-x|}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 45 تا سوال 48 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $x_0 - \frac{1}{2} \le x \le x_0 + 3$ پر تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں۔

ب. نقطہ x_0 پر تفریقی حاصل تقسیم q کو قدم h کی صورت میں لکھیں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے q کی حد تلاش کریں۔

د. $h = 3, 2, 1$ کے لئے سیکنٹ خطوط $y = f(x_0) + q(x - x_0)$ متعارف کرتے ہوئے (ا) میں دیے گئے وقفے پر ان سیکنٹ خطوط کو تفاعل f کے ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 45: $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

سوال 46: $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

سوال 47: $f(x) = x + \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 48: $f(x) = \cos x + 4 \sin 2x, \quad x_0 = \pi$

باب 3

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

3.1 تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کی ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

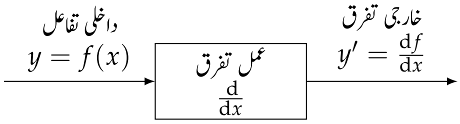
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔اس حصے میں f کی دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کی ڈھلوان پر بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا تفرق[1] درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

[1] derivative



شکل 3.1: تفرق کے عمل کی ڈبہ صورت

□

f' کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x پر f کا تفرق پایا جاتا ہے یا کہ x پر f قابل تفرق[2] ہے۔

علامتیت

تفاعل $y = f(x)$ کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

- y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل 3.1)۔
- $D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔
- $\dot{y}$ نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو "x کے لحاظ سے y کو تفرق" پڑھتے ہیں۔اسی طرح $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ کو "x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

[2] differentiable

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال 2.40 اور مثال 2.41 میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال 2.40 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx + b) = m$$

اور مثال 2.41 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{3.1}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

1. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

2. درج ذیل تفریقی حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

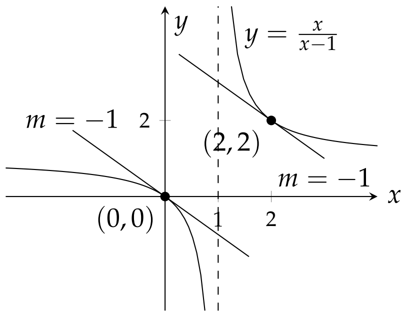
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال 3.1:

ا. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟



شکل 3.2: $x = 0$ اور $x = 2$ پر $y' = -1$ ہو گا (مثال 3.1)۔

حل: (ا) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔
پہلا قدم: یہاں $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h) = \frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔
دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب) $y = f(x)$ کی ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہو گی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

اس مساوات $(x-1)^2 = 1$ کے مترادف ہے لہٰذا $x = 2$ اور $x = 0$ درکار نتائج ہیں (شکل 3.2)۔ $\square$

مثال 3.2:

1. $x > 0$ کے لئے $y = \sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

2. $x=4$ پر تفاعل $y=\sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (ا) پہلا قدم:

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad f(x+h)=\sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(h)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ سے ضرب دیتے ہیں

تیسرا قدم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل 3.3 دیکھیں۔
(ب) $x=4$ پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4}=\frac{1}{4}$$

نقطہ $(4,2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4,2)$ پر f کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y=2+\frac{1}{4}(x-4)=\frac{1}{4}x+1$$

□

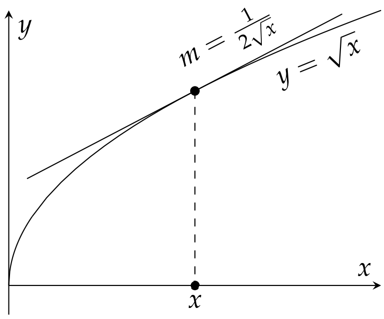
نقطہ $x=a$ پر تفاعل $y=f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

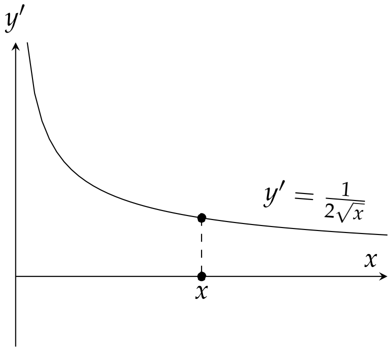
کے علاوہ

$$y'\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

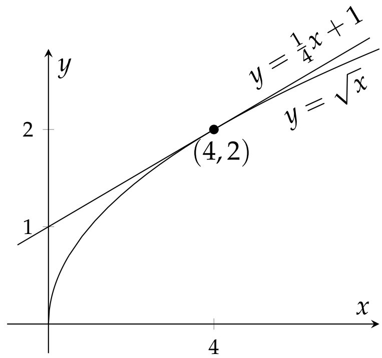
سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں $|_{x=a}$ علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو $x=a$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔



(ا) تفاعل $y=\sqrt{x}$

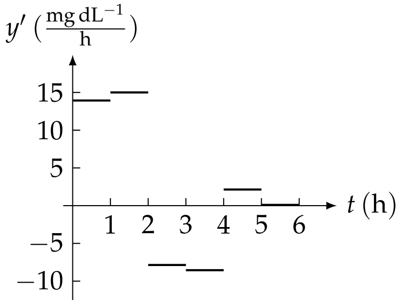


(ب) $x>0$ کے لئے $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

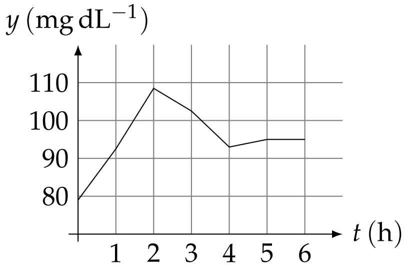


(ج) تفاعل $y=\sqrt{x}$ اور نقطہ $(4,2)$ پر اس کا مماس $y=\frac{1}{4}x+1$ ۔

شکل 3.3: اشکال برائے مثال 3.2۔نقطہ $x=0$ پر تفاعل معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔



(ب)



(ا)

شکل 3.4: (ا) قبل پرواز پرکھ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پرکھ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

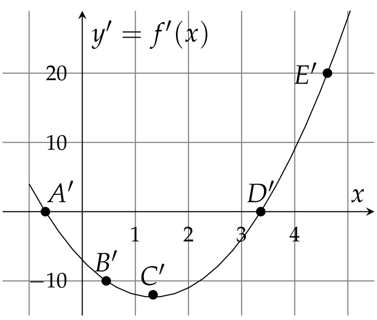
اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباو بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تا کہ ہمیں f کی صورت نظر آئے۔ مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان f' سے ہم عموماً f' کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

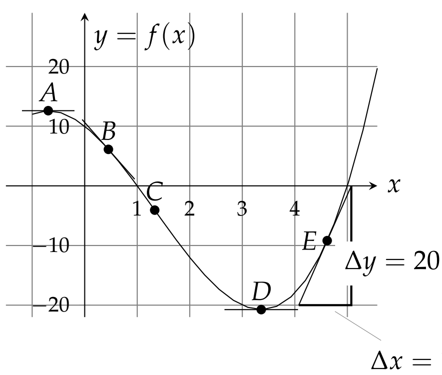
مثال 3.3: دوا
23 اپریل 1988 کو 31 کلو گرام وزنی، ڈیڈلس[3] نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریتی[4] سے جزیرہ سانٹورینی[5] تک اڑا کر 115.11 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔ یہ جہاز امریکی یونیورسٹی[6] کے طلبہ نے تیار کیا۔ اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل 3.4-ا میں دکھایا گیا ہے۔ موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جا سکتا ہے۔ تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل 3.4-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر $79\,\text{mg dL}^{-1}$ سے بڑھ کر $83\,\text{mg dL}^{-1}$ ہو جاتا ہے۔ یوں تبدیلی $\Delta y = 93 - 79 = 14\,\text{mg dL}^{-1}$ ہے جس کو $\Delta x = 1\,\text{h}$ سے تقسیم کرتے ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14\,\text{mg dL}^{-1}}{\text{h}}$$

Daedalus[3]
Crete[4]
Santorini[5]
MIT[6]



(ب) دیے گئے تفاعل کا تفرق $y' = f'(x)$



(ا) دیا گیا تفاعل $y = f(x)$

شکل 3.5: اشکال برائے مثال 3.5

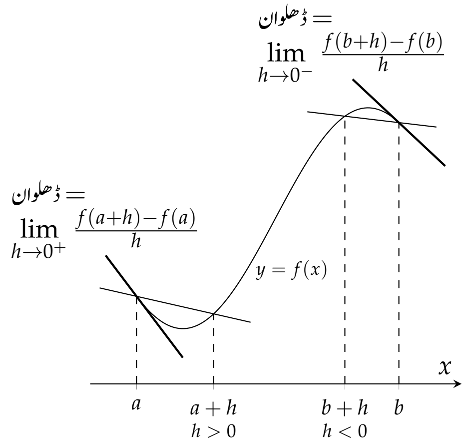
حاصل ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \cdots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ان نقطوں پر تفرقی سیڑھی تفاعل غیر معین ہے۔ □

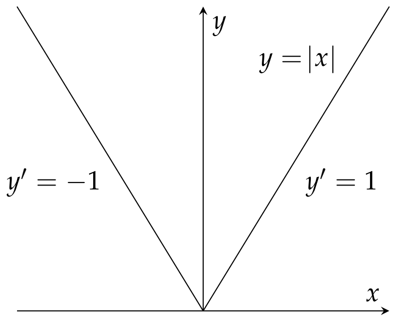
جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.4: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 3.5-ا میں دکھایا گیا ہے۔اس کے تفرق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل: شکل 3.5-ا کے ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔شکل-ا کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔ A سے D تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل 3.5-ب کے مطابقتی نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔نقطہ E پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جا سکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔آپ شکل-ا میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو -10 ہو گا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔شکل-ا میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔ □



شکل 3.6: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔



شکل 3.7: چونکہ مبدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال 3.5)۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لا متناہی) پر تفاعل $y = f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a, b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل 3.6)۔

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a \text{ پر دائیں ہاتھ تفرق}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad b \text{ پر بائیں ہاتھ تفرق}$$

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ 2.5 کی بنا کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال 3.5: تفاعل $y = |x|$ وقفہ $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مبدا کے دائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1\cdot x) = 1, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot x) = -1$$

ہے (شکل 3.7)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h>0 \text{ تب } |h|=h \text{ ہو گا}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h<0 \text{ تب } |h|=-h \text{ ہو گا}\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1\end{aligned}$$

□

کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

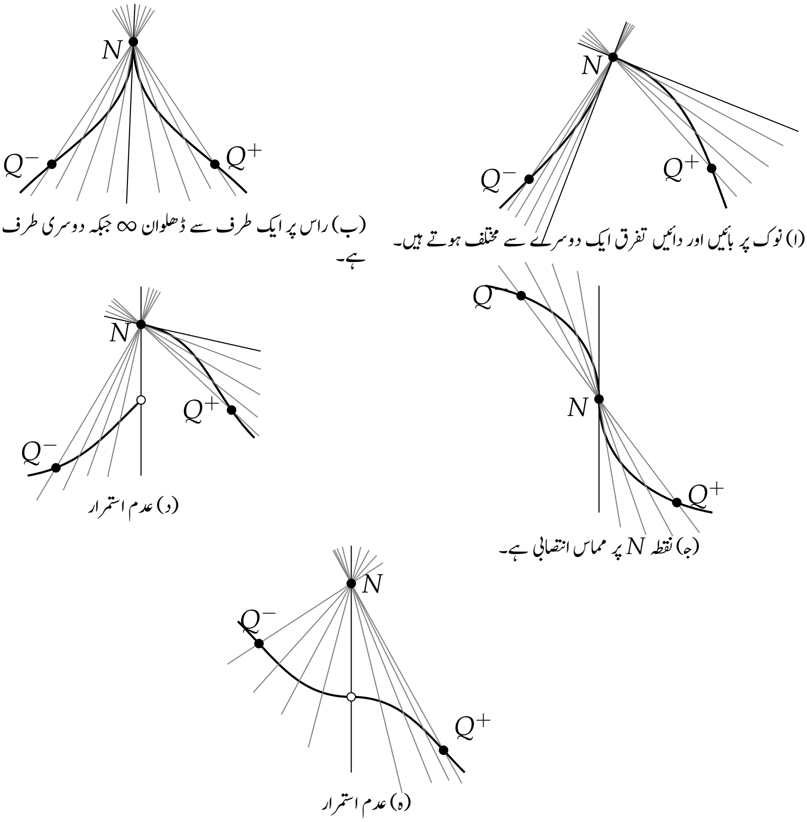
اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہو گا۔ اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

1. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل 3.8-ا)۔

2. راس، جہاں NQ کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ب)۔

3. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کی ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ج)۔

4. عدم استمرار (شکل 3.8-د اور شکل 3.8-ہ)۔



(ا) نوک پر بائیں اور دائیں تفرق ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔

(ب) راس پر ایک طرف سے ڈھلوان ∞ جبکہ دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے۔

(ج) نقطہ N پر مماس انتصابی ہے۔

(د) عدم استمرار

(ہ) عدم استمرار

شکل 3.8: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل نا قابل تفرق ہو گا۔

قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہو گا۔

مسئلہ 3.1: اگر $x = c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x = c$ پر f استمراری ہو گا۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہیں۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

اب $h \to 0$ لیں۔ مسئلہ 2.1 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x = c$ پر f کا یک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x = c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دائیں) سے استمراری ہو گا۔

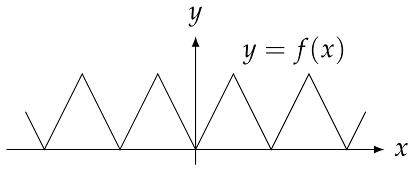
انتباہ مسئلہ 3.1 کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال 3.5 میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y = |x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل 3.9) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

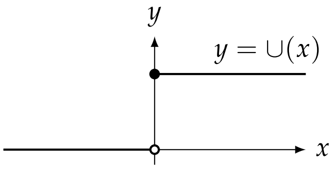
کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائشٹراس[7] نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

[7] [1815-1897]



شکل 3.9: دندان ترسیم استمراری لیکن لا متناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔



شکل 3.10: اکائی سیڑھی تفاعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے للہذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔

یہ کلیہ f کو بڑھتی تعدد کے کوسائن تفاعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔بل کو بل دینے سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے للہذا اس کا مماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفاعل جن کا کسی بھی نقطے پر مماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری[8] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفاعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفاعل کسی دوسرے کا تفرقی تفاعل ہو۔درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.2: اگر جس وقفے پر f قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ a اور b پائے جاتے ہیں تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے بیچ ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ 3.2 (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفاعل اس صورت تک کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل 3.10)۔ ایک تفاعل کب کسی دوسرے تفاعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبنٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ان کے جواب کو ہم باب میں دیکھیں گے۔

[8] chaos theory

سوالات

تفرق تفاعل اور قیمتوں کی تلاش
سوال 1 تا سوال 6 میں تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = 4 - x^2; \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$
جواب: $-2x, 6, 0, -2$

سوال 2: $F(x) = (x-1)^2 + 1; \quad F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال 3: $g(t) = \frac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
جواب: $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

سوال 4: $k(z) = \frac{1-z}{2z}; \quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال 5: $p(\theta) = \sqrt{3\theta}; \quad p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$
جواب: $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$

سوال 6: $r(s) = \sqrt{2s+1}; \quad r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال 7 تا سوال 12 میں دیا گیا تفرق حاصل کریں۔

سوال 7: $y = 2x^3; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
جواب: $6x^2$

سوال 8: $r = \frac{s^3}{2} + 1; \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$

سوال 9: $s = \frac{t}{2t+1}; \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$
جواب: $\frac{1}{(2t+1)^2}$

سوال 10: $v = t - \frac{1}{t}; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

سوال 11: $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$
جواب: $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

سوال 12: $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$

ڈھلوان اور مماسی خطوط
سوال 13 تا سوال 16 میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 13: $f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad x = -3$
جواب: $1 - \frac{9}{x^2}, 0$

سوال 14: $k(x) = \frac{1}{2+x}; \quad x = 2$

سوال 15: $s = t^3 - t^2; \quad t = -1$
جواب: $3t^2 - 2t, 5$

سوال 16: $y = (x+1)^3; \quad x = -2$

سوال 17 تا سوال 18 میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 17: $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}; \quad (x,y) = (6,4)$
جواب: $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y - 4 = -\frac{1}{2}(x-6)$

سوال 18: $g(z) = 1 + \sqrt{4-z}; \quad (z,w) = (3,2)$

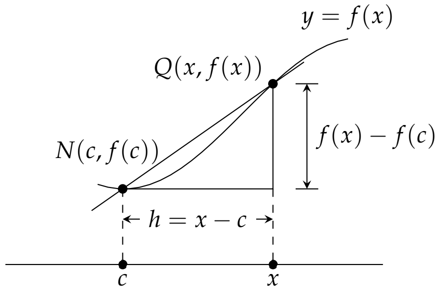
سوال 19 تا سوال 22 میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19: $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1}; \quad s = 1 - 3t^2$
جواب: 6

سوال 20: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sqrt{3}}; \quad y = 1 - \frac{1}{x}$

سوال 21: $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}; \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 22: $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=4}; \quad w = z + \sqrt{z}$



شکل 3.11: حصول تفرق کا متبادل کلیہ

تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ
تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل 3.11 میں سیکنٹ کی ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \tag{3.2}$$

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال 23 تا سوال 26 میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

سوال 23: $f(x)=\frac{1}{x+2},\quad c=-1$
جواب: -1

سوال 24: $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2},\quad c=2$

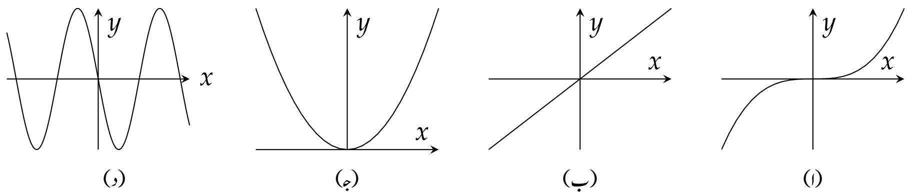
سوال 25: $g(t)=\frac{t}{t-1},\quad c=3$
جواب: $-\frac{1}{4}$

سوال 26: $k(s)=1+\sqrt{s},\quad c=9$

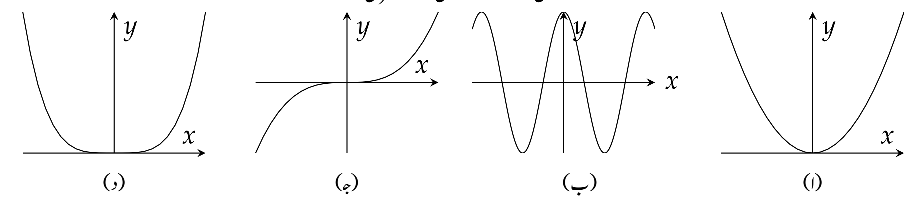
ترسیمات سوال 27 تا سوال 30 میں دیے گئے تفاعل کا تفرق شکل 3.12 میں تلاش کریں۔

سوال 27: شکل 3.13-ا
جواب: شکل 3.12-ب

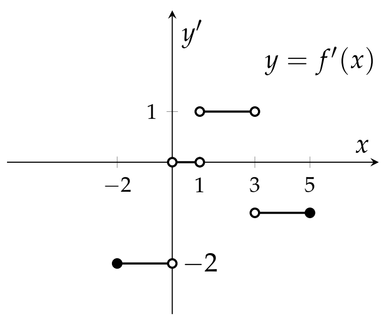
سوال 28: شکل 3.13-ب
جواب: شکل 3.12-د



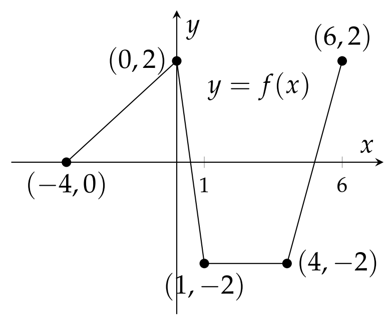
شکل 3.12: تفاعل کے تفرق



شکل 3.13: اصل تفاعل



شکل 3.15: تفاعل کے تفرق کا ترسیم برائے سوال 32



شکل 3.14: ترسیم برائے سوال 31

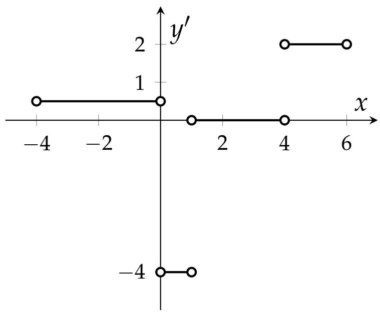
سوال 29: شکل 3.13-ج
جواب: شکل 3.12-ج

سوال 30: شکل 3.13-د
جواب: شکل 3.12-ا

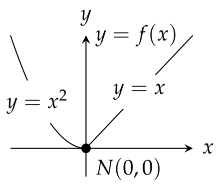
سوال 31: قطعات کو جوڑ کر شکل 3.14 حاصل کی گئی ہے۔(ا) وقفہ $[-4,6]$ پر کہاں f' غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) انتصابی محور کو y' کہتے ہوئے f' کو ترسیم کریں۔ ترسیم سیڑھی نما ہو گا۔

جواب: (ا) $x = 0, 1, 4$ ؛ (ب) شکل 3.16

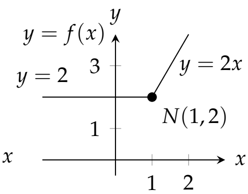
سوال 32: تفاعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی
(ا) درج ذیل طریقے سے تفاعل f ترسیم کو وقفہ $[-2,5]$ پر کریں۔



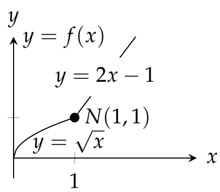
شکل 3.16: جواب برائے سوال 32



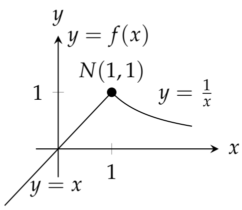
شکل 3.17



شکل 3.18



شکل 3.19



شکل 3.20

1. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔

2. ترسیم کو نقطہ $(-2,3)$ سے شروع کریں۔

3. تفاعل کا تفرق شکل 3.15 میں دکھایا گیا ہے۔

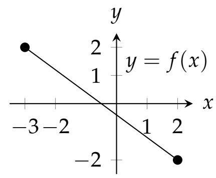
(ب) نقطہ $(-2,0)$ سے شروع کرتے ہوئے جزو (ا) کا ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 33 تا سوال 36 میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تفاعل نا قابل تفرق ہے۔

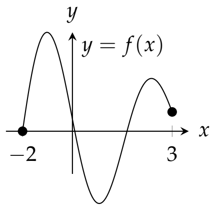
سوال 33: تفاعل کو شکل 3.17 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=1$ جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0$ ہے لہٰذا $x=0$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔

سوال 34: تفاعل کو شکل 3.18 میں دکھایا گیا ہے۔

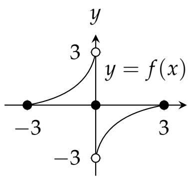
سوال 35: تفاعل کو شکل 3.19 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=2$ جبکہ $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\frac{1}{2}$ ہے لہٰذا $x=1$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔



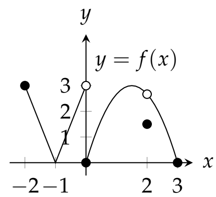
شکل 3.21



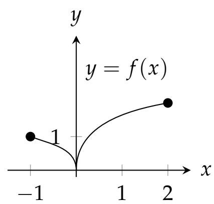
شکل 3.22



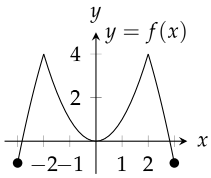
شکل 3.23



شکل 3.24



شکل 3.25



شکل 3.26

سوال 36: تفاعل کو شکل 3.20 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 37 تا سوال 42 میں بند دائرہ کار D پر تفاعل کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کن نقطوں پر تفاعل (ا) قابل تفرق، (ب) استمراری لیکن نا قابل تفرق، (ج) غیر استمراری اور نا قابل تفرق ہے؟

سوال 37: ترسیم شکل 3.21 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 2$ ہے۔

جواب: (ا) $-3 \le x \le 2$ (ب) کوئی نہیں (ج) کوئی نہیں۔

سوال 38: ترسیم شکل 3.22 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \le x \le 3$ ہے۔

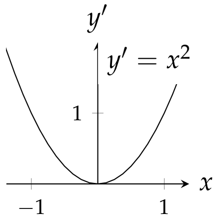
سوال 39: ترسیم شکل 3.23 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 3$ ہے۔
جواب: (ا) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ (ب) کوئی نہیں (ج) $x = 0$

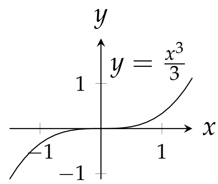
سوال 40: ترسیم شکل 3.24 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 41: ترسیم شکل 3.25 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -1 \le x \le 2$ ہے۔
جواب: (ا) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ (ب) $x = 0$ (ج) کوئی نہیں۔

سوال 42: ترسیم شکل 3.26 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 43 تا سوال 46 میں درج ذیل کریں۔





شکل 3.27: ترسیم برائے شکل 45

ا. تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق $y' = f'(x)$ تلاش کریں۔

ب. $y = f(x)$ اور $y' = f'(x)$ کو علیحدہ محدد پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج. x کی کن قیمتوں کے لئے y' کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د. x بڑھنے سے x کی قیمتوں کے کن وقفوں پر $y = f(x)$ بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (اگلے باب میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال 43: $y = -x^2$
جواب: (ا) $y' = -2x$ (ج) $x < 0, x = 0, x > 0$ (د) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

سوال 44: $y = -\frac{1}{x}$

سوال 45: $y = \frac{x^3}{3}$
جواب: (ا) $y' = x^2$، (ب) شکل 3.27، (ج) $x \neq 0$ ، 0 ، $x = 0$ ، کوئی نہیں، (د) $-\infty < x < \infty$ ، کوئی نہیں۔

سوال 46: $y = \frac{x^4}{4}$

سوال 47: کیا $y = x^3$ کا کبھی منفی ڈھلوان ہو گا؟ اگر ہے تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $y' = 3x^2$ کبھی بھی منفی نہیں ہو گا۔

سوال 48: کیا $y = 2\sqrt{x}$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: کیا قطع مکافی $y = 2x^2 - 13x + 5$ کے مماس کا ڈھلوان -1 ہو سکتا ہے۔اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں ہے تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں، $y + 16 = -(x - 3)$ نقطہ $(3, -16)$ پر مماس ہے۔

سوال 50: کیا منحنی $y = \sqrt{x}$ کا کوئی مماس x محور کو $x = -1$ پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال 51: کیا $(-\infty, \infty)$ پر قابل تفرق تفاعل کا تفرق $y = \lfloor x \rfloor$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: نہیں، چونکہ تفاعل $y = \lfloor x \rfloor$ متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا ہے۔

سوال 52: $f(x) = |x|$ کے تفرق کو ترسیم کرنے کے بعد $y = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ ترسیم کریں۔ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال 53: یہ جانتے ہوئے کہ $x = x_0$ پر تفاعل $f(x)$ قابل تفرق ہے، آپ $x = x_0$ پر تفاعل $-f$ کی قابل تفرق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں؛ $(-f)'(x) = -(f'(x))$

سوال 54: کیا $t = 7$ پر $g(t)$ کا قابل تفرق ہونے سے آپ $t = 7$ پر $3g$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: فرض کریں کہ t کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $g(t)$ اور $h(t)$ معین ہیں اور $g(0) = h(0) = 0$ ہے۔
کیا $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)}$ موجود ہو گا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $g(t) = mt$ اور $h(t) = t$ کے لئے $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)} = m$ ہو گا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

سوال 56: (ا) فرض کریں کہ $-1 \le x \le 1$ کے لئے تفاعل $f(x)$ شرط $\left|f(x)\right| \le x^2$ کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ $x = 0$ پر f قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ $x = 0$ پر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 57: $0 \le x \le 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ کو ترسیم کریں۔اس کے اوپر پہلے $h = 1, 0.5, 0.1$ لیتے ہوئے $y = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -1, -0.5, -0.1$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 58: $-2 \le x \le 2$ اور $0 \le y \le 3$ لیتے ہوئے $y = 3x^2$ ترسیم کریں۔اسی کے اوپر پہلے $h = 2, 1, 0.2$ لیتے ہوئے $y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -2, -1, -0.2$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کیا ہو رہا ہے۔

سوال 59: وائنسٹراس کا نا قابل تفرق تفاعل وائنسٹراس تفاعل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ()^n \cos(9^n \pi x)$ کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں کہ یہ کتنی بلدار ہے۔

سوال 60 تا سوال 65 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت قدم h لیتے ہوئے عمومی نقطہ x پر حاصل تقسیم q متعارف کریں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د. $x = x_0$ پر کرتے ہوئے تفاعل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ہ. x_0 سے x کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پر کریں۔ کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (ا) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 60: $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

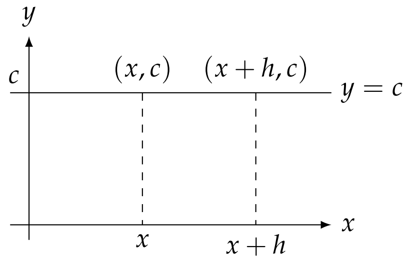
سوال 61: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1$

سوال 62: $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

سوال 63: $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1$

سوال 64: $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 65: $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$



شکل 3.28: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

3.2 قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ 3.1: مستقل کا تفرق
اگر c مستقل ہو تب $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$ ہو گا۔

مثال 3.6: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\frac{1}{2}\Big) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3}) = 0$ □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے $f(x) = c$ کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل 3.28)۔ ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں x^n کا تفرق دیتا ہے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔

قاعدہ 3.2: قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح
اگر n مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت n سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو n سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 3.7:

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

□

ثبوت قاعدہ: اگر $f(x) = x^n$ ہو تب $f(x+h) = (x+h)^n$ ہو گا۔چونکہ n مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1+a^{n-2}b} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

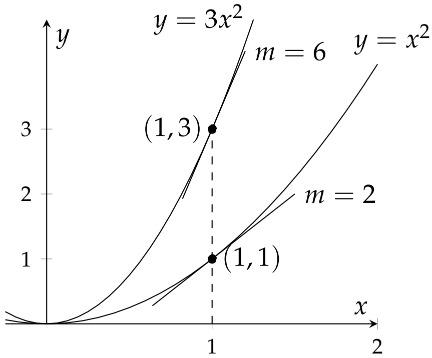
استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ہم $a = x+h$ اور $x = b$ لیتے ہیں۔یوں $h = a - b$ ہو گا۔اس طرح

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\ &= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}\\ &= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جو n ارکان پر مشتمل ہے اور $0 \to h$ کرتے ہوئے ہر رکن کا حد x^{n-1} ہے۔یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

□



شکل 3.29: ترسیم برائے مثال 3.8

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

قاعدہ 3.3: قاعدہ مستقل مضرب
اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu)=c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

بالخصوص مثبت عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n)=cnx^{n-1}$$

مثال 3.8: تفرقی کلیہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2)=3\cdot 2x=6x$ کہتی ہے کہ y محور کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم $y=x^2$ کی پیمائش تبدیل کرنے سے ہر نقطے کی ڈھلوان 3 سے ضرب ہو گی (شکل 3.29)۔ □

مثال 3.9: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ 3.3 میں $c=-1$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1\cdot u)=-1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u)=-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} && f(x) = cu(x) \text{ کے تفرق کی تعریف} \\
&= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{تحدیدی خاصیت} \\
&= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && u \text{ قابل تفرق ہے}
\end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفرق تفاعل کے مجموعے کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.4: قاعدہ مجموعہ
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ $u+v$ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہو گا جہاں u اور v دونوں قابل تفرق ہوں۔ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی تفریقی قاعدہ حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفرق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفرق ان کے تفرق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u+(-1)v] = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعل کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعہ میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔اگر $u_1, u_2, \cdots, u_n$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب $u_1+u_2+\cdots+u_n$ بھی قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_n) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.10:

(ا) $y = x^4 + 12x$
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(12x)\\ &= 4x^3 + 12\end{aligned}$$

(ب) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1)\\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0\\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$

□

آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.4) ہم تفرق کی تعریف کو $f(x) = u(x) + v(x)$ پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\\ &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لئے ثبوت
ہم درج ذیل فقرے کو ریاضی ماخوذ[9] کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} \tag{3.3}$$

جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ $n = 2$ کے لئے درست ہے۔یہ ریاضی ماخوذ کا پہلا قدم ہے۔

[9] mathematical induction

دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح $n = k$ (جہاں $k \geq n_0 = 2$ ہے) کے لئے درست ہے تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}$$

ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}}) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح $n \geq 2$ کے لئے قاعدہ 3.4 کی درستگی کی تصدیق کرتا ہے۔

مثال 3.11: کیا منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تب کہاں پایا جاتا ہے؟
حل: افقی مماس وہاں ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ صفر کے برابر ہو۔ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

اور اس کے بعد مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ کو x کے لئے حل کرتے ہیں۔

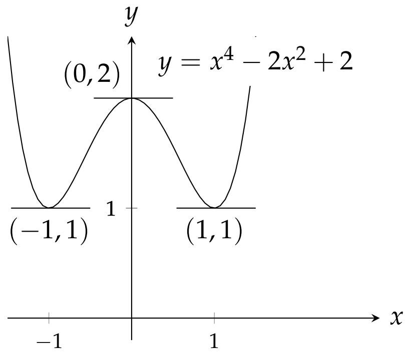
$$\begin{aligned}
4x^3 - 4x &= 0 \\
4x(x^2 - 1) &= 0 \\
x &= 0, 1, -1
\end{aligned}$$

منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس $x = 0, 1, -1$ پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابقتی نقطے $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(0, 2)$ ہیں (شکل 3.30)۔ □

حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔مثال کے طور پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x \quad \text{ہے جبکہ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{ہو گا۔}$$



شکل 3.30: افقی مماس (مثال 3.11)

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.5: قاعدہ حاصل ضرب
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب uv بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

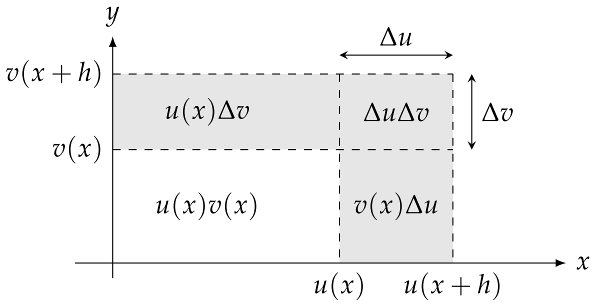
حاصل ضرب uv کا تفرق u ضرب v کا تفرق جمع v ضرب u کا تفرق ہو گا۔اس کو $(uv)' = uv' + vu'$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفرق کی تعریف کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہو گا جس کو u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں $u(x+h)v(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[u(x+h)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}
\end{aligned}$$



شکل 3.31: قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی۔

چونکہ x پر u قابل تفرق ہے لہٰذا $h \to 0$ کرنے سے $u(x+h) \to u(x)$ ہو گا۔ دو کسر کی تحدیدی قیمتیں x پر $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ہیں۔ مختصراً درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ مثبت ہوں اور x بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب $h > 0$ کی صورت میں شکل 3.31 حاصل ہو گا۔ $u(x)$ اور $v(x)$ بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u \Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو h سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$

حاصل ہو گا۔ اب $h \to 0^+$ کرنے سے $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.12: تفاعل $y=(x^2+1)(x^3+3)$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: قاعدہ حاصل ضرب میں $u=x^2+1$ اور $v=x^3+3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2+1)(x^3+3)] &= (x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)\\ &= 3x^4+3x^2+2x^4+6x\\ &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

□

اس مثال میں قوسین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5+x^3+3x^2+3\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

ملتا ہے جو مثال 3.12 میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال 3.13: فرض کریں کہ $y=uv$ تفاعل u اور v کا حاصل ضرب ہے۔درج ذیل استعمال کرتے ہوئے $y'(2)$ تلاش کریں۔

$$u(2)=3,\quad u'(2)=-4,\quad v(2)=1,\quad v'(2)=2$$

حل: قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y'=(uv)'=uv'+vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y'(2) &= u(2)v'(2)+v(2)u'(2)\\ &= (3)(2)+(1)(-4)=6-4=2\end{aligned}$$

□

حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں تھا اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں ہو گا۔درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

قاعدہ 3.6: قاعدہ حاصل تقسیم
اگر $u(x)$ اور $v()$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم $\frac{u}{v}$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

اس آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں $v(x)u(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)&=\lim_{h\to0}\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\&=\lim_{h\to0}\frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسب نما میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.14: تفاعل $y=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: ہم $u=t^2-1$ اور $v=t^2+1$ لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\frac{(t^2+1)\cdot2t-(t^2-1)\cdot2t}{(t^2+1)^2}\qquad\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2t,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2t\right)\\&=\frac{2t^3+2t-2t^3+2t}{(t^2+1)^2}\\&=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

□

منفی عدد صحیح کے لئے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ 3.7: منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ
اگر n منفی عدد صحیح اور $x \neq 0$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔اگر n منفی عدد صحیح ہو تب $m = -n$ مثبت عدد صحیح ہو گا۔یوں $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) - 1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہٰذا } \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} && \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے}
\end{aligned}$$

□

مثال 3.15:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{x^3}\right) &= 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}
\end{aligned}$$

□

مثال 3.16: منحنی $y = x + \frac{2}{x}$ کا نقطہ $(1,3)$ پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔
حل: منحنی کی ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 + 2\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

ہے جس کی قیمت نقطہ $x = 1$ پر

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=1} = \Big[1 - \frac{2}{x^2}\Big]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

ہو گی۔نقطہ $(1,3)$ پر ڈھلوان $m = -1$ کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y - 3 &= (-1)(x-1) && \text{نقطہ-ڈھلوان مساوات} \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$

□

قاعدہ کا انتخاب
تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 3.17: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کی بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر x^4 سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

□

دو رتبی اور بلند رتبی تفرق

تفرق $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ اول تفرق[10] یا یک رتبی تفرق یا مختصراً پہلا تفرق[11] کہتے ہیں۔یہ تفرق ازخود x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ دوم تفرق[12] یا دو رتبی تفرق یا مختصراً دوسرا تفرق[13] کہتے ہیں۔

دو رتبی تفرق کی علامت $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ میں شمار کنندہ میں d جبکہ نسب نما میں x کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔درج بالا مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ سے مراد تفرقی علامتوں کا ضرب نہیں ہے بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر y'' قابل تفرق ہو تب اس کے تفرق $y'''=\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ سوم تفرق یا سہ رتبی تفرق یا تین رتبی تفرق یا مختصراً تیسرا تفرق کہتے ہیں۔اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{(n-1)}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ n تفرق یا n رتبی تفرق یا n واں تفرق کہیں گے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔آپ نے دیکھا کہ بلند رتبی تفرق کو قوسین میں بند y کا طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال 3.18: تفاعل $y=x^3-3x^2+2$ کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
y'&=3x^2-6x\\
y''&=6x-6\\
y'''&=6\\
y^{(4)}&=0
\end{aligned}$$

چونکہ $y^{(4)}=0$ ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہٰذا اس کا تفرق در حقیقت صفر (یعنی مستقل) کا تفرق ہو گا جو صفر ہی ہے۔یوں اس تفاعل کے ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔اس کا چار رتبی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

---

[10] first order derivative
[11] first derivative
[12] second order derivative
[13] second derivative

سوالات

تفرق کا حساب
سوال 1 تا سوال 12 میں تفاعل کا رتبہ اول اور رتبہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال 1: $y = -x^2 + 3$
جواب: $y' = -2x, \quad y'' = -2$

سوال 2: $y = x^2 + x + 8$

سوال 3: $s = 5t^3 - 3t^5$
جواب: $s' = 15t^2 - 15t^4, \quad s'' = 30t - 60t^3$

سوال 4: $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال 5: $y = \frac{4x^3}{3} - x$
جواب: $y' = 4x^2 - 1, \quad y'' = 8x$

سوال 6: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال 7: $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$
جواب: $w' = -6z^{-3} + \frac{1}{z^2}, \quad w'' = 18z^{-4} - \frac{2}{z^3}$

سوال 8: $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال 9: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
جواب: $y' = 12x - 10 + 10x^{-3}, \quad y'' = 12 - 30x^{-4}$

سوال 10: $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال 11: $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
جواب: $r' = -\frac{2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \quad r'' = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

سوال 12: $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال 13 تا سوال 16 میں (ا) y' کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفرق حاصل کریں۔

سوال 13: $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
جواب: $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

سوال 14: $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

سوال 15: $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$
جواب: $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \frac{1}{x^2}$

سوال 16: $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

سوال 17 تا سوال 28 میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 17: $y = \frac{2x+5}{3x-2}$
جواب: $y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}$

سوال 18: $z = \frac{2x+1}{x^2-1}$

سوال 19: $g(x) = \frac{x^2-4}{x+0.5}$
جواب: $g'(x) = \frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

سوال 20: $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

سوال 21: $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

سوال 22: $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

سوال 23: $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$
جواب: $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

سوال 24: $u = \frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

سوال 25: $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$
جواب: $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

سوال 26: $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

سوال 27: $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$
جواب: $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

سوال 28: $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

سوال 29: تفاعل $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔
جواب: $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12$ جبکہ تمام $n \geq 5$ کے لئے $y^{(n)} = 0$

سوال 30: تفاعل $y = \frac{x^5}{120}$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔

سوال 31 تا سوال 38 میں یک رتبی اور دو رتبی تفرق تلاش کریں۔

سوال 31: $y = \frac{x^3+7}{x}$
جواب: $y' = 2x - 7x^{-2}, \quad y'' = 2 + 14x^{-3}$

سوال 32: $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

سوال 33: $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\theta^{-4}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} = -12\theta^{-5}$

سوال 34: $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

سوال 35: $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$
جواب: $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -z^{-2} - 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = 2z^{-3}$

سوال 36: $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

سوال 37: $p=\left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$

جواب: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=\frac{1}{6}q+\frac{1}{6}q^{-3}+q^{-5},\quad \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}q^2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}q^{-4}-5q^{-6}$

سوال 38: $p=\frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال 39: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے تفاعل ہیں جو $x=0$ پر قابل تفرق ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(0)=5,\quad u'(0)=-3,\quad v(0)=-1,\quad v'(0)=2$$

$x=0$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

جواب:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)=13,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)=-7,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{7}{25},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)=20$$

سوال 40: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(1)=2,\quad u'(1)=0,\quad v(1)=5,\quad v'(1)=-1$$

$x=1$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

ڈھلوان اور مماس

سوال 41: (ا) نقطہ $(2,1)$ پر منحنی $y=x^3-4x+1$ کے مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔(ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کتنی اور کس نقطے پر ہے؟ (ج) جس نقطے پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان 8 ہے وہاں مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 42: (ا) منحنی $y=x^3-3x-2$ کے افقی مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔ مماسی نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساواتیں بھی تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کیا ہے اور کس نقطے پر ہے؟ اس نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 43: مبدا اور $(1,2)$ پر منحنی $y=\frac{4x}{x^2+1}$ کے مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 44: نقطہ $(2,1)$ پر $y=\frac{8}{x^2+4}$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 45: منحنی $y=ax^2+bx+c$ نقطہ $(1,2)$ سے گزرتی ہے اور مبدا پر خط $y=x$ کا مماس ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 46: نقطہ $(1,0)$ پر $y=x^2+ax+b$ اور $y=cx-x^2$ کا مشترک مماس پایا جاتا ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 47: (ا) نقطہ $(-1,0)$ پر منحنی $y=x^3-x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) کمپیوٹر پر منحنی اور مماس کو ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کا اندازہ لگائیں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

سوال 48: (ا) مبدا پر منحنی $y=x^3-6x^2+5x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی اور مماس کو کمپیوٹر پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

طبعی استعمال

سوال 49: دباو اور حجم بند ڈبہ میں مستقل درجہ حرارت T پر گیس کا حجم V اور دباو P درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں جہاں a ، b اور c مستقل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$ تلاش کریں۔

$$P=\frac{nRT}{V-nb}-\frac{an^2}{V^2}$$

سوال 50: دوا کو جسم کا رد عمل دوا کو جسم کے رد عمل کو عموماً درج ذیل کلیہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں C مثبت مستقل ہے جبکہ M خون میں جذب دوا کی مقدار ہے۔

$$R=M^2\left(\frac{C}{2}-\frac{M}{3}\right)$$

اگر رد عمل فشار خون کی تبدیلی ہو تب R کو ملی میٹر پارہ میں ناپا جاتا ہے۔ اگر رد عمل درجہ حرارت میں تبدیلی ہو تب R کو کیلون میں ناپا جاتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ تلاش کریں۔ یہ تفرق جو M کا تفاعل ہے، دوا کی مقدار میں تبدیلی کے لئے جسم کی حساسیت کہلاتا ہے۔ سوال 53 میں ہم دوا کی وہ مقدار معلوم کریں گے جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 51: فرض کریں کہ قاعدہ حاصل ضرب میں v کی قیمت مستقل c ہو۔ کیا اس سے قاعدہ مضرب مستقل حاصل کیا جا سکتا ہے؟

سوال 52: قاعدہ بالعکس تناسب
(ا) قاعدہ بالعکس متناسب[14] کہتا ہے کہ جس نقطے پر تفاعل $v(x)$ قابل تفرق ہو اس نقطے پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

ہو گا۔ دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس تناسب در حقیقت قاعدہ حاصل تقسیم کی ایک مخصوص صورت ہے۔ (ب) دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس تناسب اور قاعدہ حاصل ضرب کو ملا کر قاعدہ حاصل تقسیم اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال 53: مثبت عدد صحیح کا دوسرا ثبوت الجبرائی کلیہ

$$cx^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \cdots + xc^{n-2} + c^{n-1})$$

اور صفحہ 3.2 پر دیا گیا کلیہ تفرق (مساوات 3.2)

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$ حاصل کریں۔

سوال 54: قاعدہ حاصل ضرب کی عمومی صورت قاعدہ حاصل ضرب متغیر x کے قابل تفرق تفاعل u اور v کے لئے درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

(ا) متغیر x کے قابل تفرق تین تفاعل کے حاصل ضرب uvw کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ب) متغیر x کے قابل تفرق چار تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2u_3u_4$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ج) متغیر x کے قابل تفرق متناہی تعداد تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2\cdots u_n$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟

سوال 55: $x^{3/2}$ کو $x \cdot x^{1/2}$ لکھ کر قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{3/2})$ حاصل کریں۔ جواب کو ناطق عدد ضرب x کا ناطق طاقت لکھیں۔ جزو (ب) اور (ج) کو بھی اسی طرح حل کریں۔ (ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{5/2})$ تلاش کریں۔ (ج) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{7/2})$ تلاش کریں۔ (د) درج بالا تین جزو میں آپ کیا نقش دیکھتے ہیں۔

[14] reciprocal rule

3.3 تبدیلی کی شرح

اس حصے میں ہم تبدیلی کی شرح پر تفرق کی مدد سے غور کریں گے۔ وقت کے لحاظ سے فاصلہ میں تبدیلی کی مثالیں سمتی رفتار اور اسراع ہیں۔ہم وقت کے علاوہ دیگر متغیر کے لحاظ سے بھی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔مثال کے طور پر حکیم جاننا چاہے گا کہ دوا میں معمولی تبدیلی سے مریض کی حالت پر کیا اثر ہو گا۔ماہر اقتصادیات جاننا چاہے گا کہ سرمایہ کاری میں معمولی تبدیلی سے اقتصادی ترقی پر کتنا اثر پایا جائے گا۔ان سوالات کو موزوں متغیر کے لحاظ سے تفرق کی صورت میں ظاہر کیا جائے گا۔

اوسط اور لمحاتی شرح تبدیلی

ہم کسی دورانیہ پر اوسط شرح تبدیلی سے شروع کرتے ہیں۔اس دورانیے کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے حاصل شرح تبدیلی کی حد کو تفاعل کا تفرق کہتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ x_0 تا x_0+h پر تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی سے مراد

$$\text{اوسط شرح تبدیلی} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ہے۔ x کے لحاظ سے x_0 پر f کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

کو کہتے ہیں بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

روایتی طور پر اگر x وقت کو ظاہر نہ کرتا ہو تب بھی لفظ لمحاتی استعمال کیا جاتا ہے۔عموماً کو مختصراً کہتے ہیں۔

مثال 3.19: دائرے کے رقبہ S اور رداس r کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$S = \pi r^2$$

رقبے کی شرح تبدیلی $r = 0.1\,\mathrm{m}$ پر کیا ہو گی؟

حل: رداس کے لحاظ سے رقبے کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$$

ہے۔یوں $r = 0.1\,\mathrm{m}$ کی صورت میں r تبدیل کرنے سے رقبہ تبدیل ہونے کی شرح $0.2\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{m}$ ہو گی۔یوں اس رداس پر رداس میں Δr میٹر چھوٹی تبدیلی سے رقبے میں $0.2\pi\Delta r$ مربع میٹر تبدیلی رونما ہو گی۔ □

لکیر پر حرکت۔ہٹاو، سمتی رفتار، رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ محوری خط (جس کو ہم s محور کہتے ہیں) پر ایک جسم یوں حرکت کرتا ہے کہ اس محور پر مقام s اور وقت t کا تعلق

$$s = f(t)$$

ہے۔دورانیہ t تا $t + \Delta t$ میں جسم کا ہٹاو[15]

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ہو گا (شکل 3.32) اور اس کی اوسط سمتی رفتار[16]

$$v_{\text{اوسط}} = \frac{\text{ہٹاو}}{\text{دورانیہ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار جاننے کی خاطر ہم $\Delta t \to 0$ کرتے ہوئے دورانیہ t تا $t + \Delta t$ پر اوسط سمتی رفتار کا حد تلاش کرتے ہیں۔یہ حد t کے لحاظ سے f کا تفرق ہے۔

تعریف: جسم کی (لمحاتی) سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے تعین گر تفاعل $s = f(t)$ کا تفرق ہو گا۔لمحہ t پر سمتی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

□

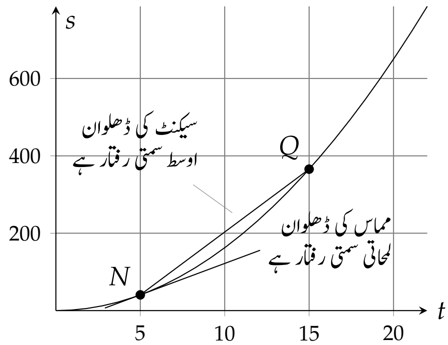
مثال 3.20: ایک گاڑھی کی فاصلہ (میٹر) بالمقابل وقت (سیکنڈ) ترسیم کو شکل 3.33 میں دکھایا گیا ہے۔سیکنٹ NQ کی ڈھلوان دورانیہ $t = 5\,\mathrm{s}$ تا $15\,\mathrm{s}$ کے لئے اوسط سمتی رفتار ہے جو $32.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $117\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کے برابر ہے۔لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر مماس کی ڈھلوان اس لمحہ پر لمحاتی سمتی رفتار $16.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $58.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دیتی ہے۔ □

مقدار معلوم روپ

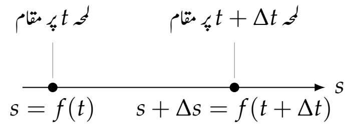
اگر x اور y دونوں متغیر t کے تفاعل ہوں تب $(x(t), y(t))$ کی ترسیم مقدار معلوم ترسیم[17] کہلاتی ہے۔منحنی

---

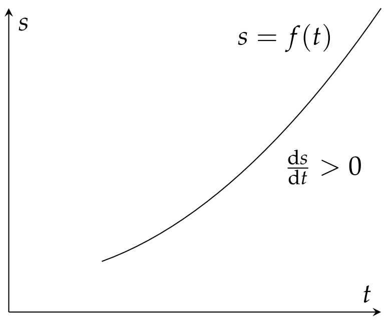
[15] displacement
[16] average velocity
[17] parametric curve



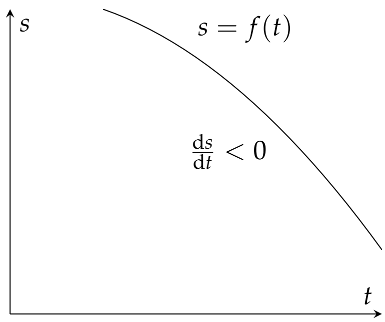
شکل 3.33: فاصلہ بالمقابل وقت برائے مثال 3.20



شکل 3.32: محور پر حرکت کرتے جسم کا t اور $t+\Delta t$ پر مقام



(ا) بڑھتا s مثبت سمتی رفتار $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ دیگا۔



(ب) گھٹتا s منفی سمتی رفتار $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ دیگا۔

شکل 3.34

$y=f(x)$ کی مقدار معلوم روپ[18] حاصل کرنے کی خاطر ہم $x=t$ اور $y=f(t)$ لیں گے۔چند منحنیات کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

مقدار معلوم روپ	تفاعل
$x(t)=t, y(t)=t^2, -\infty<t<\infty$	$y=x^2$ (y متغیر x کا تفاعل ہے)
$x(t)=2\cos t, y(t)=2\sin t, 0\le t\le 2\pi$	$x^2+y^2=4$ (y متغیر x کا تفاعل نہیں ہے)

سمتی رفتار ہمیں فاصلہ طے کرنے کی شرح کے ساتھ ساتھ حرکت کی سمت بھی دیتی ہے۔ اگر جسم آگے (بڑھتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار مثبت ہو گا؛ اگر جسم پیچھے (گھٹتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار منفی ہو گا (شکل 3.34)۔ سمتی رفتار ایک جسم کتنا

[18] parametric representation

تیز فاصلہ طے کرتا ہے۔اس کے علاوہ ہمیں حرکت کرنے کی سمت کی معلومات بھی

سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو رفتار[19] کہتے ہیں جو مثبت مقدار ہے۔ اگر آپ اپنے گھر سے دوست کے گھر تک $60\,\mathrm{km}$ کی سمتی رفتار سے گاڑھی چلائیں اور وہاں سے واپسی پر اسی رفتار سے آئیں تو واپسی پر گاڑھی کی سمتی رفتار $-60\,\mathrm{km}$ ہو گی لیکن گاڑھی کا رفتار پیما واپسی پر بھی $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھائے گا چونکہ وہ رفتار ناپتا ہے نا کہ سمتی رفتار۔

تعریف: سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو رفتار[20] کہتے ہیں۔

$$\text{رفتار} = \left|v(t)\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

□

جس شرح سے ایک جسم کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہے اس کو جسم کی اسراع کہتے ہیں۔

تعریف: وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کا تفرق اسراع[21] کہلاتا ہے۔اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب t پر اس جسم کی اسراع درج ذیل ہو گی۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

□

ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے کسی بھی جسم سے اس کی وضاحت کی جا سکتی ہے۔ایسے جسم پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہے اور جسم کی حرکت کو آزادانہ گرنا[22] کہتے ہیں۔آزادی سے گرتا ہوا جسم دورانیہ t میں

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

فاصلہ طے کرتا ہے جہاں مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سطح زمین کے قریب کشش زمین کی بنا اسراع ہے۔خلا میں ہوا کی غیر موجودگی کی بنا ہوا کی مزاحمت نہیں پائے جاتی ہے اور ہر جسم اس کے تحت حرکت کرتی ہے۔زمین کے قریب ہوا کی موجودگی میں ہر کثیف، بھاری جسم مثلاً اینٹ، پتھر، وغیرہ کی حرکت، ابتدائی چند سیکنڈ کے لئے جب تک ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہو، اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

[19] speed
[20] speed
[21] acceleration
[22] free fall

اسراع کی اکائی $\mathrm{m\,s^{-2}}$ میٹر فی مربع سیکنڈ پڑھی جاتی ہے۔

یہ مساوات ہمیں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی رفتار اور مقام کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔

مثال 3.21: لمحہ $t = 0$ پر ٹھوس جسم کو ساکن حال سے گرنے کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔
(ا) پہلے 2 سیکنڈوں میں جسم کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔ (ب) اس لمحہ پر جسم کی رفتار اور اسراع کتنی ہوں گی؟
حل: (ا) پہلے دو سیکنڈوں میں جسم درج ذیل فاصلہ طے کرتا ہے۔

$$s(2) = \frac{1}{2}(9.8)(2^2) = 19.6\,\mathrm{m}$$

(ب) لمحہ t پر رفتار $v(t)$ اور اسراع $a(t)$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8t, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8$$

ہوں گے۔یوں $t = 2\,\mathrm{s}$ پر رفتار اور اسراع درج ذیل ہوں گے۔

$$v(2) = 9.8(2) = 19.6\,\mathrm{m}, \quad a(2) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

آپ نے دیکھا کہ اسراع a کی قیمت وقت t کا تابع نہیں ہے۔ □

مثال 3.22: ایک جسم کو $49\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ لمحہ t پر جسم کی بلندی $s = 49 - \frac{1}{2}gt^2$ ہو گی (شکل 3.35)۔

ا. جسم کس بلندی تک پہنچ پائے گا؟

ب. اوپر جاتے ہوئے $102.9\,\mathrm{m}$ کی بلندی پر جسم کی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ نیچے آتے ہوئے اتنی ہی بلندی پر سمتی رفتار کیا ہو گی؟

ج. حرکت کے دوران کسی بھی لمحہ t پر جسم کی اسراع کتنی ہو گی؟

د. جسم زمین پر کب گرے گا؟

حل:

ا. ہم محددی نظام یوں منتخب کرتے ہیں سطح زمین سے فاصلہ مثبت ہو۔یوں بلندی s مثبت مقدار ہو گی، ابتدائی رفتار مثبت ہو گی جبکہ اسراع جو نیچے رخ عمل کرتا ہے منفی ہو گا۔ اوپر جاتے ہوئے سمتی رفتار مثبت جبکہ نیچے گرتے ہوئے سمتی رفتار منفی ہو گی۔بلند ترین مقام پر سمتی رفتار صفر ہو گی۔ اب کسی بھی لمحہ پر سمتی رفتار

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 49 - gt$$

ہو گی۔رفتار اس لمحہ پر صفر ہو گای جب

$$49 - 9.8t = 0, \quad \implies \quad t = \frac{49}{9.8} = 5\,\mathrm{s}$$

ہو۔لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر جسم کی بلندی درج ذیل ہو گی۔

$$s(5) = 49(5) - \frac{1}{2}(9.8)(5^2) = 122.5\,\mathrm{m}$$

ب. جسم کی رفتار $100\,\mathrm{m}$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم اس بلندی پر لمحہ t تلاش کرتے ہیں۔

$$102.9 = 49t - 4.9t^2, \quad \implies \quad t = 3\,\mathrm{s},\, 7\,\mathrm{s}$$

یوں 3 سیکنڈوں میں جسم $102.9\,\mathrm{m}$ بلندی تک پہنچتا ہے جبکہ واپس گرتے ہوئے اسی بلندی پر یہ 7 سیکنڈ بعد ہوتا ہے۔ان لمحات پر جسم کی سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$v(3) = 49 - 9.8(3) = 19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad v(7) = 49 - 9.8(7) = -19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں لمحات پر جسم کی رفتار ایک جیسی ہے۔

ج. جسم کی اسراع تلاش کرتے ہیں۔

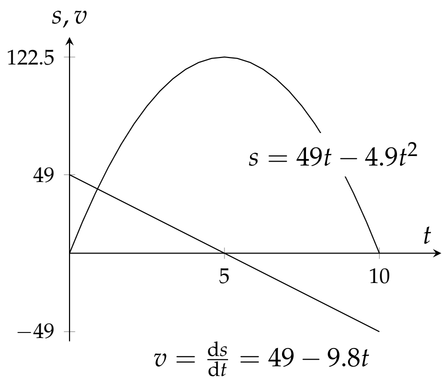
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g = -9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

جسم کی اسراع مسلسل $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ رہتی ہے۔اوپر جاتے ہوئے یہ سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے جبکہ نیچے گرتے کے دوران یہ سمتی رفتار میں اضافہ پیدا کرتا ہے۔

د. جس اس لمحہ زمین پر ہو گا جب $s = 0$ ہو یعنی:

$$49t - 4.9t^2 = 0, \quad \implies \quad t(49 - 4.9t) = 0, \quad \implies \quad t = 0\,\mathrm{s},\, 10\,\mathrm{s}$$

یوں ابتدائی لمحے پر جسم زمین پر ہو گا اور ٹھیک 10 سیکنڈ بعد یہ واپس زمین پر گرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر جانے کا دورانیہ اور نیچے گرنے کا دورانیہ ایک جیسے ہیں۔



شکل 3.35: بلندی اور سمتی رفتار (برائے مثال 3.22)

□

فنیات انتصابی لکیر پر حرکت کی نقل
مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$

کو کمپیوٹر پر نقطہ ترسیم[23] کریں جو لمحہ t پر نقطہ $(x(t), y(t))$ دکھائے گی۔نقط ترسیم لمحہ بالمحہ صورت حال دکھاتی ہے۔یوں اگر $f(t)$ جسم کی بلندی کو ظاہر کرتا ہو تب $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ کی لمحاتی ترسیم جسم کی حقیقی حرکت دکھائے گی۔مثال 3.22 کے لئے اس لمحاتی ترسیم کو پہلے $0 \le t \le 5$ اور بعد میں $0 \le t \le 10$ وقفے پر دیکھیں۔

دوسرا تجربہ کرنے کی خاطر مقدار معلوم مساوات

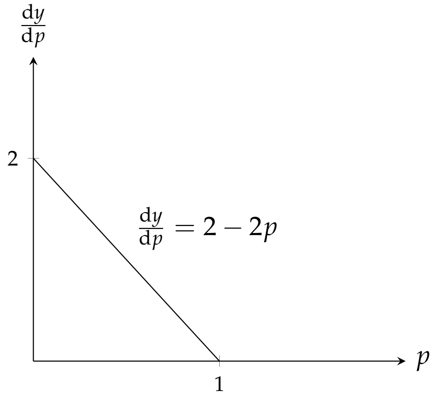
$$x(t) = t, \quad y(t) = 49t - 4.9t^2$$

کو نقطہ ترسیم کریں۔

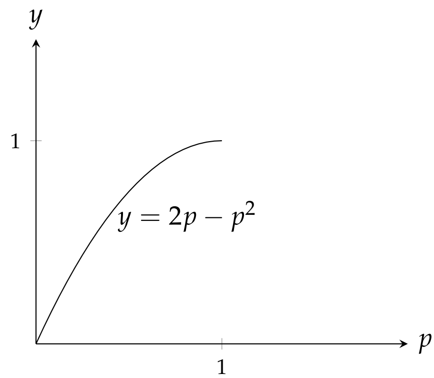
حساسیت

اگر x میں چھوٹی تبدیلی سے تفاعل $f(x)$ میں بڑی تبدیلی رونما ہوتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x میں تبدیلی کے لئے تفاعل نسبتاً زیادہ حساس[24] ہے۔تفرق $f'(x)$ تفاعل $f(x)$ کی حساسیت[25] کی ناپ ہے۔

---
[23] dot graph
[24] sensitive
[25] sensitivity



(ب) حساسیت



(ا) ہموار جلد مٹروں کی تناسب $y = 2p - p^2$

شکل 3.36: مینڈل کے تجربہ نے جنیات کی بنیاد رکھی۔

مثال 3.23: تبدیلی کے لئے حساسیت
آسٹریا کے گرگر یوہان مینڈل (1822-1884) نے مٹر پر تجربہ کرتے ہوئے جنیات[26] کے میدان کی بنیاد ڈالی۔ ان کے نتائج کے مطابق اگر ہموار جلد والے (غالب[27]) مٹروں کے جین[28] کی تعدد p ہو (جہاں p کی قیمت 0 تا 1 ہو سکتی ہے) اور غیر ہموار جلد والے (مغلوب[29]) مٹروں کی جین کی تعدد $(1-p)$ ہو تب مٹروں کی آبادی میں ہموار جلد مٹروں کی تناسب

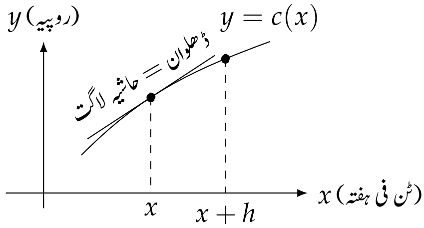
$$y = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

ہے۔

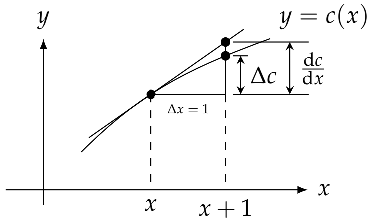
y بالمقابل p کی ترسیم کے مطابق جب p کی قیمت کم ہو تب y زیادہ حساس ہو گا (شکل 3.36-ا)۔ تفاعل y کے تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}$ کی ترسیم سے بھی یہی ظاہر ہوتا ہے۔جب p کی قیمت 0 کے قریب ہو تب $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}$ کی قیمت 2 کے قریب ہے اور جب p کی قیمت 1 کے قریب ہو تب $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}$ کی قیمت 0 کے قریب ہے (شکل 3.36-ب)۔ □

جیسے تفرق کی بات کرتے ہوئے سمتی رفتار اور اسراع کی اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں، اقتصادیات کی میدان میں ہم حاشیہ[30] کی بات کرتے ہیں۔

[26] genetics
[27] dominant
[28] gene
[29] recessive
[30] marginals



(ا) ہفتہ وار پیداوار بالمقابل لاگت



(ب) $\Delta x = 1$ اضافی پیداوار کی اضافی لاگت Δc تقریباً $\frac{dc}{dx}$ کے برابر ہے۔

شکل 3.37: حاشیہ لاگت پیداوار

عمل پیداوار میں اشیاء پیدا کرنے کی لاگت $c(x)$ متغیر x کا تفاعل ہے جہاں پیدا کردہ اشیاء کی تعداد x ہے۔ حاشیہ لاگت پیداوار[31] سے مراد پیداوار کے لحاظ سے لاگت کی شرح تبدیلی $\frac{dc}{dx}$ ہے۔

مثال کے طور پر ایک ہفتہ میں x ٹن[32] فولاد پیدا کرنے پر $c(x)$ روپیہ لاگت آتی ہے۔ اب $x + h$ ٹن فولاد پیدا کرنے پر زیادہ لاگت آئے گی اور لاگت میں اضافہ (تبدیلی) کو h سے تقسیم کرنے سے فی ہفتہ فی ٹن لاگت میں اوسط اضافہ ہو گا۔

$$\text{ہفتہ میں } h \text{ ٹن اضافی فولاد پیدا کرنے سے لاگت میں اوسط اضافہ} = \frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

فی ہفتہ موجودہ پیداوار x ٹن ہونے کی صورت میں $h \to 0$ کرتے ہوئے اس نسبت کا حد اضافی فولاد پیدا کرنے کی حاشیہ لاگت دے گی (شکل 3.37-ا)۔

$$\text{حاشیہ لاگت پیداوار} = \frac{dc}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

بعض اوقات ہم اضافی ایک اکائی پیداوار کی اضافی لاگت

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

کو ہی حاشیہ لاگت پیداوار کہتے ہیں جو x پر $\frac{dc}{dx}$ کی تخمین ہے۔ یہ قابل قبول اس لئے ہے کہ x کے نزدیک c کی ڈھلوان میں تبدیلی زیادہ نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہاں $\Delta x = 1$ لیتے ہوئے حاصل سیکنٹ کی ڈھلوان کی قیمت حد $\frac{dc}{dx}$ کے قیمت کے بہت قریب ہو گی۔ عملاً x کی بڑی قیمتوں کے لئے یہ تخمین قابل قبول ہو گی (شکل 3.37-ب)۔

مثال 3.24: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x اشیاء پیدا کرنے پر

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

[31] marginal cost of production
[32] tonne, 1000 kg

روپیہ لاگت آتی ہے جب x کی قیمت 8 تا 30 ہو۔ ابھی آپ روزانہ 10 اشیاء پیدا کرتے ہیں۔ روزانہ ایک اضافی شہ پیدا کرنے پر کتنی اضافی لاگت آئے گی؟

حل: دس اشیاء بناتے ہوئے مزید ایک شہ پیدا کرنے پر تقریباً $c'(10)$ اضافی لاگت آئے گی

$$c'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

جو 195 روپیہ کے برابر ہے۔ □

اگرچہ حقیقی اعمال کے کلیات عموماً نہیں پائے جاتے ہیں، نظریہ اقتصادیات ہمیں متوقع نتائج جاننے میں مدد کرتا ہے۔ یہ نظریہ جن تفاعل کا ذکر کرتا ہے انہیں عموماً موزوں وقفہ پر کم درجے کی کثیر رکنیوں سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کعبی کثیر رکنی عموماً اس قابل ہوتی ہے کہ پیچیدہ مسئلے کو ظاہر کر سکے اور کعبی کثیر رکنی کا استعمال زیادہ مشکل بھی نہیں ہوتا ہے۔

مثال 3.25: حاشیہ شرح ٹیکس

اگر آپ کی موجودہ آمدن پر حاشیہ شرح ٹیکس $28\,\%$ ہو اور آپ کی آمدنی میں 10000 روپیہ کا اضافہ ہو تب آپ کو اضافی 2800 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ $28\,\%$ حاشیہ ٹیکس کا یہ ہر گز مطلب نہیں ہے کہ آپ کو اپنی آمدن کا $28\,\%$ بطور ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ آپ کی موجودہ آمدنی I پر آمدنی بڑھنے کے لحاظ سے ٹیکس کی شرح $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}I} = 0.28$ ہے۔ آپ کو ہر اضافی ایک روپیہ کی آمدن پر 0.28 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اب ظاہر ہے کہ اگر آپ کی آمدن بہت بڑھ جائے تب آپ ٹیکس کے نئے قالب میں شامل ہوں جائیں گے جہاں حاشیہ شرح ٹیکس غالباً زیادہ ہو گا۔ □

مثال 3.26: حاشیہ اگر x ہزار مٹھائی فروخت کرنے سے

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

آمدنی حاصل ہو جہاں $5 \le x \le 20$ ہے تب 10 ہزار مٹھائی فروخت کرتے ہوئے حاشیہ آمدنی

$$r'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

ہو گی۔ حاشیہ لاگت کی طرح ایک اضافی اکائی فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو حاشیہ آمدنی پیش کرتی ہے۔ اگر آپ 10 ہزار مٹھائیاں فی ہفتہ فروخت کر رہے ہوں تب فی ہفتہ 11 ہزار مٹھائیاں فروخت کرنے سے آپ کی آمدنی میں درج ذیل روپیہ اضافہ متوقع ہو گا۔

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252$$

□

سوالات

محددی لکیر پر حرکت
سوال 1 تا سوال 6 میں $a \le t \le b$ کے لئے $s = f(t)$ محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام دیتی ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔

ا. دیے گئے وقفے پر جسم کا ہٹاو اور سمتی رفتار حاصل کریں۔

ب. اس وقفے کے آخری سروں پر جسم کی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

ج. جسم کب حرکت کی سمت تبدیل کرتا ہے (اگر ایسا کرتا ہو)؟

سوال 1: چاند پر آزادانہ گرنا $s = 0.8t^2, \quad 0 \le t \le 10$
جواب: (ا) $80\,\mathrm{m}$ ، $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ؛ $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 2: مریخ پر آزادانہ گرنا $s = 1.86t^2, \quad 0 \le t \le 0.5$

سوال 3: $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$
جواب: (ا) $-9\,\mathrm{m}$ ، $-3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ؛ $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $-12\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 4: $s = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 2$

سوال 5: $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$
جواب: (ا) $-20\,\mathrm{m}$ ، $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $0.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ؛ $140\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $\frac{4}{25}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ج) سمت تبدیل نہیں ہوتی

سوال 6: $s = \frac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

سوال 7: s محور پر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ ہے۔ (ا) ان نقطوں پر اس جسم کی اسراع تلاش کریں جن پر جسم کی سمتی رفتار صفر ہو گی۔ (ب) جب جسم کی اسراع صفر ہو اس لمحے پر اس جسم کی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = 0$ تا $t = 2$ کے دوران یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔
جواب: (ا) $a(1) = -6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $a(3) = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ب) $v(2) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ج) $6\,\mathrm{m}$

سوال 8: وقت $t \geq 0$ پر s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = t^2 - 4t + 3$ ہے۔ (ا) جسم کی اسراع وہاں تلاش کریں جہاں جسم کی سمتی رفتار صفر ہے۔ (ب) جسم کب آگے رخ اور کب پیچھے رخ حرکت کرتی ہے؟ (ج) جسم کی سمتی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

آزادانہ گرنا

سوال 9: مریخ اور مشتری کی سطح کے قریب آزادانہ گرنے کے مساوات بالترتیب $s = 1.86t^2$ اور $s = 11.44t^2$ ہیں جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ ساکن حال سے گرتے ہوئے کتنے وقت میں (مریخ اور مشتری میں) ایک جسم کی رفتار $27.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی تقریباً $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو گی؟
جواب: مریخ: $7.5\,\mathrm{s}$ ، مشتری: $1.2\,\mathrm{s}$

سوال 10: سطح چاند سے انتصابی رخ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا گیا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر پہنچے گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ہ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟

سوال 11: سطح زمین پر ہوا کی غیر موجودگی میں سوال 10 کا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 4.9t^2$ بلندی پر ہو گا۔

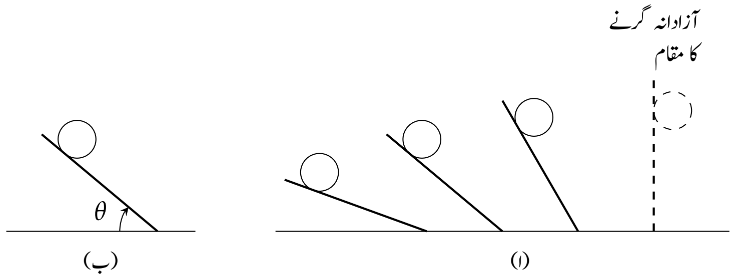
ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ہ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟



شکل 3.38: گلیلو کا تجربہ برائے آزادانہ گرنا (سوال 15)

جواب: (ا) $2.4 - 9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ب) $2.4\,\mathrm{s}$ (ج) $29.4\,\mathrm{m}$ (د) 0.7 سیکنڈ اوپر جانب اور 4.2 سیکنڈ نیچے رخ (ہ) $4.9\,\mathrm{s}$

سوال 12: ہوا سے خالی ایک دنیا پر ایک ٹھوس جسم کو انتصابی رخ $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے پھینکا گیا۔ اس دنیا کے سطح پر ثقلی اسراع $g_s\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہونے کی بنا t سیکنڈوں میں جسم $s = 15t - \frac{1}{2}g_s t^2$ میٹر بلندی تک پہنچے گا۔ یہ جسم بلند ترین مقام تک 20 سیکنڈوں میں پہنچتا ہے۔ اس دنیا میں ثقلی اسراع کتنی ہے؟

سوال 13: چاند پر ایک بندوق کو انتصابی رخ چلایا گیا۔ بندوق کی گولی t سیکنڈوں میں $s = 300t - 4.9t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ چاند پر یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنی دیر بعد سطح پر گرے گی؟
جواب: چاند پر 320 سیکنڈ، زمین پر 52 سیکنڈ؛ چاند پر 20287 میٹر، زمین پر 3297 میٹر

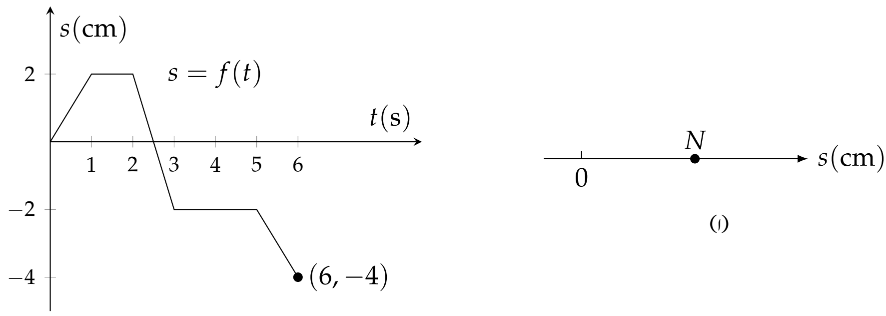
سوال 14: مشتری پر ہوا کی غیر موجودگی میں یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 11.44t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی جبکہ مریخ پر یہ $s = 300t - 1.86t^2$ میٹر کی بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنے بلندی تک پہنچے گی؟

سوال 15: گلیلو کا کلیہ برائے آزادانہ گرنا ایک پٹی کو مختلف زاویوں پر رکھتے ہوئے گلیلو نے اس پر گیند کی سمتی رفتار کو ناپتے ہوئے کلیہ اخذ کیا جس کی تحدیدی صورت سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کا کلیہ حاصل کرنا مقصد تھا (شکل 3.38)۔ گلیلو نے دیکھا کہ حرکت کے شروع سے t سیکنڈ بعد سمتی رفتار کی قیمت t کے راست متناسب ہے یعنی $v = kt$ لکھا جا سکتا ہے۔ مستقل k کی قیمت کا دارومدار پٹی کی ڈھلوان پر ہے۔

موجودہ علامتیت استعمال کرتے ہوئے (شکل 3.38-ب) درحقیقت گلیلو نے درج ذیل کلیہ حاصل کیا تھا جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔

$$v = (9.8\sin\theta)t$$

(ا) آزادانہ گرتے ہوئے گیند کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) سطح زمین کے قریب جسم کی اسراع کیا ہو گی؟
جواب: (ا) $9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

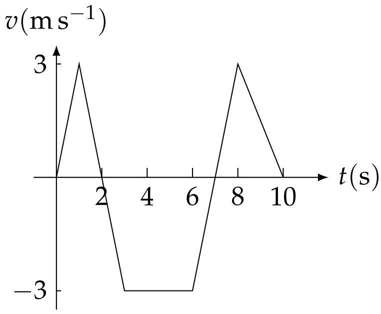


(ب) (ا)

شکل 3.39: محوری لکیر پر حرکت (سوال 18)

سوال 16: پی سا اگر گلیلو پی سا سے توپ کی گولی $55\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرنے دیتا تب t سیکنڈ بعد سطح زمین سے اس کی بلندی $s = 55 - 4.9t^2$ ہوتی۔ (ا) لمحہ t پر توپ کی گولی کی سمتی رفتار، رفتار اور اسراع کیا ہوتے؟ (ب) یہ زمین تک کتنی دیر میں پہنچتا؟ (ج) زمین پر پہنچنے کے لمحہ پر اس کی سمتی رفتار کیا ہوتی؟

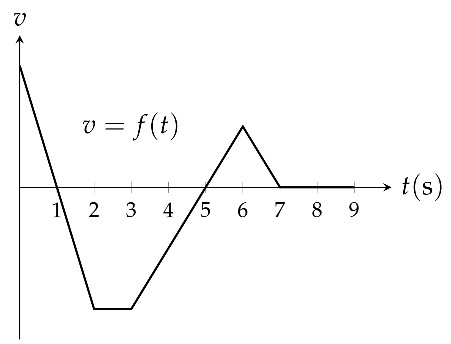
ترسیم سے حرکت کے بارے میں معلومات اخذ کرنا



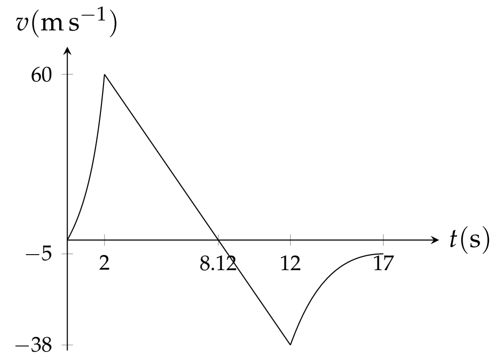
ایک محوری لکیر پر ایک جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t)$ کو درج ذیل شکل میں ترسیم کیا گیا ہے۔
(ا) جسم کب سمت حرکت تبدیل کرتی ہے؟ (ب) کب جسم تقریباً مستقل رفتار سے حرکت کرتی ہے؟ (ج) دورانیہ $0 \leq t \leq 10$ کے لئے جسم کی رفتار ترسیم کریں۔ (د) جسم کی اسراع (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔
جواب: (ا) $t = 2, t = 7$ (ب) $3 \leq t \leq 6$

سوال 18: ایک محوری لکیر پر نقطہ N حرکت کرتا ہے۔اس نقطے کا مقام بالمقابل وقت بھی ترسیم کیا گیا ہے (شکل 3.39)۔ (ا) N کب بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب دائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب ساکن ہے؟ (ب) اس کی سمتی رفتار اور رفتار (جہاں معین ہوں) ترسیم کریں۔

سوال 19: راکٹ میں چند سیکنڈوں کے لئے ایندھن ہوتا ہے جو اس کو کسی خاص بلندی تک پہنچاتا ہے جس کے بعد راکٹ کچھ دیر تک مزید بلند ہو کر واپس زمین کی جانب گرتا ہے۔ گرنے کے چند لمحات بعد خود کار پیراشوٹ کھلتا ہے جو راکٹ کو حفاظت کے ساتھ نہایت آہستہ زمین تک



شکل 3.41: جسم کی حرکت (سوال 20)



شکل 3.40: راکٹ کی حرکت (سوال 19)

پہنچاتا ہے۔ ایک راکٹ کی حرکت کو شکل 3.40 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ (ا) ایندھن ختم ہونے کے لمحہ راکت کی رفتار کتنی تھی؟ (ب) ایندھن کتنے سیکنڈوں تک کے لئے تھا؟ (ج) راکٹ کب بلند ترین مقام تک پہنچا اور بلند ترین مقام پر اس کی رفتار کتنی تھی؟ (د) پیراشوٹ کب کھلا اور اس لمحہ پر راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ہ) پیرا شوٹ کھلنے سے پہلے راکٹ کتنی دیر تک گرتا رہا؟ (و) راکٹ کی اسراع کب زیادہ سے زیادہ تھی؟ (ز) اسراع کب مستقل تھی اور اس کی قیمت کیا تھی؟

جواب: (ا) $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $2\,\mathrm{s}$ (ج) $t = 8.12\,\mathrm{s}$، $v = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (د) $12\,\mathrm{s}$، $v = -38\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ہ) $10\,\mathrm{s}$ (و) لمحہ $t = 2\,\mathrm{s}$ پر (ز) $2\,\mathrm{s}$ تا $12\,\mathrm{s}$

سوال 20: محوری لکیر پر ایک جسم کی رفتار $v = f(t)$ شکل 3.41 ترسیم کی گئی ہے۔ (ا) کب جسم آگے حرکت، پیچھے حرکت کرتی ہے؟ اس کی رفتار کب تیز؟ کب کم ہوتی ہے؟ (ب) جسم کی اسراع کب مثبت؟ کب منفی؟ اور کب صفر ہے؟ (ج) جسم کی رفتار زیادہ سے زیادہ کب ہوتی ہے؟ (د) کم جسم لمحہ سے زیادہ دورانیے کے لئے ساکن رہتا ہے؟

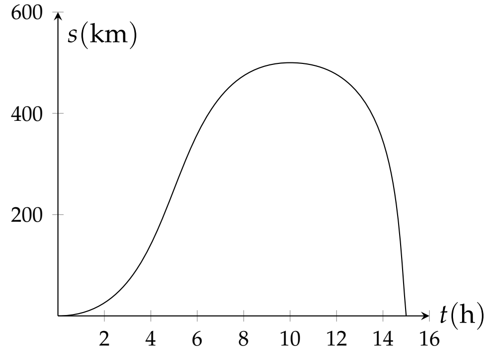
سوال 21: ایک ٹرک $t = 0$ پر اڈے سے نکل کر دوسرے شہر مال پہنچا کر 15 گھنٹوں بعد اڈے پر واپس پہنچتا ہے۔اس کے مقام بالمقابل کا شکل 3.42 میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 3.4 کی طرح $0 \le t \le 15$ کے لئے ٹرک کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔اسی طریقے کو دہراتے ہوئے سمتی رفتار کی ترسیم سے ٹرک کی اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

سوال 22: ایک جسم کا فاصل s ، رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل وقت t کو شکل 22 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان میں کون سا ترسیم کون سا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

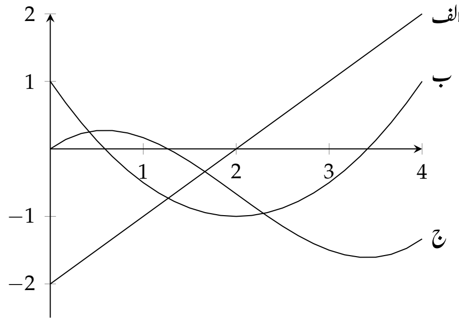
جواب: مقام بالمقابل وقت شکل-ج، رفتار بالمقابل وقت شکل-ب اور اسراع بالمقابل وقت شکل-ا ہیں۔

اقتصادیات

سوال 23: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x مشینوں کو پیدا کرنے پر $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$ روپیہ لاگت آتی ہے۔ (ا) پہلے 100 مشینوں کی اوسط لاگت کیا ہو گی؟ (ب) اگر 100 پیدا کیے جا رہے ہوں تب حاشیہ لاگت کیا ہو گی؟ (ج) دکھائیں کہ



شکل 3.42: ٹرک کی حرکت (سوال 21)



شکل 3.43: اشکال برائے سوال 22

100 مشین پیدا کرنے کے بعد ایک اضافی مشین پیدا کرنے پر لاگت تقریباً حاشیہ لاگت کے برابر ہے۔
جواب: (ا) 110 روپیہ فی مشین (ب) 80 روپیہ (ج) 79.9 روپیہ

سوال 24: حاشیہ آمدنی فرض کریں کہ x کرسیاں فروخت کرنے سے $r(x) = 2000(1 - \frac{1}{x+1})$ روپیہ آمدنی ہوتی ہے۔ (ا) x کرسیوں کی فروخت پر حاشیہ آمدنی کیا ہو گی؟ (ب) فی ہفتہ 5 کرسیوں کی بجائے 6 کرسیاں فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو $r'(x)$ سے حاصل کریں۔ (ج) $x \to \infty$ کرتے ہوئے تفاعل $r'(x)$ کے حد کی قیمت تلاش کریں۔ اس قیمت کا کیا مطلب ہو گا؟

مزید استعمال

سوال 25: جرسوموں پر تجربہ کے دوران ان کی خراک میں جرسومہ مار دوا ملائی گئی۔ جرسوموں کی تعداد کچھ دیر تک بڑھتی رہی جس کے بعد ان کی تعداد کم ہونا شروع ہوئی۔ لمحہ t پر ان کی تعداد $b(t) = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$ تھی جہاں t کی اکائی گھنٹہ ہے۔ شرح نمو کو (ا) $t = 0$؛ (ب) $t = 5$؛ اور $t = 10$ پر تلاش کریں۔
جواب: (ا) 10^4 جرسومیں فی گھنٹہ؛ (ب) 0 جرسومیں فی گھنٹہ؛ (ج) -10^4 جرسومیں فی گھنٹہ

سوال 26: لمحہ t پر ایک ٹینکی سے پانی کا انخلا $Q(t) = 200(30 - t^2)$ لٹر ہے جہاں t کی اکائی منٹ ہے۔ دس منٹ بعد پانی کی انخلا کی شرح کیا ہے؟ پہلے دس منٹوں میں اوسط شرح اخراج کتنی ہے؟

سوال 27: ٹینکی کو خالی کرنے کے لئے گھر کے نلکے کھولے جاتے ہیں۔ نلکے کھولنے کے t منٹوں بعد ٹینکی میں پانی کی گہرائی $y = 150(1 - \frac{t}{60})^2$ سنٹی میٹر ہے۔ (ا) لمحہ t پر ٹینکی سے پانی کی انخلا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کیا ہو گی؟ (ب) پانی کی گہرائی کب زیادہ سے زیادہ تیزی سے کم ہوتی ہے؟ کب کم سے کم تیزی سے گہرائی گھٹتی ہے؟ ان لمحات پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟ (ج) y اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کی علامت اور قیمتوں کے ساتھ y کے تعلق پر تبصرہ کریں۔
جواب: (ا) $5(\frac{t}{60} - 1)$ (ب) $t = 0$ پر گہرائی تیز ترین گھٹتی ہے جب شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -5$ ہے اور $t = 60$ پر گھٹنے کی کم تر شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو گی۔

سوال 28: گول غبارے کا حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ رداس r کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ (ا) رداس کے ساتھ حجم کی تبدیلی کی شرح $r = 10\,\mathrm{cm}$ پر کیا ہو گی؟ (ب) اگر رداس $10\,\mathrm{cm}$ سے $12\,\mathrm{cm}$ ہو تب حجم میں تبدیلی کتنی ہو گی؟

سوال 29: پرواز سے پہلے ہوائی جہاز زمین پر دوڑ کر ایک مخصوص رفتار تک پہنچتا ہے۔ زمین پر دوڑ کے دوران ایک جہاز $D = \frac{10}{9}t^2$ فاصلہ طے کرتا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ اڑنے کے لئے درکار رفتار $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ جہاز کتنے وقت میں اڑ پاتا ہے اور اڑنے سے پہلے یہ زمین پر کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟
جواب: جہاز 25 سیکنڈ بعد اڑتا ہے اور جس دوران یہ $694\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرتا ہے۔

سوال 30: جزیرہ ہوائی کی آتش فشاں پہاڑی 1959 نومبر کے مہینے میں جزیرہ ہوائی کے ایک آتش فشاں پھٹ پڑا اور ہوا میں $580\,\mathrm{m}$ کی بلندی تک لاوا اگلنے لگا جو عالمی رکارڈ ہے۔ لاوا کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 31 تا سوال 34 میں s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام لمحہ t پر تعین گر تفاعل $s = f(t)$ دیتا ہے۔ اس تفاعل کو سمتی رفتار تفاعل $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f'(t)$ اور تفاعل اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f''(t)$ کے ساتھ اکٹھے ترسیم کریں۔ v اور a کی قیمتوں اور علامت کے لحاظ سے s کے رویہ پر بحث کریں۔ بحث میں درج ذیل شامل کریں۔

ا. کب جسم لمحاتی طور پر ساکن ہے؟

ب. کب جسم بائیں (یا نیچے) اور کب یہ دائیں (یا اوپر) رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. یہ سمت کو کب تبدیل کرتا ہے؟

د. اس کی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

ہ. یہ کب تیز تر اور کب آہستہ تر حرکت کرتا ہے؟

و. مبدا سے جسم دور ترین کب ہوتا ہے؟

سوال 31: $s = 200t - 16t^2, \quad 0 \le t \le 12.5$

سوال 32: $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$
جواب: (ا) $t = 6.25\,\mathrm{s}$؛ (ب) $[0, 6.25)$ پر اوپر رخ اور $(6.25, 12.5]$ پر نیچے رخ؛ (ج) $t = 6.25\,\mathrm{s}$؛ (د) $[0, 6.25)$ پر رفتار گھٹتی ہے جبکہ $(6.25, 12.5]$ پر رفتار بڑھتی ہے؛ (د) $t = 0, 12.5$ پر تیز تر اور $t = 6.25$ پر آہستہ ترین؛ (ہ) $t = 6.25\,\mathrm{s}$

سوال 33: $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

سوال 34: $s = 4 - 7t + 6t^2, \quad 0 \le t \le 4$
جواب: (ا) $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$؛ (ب) $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ پر بائیں رخ اور $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ پر دائیں رخ؛ (ج) $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$؛ (د) $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (ہ) $t = 0, 4$ پر تیز ترین اور $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$ پر آہستہ ترین؛ (و) $t = \frac{6+\sqrt{15}}{3}$

3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقناطیسی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔اس حصے میں چھ تکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin\theta|\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہٰذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہو گی۔چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہٰذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہٰذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہٰذا

$$\sin^2\theta < \theta^2, \quad (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جا سکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

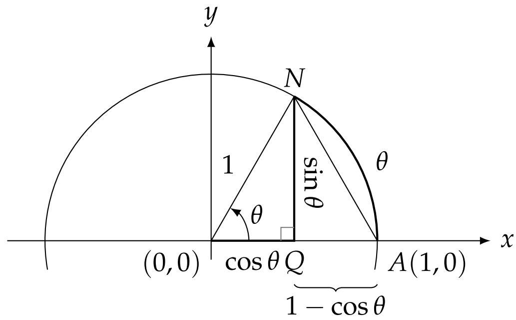
$$|\sin\theta| < |\theta|, \quad |1-\cos\theta| < |\theta|$$

یعنی

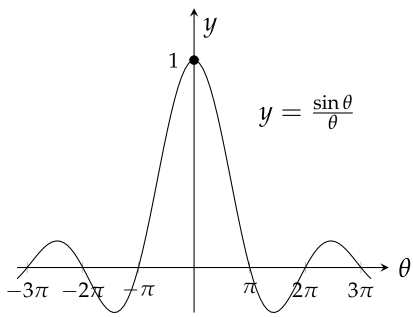
$$-|\theta| < \sin\theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

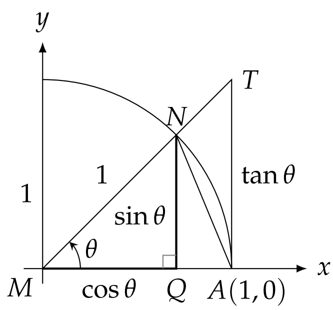
□



شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $\theta > 0$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ لکھی جا سکتی ہے۔



شکل 3.45: تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔



شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4

مثال 3.27: دکھائیں کہ $\theta = 0$ پر $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0, \quad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

حل: $\theta \to 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $-|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ بیچ سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔ □

تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta = 0$ پر قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta\to 0} f(\theta) = 1$ ہو گا۔

مسئلہ 3.4:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (\text{کی پیمائش ریڈیئن میں ہے } \theta) \tag{3.4}$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{رقبہ}\,\Delta MAT > \text{رقبہ خطہ}\,MAN > \text{رقبہ}\,\Delta MAN$$

ہے۔ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ}\,\Delta MAN &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود}=\frac{1}{2}(1)(\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\\
\text{رقبہ خطہ}\,MAN &= \frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}(1)^2\theta=\frac{\theta}{2}\\
\text{رقبہ}\,\Delta MAT &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود}=\frac{1}{2}(1)(\tan\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta
\end{aligned}$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$$

جس کو $\frac{1}{2}\sin\theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

حاصل ہو گا۔اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$$

چونکہ $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta=1$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin\theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہٰذا $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم y محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔اس تشاکلی کی بنا بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=1=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 148 پر مسئلہ 2.5 کے تحت $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم تکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر تکونیاتی حد تلاش کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ ہے۔
حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے $\cos h = 1-2\sin^2\frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}-\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}\\
&= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad (\theta=\frac{h}{2})\\
&= -(1)(0)=0
\end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل $y=\sin\theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\Big(\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}\Big)+\lim_{h\to 0}\Big(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\Big)\\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کو سائن تفاعل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$\begin{aligned} y = x^2 - \sin x : \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق}) \\ &= 2x - \cos x \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} y = x^2 \sin x : \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) + 2x \sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب}) \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned} y = \frac{\sin x}{x} : \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ہوتا ہے اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہوتا ہے۔یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\cos x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \qquad (\text{تفرق کی تعریف}) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{g\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0}\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \qquad (\text{مثال } 3.28 \text{ اور مسئلہ } 3.4) \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

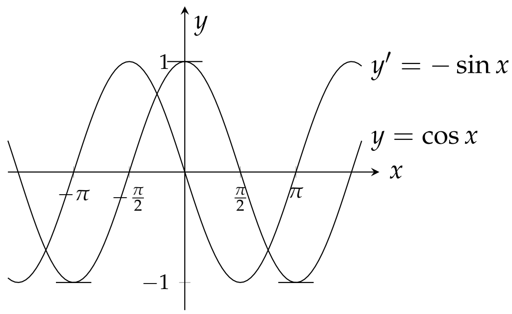
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x = -\pi, 0, \pi$) وہاں اس کا تفرق یعنی $y' = -\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

ا.

$$\begin{aligned}
y &= 5x + \cos x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) \\
&= 5 - \sin x
\end{aligned}$$



شکل 3.47: تفاعل $y = \cos x$ کی ڈھلوان تفاعل $y' = -\sin x$ دیتی ہے۔

ب.

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x \cos x \\
\frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}
$$

ج.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\cos x}{1-\sin x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2} && \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\
&= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} && (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= \frac{1}{1-\sin x}
\end{aligned}
$$

□

سادہ ہارمونی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونی حرکت کی ایک مثال ہے۔اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5\cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔
حل:

$$
\begin{aligned}
s &= 5\cos t && \text{ہم مقام} \\
v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\cos t) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t) = -5\sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\sin t) = -5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t) = -5\cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں}
\end{aligned}
$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ s محور پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا حیطہ 5 ہے جبکہ اس کی تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کی تعدد ہے۔

2. تفاعل $\sin t$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو گا۔یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

   جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \mp 1$ ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع $a = -5\cos t$ اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\cos t = 0$ ہو گا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہو گا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہو گا۔اسراع کی مطلق قیمت مبدا سے دور ترین نقطے پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $\cos t = \mp 1$ ہو گا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو جھٹکا[33] کہتے ہیں۔ اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب لمحہ t پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$$

□

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\cos t) \\ &= 5\sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\sin t = \mp 1$ ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

---

[33] jerk

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہٰذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x\\
\frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x\\
\frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x\\
\frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x
\end{aligned} \tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔سوال میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)}\\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر $y=\sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔
حل:

$$
\begin{aligned}
y &= \sec x \\
y' &= \sec x \tan x && \text{(مساوات 3.5)} \\
y'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x \tan x) \\
&= \sec x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) + \tan x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}
$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+\cot x) = 3 + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\csc x) = 2\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) \\
&= 2(-\csc x \cot x) = -2\csc x \cot x
\end{aligned}
$$

□

تکونیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکونیات تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہٰذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x

کی قیمت π کا عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تفاعل کے لئے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x\to c} f(x) = f(x)$ ہو گا۔ نتیجتاً ہم تکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 3.36: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ □

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ مطمئن ہو گی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \theta = x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1,\ \theta = 7x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1,\ \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں $x \to 0$ کرنا $\theta \to 0$ کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 3.37:

ا.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2/5)\cdot \sin 2x}{(2/5)\cdot 5x} \\
&= \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\
&= \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

(تفاعل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے)

ب.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\right) \\
&= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{\cos 0}\right) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$\left(\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)$

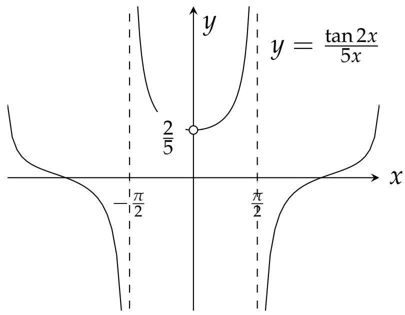
شکل 3.48 سے رجوع کریں۔ □

مثال 3.38: درج ذیل میں $\theta = t - \frac{\pi}{2}$ لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔ یوں $t \to \frac{\pi}{2}$ سے مراد $\theta \to 0$ ہو گا۔

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{t-\frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

□

احصاء کی میدان کے علاوہ تفاعل $\frac{\sin x}{x}$ دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔



شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $y = -10x + 3\cos x$
جواب: $y' = -10 - 3\sin x$

سوال 2: $y = \frac{2}{x} + 3\sin x$

سوال 3: $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
جواب: $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

سوال 4: $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال 5: $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
جواب: $y' = 0$

سوال 6: $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

سوال 7: $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$
جواب: $\frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$

سوال 8: $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

سوال 9: $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$
جواب: $4\tan x \sec x - \csc^2 x$

سوال 10: $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

سوال 11: $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x$
جواب: $x^2 \cos x$

سوال 12: $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2\cos x$

سوال 13 تا سوال 16 میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال 13: $s = \tan t - t$
جواب: $\sec^2 t - 1$

سوال 14: $s = t^2 - \sec t + 1$

سوال 15: $s = \frac{1+\csc t}{1-\csc t}$
جواب: $\frac{-2\csc t \cot t}{(1-\csc t)^2}$

سوال 16: $s = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

سوال 17 تا سوال 20 میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 17: $r = 4 - \theta^2 \sin\theta$
جواب: $-\theta(\theta\cos\theta + 2\sin\theta)$

سوال 18: $r = \theta\sin\theta + \cos\theta$

سوال 19: $r = \sec\theta\csc\theta$
جواب: $\sec\theta\csc\theta(\tan\theta - \cot\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

سوال 20: $r = (1+\sec\theta)\sin\theta$

سوال 21 تا سوال 24 میں $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ تلاش کریں۔

سوال 21: $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$
جواب: $\sec^2 q$

سوال 22: $p = (1+\csc q)\cos q$

سوال 23: $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$
جواب: $\sec^2 q$

سوال 24: $p = \frac{\tan q}{1+\tan q}$

سوال 25: (ا) $y = \csc x$ اور (ب) $y = \sec x$ کے لئے y'' تلاش کریں۔
جواب: (ا) $2\csc^3 x - \csc x$ ، (ب) $2\sec^3 x - \sec x$

سوال 26: (ا) $y = -2\sin x$ اور (ب) $y = 9\cos x$ کے لئے $y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4}$ تلاش کریں۔

سوال 27 تا سوال 32 میں حد تلاش کریں۔

سوال 27: $\lim_{x \to 2} \sin(\frac{1}{x} - \frac{1}{2})$
جواب: 0

سوال 28: $\lim_{x \to \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

سوال 29: $\lim_{x \to 0} \sec[\cos x + \pi \tan(\frac{\pi}{4\sec x}) - 1]$
جواب: -1

سوال 30: $\lim_{x \to 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2\sec x}$

سوال 31: $\lim_{t \to 0} \tan(1 - \frac{\sin t}{t})$
جواب: 0

سوال 32: $\lim_{\theta \to 0} \cos(\frac{\pi\theta}{\sin\theta})$

سوال 33 تا سوال 48 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$
جواب: 1

سوال 34: $\lim_{t \to 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل})$

سوال 35: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{4y}$

جواب: $3/4$

سوال 36: $\lim_{h\to 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$

سوال 37: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

جواب: 2

سوال 38: $\lim_{t\to 0} \frac{2t}{\tan t}$

سوال 39: $\lim_{x\to 0} \frac{x\csc 2x}{\cos 5x}$

جواب: $1/2$

سوال 40: $\lim_{x\to 0} 6x^2 \cot x \csc 2x$

سوال 41: $\lim_{x\to 0} \frac{x + x\cos x}{\sin x \cos x}$

جواب: 2

سوال 42: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

سوال 43: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

جواب: 1

سوال 44: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

سوال 45: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

جواب: $1/2$

سوال 46: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

سوال 47: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

جواب: $3/8$

سوال 48: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

مماسی خطوط

سوال 49 تا سوال 52 میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔ تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

سوال 49: $y = \sin x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi, 0, 3\pi/2$

سوال 50: $y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, 0, \pi/3$

سوال 51: $y = \sec x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, \pi/4$

سوال 52: $y = 1 + \cos x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi/3, 3\pi/2$

کیا سوال 53 تا سوال 56 کا دائرہ کار $0 \le x \le 2\pi$ میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

سوال 53: $y = x + \sin x$
جواب: ہاں، نقطہ $x = \pi$ پر

سوال 54: $y = 2x + \sin x$

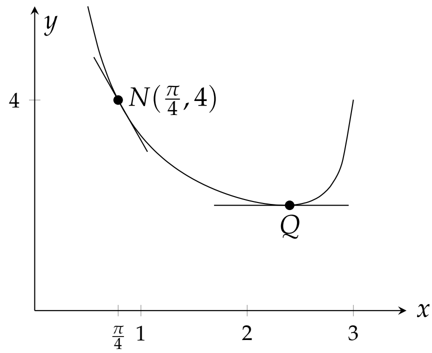
سوال 55: $y = x - \cot x$
جواب: نہیں

سوال 56: $y = x + 2\cos x$

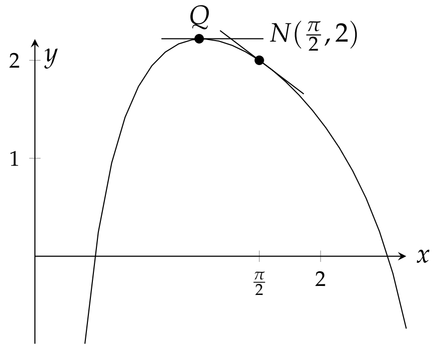
سوال 57: منحنی $y = \tan x$ پر $-\pi/2 < x < \pi/2$ کے بیچ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = 2x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔
جواب: $(-\pi/4, -1); (\pi/4, 1)$

سوال 58: منحنی $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = -x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 59: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.49 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔
جواب: (ا) $y = -x + \pi/2 + 2$، (ب) $y = 4 - \sqrt{3}$



شکل 3.50: تفاعل $y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$ کی منحنی (سوال 60)



شکل 3.49: تفاعل $y = 4 + \cot x - 2\csc x$ کی منحنی (سوال 59)

سوال 60: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.50 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

ساده ہارمونی حرکت

سوال 61 تا سوال 61 میں محوری لکیر s پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ $t = \pi/4$ سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال 61: $s = 2 - 2\sin t$
جواب: $-\sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-1}},\ \sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-1}}, \sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-2}}, \sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-3}}$

سوال 62: $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال 63: کیا c کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: $c = 9$

سوال 64: کیا b کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر (ا) استمراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, x \geq 0 \end{cases}$$

سوال 65: $\frac{d^{999}}{dx^{999}}(\cos x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sin x$

سوال 66: $\frac{d^{725}}{dx^{725}}(\sin x)$ تلاش کریں۔

سوال 67: x کے لحاظ سے (ا) $\sec x$ اور (ب) $\csc x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

سوال 68: x کے لحاظ سے $\cot x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 69: $-\pi \le x \le 2\pi$ کے لئے $y = \cos x$ ترسیم کریں۔ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$ لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

اب $h = -1, -0.5, -0.3$ کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \to 0^+$ اور $h \to 0^-$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال 70: وسطی فرق حاصل تقسیم وسطی تفریقی حاصل تقسیم[34]

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کو اعدادی تراکیب میں $f'(x)$ کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔اگر $f'(x)$ موجود ہو تب $h \to 0$ کرتے ہوئے یہ تفاعل کا تفرق دیتی ہے جو h کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم[35]

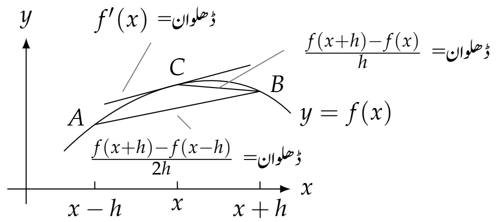
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سے بہتر ہوتا ہے (شکل 3.51)۔ (ا) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \sin x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = \cos x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = \cos x$ اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

---

[34] centered difference quotient
[35] Fermat's difference quotient



شکل 3.51: فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم سے وسطی تفریقی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \cos x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = -\sin x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = -\sin x$ اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 69 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 71: وسطی تفریقی حاصل تقسیم کے لئے انتباہ بعض اوقات x پر نا قابل تفرق $f(x)$ کے لئے بھی وسطی تفریقی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کا $h \to 0$ کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = |x|$ لیں اور

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال 72: دائرہ کار $(-\pi/2, \pi/2)$ پر $y = \tan x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73: دائرہ کار $0 < x < \pi$ پر $y = \cot x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 74: وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر $y = \frac{\sin x}{x}$ ، $y = \frac{\sin 2x}{x}$ اور $y = \frac{\sin 4x}{x}$ کو اکٹھے ترسیم کریں۔ y محور کو یہ ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتا نظر آتی ہیں؟ کیا یہ ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟ $x \to 0$ کرتے ہوئے آپ $y = \frac{\sin 5x}{x}$

اور $y=\frac{\sin(-3x)}{x}$ کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟ k کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے $y=\frac{\sin kx}{x}$ سے کیا توقع کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 75: درجات بالمقابل ریڈیئن x کو درجات میں ناپتے ہوئے $\sin x$ اور $\cos x$ کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h)=\frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے $\lim_{h\to 0} f(h)$ کا اندازہ لگائیں۔اس اندازے کا $\frac{\pi}{180}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔کیا اس حد کی قیمت $\frac{\pi}{180}$ کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جا سکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

ج. اب $\sin x$ کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے $\sin x$ کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ہ. بلند رتبی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔ $y=\sin x$ اور $y=\cos x$ کے لئے y'' اور y''' تلاش کریں۔

3.5 زنجیری قاعدہ

ہم $\sin x$ اور x^2-4 کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً $\sin(x^2-4)$ کا تفرق زنجیری قاعدہ[36] کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہو گا۔احصاء میں تفرق کے حصول کے لئے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

[36] chain rule

مثال 3.39: تفاعل $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ حقیقتاً تفاعل $y = 2u$ اور $u = 3x - 5$ کا مرکب ہے۔ ان تینوں تفاعل کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟
حل: ان تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3$$

چونکہ $6 = 2 \cdot 3$ ہے لہٰذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

کیا تعلق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ایک اتفاق ہے؟ اگر ہم تفرق کو شرح تبدیلی تصور کریں اور $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ ہوں تب اگر u سے y دگنا تبدیل ہوتا ہو اور x سے y تین گنا تبدیل ہوتا ہو تب ہم توقع کریں گے کہ x سے y چھ گنا تبدیل ہو گا۔

آئیں دوسرا تفاعل لے کر دیکھیں۔

مثال 3.40: $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$ کو $y = u^2$ اور $u = 3x^2 + 1$ کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

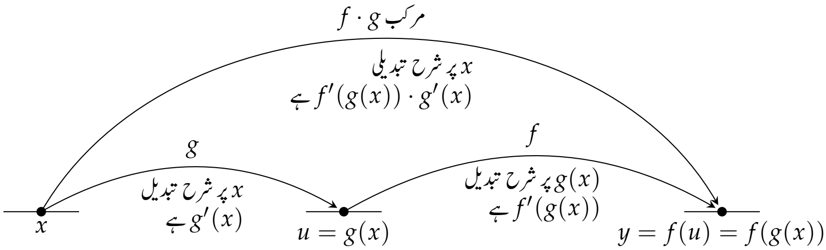
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں اور ایک بار پھر درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$



شکل 3.52: $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب x پر مرکب $f \cdot g$ کا تفرق دے گا۔

□

x پر مرکب تفاعل $f(g(x))$ کا تفرق $g(x)$ پر f کا تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل 3.52)۔

مسئلہ 3.5: زنجیری قاعدہ
اگر $u = g(x)$ پر $f(u)$ قابل تفرق ہو اور x پر $g(x)$ قابل تفرق ہو تب x پر مرکب تفاعل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{3.6}$$

ہو گا۔ لیبنٹز طرز لکھائی میں اگر $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ ہوں تب

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.7}$$

ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ کو $u = g(x)$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدہ کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر $\Delta x \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے زنجیری قاعدے کو ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے چونکہ عین ممکن ہے کہ x میں تبدیل سے u میں تبدیل Δu صفر ہو۔زنجیری قاعدہ اگلے باب میں ثابت کیا جائے گا۔

مثال 3.41: $y=\sqrt{x^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: یہاں $y=f(g(x))$ یعنی $u=x^2+1$ اور $f(u)=\sqrt{u}$ ہیں۔ چونکہ f اور g کے تفرق

$$f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}},\quad g'(x)=2x$$

ہیں لہٰذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)\\&=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(2x)\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

□

باہر، اندر قاعدہ
اگر $y=f(g(x))$ ہو تب مساوات 3.7 درج ذیل کہتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'[g(x)]\cdot g'(x) \tag{3.8}$$

جہاں دائیں طرف f کی اندرون کو نظر انداز کر کے جوں کا توں رکھ کر f کا تفرق لے کر اس کو f کی اندرون کے تفرق کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ یوں پہلے بیرونی تفاعل کا تفرق اور بعد میں اندرونی تفاعل کا تفرق لیا جاتا ہے۔

مثال 3.42:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overbrace{\sin}^{\text{بیرونی}}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی}}=\overbrace{\cos}^{\text{تفرق بیرونی}}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی نظر انداز}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\text{تفرق اندرونی}}$$

□

زنجیری قاعدہ کا بار بار اطلاق
بعض اوقات ہم زنجیری قاعدہ کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.43: $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ کا تفرق تلاش کریں۔

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan(5 - \sin 2t)) \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5 - \sin 2t) && u = 5 - \sin 2t \text{ لے کر } \tan u \text{ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - (\cos 2t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t)) && u = 2t \text{ لے کر } 5 - \sin u \text{ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \sin 2t)
\end{aligned}
$$

□

زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کے کلیات
تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔ اگر f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = f(u)$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u) = f'(u) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال کے طور پر اگر u تغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور $y = u^n$ ہو جہاں n عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^n) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
&= nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

قاعدہ 3.8: طاقت کا زنجیری قاعدہ
اگر $u(x)$ قابل تفرق ہو اور n عدد صحیح ہو تب u^n قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.9}$$

مثال 3.44:

ا.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^5 x &= 5\sin^4 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\\ &= 5\sin^4 x\cos x\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)^{-3} &= -3(2x+1)^{-4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)\\ &= -3(2x+1)^{-4}(2)\\ &= -6(2x+1)^{-4}\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)\end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3x-2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)^{-1}\\ &= -1(3x-2)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)\\ &= -1(3x-2)^{-2}(3)\\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں تفاعل $\sin^5 x$ استعمال کیا گیا جو $(\sin x)^5$ لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

مثال 3.45: درجات بالمقابل ریڈیئن

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ

ان دونوں میں فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ π ریڈیئن $= 180^\circ$ ہوتا ہے لہٰذا $\frac{\pi x}{180}$ ریڈیئن $= x^\circ$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^\circ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(x^\circ)$$

ہو گا۔ اسی طرح $\cos(x^\circ)$ کا تفرق $-\frac{\pi}{180}\sin(x^\circ)$ ہو گا۔

زاویہ کی پیمائش درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کی ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا $\frac{\pi}{180}$ کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی زیادہ آسان ہو گی۔ □

مثال 3.46: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟

حل: ہم پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی s ہو تب اس کا حجم $H = s^3$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s اور H متغیر t (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کے راست متناسب ہے۔ یہ مفروضہ اس لئے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخل ہوتی ہے۔ یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -k(6s^2), \qquad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔ تناسب کا مستقل k مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً ارد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ ابتدائی حجم کو H_0 لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &H = s^3, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(6s^2) \\ &H = H_0 \quad \text{پر} \quad t = 0 \\ &H = \frac{3}{4}H_0 \quad \text{پر} \quad t = 1\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

اب ہمیں $H = 0$ پر t تلاش کرنا ہو گا۔

ہم $H = s^3$ کا تفرق زنجیری قاعدہ سے t کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

تبدیلی کی شرح $-k(6s^2)$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -6ks^2$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -2k$$

حاصل کرتے ہیں۔اطراف کی لمبائی مستقل شرح $2k$ سے کم ہو رہی ہے۔یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی s_0 ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی $s_1 = s_0 - 2k$ ہو گی جس سے

$$2k = s_0 - s_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔پگھلنے کا وقت $2kt = s_0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}} = (\tfrac{3}{4})^{1/3} \approx 0.91$$

ہے لہٰذا پگھلنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{1}{1 - 0.91} \approx 11\,\mathrm{h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر $\frac{1}{4}$ حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لئے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتی۔ ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور اس کو مزید بہتر کس طرح بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 1 تا سوال 8 میں $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ دیے گئے ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)$ تلاش کریں۔

سوال 1: $y = 6u - 9, \quad u = \frac{1}{2}x^4$
جواب: $12x^3$

سوال 2: $y=2u^3, \quad u=8x-1$

سوال 3: $y=\sin u, \quad u=3x+1$
جواب: $3\cos(3x+1)$

سوال 4: $y=\cos u, \quad u=-\frac{x}{3}$

سوال 5: $y=\cos u, \quad u=\sin x$
جواب: $-\sin(\sin x)\cos x$

سوال 6: $y=\sin u, \quad u=x-\cos x$

سوال 7: $y=\tan u, \quad u=10x-5$
جواب: $10\sec^2(10x-5)$

سوال 8: $y=-\sec u, \quad u=x^2+7x$

سوال 9 تا سوال 18 میں تفاعل کو $y=f(u)$ اور $u=g(x)$ صورت میں لکھ کر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال 9: $y=(2x+1)^{-7}$
جواب: $u=2x+1$ لیتے ہوئے $y=u^5$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=5u^4\cdot 2=10(2x+1)^4$ ہو گا۔

سوال 10: $y=(4-3x)^9$

سوال 11: $y=(1-\frac{x}{7})^{-7}$
جواب: $u=(1-x/7)$ لے کر، $y=u^{-7}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-7u^{-8}\cdot(\frac{1}{7})=(1-x/7)^{-8}$

سوال 12: $y=(\frac{x}{2}-1)^{-10}$

سوال 13: $y=(\frac{x^2}{8}+x-\frac{1}{x})^4$
جواب: $u=x^2/8+x-1/x$ لے کر، $y=u^4$ ،
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=4(x^2/8+x-1/x)^3(x/4+1+1/x^2)$

سوال 14: $y=(\frac{x}{5}+\frac{1}{5x})^5$

سوال 15: $y=\sec(\tan x)$
جواب: $u=\tan x$ لے کر $y=\sec u$ اور
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sec u\tan u)(\sec^2 x)=\sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$

سوال 16: $y=\cos(\pi-\frac{1}{x})$

سوال 17: $y=\sin^3 x$
جواب: $u=\sin x$ لے کر $y=u^3$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u^2\cos x=3\sin^2 x\cos x$

سوال 18: $y=5\cos^{-4}x$

سوال 19 تا سوال 38 میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 19: $p=\sqrt{3-t}$
جواب: $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$

سوال 20: $q=\sqrt{2r-r^2}$

سوال 21: $s=\frac{4}{3\pi}\sin 3t+\frac{4}{5\pi}\cos 5t$
جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos 3t-\sin 5t)$

سوال 22: $s=\sin(\frac{3\pi t}{2})+\cos(\frac{3\pi t}{2})$

سوال 23: $r=(\csc\theta+\cot\theta)^{-1}$
جواب: $\frac{\csc\theta}{\cot\theta+\csc\theta}$

سوال 24: $r=-(\sec\theta+\tan\theta)^{-1}$

سوال 25: $y=x^2\sin^4 x+x\cos^{-2}x$
جواب: $2x\sin^4 x+4x^2\sin^3 x\cos x+\cos^{-2}x+2x\cos^{-3}x\sin x$

سوال 26: $y=\frac{1}{x}\sin^{-5}x-\frac{x}{3}\cos^3 x$

سوال 27: $y=\frac{1}{21}(3x-2)^7+(4-\frac{1}{2x^2})^{-1}$
جواب: $(3x-2)^6-\frac{1}{x^3(4-\frac{1}{2x^2})^2}$

سوال 28: $y=(5-2x)^{-3}+\frac{1}{8}(\frac{2}{x}+1)^4$

سوال 29: $y=(4x+3)^4(x+1)^{-3}$
جواب: $\frac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

سوال 30: $y=(2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

سوال 31: $h(x)=x\tan(2\sqrt{x})+7$
جواب: $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x})+\tan(2\sqrt{x})$

سوال 32: $k(x)=x^2\sec(\frac{1}{x})$

سوال 33: $f(\theta)=(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta})^2$
جواب: $\frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

سوال 34: $g(t)=(\frac{1+\cot t}{\sin t})^{-1}$

سوال 35: $r=\sin(\theta^2)\cos(2\theta)$
جواب: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-2\sin(\theta^2)\sin 2\theta+2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

سوال 36: $r=\sec\sqrt{\theta}\tan(\frac{1}{\theta})$

سوال 37: $q=\sin(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$
جواب: $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=(\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}})\cos(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$

سوال 38: $q=\cot(\frac{\sin t}{t})$

سوال 39 تا سوال 48 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال 39: $y=\sin^2(\pi t-2)$
جواب: $2\pi\sin(\pi t-2)\cos(\pi t-2)$

سوال 40: $y=\sec^2\pi t$

سوال 41: $y=(1+\cos 2t)^{-4}$
جواب: $\frac{8\sin 2t}{(1+\cos 2t)^5}$

سوال 42: $y=(1+\cot(\frac{t}{2}))^{-2}$

سوال 43: $y=\sin(\cos(2t-5))$
جواب: $-2\cos(\cos(2t-5))\sin(2t-5)$

سوال 44: $y=\cos(5\sin(\frac{t}{3}))$

سوال 45: $y=(1+\tan^4(\frac{t}{12}))^3$
جواب: $(1+\tan^4(\frac{t}{12}))^2(\tan^3(\frac{t}{12})\sec^2(\frac{t}{12}))$

سوال 46: $y=\frac{1}{6}(1+\cos^2(7t))^3$

سوال 47: $y=\sqrt{1+\cos(t^2)}$
جواب: $\frac{-t\sin(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$

سوال 48: $y=4\sin(\sqrt{1+\sqrt{t}})$

سوال 49 تا سوال 52 میں y'' تلاش کریں۔

سوال 49: $y=(1+\frac{1}{x})^3$
جواب: $\frac{6}{x^3}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})$

سوال 50: $y=(1-\sqrt{x})^{-1}$

سوال 51: $y=\frac{1}{9}\cot(3x-1)$
جواب: $2\csc^2(3x-1)\cot(3x-1)$

سوال 52: $y=9\tan(\frac{x}{3})$

تفرق کی اعدادی قیمتوں کا حصول

سوال 53 تا سوال 58 میں x کی دی گئی قیمت پر $(f\circ g)'$ تلاش کریں۔

سوال 53: $f(u)=u^5+1, \quad u=g(x)=\sqrt{x}, \quad x=1$
جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 54: $f(u)=1-\frac{1}{u}, \quad u=g(x)=\frac{1}{1-x}, \quad x=-1$

سوال 55: $f(u)=\cot\frac{\pi u}{10}, \quad u=g(x)=5\sqrt{x}, \quad x=1$
جواب: $-\pi/4$

سوال 56: $f(u)=u+\frac{1}{\cos^2 u}, \quad u=g(x)=\pi x, \quad x=\frac{1}{4}$

سوال 57: $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$
جواب: 0

سوال 58: $f(u) = (\frac{u-1}{u+1})^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

سوال 59: فرض کریں کہ تفاعل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 2$ اور $x = 3$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	2π	5

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $2f(x), x = 2$

ب. $f(x) + g(x), x = 3$

ج. $f(x) \cdot g(x), x = 3$

د. $f(x)/g(x), x = 2$

ہ. $f(g(x)), x = 2$

و. $\sqrt{f(x)}, x = 2$

ز. $1/g^2(x), x = 3$

ح. $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, x = 2$

جواب: (ا) $2/3$ ، (ب) $2\pi + 5$ ، (ج) -8π ، (د) $37/6$ ، (ہ) -1 ، (و) $\frac{\sqrt{2}}{24}$ ، (ز) $5/32$ ، (ح) $\frac{-5}{3\sqrt{17}}$

سوال 60: فرض کریں کہ تفاعل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 0$ اور $x = 1$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$1/3$
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $5f(x) - g(x), x = 1$

ب. $f(x)g^3(x), x = 0$

ج. $\frac{f(x)}{g(x)+1}, x = 1$

د. $f(g(x)), x = 0$

ہ. x=0 g(f(x)),

و. $(x^{11} + f(x))^{-2}, x = 1$

ز. x=0 f(x+g(x)),

سوال 61: اگر $s = \cos\theta$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 5$ ہوں تب $\theta = 3\pi/2$ پر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔
جواب: 5

سوال 62: اگر $y = x^2 + 7x - 5$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}$ ہوں تب $x = 1$ پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

مرکب کے کئی صورتیں

اگر مرکب تفاعل کو مختلف انداز میں لکھنا ممکن ہو تب کیا ہو گا؟ کیا ہر صورت سے ایک جیسا تفرق حاصل ہو گا؟ زنجیری قاعدہ کہتا ہے کہ ایسا ہی ہو گا۔ اگلے دو سوالات میں اس عمل کو دیکھیں۔

سوال 63: تفاعل $y = x$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

ا. $y = \frac{u}{5} + 7, \quad u = 5x - 35$

ب. $y = 1 + \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{x-1}$

جواب: (ا) 1، (ب) 1

سوال 64: تفاعل $y = x^{3/2}$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

ا. $y = u^3, \quad u = \sqrt{x}$

ب. $y = \sqrt{u}, \quad u = x^3$

مماس اور ڈھلوان

سوال 65:

ا. $x = 1$ پر منحنی $y = 2\tan(\pi x/4)$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 < x < 2$ پر منحنی کی ڈھلوان کی کم سے کم قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $y = \pi x + 2 - \pi$، (ب) $\pi/2$

سوال 66:

ا. مبدا پر $y = \sin 2x$ اور $y = -\sin \frac{x}{2}$ کے مماس کی مساواتیں تلاش کریں۔کیا ان مماس کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا مبدا پر $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی مماسوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے جہاں مستقل $m \neq 0$ ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ج. کسی بھی دیے گئے m کے لئے $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی زیادہ سے زیادہ ڈھلوان کیا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $y = \sin x$ ایک چکر پورا کرتا ہے، تفاعل $y = \sin 2x$ دو چکر پورے کرتا ہے، تفاعل $y = \sin \frac{x}{2}$ آدھا چکر پورا کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔کیا اس وقفے پر تفاعل $y = \sin mx$ کے مکمل چکر اور مبدا پر تفاعل کی ڈھلوان کا آپس میں کوئی تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال 67: مشین کا بہت تیز چلنا ایک گاڑی کی انجن کا پسٹن[37] اوپر نیچے دوری حرکت کرتا ہے جس کو

$$s = A\cos(2\pi bt)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمحہ t پر پسٹن کا مقام s ہے جبکہ A اور b مثبت مستقل ہیں۔حرکت کا حیطہ A اور اس کی تعدد (ایک سیکنڈ میں اوپر نیچے حرکت کی گنتی) b ہے۔تعدد دگنا کرنے سے پسٹن کی سمتی رفتار، اسراع اور جھٹکا پر کیا اثر ہو گا؟ (یہ جاننے کے بعد آپ سمجھ سکتے ہیں کہ مشین تیز چلانے سے کیوں خراب ہوتی ہے۔)
جواب: سمتی رفتار دگنی، اسراع چار گنا اور جھٹکا آٹھ گنا ہو جاتا ہے۔

سوال 68: قطب شمالی کے نزدیک ایلاسکا کے ایک شہر میں درجہ حرارت ایلاسکا[38] کے ایک شہر میں پورے سال کے ہر دن کے اوسط درجہ حرارت کو شکل 3.53 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو درج ذیل تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

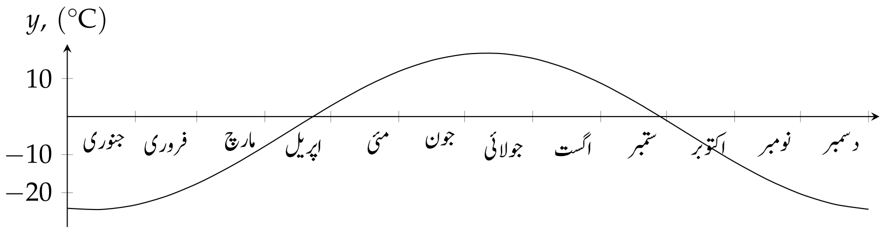
$$y = 20.56\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] - 3.89$$

ا. کس دن درجہ حرارت تیز ترین تبدیل ہوتا ہے؟

ب. ایک دن میں درجہ حرارت کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کتنی ہے؟

---

[37] piston
[38] alaska



شکل 3.53: اوسط درجہ حرارت

سوال 69: محور لکیر پر ایک جسم کا مقام $s = \sqrt{1+4t}$ ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ لمحہ $t = 6\,\mathrm{s}$ پر اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع کیا ہیں؟

جواب: $v = 0.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a = -\frac{4}{125}\mathrm{m\,s^{-2}}$

سوال 70: ساکن حال کے t سیکنڈ بعد ایک گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = k\sqrt{s}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے جہاں k مستقل اور ساکن مقام سے فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ جسم کی اسراع مستقل ہے۔

سوال 71: زمین کی فضا میں داخل ہونے والے شہاب ثاقب کی سمتی رفتار $\sqrt{s}$ کے بالعکس متناسب ہے جہاں زمین کی وسط سے شہاب ثاقب کا فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ شہاب ثاقب کی اسراع s^2 کے بالعکس متناسب ہے۔

سوال 72: x محور پر حرکت کرنے والے ایک ذرہ کی سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ ہے۔ دکھائیں کہ اس ذرہ کی اسراع $f(x)f'(x)$ ہے۔

سوال 73: لٹکن کا دوری عرصہ بالمقابل درجہ حرارت ایک لٹکن جس کی لمبائی L ہو کا دوری عرصہ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ہو گا جہاں لٹکن کے مقام پر ثقلی اسراع کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں T کی اکائی سیکنڈ اور L کی اکائی میٹر ہے۔ اگر لٹکن کسی دھات سے بنا ہو تب اس کی لمبائی درجہ حرارت کے ساتھ درج ذیل کلیہ کے تحت تبدیل ہو گی

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}u} = kL$$

جہاں درجہ حرارت کو u سے ظاہر کیا گیا ہے اور k مستقل ہے۔ دکھائیں کہ حرارت کے ساتھ دوری عرصہ تبدیل ہونے کی شرح $\frac{kT}{2}$ ہو گی۔

سوال 74: اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = |x|$ ہوں تب مرکبات

$$(f\circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{ور} \quad (g\circ f)(x) = \left|x^2\right| = x^2$$

دونوں $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں اگرچہ $x = 0$ پر g از خود قابل تفرق نہیں ہے۔کیا یہ زنجیری قاعدہ کے مترادف ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 75: فرض کریں $x = 1$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(1)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے۔اگر $x = 1$ پر $y = f(g(x))$ کے منحنی کا مماس افقی ہو تب کیا $x = 1$ پر g کے مماس یا $u = g(1)$ پر f کے مماس کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 76: فرض کریں کہ $x = -5$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(-5)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے اور $(f \circ g)'(-5)$ منفی ہے۔کیا $g'(-5)$ اور $f'(g(-5))$ کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے۔

زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اگلے دو سوالات میں دیے گئے تفاعل x^n کے لئے دکھائیں کہ طاقتی قاعدہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$ مطمئن ہوتا ہے۔

سوال 77: $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

سوال 78: $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 79: $y = \sin 2x$ کا تفرق وقفہ $-2 \le x \le 3.5$ کے لئے تفاعل $y = 2\cos 2x$ ترسیم کریں۔ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.2$ کے لئے

$$y = \frac{\sin 3(x+h) - \sin 2x}{h}$$

ترسیم کریں۔ کی دیگر (بشمول منفی) قیمتوں کے لئے بھی اس کو ترسیم کریں۔ $h \to 0$ کرتے ہوئے آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اس کی وجہ پیش کریں۔

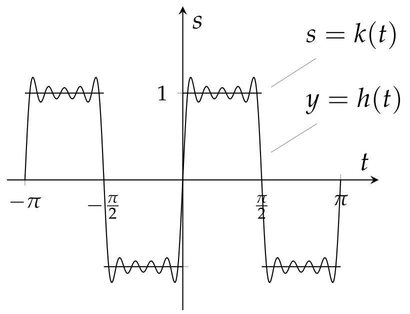
سوال 80: درج ذیل کثیر رکنی کو شکل 3.54 میں دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر تقریباً دندان موج $s = g(t)$ نظر آتا ہے۔

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t - 0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

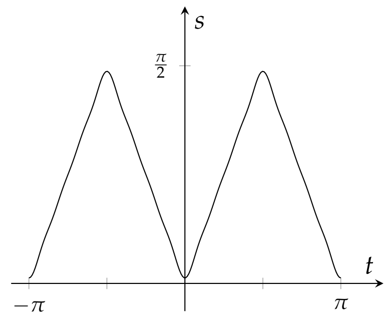
جہاں دندان موج معین ہو وہاں اس کثیر رکنی کا تفرق دندان موج کی تفرق کو کتنا خوش اسلوبی سے ظاہر کرتا ہے؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ تلاش کر کے ترسیم کریں۔



شکل 3.55: سیڑھی تفاعل $s = k(t)$ کا $s = h(t)$ کثیر رکنی سے اظہار (سوال 81)



شکل 3.54: دندان موج کا کثیر رکنی سے اظہار (سوال 80)

ج. کہاں پر $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ کو $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ بہتر ظاہر کرتا ہے؟ کہاں خراب ترین ظاہر کرتا ہے؟ تکونیاتی تفاعل سے عموماً مختلف تفاعل کو ظاہر کیا جاتا ہے البتہ جیسے اگلا سوال میں ظاہر ہو گا اصل تفاعل کے تفرق کو عموماً ان کثیر رکنی کے تفرق سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوال 81: گزشتہ سوال میں دندان موج کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا جہاں ہم نے دیکھا کہ دندان موج کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر کرتا ہے۔آئیں اب ایسا تفاعل دیکھیں جس کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے البتہ تفاعل کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر نہیں کرتا ہے۔ شکل 3.55 میں سیڑھی تفاعل کو درج ذیل کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$s = h(t) = 1.2732\sin 2t + 0.4244\sin 6t + 0.25465\sin 10t + 0.18186\sin 14t + 0.14147\sin 18t$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ کثیر رکنی کا تفرق ہر گز سیڑھی تفاعل کا تفرق نہیں دیتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

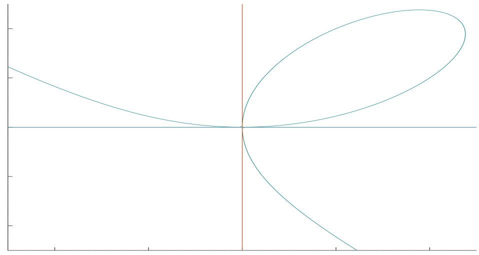
ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

ج. نتائج کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما

بعض اوقات مساوات $F(x, y) = 0$ کو $y = f(x)$ روپ میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔اس کے باوجود ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو خفی تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اس حصہ میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا اور اس کے ذریعہ طاقتی قاعدہ کو وسعت دیتے ہوئے تمام ناطق تفاعل کو شامل کیا جائے گا۔



شکل 3.56: خفی منحنی $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ جس کو پتا بھی کہتے ہیں۔

خفی تفرق

چونکہ مساوات $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ در حقیقت تین تفاعل $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ اور $y = f_3(x)$ کا ملاپ ہے جو ماسوائے نقطہ M اور A کے قابل تفرق ہیں لہٰذا اس کے ترسیم کا تقریباً ہر نقطے پر اچھی طرح معین ڈھلوان پایا جاتا ہے (شکل 3.56)۔ خفی تفاعل کا تفرق لینے کی خاطر y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے قواعد برائے قوت نما، طاقت، مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور زنجیری قاعدہ زیر استعمال لائے جاتے ہیں۔اس کے بعد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لئے حل کرتے ہوئے کسی بھی نقطہ (x, y) پر تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس ترکیب کو خفی تفرق[39] کہتے ہیں۔

مثال 3.47: $y^2 = x$ ہے۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

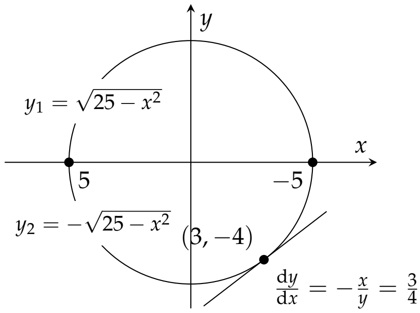
حل: مساوات $y^2 = x$ در حقیقت دو تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کو ظاہر کرتی ہے جہاں جذر کی مثبت قیمت لی جاتی ہے۔ہم $x > 0$ کے لئے ان دونوں تفاعل کا تفرق لینا جانتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

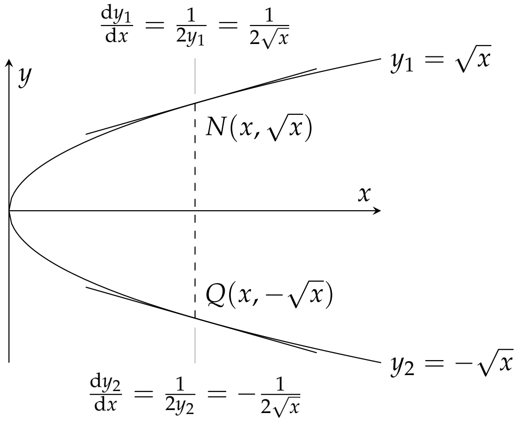
آئیں اب اس مساوات کو دو تفاعل میں تقسیم کیے بغیر اس کا تفرق حاصل کریں۔ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔یوں $f(x) = y^2$ لکھ کر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2y$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 && \text{زنجیری قاعدہ} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

[39] implicit differentiation



شکل 3.58: ترسیم برائے مثال 3.48



شکل 3.57: ترسیم برائے مثال 3.47

ہو گا۔ یہ کلیہ دونوں صریح تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کا تفرق دیتا ہے۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

مثال 3.48: نقطہ $(3, -4)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.58)۔

حل: دائرہ در حقیقت دو قابل تفرق تفاعل $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ اور $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ نقطہ $(3, -4)$ تفاعل y_2 پر پایا جاتا ہے لہٰذا ہم صریحاً ڈھلوان تلاش کر سکتے ہیں:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4} \tag{3.10}$$

ہم دائرے کی مساوات کا x کے لحاظ سے خفی تفرق

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

لے کر $(3, -4)$ پر ڈھلوان کی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

دھیان رہے کہ مساوات 3.10 صرف x محور کے نیچے جوابات دیتی ہے جبکہ درج بالا تمام نقطوں پر قابل استعمال ہے۔خفی تفرق کی قیمت عموماً x اور y دونوں پر منحصر ہوتی ہے جبکہ صریحاً حاصل تفرق کے کلیہ میں صرف x درکار ہو گا۔ □

دیگر خفی تفاعل کا تفرق بھی درج بالا دو مثالوں کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف تفرق کے قواعد استعمال کرتے ہیں۔

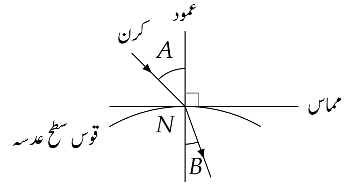
مثال 3.49: $2y = x^2 + \sin y$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
2y &= x^2 + \sin y\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + \sin y)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin y)\\
2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x + \cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\
2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2-\cos y) &= 2x\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x}{2-\cos y}
\end{aligned}$$

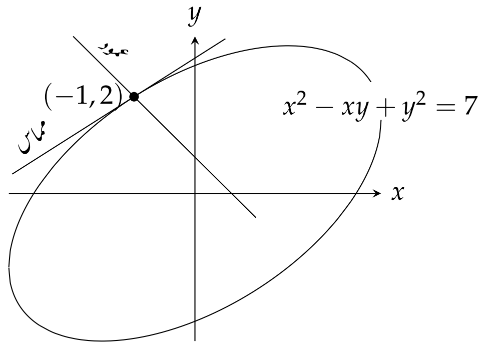
□

خفی تفرق چار اقدام پر مشتمل ہے۔

1. y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کو تفرق کے قواعد کے مطابق تفرق کریں۔
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ والے اجزاء کو ایک طرف اکٹھا کریں۔
3. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو تجزی کریں۔
4. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لئے حل کریں۔



شکل 3.59: عدسہ میں کرن داخل ہوتے ہوئے عمود کی طرف جھکتی ہے۔



شکل 3.60: ترسیمات برائے مثال 3.50

عدسہ، مماس اور عمودی خطوط

روشنی کی کرن عدسہ میں نقطہ N پر داخل ہوتے ہوئے سمت تبدیل کرتی ہے (شکل 3.59)۔ مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی خط کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ N پر منحنی کے مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی[40] کہتے ہیں۔اس خط کو N پر منحنی کا عمود کہتے ہیں۔

□

عدسہ کی سطح پر تبصرہ عموماً دو درجی منحنیات کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ان منحنیات کے مماس اور عمود کو خفی تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.50: نقطہ $(-1,2)$ پر منحنی $x^2 - xy + y^2 = 7$ کا مماس اور عمود تلاش کریں (شکل 3.60)۔
حل: ہم خفی تفرق سے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 &= 7\\
\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(7)\\
2x - (x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}) + 2y\frac{dy}{dx} &= 0\\
(2y - x)\frac{dy}{dx} &= y - 2x\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y - 2x}{2y - x}
\end{aligned}$$

---

[40] normal

نقطہ $(x, y) = (-1, 2)$ پر ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{(-1,2)} = \frac{y-2x}{2y-x}\bigg|_{(-1,2)} = \frac{2-2(-1)}{2(2)-(-1)} = \frac{4}{5}$$

$(-1, 2)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= 2 + \frac{4}{5}(x-(-1)) \\ y &= \frac{4}{5} + \frac{14}{5} \end{aligned}$$

اسی طرح منحنی کا عمود نقطہ $(-1, 2)$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= 2 - \frac{5}{4}(x-(-1)) \\ y &- \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق کا حصول

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.51: $2x^3 - 3y^2 = 7$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔
حل: ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق حاصل کرتے ہوئے پہلے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3y^2 &= 7 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^3) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3y^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7) \\ 6x62 - 6yy' &= 0 \\ x^2 - yy' &= 0 \\ y' &= \frac{x^2}{y} \qquad)y \neq 0 \text{اگر} (\end{aligned}$$

ہم اب مساوات $x^2 - yy' = 0$ کا تفرق لیتے ہوئے y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(yy') &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(0) \\
2x - y'y' - yy'' &= 0 \\
yy'' &= 2x - (y')^2 \\
y'' &= \frac{2x}{y} - \frac{(y')^2}{y} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)
\end{aligned}$$

ہم آخر میں $y' = \frac{x^2}{y}$ پر کرتے ہوئے x اور y کی روپ میں y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(x^2/y)^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)$$

□

قابل تفرق تفاعل کے ناطق طاقت

ہم جانتے ہیں کہ طاقتی قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

عدد صحیح n کے لئے درست ہے۔ہم اب دکھاتے ہیں کہ یہ قاعدہ کسی بھی ناطق عدد کے لئے درست ہے۔

مسئلہ 3.6: ناطق طاقت کے لئے طاقتی قاعدہ
اگر ناطق عدد ہو تب x^{n-1} کے دائرہ کار کے ہر اندرونی نقطہ x پر x^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

ثبوت: فرض کریں p اور q عدد صحیح ہیں جہاں $q > 0$ اور $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ ہے۔تب

$$y^q = x^p$$

ہو گا۔یہ مساوات اور کے طاقتوں کا ملاپ ہے لہٰذا (اس حصہ کے ابتدا میں اعلٰی مسئلہ کے تحت) y متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں (جن کے لئے ہمارے پاس قاعدہ طاقت ہے) ہم خفی مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے سکتے ہیں:

$$qy^{q-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = px^{p-1}$$

اب اگر $y \neq 0$ ہو تب دونوں اطراف کو qy^{q-1} سے تقسیم کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{(x^{(p/q)})^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p/q)-1}
\end{aligned}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.52:

ا.

تفاعل $0 \geq x$ جبکہ تفرق $x > 0$ کے لئے معین ہے
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب.

تفاعل تمام x جبکہ تفرق $x \neq 0$ کے لئے معین ہے
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$$

□

طاقتی قاعدہ کی ایک روپ جس میں زنجیری قاعدہ ضم ہے کہتا ہے کہ اگر n ناطق عدد ہو اور x پر u قابل تفرق ہو اور $(u(x))^{n-1}$ معین ہو تب x پر u^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.11}$$

مثال 3.53:

ا.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)^{1/4} = \frac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x)$$

تفاعل وقفہ $[-1,1]$ جبکہ تفرق وقفہ $(-1,1)$ پر معین ہے۔

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)\\ &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\sin x)\\ &= \frac{1}{5}\sin x(\cos x)^{-6/5}\end{aligned}$$

□

سوالات

ناطق طاقتوں کا تفرق
سوال 1 تا سوال 10 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال 1: $y = x^{9/4}$
جواب: $\frac{9}{4}x^{5/4}$

سوال 2: $y = x^{-3/5}$

سوال 3: $y = \sqrt[3]{2x}$
جواب: $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

سوال 4: $y = \sqrt[4]{5x}$

سوال 5: $y = 7\sqrt{x+6}$
جواب: $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

سوال 6: $y = -2\sqrt{x-1}$

سوال 7: $y = (2x+5)^{-1/2}$
جواب: $-(2x+5)^{-3/2}$

سوال 8: $y = (1-6x)^{2/3}$

سوال 9: $y = x(x^2+1)^{1/2}$
جواب: $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

سوال 10: $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

سوال 11 تا سوال 18 میں پہلا تفرق تلاش کریں۔

سوال 11: $s = \sqrt[7]{t^2}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

سوال 12: $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

سوال 13: $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$
جواب: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$

سوال 14: $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

سوال 15: $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$
جواب: $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

سوال 16: $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

سوال 17: $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$
جواب: $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta)^{-2/3}$

سوال 18: $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

خفی تفرق
سوال 19 تا سوال 32 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو خفی تفرق کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 19: $x^2y + xy^2 = 6$
جواب: $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

سوال 20: $x^3 + y^3 = 18xy$

سوال 21: $2xy + y^2 = x + y$
جواب: $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

سوال 22: $x^3 - xy + y^3 = 1$

سوال 23: $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$
جواب: $\frac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

سوال 24: $(3xy+7)^2 = 6y$

سوال 25: $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$
جواب: $\frac{1}{y(x+1)^2}$

سوال 26: $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

سوال 27: $x = \tan y$
جواب: $\cos^2 y$

سوال 28: $x = \sin y$

سوال 29: $x+\tan(xy)=0$
جواب: $\frac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

سوال 30: $x+\sin y=xy$

سوال 31: $y\sin(\frac{1}{y})=1-xy$
جواب: $\frac{-y^2}{y\sin(\frac{1}{y})-\cos(\frac{1}{y})+xy}$

سوال 32: $y^2\cos(\frac{1}{y})=2x+2y$

سوال 33 تا سوال 36 میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 33: $\theta^{1/2}+r^{1/2}=1$
جواب: $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

سوال 34: $r-2\sqrt{\theta}=\frac{3}{2}\theta^{2/3}+\frac{4}{3}\theta^{3/4}$

سوال 35: $\sin(r\theta)=\frac{1}{2}$
جواب: $\frac{-r}{\theta}$

سوال 36: $\cos r+\cos\theta=r\theta$

بلند رتبی تفرق

سوال 37 تا سوال 42 میں خفی تفرق کی مدد سے پہلے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور بعد میں $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

سوال 37: $x^2+y^2=1$
جواب: $y'=-\frac{x}{y},\ y''=\frac{-y^2-x^2}{y^3}$

سوال 38: $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

سوال 39: $y^2=x^2+2x$
جواب: $y'=\frac{x+1}{y},\ y''=\frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

سوال 40: $y^2-2x=1-2y$

سوال 41: $2\sqrt{y} = x - y$
جواب: $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1},\ y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

سوال 42: $xy + y^2 = 1$

سوال 43: نقطہ $(2,2)$ پر $x^3 + y^3 = 16$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: -2

سوال 44: نقطہ $(0,-1)$ پر $xy + y^2 = 1$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ڈھلوان، مماس اور عمود
سوال 45 تا سوال 46 میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 45: $y^2 + x^2 = y^4 - 2x,\quad (-2,1),\ (-2,-1)$
جواب: $(-2,1) : m = -1,\ (-2,-1) : m = 1$

سوال 46: $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2,\quad (1,0),\ (1,-1)$

سوال 47 تا سوال 56 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا نقطہ منحنی پر پایا جاتا ہے اور اس نقطے پر منحنی کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 47: $x^2 + xy - y^2 = 1,\quad (2,3)$
جواب: (ا) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$، (ب) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

سوال 48: $x^2 + y^2 = 25,\quad (3,-4)$

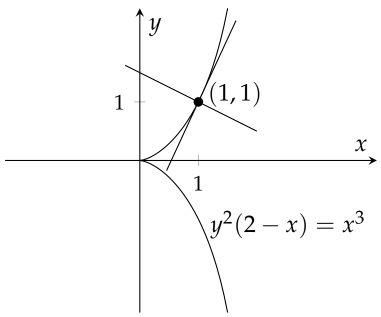
سوال 49: $x^2y^2 = 9,\quad (-1,3)$
جواب: (ا) $y = 3x + 6$، (ب) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

سوال 50: $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0,\quad (-2,1)$

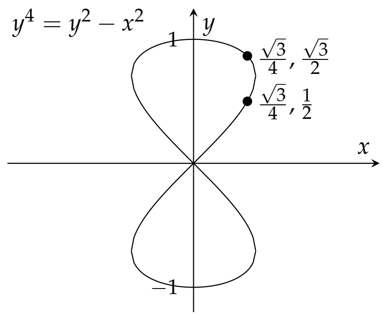
سوال 51: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0,\quad (-1,0)$
جواب: (ا) $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$، (ب) $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

سوال 52: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5,\quad (\sqrt{3},2)$

سوال 53: $2xy + \pi \sin y = 2\pi,\quad (1,\pi/2)$
جواب: (ا) $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$، (ب) $y = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$



شکل 3.62: منحنی برائے سوال 60



شکل 3.61: منحنی آٹھ (سوال 59)

سوال 54: $x\sin 2y=y\cos 2x, \quad (\pi/4,\pi/2)$

سوال 55: $y=2\sin(\pi x-y), \quad (1,0)$
جواب: (ا) $y=2\pi x-2\pi$، (ب) $y=-\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}$

سوال 56: $x^2\cos^2 y-\sin y=0, \quad (0,\pi)$

سوال 57: x محور کو $x^2+xy+y^2=7$ دو نقطوں پر قطع کرتی ہے۔ان نقطوں کو تلاش کریں اور دکھائیں کہ ان نقطوں پر منحنی کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔ ان مماس کی ڈھلوان کیا ہو گی؟
جواب: نقطہ $(-\sqrt{7},0)$ اور $\sqrt{7},0$ ، ڈھلوان: -2

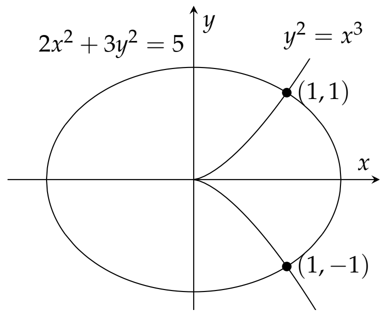
سوال 58: منحنی $x^2+y^2+xy=7$ پر وہ نقطے تلاش کریں جہاں (ا) مماس x محور کے متوازی ہے، (ب) مماس y محور کے متوازی ہے۔ دوسرے جزو میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ غیر معین جبکہ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ معین ہے۔ان نقطوں پر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 59: منحنی آٹھ نقطہ $(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$ اور $(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2})$ پر $y^4=y^2-x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.61)۔
جواب: $(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$ پر $m=-1$ ، $(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2})$ پر $m=\sqrt{3}$

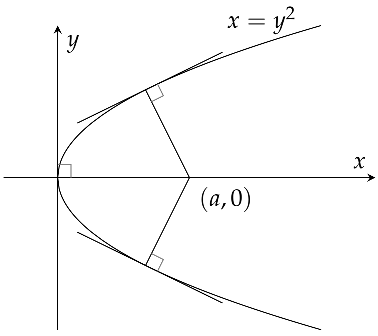
سوال 60: نقطہ $(1,1)$ پر $y^2(2-x)=x^3$ کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں (شکل 3.62)۔

سوال 61: چار نقطوں $(-3,2)$ ، $(-3,-2)$ ، $(3,2)$ اور $(3,-2)$ پر $y^4-4y^2=x^4-9x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
جواب: $(-3,2): m=-\frac{27}{8}; (-3,-2): m=\frac{27}{8}; (3,2): m=\frac{27}{8}; (3,-2): m=-\frac{27}{8}$

سوال 62:



شکل 3.63: ترسیم برائے سوال 64



شکل 3.64: منحنی برائے سوال 67

ا. نقطہ $(4,2)$ اور $(2,4)$ پر پتا $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.56)۔

ب. مبدا کے علاوہ پتے کا مماس کس نقطے پر افقی ہے؟

ج. کس نقطے پر پتے کا مماس انتصابی ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 63: اگر $f''(x) = x^{-1/3}$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے درست ہوں گے؟

ا. $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$

ب. $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

ج. $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$

د. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

جواب: (ا) غلط، (ب) درست، (ج) درست، (د) درست

سوال 64: کیا نقطہ $(1,1)$ اور $(1,-1)$ پر $2x^2 + 3y^2 = 5$ اور $y^2 = x^3$ کے مماس میں کوئی خاصیت پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل 3.63)۔

سوال 65: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ کا مماس اس منحنی کو کس دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے؟
جواب: $(3,-1)$

سوال 66: منحنی $xy + 2x - y = 0$ کا ایسا عمود تلاش کریں جو $2x + y = 0$ کے متوازی ہو۔

سوال 67: دکھائیں کہ اگر نقطہ $(a, 0)$ سے قطع مکافی $x = y^2$ تک تین عمود بنانا ممکن ہو تب $a > \frac{1}{2}$ ہو گا۔ تیسرا عمود x محور ہے۔ a کی کس قیمت کے لئے باقی دو عمود آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں (شکل 3.64)؟

سوال 68: مثال 3.52 اور مثال 3.53-ا میں کس جیومیٹری کی بنا دائرہ کار کے حدود تعین ہوتے ہیں؟

سوال 69 اور سوال 70 میں پہلے y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں اور اس کے بعد x کو y کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ تلاش کریں۔ کیا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ کیا آپ اس تعلق کو منحنی کی ترسیم کی مدد سے جیومیٹری کے ذریعہ سمجھا سکتے ہیں؟

سوال 69: $xy^3 + x^2y = 6$

جواب: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}$

سوال 70: $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 71:

ا. منحنی $x^4 + 4y^2 = 1$ کا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ عمومی طریقہ اور مخفی طریقہ سے حاصل کریں۔ کیا دونوں جوابات ایک دوسرے جیسے ہیں؟

ب. مساوات $x^4 + 4y^2 = 1$ کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تمام حاصل تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے $x^4 + 4y^2 = 1$ کی مکمل ترسیم کھینچیں۔ اب ساتھ ہی ان تفاعل کے یک رتبی تفرق کی ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا $x^4 + 4y^2 = 1$ کی ترسیم کو دیکھ کر آپ اس کے تفرق کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا مساوات کے تفرق کی تقسیم کو دیکھ کر آپ مساوات کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 72:

ا. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کا تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ دو طریقوں سے تلاش کریں۔ پہلی بار مساوات کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تفرق حاصل کریں جبکہ دوسری بار خفی طریقہ استعمال کریں۔ کیا دونوں بار ایک جیسے جوابات حاصل ہوتے ہیں؟

ب. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کو y کے لئے حل کریں۔ تمام حاصل تفاعل کا ترسیم کھینچ کر مساوات $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کی مکمل ترسیم حاصل کریں۔ اب تفاعل کے یک رتبی تفرق کا ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا آپ مساوات کی ترسیم کو دیکھ کر اس کے تفرق کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا آپ تفرق کی ترسیم کو دیکھ کر مساوات کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 73 تا سوال 80 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. کمپیوٹر پر مساوات کو ترسیم کریں۔ تصدیق کریں کہ نقطہ N مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. مخفی طریقہ سے تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا کلیہ حاصل کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کی قیمت تلاش کریں۔

ج. N پر ڈھلوان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے اس نقطے پر مماس کی مساوات حاصل کریں۔ مماس اور مساوات کو اکٹھے ترسیم کریں۔

سوال 73: $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad N(2,1)$

سوال 74: $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad N(1,1)$

سوال 75: $y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad N(0,1)$

سوال 76: $y^3 + \cos(xy) = x^2, \quad N(1,0)$

سوال 77: $x + \tan(\frac{y}{x}) = 2, \quad N(1,\pi/2)$

سوال 78: $xy^3 + \tan(x+y) = 1, \quad N(\pi/4,0)$

سوال 79: $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad N(1,1)$

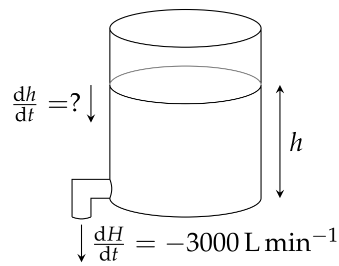
سوال 80: $x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad N(1,0)$

3.7 دیگر شرح تبدیلی

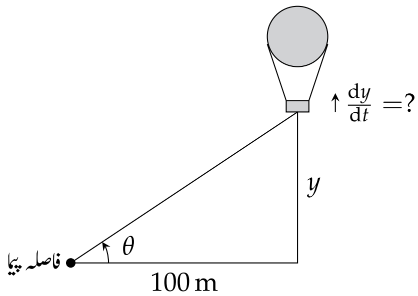
ٹینکی سے $3000\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے ہیں۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 3.54: انعکاس
$3000\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس r کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی h ہے۔یوں پانی کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا جہاں حجم کو H سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل 3.65)۔اب ہمیں انعکاس

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -3000$$



شکل 3.65: پانی کی ٹینکی (مثال 3.54)



شکل 3.66: غبارہ (مثال 3.55)

بتلایا گیا ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتی ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں H اور h کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 1000\pi r^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

جہاں دائیں جانب r مستقل ہے۔ اس میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ کی معلوم قیمت پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

پانی کی گہرائی $\frac{3}{\pi r^2}$ میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہو گی۔ مثلاً $r = 1\,\mathrm{m}$ اور $r = 10\,\mathrm{m}$ کی صورت میں شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 1\,\mathrm{m})$$
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -0.95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 10\,\mathrm{m})$$

□

مثال 3.55: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل 3.66)۔ غبارے کی نقطہ اڑان سے $100\,\mathrm{m}$ دور واقع فاصلہ پیما[41] سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پیما کا زاویہ صعود $\frac{\pi}{4}$ تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح $0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}}$ تھی۔ اس لمحہ پر غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟

حل: ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔

پہلا قدم: موقع کی تصور کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات θ اور y درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پیما کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو t سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ θ اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پیما سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ $100\,\mathrm{m}$ ہے جس کو متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}} \qquad (\theta = \tfrac{\pi}{4})$$

تیسرا قدم: جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے $\theta = \pi/4$ کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ پوچھا گیا ہے۔

چوتھا قدم: متغیرات θ اور y کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100} = \tan\theta \quad \implies \quad y = 100\tan\theta$$

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے t کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ (درکار معلومات) اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

چھٹا قدم: $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0.14$ پر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100(\sec\tfrac{\pi}{4})^2(0.14) = 28\,\mathrm{m\,min^{-1}}$$

□

اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

- مسئلے کی تصور کشی کریں۔ وقت کو t سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو t کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔
- اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کی روپ میں لکھیں۔
- مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کی روپ میں ہو گا)۔

---
[41] range finder

- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی بار آپ کو دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنا ہو گا۔
- اس کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔
- معلوم معلومات کو پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال 3.56: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ $0.6\,\mathrm{km}$ اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ $0.8\,\mathrm{km}$ ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔پولیس کی گاڑی کی رفتار $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر اور متغیرات۔ ہم کارتیسی محدد پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو x محور جبکہ پولیس کی گاڑی کو y محور پر رکھتے ہیں۔ وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ t پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام x , پولیس کی گاڑی کا مقام y اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ s ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ x ، y اور s متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔

دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8\,\mathrm{km}, \quad y = 0.6\,\mathrm{km}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60\,\mathrm{km\,h^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس لئے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی y رخ چل رہی ہے۔

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔

چوتھا قدم: مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق $s^2 = x^2 + y^2$ ہے۔

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ کی مدد سے t کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{s}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

چھٹا قدم: $x = 0.8$ ، $y = 0.6$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60$ اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20$ پر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned}
20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2+0.6^2}}\left(0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 0.6(-60)\right)\\
20 &= 0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 36\\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{20+36}{0.8} = 70
\end{aligned}$$

اس لمحہ پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار $70\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔

□

مثال 3.57: پانی کی مخروطی ٹینکی $9\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ، اس کا قد $10\,\mathrm{m}$ ہے اور اس کی نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $6\,\mathrm{m}$ ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟

حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

H : لمحہ t (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

x : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

y : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ H ، x اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔

دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6\,\mathrm{m}, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$$

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔

چوتھا قدم: متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

چونکہ لمحہ t پر ہمیں x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی ہے لہذا ہمیں x سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ مشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \implies \quad x = \frac{y}{2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H = \frac{1}{3}\pi(\tfrac{y}{2})^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

پانچواں قدم: t کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{12} \cdot 3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

اس کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi y^2} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$

چھٹا قدم: دی گئی معلومات یعنی $y = 6$ اور $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi(6^2)} \cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32\,\mathrm{m\,min^{-1}}$$

اس لمحے پر پانی کی گہرائی $0.32\,\mathrm{m\,min^{-1}}$ سے بڑھ رہی ہے۔ □

سوالات

سوال 1: فرض کریں کہ دائرے کا رداس r اور رقبہ $S = \pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔
جواب: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\pi r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

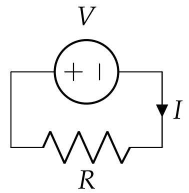
سوال 2: فرض کریں کرہ کا رداس r اور سطحی رقبہ $S = \frac{4}{3}\pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال 3: بیلن کے رداس r، قد h اور حجم H کا تعلق $H = \pi r^2 h$ ہے۔

ا. r کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب. h کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نا r اور نا h مستقل ہوں تب $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟



شکل 3.67: برقی دور برائے سوال 5

جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$، (ب) $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 2\pi rh \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$، (ج) $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + 2\pi rh \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

سوال 4: سیدھا کھڑے مخروط جس کا رداس r اور قد h ہوں کا حجم $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہو گا۔

ا. مستقل r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ب. مستقل h کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل h اور r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال 5: مزاحمت R میں برقی رو I اور برقی دباو V کا تعلق $V = IR$ ہے (شکل 3.67 میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباو $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو $\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$ سے گھٹ رہی ہے۔

ا. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ب. $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ج. $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

د. جب $V = 12$ وولٹ اور $I = 2$ ایمپیئر ہوں تب $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کیا ہو گا؟ کیا R بڑھ رہا ہو گا یا گھٹ رہا ہو گا؟

جواب: (ا) $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$، (ب) $-\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$، (ج) $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{I}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - \frac{V}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)$، (د) $\frac{3}{2}\,\Omega\,\mathrm{s^{-1}}$ ، مزاحمت بڑھ رہی ہے۔

سوال 6: برقی دور میں طاقت P ، مزاحمت R اور برقی رو i کا تعلق $P = i^2 R$ ہے۔ طاقت، مزاحمت اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W) ، اوہم Ω اور ایمپیئر (A) ہیں۔

ا. $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہے جہاں P ، R اور i میں سے کوئی بھی مستقل نہیں ہے۔

ب. مستقل P کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ کا کیا تعلق ہے؟

سوال 7: کارتیسی محدد میں نقطہ $(x,0)$ اور $(0,y)$ کے بیچ فاصلہ $s=\sqrt{x^2+y^2}$ ہے۔ وقت کو t سے ظاہر کریں۔

ا. مستقل y کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟

ب. اگر x اور y دونوں متغیر ہوں تب $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

ج. مستقل s کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کا کیا تعلق ہو گا؟

جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، (ب) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ، (ج) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

سوال 8: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ڈبے کے وتر کی لمبائی $s=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہو گی۔

ا. فرض کریں x ، y اور z مستقل نہیں ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

ب. مستقل x کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

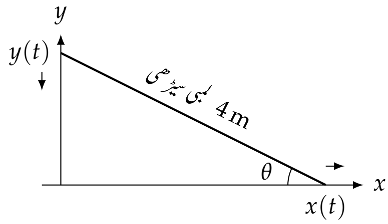
ج. مستقل x کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 9: ایک مثلث جس کے ضلع a اور b جن کے بیچ زاویہ θ ہو کا رقبہ $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ ہو گا۔

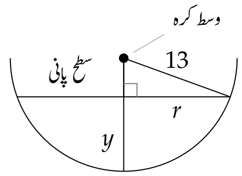
ا. مستقل a اور b کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟

ب. مستقل b کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟

ج. a ، b اور θ غیر مستقل ہونے کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟



شکل 3.68: دیوار کے ساتھ سیڑھی (سوال 13)



شکل 3.69: نصف کرہ ٹینکی (سوال 19)

جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$، (ب) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$، (ج) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}a\sin\theta\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$

سوال 10: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس r ہے جس سے اس کا رداس $0.01\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$ کی شرح سے بڑھتا ہے۔ جب رداس $50\,\mathrm{cm}$ ہو تب تختے کا رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

سوال 11: مستطیل کی لمبائی l اور چوڑائی w کی شرح تبدیلی $2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ اور $2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ ہیں۔ جب $l = 12\,\mathrm{cm}$ اور $w = 5\,\mathrm{cm}$ ہو تب شرح تبدیلی (ا) رقبہ، (ب) محیط، (ج) وتر کیا ہوں گے؟ ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟

جواب: (ا) $14\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ سے بڑھتا ہے؛ (ب) $0\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$، مستقل؛ (ج) $-\frac{14}{13}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$، گھٹ رہا ہے۔

سوال 12: مستطیل ڈبے کے ضلع کی لمبائیاں x، y اور z ہیں۔ ان کی شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

ہیں۔ جس لمحہ $x = 4$، $y = 3$ اور $z = 2$ ہوں اس لمحہ ڈبے کے (ا) حجم، (ب) سطحی رقبہ، (ج) وتر $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہو گی؟

سوال 13: دیوار کے ساتھ لگی $4\,\mathrm{m}$ لمبی سیڑھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے (شکل 3.68)۔ جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیڑھی کا فاصلہ $3\,\mathrm{m}$ ہو اس لمحہ پر سیڑھی کا یہ سر $0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

ا. اس لمحے پر سیڑھی کا بالائی سر کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

ب. سیڑھی، زمین اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔ اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ج. اس لمحے پر سیڑھی اور زمین کے بیچ زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟

جواب: (ا) $\frac{-3\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $\frac{-\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$

سوال 14: دو ہوائی جہاز $7000\,\mathrm{m}$ کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔جہاز الف کی رفتار $1000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ جبکہ جہاز ب کی رفتار $850\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ $50\,\mathrm{km}$ اور ب کا فاصلہ $100\,\mathrm{km}$ ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 15: ایک لڑکی $300\,\mathrm{m}$ بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ہوا پتنگ کو افقی رخ $25\,\mathrm{m\,min^{-1}}$ کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ $500\,\mathrm{m}$ ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟
جواب: $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 16: پرانے انجن کی بیلن کو خراد کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا پسٹن ڈالا جاتا ہے۔خراد کی مشین بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں $25\,\mathrm{\mu m}$ بڑھاتی ہے۔جب رداس $9.8\,\mathrm{cm}$ ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال 17: ریت کو $10\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی $\frac{3}{8}$ ہوتی ہے۔ جب ڈھیر $4\,\mathrm{m}$ اونچا ہو اس لمحہ ڈھیر کی (ا) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔
جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 11.19\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$، (ب) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 14.92\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$

سوال 18: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی $6\,\mathrm{m}$ اور رداس $45\,\mathrm{m}$ ہیں سے پانی کو $50\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔ مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔ (ا) جب پانی $5\,\mathrm{m}$ گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحے پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔

سوال 19: نصف کرہ جس کا رداس $R = 13\,\mathrm{m}$ ہے سے پانی کا انعکاس $6\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے کیا جاتا ہے (شکل 3.69)۔ پانی کا حجم $H = \frac{\pi}{3}y^2(3R-y)$ ہے جہاں y پانی کی گہرائی ہے۔

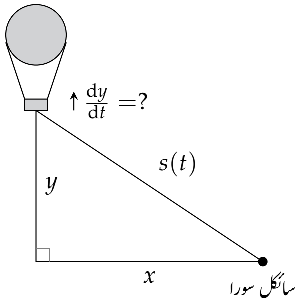
ا. جب پانی کی گہرائی $8\,\mathrm{m}$ ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

ب. جب پانی کی گہرائی y ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟

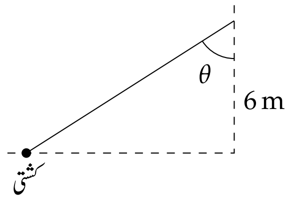
ج. جب پانی $8\,\mathrm{m}$ گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

جواب: (ا) $-\frac{1}{24\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$، (ب) $r = \sqrt{26y-y^2}\,\mathrm{m}$، (ج) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{5}{288\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$

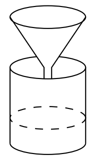
سوال 20: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔



شکل 3.71: غبارہ کے نیچے سے گاڑی گزرتی ہے (سوال 23)



شکل 3.70: کشتی کو بندرگاہ میں کھینچا جاتا ہے (سوال 22)



شکل 3.72: مخروط چھلنی (سوال 24)

سوال 21: ایک غبارے میں $100\pi\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے ہیلیم[42] گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $1\,\mathrm{m/\,min}$ ، $40\pi\,\mathrm{m^2\,min^{-1}}$

سوال 22: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے $6\,\mathrm{m}$ اونچائی سے بندرگاہ کی طرح کھینچا جاتا ہے (شکل 3.70)۔ رسی کو $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار کھینچا جاتا ہے۔ (ا) جب رسی کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 23: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتا ہے۔ جب یہ $65\,\mathrm{m}$ بلندی پر پہنچتا ہے ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی $17\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے (شکل 3.71)۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟
جواب: $11\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 24: مخروط چھلنی میں بیک وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں $10\,\mathrm{cm^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے بھری جاتی ہے (شکل 3.72)۔ (ا) چھلنی میں چائے کی گہرائی $5\,\mathrm{cm}$ ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحہ پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟

---

[42] helium

سوال 25: اخراج قلب جرمنی کے اڈولف فک نے 1860 کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس جملے کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً $7\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر $6\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب $30\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ تک خون خارج کر سکتا ہے۔

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

سے کیا جا سکتا ہے جہاں سانس سے خارج CO_2 کی ملی لٹر فی منٹ میں مقدار کو Q سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں CO_2 کی کثافت $\mathrm{mL/L}$ اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں CO_2 کی کثافت کے فرق کو D سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں $Q = 223\,\mathrm{mL/min}$ اور $D = 97 - 56 = 41\,\mathrm{mL/L}$ کی صورت میں

$$y = \frac{223\,\mathrm{mL/min}}{41\,\mathrm{mL/L}} \approx 5.68\,\mathrm{L/min}$$

ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ جب $Q = 233$ اور $D = 41$ ہوں تب D کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ Q میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی ہے۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟
جواب: $\frac{466}{1681}\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔

سوال 26: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ x اشیاء کو $c(x)$ لاگت، $r(x)$ آمدنی اور $p(x) = r(x) - c(x)$ منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔ x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی درج ذیل قیمتوں کے لئے $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ کا حساب کریں۔

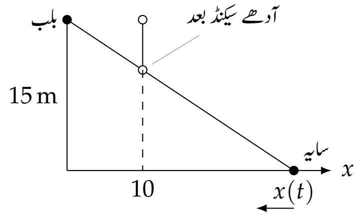
ا.

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.1, \quad x = 2$$

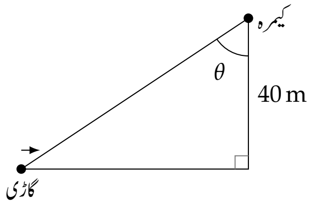
ب.

$$r(x) = 70x, \quad c(x) = x63 - 6x62 + \frac{45}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.05, \quad x = 1.5$$

سوال 27: قطع مکافی پر حرکت۔ ایک ذرہ قطع مکافی $y = x^2$ پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x = 3\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے



شکل 3.73: گیند کا سایہ (سوال 31)



شکل 3.74: گاڑی کی ویڈیو (سوال 32)

تبدیل ہو گا؟
جواب: $1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

سوال 28: دوسرا قطع مکافی۔ ایک ذرہ دائیں سے بائیں جانب قطع مکافی $y=\sqrt{-x}$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $\frac{8}{\mathrm{ms}}$ سے گھٹتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x=-4\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 29: مستوی پر حرکت۔ کارتیسی محدد پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے تعین گر x اور y محدد وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔اگر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں تب مبدا سے ذرے کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

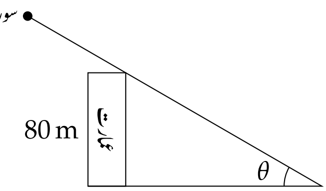
سوال 30: حرکت پذیر سایہ۔ $2\,\mathrm{m}$ قد کا ایک شخص گلی میں روشنی کے کھمبے کی طرف $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے چل رہا ہے۔ کھمبے میں نسب بلب زمین سے $5\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔جب شخص کھمبے سے $4\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو، اس کا سایہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 31: دوسرا حرکت کرتا سایہ۔ کھمبے پر بلب $15\,\mathrm{m}$ بلندی پر نسب ہے۔کھمبے سے $10\,\mathrm{m}$ فاصلے پر اتنی ہی بلندی سے ایک گیند کو زمین پر گرنے دیا جاتا ہے (شکل 3.73)۔ آدھے سیکنڈ بعد زمین پر گیند کا سایہ کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ ($g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)
جواب: $490\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

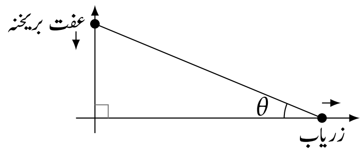
سوال 32: آپ $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی سے $150\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر $40\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے گاڑی کی ویڈیو[43] بنا رہے ہیں جو سیدھی آپ کی طرف آ رہی ہے (شکل 3.74)۔اس لمحے پر کیمرے کا زاویہ میلان سے شرح سے تبدیل ہو گا؟ دو سیکنڈ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

سوال 33: برف کی پگھلتی تہہ۔ ایک لوہے کا کرہ جس کا رداس $0.1\,\mathrm{m}$ ہے پر برف کی یکساں موٹائی کی تہہ جمائی جاتی ہے جو $10\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ کی شرح سے پگھلتی ہے۔ جس لمحے پر تہہ کو موٹائی $2\,\mathrm{cm}$ ہو اس لمحے پر تہہ کی موٹائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟
جواب: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=1.66\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}},\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=55\,\mathrm{\mu m\,s^{-1}}$

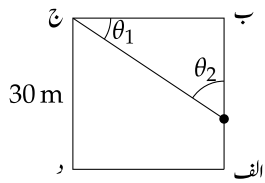
video[43]



شکل 3.75: عمارت کا سایہ (سوال 35)



شکل 3.76: عفت اور زریاب کی چال قدمی (سوال 36)



شکل 3.77: بچوں کا کھیل (سوال 37)

سوال 34: موٹروے پولیس۔ $1\,\mathrm{km}$ بلندی پر ایک جہاز پشاور سے اسلام آباد کی موٹروے کے ٹھیک اوپر $500\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پرواز کرتے ہوئے موٹروے پر سامنے سے آمد گاڑی کا فاصلہ $5\,\mathrm{km}$ ناپتا ہے جو اس لمحے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ گاڑی کی رفتار تلاش کریں۔

سوال 35: عمارت کا سایہ۔ سال کے کسی ایک دن سورج $80\,\mathrm{m}$ بلند عمارت کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے (شکل 3.75)۔ جب عمارت کا سایہ ہموار زمین پر $60\,\mathrm{m}$ ہو، سایے کے سر سے سورج تک کا خط زمین کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے جو اس لمحہ $0.27°/\mathrm{min}$ کی شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔ سایے کی لمبائی کس شرح سے گھٹتی ہے؟ جواب $\mathrm{cm/min}$ میں دیں اور ریڈیئن کا استعمال کرنا نہ بھولیں۔
جواب: $58.9\,\mathrm{cm/min}$

سوال 36: چال قدمی۔ ایک چوراہے پر دو سڑک $90°$ زاویے سے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک سڑک پر عفت بریخنہ چوراہے کی جانب $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے بڑھتی ہے جبکہ دوسری سڑک پر اس کا چھوٹا بھائی زریاب خان $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چوراہے سے دور چلا جاتا ہے (شکل 3.76)۔ جب عفت بریخنہ اور زریاب خان چوراہے سے بالترتیب $20\,\mathrm{m}$ اور $15\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر ہوں، زاویہ θ کی شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

سوال 37: بچوں کا کھیل۔ ایک کھیل میں کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے دوڑ کر گھری کی الٹ رخ چکور راہ پر $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چکر لگاتا ہے۔ چکور کے اطراف کی لمبائی $30\,\mathrm{m}$ ہے (شکل 3.77)۔

ا. جب کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے $10\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو، اس کا نقطہ ج سے فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ب. اس لمحے پر زاویہ θ_1 اور θ_2 کس شرح سے تبدیل ہوتے ہیں؟

جواب: (ا) $\frac{-12}{\sqrt{13}}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، (ب) $\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}=-0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}=0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

سوال 38: ایک گھڑی کے سیکنڈوں کی سوئی کی لمبائی $20\,\mathrm{cm}$ ہے۔جب یہ سوئی چار بجے پر ہو اس لمحہ بارہ بجے کی نشان سے اس کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 39: بحری جہاز۔ نقطہ M سے دو بحری جہاز آپس میں $120°$ کا زاویہ بناتے ہوئے روانہ ہوتے ہیں۔جہاز الف کی رفتار $28\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے جبکہ جہاز ب کی رفتار $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ایک گھنٹہ بعد ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $4\sqrt{109}\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

باب 4

تفرق کا استعمال

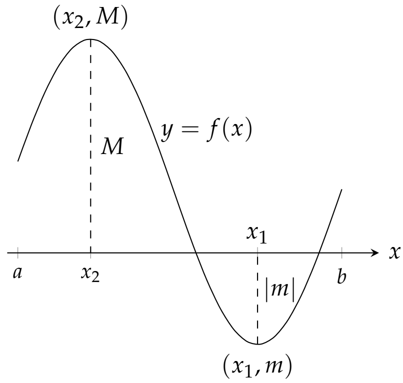
اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ ہم تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی کرتے ہیں اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کی صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ تکملی احصاء کی راہ ہموار کرتا ہے۔

4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں

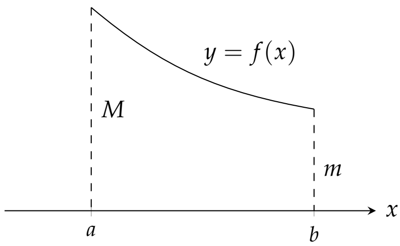
اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

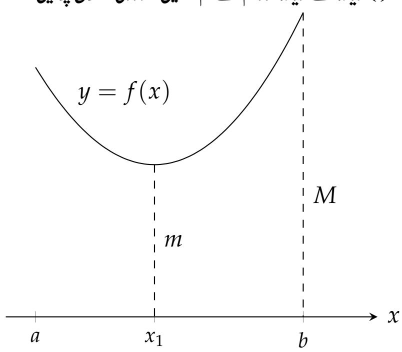
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کا اس دائرہ کار پر مطلق بلند تر قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت ہو گا جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں ان انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ تکمل احصاء کی نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔



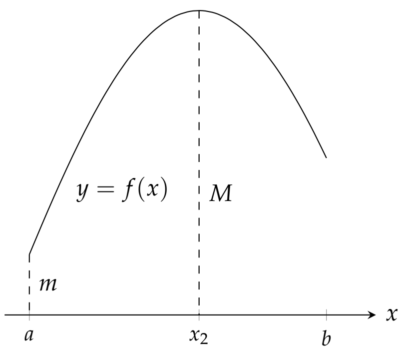
(ا) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔



(ب) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم آخری نقطوں پر ہے۔

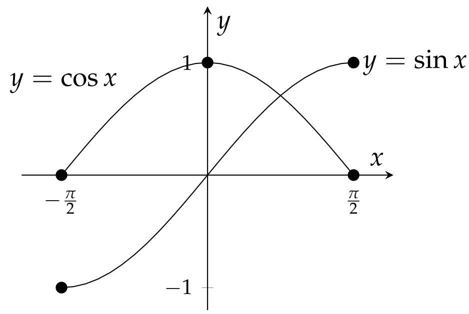


(ج) کم سے کم اندرونی نقطہ جبکہ زیادہ سے زیادہ آخری نقطہ ہے۔



(د) زیادہ سے زیادہ اندرونی نقطہ جبکہ کم سے کم آخری نقطہ پر ہے۔

شکل 4.1: زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔



شکل 4.2: ترسیم برائے مثال 4.1

مسئلہ 4.1: استمراری تفاعل کا مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

بند دائرہ کار I کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل f کا I پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت M اور مطلق کم سے کم قیمت m پایا جائے گا۔یعنی I میں ایسا x_1 اور x_2 پایا جائے گا کہ $f(x_1) = m$ اور $f(x_2) = M$ ہوں اور I میں تمام x کے لئے $m \le f(x) \le M$ ہو (شکل 4.1)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہٰذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

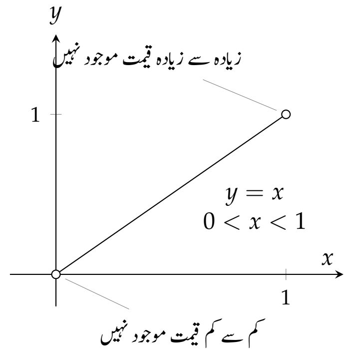
مثال 4.1: وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور دو بار کم سے کم قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔اسی وقفے پر تفاعل $g(x) = \sin x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور ایک بار کم سے کم قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل 4.2)۔ $\square$

جیسا شکل 4.3 اور شکل 4.4 واضح کرتے ہیں مسئلہ 4.1 میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

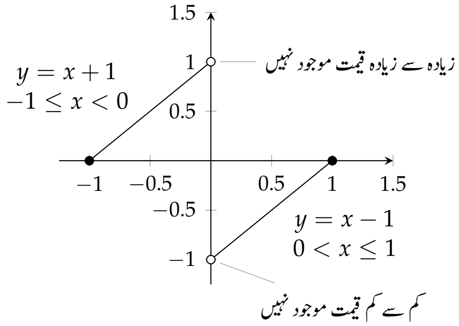
شکل 4.4 میں تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

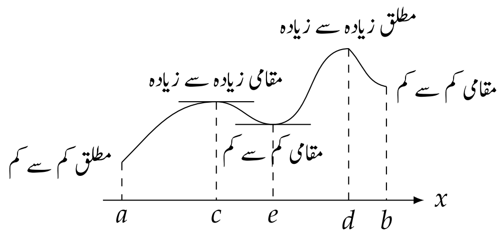
دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-1, 1]$ پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ $x = 0$ پر، جس کی بنا تفاعل کا نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی اس کی کوئی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔



شکل 4.3: کھلا وقفہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں ہے۔



شکل 4.4: واحد ایک نقطہ عدم استمرار کی بنا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں غیر یقینی ہو سکتے ہیں۔



شکل 4.5: مقامی اور مطلق انتہا۔

مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

شکل 4.5 میں تفاعل کے پانچ انتہا نقطے دکھائے گئے ہیں۔اس تفاعل کا کم سے کم نقطہ a پر ہے اگرچہ e پر بھی x کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے f کی قیمت کم ہے۔نقطہ c پر تفاعل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے جبکہ d پر اس کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔

تعریف: مطلق انتہائی قیمتیں
فرض کریں تفاعل f کا دائرہ کار D ہے۔نقطہ c پر تفاعل f کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تب پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \le f(c)$$

اور D میں c پر تب f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \ge f(c)$$

□

مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم کو مطلق انتہا[1] کہتے ہیں۔انہیں عالمگیر[2] انتہا بھی کہتے ہیں۔

ایک جیسے قاعدہ کے تفاعل کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

مثال 4.2:

	تفاعل قاعدہ	کار دائرہ D	انتہا مطلق
(ا)	$y=x^2$	$(-\infty,\infty)$	مطلق زیادہ سے زیادہ نہیں ہے جبکہ $x=0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے
(ب)	$y=x^2$	$[0,2]$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x=2$ پر 4 ہے جبکہ $x=0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے
(ج)	$y=x^2$	$(0,2]$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x=2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت موجود نہیں ہے
(د)	$y=x^2$	$(0,2)$	کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے

شکل 4.6 دیکھیں۔

□

تعریف: مقامی انتہا قیمت

تفاعل f کا کھلے دائرہ کار D میں اندرونی نقطہ c پر اس صورت مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جب D میں کسی بھی کھلا وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں تمام x کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ c پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

$$f(x) \geq f(c)$$

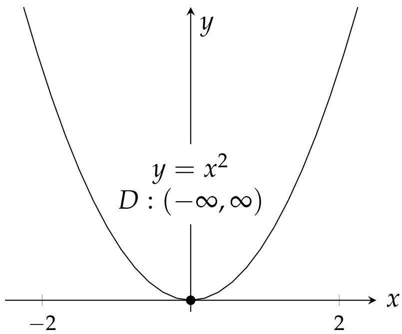
□

ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفہ کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔یوں آخری سر c پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلا وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل 4.5 میں تفاعل f کا c اور d پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ a ، e اور b پر اس کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہیں۔

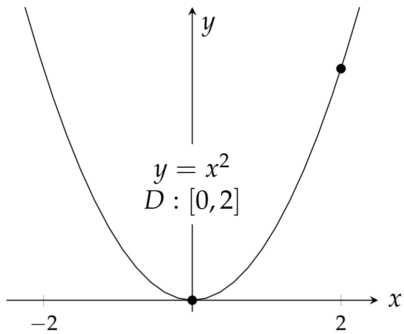
مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت بھی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اپنی پڑوس میں بھی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔یوں تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتوں کی جدول میں مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی کم سے کم قیمتوں کی جدول میں مطلق کم سے کم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

---

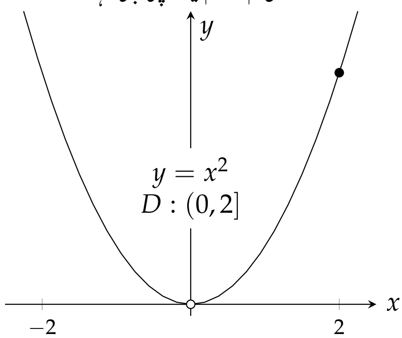
[1] extrema
[2] global



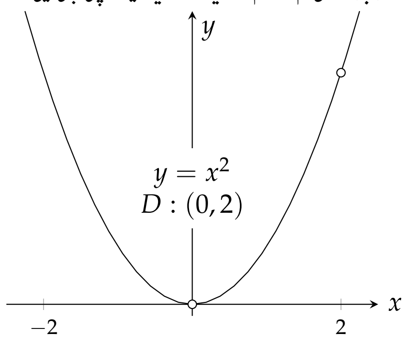
(ا) مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے



(ب) مطلق کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہیں



(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے



(د) نا مطلق زیادہ سے زیادہ اور نا مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے

شکل 4.6: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال 4.2)۔

انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھاتا ہے تفاعل کے انتہا کی حصول کے لئے صرف چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہو گی۔

مسئلہ 4.2: یک رتبی مسئلہ برائے مقامی انتہا فرض کریں تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ c پر f کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو اور c پر f' معین ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر $f'(c)$ کی قیمت صفر ہو گی ہم دکھاتے ہیں کہ $f'(c)$ مثبت نہیں ہو سکتا ہے اور کہ $f'(c)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے۔صفر وہ واحد عدد ہے جو نا مثبت اور نا منفی ہے لہٰذا $f'(c)$ صفر ہو گا۔

فرض کریں کہ c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.7)۔ یوں c کے قریبی پڑوس میں تمام x پر $f(x) - f(c) \leq 0$ ہو گا۔چونکہ c اندرونی نقطہ ہے لہٰذا $f'(c)$ کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہو گی۔

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ $x = c$ پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور $f'(c)$ کے برابر ہیں۔ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔چونکہ c کے دائیں جانب $x - c > 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{4.1}$$

ہو گا۔اسی طرح c کے بائیں جانب $x - c < 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

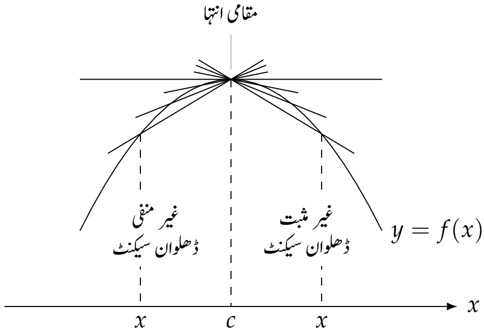
$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{4.2}$$

ہو گا۔مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کو ملا کر $f'(c) = 0$ ملتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے $f(x) \geq f(c)$ استعمال کرنا ہو گا جس سے مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب $f'(c) = 0$ ہو گا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔



شکل 4.7: اندرونی نقطہ پر مقامی انتہا پر ڈھلوان صفر ہو گی (مسئلہ 4.2)۔

1. اندرونی نقطہ جہاں $f' = 0$ ہو۔

2. اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین ہو۔

3. f کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف : تفاعل f کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین یا صفر ہو کو نقطہ فاصل[3] کہتے ہیں۔

□

خلاصہ
تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کی دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں۔

عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ 4.1 ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔ اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جا سکتا ہے کہ آیا نقطہ پر زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

---

critical point[3]

مثال 4.3: دائرہ کار $[-2,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔
حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا واحد نقطہ فاصل $f'(x) = 2x = 0$ یعنی $x = 0$ پر ہو گا۔ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل $x = 0$ اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 1$ پر دیکھنی ہوں گی۔

$f(0) = 0$	قیمت پر فاصل نقطہ
$f(-2) = 4$	قیمت پر نقطہ آخری
$f(1) = 1$	قیمت پر نقطہ آخری

تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 ہے جو نقطہ $x = -2$ پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے۔ □

مثال 4.4: دائرہ کار $[-2,1]$ پر تفاعل $g(t) = 8t - t^4$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔
حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہو گا جہاں $g'(t) = 0$ ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\
t^3 &= 2 \\
t &= 2^{1/3}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں ہے۔یوں تفاعل کے مقامی انتہا قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی: (شکل 4.8)

$g(-2) = -32$	قیمت کم سے کم مطلق
$g(1) = 7$	قیمت زیادہ سے زیادہ مطلق

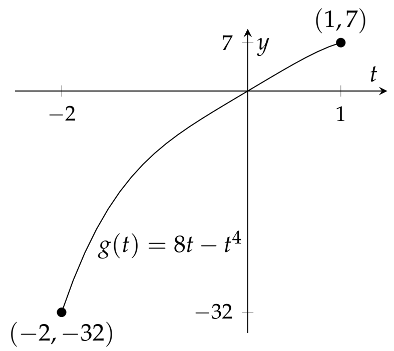
□

مثال 4.5: تفاعل $h(x) = x^{2/3}$ کی $[-2,-3]$ پر مطلق انتہا تلاش کریں۔
حل: یک رتبی تفرق

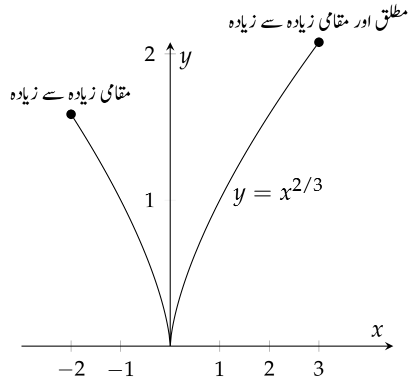
$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا ہے البتہ $x = 0$ پر یہ غیر معین ہے۔اس نقطہ پر اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 3$ پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

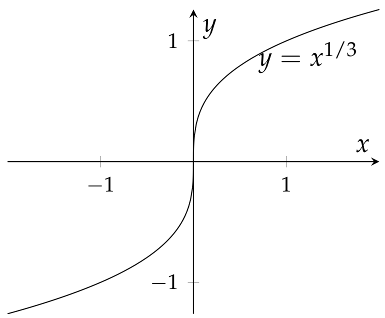
$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0 \\
h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\
h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3}
\end{aligned}
$$



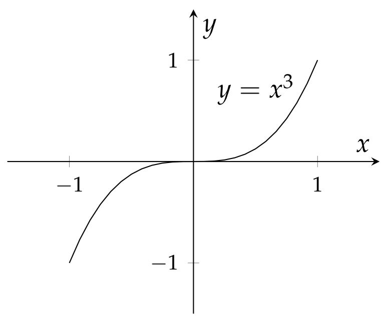
شکل 4.8: ترسیم برائے مثال 4.4



شکل 4.9: ترسیم برائے مثال 4.5



شکل 4.10: نقطہ فاصل $x = 0$ پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔



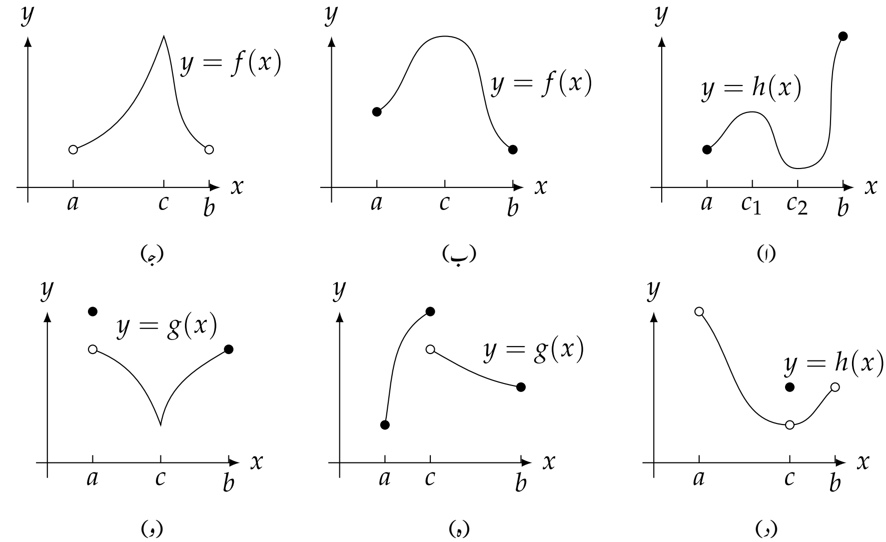
شکل 4.11: $x = 0$ پر $y = x^3$ کا کوئی انتہا نہیں پایا جاتا ہے اگرچہ اس نقطے پر $y' = 3x^2 = 0$ ہے۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $9^{1/3}$ ہے جو نقطہ $x = 3$ پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے (شکل 4.9)۔ □

اگرچہ تفاعل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں، ضروری نہیں ہے کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطہ پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل 4.10 اور شکل 4.11 اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

سوالات

ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول



شکل 4.12: اشکال برائے سوال 1 تا سوال 6

کیا سوال 1 تا سوال 6 میں $[a, b]$ کے بیچ تفاعل کے مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ سمجھائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ 4.1 میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 1: شکل 4.12-ا
جواب: $x = c_2$ پر مطلق کم سے کم؛ $x = b$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ۔

سوال 2: شکل 4.12-ب

سوال 3: شکل 4.12-ج
جواب: $x = c$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ؛ مطلق کم سے کم غیر موجود۔

سوال 4: شکل 4.12-د

سوال 5: شکل 4.12-ہ
جواب: $x = a$ پر مطلق کم سے کم؛ $x = c$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ۔

سوال 6: شکل 4.12-و

بند وقفہ پر مطلق انتہا

سوال 7 تا سوال 22 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 7: $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$
جواب: $x = 3$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ؛ $-\frac{19}{3}$ $x = -2$ پر مطلق کم سے کم۔ شکل 4.13-ا

سوال 8: $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

سوال 9: $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 3 ، مطلق کم سے کم : -1 ، شکل 4.13-ب

سوال 10: $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

سوال 11: $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: -0.25 ، مطلق کم سے کم : -4 ، شکل 4.13-ج

سوال 12: $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

سوال 13: $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2 ، مطلق کم سے کم : -1 ، شکل 4.13-د

سوال 14: $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

سوال 15: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2 ، مطلق کم سے کم : 0 ، شکل 4.13-ہ

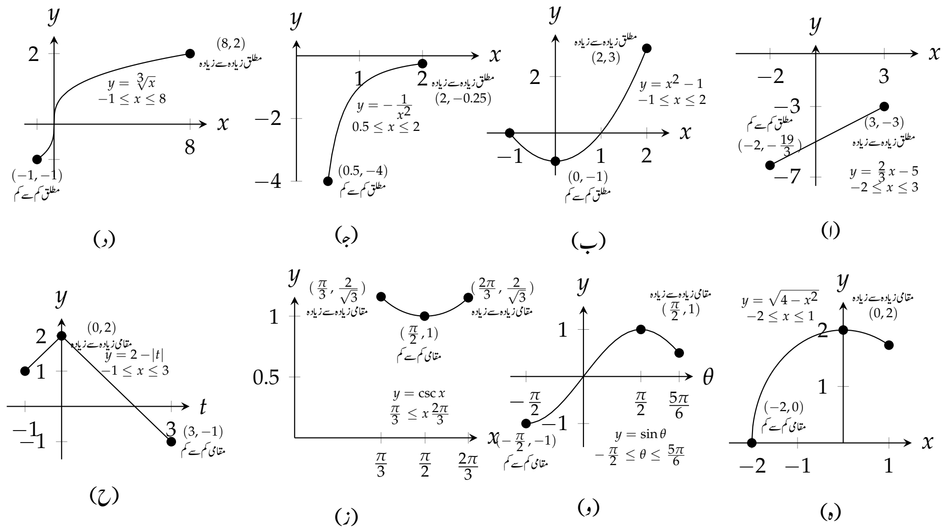
سوال 16: $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

سوال 17: $f(\theta) = \sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 1 ، مطلق کم سے کم : -1 ، شکل 4.13-و

سوال 18: $f(x) = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

سوال 19: $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، مطلق کم سے کم : -1 ، شکل 4.13-ز

سوال 20: $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$



شکل 4.13: حل ترسیمات سوال 7 تا سوال 22

سوال 21: $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2 ، مطلق کم سے کم : -1 ، شکل 4.13-ح

سوال 22: $f(t) = |t-5|, \quad -4 \le t \le 7$

سوال 23 تا سوال 26 میں تفاعل کی مطلق کم سے کم اور مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال 23: $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

جواب: $(0,8)$ پر بڑھتا ہے، $(-1,0)$ پر گھٹتا ہے، $x = 8$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 16 اور $x = 0$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 24: $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال 25: $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

جواب: $(-32,1)$ پر بڑھتا ہے، $\theta = 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1 اور $\theta = -32$ پر مطلق کم سے کم -8 ہے۔

سوال 26: $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال 27 تا سوال 27 میں دی گئے دائرہ کار پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال 27:

ا. $f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x \le 2$

ب. $g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < 2$

ج. $h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2$

د. $k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < \infty$

ہ. $l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty$

جواب: (ا) $x = \mp 2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 ہے، مطلق زیادہ سے زیادہ 0 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ب) $x = -2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 ہے، مطلق زیادہ سے زیادہ 0 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ج) مقامی زیادہ سے زیادہ غیر موجود، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (د) $x = -2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی کم سے کم -4 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ہ) مقامی انتہا غیر موجود، مطلق انتہا غیر موجود۔

سوال 28:

ا. $f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \le x \le 1$

ب. $g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \le 1$

ج. $h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1$

د. $k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \le 1$

ہ. $l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 29: اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ نا قابل تفرق ہے نقطہ $x = 0$ پر f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ کیا یہ مسئلہ 4.2 کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 30: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ c ہو تب مسئلہ 4.2 کیوں نا قابل استعمال ہو گا؟

سوال 31: اگر جفت تفاعل $f(x)$ کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 32: اگر طاق تفاعل $g(x)$ کی مقامی کم سے کم قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب کیا $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونا کی صورت میں کیا ہو گا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 34: وقفہ $[0,1]$ پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا $x = 0$ پر نا کوئی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 35 تا سوال 40 میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں $f' = 0$ ہو۔ بعض اوقات f' ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں f' غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ہ. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں اور جن نقطوں پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں تلاش کریں۔

سوال 35: $f(x) = x^4 - 8x62 + 4x + 2, \quad [-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}]$

سوال 36: $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-\frac{3}{4}, 3]$

سوال 37: $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

سوال 38: $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, \frac{10}{3}]$

سوال 39: $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

سوال 40: $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2 مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لمحہ $t = 0$) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی t سیکنڈوں میں $s = 4.9t^2\,\mathrm{m}$ کا فاصلہ طے کرے گا۔اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لمحہ t پر اس جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گی۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کی اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ ضمنی نتیجہ کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل $f(x)$ محور x کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب $f(x)$ کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مشل رول $(1652 - 1719)$ کا 300 سال پرانا مسئلہ رول ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

مسئلہ 4.3: مسئلہ رول[4]
فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $y = f(x)$ استمراری ہے اور وقفہ کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

$$f(a) = f(b) = 0$$

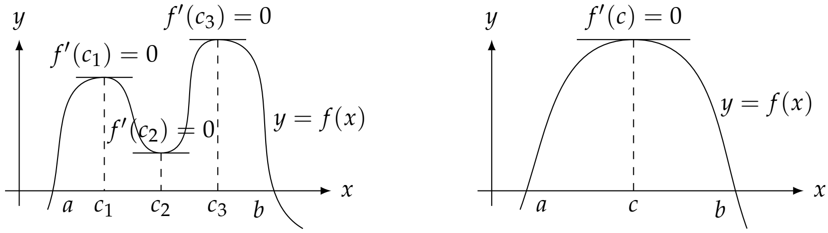
تب (a, b) میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ c ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل 4.14)۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: چونکہ f استمراری ہے لہٰذا $[a, b]$ پر f کے مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

1. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' ہو۔

---
[4] Rolle's theorem



شکل 4.14: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل x محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

2. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' غیر معین ہو۔

3. تفاعل کے دائرہ کار کی آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں a اور b ہیں۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر f کا تفرق پایا جاتا ہے۔یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ c پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ 4.2 کے تحت $f'(c) = 0$ ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت دونوں a یا b پر پائے جاتے ہوں تب f مستقل ہو گا۔یوں $f' = 0$ ہو گا لہٰذا وقفے کے کسی بھی نقطے کو c لیا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

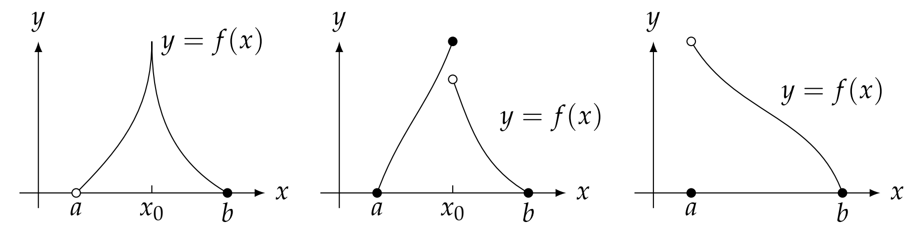
□

مسئلہ 4.3 میں دیے شرائط لازمی ہیں۔اگر صرف ایک نقطہ پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترسیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل 4.15)۔

مثال 4.6: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ $[-3, 3]$ کے ہر نقطہ پر استمراری ہے اور $(-3, 3)$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے۔

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

چونکہ $f(-3) = f(3) = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ رول کے تحت $a = -3$ اور $b = 3$ کھلا وقفہ کے بیچ کم سے کم ایک نقطہ پر $f' = 0$ ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں $f'(x) = x^2 - 3$ دو نقطوں $x = \sqrt{3}$ اور $x = -\sqrt{3}$ پر صفر کے برابر ہے (شکل 4.16)۔ □

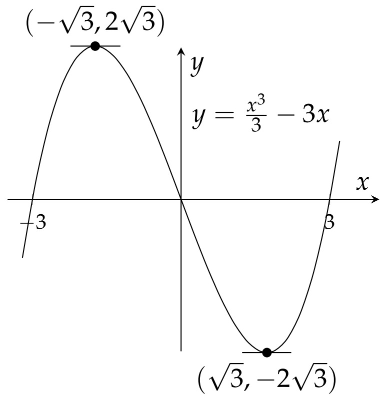


(ا) ایک آخری نقطہ پر غیر استمراری

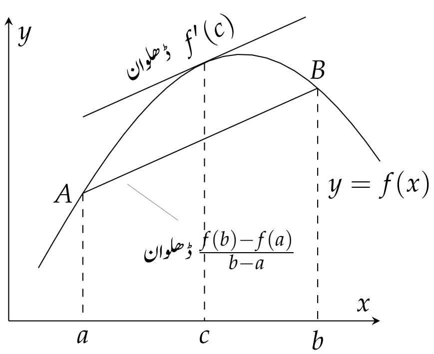
(ب) اندرونی نقطہ پر غیر استمراری

(ج) $[a, b]$ پر استمراری لیکن کسی اندرونی نقطہ پر نا قابل تفرق

شکل 4.15: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔



شکل 4.16: ترسیم برائے مثال 4.6



شکل 4.17: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا مماس قطع AB کے متوازی ہو گا۔

مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترچھی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل 4.17)۔ قطع AB کے متوازی نقطہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کی ڈھلوان قطع کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ اوسط قیمت[5] فرض کریں بند وقفہ $[a,b]$ کے ہر نقطہ پر $y=f(x)$ استمراری ہے اور اس کی اندرون (a,b) کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہے تب (a,b) میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{4.3}$$

ثبوت: ہم f کی ترسیم پر دو نقطوں $A(a,f(a))$ اور $B(b,f(b))$ کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل 4.18-ا)۔ یہ لکیر درج ذیل تفاعل کی ترسیم ہو گی۔

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \text{(نقطہ ڈھلوان صورت)} \tag{4.4}$$

نقطہ x پر f اور g کے بیچ انتصابی فاصلہ

$$\begin{aligned} h(x)&=f(x)-g(x)\\ &=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned} \tag{4.5}$$

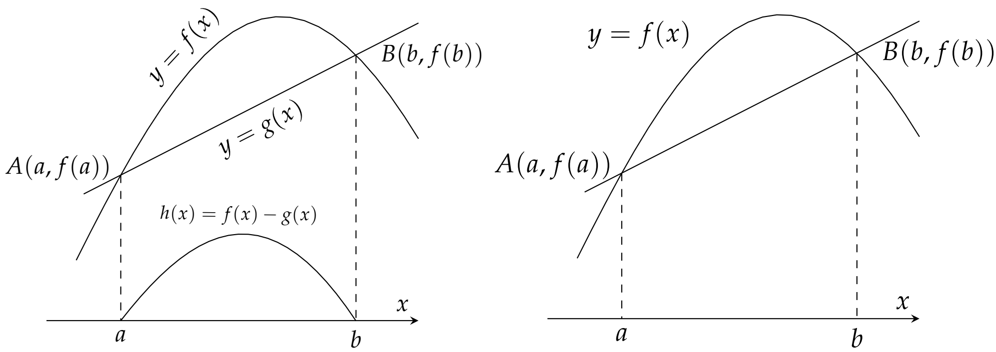
ہو گا۔ شکل 4.18-ب میں f ، g اور h دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل h وقفہ $[a,b]$ پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل h وقفہ $[a,b]$ پر استمراری اور (a,b) پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفہ پر f اور g استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ f اور g دونوں نقطہ A اور B سے گزرتے ہیں لہٰذا $h(a)=h(b)=0$ ہے۔ یوں (a,b) میں کسی نقطہ c پر $h'(x)=0$ ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات 4.3 میں درکار ہے۔

مساوات 4.3 کی تصدیق کی خاطر ہم x کے لحاظ سے مساوات 4.5 کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں $x=c$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} h'(x)&=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} && \text{(تفرق)}\\ h'(c)&=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} && (x=c)\\ 0&=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} && (h'(c)=0)\\ f'(c)&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

[5] mean value theorem



(ب) $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ افقی فاصلہ $h(x)$ ہے۔

(ا) وقفہ $[a,b]$ پر f اور قطع AB کے ترسیم۔

شکل 4.18: مسئلہ اوسط قیمت۔

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ a یا b پر f کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں ہے البتہ ان نقطوں پر f کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل 4.19)۔ ہم عموماً c کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ، c موجود ہے۔اگلی مثال کی طرح بعض اوقات ہم c کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذونادر ہو گا۔

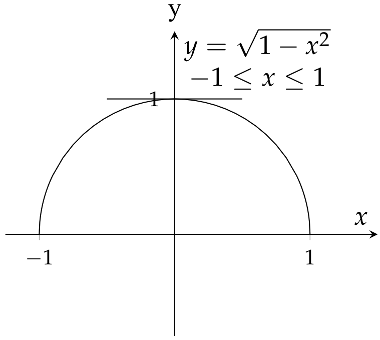
مثال 4.7: وقفہ $0 \le x \le 2$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ استمراری ہے اور $0 < x < 2$ پر یہ قابل تفرق ہے (شکل 4.20)۔ چونکہ $f(0) = 0$ اور $f(2) = 4$ ہیں لہٰذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ c پر تفرق $f'(x) = 2x$ کی قیمت لازماً $\frac{4-0}{2-0} = 2$ ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم $2x = 2$ کو حل کرتے ہوئے $x = c = 1$ حاصل کر پاتے ہیں۔ □

طبعی تشریح

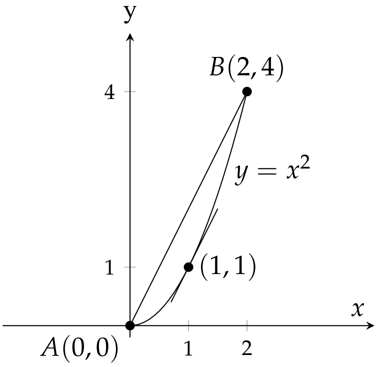
اگر ہم $[a,b]$ پر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ کو f کی اوسط تبدیلی اور $f'(c)$ کو لمحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لمحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال 4.8: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ان 8 سیکنڈوں کے لئے گاڑی کی اوسط رفتار $\frac{120}{8} = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی لمحہ رفتار پیما ٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔

□



شکل 4.19: اگرچہ $y=\sqrt{1-x^2}$ نقطہ -1 اور 1 پر نا قابل تفرق ہے یہ $[-1,1]$ پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔



شکل 4.20: نقطہ $c=1$ پر مماس قطع AB کے متوازی ہے (مثال 4.7)

ضمنی نتائج اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا ضمنی نتیجہ اس کا جواب دیتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 4.1: صفر تفرق کے تفاعل مستقل ہوں گے
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x)=0$ ہو تب I میں تمام x پر $f(x)=C$ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ I پر تفاعل f کی قیمت مستقل ہو تب I پر f قابل تفرق ہو گا اور I میں تمام x پر $f'(x)=0$ ہو گا۔ ضمنی نتیجہ اس کا الٹ پیش کرتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ I پر f کی قیمت مستقل ہے۔ہم I میں ہر دو نقطوں x_1 اور x_2 پر $f(x_1)=f(x_2)$ دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں x_1 اور x_2 وقفہ I میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بائیں سے دائیں جانب ہے لہٰذا $x_1<x_2$ ہو گا۔یوں $[x_1,x_2]$ پر f مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔یوں x_1 اور x_2 کے بیچ کسی نقطہ c پر

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

ہو گا۔چونکہ پورے I پر $f' = 0$ ہے لہٰذا اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

□

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا ہم اسراع سے پیچھے کی طرف چلتے ہوئے رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں۔یہ کا جواب اگلا ضمنی نتیجہ پیش کرتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 4.2: ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = g'(x)$ ہو تب ایسا مستقل C موجود ہو گا کہ I میں تمام x پر $f(x) = g(x) + C$ ہو۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: I میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق $h = f - g$ کا تفرق

$$h'(x) = f'(x) - h'(x) = 0$$

ہو گا۔یوں ضمنی نتیجہ 4.1 کے تحت I پر $h(x) = C$ ہو گا۔یوں $f(x) - g(x) = C$ یا $f(x) = g(x) + C$ ہو گا۔

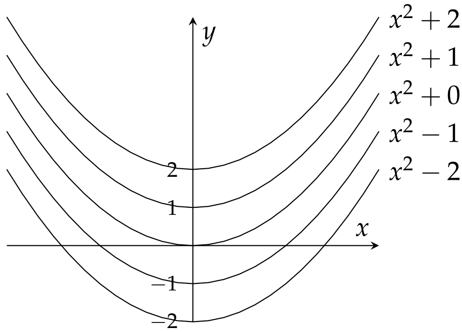
□

ضمنی نتیجہ 4.2 کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا مستقل فرق ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ $(-\infty, \infty)$ پر $f(x) = x^2$ کا تفرق $2x$ ہے۔ایسا دوسرا تفاعل جس کا $(-\infty, \infty)$ پر تفرق $2x$ ہو کا کلیہ لازماً $x^2 + C$ ہو گا (شکل 4.21)۔

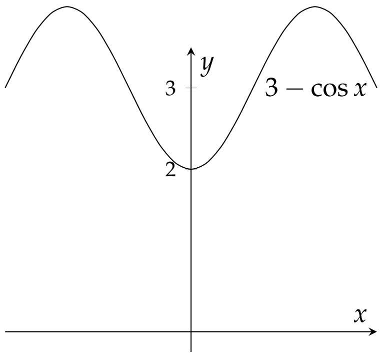
مثال 4.9: ایسا تفاعل $f(x)$ تلاش کریں جس کا تفرق $\sin x$ ہو اور جو نقطہ $(0, 2)$ سے گزرتا ہو۔
حل: چونکہ $g(x) = -\cos x$ کا تفرق بھی $\sin x$ ہے لہٰذا $f(x) = -\cos x + C$ ہو گا۔دیا گیا نقطہ اس میں پر کرتے ہوئے مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2 \quad \implies \quad C = 3$$

یوں درکار تفاعل $f(x) = -\cos x + 3$ ہے (شکل 4.22)۔ □



شکل 4.21: ضمنی نتیجہ 4.2 کہتا ہے کہ ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں صرف انتصابی فرق پایا جاتا ہے۔



شکل 4.22: ترسیم برائے مثال 4.9

اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاو کا حصول

سطح زمین کے قریب جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار v ایسا تفاعل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ $g(t) = 9.8t$ کا تفرق 9.8 ہے لہٰذا ضمنی نتیجہ 4.2 کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر جسم ساکن ہو گا لہٰذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \implies C = 0$$

ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تفاعل $v(t) = 9.8t$ ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $h(t) = 4.9t^2$ کا تفرق $9.8t$ ہے لہٰذا ضمنی نتیجہ 4.2 کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ چونکہ لمحہ $t = 0$ پر ہٹاو صفر ہے لہٰذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \implies C = 0$$

یعنی $s(t) = 4.9t^2$ ہو گا۔

کسی تفاعل کی شرح تبدیلی سے تفاعل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

بڑھتا تفاعل اور گھٹتا تفاعل

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا ضمنی نتیجہ جو اس کا جواب دیتا ہے کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تفاعل کا تفرق مثبت اور گھٹے ہوئے تفاعل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف : فرض کریں وقفہ I پر تفاعل f معین ہے اور اس وقفہ پر x_1 اور x_2 کوئی بھی دو نقطے ہیں۔

1. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو تب I پر f بڑھتا[6] تفاعل کہلاتا ہے۔

2. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) > f(x_2)$ ہو تب I پر f گھٹتا[7] تفاعل کہلاتا ہے۔

□

ضمنی نتیجہ 4.3: بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کا پہلا تفرقی پرکھ
فرض کریں $[a,b]$ پر f استمراری اور (a,b) پر f قابل تفرق ہے۔

- اگر (a,b) کے ہر نقطہ پر $f' > 0$ ہو تب $[a,b]$ پر f بڑھتا ہے۔
- اگر (a,b) کے ہر نقطہ پر $f' < 0$ ہو تب $[a,b]$ پر f گھٹتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ : فرض کریں $[a,b]$ میں x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں جہاں $x_1 < x_2$ ہے۔ وقفہ $[x_1,x_2]$ پر مسئلہ اوسط قیمت تفاعل f کے لئے کہتا ہے کہ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{4.6}$$

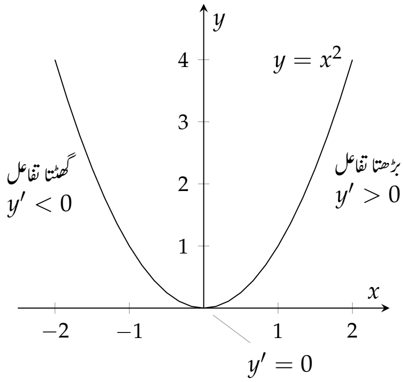
ہو گا جہاں x_1 اور x_2 کے بیچ c ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ $x_2 - x_1$ مثبت قیمت ہے لہٰذا مساوات 4.6 کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہو گی جو $f'(c)$ کی ہے۔یوں (a,b) پر مثبت $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_2) > f(x_1)$ ہو گا جبکہ (a,b) پر منفی $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو گا۔

□

مثال 4.10: وقفہ $(-\infty,0)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x < 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f گھٹے گا۔ وقفہ $(0,\infty)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x > 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f بڑھے گا (شکل 4.23)۔
□

---

[6] increasing
[7] decreasing



شکل 4.23: ترسیم برائے مثال 4.10

سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں c کی تلاش

سوال 1 تا سوال 4 میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لئے c کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

سوال 1: $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 2: $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

سوال 3: $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [\frac{1}{2}, 2]$
جواب: 1

سوال 4: $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال

سوال 5 تا سوال 8 میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5: $f(x)=x^{2/3}, \quad [-1,8]$
جواب: نہیں کرتا؛ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x=0$ پر f نا قبل تفرق ہے۔

سوال 6: $f(x)=x^{4/5}, \quad [0,1]$

سوال 7: $f(x)=\sqrt{x(1-x)}, \quad [0,1]$
جواب: کرتا ہے۔

سوال 8:
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & -\pi \le x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

سوال 9: درج ذیل تفاعل $x=0$ اور $x=1$ پر صفر کے برابر ہے اور $(0,1)$ پر قابل تفرق ہے لیکن (a,b) پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ $(0,1)$ پر کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10: وقفہ $[0,2]$ پر a ، m اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے درج ذیل تفاعل مسئلہ اوسط قیمت کی قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

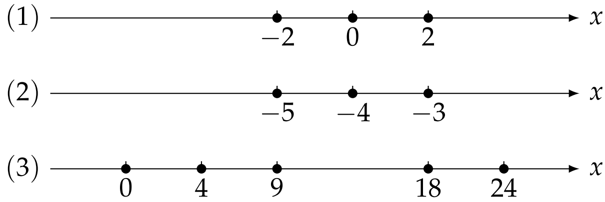
$$f(x)=\begin{cases}3, & x=0\\ -x^2+3x+a, & 0<x<1\\ mx+b, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال 11:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کے یک رتبی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

1. $y=x^2-4$
2. $y=x^2+8x+15$
3. $y=x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$



شکل 4.24: حل ترسیم سوال 11

.4 $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x-9)(x-24)$

ب. مسئلہ رول کی مدد سے ثابت کریں کہ $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ کے ہر دو صفر کے بیچ $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

جواب: (ا) شکل 4.24

سوال 12: فرض کریں کہ وقفہ $[a, b]$ میں f''' استمراری ہے اور اس وقفہ پر f کے تین صفر پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس وقفہ پر f'' کا کم سے کم ایک صفر پایا جائے گا۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال 13: دکھائیں کہ اگر پورے $[a, b]$ پر $f'' > 0$ ہو تب $[a, b]$ میں f' کا زیادہ سے زیادہ ایک صفر پایا جائے گا۔ اگر $[a, b]$ پر $f'' < 0$ ہو تب کیا ہو گا؟

سوال 14: دکھائیں کہ کعبی کثیر رکنی کے صفروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ممکن ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 15: دکھائیں کہ دو گھنٹوں کی صفر میں کسی لمحہ پر گاڑی کا رفتار پیما ضرور دو گھنٹوں کی اوسط رفتار دکھائے گا۔

سوال 16: تبدیلی درجہ حرارت برف سے حرارت پیما کو نکال کر ابلتے ہوئے پانی میں رکھنے سے اس کا درجہ حرارت 14 سیکنڈوں میں $-19\,°\mathrm{C}$ سے بڑھ کر $100\,°\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ اس دوران درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح کسی لمحے پر $8.5\,°\mathrm{C\,s^{-1}}$ ضرور ہو گی۔

سوال 17: فرض کریں کہ وقفہ $[0, 1]$ پر قابل تفرق تفاعل f کا تفرق کبھی صفر نہیں ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ $f(0 \neq f(1))$ ہو گا۔

سوال 18: دکھائیں کہ a اور b کی کسی بھی قیمتوں کے لئے $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ ہو گا۔

سوال 19: فرض کریں $[a,b]$ پر f قابل تفرق ہے اور $f(b) < f(a)$ ہے۔ کیا $[a,b]$ پر f' کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟

سوال 20: فرض کریں $[a,b]$ پر f اور g قابل تفرق ہیں اور $f(a) = g(a)$ اور $f(b) = g(b)$ ہیں۔ دکھائیں کہ a اور b کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں f اور g کی ترسیمات کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال 21: فرض کریں x کی ہر قیمت کے لئے f قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f(1) = 1$ ہے اور $(-\infty,1)$ پر $f' < 0$ ہے اور $(1,\infty)$ پر $f' > 0$ ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام x پر $f(x) \geq 1$ ہو گا۔

ب. کیا $f'(1) = 0$ لازماً ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 22: فرض کریں $f(x) = px^2 + qx + r$ بند وقفہ $[a,b]$ پر معین ہے۔ دکھائیں کہ (a,b) میں ٹھیک ایک نقطہ c پر f مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ پر پورا اترتا ہے۔

سوال 23: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \sin x \sin(x+2) - \sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 24: اگر دو تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک جیسی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک جیسے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

سوال 25:

ا. دکھائیں کہ تفاعل $g(x) = \frac{1}{x}$ اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھٹتا ہے۔

ب. اگر جزو (ا) کا نتیجہ درست ہو تب $g(1) = 1$ کس طرح $g(-1) = -1$ سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال 26: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ میں تفاعل f معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر f پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$\text{کم سے کم } f' \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \text{زیادہ سے زیادہ } f'$$

جہاں کم سے کم f' اور زیادہ سے زیادہ f' سے مراد $[a,b]$ پر بالترتیب f' کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

سوال 27: اگر $0 \leq x \leq 0.1$ پر $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ ہو اور $f(0) = 1$ ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $1.09999 \leq f(0.1) \leq 1.1$

سوال 28: اگر $0 \leq x \leq 0.1$ پر $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ ہو اور $f(0) = 2$ ہو تب سوال 26 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 29: ہندسی اوسط۔ دو مثبت اعداد a اور b کی ہندسی اوسط[8] سے مراد عدد $\sqrt{ab}$ ہے۔دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ میں مثبت اعداد کے وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کے لئے c کی قیمت $\sqrt{ab}$ ہے۔

سوال 30: حسابی اوسط۔ دو اعداد a اور b کی حسابی اوسط[9] $\frac{a+b}{2}$ ہے۔دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت میں وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کے لئے c کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

تفرق سے تفاعل کا حصول

سوال 31: فرض کریں $f(-1) = 3$ اور تمام x کے لئے $f'(x) = 0$ ہے۔کیا تمام x کے لئے $f(x) = 3$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 32: فرض کریں $f(0) = 5$ اور تمام x کے لئے $f'(x) = 2$ ہیں۔کیا تمام x کے لئے $f(x) = 2x + 5$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 33: فرض کریں تمام x کے لئے $f'(0) = 2x$ ہے۔ درج ذیل صورتوں میں $f(2)$ تلاش کریں۔

ا. $f(0) = 0$ ب. $f(1) = 0$ ج. $f(-2) = 3$

جواب: (ا) 4، (ب) 3، (ج) 3

سوال 34: جن تفاعل کا تفرق مستقل ہو ان کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 35 تا سوال 40 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے۔

سوال 35: (ا) $y' = x$، (ب) $y' = x^2$، (ج) $y' = x^3$
جواب: (ا) $\frac{x^2}{2} + C$، (ب) $\frac{x^3}{3} + C$، (ج) $\frac{x^4}{4} + C$

سوال 36: (ا) $y' = 2x$، (ب) $y' = 2x - 1$، (ج) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

[8] geometric mean
[9] arithmetic mean

سوال 37: (ا) $y'=-\frac{1}{x^2}$، (ب) $y'=1-\frac{1}{x^2}$، (ج) $y'=5+\frac{1}{x^2}$
جواب: (ا) $\frac{1}{x}+C$، (ب) $x+\frac{1}{x}+C$، (ج) $5x-\frac{1}{x}+C$

سوال 38: (ا) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$، (ب) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$، (ج) $y'=4x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

سوال 39: (ا) $y'=\sin 2t$، (ب) $y'=\cos\frac{t}{2}$، (ج) $y'=\sin 2t+\cos\frac{t}{2}$
جواب: (ا) $-\frac{1}{2}\cos 2t+C$، (ب) $2\sin\frac{t}{2}+C$، (ج) $-\frac{1}{2}\cos 2t+2\sin\frac{t}{2}+C$

سوال 40: (ا) $y'=\sec^2\theta$، (ب) $y'=\sqrt{\theta}$، (ج) $y'=\sqrt{\theta}-\sec^2\theta$

سوال 41 تا سوال 44 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے اور جو دیے گئے نقطہ سے گزرتا ہے۔

سوال 41: $f'(x)=2x-1,\quad N(0,0)$
جواب: $f(x)=x^2-x$

سوال 42: $g'(x)=\frac{1}{x^2}+2x,\quad N(-1,1)$

سوال 43: $r'(\theta)=8-\csc^2\theta,\quad N(\frac{\pi}{4},0)$
جواب: $r(\theta)=8\theta+\cot\theta-2\pi-1$

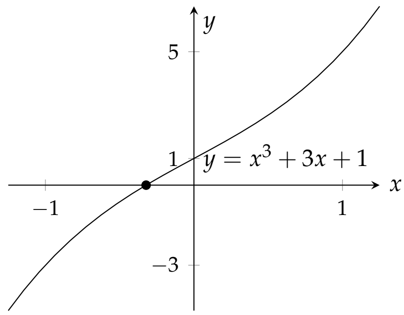
سوال 44: $r'(t)=\sec t\tan t-1,\quad N(0,0)$

صفروں کی گنتی

مساوات $f(x)=0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کرنے سے پہلے ہم عموماً مطلوبہ وقفہ پر مساوات کی متوقع صفروں کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔ بعض اوقات ضمنی نتیجہ 4.3 کی مدد سے ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

درج ذیل فرض کریں۔

1. $[a,b]$ پر f استمراری اور (a,b) پر قابل تفرق ہے۔
2. $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں۔
3. پورے (a,b) پر $f'>0$ اور یا پورے (a,b) پر $f'<0$ ہے۔



شکل 4.25: کثیر رکنی $y = x^3 + 3x + 1$ کا واحد صفر دکھایا گیا ہے۔

تب a اور b کے بیچ f کا ٹھیک ایک صفر پایا جائے گا۔چونکہ یہ پورے $[a, b]$ پر بڑھ رہا ہے اور یا پورے $[a, b]$ پر گھٹ رہا ہے لہٰذا یہ x محور کو ایک ہی بار قطع کر سکتا ہے۔اس کے باوجود مسئلہ 2.9 کے تحت اس کا کم سے کم ایک صفر ہو گا۔ مثال کے طور پر $[-1, 1]$ پر $f(x) = x^3 + 3x + 1$ قابل تفرق ہے، $f(-1) = -3$ اور $f(1) = 5$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں، اور تمام x کے لئے $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ہے لہٰذا $[-1, 1]$ پر f کا ٹھیک ایک صفر پایا جاتا ہے (شکل 4.25)۔

سوال 45 تا سوال 52 میں دکھائیں کہ دیے گئے وقفہ پر تفاعل کا صرف ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 45: $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

سوال 46: $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

سوال 47: $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

سوال 48: $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3, \quad (-1, 1)$

سوال 49: $r(\theta) = \theta + \sin^2(\frac{\theta}{3}) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 50: $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 51: $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

سوال 52: $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

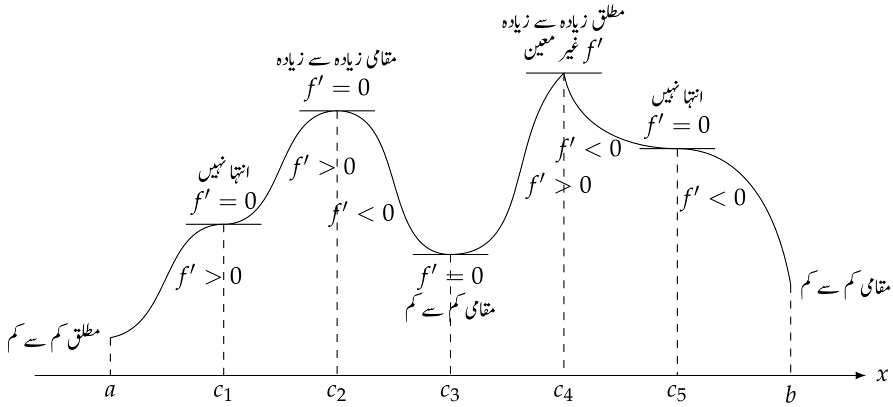
کمپیوٹر کا استعمال

سوال 53:

ا. ایسا کثیر رکنی $f(x)$ تشکیل دیں جس کے صفر $x = -2, -1, 0, 1, 2$ پر پائے جاتے ہوں۔

ب. $f(x)$ اور $f'(x)$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ آپ کو کیا خوبی نظر آتی ہے۔

ج. کیا $g(x) = \sin x$ اور اس کا تفرق $g'(x)$ بھی ایسی خوبی رکھتے ہیں؟



شکل 4.26: بعض نقطہ فاصل پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے اور بعض پر نہیں۔

4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ

اس حصہ میں مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کے لئے تفاعل کے نقطہ فاصل کو پرکھنا دکھایا جائے گا۔

4.3.1 پرکھ

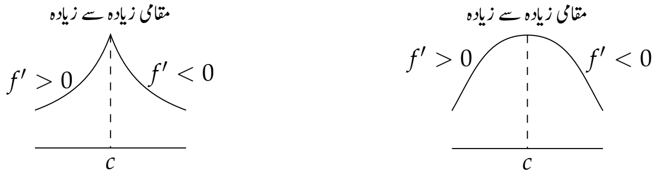
جیسا شکل 4.26 میں دکھایا گیا ہے تفاعل f کے بعض نقطہ فاصل پر تفاعل کی مقامی انتہا پائی جائے گی اور بعض پر نہیں۔یہ راز نقطہ کے بالکل قریب f' کی علامت میں پوشیدہ ہے۔ جیسا جیسا x بائیں سے دائیں رخ بڑھتا ہے f کی قیمت وہاں بڑھتی ہے جہاں $f' > 0$ ہو اور f کی قیمت وہاں گھٹتی ہے جہاں $f' < 0$ ہو۔

آپ (شکل 4.26 سے) دیکھ سکتے ہیں کہ مقامی کم سے کم نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں $f' < 0$ جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں $f' > 0$ ہو گا۔ (آخری نقطہ کی صورت میں نقطہ کے صرف ایک طرف پر f' کی قیمت دیکھی جا سکتی ہے۔) یوں مقامی کم سے کم نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے)۔ اسی طرح مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں $f' > 0$ جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں $f' < 0$ ہو گا۔یوں اس نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے)۔

اس مشاہدہ سے مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کا پرکھ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: مقامی انتہائی قیمت کا یک رتبی تفرقی پرکھ
درج ذیل پرکھ استمراری تفاعل $f(x)$ کے لئے ہیں۔

نقطہ فاصل c پر:



$f'(c) = 0$ (ا) $\qquad$ (ب) $f'(c)$ غیر معین

شکل 4.27: پرکھ برائے مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت۔

1. اگر c پر f' کی علامت مثبت سے تبدیل ہو کر منفی ہو جائے ($x < c$ پر $f' > 0$ اور $x > c$ پر $f' < 0$) تب c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی (شکل 4.27)۔

2. اگر c پر f' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہو جائے ($x < c$ پر $f' < 0$ اور $x > c$ پر $f' > 0$) تب c پر f کی مقامی کم سے کم قیمت ہو گی (شکل 4.28)۔

3. اگر c پر f' کی علامت تبدیل نہ ہو (c کے دونوں اطراف f' کی علامت ایک جیسی ہے) تب c پر f کی کوئی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 4.29)۔

بائیں آخری نقطہ a پر:

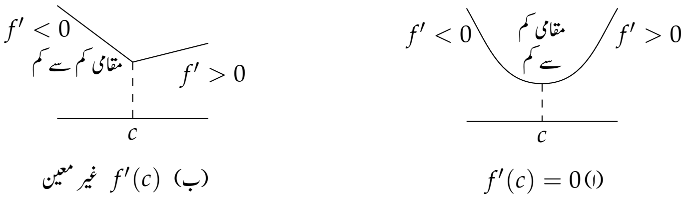
اگر $x > a$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب a پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ (مقامی کم سے کم) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.30-ا،ب)۔

دائیں آخری نقطہ b پر:

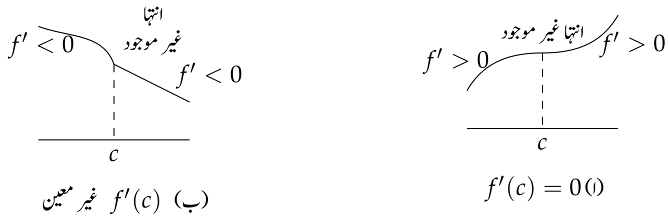
اگر $x < b$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب b پر f کا مقامی کم سے کم (مقامی زیادہ سے زیادہ) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.30-ج،د)۔

مثال 4.11: درج ذیل تفاعل کے نقطہ فاصل تلاش کریں۔

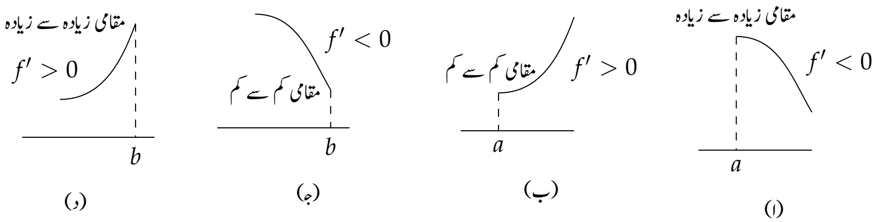
$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$



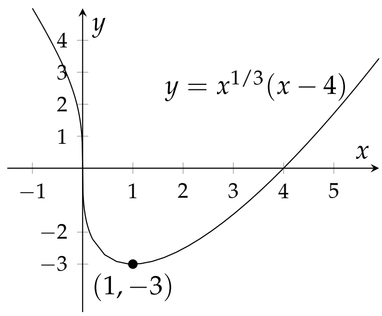
شکل 4.28: پرکھ برائے مقامی کم سے کم قیمت۔



شکل 4.29: پرکھ برائے عدم موجودگی انتہائی قیمت۔



شکل 4.30: پرکھ برائے بائیں اور دائیں نقطوں پر نقطہ انتہا۔



شکل 4.31: ترسیم برائے مثال 4.11

ان وقفوں کی نشاندہی کریں جس پر f بڑھتا ہے اور جس پر f گھٹتا ہے۔تفاعل کے مقامی اور مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔
حل: تفاعل تمام حقیقی اعداد کے لئے معین اور استمراری ہے ((شکل 4.31)۔)۔یک رتبی تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

ہے جو $x = 1$ پر صفر اور $x = 0$ پر غیر معین ہے۔ f کے دائرہ کار میں کوئی آخری نقطہ نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا نقطہ فاصل $x = 0$ اور $x = 1$ وہ نقطے ہیں جہاں تفاعل کے انتہائی قیمتیں ممکن ہیں۔

یہ نقطے فاصل x محور کو ان حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جس پر f' مثبت اور یا منفی ہے۔ نقطہ فاصل کے دونوں اطراف f کی علامتوں کو دیکھ کر ہم انتہائی نقطہ کی نوعیت جان سکتے ہیں۔وقفہ $(-\infty, 0)$ پر f گھٹتا ہے، وقفہ $(0,1)$ پر گھٹتا ہے اور وقفہ $(1,\infty)$ پر بڑھتا ہے۔ مسئلہ 4.5 کے تحت $x = 0$ (جہاں f' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی) پر کوئی انتہائی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جبکہ $x = 1$ (جہاں f' کی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے) پر مقامی کم سے کم نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.32)۔

مقامی کم سے کم قیمت $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$ ہے جو تفاعل کی مطلق کم سے کم قیمت بھی ہے۔ □

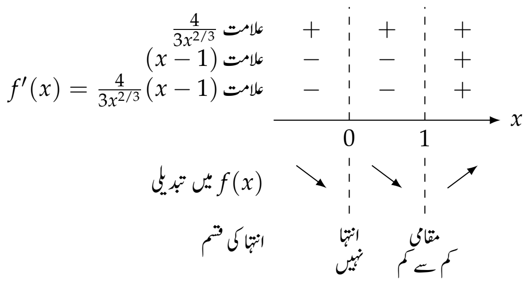
مثال 4.12: درج ذیل کے لئے وہ وقفہ تلاش کریں جہاں f گھٹتا ہو اور جہاں f بڑھتا ہو۔

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \quad -3 \le x \le 3$$

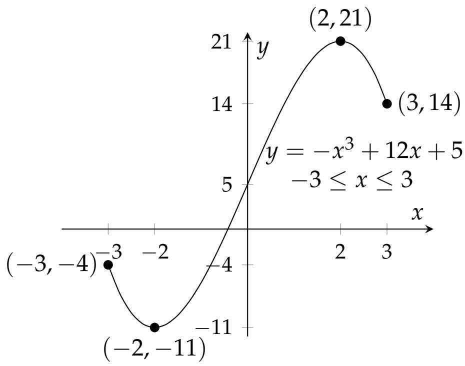
تفاعل کے انتہائی قیمتیں کیا ہیں اور کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

حل: تفاعل اپنے دائرہ کار $[-3,3]$ پر استمراری ہے (شکل 4.33)۔ اس کا یک رتبی تفرق

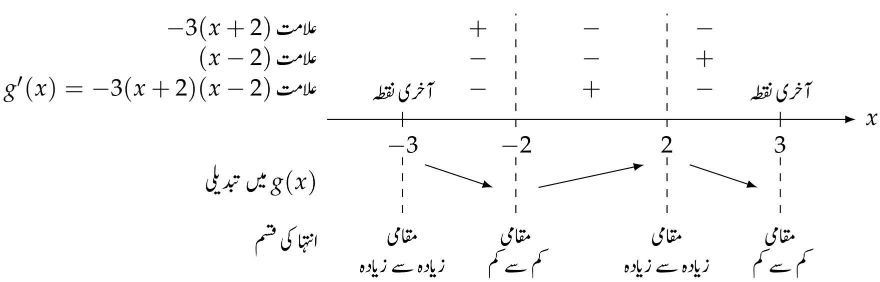
$$g'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2-4) = -3(x+2)(x-2)$$



شکل 4.32: ترسیم برائے مثال 4.11



شکل 4.33: ترسیم برائے مثال 4.12



شکل 4.34: تفرق کی علامتوں سے تفاعل کا رویہ (مثال 4.12)

وقفہ $[-3,3]$ کے تمام نقطوں پر معین ہے، اور اس کی قیمت نقطہ $x = -2$ اور $x = 2$ پر صفر ہے۔ نقطے فاصل دائرہ کار کو ان خطوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں g' کی قیمت منفی یا مثبت ہے (شکل 4.34)۔ ہم g' کی علامتوں کو دیکھ کر مسئلہ 4.5 کی مدد سے تفاعل کا تجزیہ کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $x = -3$ اور $x = 2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتیں پائی جاتی ہیں جبکہ $x = -2$ اور $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ان نقطوں پر تفاعل $g(x) = -x^3 + 12x + 5$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$g(-3) = -4, \quad g(2) = 21 \qquad \text{مقامی زیادہ سے زیادہ}$$
$$g(-2) = -11, \quad g(3) = 14 \qquad \text{مقامی کم سے کم}$$

چونکہ بند وقفہ پر تفاعل معین ہے لہٰذا $g(-2)$ مطلق کم سے کم اور $g(2)$ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں ہیں۔ □

سوالات

f' کی مدد سے f کا تجزیہ

سوال 1 تا سوال 8 میں تفاعل کا تفرق دیا گیا ہے۔درج ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

ا. f کے نقطہ فاصل کیا ہیں؟

ب. f کس وقفے پر بڑھتا اور کس وقفے پر گھٹتا ہے؟

ج. کن نقطوں پر تفاعل کی مقامی کم سے کم قیمت یا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟

سوال 1: $f'(x) = x(x-1)$

جواب: (ا) 0 ، 1 ؛(ب) $(-\infty,0)$ اور $(1,\infty)$ پر بڑھتا ہے، $(0.1,c)$ پر گھٹتا ہے، مقامی زیادہ سے زیادہ $x = 0$ پر اور مقامی کم سے کم $x = 1$ پر ہے۔

سوال 2: $f'(x) = (x-1)(x+2)$

سوال 3: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$

جواب: (ا) -2 ، 1 ؛(ب) $(-2,1)$ اور $(1,\infty)$ پر بڑھتا، $-\infty,-2$ پر گھٹتا؛ (ج) مقامی زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $(x = -2)$ پر مقامی کم سے کم۔

سوال 4: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

سوال 5: $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

جواب: (ا) -2 ، 1 ، 3 ؛(ب) $(-2,1)$ اور $(3,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ اور $(1,3)$ پر گھٹتا؛(ج) $(x=1)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ، $(x=-2)$ اور $x=3$ پر مقامی کم سے کم۔

سوال 6: $f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$

سوال 7: $f'(x) = x^{-1/3}(x+2)$

جواب: (ا) -2 ، 0 ؛(ب) $(-\infty,-2)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-2,0)$ پر گھٹتا؛(ج) $(x=-2)$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $(x=0)$ پر مقامی کم سے کم۔

سوال 8: $f'(x) = x^{-1/2}(x-3)$

دیے گئے تفاعل کی انتہا
سوال 9 تا سوال 28 میں درج ذیل کریں۔

ا. وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل بڑھتا ہو اور وہ جن پر تفاعل گھٹتا ہو۔

ب. تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتوں کی نشاندہی کریں اور جن نقطوں پر ایسا ہو ان کی بھی نشاندہی کریں۔

ج. ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں (اگر ایسا ہو)؟

سوال 9: $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

جواب: (ا) 0 $(-\infty,-1.5)$ پر بڑھتا، $(-1.5,\infty)$ پر گھٹتا؛(ب) $t=-1.5$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 5.25 ؛ (ج) $t=-1.5$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 5.25 ہے۔

سوال 10: $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

سوال 11: $h(x) = -x^3 + 2x^2$

جواب: (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{4}{3},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{4}{3})$ پر بڑھتا؛(ب) $x=0$ پر مقامی کم سے کم، $x=\frac{4}{3}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\frac{4}{3},\frac{32}{27})$ ؛(ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 12: $h(x) = 2x^3 - 18x$

سوال 13: $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

جواب: (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{1}{2},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{1}{2})$ پر بڑھتا؛(ب) $\theta=\frac{1}{2}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 14: $f(\theta)=6\theta-\theta^3$

سوال 15: $f(r)=3r^3+16r$
جواب: (ا) $(-\infty,\infty)$ پر بڑھتا ہے یعنی کبھی کم نہیں ہوتا؛ (ب) مقامی انتہا عدم موجود؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 16: $h(r)=(r+7)^3$

سوال 17: $f(x)=x^4-8x^2+16$
جواب: (ا) $(-2,0)$ اور $(2,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ اور $(0,2)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x=0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 16 اور $x=\mp 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ؛ (ج) مطلق زیادہ سے زیادہ غیر موجود، $x=\mp 2$ پر مطلق کم سے کم 0

سوال 18: $g(x)=x^4-4x^3+4x^2$

سوال 19: $H(t)=\frac{3}{2}t^4-t^6$
جواب: (ا) $(-\infty,-1)$ اور $(0,1)$ پر بڑھتا، $(-1,0)$ اور $(1,\infty)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x=\mp 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\mp 1,0.5)$ ہے $x=0$ پر مقامی کم سے کم $(0,0)$ ہے؛ (ج) $x=\mp 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ جبکہ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 20: $K(t)=15t^3-t^5$

سوال 21: $g(x)=x\sqrt{8-x^2}$
جواب: (ا) $(-2\sqrt{2},-2)$ اور $(2,2\sqrt{2})$ پر گھٹتا $(-2,2)$ پر بڑھتا ہے؛ (ب) مقامی کم سے کم $g(-2)=-4$ ، $g(2\sqrt{2}=0$ ؛ مقامی زیادہ سے زیادہ $g(-2\sqrt{2}=0$ ، $g(2)=4$ (ج) $x=2$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 4 اور $x=-2$ پر مطلق کم سے کم -4 ہے۔

سوال 22: $g(x)=x^2\sqrt{5-x}$

سوال 23: $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2},\quad x\neq 2$
جواب: (ا) $(-\infty,1)$ پر بڑھتا $1<x<2$ اور $2<x<3$ پر گھٹتا ہے۔ $x=2$ پر غیر استمراری اور $(3,\infty)$ پر بڑھتا ہے۔ (ب) $x=3$ پر مقامی کم سے کم $(3,6)$ اور $x=1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(1,2)$ ؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 24: $f(x)=\frac{x^3}{3x^2+1}$

سوال 25: $f(x)=x^{1/3}(x+8)$
جواب: (ا) $(-2,0)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x=-2$ پر مقامی کم سے کم $-6\sqrt[3]{2}$ ؛ (ج) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $x=-2$ پر مطلق کم سے کم $-6\sqrt[3]{2}$ ہے۔

سوال 26: $g(x) = x^{2/3}(x+5)$

سوال 27: $h(x) = x^{1/3}(x^2-4)$

جواب: (ا) $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ اور $\left(\frac{2}{\sqrt{7}}, \infty\right)$ پر بڑھتا، $\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^{7/6}} \approx 3.12$ جبکہ $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی کم سے کم $-\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^6} \approx -3.12$ ہے؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 28: $k(x) = x^{2/3}(x^2-4)$

نصف کھلے وقفوں پر تفاعل کی انتہا

سوال 29 تا سوال 36 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ میں تفاعل کے مقامی انتہا تلاش کریں۔ان نقطوں کی بھی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. کون سے انتہا مطلق ہیں (اگر ہوں)۔

ج. کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔

سوال 29: $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

جواب: (ا) $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 1 اور $x = 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے؛ (ب) $x = 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1 جبکہ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 30: $f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

سوال 31: $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

جواب: (ا) $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 1 اور $x = 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے؛ (ب) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $x = 2$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 32: $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

سوال 33: $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$

جواب: (ا) $t = -3$ پر -9 اور $t = 2$ پر 16 مقامی زیادہ سے زیادہ ہیں۔ $t = -2$ پر مقامی کم سے کم -16 ہے۔ (ب) $t = 2$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 16 ؛ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 34: $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$

سوال 35: $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

جواب: (ا) $x = 0$ پر مقامی کم سے کم 0 ؛ (ب) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود؛ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 36: $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 37 تا سوال 40 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے وقفے پر مقامی انتہا تلاش کریں اور اس نقطہ کی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f پر تبصرہ کریں۔

سوال 37: $f(x)=\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2},\quad 0\le x\le 2\pi$
جواب: (ا) $x=\frac{2\pi}{3}$ پر مقامی کم سے کم $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ جبکہ $x=0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے اور $x=2\pi$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ π ہے۔

سوال 38: $f(x)=-2\cos x-\cos^2 x,\quad -\pi\le x\le\pi$

سوال 39: $f(x)=\csc^2 x-2\cot x,\quad 0<x<\pi$
جواب: (ا) $x=\frac{\pi}{4}$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے۔

سوال 40: $f(x)=\sec^2 x-2\tan x,\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں
دکھائیں کہ سوال 41 اور سوال 42 میں دیے گئے θ پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے۔ اس انتہا کی قسم دریافت کریں۔

سوال 41: $h(\theta)=3\cos\frac{\theta}{2},\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad \theta=0,2\pi$
جواب: (ا) $\theta=0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 3 اور $\theta=2\pi$ پر مقامی کم سے کم -3 ہے۔

سوال 42: $h(\theta)=5\sin\frac{\theta}{2},\quad 0\le\theta\le\pi,\quad \theta=0,\pi$

سوال 43: قابل تفرق تفاعل $y=f(x)$ نقطہ $(1,1)$ سے گزرتا ہے اور $f'(1)=0$ ہے۔درج ذیل پر پورا اترتا ہوا اس تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

ا. $x<1$ کے لئے $f'(x)>0$ ہے اور $x>1$ کے لئے $f'(x)<0$ ہے۔

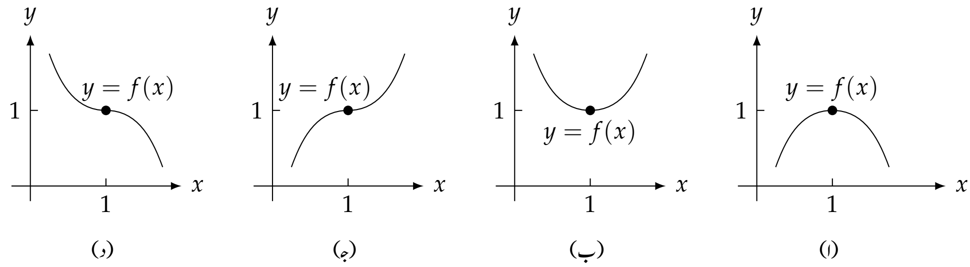
ب. $x<1$ کے لئے $f'(x)<0$ ہے اور $x>1$ کے لئے $f'(x)>0$ ہے۔

ج. $x\ne 1$ کے لئے $f'(x)>0$ ہے۔

د. $x\ne 1$ کے لئے $f'(x)<0$ ہے

جواب: شکل 4.35

سوال 44: قابل تفرق تفاعل $y=f(x)$ جو درج ذیل پر پورا اترتا ہے کا خاکہ بنائیں۔



شکل 4.35: حل ترسیمات سوال 43

شکل 4.36: حل ترسیمات سوال 45

ا. $(1,1)$ پر مقامی کم سے کم اور $(3,3)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

ب. $(1,1)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور $(3,3)$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

ج. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

د. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

سوال 45: درج ذیل استمراری تفاعل $y = g(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $0 < g' < 1$ ہے، $x \to 2^-$ کے لئے $g'(x) \to 1^-$ ، $x > 2$ کے لئے $-1 < g' < 0$ اور $x \to 2^+$ کے لئے $g'(x) \to -1^+$ ہے۔

ب. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $g' < 0$ ، $x \to 2^-$ کے لئے $g' \to -\infty$ ، $x > 2$ کے لئے $g' > 0$ اور $x \to 2^+$ کے لئے $g'(x) \to \infty$ ہے۔

ب: شکل 4.36

سوال 46: درج ذیل استمراری تفاعل $y = h(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \leq h(x) \leq 2$ ، $x \to 0^-$ کے لئے $h'(x) \to \infty$ ، اور $x \to 0^+$ کے لئے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

ب. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \leq h(x) \leq 0$ ، $x \to 0^-$ کے لئے $h'(x) \to \infty$ ، اور $x \to 0^+$ کے لئے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

سوال 47: جب x بائیں سے دائیں جانب نقطہ $c = 2$ سے گزرے تب $f(x) = x^3 - 3x + 2$ کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے یا نیچے گرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جہاں $a \neq 0$ ہے، بڑھتا ہے اور گھٹتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم

ہم نے حصہ 4.1 میں تفاعل کی انتہائی قیمتوں کی تلاش میں یک رتبی تفرق کا کردار دیکھا۔ تفاعل کے انتہائی نقطے صرف نقطہ فاصل اور تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ نقطہ فاصل پر نقطہ انتہا کی موجودگی لازمی نہیں ہے۔ہم نے حصہ 4.2 میں یہ بھی دیکھا کہ قابل تفرق تفاعل کی تقریباً تمام معلومات اس کی تفرق میں سمیٹی گئی ہے۔مکمل تفاعل کے حصول کے لئے ہمیں صرف کسی ایک نقطہ پر تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہے اور تفاعل مبدا سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً x^2 ہو گا۔اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہو اور تفاعل نقطہ $(0,4)$ سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً x^2+4 ہو گا۔

ہم نے حصہ 4.3 میں نقطہ فاصل پر تفاعل کے رویہ جانتے ہوئے اس کی تفرق سے مزید معلومات حاصل کرنا سیکھا جس کے بعد ہم یہ جان سکے کہ آیا نقطہ فاصل پر حقیقتاً انتہا موجود ہے یا تفاعل مسلسل گھٹتا یا مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔موجودہ حصہ میں ہم جانتے ہیں کہ تفاعل $y=f(x)$ کی ترسیم کس طرح مڑتی یا واپس پلٹتی ہے۔ہم جانتے ہیں کہ یہ معلومات y' کے اندر ضرور پائی جائے گی۔دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی صورت میں y' اور اس کا تفرق y'' مل کر تفاعل کی ترسیم کی صورت کے بارے میں معلومات فراہم کرتے ہیں۔اگلے باب میں انہیں استعمال کرتے ہوئے تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل کے حل کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا۔

مقعر

x بڑھنے سے تفاعل $y=x^3$ کا ترسیم اوپر اٹھتا ہے لیکن $(-\infty,0)$ اور $(0,\infty)$ پر اس کے حصے مختلف طریقہ سے مڑتے ہیں (شکل 4.37)۔اگر ہم منحنی پر بائیں سے مبدا کی طرف گامزن ہوں تب منحنی ہماری دائیں ہاتھ کی طرف جھکتی ہے اور اپنے مماس سے نیچے رہتی ہے۔اس کے برعکس اگر ہم منحنی پر دائیں جانب مبدا سے دور چلیں تب منحنی ہماری بائیں ہاتھ جھکتی ہے اور اپنے مماس کے بالائی طرف رہتی ہے۔

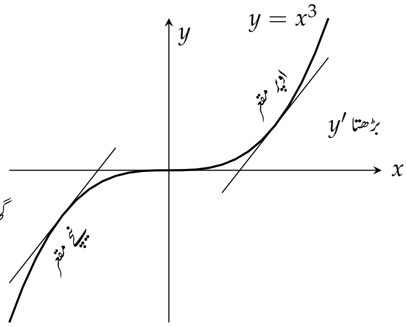
اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ ربع سوم میں بائیں سے مبدا کی طرف چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان گھٹتی ہے جبکہ ربع اول میں مبدا سے دائیں جانب چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان بڑھتی ہے۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل $y=f(x)$ کی ترسیم اس وقفہ پر اوپر مقعر[10] ہو گی جہاں y' بڑھتا ہو اور اس وقفہ پر نیچے مقعر[11] ہو گی جہاں y' گھٹتا ہو۔

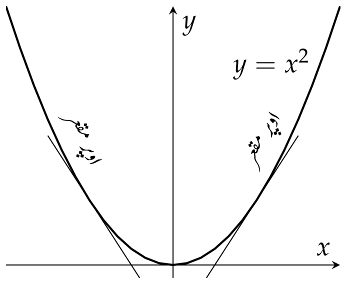
□

اگر $y=f(x)$ کا دو رتبی تفرق موجود ہو تب ہم مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3 استعمال کرتے ہوئے اخذ کر سکتے ہیں کہ $y''>0$ کی صورت میں y' کی قیمت بڑھے گی اور $y''<0$ کی صورت میں y' کی قیمت گھٹے گی۔

---
[10] concave up
[11] concave down



شکل 4.37: $(-\infty, 0)$ پر منحنی دائیں جھکتی ہے جبکہ $(0, \infty)$ پر مبدا بائیں مڑتی ہے۔



شکل 4.38: ترسیم برائے مثال 4.13

مقعر کا دو رتبی تفرق پرکھ

فرض کریں وقفہ I پر $y = f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہے۔

ا. اگر I پر $y'' > 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی۔

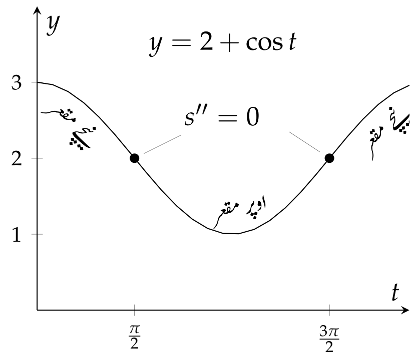
ب. اگر I پر $y'' < 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی۔

مثال 4.13:

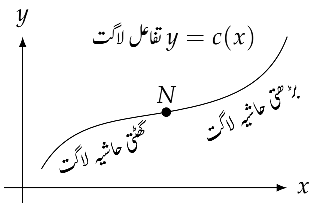
ا. $(-\infty, 0)$ پر تفاعل $y = x^3$ کا دو رتبی تفرق $y'' = 6x < 0$ ہے لہٰذا اس کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی جبکہ $(0, \infty)$ پر $y'' = 6x > 0$ ہے لہٰذا یہاں ترسیم اوپر مقعر ہو گی (شکل 4.37)۔

ب. چونکہ قطع مکافی $y = x^2$ کا دو رتبی تفرق $y'' = 2 > 0$ ہے لہٰذا یہ ہر جگہ اوپر مقعر ہو گا (شکل 4.38)۔

□



شکل 4.39: ترسیم برائے مثال 4.14



شکل 4.40: ترسیم برائے مثال 4.15

نقطہ تصریف

ایک لکیر پر جسم کی حرکت کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اس کا مقام بالمقابل وقت ترسیم کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے ہم وہ لمحہ تلاش کر سکتے ہیں جہاں جسم کی اسراع، جو دو رتبی تفرق ہے، کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔ترسیم پر یہ وہ نقطہ ہو گا جہاں مقعر تبدیل ہوتا ہے۔

تعریف : وہ نقطہ جہاں تفاعل کا مماس پایا جاتا ہو اور جہاں مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہو نقطہ تصریف[12] کہلاتا ہے۔

□

یوں نقطہ تصریف کی ایک طرف y'' مثبت اور دوسری طرف منفی ہو گا۔ عین نقطہ تصریف پر y'' کی قیمت یا (تفرق کی متوسط قیمت خاصیت کی بنا) صفر ہو گی اور یا y'' غیر معین ہو گا۔

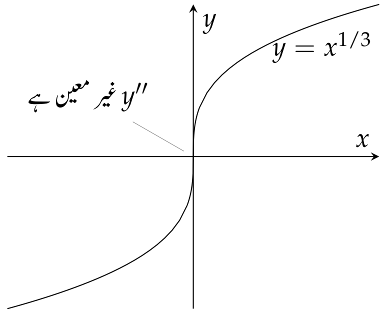
دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی ترسیم کے نقطہ تصریف پر $y'' = 0$ ہو گا۔

مثال 4.14: سادہ ہارمونی حرکت
تفاعل $y = 2\cos t$ کی ترسیم نقطہ $t = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$ پر مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہے جہاں اسراع $s'' = -\cos t$ صفر ہے (شکل 4.39)۔ □

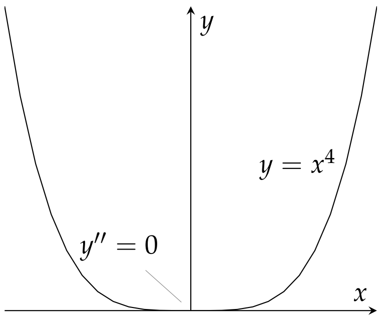
مثال 4.15: نقطہ تصریف کا معاشیات میں بھی اہمیت ہے۔فرض کریں کہ کسی چیز کی x اکائیاں پیدا کرنے پر $y = c(x)$ لاگت آتی ہے۔ جہاں حاشیہ لاگت پیداوار گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے یہ نقطہ تصریف N ہو گا (شکل 4.40)۔ □

---

[12] inflection point



شکل 4.41: نقطہ تصریف پر y'' غیر معین ہے (مثال 4.16)



شکل 4.42: اگرچہ مبدا پر $y'' = 0$ ہے یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا ہے (مثال 4.17)

مثال 4.16: ایسا نقطہ تصریف جہاں y'' غیر موجود ہے۔
تفاعل $y = x^{1/3}$ کا نقطہ تصریف $x = 0$ پر ہے لیکن یہاں y'' غیر معین (لا متناہی) ہے (شکل 4.41)۔

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{1/3}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tfrac{1}{3}x^{-2/3}) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

□

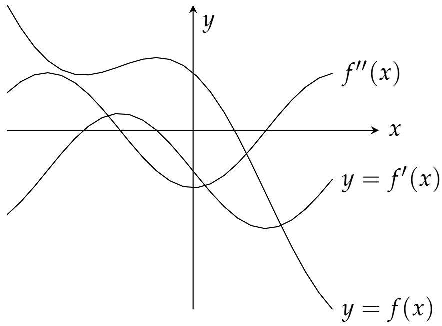
مثال 4.17: $y'' = 0$ ہے لیکن نقطہ تصریف نہیں ہے
تفاعل $y = x^4$ کا $x = 0$ پر $y'' = 12x^2 = 0$ پایا جاتا ہے لیکن یہاں y'' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا ہے۔ □

فنیات تفاعل اور تفاعل کے تفرق کا ترسیم
کبھی کبھار تفاعل کی ترسیم سے نقطہ تصریف کی نشاندہی کرنا مشکل ہوتا ہے۔ $f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ کی $-4 \le x \le 3$ پر ترسیم کرتے ہوئے کوشش کر کے دیکھیں۔اس کے ساتھ f' کی ترسیم شامل کرنے سے نقطہ تصریف کی پہچان میں کچھ بہتری آتی ہے۔ f کے ساتھ f'' ترسیم کرنے سے نقطہ تصریف پہچانے کا بہترین ثبوت ملتا ہے (شکل 4.43)۔ نقطہ تصریف پر f'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے یعنی f'' محور x کو قطع کرتا ہے۔ f ، f' اور f'' تینوں کو ایک ساتھ ترسیم کرنا دلچسپ مشغلہ ہے۔

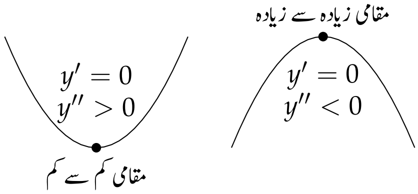
مقامی انتہائی قیمت کا دو رتبی تفرقی پرکھ

مقامی انتہا کا مقام تعین کرنے کی خاطر y' کی علامت کی تبدیلی کی بجائے درج ذیل پرکھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مقامی انتہا کا دو رتبی تفرق پرکھ



شکل 4.43: تفاعل $y = f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی تفرق۔



شکل 4.44: دو رتبی تفرقی پرکھ برائے مقامی انتہا

- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) < 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی (شکل 4.44)۔
- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) > 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی (شکل 4.44)۔

مذکورہ بالا پرکھ میں ہمیں صرف $x = c$ پر y'' درکار ہے نا کہ c پر کسی وقفہ پر۔یوں پرکھ کا استعمال نہایت آسان ہے۔ $y'' = 0$ یا غیر معین y'' کی صورت میں پرکھ ہمیں مدد نہیں کر پاتا ہے۔ایسی صورت میں ہمیں یک رتبی تفرق پرکھ استعمال کرنی ہو گی۔

y' اور y'' کے ترسیم ایک ساتھ

ہم نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل ترسیم کرتے ہیں۔

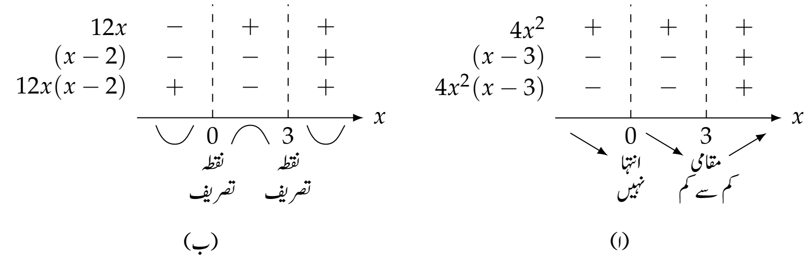
مثال 4.18: قلم و کاغذ سے تفاعل کا ترسیم
تفاعل $y = x^4 - 4x^3 + 10$ ترسیم کریں۔
حل: پہلا قدم: ہم y' اور y'' ڈھونڈتے ہیں۔

$$y = x^4 - 4x^3 + 10$$

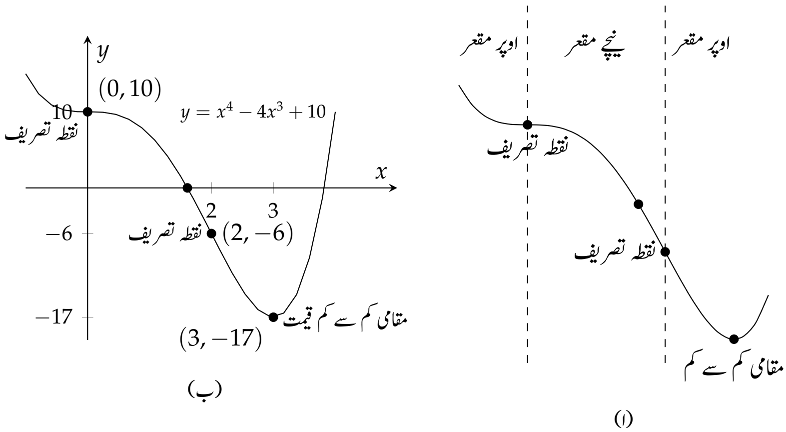
$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \qquad \text{نقطہ فاصل } x = 0 \text{ اور } x = 3 \text{ ہیں}$$

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \qquad \text{ممکنہ نقطہ تصریف } x = 0 \text{ اور } x = 2 \text{ ہیں}$$

دوسرا قدم: اتر اور چڑھاو دیکھنے کے لئے y' کی علامتوں کو دیکھ کر y کا رویہ جانتے ہیں۔ $y' = 4x^2(x-3)$ میں $x = 0$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی علامت منفی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے بھی منفی علامت حاصل ہوتی ہے۔یوں نقطہ $x = 0$ پر y' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہاں کوئی مقامی انتہا نہیں پایا جاتا ہے۔ $y' = 4x^2(x-3)$



شکل 4.45: اشکال برائے مثال 4.18



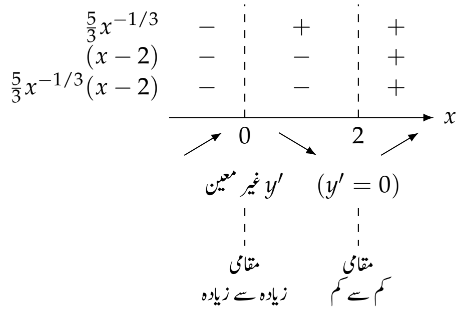
شکل 4.46: اشکال برائے مثال 4.18

میں $x = 3$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی منفی علامت جبکہ اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے مثبت علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر y' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.45-ا)۔

تیسرا قدم: نقطہ $x = 0$ اور $x = 2$ دونوں پر y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ دونوں نقطہ تصریف ہیں (شکل 4.45-ب)۔

چوتھا قدم: دوسرے اور تیسرے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے ہر وقفہ پر تفاعل کا عمومی خاکہ کھینچیں۔ ان خاکوں کو اکٹھا کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.46-ا)۔

پانچواں قدم: (اگر موزوں ہو تب) ترسیم پر وہ نقطے ظاہر کریں جہاں یہ x اور y محور کو قطع کرتی ہے۔ اسی طرح وہ نقطے جہاں y' اور y'' صفر ہیں کی نشاندہی کریں۔ مقامی انتہائی نقطے اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔ چوتھے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.46-ب)۔ □



شکل 4.47: اتار اور چڑھاو (مثال 4.19)

$y=f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. y' اور y'' حاصل کریں۔
2. منحنی کی اتار اور چڑھاو تعین کریں۔
3. منحنی کی مقعر کا تعین کریں۔
4. اجمال کرتے ہوئے مختلف خطوں میں ترسیم کا عمومی خاکہ بنائیں۔
5. ان اشکال کو ملا کر تفاعل ترسیم کریں۔

مثال 4.19: تفاعل $y=x^{5/3}-5x^{2/3}$ ترسیم کریں۔
حل: پہلا قدم: y' اور y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y=x^{5/3}-5x^{2/3}=x^{2/3}(x-5)$$ قطع محدد $x=0$ اور $x=5$

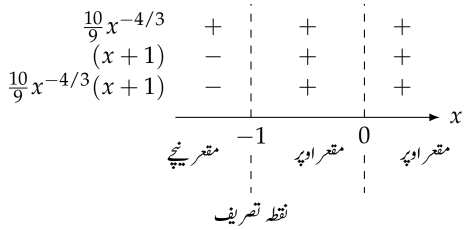
$$y'=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{10}{3}x^{-1/3}=\frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2)$$ نقطہ فاصل $x=0$ اور $x=2$

$$y''=\frac{10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}=\frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1)$$ ممکنہ نقطہ تصریف $x=0$ اور $x=-1$

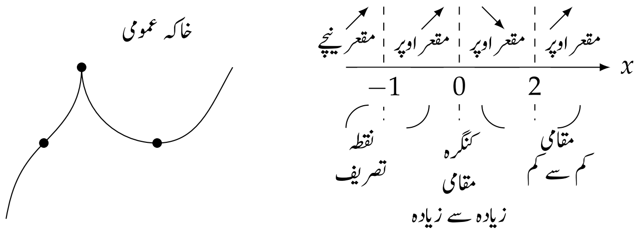
دوسرا قدم: اتار اور چڑھاو۔ (شکل 4.47)

تیسرا قدم: مقعر (شکل 4.48)

y'' کی علامت کی نقش سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x=-1$ پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے لیکن $x=0$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔البتہ یہ جانتے ہوئے کہ



شکل 4.48: مقعر (مثال 4.19)



شکل 4.49: اجمال اور خاکے (مثال 4.19)

1. تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ استمراری ہے۔

2. $x \to 0^-$ کرنے سے $y' \to \infty$ اور $x \to 0^+$ کرنے سے $y' \to -\infty$ ہوتا ہے (دوسرے قدم میں y' کا کلیہ دیکھیں)۔

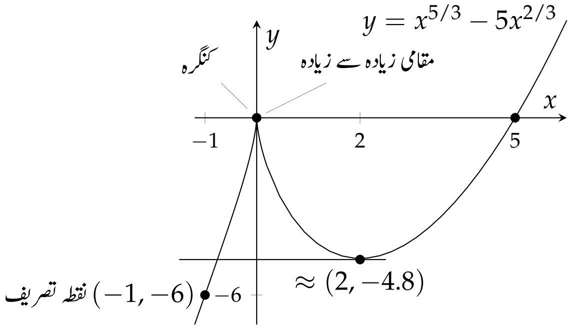
3. $x = 3$ پر مقعر تبدیل نہ ہونے (تیسرا قدم) سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $x = 0$ پر کنگرہ پایا جاتا ہے۔

چوتھا قدم: اجمال (شکل 4.49)

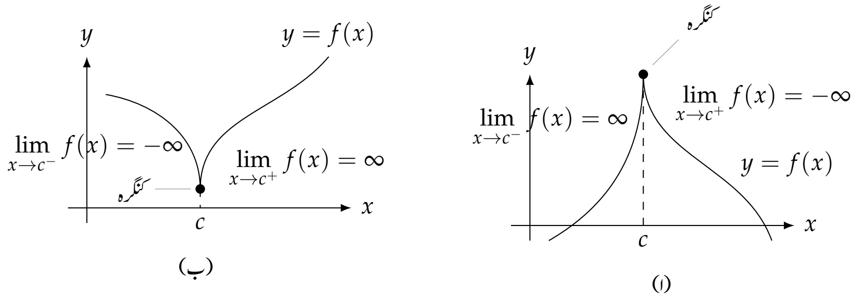
پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور ترسیم (شکل 4.50) $\square$

کنگرہ

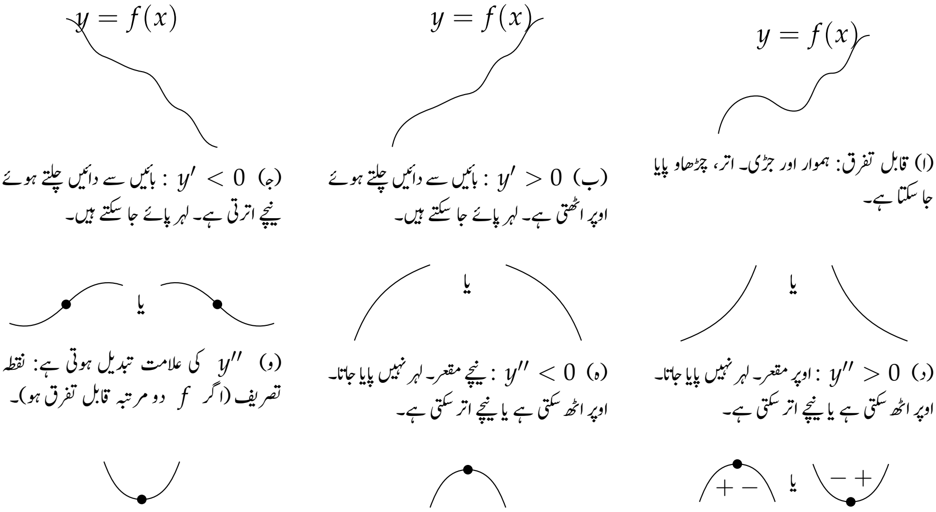
تفاعل $y = f(x)$ کا $x = c$ پر اس صورت کنگرہ پایا جاتا ہے جب x کے دونوں اطراف تفاعل کا مقعر ایک جیسا ہو اور یا (ا) $\lim_{x \to c^-} f'(x) = \infty$ اور $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ ہوں (شکل 4.51-ا)، اور یا (ب) $\lim_{x \to c^-} f'(x) = -\infty$ اور $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$ ہوں (شکل 4.51-ب)۔



شکل 4.50: تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ کی ترسیم (مثال 4.19)۔



شکل 4.51: کنگرہ، مقامی زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم نقطہ ہو سکتا ہے۔



(ا) قابل تفرق: ہموار اور جڑی۔ اتر، چڑھاو پایا جا سکتا ہے۔

(ب) $y' > 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے اوپر اٹھتی ہے۔ لہر پائے جا سکتے ہیں۔

(ج) $y' < 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے نیچے اترتی ہے۔ لہر پائے جا سکتے ہیں۔

(د) $y'' > 0$: اوپر مقعر۔ لہر نہیں پایا جاتا۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔

(ہ) $y'' < 0$: نیچے مقعر۔ لہر نہیں پایا جاتا۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔

(و) y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: نقطہ تصریف (اگر f دو مرتبہ قابل تفرق ہو)۔

(ز) y' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: مقامی زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم قیمت۔

(ح) $y' = 0, y'' < 0$: مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت۔

(ط) $y' = 0, y'' > 0$: مقامی کم سے کم قیمت۔

شکل 4.52: ترسیم کے بارے میں تفرق کیا بتلاتا ہے۔

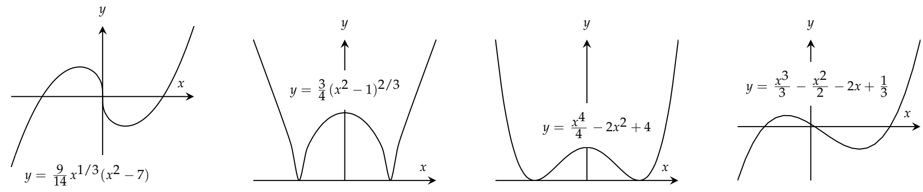
تفرق سے تفاعل کی معلومات کا حصول

آپ نے مثال 4.18 اور مثال 4.19 میں دیکھا کہ y' کو دیکھ کر قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی تقریباً تمام اہم معلومات دریافت کی جا سکتی ہیں۔ ہم ترسیم کی اتار اور چڑھاو، اور مقامی انتہا جان سکتے ہیں۔ ہم y' کا تفرق لے کر اترا اور چڑھاو کے وقفوں میں تفاعل کی مقعر دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم تفاعل کی ترسیم کی عمومی شکل جان سکتے ہیں۔ ہم صرف xy مستوی میں ترسیم کا مقام نہیں جان سکے ہیں۔ یہ معلومات مختلف x پر تفاعل کی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ حقیقت میں جیسا ہم نے حصہ 4.2 میں دیکھا، y' کے علاوہ ہمیں f کی قیمت صرف ایک نقطہ پر چاہیے۔

شکل 4.52 میں تفرق اور ترسیم کے تعلق دکھائے گئے ہیں۔

سوالات

ترسیم شدہ تفاعل کا تجزیہ
سوال 1 تا سوال 8 میں دیے ترسیم کی نقطہ تصریف، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ کی نشاندہی کریں۔ ان وقفوں کہ نشاندہی کریں جن پر ترسیم اوپر مقعر اور جن پر نیچے مقعر ہے۔



(ا) (ب) (ج) (د)

شکل 4.53: ترسیمات برائے سوال 1 تا سوال 4

سوال 1: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$ ، شکل 4.53-ا
جواب: $x = -1$ پر $\frac{3}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = 2$ پر -3 مقامی کم سے کم، نقطہ تصریف $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ ، چڑھاو $(-\infty, -1)$ اور $(2, \infty)$ پر، اتار $(-1, 2)$ پر، اوپر مقعر $(\frac{1}{2}, \infty)$ پر جبکہ نیچے مقعر $(-\infty, \frac{1}{2})$ پر۔

سوال 2: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$ ، شکل 4.53-ب

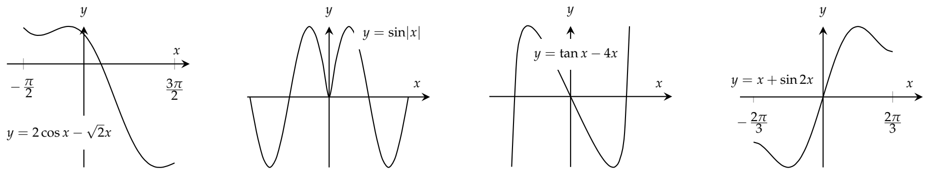
سوال 3: $y = \frac{3}{4}(x^2-1)^{2/3}$ ، شکل 4.53-ج
جواب: $x = 0$ پر $\frac{3}{4}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = \mp 1$ پر 0 مقامی کم سے کم، $(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4})$ اور $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4})$ پر نقطہ تصریف، چڑھاو $(-1, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر، اتار $(-\infty, -1)$ اور $(0, 1)$ پر، $(-\infty, -\sqrt{3})$ ور $(\sqrt{3}, \infty)$ پر مقعر اوپر، $(-\sqrt{3}, 3)$ پر مقعر نیچے۔

سوال 4: $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2-7)$ ، شکل 4.53-د

سوال 5: $y = x + \sin 2x, \; -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$ ، شکل 4.54-ا
جواب: $x = -\frac{2\pi}{3}$ پر $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -\frac{\pi}{3}$ پر $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی کم سے کم، $(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$ ، $(0, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پر نقطہ تصریف، $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ پر چڑھاو، $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ اور $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ پر اتار، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ پر مقعر اوپر، $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$ اور $(0, \frac{\pi}{2})$ پر مقعر نیچے۔

سوال 6: $y = \tan x - 4x, \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، شکل 4.54-ب

سوال 7: $y = \sin|x|\,, \; -2\pi \le x \le 2\pi$ ، شکل 4.54-ج
جواب: $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر 1 مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -2\pi$ ، $x = 0$ اور $x = 2\pi$ پر صفر، $x = -\frac{3\pi}{2}$ اور $x = \frac{3\pi}{2}$ پر -1 مقامی کم سے کم، $(-\pi, 0)$ اور $(\pi, 0)$ نقطہ تصریف، $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ، $(0, \frac{\pi}{2})$ اور $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ پر چڑھاو، $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$ ، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ پر اتار، $(-2\pi, -\pi)$ اور $(\pi, 2\pi)$ پر مقعر اوپر، $(-\pi, \pi)$ پر مقعر نیچے۔



شکل 4.54: ترسیمات برائے سوال 5 تا سوال 8

سوال 8: $y = 2\cos x - \sqrt{2}x,\ -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ ، شکل 4.54-د

مساوات کی ترسیم

صفحہ 374 پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے سوال 9 تا سوال 40 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔مقامی انتہا اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔

سوال 9: $y = x^2 - 4x + 3$
جواب: شکل 4.55-ا

سوال 10: $y = 6 - 2x - x^2$

سوال 11: $y = x^3 - 3x + 3$
جواب: شکل 4.55-ب

سوال 12: $y = x(6 - 2x)^2$

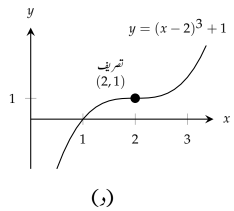
سوال 13: $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
جواب: شکل 4.55-ج

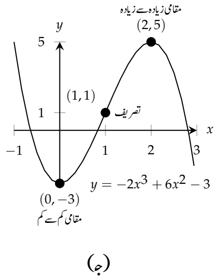
سوال 14: $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

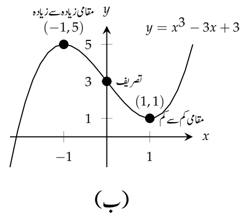
سوال 15: $y = (x - 2)^3 + 1$
جواب: شکل 4.55-د

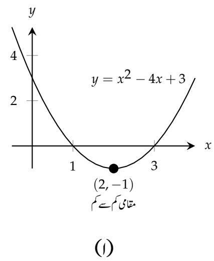
سوال 16: $y = 1 - (x + 1)^3$

سوال 17: $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$









شکل 4.55: حل ترسیمات برائے سوال 9 تا سوال 15

جواب: شکل 4.56-ا

سوال 18: $y=-x^4+6x^2-4=x^2(6-x^2)-4$

سوال 19: $y=4x^3-x^4=x^3(4-x)$
جواب: شکل 4.56-ب

سوال 20: $y=x^4+2x^3=x^3(x+2)$

سوال 21: $y=x^5-5x^4=x^4(x-5)$
جواب: شکل 4.56-ج

سوال 22: $y=x(\frac{x}{2}-5)^4$

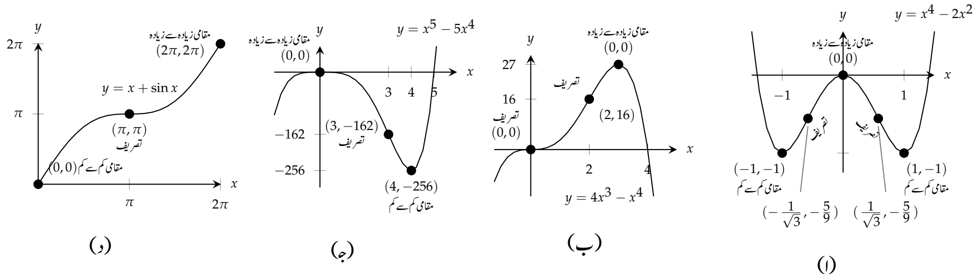
سوال 23: $y=x+\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$
جواب: شکل 4.56-د

سوال 24: $y=x-\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$

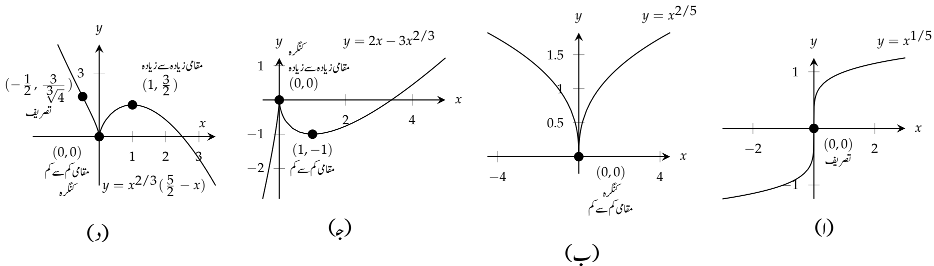
سوال 25: $y=x^{1/5}$
جواب: شکل 4.57-ا

سوال 26: $y=x^{3/5}$

سوال 27: $y=x^{2/5}$
جواب: شکل 4.57-ب



شکل 4.56: حل ترسیمات برائے سوال 17 تا سوال 23



شکل 4.57: حل ترسیمات برائے سوال 25 تا سوال 31

سوال 28: $y = x^{4/5}$

سوال 29: $y = 2x - 3x^{2/3}$
جواب: شکل 4.57-ج

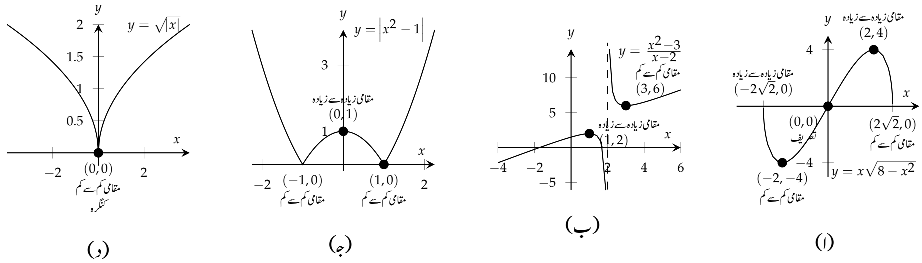
سوال 30: $y = 5x^{2/5} - 2x$

سوال 31: $y = x^{2/3}(\frac{5}{2} - x)$
جواب: شکل 4.57-د

سوال 32: $y = x^{2/3}(x - 5)$

سوال 33: $y = x\sqrt{8 - x^2}$
جواب: شکل 4.58-ا

سوال 34: $y = (2 - x^2)^{3/2}$



شکل 4.58: ترسیمات برائے سوال 33 تا سوال 39

سوال 35: $y = \frac{x^2-3}{x-2},\ x \neq 2$

جواب: شکل 4.58-ب

سوال 36: $y = \frac{x^3}{3x^2+1}$

سوال 37: $y = \left|x^2 - 1\right|$

جواب: شکل 4.58-ج

سوال 38: $y = \left|x^2 - 2x\right|$

سوال 39: $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

جواب: شکل 4.58-د

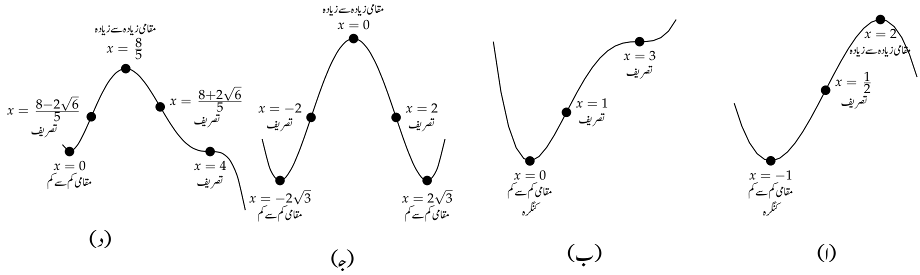
سوال 40: $y = \sqrt{|x-4|}$

y' سے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ

سوال 41 تا سوال 62 میں استمراری تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق y' دیا گیا ہے۔ y'' تلاش کرتے ہوئے صفحہ 374 پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

سوال 41: $y' = 2 + x - x^2$

جواب: شکل 4.59-ا



شکل 4.59: ترسیمات برائے سوال 41 تا سوال 47

سوال 42: $y' = x^2 - x - 6$

سوال 43: $y' = x(x-3)^2$
جواب: شکل 4.59-ب

سوال 44: $y' = x^2(2-x)$

سوال 45: $y' = x(x^2 - 12)$
جواب: شکل 4.59-ج

سوال 46: $y' = (x-1)^2(2x+3)$

سوال 47: $y' = (8x - 5x^2)(4-x)^2$
جواب: شکل 4.59-د

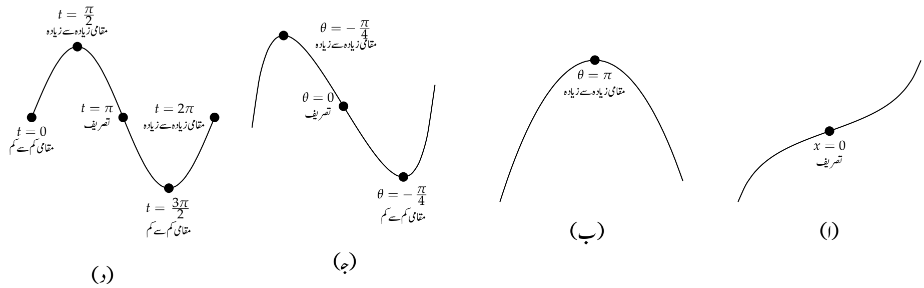
سوال 48: $y' = (x^2 - 2x)(x-5)^2$

سوال 49: $y' = \sec^2 x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.60-ا

سوال 50: $y' = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 51: $y' = \cot\frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$
جواب: شکل 4.60-ب

سوال 52: $y' = \csc^2\frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$



شکل 4.60: حل ترسیمات برائے سوال 49 تا سوال 55

سوال 53: $y' = \tan^2\theta - 1,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

جواب: شکل 4.60-ج

سوال 54: $y' = 1 - \cot^2\theta,\ 0 < \theta < \pi$

سوال 55: $y' = \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$

جواب: شکل 4.60-د

سوال 56: $y' = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال 57: $y' = (x+1)^{-2/3}$

جواب: شکل 4.61-ا

سوال 58: $y' = (x-2)^{-1/3}$

سوال 59: $y' = x^{-2/3}(x-1)$

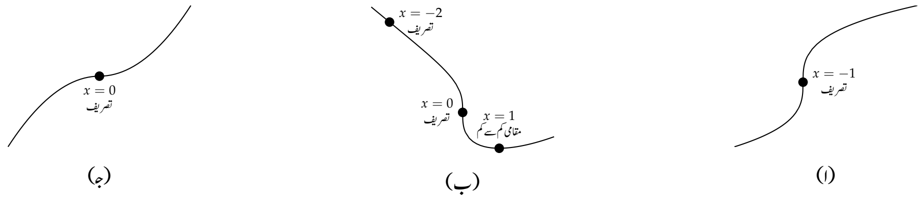
جواب: شکل 4.61-ب

سوال 60: $y' = x^{-4/5}(x+1)$

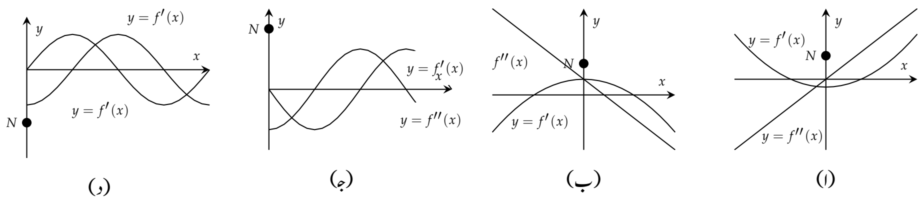
سوال 61:
$$y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

جواب: شکل 4.61-ج

سوال 62:
$$y' = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$



شکل 4.61: حل ترسیمات برائے سوال 57 تا سوال 61



شکل 4.62: ترسیمات برائے سوال 63 تا سوال 66

y' اور y'' سے y کا خاکہ بنانا

سوال 63 تا سوال 66 میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے تفاعل $y = f(x)$ کے یک رتبی تفرق y' اور دو رتبی تفرق y'' کی ترسیم دی گئیں ہیں۔ ان کی نقل کر کے اس پر y کی تخمینی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 63: ترسیمات شکل 4.62-ا میں دیے گئے ہیں۔
جواب: حل ترسیم شکل 4.63-ا

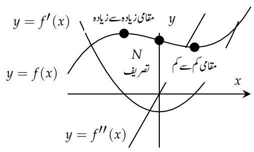
سوال 64: ترسیمات شکل 4.62-ب میں دیے گئے ہیں۔

سوال 65: ترسیمات شکل 4.62-ج میں دیے گئے ہیں۔
جواب: حل ترسیم شکل 4.63-ب

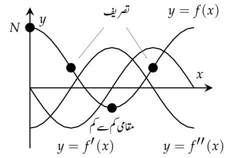
سوال 66: ترسیمات شکل 4.62-د میں دیے گئے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 67: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 4.64 میں دکھایا گیا ہے۔دیے گئے پانچ نقطوں پر بتائیں کہ y' اور

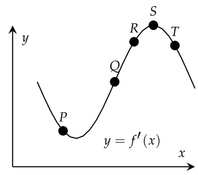


(ا)

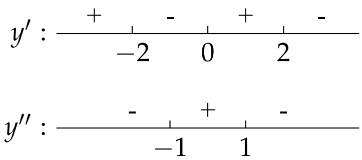


(ب)

شکل 4.63: حل ترسیمات برائے سوال 63 تا سوال 66



شکل 4.64: ترسیم برائے سوال 67



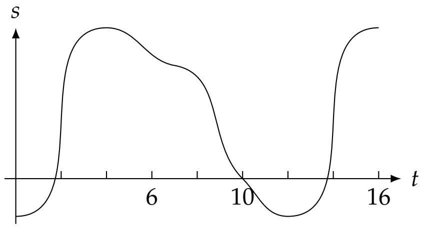
شکل 4.65: ترسیم برائے سوال 70

y'' مثبت، منفی یا صفر ہیں۔
جواب:

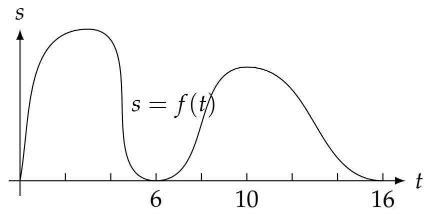
	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

سوال 68: درج ذیل پر پورا اترتا ہوا ہموار ترسیم کھینچیں۔

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= 8, & f'(2) &= f'(-2) = 0 \\
f(0) &= 4, & f'(x) &< 0, |x| < 2 \\
f(2) &= 0, & f''(x) &< 0,\ x < 0 \\
f'(x) &> 0, |x| > 2, & f''(x) &> 0,\ x > 0
\end{aligned}
$$



شکل 4.67: ترسیم برائے سوال 72



شکل 4.66: ترسیم برائے سوال 71

سوال 69: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو کو ترسیم کریں۔

x	y	تفرق
$x < 2$		$y < 0, y'' > 0$
2	1	$y' = 0, y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, y'' > 0$
4	4	$y' > 0, y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, y'' < 0$
6	7	$y' = 0, y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, y'' < 0$

جواب: شکل 4.70

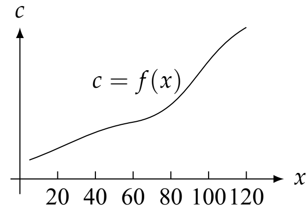
سوال 70: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو نقطہ $(-2,2)$ ، $(-1,1)$ ، $(0,0)$ ، $(1,1)$ اور $(2,2)$ سے گزرتا ہے اور جس کے یک رتبی تفرق کی علامت کا نقش شکل 4.65 میں دیا گیا ہے کو ترسیم کریں۔

سوال 71: سمتی رفتار اور اسراع
محدد ی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.66 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

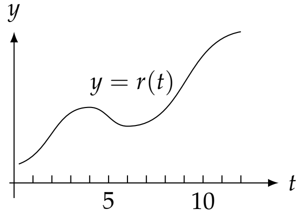
سوال 72: سمتی رفتار اور اسراع
محدد ی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.67 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

سوال 73: حاشیہ لاگت
x اشیاء پیدا کرنے پر لاگت $c = f(x)$ کو شکل 4.68 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کتنی پیداوار پر حاشیہ لاگت گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے؟
جواب: تقریباً 60 پیداوار پر۔

سوال 74: ماہوار آمدنی $y = r(t)$ بالمقابل ماہ کو شکل 4.69 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کس دوران حاشیہ آمدنی بڑھ رہی ہے اور کب گھٹ رہی ہے؟



شکل 4.68: لاگت بالمقابل پیداوار (سوال 73)



شکل 4.69: آمدن بالمقابل سال (سوال 74)

سوال 75: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟(اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)$$

جواب: $x = 2$ پر مقامی کم سے کم، $x = 1$ اور $x = \frac{5}{3}$ پر تصریف۔

سوال 76: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟(اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

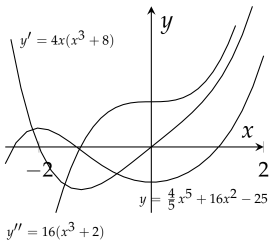
سوال 77: $x > 0$ کے لئے ایسا تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں جس کا $f(1) = 0$ اور $f'(x) = \frac{1}{x}$ ہے۔ کیا تفاعل کی مقعر کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 78: تفاعل $y = f(x)$ کا دو رتبی تفرق استمراری اور غیر صفر ہے۔ کیا اس کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

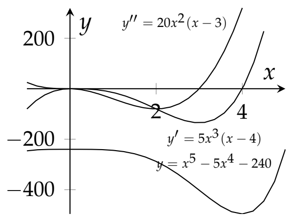
سوال 79: مستقل b ، c اور d کی صورت میں b کی کس قیمت کے لئے منحنی $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $b = -3$

سوال 80: افقی مماس۔ درست یا غلط؟ سمجھائیں

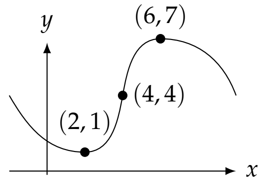
1. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت جفت ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔



شکل 4.72: حل ترسیم سوال 87



شکل 4.71: حل ترسیم سوال 85



شکل 4.70: حل ترسیم برائے سوال 69

2. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت طاق ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

سوال 81: قطع مکافی

1. قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کا کنگرہ تلاش کریں۔

2. قطع مکافی کب اوپر مقعر اور کب نیچے مقعر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$؛ (ب) $a > 0$ کی صورت میں اوپر مقعر جبکہ $a < 0$ کی صورت میں نیچے مقعر۔

سوال 82: کیا یہ درست ہے کہ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی مقعر ہر ایسے نقطہ پر تبدیل ہوتی ہے جہاں $f''(x) = 0$ ہو؟ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

سوال 83: دو درجی منحنی۔ آپ دو درجی منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 84: کعبی منحنی۔ آپ کعبی منحنی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 85 تا سوال 95 میں تفاعل کی ترسیم پر نقطہ تصریف (اگر موجود ہو)، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطے تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کی نشاندہی کریں۔ ساتھ ہی تفاعل کا یک رتبی تفرق اور دو رتبی تفرق بھی ترسیم کریں۔ جہاں یہ ترسیمات x محدد کو قطع کرتی ہیں، ان کا تفاعل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اس کے علاوہ تفرق کے تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلقات ہیں؟

سوال 85: $y = x^5 - 5x^4 - 240$

جواب: $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ تصریف ہیں۔ شکل 4.71

سوال 86: $y = x^3 - 12x^2$

سوال 87: $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$
جواب: $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ تصریف ہیں۔ تصریف $x = -\sqrt[3]{2}$ پر اور مقامی زیادہ سے زیادہ $x = -2$ پر ہیں۔ شکل 4.72

سوال 88: $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

سوال 89: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ اور اس کے پہلے دو تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 90: تفاعل $f(x) = x \cos x$ اور اس کے پہلے دو تفرق کو $0 \le x \le 2\pi$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 91:

1. $k = 0$ اور اس کی قریبی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + kx$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ k کی قیمت کا ترسیم کی صورت پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟

2. $f''(x)$ تلاش کریں۔آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

3. k کی دیگر قیمتوں کے ساتھ تجربہ کر کے دیکھیں۔ $k \to \infty$ اور $k \to -\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

جواب: (ب) $f'(x) = 3x^2 + k; -12k$ ؛ مثبت اگر $k < 0$ ، منفی اگر $k > 0$ ہو، 0 اگر $k = 0$ ہو؛ اگر $k < 0$ ہو تب f' کے دو صفر ہوں گے، $k = 0$ کی صورت میں ایک صفر اور $k > 0$ کی صورت میں کوئی صفر نہیں ہو گا۔

سوال 92:

ا. $k = -4$ اور اس کے قریبی قیمتوں کے لئے ایک ساتھ $-1 \le x \le 4$ پر $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$ ترسیم کریں۔ k کی قیمت ترسیم کی صورت پر کس طرح اثر انداز ہوتی ہے؟

ب. $f''(x)$ تلاش کریں۔آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

سوال 93:

ا. $-3 \le x \le 3$ کے لئے $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ ترسیم کریں۔اس کے بعد احصاء کی استعمال سے مقعر، اٹھان اور نیچے گرنے کی تصدیق کریں۔ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر منحنی کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

جواب: (ب) چونکہ $\lim_{x\to 0^+} y' = -\infty$ اور $\lim_{x\to 0^-} y' = \infty$ ہیں لہٰذا کنگرہ ہو گا۔

سوال 94:

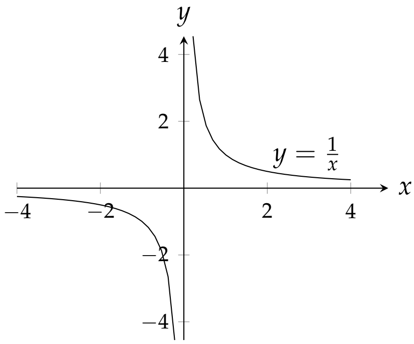
ا. $-0.5 \le x \le 1.5$ پر $y = 9x^{2/3}(x-1)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی مدد سے مقعر، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطوں کی تصدیق کریں۔ مبدا کے بائیں جانب کون سی مقعر ہے؟ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر ترسیم کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال 95: کیا $x = -3$ کے قریب $y = x^2 + 3\sin 2x$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: y' کی ترسیم $x = -3$ کے قریب محور کو قطع کرتی ہے لہٰذا $x = -3$ کے قریب y کا افقی مماس ہو گا۔

4.5 $\quad x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \to \mp\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔



شکل 4.73: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

$x \to \mp\infty$ پر حد

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گھٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار بتدریج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \to \mp\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

2. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x < N \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

$\square$

لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہٰذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$x \to \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کے حد حاصل کیے۔اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کی بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$\lim_{x \to \mp\infty} k = k, \quad \lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{4.7}$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

ب. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

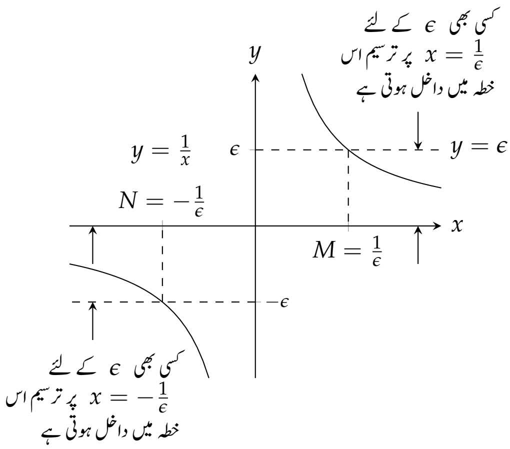
$$x > M, \quad \implies \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \quad \implies \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$N = -\frac{1}{\epsilon}$ یا $-\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔



شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 4.20)

□

مساوات 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6: $x \to \mp\infty$ پر حل کے خواص
اگر $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)+g(x)] = L+M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-g(x)] = L-M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to\mp\infty} kf(x) = kL$

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

یہ خواص بالکل مسئلہ 2.1 (صفحہ 113) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(5+\tfrac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ} \\ &= 5+0=5 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب} \\ &= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں} \end{aligned}$$

□

مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 4.75)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

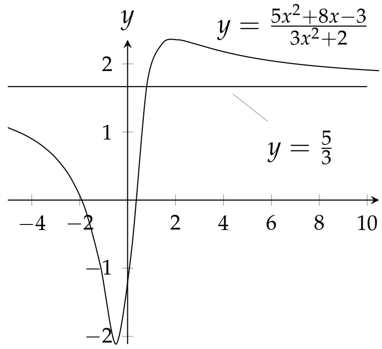
□

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 4.76)

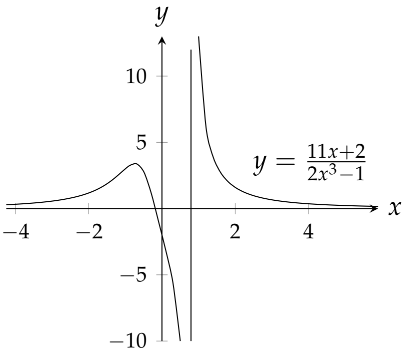
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں} \\ &= \frac{0+0}{2-0} = 0 \end{aligned}$$

□

مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل 4.77



شکل 4.75: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 4.22)



شکل 4.76: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 4.23)

ا.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= -\infty$$

ب.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= \frac{\infty}{2} = \infty$$

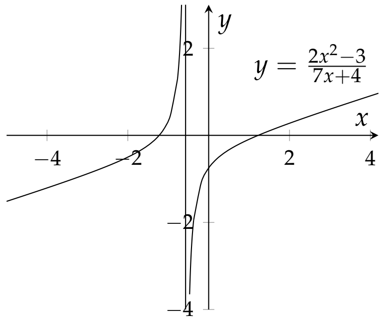
□

مثال 4.22 تا مثال 4.24 سے $x \to \mp\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

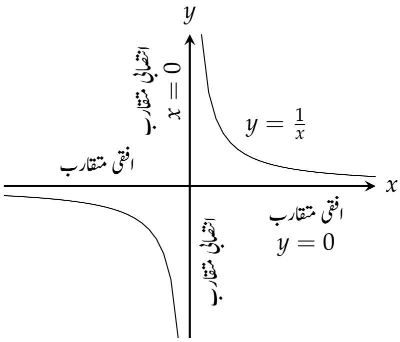
ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔



شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 4.24



شکل 4.78: محددی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے متقارب ہیں۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mp\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انتصابی متقارب

اگر مبدا سے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصل صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا متقارب[13] کہتے ہیں۔

[13] asymptote

مثال 4.25: محددی محور تفاعل $y=\frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل 4.78)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

ہیں لہٰذا x محور $y=\frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

ہیں لہٰذا y محور بھی $y=\frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

یاد رہے کہ $x=0$ پر نسب نما صفر ہے لہٰذا تفاعل غیر معین ہے۔ □

تعریف: تفاعل $y=f(x)$ کا خط $y=b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b$$ ہو۔

تفاعل $y=f(x)$ کا خط $x=a$ اس صورت انتصابی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\mp\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\mp\infty$$ ہو۔

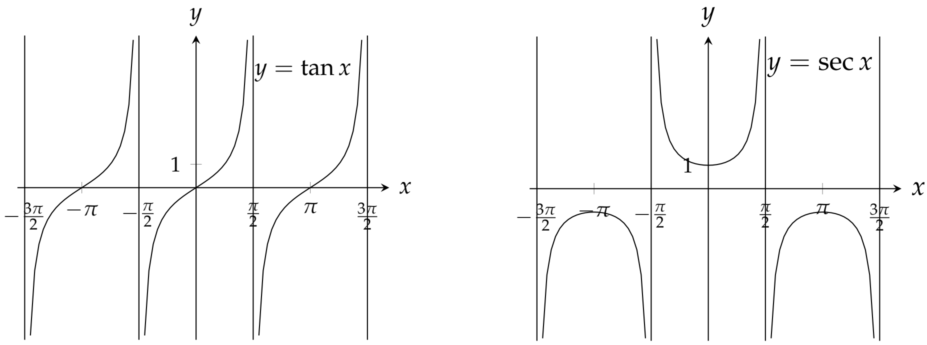
□

مثال 4.26: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x=0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.79)۔

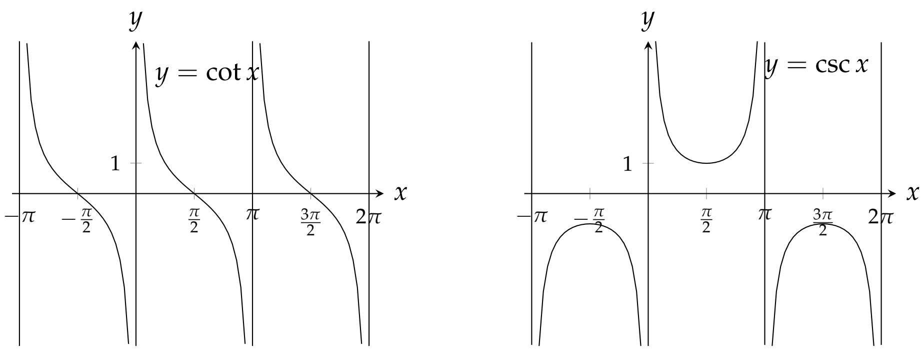
$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x},\quad y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x=0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.80)۔

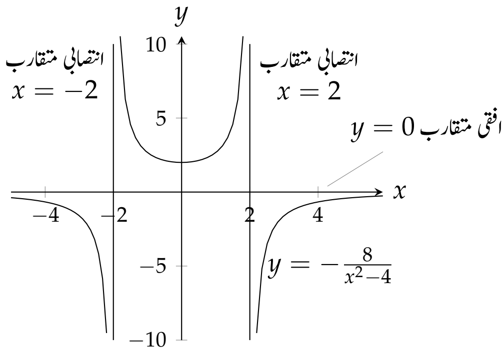
$$y=\csc x=\frac{1}{\sin x},\quad y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$



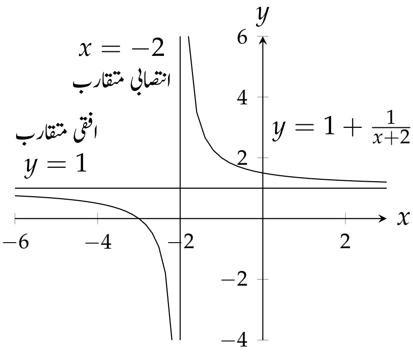
شکل 4.79: انتصابی متقارب (مثال 4.26)



شکل 4.80: انتصابی متقارب (مثال 4.26)



شکل 4.82: انتصابی متقارب (مثال 4.28)



شکل 4.81: انتصابی متقارب (مثال 4.27)

□

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے $x+3$ اور $x+2$ سے تقسیم کر کے

$$y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

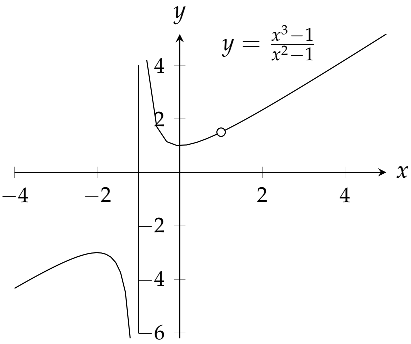
لکھا جا سکتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہو گی۔یوں محددی محور کی بجائے خط $y = 1$ اور خط $x = -2$ متقارب خط ہوں گے۔

□

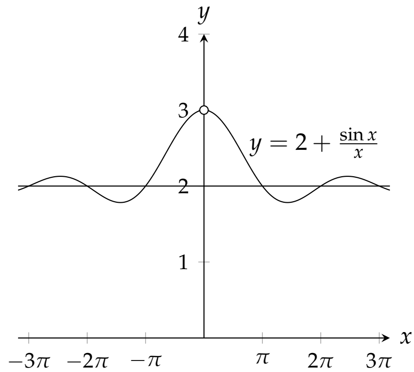
مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا متقارب تلاش کریں۔

$$y = -\frac{8}{x^2-4}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ اور $x - \mp 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔



شکل 4.83: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x = 1$ پر عدم استمرار قابل ہٹاو ہے لہٰذا اس کی صرف $x = -1$ پر متقاربی خط ہو گا۔



شکل 4.84: منحنی اپنے متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کر سکتی ہے (مثال 4.30)۔

چونکہ $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$ لہٰذا افقی متقارب خط $y = 0$ ہے (شکل 4.82)۔ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ سے $x = 2$ متقاربی خط حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $x = -2$ بھی متقاربی خط حاصل ہو گا۔ □

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاو عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

کا $x = -1$ پر انتصابی متقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا عدم استمرار قابل ہٹاو ہے اور $x \to 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل 4.83)۔ □

مسئلہ 2.4 (صفحہ 119 مسئلہ بیچ) بھی $x \to \mp\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال 4.30: مسئلہ نچ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم $x \to 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \to \mp\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہٰذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

اور $\lim_{x\to\mp\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ نچ کے تحت $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔یوں

$$\lim_{x\to\mp\infty}(2 + \frac{\sin x}{x}) = 2 + 0 = 2$$

ہو گا لہٰذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط $y = 2$ ہو گا (شکل 4.84)۔ □

ترچھے متقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نا افقی اور نا انتصابی ہو گا۔

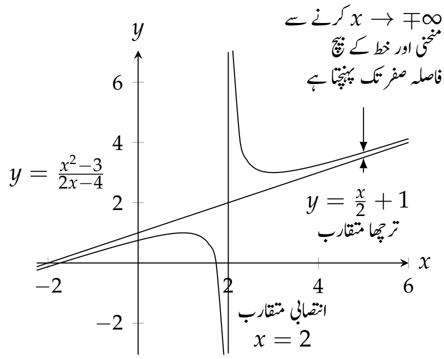
مثال 4.31: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ $x^2 - 3$ کو $2x - 4$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ ہیں لہٰذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔ $x \to \mp\infty$ پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \to \frac{x}{2} + 1$ تک پہنچتی ہے۔یوں $y = \frac{x}{2} + 1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل 4.85)۔ □



شکل 4.85: ترچھا متقارب (مثال 4.31)

متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad x \text{ کی بڑی قیمتوں کے لئے}$$
$$f(x) = \frac{1}{2x-4} \qquad 2 \text{ کے قریب } x \text{ کی قیمتوں کے لئے}$$

بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہٰذا $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا غلبہ[14] ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ غالب[15] ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

---

[14] dominates
[15] dominant

مثال 4.32: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3+1}{x}$$

حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاو، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔
پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔
دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \tag{4.8}$$

$|x|$ کی بڑی قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات 4.8 میں $x = 0$ پر انتصابی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔
تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاو۔ یک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔

	$x<0$	$0<x<0.8$	$x>0.8$
$2x^3-1$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$y' = \frac{2x^3-1}{x^2}$	$-$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x = 0$: انتہا غیر موجود؛ $x = 0.8$: مقامی کم سے کم

$$2x - \frac{1}{x^2} = 0$$
$$2x^3 - 1 = 0$$
$$x^3 = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8$$

چوتھا قدم: مقعر۔ دو رتبی تفرق

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3}$$

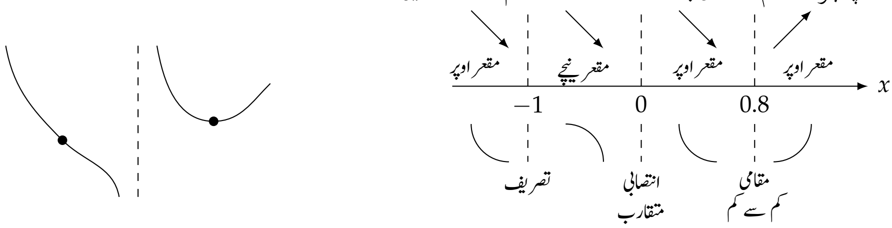
نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

	$x<-1$	$-1<x<0$	$x>0$
$2x^3+2$	$-$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$
$y'' = \frac{2x^3+2}{x^3}$	$+$	$-$	$+$
	مقعر اوپر	مقعر نیچے	مقعر اوپر

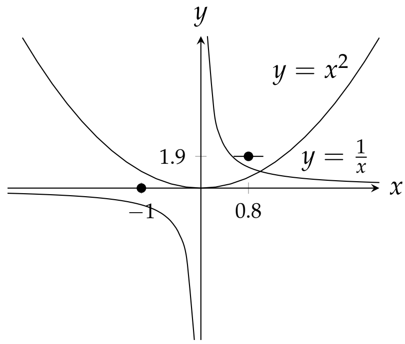
$x = -1$: نقطہ تصریف

$$2 + \frac{2}{x^3} = 0$$
$$2x^3 + 2 = 0$$
$$x^3 = -1$$
$$x = -1$$

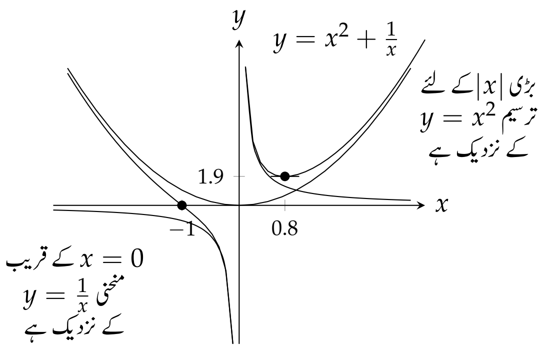
پانچواں قدم: درج بالا معلومات کو اکٹھا کر کے ترسیم کا خاکہ بناتے ہیں۔



چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تشاکل کی نشاندہی کریں۔
کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟

3. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔

4. متقارب خطوط اور قابل ہٹاو عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
$x \to \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

5. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاو دریافت کریں۔

6. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔

7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدد، پر f کی قیمت تلاش کریں۔

9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

$x \to \mp\infty$ پر حد کا حساب
سوال 1 تا سوال 6 میں (ا) $x \to \infty$ پر (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 1: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$
جواب: (ا) -3، (ب) -3

سوال 2: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 3: $g(x) = \frac{1}{2+\frac{1}{x}}$
جواب: (ا) $\frac{1}{2}$، (ب) $\frac{1}{2}$

سوال 4: $g(x) = \frac{1}{8-\frac{5}{x^2}}$

سوال 5: $h(x)=\frac{-5+\frac{7}{x}}{3-\frac{1}{x^2}}$
جواب: (ا) $-\frac{5}{3}$ ، (ب) $-\frac{5}{3}$

سوال 6: $h(x)=\frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال 7 تا سوال 10 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$
جواب: 0

سوال 8: $\lim_{\theta\to\infty}\frac{\cos\theta}{3\theta}$

سوال 9: $\lim_{t\to-\infty}\frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$
جواب: -1

سوال 10: $\lim_{r\to\infty}\frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

ناطق تفاعل کی حد
سوال 11 تا سوال 24 میں دیے ناطق تفاعل کی (ا) $x\to\infty$ اور (ب) $x\to-\infty$ پر حد تلاش کریں۔

سوال 11: $f(x)=\frac{2x+3}{5x+7}$
جواب: (ا) $\frac{2}{5}$ ، (ب) $\frac{2}{5}$

سوال 12: $f(x)=\frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال 13: $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$
جواب: (ا) 0 ، (ب) 0

سوال 14: $f(x)=\frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال 15: $f(x)=\frac{1-12x^3}{4x^2+12}$
جواب: (ا) $-\infty$ ، (ب) ∞

سوال 16: $g(x)=\frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال 17: $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$
جواب: (ا) 7، (ب) 7

سوال 18: $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

سوال 19: $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$
جواب: (ا) $-\infty$، (ب) ∞

سوال 20: $g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

سوال 21: $g(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$
جواب: (ا) ∞، (ب) $-\infty$

سوال 22: $h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$

سوال 23: $h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$
جواب: (ا) $-\frac{2}{3}$، (ب) $-\frac{2}{3}$

سوال 24: $h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9}$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت

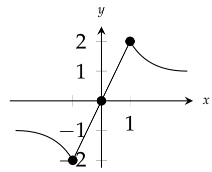
ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔ نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 25 تا سوال 30 میں حد تلاش کریں۔

سوال 25: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$
جواب: 0

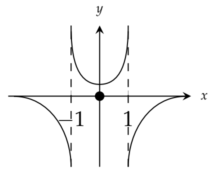
سوال 26: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

سوال 27: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$
جواب: 1

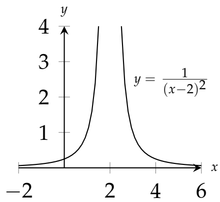
سوال 28: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$



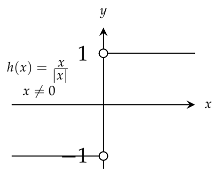
شکل 4.86: ایک ممکنہ حل برائے سوال 31



شکل 4.87: ایک ممکنہ حل برائے سوال 33



شکل 4.88: ایک ممکنہ حل برائے سوال 35



شکل 4.89: ایک ممکنہ حل برائے سوال 37

سوال 29: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$

جواب: ∞

سوال 30: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال 31 تا سوال 34 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہٰذا کارتیسی محدد پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔(ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہٰذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

سوال 31: $f(0)=0, f(1)=2, f(-1)=-2, \lim\limits_{x\to-\infty} = -1, \lim\limits_{x\to\infty} = 1$

جواب: شکل 4.86

سوال 32: $f(0)=0, \lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to0^+} = 2, \lim\limits_{x\to0^-} = -2$

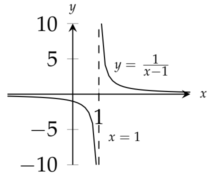
سوال 33: $f(0)=0, \lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \infty,$
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

جواب: شکل 4.87

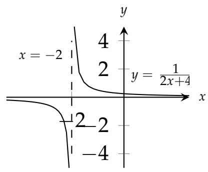
سوال 34: $f(2)=1, f(-1)=0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\infty,$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

تفاعل کی ایجاد

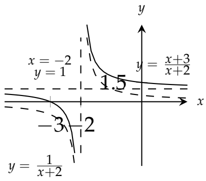
سوال 35 تا سوال 38 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہٰذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)



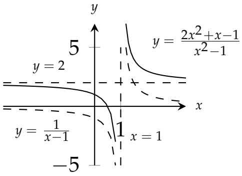
شکل 4.90: ترسیم سوال 39



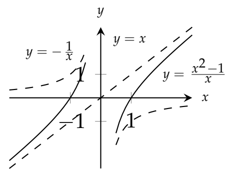
شکل 4.91: ترسیم سوال 41



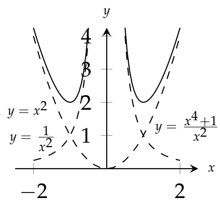
شکل 4.92: ترسیم سوال 43



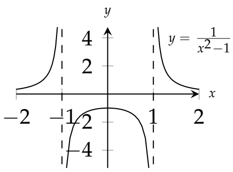
شکل 4.93: ترسیم سوال 45



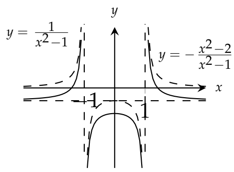
شکل 4.94: ترسیم سوال 47



شکل 4.95: ترسیم سوال 49



شکل 4.96: ترسیم سوال 51



شکل 4.97: ترسیم سوال 53

سوال 35: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$
جواب: شکل 4.88

سوال 36: $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = 0,\ \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$

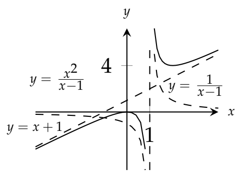
سوال 37: $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1,\ \lim_{x\to\infty} h(x) = 1,\ \lim_{x\to 0^-} h(x) = -1,\ \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$
جواب: شکل 4.89

سوال 38: $\lim_{x\to\mp\infty} k(x) = 1,\ \lim_{x\to 1^-} k(x) = \infty,\ \lim_{x\to 1^+} (x) = -\infty$

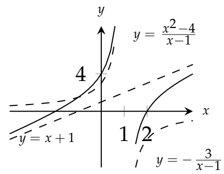
ناطق تفاعل کی ترسیم
سوال 39 تا سوال 66 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ متقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

سوال 39: $y = \frac{1}{x-1}$
جواب: شکل 4.90

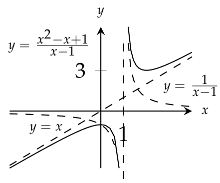
سوال 40: $y = \frac{1}{x+1}$



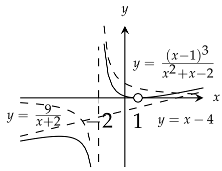
شکل 4.98: ترسیم سوال 55



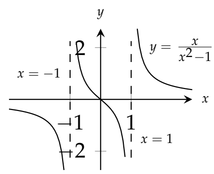
شکل 4.99: ترسیم سوال 57



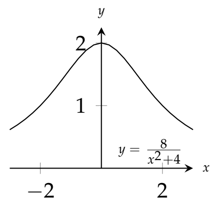
شکل 4.100: ترسیم سوال 59



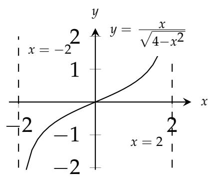
شکل 4.101: ترسیم سوال 61



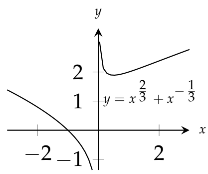
شکل 4.102: ترسیم سوال 63



شکل 4.103: ترسیم سوال 65



شکل 4.104: ترسیم سوال 67



شکل 4.105: ترسیم سوال 69

سوال 41: $y = \frac{1}{2x+4}$
جواب: شکل 4.91

سوال 42: $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 43: $y = \frac{x+3}{x+2}$
جواب: شکل 4.92

سوال 44: $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 45: $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.93

سوال 46: $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 47: $y = \frac{x^2-1}{x}$
جواب: شکل 4.94

سوال 48: $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 49: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$
جواب: شکل 4.95

سوال 50: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 51: $y = \frac{1}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.96

سوال 52: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 53: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.97

سوال 54: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

سوال 55: $y = \frac{x^2}{x-1}$
جواب: شکل 4.98

سوال 56: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 57: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$
جواب: شکل 4.99

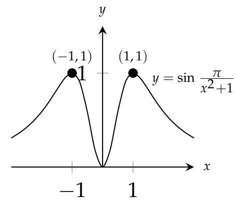
سوال 58: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

سوال 59: $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$
جواب: شکل 4.100

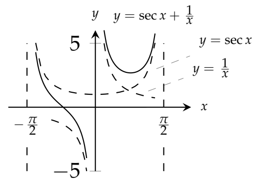
سوال 60: $y = -\frac{x^2-x+1}{x-1}$

سوال 61: $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$
جواب: شکل 4.101

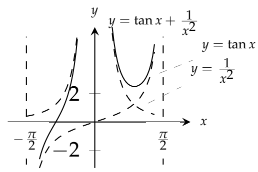
سوال 62: $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$



شکل 4.106: ترسیم سوال 71



شکل 4.107: ترسیم سوال 73



شکل 4.108: ترسیم سوال 75

سوال 63: $y = \frac{x}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.102

سوال 64: $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

سوال 65: $y = \frac{8}{x^2+4}$
جواب: شکل 4.103

سوال 66: $y = \frac{4x}{x^2+4}$

کمپیوٹر کا استعمال
سوال 67 تا سوال 72 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

سوال 67: $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
جواب: شکل 4.104

سوال 68: $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

سوال 69: $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$
جواب: شکل 4.105

سوال 70: $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

سوال 71: $y = \sin(\frac{\pi}{x^2+1})$
جواب: شکل 4.106

سوال 72: $y = -\cos(\frac{\pi}{x^2+1})$

اجزاء کی ترسیمات

سوال 73 تا سوال 76 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

سوال 73: $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.107

سوال 74: $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 75: $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.108

سوال 76: $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 77: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا c پایا جاتا ہے کہ $f(c)$ کی قیمت درج ذیل ہو۔

ا. -2 ب. $\cos 3$ ج. $5\,000\,000$

سوال 78: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$ تلاش کریں۔

سوال 79: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x > 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔وقفہ $x < 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟
جواب: بڑھتا

سوال 80: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x < 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔وقفہ $x > 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

سوال 81: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔کیا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بین کریں۔

سوال 82: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں۔اگر $g(x)$ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی ترسیم کا متقارب ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 83: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: 2

سوال 84: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 85:

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال 4.30) متقاربی خط کو لا متناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $x \to \infty$ پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

1) $x > 0$ پر f قابل تفرق ہے۔

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

3) $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ غیر موجود ہے۔

جواب: (ب) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}\sin x^2$ ممکن ہے۔

سوال 86: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2+3x+7}{x+2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = x+1+\frac{5}{x+2}$$

جس کی ترچھی متقارب $y = x+1$ ہے۔

اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = \frac{x+3+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

ملتا ہے جس کی متقارب $y = x+3$ ہے۔

ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 87 اور سوال 88 میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \to \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 87: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

سوال 88: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے

سوال 89 تا سوال 92 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال 89: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$
جواب: $x = -1, y = 1 - x$

سوال 90: $y = \frac{x^2+x-6}{2x-2}$

سوال 91: $y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$
جواب: $x = 1, x = -1, y = x - 1$

سوال 92: $y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2}$

سوال 93 تا سوال 98 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

سوال 93: $y = x^3 + \frac{3}{x}$

سوال 94: $y = x^3 - \frac{3}{x}$

سوال 95: $y = 2\sin x + \frac{1}{x}$

سوال 96: $y = 2\cos x - \frac{1}{x}$

سوال 97: $y = \frac{x^2}{2} + 3\sin 2x$

سوال 98: $y = (x-1)^{11} + 2\sin 2\pi x$

سوال 99 اور سوال 100 کا تفاعل ترسیم کریں۔اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. $x \to 0^+$ اور $x \to 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب. $x \to \mp\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج. $x \to 1$ اور $x \to -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 99: $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})^{2/3}$
جواب: (ا) $y \to \infty$ ، (ب) $y \to \infty$ ، (ج) $x = \mp 1$ پر کنگرہ

سوال 100: $y = \frac{3}{2}(\frac{x}{x-1})^{2/3}$

سوال 101: تفاعل $y = -\frac{x^3-2}{x^2+1}$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

ا. $-9 \le x \le 9$ ب. $-90 \le x \le 90$ ج. $-900 \le x \le 900$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہو گی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہو گا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟
جواب: جزو-ج میں فاصلے اتنے زیادہ ہیں کہ چھوٹی حرکت نظر نہیں آتی ہے۔

سوال 102: تفاعل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$ کو وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا
بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔مثال کے طور پر

$$\lim_{x\to\infty} \sin\tfrac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta \qquad (\theta = \tfrac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جا سکتا ہے۔سوال 103 تا سوال 108 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تا کہ ترسیم پر حد کو دیکھا جا سکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

سوال 103: $\lim_{x\to\mp\infty} x\sin\frac{1}{x}$
جواب: 1

سوال 104: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

سوال 105: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5}$
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 106: $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^{1/x}$

سوال 107: $\lim_{x\to\mp\infty} (3+\frac{2}{x})(\cos\frac{1}{x})$
واب: 3

سوال 108: $\lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x^2} - \cos\frac{1}{x})(1+\sin\frac{1}{x})$

4.6 بہترین بنانا

کسی چیز کو بہترین بنانے سے مراد اس چیز کی کسی خاصیت کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ بنانا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل بنانے پر کم تر لاگت آتی ہے؟ 30 cm قطر لکڑ سے کتنی مضبوط ترین شہتیر حاصل کی جا سکتی ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرتے ہیں۔

کاروبار اور صنعتی مثالیں

مثال 4.33: دھاتی چادر کا استعمال
ایک چکور چادر جس کا ضلع 30 cm ہے کے کونوں سے چھوٹے چکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہو گا؟

حل: شکل 4.109 میں کٹا ہوا چادر دکھایا گیا ہے۔ کٹے ہوئے چکور کا ضلع x سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم H مربع سنٹی میٹر

$$H(x) = x(30-2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

ہو گا۔ چونکہ چادر کے ضلع 30 cm ہے لہٰذا $0 \leq x \leq 15$ ہو گا جو تفاعل H کا دائرہ کار ہے۔

شکل 4.110 میں حجم بالمقابل x دکھایا گیا ہے جس کے تحت $x = 0$ اور $x = 15$ پر حجم صفر ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خطر x کے لحاظ سے H کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

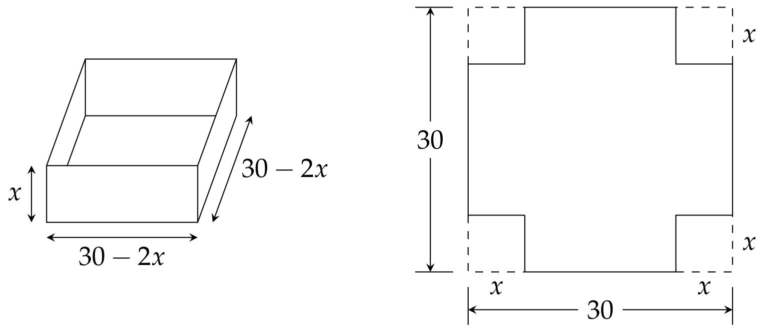
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x-15)(x-5) = 0,$$

یوں $x = 5$ اور $x = 15$ ملتا ہے جن میں سے صرف $x = 5$ دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر H کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

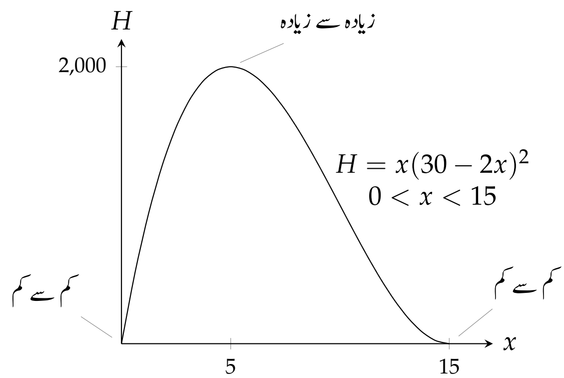
$$\begin{aligned} &H(5) = 2000, && \text{نقطہ فاصل} \\ &H(0) = 0, \quad H(15) = 0 && \text{آخری نقطے} \end{aligned}$$

یوں زیادہ سے زیادہ حجم $2000\,\mathrm{cm}^3$ ہے جو $5\,\mathrm{cm}$ ضلع چکور کاٹنے سے ملے گا۔ □

مثال 4.34: بیلن
آپ کو ایک لٹر تیل کا بلینی ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔



شکل 4.109: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال 4.33)۔



شکل 4.110: حجم بالمقابل x (مثال 4.33)۔

حل: ٹین ڈبے کی لمبائی h اور اس کا رداس r لیتے ہیں (شکل 4.111)۔اگر h اور r کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$H = \pi r^2 * h = 1000 \qquad (1000\,\mathrm{cm}^3 = \text{ایک لٹر}) \tag{4.9}$$

درکار ہے۔کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال میں ٹین کے ضیاع کو شامل کیا گیا ہے۔) ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ بیلن میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{بیلن کے دو سر}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{بیلنی دیوار}} \tag{4.10}$$

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ $\pi r^2 h = 1000$ کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مساوات 4.10 میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات 4.9 اور مساوات 4.10 کو ملا کر ایک متغیر کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات 4.9 کو h کے لئے حل کرتے ہوئے

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

اس کو مساوات 4.10 میں پر کرتے ہوئے h سے چھٹکارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

r کی چھوٹی قیمت کے لئے $\frac{2000}{r}$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نلکی یا پائپ نما ہو گا۔ r کی بڑی قیمت کے لئے $2\pi r^2$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چپٹی صورت کا ہو گا۔ r کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ کم سے کم حاصل ہو گا۔

S اپنے پورے دائرہ کار $(0, r)$ میں قابل تفرق ہے لہٰذا کم سے کم S قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے نقطہ فاصل r کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{تفرق} \\
4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 && \text{تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں} \\
4\pi r^3 &= 2000 && r \text{ کے لئے حل کریں} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} && \text{نقطہ فاصل}
\end{aligned}$$

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے کہ S کی کم سے کم قیمت کتنی ہے اور کہاں پائی جاتی ہے۔چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں ہے لہٰذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہو گا۔ ہم تفاعل کا دو رتبی تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2000}{r}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^2}$$

پر غور کرتے ہیں جو S کی پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل 4.111)۔یوں پورے دائرہ کار پر S کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی اور $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ پر S کی قیمت کم سے کم ہو گی۔ جب

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

ہو۔ اس کے تحت کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42\,\mathrm{cm}, \quad h \approx 10.84\,\mathrm{cm}$$

□

کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

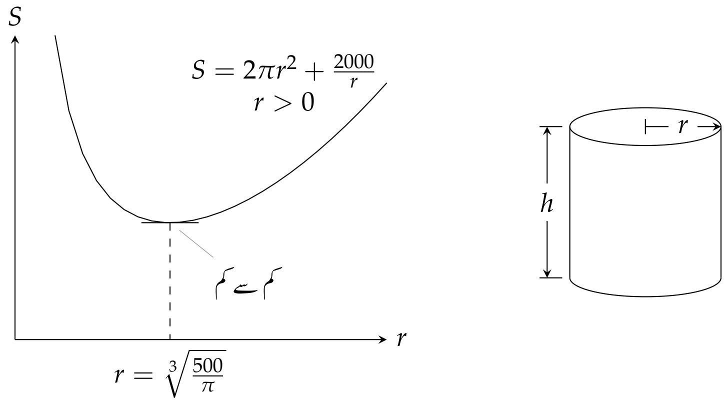
1. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلوم دی گئی ہے؟ کون سی نہیں دی گئی ہے؟ کیا مطلوب ہے؟

2. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔

3. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلہ میں ہر تعلق کو مساوات کی صورت میں لکھیں۔

4. نا معلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نا معلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کہیں مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔

5. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتبی اور دو رتبی تفرق سے نقطہ فاصل (جہاں $f' = 0$ یا غیر معین ہو گا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔



شکل 4.111: ٹین کا ڈبہ (مثال 4.34)

ریاضیات سے چند مثالیں

مثال 4.35: اعداد کا حاصل ضرب
ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں کی ان کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔

حل: اگر پہلا عدد x ہو تب دوسرا عدد $20 - x$ ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔ f کا دائرہ کار بند وقفہ $0 \leq x \leq 20$ ہے۔

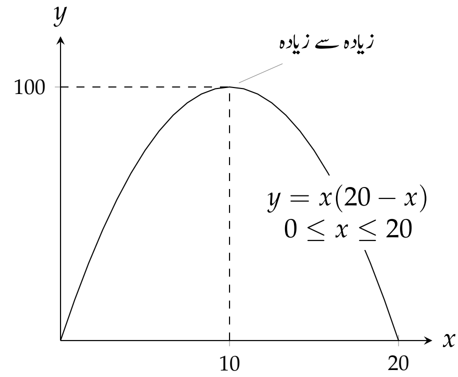
ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر f کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

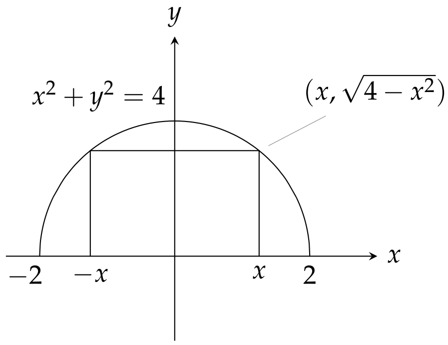
پورے وقفہ $0 \leq x \leq 20$ پر معین ہے اور صرف $x = 10$ پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$
$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

ہیں۔ یوں $f(10) = 100$ زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی اور درکار اعداد 10 اور $(20 - 10) = 10$ ہوں گے (شکل 4.112)۔
□



شکل 4.112: x اور $(20 - x)$ کے حاصل ضرب کی زیادہ سے زیادہ قیمت 100 ہے (مثال 4.35)۔



شکل 4.113: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال 4.36)۔

مثال 4.36: جیومیٹری
رداس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

حل: نصف دائرے کو کارتیسی محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل 4.113 میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا x پر ہے۔ ہم مستطیل کے اضلاع اور رقبہ S کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\text{لمبائی} : 2x, \quad \text{چوڑائی} : \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{رقبہ} : 2x\sqrt{4 - x^2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ $0 \leq x \leq 2$ میں پائی جاتی ہے۔

ہمیں استمراری تفاعل

$$S = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت وقفہ $[0, 2]$ پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل S کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

نقطہ $x = 2$ پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} &= 0 \\
-2x^2 + 2(4-x^2) &= 0 && \text{دونوں اطراف کو } \sqrt{4-x^2} \text{ سے ضرب دیں} \\
8 - 4x^2 &= 0 \\
x^2 &= 2 \\
x &= \mp\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$x = -\sqrt{2}$ اور $x = \sqrt{2}$ میں سے صرف $x = \sqrt{2}$ تفاعل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔ دائرہ کار کی آخری نقطوں اور اس اکلوتے نقطہ فاصل پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
S(\sqrt{2}) &= 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4 && \text{نقطہ فاصل پر قیمت} \\
S(0) &= 0, \quad S(2) = 0 && \text{آخری نقطوں پر قیمت}
\end{aligned}
$$

یوں مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ 4 ہے جب اس کی لمبائی $2x = 2\sqrt{2}$ اور چوڑائی $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ ہو گی۔ □

پیئغ د فغما اور قانون ابن سھل

خلا میں روشنی کی رفتار $3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے (تقریباً اس کے $\frac{2}{3}$ تیز)۔

بصریات میں اصول فغما[16] کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

مثال 4.37: ہوا میں روشنی کی رفتار c_1 اور پانی میں روشنی کی رفتار c_2 لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ A سے پانی میں نقطہ B تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ہوا اور پانی کا سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل: ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو x محور پر رکھتے ہوئے A تا B وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہو گا (شکل 4.114)۔ ایک یکساں ذریعہ میں شعاع کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی ہے لہٰذا اس میں کم سے کم وقت سے مراد کم سے کم فاصلہ ہے اور شعاع دو نقطوں کے بیچ سیدھے خط پر حرکت کرتی ہے۔یوں A تا B راہ دو سیدھے خطوط پر مشتمل ہو گی۔پہلا خط A

[16] Fermat's principle

سے N تک ہو گا اور دوسرا خط N سے B تک ہو گا۔ N وہ نقطہ ہے جہاں شعاع ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتی ہے۔فاصل اور وقت کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\text{وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$$

یوں A سے N تک درکار وقت

$$t_1 = \frac{AN}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$$

اور N سے B تک درکار وقت

$$t_2 = \frac{NB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

ہو گا۔ A سے B تک پہنچنے کے لئے درکار کل وقت دونوں کا مجموعہ ہو گا۔

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2} \tag{4.11}$$

اس مساوات میں t متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے اور تفاعل کا دائرہ کار $[0,d]$ ہے۔ہم اس بند دائرہ کار پر کم سے کم وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ہم تفرق

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \tag{4.12}$$

لیتے ہیں جس کو شکل 4.114 کی مدد سے θ_1 اور θ_2 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{4.13}$$

مساوات 4.12 سے ظاہر ہے کہ $x=0$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} < 0$ اور $x=d$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} > 0$ ہو گا۔یوں اند نقطوں کے درمیان کسی نقطہ x_0 پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا۔چونکہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ مسلسل بڑھتا تفاعل ہے (سوال 52) لہٰذا صرف ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو گا۔

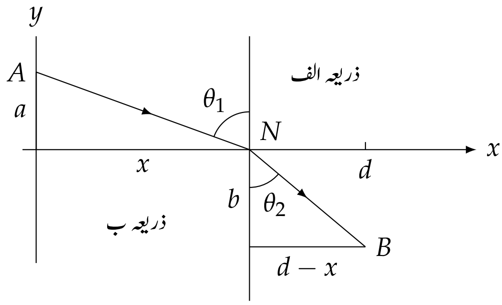
$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{4.14}$$

مساوات 4.14 کو ابن سھل کا قانون انعطاف[17] کہتے ہیں[18]۔ □

---

[17] Ibn Sahl's law of relection

[18] مغربی دنیا میں اس کو Snell's law کہتے ہیں۔



شکل 4.114: ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتے ہوئے شعاع کی راہ (مثال 4.37)

معاشیات میں لاگت اور آمدنی

نظریہ معاشیات میں احصاء کے اہم کردار ہے۔اس کی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال لاگت، آمدنی اور منافع کے تعلق کے بارے میں ہے۔

فرض کریں کہ

x ارکان فروخت کرنے سے آمدنی $r(x)$ ہے۔

x ارکان کی لاگت پیداوار $c(x)$ ہے۔

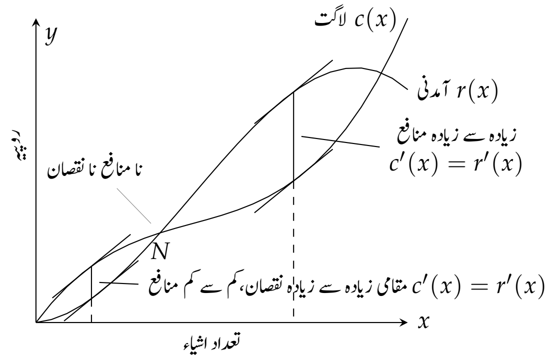
x ارکان فروخت کرنے سے منافع $p(x) = r(x) - c(x)$ ہے۔

حاشیہ آمدنی اور حاشیہ لاگت پیداوار درج ذیل ہیں۔

$$\text{حاشیہ آمدنی} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}$$
$$\text{حاشیہ لاگت} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$$

ان تفرق کا آمدنی کے ساتھ تعلق کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 4.7: زیادہ سے زیادہ منافع (اگر پایا جاتا ہو) اس صورت ہو گا جب حاشیہ لاگت پیداوار اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔



شکل 4.115: عموماً تفاعل لاگت کا مقعر پہلے نیچے اور بعد میں اوپر ہوتا ہے۔ تفاعل لاگت تفاعل آمدنی کو نا منافع نا نقصان کے نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ N کے بائیں خسارہ اور اس کے دائیں منافع ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام $x > 0$ پر $r(x)$ اور $c(x)$ قابل تفرق ہیں لہٰذا $p(x) = r(x) - c(x)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر پائی جاتی ہو) $p'(x) = 0$ پر پائی جائے گی۔چونکہ $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ ہے لہٰذا $p'(x) = 0$ سے مراد

$$r'(x) - c'(x) = 0, \quad \overset{\text{یعنی}}{\implies} \quad r'(x) = c'(x)$$

ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے (شکل 4.115)۔

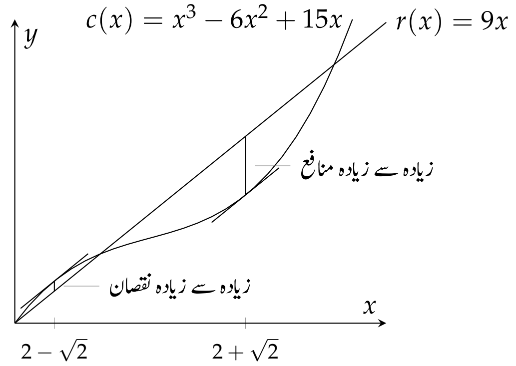
□

ہمیں مسئلہ 4.7 سے کیا ہدایت ملتی ہے؟ ایسی سطح پیداوار جہاں $p'(x) = 0$ ہو، پر زیادہ سے زیادہ منافع یا زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ لیکن معاشی پیشنگوئی کرتے ہوئے پیداوار کی ان سطحوں پر نظر رکھیں جہاں حاشیہ لاگت اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔اگر زیادہ سے زیادہ منافع پایا جاتا ہو، وہ ان سطح پیداوار میں سے ایک پر ہو گا۔

مثال 4.38: لاگت اور آمدنی تفاعل درج ذیل ہیں

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

جہاں تعداد پیداوار x ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار پائی جاتی ہے جس پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب زیادہ سے زیادہ منافع کس سطح پیداوار پر ہو گا؟



شکل 4.116: لاگت بالمقابل منافع (مثال 4.38)

حل:

$$\begin{aligned}
r(x) &= 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \\
r'(x) &= 9, \quad c'(x) = 3x^2 - 12x + 15 && \text{اور } c' \text{ تلاش کریں } r' \\
3x^2 - 12x + 15 &= 9 && \text{ایک دوسرے کے برابر پر کریں} \\
3x^2 - 12x + 6 &= 0 && \text{ترتیب دیں} \\
x^2 - 4x + 2 &= 0 \\
x &= \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} && \text{دو درجی مساوات حل کریں} \\
&= \frac{4 \mp \sqrt{2}}{2} \\
&= 2 \mp \sqrt{2}
\end{aligned}$$

زیادہ سے زیادہ منافع کا امکان $2 + \sqrt{2}$ یا $2 - \sqrt{2}$ سطح پیداوار پر حاصل ہو گا (شکل 4.116)۔ آپ دونوں نقطوں پر آمدنی کا حساب کر کے دیکھیں گے کہ $x = 2 + \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ منافع حاصل ہو گا جبکہ $x = 2 - \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔
□

بہترین سطح پیداوار کو کم سے کم اوسط لاگت والی سطح پیداوار تصور کیا جا سکتا ہے۔ اگلے مسئلہ میں یہ سطح پیداوار حاصل کی گئی ہے۔

مسئلہ 4.8: اوسط کم سے کم لاگت پیداوار (اگر پائی جاتی ہو) اس سطح پیداوار پر ہو گی جس پر اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

$x > 0$ اشیاء کی لاگت پیداوار $c(x)$

x اشیاء کی اوسط لاگت پیداوار $\frac{c(x)}{x}$

قابل تفرق ہیں۔

اگر لاگت کو کم سے کم کرنا ممکن ہو، یہ اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{c(x)}{x}\right) &= 0 \\
\frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} &= 0 && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
xc'(x) - c(x) &= 0 && x^2 \text{ سے ضرب دیں} \\
\underbrace{c'(x)}_{\text{حاشیہ لاگت}} &= \underbrace{\frac{c(x)}{x}}_{\text{اوسط لاگت}}
\end{aligned}
$$

□

ہمیں دھیان سے مسئلہ 4.8 استعمال کرنا ہو گا جو یہ نہیں کہتا ہے کہ کم سے کم اوسط لاگت کی سطح پیداوار موجود ہے بلکہ کہتا ہے کہ اگر ایسی سطح موجود ہو تب اس کو کہاں تلاش کرنا چاہیے۔ جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں وہاں دیکھیں کہ آیا کم سے کم اوسط لاگت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.39: تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار ہے جہاں اوسط لاگت کم سے کم ہو؟ اگر ایسا ہو تب اس سطح پیداوار کو تلاش کریں۔

حل: ہم جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں، وہاں دیکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x && \text{لاگت} \\
c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15 && \text{حاشیہ لاگت} \\
\frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\
3x^2 - 12x + 15 &= x^2 - 6x + 15 \\
2x^2 - 6x &= 0 \\
2x(x-3) &= 0 \\
x &= 0, \quad x = 3
\end{aligned}
$$

چونکہ $x > 0$ ہے لہٰذا کم سے کم اوسط لاگت صرف $x = 3$ ہزار کی پیداوار پر ممکن ہے۔

ہم تفرق کو دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 2x - 6\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 2 > 0
\end{aligned}$$

دورتبی تفرق مثبت ہے لہٰذا $x = 3$ پر مطلق کم سے کم ہو گا۔ $\square$

غیر مسلسل مظہر کا نمونہ بذریعہ تفرقی تفاعل

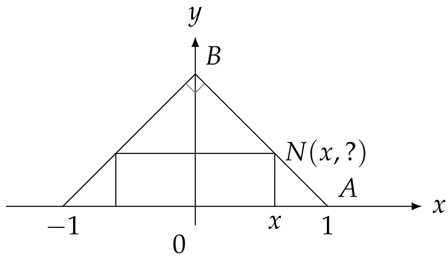
اگر آپ سوچ رہے ہوں کہ جب x عدد صحیح ہے (چونکہ مکمل اشیاء پیدا کیے جاتے ہیں) تب ہم لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرنے کے لئے قابل تفرق تفاعل $c(x)$ اور $r(x)$ کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔اس پر غور کرتے ہیں۔

جب x کی قیمت بڑی ہو تب ہم لاگت اور آمدنی کو ہموار منحنیات $c(x)$ اور $r(x)$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جو نا صرف x کی عدد صحیح قیمتوں بالکل ان کے بیچ تمام قیمتوں پر قابل تفرق ہیں۔ان قابل تفرق تفاعل، جو x کی عدد صحیح قیمتوں کے لئے لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرتے ہیں، کی قیمتوں پر ہم احصاء کی مدد سے غور کر سکتے ہیں۔یوں حاصل نتائج کو ہم حقیقی دنیا میں منتقل کرتے ہوئے امید کرتے ہیں کہ ہم اس سے فائدہ اٹھا سکیں۔جب ہم ایسا کرتے ہوں، جیسا نظریہ معاشیات میں ہم نے کیا، ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل حقیقت کا اچھا نمونہ ہے۔

ایسی صورتوں میں جب احصاء کہتا ہو کہ بہترین پیداوار x کی غیر عدد صحیح قیمت پر ہو گی، جیسا مثال 4.38 میں $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کا جواب حاصل ہوا، تب ہم اس کا قریب ترین موزوں عدد صحیح لیتے ہیں۔اگر ہم 20 اشیاء کو ڈبوں میں بند کرتے ہوں تب $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کی صورت میں ہم 3410 یا 3420 لے سکتے ہیں۔

سوالات

ہر سوال کو حل کرنے سے پہلے بہتر ہو گا کہ موزوں دائرہ کار لیتے ہوئے تفاعل کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔
جیومیٹری کے مسائل
سوال 1: رداس r دائرہ کے محیط پر دو نقطوں سے وسط تک سیدھی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔اس خطہ کے محیط کی لمبائی $(2r + s)$ ہے



شکل 4.117: مثلث میں محصور مستطیل (سوال 5)

جو $100\,\mathrm{m}$ کے برابر ہے۔ r اور s کی کن قیمتوں سے خطے کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا؟
جواب: $r = 25\,\mathrm{m}, s = 50\,\mathrm{m}$

سوال 2: ایک قائمہ مثلث کا وتر $5\,\mathrm{cm}$ ہے۔اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 3: ایک مستطیل جس کا رقبہ $16\,\mathrm{cm}^2$ ہے کا کم سے کم محیط کتنا ہو گا؟
جواب: $16\,\mathrm{cm}$

سوال 4: دکھائیں کہ ایک محیط کے تمام مستطیل میں اس کا رقبہ سب سے زیادہ ہو گا جو چکور ہو۔

سوال 5: ایک قائمہ مساوی الساقین مثلث کا وتر 2 اکائیاں لمبا ہے۔اس میں محصور مستطیل کو شکل 4.117 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. N کے محدد کو x کی صورت میں لکھیں۔(خط AB کی مساوات لکھ کر آپ ایسا کر سکتے ہیں۔)

ب. مستطیل کا رقبہ x کی صورت میں لکھیں۔

ج. مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

جواب: (ا) $(x, 1-x)$، (ب) $A(x) = 2x(1-x)$، (ج) $\frac{1}{2}$ مربع اکائیاں

سوال 6: ایک مستطیل کا قاعدہ x محور پر ہے جبکہ اس کے بالائی دو راس قطع مکافی $y = 12 - x^2$ پر ہیں۔اس مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 7: آپ $15\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$ چادر کے کونوں سے چکور چادر کاٹ کر کھلا مستطیل ڈبہ بنانا چاہتے ہیں۔اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟
جواب: $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}\,\text{cm}^3$

سوال 8: آپ $(a, 0)$ سے $(0, b)$ تک لکیر کھینچ کر ربع اول میں بند خطہ بناتے ہیں۔دکھائیں کہ اس خطے کا رقبہ اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $a = b$ ہو۔

سوال 9: ایک دریا کے کنارے مستطیل رقبے کو تین اطراف سے $800\,\text{m}$ کل لمبائی کی دیوار سے گھیرا جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟
جواب: $80\,000\,\text{m}^2$

سوال 10: $216\,\text{m}^2$ مستطیل رقبے کو دھاتی تار سے گھیرا جاتا ہے۔کسی ایک ضلع کے متوازی تار سے اس خطے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔کم سے کم تار استعمال کرنا مقصود ہے۔ مستطیل کی جسامت کیا ہونی چاہیے؟ تار کی کم سے کم لمبائی کیا ہو گی؟

سوال 11: کم ترین وزنی فولادی ٹینکی
بغیر ڈھکن چکور قاعدہ والی ٹینکی درکار ہے جس کا حجم $256\,\text{m}^3$ ہو۔ یہ ٹینکی $1\,\text{cm}$ موٹی فولادی چادر سے بنائی جائے گی۔ بطور انجنیئر آپ کا کام ہے کہ ہلکی ترین ٹینکی بنانے کے لئے ٹینکی کا اضلاع تلاش کریں۔ اضلاع کیا ہوں گے؟
جواب: $8 \times 8 \times 4\,\text{m}^3$

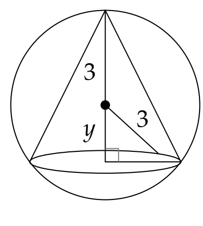
سوال 12: بارش کا پانی
بارانی علاقے میں بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لئے زمین کی کھدائی کر کے بغیر ڈھکن $1125\,\text{m}^3$ حجم کی ٹینکی بنائی جاتی ہے جس کا قاعدہ چکور ہے۔ٹینکی کی گہرائی y میٹر جبکہ قاعدہ کی ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔ ٹینکی کا قاعدہ اور اطراف پر لاگت کے ساتھ ساتھ کھدائی کی لاگت بھی ہے جو حاصل ضرب xy کے راست متناسب ہے۔اگر کل لاگت $c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$ ہو تب لاگت کو کم سے کم رکھنے کی خاطر x اور y کی ہوں گے؟

سوال 13: ایک مستطیل اشتہار میں $50\,\text{cm}^2$ رقبے پر لکھائی ہو گی۔بالائی اور نچلے جانب $4\,\text{cm}$ اور اطراف پر $2\,\text{cm}$ خالی جگہ ہو گی۔کم سے کم کاغذ استعمال کرنے کے لئے مستطیل اشتہار کے اضلاع کیا ہوں گے؟
جواب: $9\,\text{cm} \times 18\,\text{cm}$

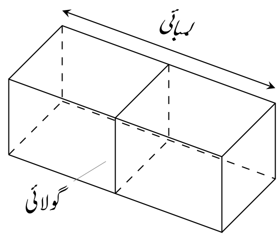
سوال 14: رداس $r = 3$ کی کرہ میں محصور دائری مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے (شکل 14)؟

سوال 15: ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں a اور b ہیں جن کے بیچ زاویہ θ ہے۔ θ کی کون سے قیمت مثلث کی زیادہ سے زیادہ رقبہ دے گی۔ (اشارہ: $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$)
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 16: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{5}$ ہے جبکہ اس کے باقی اضلاع x اور y ہیں۔تفاعل $s = 2x + y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔



شکل 4.118: کرہ میں مخروط (سوال 14)



شکل 4.119: ڈبہ برائے سوال 19

سوال 17: $1000\,\text{cm}$ حجم کا بغیر ڈھکن قائمہ دائری بیلن بنایا جاتا ہے۔ کم سے کم بیلن کی جسامت تلاش کریں۔
جواب: $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\,\text{cm}$

سوال 18: $1000\,\text{cm}$ حجم کا قائمہ دائری بیلنی ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ چادر سے بیلن کے اطراف کاٹتے ہوئے کوئی مال ضائع نہیں ہوتا ہے البتہ بالائی اور نچلے دائری حصے کو $2r \times 2r$ چکور سے کاٹتے ہوئے مال ضائع ہوتا ہے۔ یوں ایک ڈبہ بنانے کے لئے $S = 8r^2 + 2\pi rh$ رقبے کی چادر درکار ہو گی نا کہ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (مثال 4.34)۔ مثال 4.34 میں کم سے کم لاگت کے لئے h اور r کا تعلق $h = 2r$ تھا۔ اب ان کا تعلق کیا ہو گا؟

سوال 19: (ا) ایک مستطیل ڈبہ کی لمبائی اور گولائی کا مجموعہ $108\,\text{cm}$ ہے (شکل 4.119)۔ اس ڈبے کے سر چکور ہیں۔ اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس ڈبے کی لمبائی بالمقابل حجم ترسیم کریں اور جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $18\,\text{cm} \times 18\,\text{cm} \times 36\,\text{cm}$

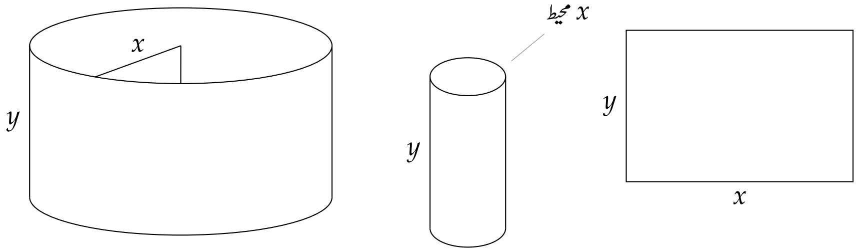
سوال 20: گزشتہ سوال میں چکور سروں کی بجائے چکور اطراف تصور کریں۔ یوں ڈبے کا حجم $h \times h \times w$ اور گولائی $2h + 2w$ ہو گی۔ اب ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گی؟

سوال 21: (ا) ایک مستطیل چادر جس کا محیط $36\,\text{cm}$ اور اضلاع x اور y ہیں کو گول کرتے ہوئے بیلن بنایا جاتا ہے جس کے سر کھلے ہیں۔ اس بیلن کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس مستطیل چادر کے ایک کنارے کو محور تصور کرتے ہوئے، چادر کو اس محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو خیالی بیلنی صورت بناتا ہے۔ اس بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گا؟ (شکل 4.120)
جواب: (ا) $12\,\text{cm}$ ، $6\,\text{cm}$ ؛ (ب) $12\,\text{cm}$ ، $6\,\text{cm}$

سوال 22: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{3}$ ہے۔ اس کو ایک ضلع کے گرد گھما کر فرضی مخروط بنایا جاتا ہے۔ اس مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ممکن ہے اور اس کا رداس اور قد کیا ہوں گے؟

سوال 23: دائرہ بالمقابل چکور

ا. $4\,\text{m}$ لمبی تار کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک چکور اور ایک دائرہ بنایا جاتا ہے۔ ان ٹکڑوں کی لمبائیاں کیا ہوں گی کہ دائرے اور چکور کا مجموعی رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو؟



شکل 4.120: چادر اور بیلن (سوال 21)

ب. چکور اور دائرے کے مجموعی رقبے کو دائرے کی رداس کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں۔ جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

ج. اب کل رقبے کو چکور کے ضلع کی لمبائی کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں اور جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

جواب: (ا) دائرے کا محیط $4\,\mathrm{m}$ ہے۔

سوال 24: مکعب اور کرہ کی سطحی رقبوں کے مجموعے کو مستقل رکھیں۔ مکعب کے ضلع اور کرہ کے رداس کی کون سی نسبت (ا) کم سے کم، (ب) زیادہ سے زیادہ مجموعی حجم دے گی؟

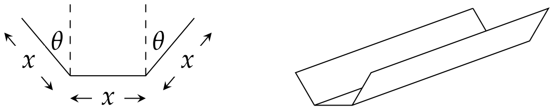
سوال 25: ایک مستطیل شیشہ کے اوپر نصف دائری شیشہ مل کر کھڑکی بناتے ہیں (شکل 4.121)۔ مستطیل شیشہ شفاف ہے جبکہ نصف دائری شیشہ ہلکا سیاہ ہے اور فی مربع رقبہ نصف روشنی کو گزرنے دیتا ہے۔ کھڑکی کا محیط مستقل ہے۔ زیادہ سے زیادہ روشنی کے لئے کھڑکی کی جسامت تلاش کریں۔
جواب: اگر نصف دائرے کا رداس r ، مستطیل کا قاعدہ $2r$ اور اس کی بلندی h ہوں تب $\frac{2r}{h} = \frac{8}{4+\pi}$ ہو گا۔

سوال 26: ایک بیلنی گودام تعمیر کرنی ہے جس کی چھت نصف کروی ہو گی۔ فی مربع سطحی رقبہ نصف کرہ پر لاگت بیلنی دیوار کی فی مربع سطحی رقبہ کی لاگت سے دگنی ہے۔ مستقل حجم کی صورت میں کم سے کم کل لاگت کے لئے گودام کی جسامت تلاش کریں۔ تعمیر میں نچلی سطح (زمین) پر لاگت اور ضیاع کو نظر انداز کریں۔

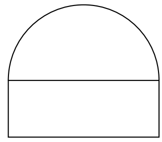
سوال 27: ایک پانی کی نالی تعمیر کرنی ہے جس کی جسامت شکل 4.122 میں دکھائی گئی ہے۔ صرف زاویہ θ متغیر ہے۔ زیادہ سے زیادہ حجم کے لئے θ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $\frac{\pi}{6}$

سوال 28: ایک مستطیل $8.5\,\mathrm{cm} \times 11\,\mathrm{cm}$ کاغذ کو مستوی پر رکھا جاتا ہے (شکل 4.123)۔ کونا A کو مخالف لمبے ضلع پر رکھ کر کاغذ کو چپٹا کیا جاتا ہے۔ لمبائی RP کو کم سے کم کرنا مقصود ہے۔

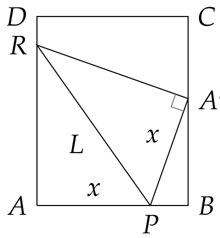
ا. کاغذ استعمال کرتے ہوئے اس لمبائی کو کم سے کم کریں۔



شکل 4.122: پانی کی نالی (سوال 27)



شکل 4.121: کھڑکی (سوال 25)



شکل 4.123: کاغذ برائے سوال 28

ب. دکھائیں $L^2 = \frac{2x^3}{2x-8.5}$

ج. x کی کون سی قیمت L^2 کو کم سے کم بناتی ہے؟

د. x کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

ہ. x بالمقابل L ترسیم کریں اور جزو-ب کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

طبعی استعمال

سوال 29: انتصابی حرکت کرتی ایک جسم کی اونچائی $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,\ g > 0$ ہے جہاں t سیکنڈوں اور s میٹروں میں ہے۔ جسم کی زیادہ سے زیادہ اونچائی کیا ہو گی؟

جواب: $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$

سوال 30: ایک عمارت سے $9\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر $2.5\,\mathrm{m}$ اونچی دیوار ہے۔ دیوار کی دوسری طرف سے عمارت تک سیڑھی لگائی جاتی ہے۔ سیڑھی کی کم سے کم لمبائی کیا ہو گی؟

سوال 31: شہتیر کہ مضبوطی لکڑی کی شہتیر کی مضبوطی M اس کی چوڑائی w ضرب مربع گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $M = kwd^2$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. $30\,\mathrm{cm}$ قطر کے لکڑ سے کس جسامت کی مضبوط سے مضبوط شہتیر حاصل کی جا سکتی ہے؟

ب. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہو گا؟

جواب: (ا) $\frac{30}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm} \times \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$

سوال 32: شہتیر کی سختی شہتیر کی سختی S اس کی چوڑائی w ضرب مکعب گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $S = kwd^3$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. $30\,\mathrm{cm}$ قطر کی لکڑ سے سخت سے سخت شہتیر حاصل کریں۔ شہتیر کی جسامت کیا ہو گی؟

ب. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہو گا؟

سوال 33: لمحہ t پر ایک بلب میں برقی رو $i = 2\cos t + 2\sin t$ ہے۔ رو کی زیادہ سے زیادہ لمحاتی قیمت کیا ہو گی؟
جواب: $2\sqrt{2}\,\mathrm{A}$

سوال 34: بے رگڑ ریڑھی کو افقی مستوی پر رکھ کر اسپرنگ کے ذریعہ قریبی دیوار کے ساتھ باندھا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ساکن مقام سے اس کو $10\,\mathrm{cm}$ دور کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے تا کہ یہ 4 سیکنڈوں کے لئے مستوی پر آگے پیچھے حرکت کر سکے۔ لمحہ t پر اس کا مقام $s = 10\cos \pi t$ ہے۔

ا. ریڑھی کی زیادہ سے زیادہ رفتار کب اور کتنی ہو گی؟ تب ریڑھی کا مقام اور اس کی اسراع کیا ہو گی؟

ب. جس لمحہ ریڑھی کی اسراع زیادہ سے زیادہ ہو اس لمحہ ریڑھی کا مقام کیا ہو گا؟ تب اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال 35: علیحدہ علیحدہ اسپرنگ کے ذریعہ چھت سے دو کمیتوں کو قریب قریب لٹکایا جاتا ہے۔ان کے مقام بالترتیب $s_1 = 2\sin t$ اور $s_2 = \sin 2t$ ہیں۔

ا. کس لمحہ کمیت ایک دوسرے کے قریب سے گزرتے ہیں؟ (اشارہ: $\sin 2t = 2\sin t\cos t$)

ب. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ کے دوران ان کے درمیان انتصابی فاصلہ زیادہ سے زیادہ کب اور کتنا ہو گی؟
(اشارہ: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$)

جواب: (ا) جب π کا عدد صحیح مضرب t ہو۔ (ب) $t = \frac{2\pi}{3}$ ، $t = \frac{4\pi}{3}$ ، $t = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 36: s محور پر دو ذرات کے مقام $s_1 = \sin t$ اور $s_2 = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ ہیں۔

ا. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں دونوں ذرات ایک دوسرے سے کم ملتے ہیں؟

ب. ذرات ایک دوسرے سے کب دور ترین ہوتے ہیں؟

ج. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں ان کے بیچ فاصلہ کی تبدیلی تیز ترین ہو گی؟

سوال 37: لمحہ t پر x محور پر ایک ذرے کا مقام $x = (t-1)(t-4)^4$ ہے۔

ا. ذرہ ساکن کب ہو گا؟

ب. کس وقفے کے دوران ذرہ بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. بائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی تیز سے تیز رفتار کیا ہو گی؟

د. وقفہ $0 \leq t \leq 6$ کے لئے x بالمقابل t ترسیم کریں۔اسی وقفہ کے لئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل t کو بھی ترسیم کریں۔ ترسیمات کا ایک دوسرے کے ساتھ اور حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: (ا) $t = \frac{8}{5}$ ، $t = 4$ ؛ (ب) $\frac{8}{5} < t < 4$ ؛ (ج) $\frac{2187}{125}$ اکائی فی وقت

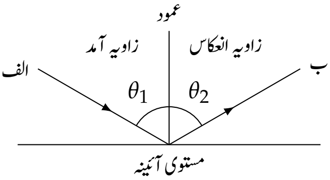
سوال 38: دوپہر کے وقت $t = 0$ بحری جہاز ب کے عین شمال میں بحری جہاز الف موجود ہے۔بحری جہاز الف $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے جنوب کی طرف رواں ہے جبکہ بحری جہاز ب مشرق کی طرف $16\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے رواں ہے۔

ا. ان کے بیچ فاصلہ s کو t کی صورت میں لکھیں جہاں s کلومیٹر اور t گھنٹوں میں ہے۔

ب. دوپہر کے وقت ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ ایک گھنٹہ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

ج. اس دن حد نظر $10\,\mathrm{km}$ تھی۔ کیا ان بحری جہازوں نے ایک دوسرے کو دیکھا ہو گا؟

د. $0 \leq t \leq 3$ کے لئے s بالمقابل t اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل t ترسیم کریں۔ ترسیمات کا حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل 4.124: زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے (سوال 39)

ہ. ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ربع اول میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کی ترسیم کا افقی متقارب پایا جاتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $t \to \infty$ کرنے سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ اس حد کو تلاش کریں۔ اس حد کا انفرادی رفتاروں کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 39: بصریات میں اصول فغما کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی اس راستے سے پہنچتی ہے جس پر کم سے کم وقت درکار ہو۔ شکل 4.124 میں نقطہ الف سے شعاع خارج ہو کر آئینہ سے انعکاس کرتے ہوئے نقطہ ب تک پہنچتی ہے۔ دکھائیں کہ اگر شعاع اصول فغما کو مطمئن کرتا ہو تب زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔ (یہ نتیجہ بغیر احصاء کے خالصتاً جیومیٹری کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔)

سوال 40: عمل انگیز: عمل انگیز[19] اس مادہ کو کہتے ہیں جس کی موجودگی کیمیائی تعامل کی شرح پر اثر انداز ہوتی ہے اور جو خود جوں کا توں رہتا ہے۔ خود عمل انگیز[20] کیمیائی تعامل اس کو کہتے ہیں جس میں حاصل کیمیا خود اس تعامل کے عمل انگیز ہوں۔خود عمل انگیز کیمیائی تعامل کی ایک مثال $13\,^{\circ}\mathrm{C}$ سے کم درجہ پر پڑا ہوا دھاتی ٹین کا کچھ عرصہ میں سفید برادہ میں تبدیل ہونا ہے۔یہ برادہ خود اس کیمیائی تعامل کا عمل انگیز ہے۔اس قسم کے تعامل کی شرح شروع میں کم ہوتی ہے جو عمل انگیز پیدا ہونے کے بعد رفتار پکڑتی ہے اور آخر میں ابتدائی کیمیا کم ہونے کی بنا دوبارہ آہستہ ہوتی ہے۔

اس قسم کے تعامل کی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ابتدائی مواد اور پیدا مواد کے حاصل ضرب کے راست تناسب ہو گی، یعنی

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

جہاں a مواد کی ابتدائی مقدار، x پیدا مواد کی مقدار اور k تناسبی مستقل ہے۔ x کی وہ قیمت تلاش کریں جو زیادہ سے زیادہ v دیگا؟ v کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہو گی؟

ریاضیاتی استعمال

سوال 41: کیا تفاعل $f(x) = x^2 - x + 1$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ تفصیل پیش کریں۔

جواب: نہیں۔ تفاعل کی مطلق کم سے کم قیمت $\frac{3}{4}$ ہے۔

سوال 42: آپ سے پوچھا گیا ہے کہ آیا تفاعل $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے۔

catalyst[19]
autocatalyst[20]

ا. سمجھائیں کہ آپ کو کیوں وقفہ $[0, 2\pi]$ میں x کی قیمتوں کے لئے تفاعل پر غور کرنا ہو گا۔

ب. کیا f کبھی منفی ہو گا؟ سمجھائیں۔

سوال 43: منحنی $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $(c, 0)$ کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔ (ا) $c \geq \frac{1}{2}$ ہے، (ب) $c < \frac{1}{2}$ ہے۔
جواب: (ا) $(c - \frac{1}{2}, \sqrt{c - \frac{1}{2}})$ ؛ (ب) $(0, 0)$

سوال 44: a کی کس قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کا (ا) $x = 2$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال 45: a اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ کی (ا) $x = -1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 4$ پر مقامی کم سے کم اور $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔
جواب: (ا) $a = -3, b = -9$ ؛ (ب) $a = -3, b = -24$

سوال 46: دکھائیں کہ a کی کسی بھی قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کی مقامی کم سے کم قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

سوال 47:

ا. وقفہ $0 < x < \pi$ پر تفاعل $y = \cos x - \sqrt{2} \csc x$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: (ا) $y = -1$

سوال 48:

ا. وقفہ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ پر تفاعل $y = \tan x + 3 \cot x$ کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

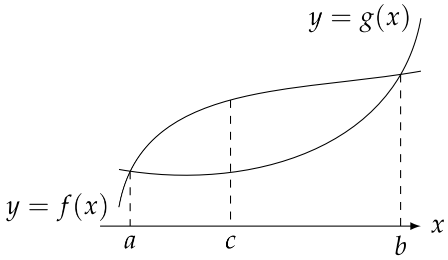
ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 49: منحنی $y = \sqrt{x}$ نقطہ $(\frac{1}{2}, 16)$ کے کتنا نزدیک آتی ہے؟
جواب: $\frac{7\sqrt{17}}{2}$

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ اور $g(x)$ قابل تفرق ہیں جنہیں شکل 4.125 میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے بیچ زیادہ سے زیادہ فاصلہ نقطہ $x = c$ پر پایا جاتا ہے۔ کیا اس نقطے پر ان تفاعل کے مماس میں کوئی خاص بات پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 51: دکھائیں کہ مثبت عدد صحیح a ، b ، c اور d کی صورت میں $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16$ ہو گا۔

سوال 52: (مثال 4.37 کا $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$)



شکل 4.125: ترسیمات برائے سوال 50

ا. دکھائیں کہ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

ب. دکھائیں کہ $g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا گھٹتا تفاعل ہے۔

ج. دکھائیں کہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

دوا

سوال 53: حساسیت دوا۔ (سوال 50 دیکھیں)
دوا کی وہ مقدار جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو معلوم کرنے کی خاطر M کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر تفرق $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$ اور C مستقل ہے۔
جواب: $M = \frac{c}{2}$

سوال 54: کھانسی

ا. کھانسی کے دوران سانس کی نالی سکڑ کر ہوا کی رفتار کو تیز کرتی ہے۔ کیا سانس کی نالی اتنی سکڑتی ہے کہ ہوا کی رفتار زیادہ سے زیادہ ہو؟

سانس کی نالی کی لچک اور اس کی دیوار کا ہوا کی بہاو کو مزاحمت کی مناسب قیمتیں لیتے ہوئے ہوا کی اوسط رفتار v کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$v = c(r_0 - r)r^2 \,\mathrm{cm\,s^{-1}}, \quad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0$$

جہاں آرام کی صورت میں سانس کی نالی کا رداس r_0 سنٹی میٹر ہے اور c مثبت مستقل جس کی قیمت سانس کی لمبائی پر (بھی) منحصر ہے۔

دکھائیں کہ v کی زیادہ سے زیادہ قیمت $r = \frac{2}{3}r_0$ پر حاصل ہو گی یعنی جب سانس کی نالی $33\,\%$ سکڑے۔ کھانسی کے دوران سانس کی نالی کی ایکس رے ثابت کرتی ہے کہ کھانسی کے دوران سانس کی نالی اتنی ہی سکڑتی ہے۔

ب. $r_0 = 0.5$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے وقفہ $0 \leq r \leq 0.5$ پر v ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ آیا زیادہ سے زیادہ رفتار $r = \frac{2}{3}r_0$ پر نظر آتی ہے۔

اقتصادیات اور کاروبار

سوال 55: ایک قمیض تیار کرنے پر c روپیہ لاگت آتی ہے اور اس کی قیمت فروخت x روپیہ ہے۔ فروخت قمیضوں کی تعداد $n = \frac{a}{x-c} + \frac{b}{100-x}$ ہے جہاں a اور b مثبت مستقل ہیں۔ زیادہ سے زیادہ منافع کس قیمت فروخت پر ہو گا؟
جواب: $\frac{c}{2} + 50$

سوال 56: آپ سیر و سیاحت کا کاروبار کرتے ہیں۔ آپ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

ا. اگر 50 افراد (جو کم سے کم تعداد ہے) سیر و سیاحت پر جائیں تب ہر فرد 200 روپیہ ادا کرے گا۔

ب. 80 افراد کی حد تک ہر اضافی فرد کی صورت میں تمام افراد کو 2 روپیہ کم ادا کرنے ہوں گے۔

کل لاگت 6000 روپیہ کی مستقل مقدار اور فی فرد 32 روپیہ ہے۔زیادہ سے زیادہ منافع کے لئے کتنے افراد درکار ہیں؟

سوال 57: انتظام تجارت مال کا ایک کلیہ کہتا ہے کہ مال کی فرمائش، ادائیگی اور رکھوالی پر فی ہفتہ $A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$ لاگت آتی ہے جہاں q کھیپ میں اشیاء کی تعداد ہے، k لمحہ فرمائش پر ادائیگی ہے (جو ہر فرمائش پر ادا کرنی ہو گی)، c فی رکن قیمت ہے، m ایک ہفتہ میں فروخت اشیاء کی تعداد ہے، اور h فی رکن ہفتہ وار رکھوالی کا خرچ ہے جس میں کرایہ وغیرہ شامل ہے ۔ q کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $A(q)$ کی قیمت کم سے کم ہو گی۔
جواب: $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

سوال 58: (تسلسل سوال 57)
خرچ ترسیل بعض اوقات کھیپ کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے۔جب ایسا ہو تب k کی جگہ $k + bq$ استعمال کیا جاتا ہے جہاں b مستقل ہے۔ اب کھیپ کی بہترین جسامت کیا ہو گی؟

سوال 59: اگر تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ اور تفاعل آمدنی $r(x) = 6x$ ہوں تب دکھائیں کہ آپ نا منافع نا نقصان سے زیادہ بہتر صورت حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔

سوال 60: فرض کریں x اشیاء کی پیداوار میں لاگت $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20000x$ ہے۔ کتنی پیداوار اوسط لاگت پیداوار کو کم سے کم کرے گی؟

4.7 خط بندی اور تفرقات

بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی خط بندی[21] پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ متعارف کرتے ہیں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیمائش میں خلل اور حساسیت کو $\mathrm{d}y$ سے ظاہر کریں گے۔

خطی تخمین

آپ شکل 4.126 میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

شکل 4.127 کی علامتیت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ہے۔یوں مماس درج ذیل تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جا سکتا ہے۔

تعریف:
اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

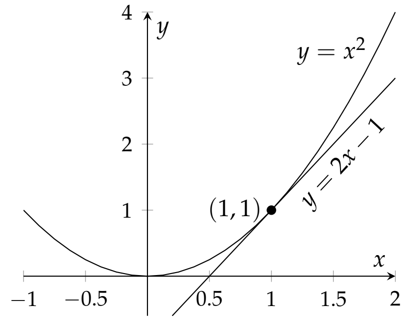
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{4.15}$$

نقطہ a پر f کی خط بندی[22] ہو گی۔ f کی درج ذیل تخمین L

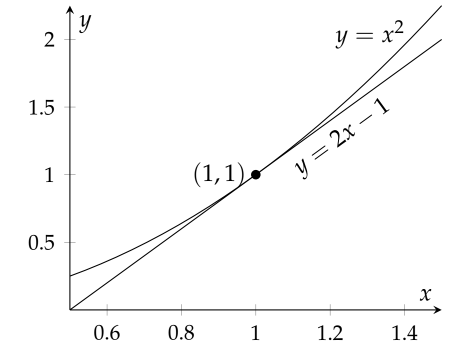
$$f(x) \approx L(x)$$

نقطہ a پر تفاعل f کی معیاری خطی تخمین[23] ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا وسط[24] ہے۔

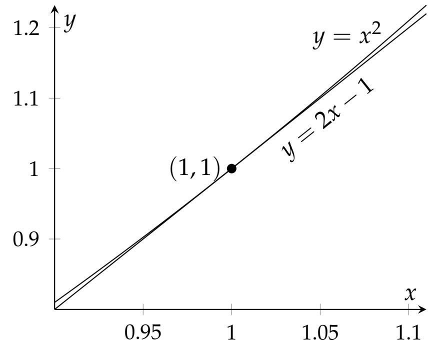
---
[21] linearizations
[22] linearization
[23] standard linear approximation
[24] center



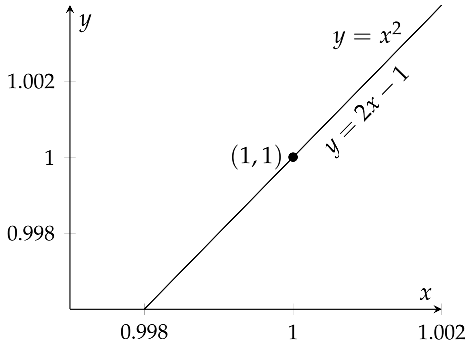
(ا) منحنی اور اس کا نقطہ $(1,1)$ پر مماس



(ب) نقطہ $(1,1)$ کے نزدیک منحنی اور مماس قریب ہیں

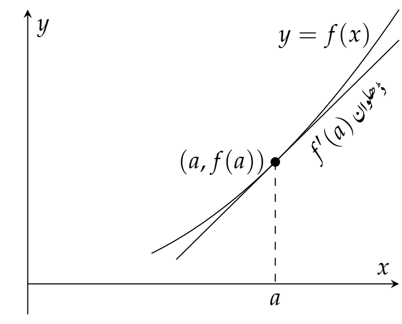


(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

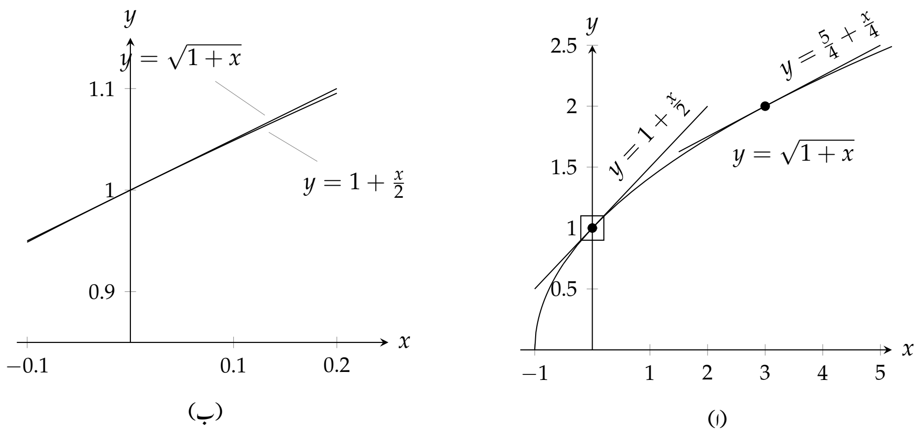


(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

شکل 4.126: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینی طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے



شکل 4.127: نقطہ a پر تفاعل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ہو گا



شکل 4.128: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کی خط بندی۔

□

مثال 4.40: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی تلاش کریں۔
حل: ہم $a = 0$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہٰذا

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

ہو گا۔ شکل 4.128-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔
□

تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل 4.128-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$$ 2 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$$ 3 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$$ 5 اعشاریہ درست

وسط سے دور خط بندی میں خلل نا قابل نظر انداز ہو گا۔یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔ آپ کو $x = 3$ پر نئی خط بندی حاصل کرنی ہو گی۔

مثال 4.41: $x = 3$ پر تفاعل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: ہم $a = 3$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

ہے لہٰذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

ہو گا (شکل 4.128-ا)۔ اس خط بندی سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے $0.000\,61$ ہٹ کر ہے۔

اگر ہم مثال 4.40 میں حاصل خط بندی استعمال کریں تب

$$\sqrt{+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

حاصل ہو گا جس میں $25\,\%$ خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال 4.42: جذروں اور طاقتوں کے لئے اہم ترین خط بندی درج ذیل ہے۔

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad x \approx 0; \text{ کوئی عدد ہے } k \tag{4.16}$$

$x = 0$ کے نزدیک یہ قابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔ □

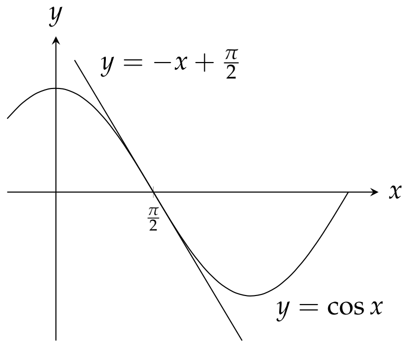
مساوات 4.16 سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} \qquad k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\tfrac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} \qquad k = -\frac{1}{2}$$



شکل 4.129: کوسائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خط بندی۔

دیگر اہم خط بندی درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$\tan x \approx x$$

مثال 4.43: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: درج ذیل

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

لیتے ہوئے خط بندی درج ذیل ہو گی (شکل 4.129)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0 + (-1)(x - \tfrac{\pi}{2}) = -x + \tfrac{\pi}{2}$$

□

تفرقات

تعریف:
فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے۔ تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر ہے۔ تفرق $\mathrm{d}y$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\square$

عموماً تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر میں تبدیلی Δx ہو گی۔ البتہ تعریف ہیں ہم $\mathrm{d}x$ پر یہ شرط لاگو نہیں کرتے ہیں۔ تفرق $\mathrm{d}y$ ہر صورت تابع ہو گا اور اس کی قیمت x اور $\mathrm{d}x$ پر منحصر ہو گی۔

مثال 4.44: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لئے $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔
حل:

$$\mathrm{d}y = (5x^4 + 37)\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y = (3\cos 3x)\,\mathrm{d}x$$

$\square$

اگر $\mathrm{d}x \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $\mathrm{d}x \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ تفرقات کا حاصل تقسیم ہو گا۔

بعض اوقات ہم $\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}f'(x)\,\mathrm{d}x$ کی بجائے

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کا تفرق کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}(3x^2 - 6) = 6x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔

تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

حاصل ہو گی۔ چند تفرقی کلیات پیش کرتے ہیں۔

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{d}c = 0, & \mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \\
\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}, & \mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}(\sin u) = \cos u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\cos u) = -\sin u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\tan u) = \sec^2 u\,\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}(\cot u) = -\csc^2 u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\sec u) = \sec u \tan u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\csc u) = -\csc u \cot u\,\mathrm{d}u
\end{array}
$$

مثال 4.45:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\tan 2x) &= \sec^2(2x)\,\mathrm{d}(2x) = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}(\tfrac{x}{x+1}) &= \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

□

تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ پر جانے سے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کتنی ہو گی۔ اگر $\mathrm{d}x$ نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کی خط بندی L ایک دوسرے کے برابر تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب زیادہ آسان ہے لہٰذا اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

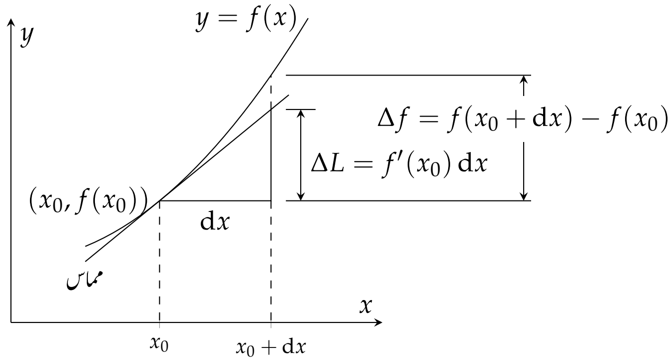
شکل 4.130 میں دیے علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$
\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)
$$

L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
\Delta L &= L(x_0 + \mathrm{d}x) - L(x_0) \\
&= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \mathrm{d}x) - x_0]}_{L(x_0+\mathrm{d}x)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)} \\
&= f'(x_0)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

تفرق $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کا جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $x = x_0$ پر $\mathrm{d}f$ کی قیمت حاصل کی جائے تب $\mathrm{d}f = \Delta L$ ہو گا یعنی خط بندی میں تبدیل $\mathrm{d}f$ کے برابر ہو گی۔ تفرق تبدیلی کی اندازاً قیمت



شکل 4.130: چھوٹے $\mathrm{d}x$ کی صورت میں f کی خط بندی تقریباً f میں تبدیلی کے برابر ہو گی۔

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

مثال 4.46: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ سے $10.1\,\mathrm{cm}$ کیا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}S$ کا حساب کرتے ہوئے ہوئے اس کے رقبہ S میں تبدیلی حاصل کریں۔ اس کا موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔

حل: چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہٰذا اندازاً تبدیلی

$$\mathrm{d}S = S'(r_0)\,\mathrm{d}r = 2\pi r_0\,\mathrm{d}r = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\,\mathrm{m}^2$$

ہو گی۔ حقیقی تبدیل درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{\mathrm{d}S} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{خلل}}$$

□

مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی

x_0 سے نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ منتقل ہوتے ہوئے ہم f میں تبدیلی کو تین طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 4.1: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

	اصل	اندازاً
حتمی تبدیلی	$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$	$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$
اضافی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)} \times 100$

مثال 4.47: گزشتہ مثال میں فی صف اندازاً تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\,\%$$

□

مثال 4.48: زمین کا سطحی رقبہ
زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \mp 0.1\,\mathrm{km}$ ہے۔زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟
حل: رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی بنا S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r = 8\pi(6371)(0.1) = 16\,012\,\mathrm{km}^2$$

□

مثال 4.49: رداس r کے کرہ کا رقبہ $1\,\%$ درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہو گا؟
حل: ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|\Delta S| \le \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

ہم اس عدم مساوات میں Δs کی جگہ

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r$$

پر کرتے ہیں۔یوں

$$|8\pi r\,\mathrm{d}r| \le \frac{4\pi r^2}{100} \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{d}r| \le \frac{1}{8\pi r}\cdot\frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2}\frac{r}{100}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں رداس میں خلل اصل رداس کے $0.5\,\%$ سے کم ہونا ضروری ہے۔ □

مثال 4.50: بند شریانوں کا کھولنا (انجیوپلاسٹی[25])

جزوی طور پر بند شریانوں کی رداس کو بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاو حاصل کی جا سکتی ہے۔ 1830 کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزوئے نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \qquad (k \text{ مستقل})$$

جو مستقل دباو پر فی اکائی وقت میں ایک چھوٹی نالی میں حجم بہاو H دیتا ہے۔ اس نالی کا رداس r ہے۔رداس $10\,\%$ بڑھانے سے بہاو پر کیا اثر ہو گا؟

حل: r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 4kr^3\,\mathrm{d}r$$

یوں

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{4kr^3\,\mathrm{d}r}{kr^4} = 4\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا یعنی H میں اضافی تبدیل r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔یوں r میں $10\,\%$ تبدیلی سے H میں $40\,\%$ تبدیلی پیدا ہو گی۔ □

حساسیت

مختلف x پر مساوات $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ ہمیں f کی حساسیت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی $\mathrm{d}x$ کے لئے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہو گی۔

مثال 4.51: آپ ایک پل کی اونچائی ناپنے کی خاطر ایک پتھر کو پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ $s = 4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حساسیت کیا ہو گی؟

حل: مساوات $\mathrm{d}s = 9.8t\,\mathrm{d}t$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔اگر $t = 2$ ہو تب

$$\mathrm{d}s = 9.8(2)(0.1) = 1.96\,\mathrm{m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t = 5\,\mathrm{s}$ پر خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}s = 9.8(5)(0.1) = 4.9\,\mathrm{m}$$

□

---

[25] angioplasty

تخمین $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ میں خلل

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad \text{اصل تبدیلی}$$
$$\mathrm{d} = f'(x_0)\Delta x \qquad \text{تفرقی اندازہ}$$

$\mathrm{d}f$ اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم خلل تخمین کو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{خلل تخمین} &= \Delta f - \mathrm{d}f \\
&= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\
&= \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\
&= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\
&= \epsilon \cdot \Delta x
\end{aligned}$$

$\Delta x \to 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے ($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔ یوں قوسین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لئے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔ درحقیقت $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا جب Δx چھوٹا ہو تخمینی خلل $\epsilon\Delta x$ مزید چھوٹا ہو گا۔

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon\Delta x}_{\text{خلل}}$$

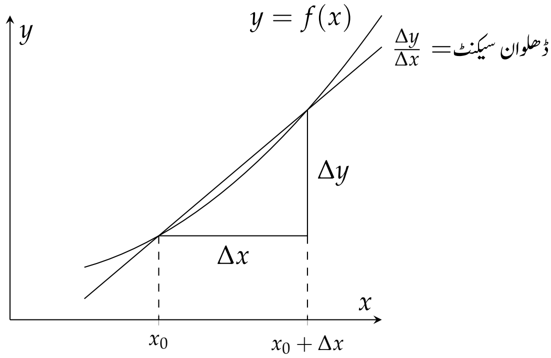
اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں ہے کہ خلل کتنا چھوٹا ہو گا یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \tag{4.17}$$

ہو گی جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔



شکل 4.131: $x = x_0$ پر y کے تفرق سے مراد $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ہے۔

زنجیری تفرق کا ثبوت

زنجیری قاعدہ کے بارے میں ہم حصہ 3.5 میں بات کی گئی جہاں اس کا ثبوت پیش نہیں کیا گیا۔ آئیں مساوات 4.17 کی مدد سے زنجیری قاعدے کا ثبوت پیش کریں۔

فرض کریں $f(u)$ متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $u = g(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ اگر x_0 پر g قابل تفرق ہو اور $g(x_0)$ پر f قابل تفرق ہو تب مرکب تفاعل x_0 پر قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

فرض کریں x میں اضافہ Δx ہے اور فرض کریں کہ u اور y میں مطابقتی اضافے بالترتیب Δu اور Δy ہیں۔ جیسا آپ شکل 4.131 میں دیکھ سکتے ہیں

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ہو گا لہٰذا ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ یہ حد $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ کے برابر ہو گا۔

مساوات 4.17 کے تحت

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

ہو گا جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ ہو گا۔ اسی طرح

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

ہو گا جہاں $\Delta u \to 0$ کرنے سے $\epsilon_2 \to 0$ ہو گا۔ Δu اور Δy کی مساواتوں کو ملا کر

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

حاصل ہوتا ہے للہذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

ہو گا۔ چونکہ $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ اور $\epsilon_2 \to 0$ ہوں گے للہذا دائیں ہاتھ تین اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

کمیت کا توانائی میں تبادل

نیوٹن کا دوسرا قانون

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mv) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma$$

کمیت کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔ جیسا آپ جانتے ہیں حقیقت میں کمیت کی قیمت سمتی رفتار پر منحصر ہے یعنی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

جہاں ساکن کمیت m_0 ہے اور روشنی کی رفتار $c = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر کمیت کی سمتی رفتار v روشنی کی رفتار سے بہت کم ہو تب ہم تخمینی طور پر

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں

$$m = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0[1+\frac{1}{2}(\frac{v^2}{c^2})] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2(\frac{1}{c^2})$$

یعنی

$$m = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2(\frac{1}{c^2}) \tag{4.18}$$

ہو گا۔ مساوات 4.18 رفتار کی بنا کمیت میں اضافہ بیان کرتی ہے۔

طبیعیات نیوٹن میں $\frac{1}{2}m_0v^2$ کو جسم کی حرکی توانائی کہتے ہیں اور اگر ہم مساوات 4.18 کو

$$(m-m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

لکھیں تب

$$(m-m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

یعنی

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{حرکی توانائی}) \tag{4.19}$$

ہو گا۔یوں صفر سمتی رفتار سے v سمتی رفتار تک پہنچنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی تقریباً $(\Delta m)c^2$ ہو گی۔

مساوات 4.19 میں $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ پر کرتے ہوئے

$$\Delta(\text{حرکی توانائی}) \approx 90\,000\,000\,000\,000\,000\,\Delta m$$

توانائی حاصل ہو گی جہاں کمیت کی اکائی kg اور توانائی کی اکائی جاول J ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کمیت میں معمولی تبدیلی سے توانائی میں بہت بڑی تبدیلی آتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم میں ایک گرام سے کم کمیت توانائی میں تبدیل ہوتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم سے مراد وہ ایٹمی بم ہے جو 20 000 ٹن یعنی $2 \times 10^7\,\mathrm{kg}$ بارودی مواد (ٹی این ٹی[26]) کے دھماکہ کے برابر توانائی خارج کرتا ہو۔

[26] TNT, trinitrotoluene

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال 1 تا سوال 6 میں $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی $L(x)$ تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = x^4, \quad x = 1$

سوال 2: $f(x) = x^{-1}, \quad x = 2$

سوال 3: $f(x) = x^3 - x, \quad x = 1$

سوال 4: $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x = 2$

سوال 5: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 4$

سوال 6: $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad x = -4$

آپ سوال 7 تا سوال 12 میں دیے تفاعل کی خط بندی استعمال کرنا چاہتے ہیں۔ بعد کا کام آسان بنانے کی خاطر آپ خط بندی کے وقفے کا وسط دیے گئے نقطہ x_0 کے نزدیک عدد صحیح پر رکھنا چاہیں گے جہاں تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ خط بندی تلاش کریں۔

سوال 7: $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$

سوال 8: $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.6$

سوال 9: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$

سوال 10: $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$

سوال 11: $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$

سوال 12: $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1.3$

تکونیاتی تفاعل کی خط بندی

سوال 13 تا سوال 16 میں $x = a$ پر تفاعل f کی خط بندی تلاش کریں۔ دو مختلف نقطوں پر دو مختلف حد بندی درکار ہیں۔ تفاعل اور تفاعل کی خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 13: $f(x) = \sin x, \quad x = 0, x = \pi$

سوال 14: $f(x) = \cos x, \quad x = 0, x = -\frac{\pi}{2}$

سوال 15: $f(x) = \sec x, \quad x = 0, x = -\frac{\pi}{3}$

سوال 16: $f(x) = \tan x, \quad x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

تخمین $(1+x)^k \approx 1 + kx$

سوال 17: x کی قیمت صفر کے قریب لیتے ہوئے درج ذیل تفاعل کی خطی تخمین تلاش کریں۔ کلیہ $(1+x)^k \approx 1 + kx$ استعمال کریں۔

ا. $f(x) = (1+x)^2$ ج. $g(x) = \frac{2}{1-x}$ ہ. $h(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}}$

ب. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}$ د. $g(x) = (1-x)^6$ و. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

سوال 18: کیلکولیٹر سے تیز تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمتیں حاصل کریں۔

ا. $(1.0002)^{50}$ ب. $\sqrt[3]{1.009}$

سوال 19: $x=0$ پر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ کی خط بندی تلاش کریں۔اس کا $\sqrt{1+x}$ اور $\sin x$ کی انفرادی خط بندی کے ساتھ کیا رشتہ ہے؟

سوال 20: ہم طاقتی قاعدہ سے جانتے ہیں کہ تمام ناطق اعداد k کے لئے مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

مطمئن ہوتی ہے۔ ہم بعد کے ایک باب میں دیکھیں گے کہ یہ مساوات غیر ناطق اعداد کے لئے بھی مطمئن ہوتی ہے۔یہی یہاں فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x=0$ پر $f(x) = (1+k)^k$ کی خط بندی $L(x) = 1+kx$ ہے۔

تفرقات
سوال 21 تا سوال 32 میں $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔

سوال 21: $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

سوال 22: $y = x\sqrt{1-x^2}$

سوال 23: $y = \frac{2x}{1+x^2}$

سوال 24: $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$

سوال 25: $2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$

سوال 26: $xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$

سوال 27: $y = \sin(5\sqrt{x})$

سوال 28: $y = \cos(x^2)$

سوال 29: $y = 4\tan(\frac{x^3}{3})$

سوال 30: $y = \sec(x^2 - 1)$

سوال 31: $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

سوال 32: $y = 2\cot(\frac{1}{\sqrt{x}})$

خلل تخمین

سوال 33 تا سوال 38 میں x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہونے کی بنا تفاعل $f(x)$ کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ درج ذیل تلاش کریں (شکل 4.130)۔

ا. تبدیلی $\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$

ب. اندازاً تبدیلی $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$

ج. خلل تخمین $\left|\Delta f - \mathrm{d}f\right|$

سوال 33: $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 0,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 34: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3,\ x_0 = -1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 35: $f(x) = x^3 - x,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 36: $f(x) = x^4,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 37: $f(x) = x^{-1},\ x_0 = 0.5,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 38: $f(x) = x^3 - 2x + 3,\ x_0 = 2,\ \mathrm{d}x = 0.1$

تبدیلی کا تفرقی اندازہ

سوال 39 تا سوال 44 میں رقبہ یا حجم میں تبدیلی کی تفرقی صورت لکھیں۔

سوال 39: رداس r کے کرہ کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ میں تبدیلی جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے۔

سوال 40: مکعب کے حجم $H = x^3$ میں تبدیلی جب اس کے ضلع کی لمبائی x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتی ہے۔

سوال 41: مکعب کی سطحی رقبہ $S = 6x^2$ میں تبدیلی جب اس کا ضلع x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتا ہے۔

سوال 42: قائمہ مخروط کا رقبہ پہلو $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے جبکہ اس کی اونچائی h تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

سوال 43: قائمہ بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ جب اس کا رداس r_0 سے تبدیل ہو کر $r_0 + \mathrm{d}r$ ہو جبکہ اس کی لمبائی h تبدیل نہ ہو۔

سوال 44: قائمہ بیلن کا رقبہ پہلو $S = 2\pi rh$ جب اس کی لمبائی h_0 سے $h_0 + \mathrm{d}h$ ہو جائے جبکہ اس کا رداس تبدیل نہ ہو۔

استعمال

سوال 45: ایک دائرے کا رداس $2\,\mathrm{m}$ سے بڑھ کر $2.02\,\mathrm{m}$ ہو جاتا ہے۔

ا. رقبے میں تبدیلی تلاش کریں۔

ب. رقبہ میں تبدیلی اور ابتدائی رقبہ کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 46: ایک درخت کا قطر $30\,\mathrm{cm}$ تھا۔اگلے سال اس کا محیط $2\,\mathrm{cm}$ بڑھ گیا۔ درخت کا قطر کتنا بڑھا؟ درخت کا رقبہ عمودی تراش کتنا بڑھا؟

سوال 47: ایک مکعب کی اضلاع کی لمبائی $10\,\mathrm{cm}$ ہے جس میں $1\,\%$ خلل متوقع ہے۔ اس کے حجم میں کتنا فی صد خلل ہو گا؟

سوال 48: ایک چکور کے رقبہ میں $2\,\%$ سے کم خلل قابل قبول ہے۔ اس کے ضلع کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 49: ایک کرہ کا قطر $100 \mp 1\,\mathrm{cm}$ ناپا جاتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم حاصل کیا جاتا ہے۔ حجم میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال 50: ایک کرہ کے حجم میں $3\,\%$ تک خلل قابل قبول ہے۔ اس کے قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 51: ایک قائمہ بیلن کا رداس اور اس کی لمبائی ایک دوسرے کے برابر ہیں۔یوں اس کا حجم πh^3 ہو گا۔اس کے حجم میں $1\,\%$ خلل قابل قبول ہے۔ اس کی لمبائی کی پیمائش میں قابل قبول خلل کتنا ہو گا؟

سوال 52: ایک قائمہ ٹینکی کا قد $10\,\mathrm{m}$ ہے۔اس کی پیمائش حجم اور اصل حجم میں $1\,\%$ کا فرق قابل قبول ہے۔ اس کے اندرونی قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا۔

سوال 53: ایک دائری قرص کے رداس میں کتنا فرق $\mathrm{d}r$ قابل قبول ہو گا تا کہ اس کی کمیت میں فرق اصل کمیت کے $\frac{1}{1000}$ سے کم ہو۔قرص کی موٹائی میں خلل کو نظر انداز کریں۔

سوال 54: خون کے بہاو میں $50\,\%$ اضافہ حاصل کرنے کی خاطر مثال 4.50 میں r کو کتنا فی صد بڑھانا ہو گا؟

سوال 55: دکھائیں کہ مثال 4.51 میں t میں $5\,\%$ خلل کی بنا s میں $10\,\%$ خلل پیدا ہو گا۔

سوال 56: دل پر خلائی مشق کے اثرات
اکائی وقت میں دل درج ذیل

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

کام کرتا ہے جہاں W اکائی وقت میں کام ہے، P دباو خون ہے، V دل سے اکائی وقت میں خارج خون کا حجم ہے، δ خون کی کثافت ہے، v دل سے اخراج کے وقت خون کی اوسط رفتار ہے، اور g ثقلی اسراع ہے۔

مستقل P ، V δ اور v کی صورت میں W صرف g کا تفاعل ہو گا۔ایسی صورت میں یہ مساوات درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$W = a + \frac{b}{g} \qquad (a, b \text{ مستقل}) \tag{4.20}$$

آپ چاند پر g میں تبدیلی $\mathrm{d}g$ اور زمین پر g میں اتنی ہی تبدیلی $\mathrm{d}g$ کا W پر اثر دیکھنا چاہتے ہیں۔چاند پر $g = 1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور زمین پر $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہیں۔مساوات 4.20 سے $\mathrm{d}W_{\text{چاند}}$ اور $\mathrm{d}W_{\text{زمین}}$ کی نسبت حاصل کریں۔ نتیجہ کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

سوال 57: مکعب کا حجم $H = x^3$ ہے۔اس کے کنارے کی لمبائی میں Δx کے اضافہ سے حجم میں ΔH اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اضافی حجم ΔH کا خاکہ بنا کر اس کو درج ذیل کا مجموعہ ظاہر کریں۔

ا. تین تختے جن کے اطراف x ، x اور Δx ہیں۔

ب. تین ڈنڈے جن کے اطراف x ، Δx اور Δx ہیں۔

ج. ایک مکعب جس کے اطراف Δ ، Δx اور Δx ہیں۔

تفرقی کلیہ $\mathrm{d}H = 3x^2\,\mathrm{d}x$ حجم میں تبدیلی کو تین تختوں کے حجم (جزو-ا) سے حاصل کرتی ہے۔

سوال 58: گھڑیال کی لٹکن کی لمبائی اٹل رکھنے کی خاطر اس کا درجہ حرارت برقرار رکھا جاتا ہے۔ لٹکن کا دوری عرصہ T لٹکن کی لمبائی L اور کروی اسراع g پر منحصر ہے۔ یوں سطح زمین پر گھڑیال کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے g کی مقامی قیمت میں معمولی تبدیل کی بنا T میں معمولی تبدیلی پیدا ہو گی۔ ΔT پر نظر رکھنے سے g میں تبدیلی $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

ا. L کو اٹل اور g کو متغیر تصور کرتے ہوئے $\mathrm{d}T$ کی مساوات حاصل کر کے جزو-ب اور جزو-ج کے جوابات دیں۔

ب. g بڑھنے سے T بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے؟ کیا گھڑیال کم وقت یا زیادہ وقت دے گا؟

ج. $100\,\mathrm{cm}$ لٹکن والے گھڑیال کو ایک مقام جہاں $g = 980\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ ہو سے دوسرے مقام پر منتقل کیا جاتا ہے جس کی بنا دوری عرصہ $\Delta T = 0.001\,\mathrm{s}$ بڑھ جاتا ہے۔ $\mathrm{d}g$ حاصل کرتے ہوئے نئے مقام پر g کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 59: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $\sqrt{1+x}$ کی خط بندی $x \to 0$ کرنے سے بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} = 1$$

سوال 60: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $x \to 0$ کرنے سے $\tan x$ کی خط بندی بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

سوال 61: فرض کریں تفاعل $f(x)$ کی ترسیم کا $x = a$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔ کیا $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 62: ڈھلوان سے تفرق کا حصول۔ قابل تفرق منحنی کو بڑا کرنے سے مقامی نقطے پر منحنی سیدھا خط نما نظر آتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے پر منحنی کا تفرق ترسیم کی ڈھلوان ناپ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. یہ عمل دیکھنے کی خاطر $y = x^2$ کی ترسیم کو کمپیوٹر کے شیشے پر اتنا بڑا کریں کہ $x = 1$ پر ترسیم سیدھا خط نظر آتا ہو۔ $x = 1$ پر اس سیدھے خط کا ڈھلوان 2 ہو گا جو اس نقطے پر ترسیم کا تفرق ہو گا۔

ب. اب $y = e^x$ کی ترسیم کو باری باری $x = 0$ ، $x = 1$ اور $x = -1$ پر بڑا کر کے دیکھیں۔ ہر نقطے پر ترسیم کی ڈھلوان کا موازنہ اس نقطے پر e^x کی قیمت کے ساتھ کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال 63: نقطہ تصریف پر خط بندی۔ جیسا شکل 4.129 سے واضح ہے، نقطہ تصریف پر خط بندی مزید بہتر بیٹھتی ہے۔اس کی وضاحت بعد میں اس کتاب میں کی جائے گی۔ترسیم سے $x = 0$ اور $x = \sqrt{3}$ پر $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

سوال 64: خط بندی بہترین خطی تخمین ہے۔ (خط بندی استعمال کرنے کی وجہ۔) فرض کریں $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہے اور $g(x) = m(x-a) + c$ ایک خطی تفاعل ہے جہاں m اور c مستقل ہیں۔ اگر $x = a$ کے نزدیک خلل $E(x) = f(x) - g(x)$ بہت کم ہو تب ہم خط بندی $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ کی بجائے g کو بطور خطی تخمین استعمال کر سکتے ہیں۔ دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط لاگو کرنے سے $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ حاصل ہو گا۔

ا. $E(a) = 0$ $\quad x = a$ پر تخمینی خلل صفر ہے

ب. $\lim_{x \to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$ $\quad x - a$ کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔

یوں خط بندی $L(x)$ وہ واحد خطی تخمین ہے جو $x = a$ پر صفر خلل دیتا ہے اور جس کا خلل $x - a$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

سوال 65: کیلکولیٹر میں 2 کا ہندسہ لکھ کر بار بار جذر لیں۔ آپ کیا ترتیب دیکھتے ہیں؟ بار بار $\sqrt[10]{}$ لینے سے کیا ترتیب دیکھنے کو ملتی ہے؟

سوال 66: گزشتہ سوال کو 2 کی بجائے 0.5 کے لئے دہرائیں۔ اب کیا دیکھنے کو ملتا ہے؟ کیا 2 کی جگہ کوئی بھی مثبت عدد x استعمال کیا جا سکتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 67 تا سوال 70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے وقفہ I پر تفاعل کی بجائے خط بندی استعمال کرتے ہوئے خلل کی مقدار کا اندازہ لگانا ہو گا۔درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ I پر تفاعل f ترسیم کریں۔

ب. نقطہ $x = a$ پر تفاعل کی خط بندی L تلاش کریں۔

ج. f اور L کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں۔

د. وقفہ I پر مطلق خلل $\left|f(x) - L(x)\right|$ ترسیم کر کے اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں۔

ہ. جزو-د کی ترسیم سے $\delta > 0$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں جو $|x-a| < \delta \implies \left|f(x) - L(x)\right| < \epsilon$ کو مطمئن کرتی ہو جہاں۔ $\epsilon = 0.5, 0.1, 0.01$ لیں۔ ترسیم کو دیکھ کر بتائیں آیا آپ کی تخمینی δ کی قیمتیں درست ہیں؟

سوال 67: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1,2], \quad a = 1$

سوال 68: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad [-\frac{3}{4},1], \quad a = \frac{1}{2}$

سوال 69: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2), \quad [-2,3], \quad a = 2$

سوال 70: $f(x) = \sqrt{x} - \sin x, \quad [0,2\pi], \quad a = 2$

4.8 ترکیب نیوٹن

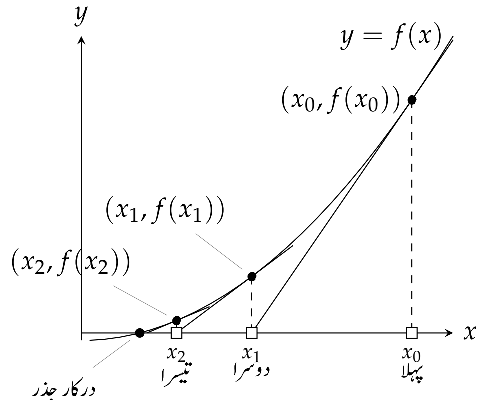
ہم خطی اور دو درجی مساوات حل کرنے کے سادہ کلیات جانتے ہیں۔ تین درجی اور چار درجی مساوات حل کرنے کے نسبتاً مشکل کلیات بھی پائے جاتے ہیں۔ ناروے کے ریاضی دان نیلز ہنری ایبل ($1802 - 1829$) نے ثابت کیا کہ چار سے زیادہ درجے کی مساوات حل کرنے کا کوئی کلیہ نہیں پایا جاتا ہے۔

جب $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا بالکل درست حل حاصل کرنا ممکن نہ ہو تب ہم احصاء کے اعدادی طریقوں کو استعمال کرتے ہوئے حل کی تخمین حاصل کرتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن ایسی ایک ترکیب ہے۔اس ترکیب میں، جن نقطوں پر $f(x)$ صفر ہو ان نقطوں کے نزدیک $y = f(x)$ کو مماس سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں بھی خط بندی کے ذریعہ مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

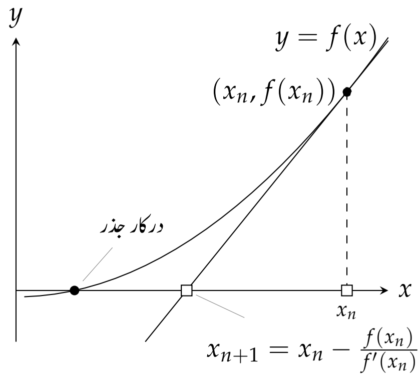
نظریہ

ترکیب نیوٹن مساوات $f(x) = 0$ کے حل کی تخمینی قیمتوں کی ترتیب حاصل کرتا ہے جو اصل حل تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے۔ہم اس ترتیب کا پہلا عدد x_0 منتخب کرتے ہیں۔ موزوں صورتوں میں یہ ترتیب قدم با قدم آگے بڑھتے ہوئے دیگر نقطے دیتا ہے۔ x_0 پر f کا مماس x محور کو ترتیب کے اگلے نقطہ x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 4.132)۔

ابتدائی نقطہ x_0 کو ترسیم دیکھ کر یا قیاساً منتخب کیا جا سکتا ہے۔یہ ترکیب نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل کے مماس کو تفاعل کا تخمین لیتے ہوئے مماس اور x محور کے مقطع کو x_1 کہتا ہے جو ترتیب کا دوسرا عدد ہو گا۔ x_1 عموماً x_0 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح نقطہ $(x_1, f(x_1))$ پر تفاعل کا مماس x محور کو x_2 پر قطع کرے گا جو ترتیب کا تیسرا عدد ہو گا۔ x_2 عموماً x_1 سے بہتر حل ہو گا۔اسی



شکل 4.132: ترکیب نیوٹن ابتدائی قیاس x_0 سے شروع ہو کر (موزوں صورت میں) بتدریج بہتر جواب دیتی ہے۔



شکل 4.133: x_n سے منحنی تک جا کر مماس کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے x_{n+1} تک پہنچتے ہیں۔

طرح قدم با قدم چلتے ہوئے بہتر سے بہتر حل کی ترتیب حاصل کی جاتی ہے۔ یہ ترتیب اصل حل کے نزدیک سے نزدیک ہوتی چلی جاتی ہے۔ قابل قبول حل تک پہنچ کر ہم رک جاتے ہیں۔

ہم یک بعد دیگرے تخمینی قیمتوں کے حصول کا کلیہ اخذ کر سکتے ہیں۔ دیے گئے تخمین x_n پر تفاعل کے مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \tag{4.21}$$

جو x محور کو اس نقطے پر قطع کرے گا جہاں $y = 0$ ہو۔ مساوات 4.21 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے نقطہ قطع یعنی اگلا نقطہ x_{n+1} حاصل کرتے ہیں

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad \implies x = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

جہاں $f'(x_n) \neq 0$ فرض کیا گیا ہے (شکل 4.133)۔

ترکیب نیوٹن کا لائحہ عمل

ا. مساوات $f(x) = 0$ کے جذر کی قیمت قیاساً حاصل کریں۔ مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم مددگار ثابت ہو گی۔

ب. درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے پہلی تخمین سے دوسری تخمین، دوسری تخمین سے تیسری تخمین، وغیرہ، حاصل کریں

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (f'(x_n) \neq 0) \tag{4.22}$$

جہاں نقطہ x_n پر تفاعل کا تفرق $f'(x_n)$ ہے۔

ہم اپنی پہلی مثال میں $\sqrt{2}$ کا مثبت جذر مساوات $f(x)=x^2-2=0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

مثال 4.52: مساوات $f(x)=x^2-2=0$ کا مثبت جذر تلاش کریں۔
حل: $f(x)=x^2-2$ اور $f'(x)=2x$ لیتے ہوئے مساوات 4.22 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}$$

کم سے کم حساب و کتاب کی خاطر ہم اس مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\\&=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\end{aligned}$$

ہم $x_0=1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$$

سے درج ذیل بتدریج بہتر تخمینی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

	خلل	درست ہندسوں کی تعداد
$x_0=1$	-0.41421	1
$x_1=1.5$	0.08579	1
$x_2=1.41667$	0.00246	3
$x_3=1.41422$	0.00001	5

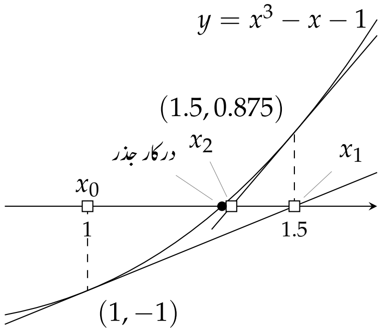
□

چونکہ ترکیب نیوٹن کی مرکوزیت بہت تیز ہے (جس پر جلد بات کی جائے گی) لہٰذا عموماً کیلکولیٹر جذر کا حصول ترکیب نیوٹن سے تلاش کرتے ہیں۔اگر درج بالا جدول میں 5 کی بجائے 13 اعشاریہ درست ہندسے لیے جاتے تب اگلے قدم میں $\sqrt{2}$ کی قیمت 10 اعشاریہ درست حاصل ہوتی۔

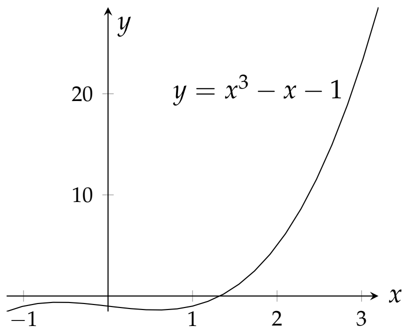
مثال 4.53: اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جس پر منحنی $y=x^3-x$ افقی خط $y=1$ کو قطع کرتی ہے۔
حل: منحنی اس خط کو اس نقطے پر قطع کرتی ہے جہاں $x^3-x=1$ یعنی $x^3-x-1=0$ ہو۔ کہاں $f(x)=x^3-x-1$ صفر ہو گا؟ شکل 4.134 میں ترسیم کا ایک جذر $x=1$ اور $x=2$ کے بیچ دیکھا جا سکتا ہے۔ہم $x_0=1$ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن کو f پر لاگو کرتے ہیں۔ نتائج جدول 4.2 اور شکل 4.135 میں دیے گئے ہیں۔ □

جدول 4.2: ابتدائی قیمت $x_0 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^3 - x - 1$ پر ترکیب نیوٹن کی اطلاق کے نتائج۔

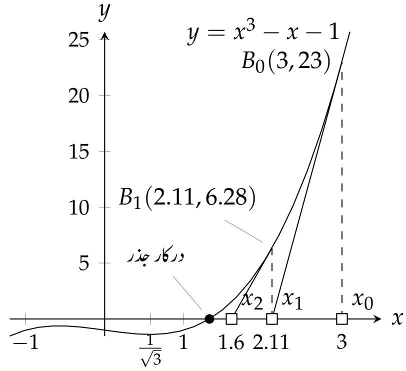
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.347 826 087
2	1.347 826 087	0.100 682 173	4.449 905 482	1.325 200 399
3	1.325 200 399	0.002 058 362	4.268 468 293	1.324 718 174
4	1.324 718 174	0.000 000 924	4.264 634 722	1.324 717 957
5	1.324 717 957	-1.0437×10^{-9}	4.264 632 997	1.324 717 957



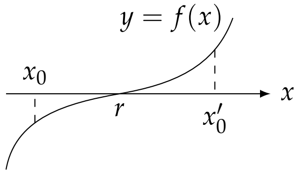
شکل 4.135: جدول 4.2 کی پہلی تین قیمتیں۔



شکل 4.134: منحنی $f(x) = x^3 - x - 1$ محور x کو $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔



شکل 4.136: جذر حاصل کرنے کی خاطر $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کے دائیں جانب کسی بھی نقطہ x_0 سے شروع کیا جا سکتا ہے۔



شکل 4.137: جذر r کے دونوں اطراف ابتدائی نقطہ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن r کو مرکوز ہو گا۔

جیسا شکل 4.136 میں دکھایا گیا ہے ہم $B_0(3, 23)$ کو ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے تھے جہاں $x_0 = 3$ ہو گا۔اگرچہ B_0 افقی محور سے بہت دور ہے لیکن $x_0 = 3$ پر منحنی کا مماس افقی محور کو $x_1 = 2.11$ پر قطع کرتا ہے جو x_0 سے بہتر نقطہ ہے۔ اب $f(x) = x^3 - x - 1$ اور $f'(x) = 3x^2 - 1$ لیتے ہوئے پہلے کی طرح مساوات 4.22 کی بار بار استعمال سے چھٹے قدم پر 9 اعشاریہ جواب $x_6 = x_5 = 1.324\,717\,957$ حاصل ہو گا۔

شکل 4.136 میں منحنی کا مقامی زیادہ سے زیادہ $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور مقامی کم سے کم $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ پر پایا جاتا ہے۔اگر ہم ان نقطوں کے بیچ ابتدائی نقطہ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن استعمال کریں تب ہمیں اچھے نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔البتہ ہم $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کے دائیں جانب کسی بھی نقطہ سے شروع کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا بہتر نہیں ہو گا لیکن ہم B_0 سے بھی زیادہ دور، مثلاً $x_0 = 10$ کو، ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔یوں زیادہ قدموں کے بعد اصل جواب حاصل ہو گا۔

ارتکاز عموماً یقینی ہو گا

ترکیب نیوٹن بہت تیزی سے مرکوز ہوتا ہے، لیکن چونکہ مرکوزیت لازمی نہیں ہوتی لہٰذا یہ دیکھنا لازمی ہو گا کہ آیا ترکیب مرتکز ہے یا نہیں۔ مرکوزیت یقینی بنانے کی خاطر ہم تفاعل ترسیم کر کے موزوں ابتدائی نقطہ x_0 منتخب کر سکتے ہیں۔ صفر کے قریب ہونے کو $|f(x_n)|$ کی قیمت سے دیکھا جا سکتا ہے جبکہ مرکوزیت کو $|x_n - x_{n+1}|$ سے پرکھا جا سکتا ہے۔

اس زمرے میں نظریہ بھی کچھ مدد مہیا کرتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ جذر r پر وقفہ (جس میں r پایا جاتا ہو) میں تمام x کے لئے

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \tag{4.23}$$

کی صورت میں اس وقفہ کے اندر کسی بھی ابتدائی نقطہ x_0 کے لئے ترکیب مرتکز ہو گی۔حقیقتاً اس مسئلے کا اطلاق مشکل ثابت ہوتا ہے لہٰذا $f(x_n)$ اور $|x_n - x_{n+1}|$ کی قیمتوں سے مرکوزیت دیکھی جاتی ہے۔

عدم مساوات 4.23 مرکوزیت کے لئے کافی نا کہ لازمی شرط ہے۔ایسی مثالیں پائی جاتی ہیں جہاں جذر r پر ایسا کوئی وقفہ نہیں پایا جاتا ہے جس پر عدم مساوات 4.23 مطمئن ہوتی ہو لیکن ترکیب نیوٹن مرتکز ہوتی ہے۔ ایسے تمام وقفے پر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو گی جس میں x_0 اور درکار جذر کے بیچ وقفے پر منحنی $y = f(x)$ محور x کی طرف محدب (جھکا) ہو (شکل 4.137)۔

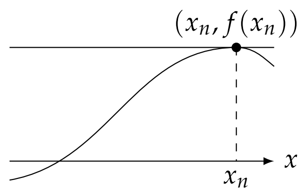
سازگار حالات میں ترکیب نیوٹن کی جذر r کو ارتکاز کی رفتار درج ذیل اعلیٰ احصاء کا کلیہ دیتا ہے

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{e_{n+1} \text{خلل}} \leq \frac{|f''|_{\text{زیادہ سے زیادہ}}}{|f'|_{\text{کم سے کم}}} |x_n - r|^2 = c \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{e_n \text{خلل}} \tag{4.24}$$

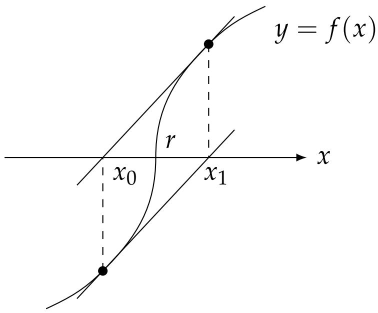
جہاں c مستقل ہے، اور زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت r پر وقفہ میں پائی جاتی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں ہیں۔ درج بالا کلیہ کہتا ہے کہ قدم $n+1$ میں خلل کی قیمت قدم n میں خلل کی قیمت کے مربع ضرب مستقل سے زیادہ نہیں ہو گی۔ اس بات کی گہرائی سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ $c \leq 1$ ہے اور $|x_n - r| < 10^{-3}$ ہے تب $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$ ہو گا۔یوں ایک ہی قدم میں درستگی 3 اعشاریہ سے 6 اعشاریہ ہو گئی ہے۔ عدم مساوات 4.23 اور عدم مساوات 4.24 میں ہم فرض کرتے ہیں کہ f "اچھا" تفاعل ہے۔ عدم مساوات 4.24 میں اس سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کا r پر واحد ایک جذر پایا جاتا ہو لہٰذا $f'(r) \neq 0$ ہو گا۔ اگر r پر ایک سے زیادہ جذر پائے جاتے ہوں تب ارتکاز کی رفتار کم ہو سکتی ہے۔

لیکن چیزیں غلطی کی طرف جا سکتی ہیں

اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب x_n پر منحنی کا مماس x محور کو قطع نہیں کرے گا لہٰذا x_{n+1} نا قابل معلوم ہو گا اور ترکیب نیوٹن رک جائے گا (شکل 4.138)۔ ایسی صورت میں نئے ابتدائی نقطہ سے شروع کریں۔ اب عین ممکن ہے کہ f اور f' دونوں کا مشترک جذر پایا جاتا ہو۔یہ جاننے کے لئے کہ آیا ایسا ہے آپ $f'(x) = 0$ کا حل تلاش کر کے ان قیمتوں پر f کی قیمتیں دیکھ سکتے ہیں یا f اور f' کو ایک ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں۔



شکل 4.138: اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب نقطہ قطع نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا ترکیب نیوٹن رک جاتی ہے اور x_{n+1} نا قابل معلوم ہو گا۔



شکل 4.139: ترکیب نیوٹن کی عدم مرکوزیت۔

ترکیب نیوٹن بعض اوقات غیر مرتکز ہوتا ہے۔مثال کے طور پر

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r \end{cases}$$

جس کو شکل 4.139 میں دکھایا گیا ہے لیتے ہیں۔ اگر ہم $x_0 = r - h$ سے شروع کریں تب $x_1 = r + h$ ہو گا اور ہر قدم پر یہی دو قیمتیں دہرائی جاتی ہیں۔ ہم جتنے قدم بھی لیں، حاصل تخمین ابتدائی قیاس سے زیادہ بہتر نہیں ہو گا۔

اگر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ جذر پر مرکوز ہو گا۔حقیقت میں عموماً ایسا ہی ہو گا البتہ بعض اوقات یہ کسی ایسے نقطے پر مرکوز ہو گا جہاں کوئی جذر نہ پایا جائے گا۔ہماری خوش قسمتی سے ایسے مواقع بہت کم پائے جاتے ہیں۔

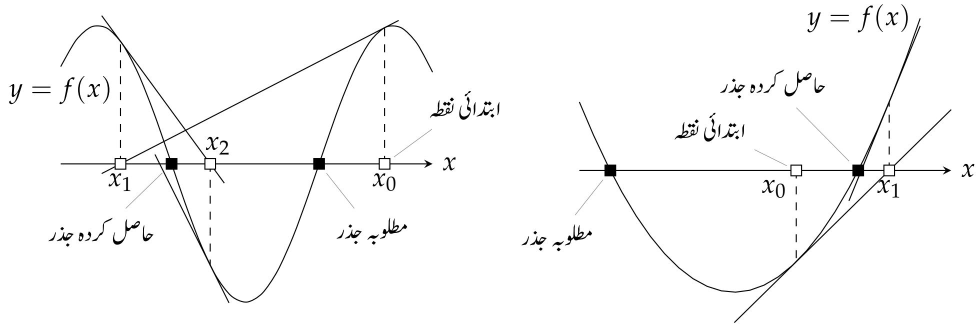
بعض اوقات آپ ایک جذر کو تلاش کرنا چاہیں گے جبکہ ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو گا۔ شکل 4.140 میں ایسے دو مثالیں دی گئی ہیں۔

ایسی صورت میں، کمپیوٹر پر تفاعل کی ترسیم یا احصاء کے تراکیب استعمال کرتے ہوئے درکار جذر کے قریب ابتدائی نقطہ تلاش کرتے ہوئے حل کریں۔ امید کی جاتی ہے کہ اس سے مسئلہ حل ہو جائے گا۔

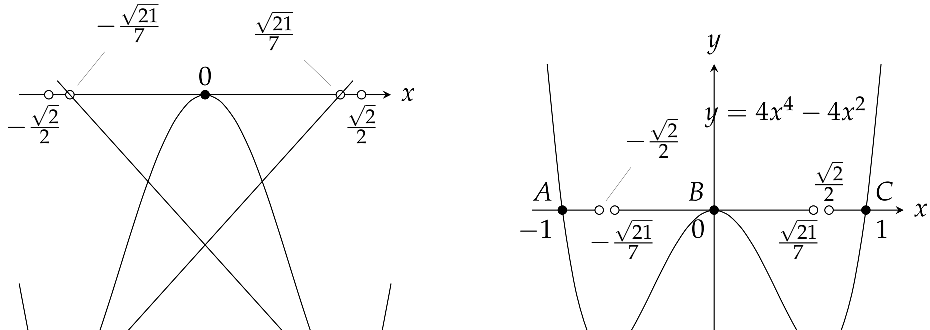
ترکیب نیوٹن میں ابتری

ترکیب نیوٹن سے جذر کا حصول ابتری کا شکار ہو سکتا ہے یعنی کئی مساوات کے لئے حاصل جذر کی قیمت ابتدائی نقطے کی مقام کو بہت حساس ہو گی۔

مساوات $4x^4 - 4x^2 = 0$ ایسی ایک مثال ہے جس کو شکل 4.141 میں دکھایا گیا ہے۔ وقفہ $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $\left(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$ اور $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ میں ابتدائی نقطہ منتخب کرنے سے بالترتیب جذر A ، B اور C ملتا ہے۔ نقطے $x = \mp\frac{\sqrt{21}}{7}$ ایک دوسرے کو



شکل 4.140: ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو سکتا ہے۔



شکل 4.141: ترکیب نیوٹن ابتری کا شکار ہے۔

دہراتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ نقطوں کے ایسے لامتناہی کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر A کو کھینچے جاتے ہیں۔ان وقفوں کے بیچ، نقطوں کے ایسے کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر C کو کھینچے جاتے ہیں۔ان کھلے وقفوں کے آخری سر (جن کی تعداد لا متناہی ہے) کوئی جذر نہیں دیتے ہیں بلکہ یہ ایک دوسرے کو دہراتے ہیں۔ یہی عمل وقفہ $\left(-\frac{\sqrt{21}}{7}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ میں بھی پایا جاتا ہے۔

$\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ (یا $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $-\frac{\sqrt{2}}{2}$) کے بیچ ابتری کی بہترین مثال دیکھنے کو ملتی ہے۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ تک دائیں سے پہنچتے ہوئے ان نقطوں کے بیچ فرق کرنا مشکل ہو جاتا ہے جو جذر A اور جذر C دیتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ کے ایک ہی طرف رہتے ہوئے انتہائی قریب قریب ایسے نقطے پائے جاتے ہیں جن سے حاصل جذر ایک دوسرے سے بہت دور پائے جاتے ہیں۔

سوالات

حصول جذر

سوال 1: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے مساوات $x^2 + x - 1 = 0$ کا حل حاصل کریں۔ اب $x_0 = 1$ لیتے ہوئے دوسرا حل تلاش کریں۔دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

جواب: $x_2 = \frac{13}{21}, -\frac{4}{3}$

سوال 2: $x_0 = 0$ لیتے ہوئے $x^3 + 3x + 1 = 0$ کا ایک حقیقی حل ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ اس کے بعد x_2 تلاش کریں۔

سوال 3: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے تفاعل $f(x) = x^4 + x - 3$ کا بایاں صفر اور $x_0 = 1$ لیتے ہوئے اس کا دایاں صفر تلاش کریں۔دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

جواب: $x_2 = \frac{5763}{4945}, -\frac{51}{31}$

سوال 4: تفاعل $f(x) = 2x - x^2 + 1$ کے دونوں جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے بائیں ہاتھ صفر اور $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے دائیں ہاتھ صفر حاصل کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

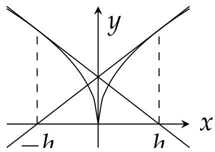
سوال 5: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل ترکیب نیوٹن سے کرتے ہوئے 2 کا مثبت چوتھا جذر تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟

جواب: $x_2 = \frac{2387}{2000}$

سوال 6: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل کرتے ہوئے 2 کا منفی چوتھا جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = -1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟

سوال 7: x کی کس قیمت پر $\cos x = 2x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

جواب: $x \approx 0.45$



شکل 4.142: ترسیم برائے سوال 13

سوال 8: x کی کس قیمت پر $\cos x = -x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

سوال 9: متوسط قیمت مسئلہ (صفحہ 174) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $f(x) = x^3 + 2x - 4$ کا ایک جذر $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس جذر کو ترکیب نیوٹن کی مدد سے 5 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔
جواب: 1.17951

سوال 10: π کی قیمت کا تخمینہ مساوات $\tan x = 0$ کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ $x_0 = 3$ سے شروع کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے، کیلکولیٹر کی استعمال کے ساتھ، π کی قیمت جتنے اعشاریہ درستگی تک ممکن ہو حاصل کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال 11: فرض کریں آپ کا منتخب کردہ ابتدائی نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہوتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f'(x_0)$ معین اور غیر صفر ہے۔ ایسی صورت میں x_1 اور دیگر تخمین کیا حاصل ہوں گے؟

سوال 12: آپ $\frac{\pi}{2}$ کی قیمت 5 اعشاریہ درست ترکیب نیوٹن سے $\cos x = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ کیا ابتدائی نقطہ کی کوئی اہمیت ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13: ارتعاش۔ اگر $h > 0$ ہو تب ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x_0 = h$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل تفاعل کے لئے $x_1 = -h$ حاصل ہو گا

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

اور $x_0 = -h$ منتخب کرنے سے $x_1 = h$ حاصل ہو گا۔ اس مسئلے کی ترسیم کھینچ کر اس عمل کی وضاحت کریں۔
جواب: شکل 4.142

سوال 14: بگڑتی ہوئی تخمین تفاعل $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیتے ہوئے x_1، x_2، x_3 اور x_4 تلاش کریں۔ $|x_n|$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ $n \to \infty$ کرنے سے $|x_n|$ کو کیا ہو گا؟ تصویر کشی کر کے وضاحت کریں۔

سوال 15: سمجھائیں کہ درج ذیل چار فقرے ایک ہی معلومات پوچھ رہی ہیں۔

ا. تفاعل $f(x)=x^3-3x-1$ کا جذر تلاش کریں۔

ب. منحنی $y=x^3$ اور خط $y=3x+1$ کی نقطہ تقاطع کا x محدد تلاش کریں۔

ج. منحنی $y=x^3-3x$ جہاں $y=1$ کو قطع کرتی ہے اس نقطے کا x محدد تلاش کریں۔

د. x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-x+5$ کا تفرق صفر ہو گا۔

جواب: چاروں فقرے جزو-الف کا جذر تلاش کرنے کو کہتے ہیں۔

سوال 16: ایک سیارے کا مقام تلاش کرنے کی خاطر ہمیں $x=1+0.5\sin x$ حل کرنا ہو گا۔ تفاعل $f(x)=x-1-0.5\sin x$ کو ترسیم کرتے ہوئے ایک جذر $x=1.5$ کے قریب حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطہ سے شروع کرتے ہوئے بہتر حل x_1 تلاش کریں۔(5 اعشاریہ درست حل $x=1.49870$ ہے۔)

سوال 17:

ا. ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $f(x)=x^3-3x-1$ کے دو منفی جذر 5 اعشاریہ درست تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2.5\le x\le -2$ پر $f(x)=x^3-3x-1$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ترسیم کو جذر کے قریب بڑا کرتے ہوئے جذر کو 5 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔

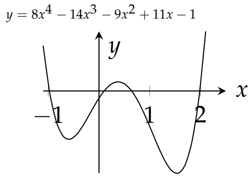
ج. تفاعل $g(x)=0.25x^4-1.5x^2-x+5$ کو ترسیم کریں۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے x کی 5 اعشاریہ درست وہ قیمت تلاش کریں جہاں ترسیم کا مماس افقی ہو۔

جواب: $-1.532\,09,\ -0.347\,30$

سوال 18: ترسیم $y=\tan x$ خط $y=2x$ کو $x=0$ اور $x=\frac{\pi}{2}$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔ ترکیب نیوٹن سے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔
جواب: $1.165\,561\,185\,207\,211$

سوال 19: ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $x^4-2x^3-x^2-2x+2=0$ کے دو حقیقی جذر تلاش کریں۔
جواب: $0.630\,115\,396\,163\,843\,2,\ 2.573\,271\,963\,535\,193$

سوال 20: $\sin 3x=0.99-x^2$ کے کتنے حل ہوں گے؟ ترکیب نیوٹن سے ان حل کو تلاش کریں۔
جواب: $0.350\,035\,015,\ -1.026\,173\,161\,530\,1$



شکل 4.143: ترسیم برائے سوال 23

سوال 21: کیا $\cos 3x$ کبھی x کو قطع کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔
جواب: $0.390\,040\,316\,667\,547$

سوال 22: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ کے چار حقیقی صفر تلاش کریں۔
جواب: $\mp 1.306\,562\,964\,876\,4, \mp 0.541\,196\,100\,146\,19$

سوال 23: تجزی $8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$ میں r_1 ، r_2 ، r_3 اور r_4 تلاش کریں (شکل 4.143)۔
جواب: $-0.976\,823\,589,\ 0.100\,363\,332,\ 0.642\,746\,671,\ 1.983\,713\,87$

باب 5

تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

5.1 غیر قطعی تکملات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق $f(x)$ سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق f ہے۔ ان تفاعل کو f کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو f کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمل

تعریف: تفاعل $f(x)$ کا الٹ تفرق تب $F(x)$ ہو گا جب f کے دائرہ کار میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

f کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ x کے لحاظ سے f کا غیر قطعی تکمل[1] ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

علامت $\int$ کو علامت تکمل کہتے ہیں۔ تفاعل f کو متکمل[2] اور x کو تکمل کا متغیر[3] کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل f کے حاصل کردہ الٹ تفرق F اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکملی علامتیت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{5.1}$$

مستقل C کو تکمل کا مستقل[4] یا اختیاری مستقل[5] کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: " x کے لحاظ سے تفاعل f کا غیر قطعی تکمل $F(x)+C$ ہے۔" $F(x)+C$ کے حصول کو f کے تکمل کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1: $\int 2x\,\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔
حل:

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$

$2x$ کا الٹ تفرق x^2 ہے اور C تکمل کا مستقل ہے۔کلیہ x^2+C تفاعل $2x$ کے تمام تفرقات دیتا ہے۔یوں x^2+1 ، $x^2-\pi$ اور $x^2+\sqrt{2}$ تفاعل $2x$ کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔جدول 5.1 میں غیر قطعی تکملات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

---

[1] indefinite integral
[2] integrand
[3] variable of integration
[4] constant of integration
[5] arbitrary constant

جدول 5.1: تکمل کے کلیات

	غیر قطعی تکمل	تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے
1.	$\int x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,\ n$ ناطق	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$
	$\int \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x = x + C$ (خصوصی صورت)	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$
2.	$\int \sin kx \, \mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{\cos kx}{k}) = \sin kx$
3.	$\int \cos kx \, \mathrm{d}x = \dfrac{\sin kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sin kx}{k}) = \cos kx$
4.	$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \sec^2 x$
5.	$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cot x) = \csc^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$
7.	$\int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\csc x) = \csc x \cot x$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں $n = 5$ لیتے ہوئے:

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں $n = -\frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں $k = 2$ لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں $k = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \cos \frac{x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} x \, dx = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق متکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{d}{dx}(x \sin x + \cos x + C) = x \cos x + \sin x - \sin x + 0 = x \cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی تکمل کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ: (k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$
2. منفی کے لئے قاعدہ: (قاعدہ 1 میں $k=-1$ لیا گیا ہے۔)	$\int -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x)\mp g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

ا. ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب kf کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق ضرب k کے برابر ہو۔

ب. بالخصوص ایک تفاعل اس صورت $-f$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔

ج. ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق $f \mp g$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق اور g کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکملی علامتیت میں لکھنے سے غیر قطعی تکمل کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: تکمل کا مستقل

$\int 5\sec x\tan x\,\mathrm{d}x = 5\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x$	جدول 5.2، قاعدہ 1
$= 5(\sec x + C)$	جدول 5.1، کلیہ 6
$= 5\sec x + 5C$	غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت
$= 5\sec x + C'$	مستقل $5C$ کو مستقل C' لکھا گیا ہے
$= 5\sec x + C$	C' ایک مستقل ہے جس کو ہم اب C سے ظاہر کرتے ہیں

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل C' کو بغیر علامت (') لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہٰذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا تکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ تکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل تکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو تکمل۔
درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x$$

اگر ہم دیکھ کر بتلا سکیں کہ $x^2 - 2x + 5$ کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x &= \int x^2 \, \mathrm{d}x - \int 2x \, \mathrm{d}x + \int 5 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3\end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو C لکھا جا سکتا ہے یعنی $C_1 + C_2 + C_3 = C$ جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے C لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل C لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x &= \int x^2 \, \mathrm{d}x - \int 2x \, \mathrm{d}x + \int 5 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکملات

بعض اوقات جن تکملات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکونیاتی تماثل کی مدد سے ان تکملات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔ $\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکمل عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماثل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x & \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}\\
&= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C\\
&= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C
\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x & \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\\
&= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C
\end{aligned}$$

□

سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 1 تا سوال 18 میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 1: (ا) $2x$ ، (ب) x^2 ، (ج) x^2-2x+1

جواب: (ا) x^2 ، (ب) $\frac{x^3}{3}$ ، (ج) $\frac{x^3}{3}-x^2+x$

سوال 2: (ا) $6x$ ، (ب) x^7 ، (ج) $x^7 - 6x + 8$

سوال 3: (ا) $-3x^{-4}$ ، (ب) x^{-4} ، (ج) $x^{-4} + 2x + 3$
جواب: (ا) x^{-3} ، (ب) $-\frac{1}{3}x^{-3}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

سوال 4: (ا) $2x^{-3}$ ، (ب) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ ، (ج) $-x^{-3} + x - 1$

سوال 5: (ا) $\frac{1}{x^2}$ ، (ب) $\frac{5}{x^2}$ ، (ج) $2 - \frac{5}{x^2}$
جواب: (ا) $-\frac{1}{x}$ ، (ب) $-\frac{5}{x}$ ، (ج) $2x + \frac{5}{x}$

سوال 6: (ا) $-\frac{2}{x^3}$ ، (ب) $\frac{1}{2x^3}$ ، (ج) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

سوال 7: (ا) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ، (ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ج) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
جواب: (ا) $\sqrt{x^3}$ ، (ب) $\sqrt{x}$ ، (ج) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

سوال 8: (ا) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ ، (ب) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ ، (ج) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

سوال 9: (ا) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ، (ب) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$
جواب: (ا) $x^{2/3}$ ، (ب) $x^{1/3}$ ، (ج) $x^{-1/3}$

سوال 10: (ا) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ، (ب) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ، (ج) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

سوال 11: (ا) $-\pi \sin \pi x$ ، (ب) $3 \sin x$ ، (ج) $\sin \pi x - 3 \sin 3x$
جواب: (ا) $\cos(\pi x)$ ، (ب) $-3 \cos x$ ، (ج) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

سوال 12: (ا) $\pi \cos \pi x$ ، (ب) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ ، (ج) $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$

سوال 13: (ا) $\sec^2 x$ ، (ب) $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ ، (ج) $-\sec^2 \frac{3x}{2}$
جواب: (ا) $\tan x$ ، (ب) $2\tan(\frac{x}{3})$ ، (ج) $-\frac{2}{3}\tan(\frac{3x}{2})$

سوال 14: (ا) $\csc^2 x$ ، (ب) $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$ ، (ج) $1 - 8\csc^2 2x$

سوال 15: (ا) $\csc x \cot x$ ، (ب) $-\csc 5x \cot 5x$ ، (ج) $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$
جواب: (ا) $-\csc x$ ، (ب) $\frac{1}{5}\csc(5x)$ ، (ج) $2\csc(\frac{\pi x}{2})$

سوال 16: (ا) $\sec x \tan x$ ، (ب) $4 \sec 3x \tan 3x$ ، (ج) $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 17: $(\sin x - \cos x)^2$
جواب: $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 18: $(1 + 2\cos x)^2$

تکمل کا حصول
سوال 19 تا سوال 58 میں تکمل حاصل کریں۔ تکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 19: $\int (x+1)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 20: $\int (5 - 6x)\,\mathrm{d}x$

سوال 21: $\int (3t^2 + \frac{t}{2})\,\mathrm{d}t$
جواب: $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 22: $(\frac{t^2}{2} + 4t^3)\,\mathrm{d}t$

سوال 23: $(2x^3 - 5x + 7)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 24: $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,\mathrm{d}x$

سوال 25: $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3})\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 26: $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x)\,\mathrm{d}x$

سوال 27: $\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

سوال 28: $\int x^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x$

سوال 29: $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

سوال 30: $\int \big(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\big)\, \mathrm{d}x$

سوال 31: $\int \big(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\big)\, \mathrm{d}y$
جواب: $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

سوال 32: $\int \big(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\big)\, \mathrm{d}y$

سوال 33: $\int 2x(1 - x^{-3})\, \mathrm{d}x$
جواب: $x^2 + \frac{2}{x} + C$

سوال 34: $\int x^{-3}(x+1)\, \mathrm{d}x$

سوال 35: $\int \frac{t\sqrt{t}+\sqrt{t}}{t^2}\, \mathrm{d}t$
جواب: $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

سوال 36: $\int \frac{4+\sqrt{t}}{t^3}\, \mathrm{d}t$

سوال 37: $\int (-2\cos t)\, \mathrm{d}t$
جواب: $-2\sin t + C$

سوال 38: $\int (-5\sin t)\, \mathrm{d}t$

سوال 39: $7\sin\frac{\theta}{3}\, \mathrm{d}\theta$
جواب: $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$

سوال 40: $\int 3\cos 5\theta\, \mathrm{d}\theta$

سوال 41: $\int (-3\csc^2 x)\, \mathrm{d}x$
جواب: $3\cot x + C$

سوال 42: $\int \big(-\frac{\sec^2 x}{3}\big)\, \mathrm{d}x$

سوال 43: $\int \frac{\csc\theta\cot\theta}{2}\, \mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$

سوال 44: $\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, \mathrm{d}\theta$

سوال 45: $\int (4\sec x\tan x - 2\sec^2 x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $4\sec x - 2\tan x + C$

سوال 46: $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x\cot x)\,\mathrm{d}x$

سوال 47: $\int (\sin 2x - \csc^2 x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$

سوال 48: $\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)\,\mathrm{d}x$

سوال 49: $\int 4\sin^2 y\,\mathrm{d}y$
جواب: $2y - \sin 2y + C$

سوال 50: $\int \frac{\cos^2 y}{7}\,\mathrm{d}y$

سوال 51: $\int \frac{1+\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 52: $\int \frac{1-\cos 6t}{2}\,\mathrm{d}t$

سوال 53: $\int (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ اشارہ۔ $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
جواب: $\tan\theta + C$

سوال 54: $\int (2+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

سوال 55: $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\cot x - x + C$

سوال 56: $\int (1-\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$

سوال 57: $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\cos\theta + \theta + C$

سوال 58: $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

تکملی کلیہ کی تصدیق

سوال 59 تا سوال 64 میں دیے تکملی کلیات کی تصدیق بذریعہ تفرق کریں۔ ان کلیات کا حصول جلد دکھایا جائے گا۔

سوال 59: $\int (7x-2)^3 \, dx = \frac{(7x-2)^4}{28} + C$

سوال 60: $\int (3x+5)^{-2} \, dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C$

سوال 61: $\int \sec^2(5x-1) \, dx = \frac{1}{5}\tan(5x-1) + C$

سوال 62: $\int \csc^2(\frac{x-1}{3}) \, dx = -3\cot(\frac{x-1}{3}) + C$

سوال 63: $\int \frac{1}{(x+1)^2} \, dx = -\frac{1}{x+1} + C$

سوال 64: $\int \frac{1}{(x+1)^2} \, dx = \frac{x}{x+1} + C$

سوال 65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C$$

ب۔ $$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + C$$

ج۔ $$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta = \frac{\sec^3\theta}{3} + C$$

ب۔ $$\int \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + C$$

ج۔ $$\int \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\sec^2\theta$$

سوال 67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int (2x+1)^2 \, dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$$

ب۔ $$\int 3(2x+1)^2 \, dx = (2x+1)^3 + C$$

ج۔ $$\int 6(2x+1)^2 \, dx = (2x+1)^3 + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x+C}$$

ب۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}+C$$

ج۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3+C$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

ا۔ $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

ب۔ $\int g(x)\,\mathrm{d}x$

ج۔ $\int [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

د۔ $\int [-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ہ۔ $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$

و۔ $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ز۔ $\int [x+f(x)]\,\mathrm{d}x$

ح۔ $\int [g(x)-4]\,\mathrm{d}x$

جواب: (ا) $-\sqrt{x}+C$، (ب) $x+C$، (ج) $\sqrt{x}+C$، (د) $-x+C$، (ہ) $x-\sqrt{x}+C$، (و) $-x-\sqrt{x}+C$، (ز) $\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}+C$، (ح) $-3x+C$

سوال 70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x, \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x)$$

5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی تکمل میں سے مخصوص الٹ تفرق منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لئے یہ عمل ضروری ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل صورت کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو تفرقی مساوات[6] کہلاتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

اس مساوات میں x آزاد متغیر جبکہ y تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم x کا ایسا تفاعل y جاننا چاہتے ہیں جس کی نقطہ x_0 پر قیمت y_0 ہو۔اس کو ابتدائی قیمت مسئلہ[7] کہتے ہیں۔ جیسا مثال 5.7 میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدموں میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال 5.7: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول
سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

اگر جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جائے تب t سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

حل: ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=9.8 && \text{تفرقی مساوات}\\
v(0)&0 && \text{ابتدائی معلومات}
\end{aligned}$$

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ $t=0$ پر ساکن جسم کی سمتی رفتار $v=0$ ہے جس کو مختصراً $v(0)=0$ لکھا جاتا ہے۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=9.8 && \text{تفرقی مساوات}\\
\int\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t&=\int 9.8\,\mathrm{d}t && t\ \text{کے لحاظ سے تکمل}\\
v+C_1&=9.8t+C_2 && \text{تکمل کا نتیجہ}\\
v&=9.8t+C && \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں}
\end{aligned}$$

---

[6] differential equation
[7] initial value problem

آخری مساوات کے تحت لمحہ t پر جسم کی رفتار $9.8t + C$ ہو گی جہاں C نا معلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} v &= 9.8t + C \\ 0 &= 9.8(0) + C \qquad\qquad v(0) = 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t \,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$\square$

تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x)$ کا عمومی حل[8] $y = F(x) + C$ دیتا ہے۔ عمومی حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل[9] تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ x_0 پر y کی قیمت y_0 ہے جس کو مختصراً $y(x_0) = y_0$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک نقطہ اور ڈھلوان سے منحنی کا حصول
ایک منحنی جو نقطہ $(1, -1)$ سے گزرتی ہے کا نقطہ (x, y) پر ڈھلوان $3x^2$ ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

حل: ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

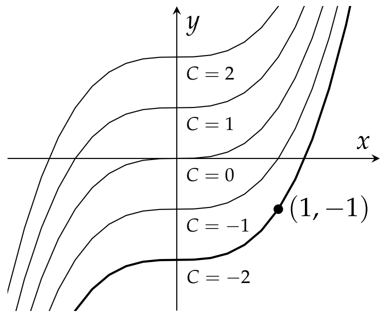
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \qquad\qquad \text{منحنی کی ڈھلوان} \\ y(1) &= -1 \qquad\qquad \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned}$$

ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

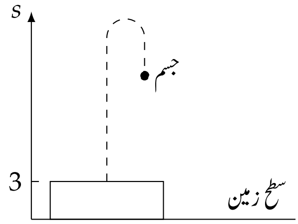
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ \int \frac{dy}{dx}\,dx &= \int 3x^2\,dx \\ y &= x^3 + C \qquad\qquad \text{تکمل کے مستقلوں کی یکجا کیا گیا ہے} \end{aligned}$$

---

[8] general solution
[9] particular solution



شکل 5.1: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال 5.8



شکل 5.2: تصویر کشی برائے مثال 5.9

عمومی حل $y = x^3 + C$ ہے جس کو C کی مختلف قیمتوں کے لئے شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پر کر کے نا معلوم مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \\ C &= -2 \end{aligned}$$

عمومی حل میں C پر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل 5.1 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

□

اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ تکمل لینا ہو گا۔ پہلا تکمل

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + C$$

تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔دوسرا تکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال 5.9: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول

زمین سے $3\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ $t = 0$ پر سیدھا اوپر $160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو بطور t کا تفاعل تلاش کریں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہو گی؟

حل: اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل 5.2) جہاں لمحہ t پر زمین سے جسم کی بلندی کو s سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s متغیر t کا دو گنا قابل تفرق تفاعل ہے لہٰذا جسم کی رفتار اور اسراع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

چونکہ ہمارے ریاضی نمونہ میں اسراع گھٹتے ہوئے s کے رخ عمل کرتی ہے لہٰذا ہمارا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160, \quad s(0) = 3 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ہم تفرقی مساوات کو t کے لحاظ سے تکمل کر کے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + C_1$$

ہم پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C_1 تلاش کرتے ہیں۔

$$160 = -9.8(0) + C_1 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160$$

$$C_1 = 160$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا کلیہ مکمل ہوتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + 160$$

ہم t کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا تکمل لیتے ہوئے s تلاش کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8t + 160)\,\mathrm{d}t$$

$$s = -4.9t^2 + 160t + C_2$$

ہم دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے C_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$3 = -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$

یوں مخصوص حل s کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر t ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لمحہ $t = 3$ پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں $t = 3$ پر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9\,\mathrm{m}$$

□

یک رتبی تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال 5.7 اور مثال 5.8 میں دیکھا گیا، جبکہ دو رتبی تفرق تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال 5.9 میں دیکھا گیا۔ اسی طرح تین رتبی تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہو گی۔ ہر بار الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ابتدائی قیمت درکار ہو گی۔

منحنی حل کا خاکہ

تفرقی مساوات کے حل کی ترسیم کو منحنی حل[10] یا منحنی تکمل[11] کہتے ہیں۔ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ کے حل $y = x^3 + C$ کو شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم $f(x)$ کا الٹ تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرقی مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

مثال 5.10: درج ذیل تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

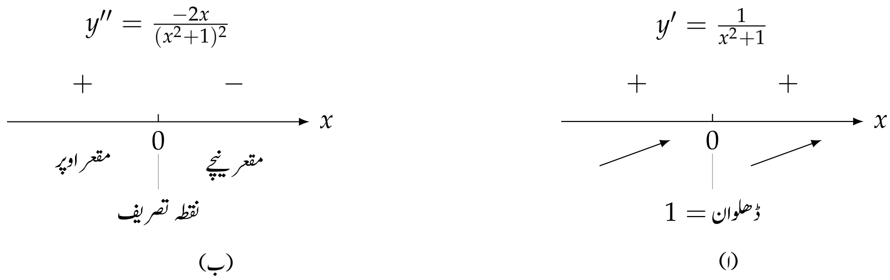
حل: پہلا قدم: y' اور y'': منحنی کی عمومی صورت y' اور y'' پر منحصر ہوتی ہے (حصہ 4.4)۔ ہم $y' = \frac{1}{x^2+1}$ پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق y'' دیتا ہے:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

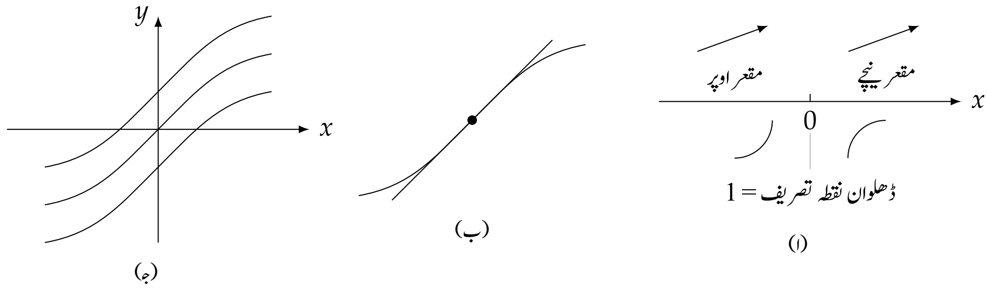
دوسرا قدم: اتار چڑھاو۔ y' کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ہے۔ نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔ چونکہ $y' > 0$ ہے لہٰذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے (شکل 5.3-ا)۔

---

[10] solution curve
[11] integral curve



شکل 5.3: منحنی کی اتار چڑھاو اور مقعر (مثال 5.10)



شکل 5.4: منحنی کی عمومی صورت (مثال 5.10)

تیسرا قدم: مقعر۔ دو گنا تفرق $x = 0$ پر $(+)$ سے تبدیل ہو کر $(-)$ ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا $x = 0$ پر نقطہ تصریف پایا جائے گا (شکل 5.3-ب)۔

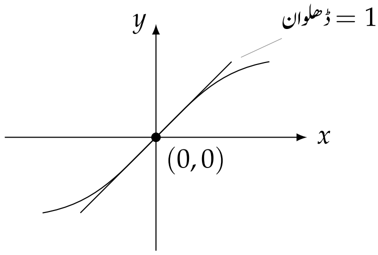
چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کی جھکاو شکل 5.4-ا اور اس کی عمومی صورت شکل 5.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔

پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x \to \mp\infty} y' = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

یوں $x \to \mp\infty$ پر منحنی افقی ہو گی۔

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے لہٰذا y محور کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل 5.4-ج۔ $\square$



شکل 5.5: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال 5.11)

مثال 5.11: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

حل: ہم نے مثال 5.10 میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل 5.4-ج میں دکھایا گیا ہے۔ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ $(0,0)$ سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کی درکار مخصوص حل ہے جس کو شکل 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ □

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ میں تفاعل $f(x)$ کے الٹ تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے، جس پر آگے ایک باب میں غور کیا جائے گا، جبکہ تفاعل $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ کا الٹ تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+x^4}$ کو ہم ترسیمی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

ریاضیاتی نمونہ کشی

ریاضیاتی نمونہ کشی عموماً چار اقدام پر مبنی ہوتا ہے۔ ہم پہلے حقیقی دنیا میں کسی عمل (مثلاً گیند کا گرنا یا کھانسی کے دوران سانس کی نالی کا سکڑنا) کا مشاہدہ کرتے ہوئے اس کے اہم خصوصیات کو ظاہر کرنے والے ریاضی متغیرات کا نظام بناتے ہیں اور معلومات کا ریاضی استعارہ کرتے ہیں۔ اس کے بعد متغیرات کے تعلقات کو (عموماً) موجودہ ریاضی کی زبان میں لکھتے ہوئے نتائج اخذ کرتے ہیں۔ اس کے بعد ریاضیاتی حاصل نتائج کو زیر غور نظام پر لاگو کرتے ہیں۔ آخر میں ہم ریاضی نمونہ سے حاصل نتائج کا مشاہدے کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ پیش گوئی کر سکتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ دیگر نظام پر قابل اطلاق ہو گا۔ بہترین نمونہ وہ ہے جس کے نتائج مشاہدے کے عین مطابق ہوں، جو پیش گوئی کر سکے، جس کا استعمال وسیع اور آسان ہو۔

گیند کے گرنے کو مثال بناتے ہوئے مذکورہ بالا اقدام وضح کرتے ہیں۔ پہلے قدم پر ہم درج ذیل متغیرات اور مشاہدے اکٹھے کرتے ہیں۔
متغیرات:

فاصلہ: s
وقت: t
ابتدائی قیمتیں:
لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 0$ ہیں۔
فرض کیا گیا تعلق: $s = 4.9t^2$
دوسرے قدم پر احصاء استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ریاضی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

$$v = 9.8t$$
$$a = 9.8$$

تیسرے قدم پر نتائج کی تشریح کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے لحاظ سے مفہوم بیان کرتے ہیں۔یوں لمحہ t پر رفتار $9.8t$ میٹر فی سیکنڈ ہو گا جبکہ کسی بھی گرتے ہوئے جسم کی اسراع $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گی۔

آخری قدم پر ہم آزادانہ گرنے والے جسم کی لمحاتی رفتار اور اسراع ناپ کر تصدیق کرتے ہیں کہ ریاضی نمونہ درست نتائج کی پیش گوئی کر سکتا ہے۔

نقل اترنا بذریعہ کمپیوٹر

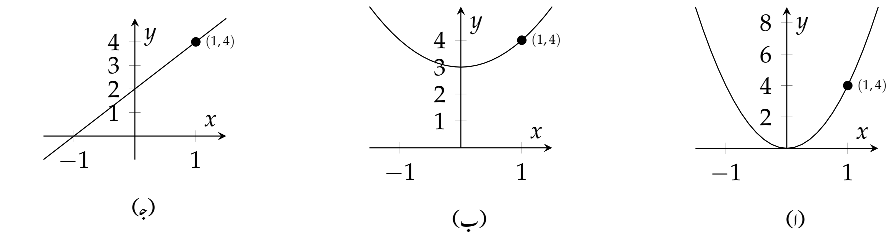
کسی بھی نظام کو سمجھنے کی خاطر ہم مختلف حالات میں اس کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض پیچیدہ نظام کا مشاہدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ (مثلاً جب مشاہدہ بہت مہنگا یا خطرناک ہو یا اس کے لئے بہت وقت درکار ہو۔) ایٹم بم یا سیلابی تباہی یا کہکشاں کا مشاہدہ اس زمرے میں آتے ہیں۔ ان نظام پر غور کرنے کے لئے ہم ریاضی نمونہ کا سہارا لیتے ہیں۔ جہاں نظام کا حساب پیچیدہ یا بہت لمبا ہو وہاں کمپیوٹر کا استعمال سود مند ثابت ہوتا ہے۔ بلند عمارت، دریا پر پل یا برقیاتی ادوار بنانے سے پہلے ان کے نمونوں پر کمپیوٹر کی مدد سے غور کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ ہم کمپیوٹر پر عمل کا نقل اتارتے[12] ہیں۔

سوالات

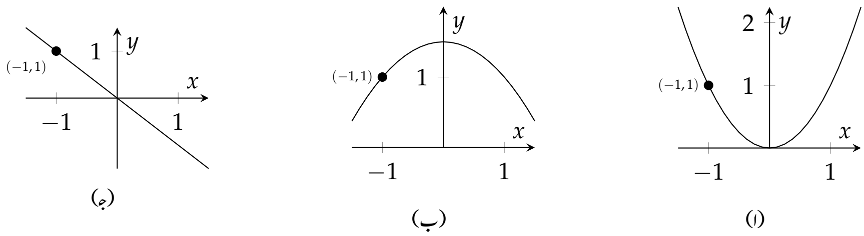
ابتدائی قیمت مسائل
سوال 1: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.6 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$
$$y(1) = 4$$

جواب: (ب)



شکل 5.6: ترسیمات برائے سوال 1



شکل 5.7: ترسیمات برائے سوال 2

سوال 2: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.7 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x$$
$$y(-1) = 1$$

جواب: (ب)

سوال 3 تا سوال 22 میں دیے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 3: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

جواب: $y = x^2 - 7x + 10$

سوال 4: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

simulation[12]

سوال 5: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2} + x, \; x > 0, \quad y(2) = 1$
جواب: $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

سوال 6: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

سوال 7: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$
جواب: $y = 9x^{1/3} + 4$

سوال 8: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

سوال 9: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$
جواب: $s = t + \sin t + 4$

سوال 10: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

سوال 11: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$
جواب: $r = \cos(\pi\theta) - 1$

سوال 12: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

سوال 13: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$
جواب: $v = \frac{1}{2} \sec t + \frac{1}{2}$

سوال 14: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8t + \csc^2 t, \quad v(\frac{\pi}{2}) = -7$

سوال 15: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 2 - 6x, \quad y'(0) = 4, y(0) = 1$
جواب: $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

سوال 16: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad y'(0) = 2, y(0) = 0$

سوال 17: $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = 1, \; r(1) = 1$
جواب: $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

سوال 18: $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3t}{8}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=4} = 3, \; s(4) = 4$

سوال 19: $\frac{d^3 y}{dx^3} = 6,\ y''(0) = -8,\ y'(0) = 0,\ y(0) = 5$
جواب: $y = x^3 - 4x^2 + 5$

سوال 20: $\frac{d^3 \theta}{dt^3} = 0,\ \theta''(0) = -2,\ \theta'(0) = -\frac{1}{2},\ \theta(0) = \sqrt{2}$

سوال 21: $y^{(4)} = -\sin t + \cos t,\ y'''(0) = 7,\ y''(0) = y'(0) = -1,\ y(0) = 0$
جواب: $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

سوال 22: $y^{(4)} = -\cos x + 8\sin 2x,\ y'''(0) = 0,\ y''(0) = y'(0) = 1,\ y(0) = 3$

رفتار سے مقام معلوم کرنا
سوال 23 تا سوال 26 میں رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ اور ابتدائی مقام دیے گیے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 23: $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$
جواب: $s = 4.9t^2 + 5t + 10$

سوال 24: $v = 32t - 2, \quad s(1/2) = 4$

سوال 25: $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$
جواب: $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

سوال 26: $v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

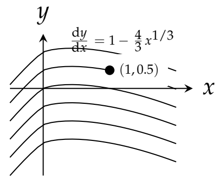
اسراع سے مقام کی تلاش
سوال 27 تا سوال 30 میں اسراع $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ ، ابتدائی رفتار اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 27: $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$
جواب: $s = 16t^2 + 20t + 5$

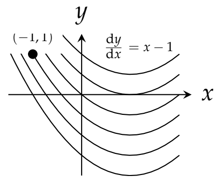
سوال 28: $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

سوال 29: $a = -4\sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$
جواب: $s = \sin(2t) - 3$

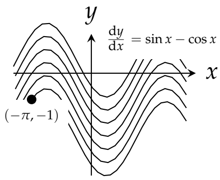
سوال 30: $a = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$



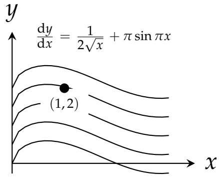
شکل 5.8: منحنیات برائے سوال 33



شکل 5.9: منحنیات برائے سوال 34



شکل 5.10: منحنیات برائے سوال 35



شکل 5.11: منحنیات برائے سوال 36

ترسیم کا حصول

سوال 31: ایسی ترسیم $y = f(x)$ تلاش کریں جو نقطہ $(9, 4)$ سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $3\sqrt{x}$ ہو۔
جواب: $y = 2x^{3/2} - 50$

سوال 32: منحنی $y = f(x)$ نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کا مماس افقی ہے۔ یہ ترسیم $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ کو مطمئن کرتی ہے۔ اس ترسیم کو تلاش کریں۔

منحنیات حل (تکملی منحنیات)

سوال 33 تا سوال 36 میں منحنی حل دکھائے گئے ہیں۔ دیے نقطے پر منحنی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 33: ترسیمات کو شکل 33 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

سوال 34: ترسیمات کو شکل 34 میں دکھایا گیا ہے۔

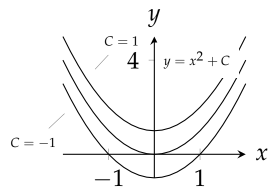
سوال 35: ترسیمات کو شکل 35 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = -\sin x - \cos x - 2$

سوال 36: ترسیمات کو شکل 36 میں دکھایا گیا ہے۔

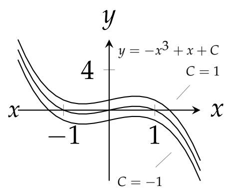
تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچنا مثال 5.10 میں سکھایا گیا۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے سوال 37 تا سوال 40 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کے خاکے بنائیں۔

سوال 37: $\frac{dy}{dx} = 2x$
جواب: شکل 5.12

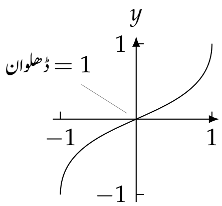
سوال 38: $\frac{dy}{dx} = -2x + 2$



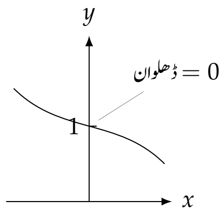
شکل 5.12



شکل 5.13



شکل 5.14



شکل 5.15

سوال 39: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-3x^2$
جواب: شکل 5.13

سوال 40: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$

سوال 41 تا سوال 44 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ مثال 5.10 اور مثال 5.11 کی طرح بنائیں۔

سوال 41: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1; \quad y(0)=0$
جواب: شکل 5.14

سوال 42: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+x^4}, \quad y(0)=1$

سوال 43: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2+1}-1, \quad y(0)=1$
جواب: شکل 5.15

سوال 44: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{x^2+1}, \quad y(0)=0$

عملی استعمال

سوال 45: چاند پر ثقلی اسراع $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ایک پتھر کو چاند پر گہرے شگاف میں گرایا جاتا ہے۔اس کی رفتار اس لمحہ پر کیا ہو گی جب یہ 30 سیکنڈ بعد شگاف کی تہہ تک پہنچتا ہے؟
جواب: $48\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 46: ایک راکٹ سطح زمین سے سیدھا اوپر رخ $20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کی اسراع سے اڑتا ہے۔ ایک منٹ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال 47: $10\,\mathrm{m}$ بلندی سے پانی میں کھودا جاتا ہے۔ پانی میں داخل ہوتے ہوئے لمحے پر آپ کی رفتار کیا ہو گی؟ $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیں۔
جواب: $14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 48: مریخ پر سطح کے نزدیک ثقلی اسراع $3.72\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ایک راکٹ جس کو مریخ کی سطح سے $93\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جائے کس بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 49: آپ اسلام آباد تا لاہور موٹروے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے صفر کر رہے ہیں جب آپ کو سامنے ایک حادثہ نظر آتا ہے۔ آپ یکدم گاڑی کو روکنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گاڑی $75\,\mathrm{m}$ میں مکمل رک جاتی ہے۔ رکنے کی اسراع تلاش کریں۔ اس کا جواب حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔
پہلا قدم: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -k \qquad \text{مستقل } k$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 100, \quad s(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

دوسرا قدم: t کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$ حاصل ہو گا۔(آپ کے جواب میں k پایا جائے گا۔)
تیسرا قدم: k کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $s = 75$ حاصل ہوتا ہے۔
جواب: $t = \frac{100}{k},\ k = \frac{200}{3}\,\mathrm{km\,h^{-2}}$

سوال 50: موٹر سائکل پر باحفاظت صفر کے لئے لازمی ہے کہ آپ $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے $14\,\mathrm{m}$ میں رک سکیں۔ ایسا کرنے کے لئے کتنی اسراع درکار ہو گی؟

سوال 51: ایک ذرہ محوری لکیر پر $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر $s = 0$ اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4$ ہیں۔ لمحہ t پر $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور s تلاش کریں۔
جواب: $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2},\ s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

سوال 52: چاند پر اپالو-15 پرواز کے داؤد سکاٹ نے پر اور ہتھوڑے کو تقریباً $1.25\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک ساتھ گرنے دیا۔ چاند پر ہوا کی غیر موجودگی کی بنا دونوں کے گرنے کی رفتار یکساں تھی۔ بتائیں گرنے کا دورانیہ کتنا تھا؟ گرنے کا دورانیہ دریافت کرنے کے لئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے تفاعل s تلاش کریں جس کا آزاد متغیر t ہو۔ اس کے بعد t کی وہ قیمت تلاش کریں جو $s = 0$ دے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 0,\ s(0) = 1.25 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 53: محددی لکیر پر مستقل اسراع a سے حرکت کرتے ہوئے جسم کے مقام s کی معیاری مساوات درج ذیل ہے

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{5.2}$$

جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار v_0 اور مقام s_0 ہیں۔درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے اس مساوات کو اخذ کریں۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = v_0, \; s(0) = s_0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 54: سیارہ کی سطح کے نزدیک آزادی کے ساتھ گرتے ہوئے جسم کا مقام درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \tag{5.3}$$

جہاں ثقلی اسراع a ، سطح سیارہ سے جسم کی ابتدائی بلندی s_0 اور جسم کی ابتدائی رفتار v_0 ہے۔ چونکہ اسراع نیچے رخ (بلندی s کے الٹ) ہے لہٰذا مساوات میں منفی کی علامت پائی جاتی ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار اوپر رخ ہو تب v_0 مثبت ہو گا اور اگر اس کا رخ نیچے کو ہو تب v_0 منفی ہو گا۔

مساوات 5.2 استعمال کیے بغیر آپ مساوات 5.3 ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ ابتدائی قیمت مسئلہ کیا ہو گا؟ اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.3 کو حاصل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 55: رفتار کی الٹ تفرق سے ہٹاو کا تعین۔

ا. فرض کریں محور s پر ایک جسم کی رفتار $\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3$ ہے۔

1. اگر $t = 0$ پر $s = 5$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔
2. اگر $t = 0$ پر $s = -2$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔
3. اگر $t = 0$ پر $s = s_0$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

ب. فرض کریں محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔کیا یہ درست ہے کہ $\frac{ds}{dt}$ کا الٹ تفرق جانتے ہوئے دورانیہ $t = a$ تا $t = b$ کے لئے آپ جسم کا ہٹاو جان سکتے ہیں اگرچہ ان دونوں لمحات پر آپ کو جسم کا ہٹاو معلوم نہیں ہے؟ اپنے جوان کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) $33.2\,\mathrm{m}$ ، $33.2\,\mathrm{m}$ ، $33.2\,\mathrm{m}$ ، (ب) درست

سوال 56: یکتائی حل

اگر قابل تفرق تفاعل $y = F(x)$ اور $y = G(x)$ وقفہ I پر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل ہوں تب کیا I میں ہر x کے لئے $F(x) = G(x)$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔زنجیری قاعدہ کاالٹ اطلاق

بعض اوقات انجانے تکمل میں متغیرات کی تبدیلی سے جانا پہچانا تکمل حاصل ہوتا ہے۔ تکمل کے اس طریقہ کو ترکیب بدل کہتے ہیں۔ تکمل کے حصول کا یہ ایک اہم ترین طریقہ ہے۔ آئیں اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

عمومی طاقتی قاعدہ کی تکملی صورت

جب u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور n ناطق عدد ہو جس کی قیمت -1 نہ ہو تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{u^{n+1}}{n+1}\Big)=u^n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

اس مساوات کو ایک دوسری نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $u^n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا ایک الٹ تفرق $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int\Big(u^n\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)\,\mathrm{d}x=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

اس مساوات کے بائیں ہاتھ کو عموماً درج ذیل سادہ تفرقی روپ میں لکھا جاتا ہے

$$\int u^n\,\mathrm{d}u$$

جہاں دونوں $\mathrm{d}x$ کو آپس میں کاٹا گیا ہے۔درج بالا دو مساوات کو ملا کر درج ذیل ملتا ہے

$$\int u^n\,\mathrm{d}u=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C,\qquad\qquad (n\neq -1,\ \text{ناطق } n) \tag{5.4}$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرق ہے۔

مساوات 5.4 حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے، اگرچہ یہ متغیر اس کلیہ میں نہیں پایا جاتا ہے اور اس کی علامت اہم نہیں ہے۔ ہم اس متغیر کو کسی بھی علامت مثلاً θ ، t ، y وغیرہ سے ظاہر کر سکتے تھے۔ مساوات 5.4 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھ سکیں

$$\int u^n\,\mathrm{d}u,\qquad (n\neq -1)$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہو اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرق ہو تب اس کا حل $\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ ہو گا۔

مثال 5.12: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int (x+2)^5 \,\mathrm{d}x$$

حل: ہم اس تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\int u^n \,\mathrm{d}u$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم $u = x + 2$ لیتے ہیں لہٰذا $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ ہو گا۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int (x+2)^5 \,\mathrm{d}x &= \int u^5 \,\mathrm{d}u && u = x+2,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\
&= \frac{u^6}{6} + C && \text{مساوات 5.4 میں } n = 5 \\
&= \frac{(x+2)^6}{6} + C && u = x+2 \text{ واپس پر کریں}
\end{aligned}$$

□

مثال 5.13: $u = x^2 + 2x - 3$ لیتے ہوئے $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d} = 2(x+1)\,\mathrm{d}x$ اور $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = (x+1)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔ یوں تکمل

$$\int (x^2+2x-3)^2 (x+1)\,\mathrm{d}x$$

کو ترکیب بدل سے حل کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\int (x^2+2x-3)^2(x+1)\,\mathrm{d}x &= \int u^2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int u^2 \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6}u^3 + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{6}(x^2+2x-3) + C && u \text{ بدلیں}
\end{aligned}$$

آخری قدم پر u کی قیمت واپس پر کی گئی ہے۔ □

مثال 5.14:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 t \cos t \, \mathrm{d}t &= \int u^4 \, \mathrm{d}u && u = \sin t,\ \mathrm{d}u = \cos t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{u^5}{5} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{\sin^5 t}{5} + C && \text{بدلیں } u
\end{aligned}$$

□

ترکیب بدل کی کامیابی اس بات پر منحصر ہے کہ ہم ایسا بدل تلاش کر سکیں جو مشکل تکمل کو جانے پہچانے تکمل میں تبدیل کرتا ہو۔بعض اوقات پہلے بدل کے بعد دوسرا اور تیسرا بدل بھی درکار ہوتا ہے یا ہم کوئی دوسرا بدل استعمال کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات کئی مختلف بدل قابل استعمال ہوں گے (اگلا مثال)۔

مثال 5.15: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{2z \, \mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

حل: ہم متکمل کے مشکل ترین حصے کی سادہ صورت تلاش کرنے کی غرض سے $u = z^2 + 1$ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z \, \mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}} && u = z^2 + 1,\ \mathrm{d}u = 2z \, \mathrm{d}z \\
&= \int u^{-1/3} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{3}{2} u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2} (z^2 + 1)^{3/2} + C && \text{کا بدل } z^2 + 1 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

مثال 5.16:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + y^2} \cdot 2y \, \mathrm{d}y &= \int u^{1/2} \, \mathrm{d}u && u = 1 + y^2,\ \mathrm{d}u = 2y \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{2}{3} (1 + y^2)^{3/2} + C && \text{کی جگہ } 1 + y^2 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

$\square$

مثال 5.17:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4t-1}\,\mathrm{d}t &= \int u^{1/2}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}u && u=4t-1,\ \mathrm{d}u=4\,\mathrm{d}t,\ \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}+C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u\\
&= \frac{1}{6}u^{3/2}+C\\
&= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2}+C && \text{کی جگہ } 4t-1 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

$\square$

تکونیاتی تفاعل

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $\sin u$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ زنجیری قاعدہ ہمیں $\sin u$ کا تفرق دیتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u=\cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

اسی مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sin u$ مضرب $\cos u\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا الٹ تفرق ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int\Big(\cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)\,\mathrm{d}x=\sin u+C$$

بائیں ہاتھ دونوں $\mathrm{d}x$ کو باضابطہ کاٹ کر درج ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\int\cos u\,\mathrm{d}u=\sin u+C \tag{5.5}$$

مساوات 5.5 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو $\int\cos u\,\mathrm{d}u$ روپ میں لکھ سکیں، ہم u کے لحاظ سے اس کا تکمل لیتے ہوئے $\sin u+C$ حاصل کریں گے۔

مثال 5.18:

$$
\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,\mathrm{d}\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u && u = 7\theta+5, \mathrm{d}u = 7\,\mathrm{d}\theta, \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C && u \text{ کی جگہ } 7\theta+5 \text{ پر کریں}
\end{aligned}
$$

□

مساوات 5.5 کی جوڑی مساوات درج ذیل ہے جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے۔

$$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C \tag{5.6}$$

مثال 5.19:

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sin(x^3)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x^3)\cdot x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u && u = x^3, \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x, \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}(-\cos u + C') && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C && u = x^3 \text{ اور } \frac{C'}{3} = C \text{ پر کریں}
\end{aligned}
$$

□

قابل تفرق تفاعل u کے لئے زنجیری قاعدہ کی مدد سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C \tag{5.7}$$

$$\int \csc^2 u\,\mathrm{d}u = -\cot u + C \tag{5.8}$$

$$\int \sec u\tan u\,\mathrm{d}u = \sec u + C \tag{5.9}$$

$$\int \csc u\cot u\,\mathrm{d}u = -\csc u + C \tag{5.10}$$

ہر کلیہ میں u حقیقی متغیر کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کلیہ کو پرکھنے کے لئے دائیں ہاتھ کا u کے لحاظ تفرق حاصل کریں۔ ایسا کرنے سے بائیں ہاتھ کا متکمل حاصل ہو گا۔

مثال 5.20:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int \sec^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta && \sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta}\\
&= \int \sec^2 u\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u && u = 2\theta, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\tan u + C && \text{مساوات 5.7}\\
&= \frac{1}{2}\tan 2\theta + C && u \text{ کی جگہ } 2\theta \text{ پر کریں}
\end{aligned}
$$

□

تکمل کا ترکیب بدل

مذکورہ بالا تمام مثالیں درج ذیل عمومی کلیہ کی انفرادی مثالیں ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(u)\,\mathrm{d}u && u = g(x),\ \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= F(u) + C && f(u) \text{ کا الٹ تفرق } F(u)\\
&= F(g(x)) + C && u \text{ کی جگہ } g(x) \text{ پر کریں}
\end{aligned}
$$

یہ تین اقدام تکمل کا ترکیب بدل ہیں۔ یہ ترکیب اس لئے کام کرتی ہے کہ $f(g(x))\cdot g'(x)$ کا الٹ تفرق $F(g(x))$ ہے جہاں f کا الٹ تفرق F ہے:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) &= F'(g(x))\cdot g'(x) && \text{زنجیری قاعدہ}\\
&= f(g(x))\cdot g'(x) && \text{چونکہ } F' = f \text{ ہے}
\end{aligned}
$$

ترکیب بدل پر مزید غور اگلے ابواب میں کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 1 تا سوال 12 میں دیا گیا بدل استعمال کرتے ہوئے غیر قطعی تکمل کو معیاری روپ میں لاتے ہوئے حل کریں۔

سوال 1: $\int \sin 3x \, \mathrm{d}x, \quad u = 3x$
جواب: $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

سوال 2: $\int x \sin(2x^2) \, \mathrm{d}x, \quad u = 2x^2$

سوال 3: $\int \sec 2t \tan 2t \, \mathrm{d}t, \quad u = 2t$
جواب: $\frac{1}{2}\sec 2t + C$

سوال 4: $\int (1 - \cos \frac{t}{2})^2 \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2}$

سوال 5: $\int 28(7x-2)^{-5} \, \mathrm{d}x, \quad u = 7x - 2$
جواب: $-(7x-2)^{-4} + C$

سوال 6: $\int x^3(x^4-1)^2 \, \mathrm{d}x, \quad u = x^4 - 1$

سوال 7: $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} \, \mathrm{d}r, \quad u = 1 - r^3$
جواب: $-6(1-r^3)^{1/2} + C$

سوال 8: $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y) \, \mathrm{d}y, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

سوال 9: $\int \sqrt{x} \sin^2(x^{3/2}-1) \, \mathrm{d}x, \quad u = x^{3/2} - 1$
جواب: $\frac{1}{3}(x^{3/2}-1) - \frac{1}{6}\sin(2x^{3/2}-2) + C$

سوال 10: $\int \frac{1}{x^2}\cos^2(\frac{1}{x}) \, \mathrm{d}x, \quad u = -\frac{1}{x}$

سوال 11: $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta \, \mathrm{d}\theta, \quad u = \cot 2\theta, \quad u = \csc 2\theta$
جواب: $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C, \quad -\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

سوال 12: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+8}}, \quad u = 5x + 8, \quad u = \sqrt{5x+8}$

سوال 13 تا سوال 46 میں تکمل حل کریں۔

سوال 13: $\int \sqrt{3-2s}\,\mathrm{d}s$
جواب: $-\frac{1}{3}(3-2s)^{3/2}+C$

سوال 14: $\int (2x+1)^3\,\mathrm{d}x$

سوال 15: $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,\mathrm{d}s$
جواب: $\frac{2}{5}(5s+4)^{1/2}+C$

سوال 16: $\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$

سوال 17: $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{5/4}+C$

سوال 18: $\int 8\theta\sqrt[3]{\theta^2-1}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19: $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\,\mathrm{d}y$
جواب: $-\frac{1}{3}(7-3y^2)^{3/2}+C$

سوال 20: $\int \frac{4y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2y^2+1}}$

سوال 21: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $(-\frac{2}{1+\sqrt{x}})+C$

سوال 22: $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

سوال 23: $\int \cos(3z+4)\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{3}\sin(3z+4)+C$

سوال 24: $\int \sin(8z-5)\,\mathrm{d}z$

سوال 25: $\int \sec^2(3x+2)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{3}\tan(3x+2)+C$

سوال 26: $\int \tan^2 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

سوال 27: $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{2} \sin^6(\frac{x}{3}) + C$

سوال 28: $\int \tan^7 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x$

سوال 29: $\int r^2 (\frac{r^3}{18} - 1)^5 \, \mathrm{d}r$
جواب: $(\frac{r^3}{18} - 1)^6 + C$

سوال 30: $\int r^4 (7 - \frac{r^5}{10})^3 \, \mathrm{d}r$

سوال 31: $\int x^{1/2} \sin(x^{3/2} + 1) \, \mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{2}{3} \cos(x^{3/2} + 1) + C$

سوال 32: $\int x^{1/3} \sin(x^{4/3} - 8) \, \mathrm{d}x$

سوال 33: $\int \sec(v + \frac{\pi}{2}) \tan(v + \frac{\pi}{2}) \, \mathrm{d}v$
جواب: $\sec(v + \frac{\pi}{2}) + C$

سوال 34: $\int \csc(\frac{v-\pi}{2}) \cot(\frac{v-\pi}{2}) \, \mathrm{d}v$

سوال 35: $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)} \, \mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{2\cos(2t+1)} + C$

سوال 36: $\int \frac{6 \cos t}{(2+\sin t)^3} \, \mathrm{d}t$

سوال 37: $\int \sqrt{\cot y} \csc^2 y \, \mathrm{d}y$
جواب: $-\frac{2}{3} (\cot^3 y)^{1/2} + C$

سوال 38: $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}} \, \mathrm{d}z$

سوال 39: $\int \frac{1}{t^2} \cos(\frac{1}{t} - 1) \, \mathrm{d}t$
جواب: $-\sin(\frac{1}{t} - 1) + C$

سوال 40: $\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t} + 3) \, \mathrm{d}t$

سوال 41: $\int \frac{1}{\theta^2} \sin \frac{1}{\theta} \cos \frac{1}{\theta}\, \mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{\sin^2(\frac{1}{\theta})}{2} + C$

سوال 42: $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\, \mathrm{d}\theta$

سوال 43: $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)\, \mathrm{d}s$
جواب: $\frac{(s^3+2s^2-5s+5)^2}{2} + C$

سوال 44: $\int (\theta^4-2\theta^2+8\theta-2)(\theta^3-\theta+2)\, \mathrm{d}\theta$

سوال 45: $\int t^3(1+t^4)^3\, \mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{16}(1+t^4)^4 + C$

سوال 46: $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\, \mathrm{d}x$

قدم با قدم تکمل کی سادہ روپ کا حصول

اگر آپ تکمل کی سادہ روپ کے لئے درکار بدل نہ جانتے ہوں تب تکمل کی سادہ روپ قدم با قدم تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ متکمل کو دیکھ کر اندازے سے بدل منتخب کرتے ہوئے متکمل کو کچھ سادہ بنائیں۔ اگلے قدم میں اس کو مزید سادہ بنانے کی کوشش کریں۔ بدل منتخب کرنے کی صلاحیت اس طرز کے سوالات حل کرنے سے بڑھتی ہے۔ اگلے دو سوالات حل کرنے سے آپ اس طریقے کو سمجھ پائیں گے۔

سوال 47:

$$\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\, \mathrm{d}x$$

ا. $u=\tan x$ پر کرکے $v=u^3$ اور اس کے بعد $w=2+v$ پر کریں۔

ب. $u=\tan^3 x$ کے بعد $v=2+u$ پر کریں۔

ج. $u=2+\tan^3 x$ پر کریں۔

جواب: (الف) $-\frac{6}{2+\tan^3 x}+C$، (ب) $-\frac{6}{2+\tan^3 x}+C$، (ج) $-\frac{6}{2+\tan^3 x}+C$

سوال 48:

$$\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\,\sin(x-1)\cos(x-1)\, \mathrm{d}x$$

ا. $u = x - 1$ پر کرنے کے بعد $v = \sin u$ اور اس کے بعد $w = 1 + v^2$ پر کریں۔

ب. $u = \sin(x - 1)$ کے بعد $v = 1 + u^2$ پر کریں۔

ج. $u = 1 + \sin^2(x - 1)$ پر کریں۔

اگلے دو تکملات حل کریں۔

سوال 49: $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,\mathrm{d}r$

جواب: $\frac{1}{6}\sin\sqrt{3(2r-1)^2+6} + C$

سوال 50: $\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,\mathrm{d}\theta$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال 51 تا سوال 58 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 51: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 12t(3t^2-1)^3, \quad s(1) = 3$

جواب: $s = \frac{1}{2}(3t^2-1)^4 - 5$

سوال 52: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x(x^2+8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

سوال 53: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 8\sin^2(t + \frac{\pi}{12}), \quad s(0) = 8$

جواب: $s = 4t - 2\sin(2t + \frac{\pi}{6}) + 9$

سوال 54: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta), \quad r(0) = \frac{\pi}{8}$

سوال 55: $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -4\sin(2t - \frac{\pi}{2}), \quad s'(0) = 100,\ s(0) = 0$

جواب: $s = \sin(2t - \frac{\pi}{2}) + 100t + 1$

سوال 56: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 4\sec^2 2x\tan 2x, \quad y'(0) = 4,\ y(0) = -1$

سوال 57: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی رفتار تمام t کے لئے $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6\sin 2t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ ہو تب $t = \frac{\pi}{2}$ سیکنڈ پر s کیا ہو گا؟

جواب: $6\,\mathrm{m}$

سوال 58: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی اسراع تمام t کے لئے $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \pi^2\cos\pi t\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں تب $t = 1$ سیکنڈ پر s کیا ہو گا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 59: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ہم $2\sin x\cos x$ کا تکمل تین مختلف طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

ا.

$$\begin{aligned} \int 2\sin x\cos x\,dx &= \int 2u\,du \qquad\qquad u = \sin x \\ &= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1 \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} \int 2\sin x\cos x\,dx &= \int -2u\,du \qquad\qquad u = \cos x \\ &= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2 \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned} \int 2\sin x\cos x\,dx &= \int \sin 2x\,dx \qquad\qquad 2\sin x\cos x = \sin 2x \\ &= -\frac{\cos 2x}{2} + C_3 \end{aligned}$$

کیا تینوں طریقے درست ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 60: $u = \tan x$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\int \sec^2 x\tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

جبکہ $u = \sec x$ پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int \sec^2 x\tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

کیا دونوں تکمل درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

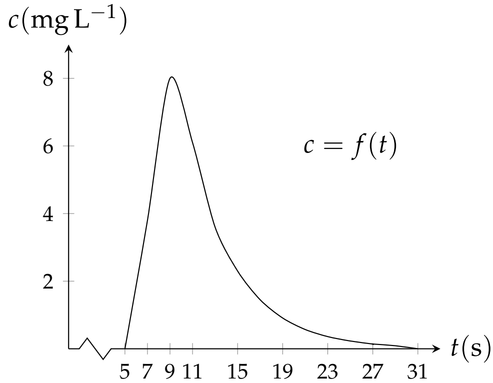
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ

اس حصہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح عملی سوالات ہمیں متناہی مجموعہ[13] سے تخمین کے حصول تک لے کر جاتے ہیں۔

[13] finite sum

جدول 5.3: رقت رنگ کے ترکیب کے نتائج۔

لمحہ	کثافت رنگ	لمحہ	کثافت رنگ
5	0.0	19	0.91
7	3.8	21	0.57
9	8.0	23	0.36
11	6.1	25	0.23
13	3.6	27	0.14
15	2.3	29	0.09
17	1.45	31	0.00



شکل 5.16: جدول میں دی گئی رنگ کی کثافت بالمقابل وقت کو ترسیم کیا گیا ہے۔

رقبہ اور اخراج قلب

فی منٹ جتنے لٹر خون آپ کا قلب خارج کرتا ہے اس کو اخراج قلب کہتے ہیں۔ سکون کی حالت میں کسی شخص کا اخراج قلب 5 یا 6 لٹر فی منٹ ہو سکتا ہے۔ سخت ورزش کے دوران یہ شرح 30 لٹر فی منٹ ہو سکتی ہے۔ بیماری بھی اس شرح کو بہت زیادہ متاثر کر سکتی ہے۔

اخراج قلب کی پیمائش کے لئے طبیب صفحہ 321 پر سوال 25 میں دیا گیا طریقہ اختیار کرنے کی بجائے رقت رنگ کی ترکیب استعمال کر سکتا ہے۔ رقت رنگ کی ترکیب میں قلب کے قریب مرکزی داخلی رگ میں 5 mg سے 10 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا جاتا ہے جو قلب کے دائیں حصے میں داخل ہو کر کلیجا سے ہوتے ہوئے قلب کے بائیں حصہ سے مرکزی شریان میں خارج کیا جاتا ہے جہاں ہر چند سیکنڈ بعد گزرتے ہوئے خون میں رنگ کی کثافت ناپی جاتی ہے۔ جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک تندرست شخص جو آرام کر رہا ہو کے نتائج دکھائے گئے ہیں جس کو 5.6 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا گیا ہے۔ خون کی دوبارہ گردش کو مد نظر رکھتے ہوئے نتائج پیش کیے گئے ہیں۔

مریض کے قلب کا اخراج معلوم کرنے کی خاطر ہم رنگ کی مقدار کو شکل 5.16 میں دیے کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبے سے تقسیم کر کے 60 سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\text{اخراج قلب} = \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{منحنی کے نیچے رقبہ}} \times 60 \tag{5.11}$$

اس مساوات میں مختلف مقداروں کی اکائیوں پر نظر ڈال کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات درست جواب دے گی۔ رنگ کی مقدار mg میں ہے جبکہ منحنی کے نیچے رقبہ کی اکائی $\mathrm{mg\,L^{-1}} \times \mathrm{s}$ ہو گی لہٰذا درج بالا مساوات خون کا اخراج لٹر فی منٹ میں دے گا۔

$$\frac{\mathrm{mg}}{\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{s}} \cdot \frac{\text{سیکنڈ}}{\text{منٹ}} = \frac{\text{لٹر}}{\text{منٹ}}$$

درج ذیل مثال میں ہم شکل 5.16 میں دیے منحنی کے نیچے رقبہ کی تخمینی قیمت تلاش کرتے ہوئے مریض کا اخراج قلب معلوم کرتے ہیں۔

مثال 5.21: جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک مریض کے ترکیب رقت رنگ کے نتائج دیے گئے ہیں۔ اس کا اخراج قلب تلاش کریں۔

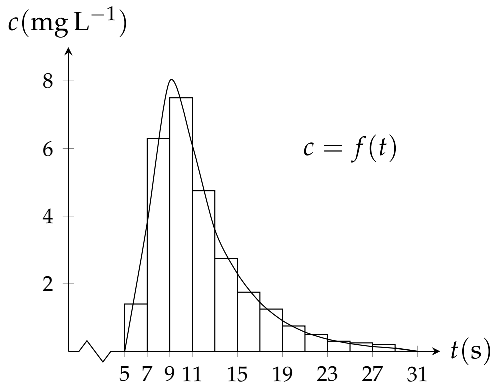
حل: رنگ کی مقدار $5.6\,\mathrm{mg}$ ہے لہٰذا ہمیں صرف منحنی کے نیچے رقبہ چاہیے۔ ہم رقبہ تلاش کرنے کا ایسا کوئی کلیہ نہیں جانتے ہیں جو اس قسم کی ناہموار منحنی کے لئے قابل استعمال ہو۔ البتہ ہم منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیلی حصوں میں تقسیم کر کے تمام مستطیلوں کے رقبے جمع کرتے ہوئے رقبے کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں (شکل 5.17)۔ ہر مستطیل کا کچھ حصہ اصل رقبے سے کم رقبہ گھیرتا ہے جبکہ اس کا باقی حصہ اصل رقبے سے زیادہ رقبہ گھیرتا ہے۔ ہم نے تمام مستطیلوں کی چوڑائی 2 منتخب کی ہے۔ ایسا کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ ہر مستطیل کی چوڑائی مختلف منتخب کی جا سکتی ہے۔ ہر مستطیل کا قد مستطیل کے چوڑائی کے دوران تفاعل کی تقریباً اوسط قیمت ہو گی۔ ہم تمام مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{منحنی کے نیچے رقبہ} &\approx f(6)\cdot 2 + f(8)\cdot 2 + f(10)\cdot 2 + \cdots + f(28)\cdot 2 + f(30)\cdot 2 \\
&\approx (1.4)(2) + (6.3)(2) + (7.5)(2) + \cdots + (0.1)(2) + (0.045)(2) \\
&\approx (28.8)(2) = 57.6\,\mathrm{mg\,s\,L^{-1}}
\end{aligned}$$

رنگ کی مقدار کو اس رقبہ سے تقسیم کرتے ہوئے 60 سے ضرب دینے سے اخراج قلب حاصل ہو گا۔

$$\text{اخراج قلب} \approx \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{رقبہ}} \times 60 = \frac{5.6}{57.6} \times 60 \approx 5.8\,\mathrm{L\,min^{-1}}$$

مریض کا اخراج قلب تقریباً $5.8\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ □



شکل 5.17: منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیل رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

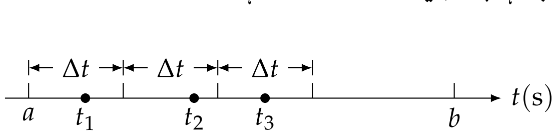
طے شدہ فاصلہ

فرض کریں ہمیں ایک گاڑی کی رفتار تفاعل $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ معلوم ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقفہ $a \le t \le b$ یہ گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اگر ہمیں f کا الٹ تفرق F معلوم ہو تب تب ہم گاڑی کا مقام تفاعل $s = F(t) + C$ تلاش کر سکتے ہیں جس کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی دورانیے میں طے شدہ فاصل تلاش کیا جا سکتا ہے (سوال 55)۔

رفتار تفاعل $v = f(t)$ کا الٹ تفرق نہ جانتے ہوئے طے شدہ فاصلے کو مجموعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔ہم $[a, b]$ کو چھوٹے چھوٹے ذیلی وقفوں میں یوں تقسیم کرتے ہیں کہ ہر ذیلی وقفے میں رفتار کی قیمت تقریباً غیر متغیر ہو۔ہم ہر ذیلی وقفہ کے دوران فاصلہ درج ذیل کلیہ سے اخذ کرتے ہوئے

$$\text{فاصلہ} = \text{رفتار} \times \text{وقت} = f(t) \cdot \Delta t$$

وقفہ $[a, b]$ کے تمام ذیلی وقفوں میں طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ لیتے ہوئے کل فاصلہ دریافت کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کو درج ذیل ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جہاں ہر ذیلی وقفہ Δt کے برابر ہے۔



پہلے ذیلی وقفے پر t_1 ایک نقطہ ہے۔ اگر یہ ذیلی وقفہ نہایت چھوٹا ہو تب اس دوران رفتار میں تبدیلی قابل نظر انداز ہو گی۔یوں اس دوران گاڑی تقریباً $f(t_1)\Delta t$ فاصلہ طے کرے گی۔ اگر t_2 دوسرے ذیلی وقفے میں ایک نقطہ ہو تب اس دوران گاڑی $f(t_2)\Delta t$ فاصل طے کرے گی۔ اسی طرح باقی تمام ذیلی وقفوں کے دوران طے شدہ فاصل بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں حاصل تمام ذیلی وقفوں کے دوران

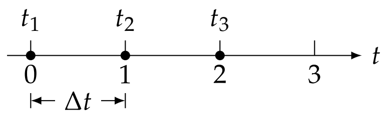
طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ تقریباً $[a, b]$ کے دوران کل طے فاصل D ہو گا۔ اگر ہم n عدد ذیلی وقفے لیں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t \tag{5.12}$$

آئیں مثال 5.9 کے نتائج پر اس کلیہ کو استعمال کریں۔ ایک گولا کو سیدھا اوپر رخ پھینکا گیا۔ لمحہ t پر اس کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ تھی۔ ابتدائی 3 سیکنڈوں میں گولا $3\,\mathrm{m}$ کی ابتدائی بلندی سے $438.9\,\mathrm{m}$ کی بلندی تک پہنچا۔ یوں ابتدائی تین سیکنڈوں میں گولے نے $438.9\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کیا۔

مثال 5.22: سیدھا اوپر رخ پھینکے گئے گولے کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ ہے۔ مجموعہ کا ترکیب استعمال کرتے ہوئے ابتدائی 3 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ کا تخمینہ لگائیں۔ بالکل ٹھیک جواب $435.9\,\mathrm{m}$ ہے۔

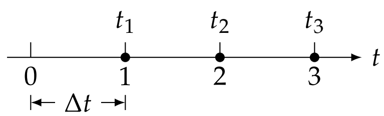
حل: ہم ذیلی وقفوں کی مختلف تعداد اور ذیلی وقفوں میں مختلف نقطوں کی انتخاب کے لئے اس مسئلے کو حل کرتے ہیں۔
ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہو گی۔



f کی قیمت 0 ، 1 اور 2 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t && (\text{مساوات } 5.12)\\
&\approx [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1)\\
&\approx 450.6
\end{aligned}$$

ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہو گی۔



جدول 5.4: ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہوتا ہے (مثال 5.22)۔

ذیلی وقفوں کی تعداد	ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی	بائیں سر نقطی مجموعہ	دائیں سر نقطی مجموعہ
3	1	450.6	421.2
6	0.5	443.25	428.55
12	0.25	439.58	432.23
24	0.125	437.74	434.06
48	0.0625	436.82	434.98
96	0.03125	436.36	435.44
192	0.015625	436.13	435.67

f کی قیمت 1 ، 2 اور 3 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t \\ &\approx [160-9.8(1)](1) + [160-9.8(2)](1) + [160-9.8(3)](1) \\ &\approx 421.2 \end{aligned} \tag{مساوات 5.12}$$

کل 6 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے پہلے بائیں اور بعد میں دائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\frac{1}{2}$ ہو گی۔ نتائج درج ذیل ہیں۔

$$D \approx 443.25 \qquad \text{بائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں}$$
$$D \approx 428.55 \qquad \text{دائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 6 ذیلی وقفے لیتے ہوئے بہتر جواب حاصل ہوتے ہیں۔ مزید زیادہ ذیلی وقفے لینے سے جواب میں مزید بہتری پیدا ہوتی ہے۔ جدول 5.4 میں چند نتائج دکھائے گئے ہیں۔

جدول 5.4 سے ہم دیکھتے ہیں کہ بائیں سر نقطی مجموعہ اصل جواب تک اوپر سے پہنچتا ہے جبکہ دائیں سر نقطی مجموعہ اصل جواب تک نیچے سے پہنچتا ہے۔ حقیقت میں جواب ان دونوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جدول میں دیا آخری مجموعہ اور اصل جواب میں فرق درج ذیل ہے۔

$$\text{فی صد خلل} = \frac{435.9 - 435.67}{435.9} \times 100 = 0.05\,\%$$

$\square$

آپ مثال 5.21 اور مثال 5.22 میں مشابہت دیکھ سکتے ہیں۔ دونوں میں تفاعل f ایک بند وقفہ میں معین ہے جس کی وقفوں پر قیمت کو وقفہ سے ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ ہم اسی ترکیب کو حجم کی تلاش کے لئے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

حجم

درج ذیل دو مثالوں میں ہم متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کرتے ہیں۔

مثال 5.23: ایک ٹھوس جسم $x = \mp 2$ ، $y = \mp\sqrt{9 - x^2}$ اور $z = \mp\sqrt{9 - x^2}$ سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہیں۔ اس کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کریں (شکل 5.18-الف)۔

حل: ہم x محور پر وقفہ $[-2, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطے پر جسم کا رقبہ عمودی تراش ایک چکور ہو گا (شکل 5.18-ب) جہاں ذیلی وقفوں کے بائیں سر $x = -2, -1, 0, 1$ پر پائے جاتے ہیں۔ہم ایسے ہر چکور پر فرضی 1 موٹائی کا تختہ بناتے ہیں (شکل 5.18-ج)۔ ان تمام تختوں کے حجم کا مجموعہ اندازاً اصل جسم کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

ایک تختے کا حجم ہم $H = Sh$ سے اخذ کر سکتے ہیں جہاں H ، S اور h بالترتیب تختے کا حجم، رقبہ عمودی تراش اور موٹائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ x پر تختے کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = (2\sqrt{9 - x^2})^2 = 4(9 - x^2)$ ہے جبکہ تختے کی موٹائی 1 ہے لہٰذا چار تختوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H_4 &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + S(x_4)\Delta x \\
&= 4(9 - x_1^2)(1) + 4(9 - x_2^2)(1) + 4(9 - x_3^2)(1) + 4(9 - x_4^2)(1) \\
&= 4[(9 - (-2)^2]) + (9 - (-1)^2) + (9 - (0)^2) + (9 - (1)^2)] \\
&= 4[(9 - 4) + (9 - 1) + (9 - 0) + (9 - 1)] \\
&= 4[36 - 6] = 120
\end{aligned}$$

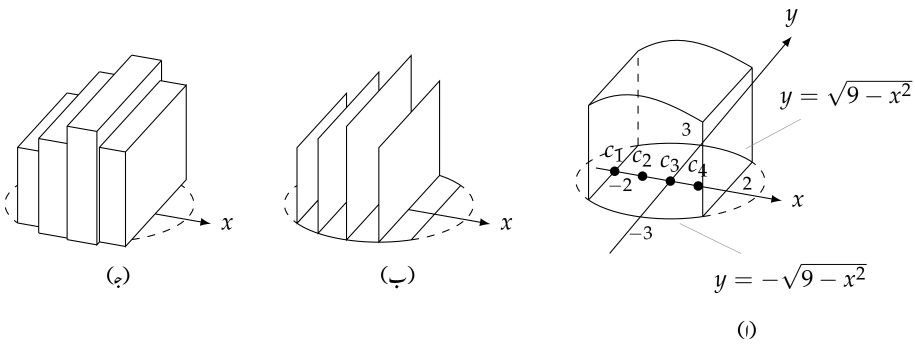
یہ جواب جسم کے اصل حجم $H = \frac{368}{3} \approx 122.67$ کے بہت نزدیک ہے۔ جواب میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$= \frac{|H - H_4|}{H} = \frac{\left|\frac{368}{3} - 120\right|}{\frac{368}{3}} \approx 2.2\,\%$$

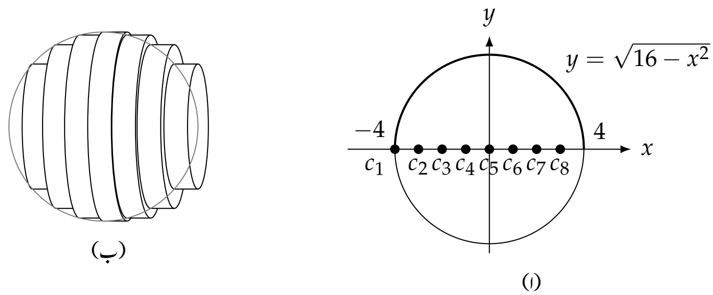
وقفہ $[-2, 2]$ پر ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے تختوں کی موٹائی کم ہو گی جبکہ حاصل حجم زیادہ درست ہو گا۔ □

مثال 5.24: ایک کرہ کا رداس 4 ہے (شکل 5.19-ا)۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم تفاعل $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ کو x محور کے گرد گما کر کرہ کی سطح حاصل کر سکتے ہیں۔ہم وقفہ $-4 \le x \le 4$ کو آٹھ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطے c_1 تا c_7 پر پائے جاتے ہیں (شکل 5.19-ا)۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر رقبہ کا بیلن جس کی لمبائی 1 ہو



شکل 5.18: ٹھوس جسم برائے مثال 5.23



شکل 5.19: نصف دائرہ $y = \sqrt{16 - x^2}$ کو x محور کے گرد گما کر کرہ حاصل کیا جاتا ہے (مثال 5.24)۔

لیتے ہیں (شکل 5.24-ب)۔ان تمام بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تقریباً کرہ کے حجم کے برابر ہو گا۔ ہر ایک بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا جہاں بیلن کا رداس r اور اس کی لمبائی h ہے۔آٹھوں بیلنوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H_8 &= \pi[f(x_1)]^2\Delta x + \pi[f(x_2)]^2\Delta x + \pi[f(x_3)]^2\Delta x + \cdots + \pi[f(x_8)]^2\Delta x \\
&= \pi\left[\sqrt{16-x_1^2}\right]^2\Delta x + \pi\left[\sqrt{16-x_2^2}\right]^2\Delta x + \pi\left[\sqrt{16-x_3^2}\right]^2\Delta x + \\
&\qquad \cdots + \pi\left[\sqrt{16-x_8^2}\right]^2\Delta x \\
&= \pi[(16-(-4)^2) + (16-(-3)^2) + (16-(-2)^2) + \cdots + (16-(3)^2)] \\
&= \pi[0+7+12+15+16+15+12+7] \\
&= 84\pi
\end{aligned}$$

کرہ کا اصل حجم درج ذیل ہے۔

$$H = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4)^3 = \frac{256\pi}{3}$$

متناہی مجموعہ سے حاصل حجم میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
&= \frac{|H-H_8|}{H}\times 100 = \frac{\frac{256\pi}{3} - 84\pi}{\frac{256\pi}{3}}\times 100 \\
&= \frac{256-252}{256} = \frac{1}{64} \approx 1.6\,\%
\end{aligned}$$

□

غیر منفی تفاعل کی اوسط قیمت

متناہی تعداد قیمتوں کی اوسط حاصل کرنے کی خاطر ہم تمام قیمتوں کا مجموعہ لے کر قیمتوں کی تعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔ اب لا متناہی تعداد کی قیمتوں کے اوسط سے کیا مراد ہو گا؟ مثال کے طور پر وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی اوسط قیمت سے کیا مراد ہے؟ ایسے "استمراری" اوسط کا مطلب سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ ہم $x = -1$ تا $x = 1$ کے بیچ بلا منصوبہ x کی مختلف قیمتوں پر تفاعل کی نمونی قیمتوں کے مربع کا اوسط حاصل کرتے ہیں۔ نمونی جسامت بڑھانے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ اوسط کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گا۔ اس قیمت کو ہم وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل کا اوسط[14] کہتے ہیں۔

---

[14]average

مثال 5.25: وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(x)=x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم وقفہ $[-1,1]$ کو 6 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 5.20)۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x=\frac{1}{3}$ ہو گی۔

اب تک کی مثالوں میں متناہی مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم ہر ذیلی وقفہ کے سر پر تفاعل کی قیمت لیتے رہے ہیں۔ اس سے بہتر نتائج اس صورت حاصل ہوتے ہیں جب تفاعل کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کی وسط میں لیا جائے۔ چھ ذیلی وقفوں کی وسط میں تفاعل کی قیمتوں کے اوسط کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{اوسط قیمت} &\approx \frac{(-\frac{5}{6})^2+(-\frac{3}{6})^2+(-\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^2+(\frac{3}{6})^2+(\frac{5}{6})^2}{6}\\
&\approx \frac{1}{6}\cdot\frac{25+9+1+1+9+25}{36}=\frac{70}{216}\approx 0.324
\end{aligned}$$

اس تفاعل کا اصل اوسط $\frac{1}{3}$ ہے۔

درج ذیل پر غور کریں۔

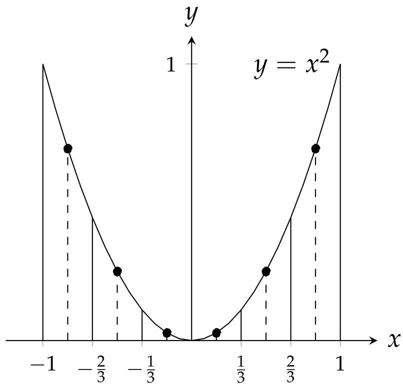
$$\begin{aligned}
&\frac{(-\frac{5}{6})^2+(-\frac{3}{6})^2+(-\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^2+(\frac{3}{6})^2+(\frac{5}{6})^2}{6}\\
&=\frac{1}{2}\left[\Big(-\frac{5}{6}\Big)^2\cdot\frac{1}{3}+\Big(-\frac{3}{6}\Big)^2\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\Big(\frac{5}{6}\Big)^2\cdot\frac{1}{3}\right]\\
&=\frac{1}{[-1,1]\ \text{لمبائی}}\cdot\left[f\Big(-\frac{5}{6}\Big)\cdot\frac{1}{3}+f\Big(-\frac{3}{6}\Big)\cdot\frac{1}{3}+\cdots+f\Big(\frac{5}{6}\Big)\cdot\frac{1}{3}\right]\\
&=\frac{1}{[-1,1]\ \text{لمبائی}}\cdot\left[\text{تفاعل کی قیمتیں ضرب ذیلی وقفہ کی لمبائی کا مجموعہ}\right]
\end{aligned}$$

اس بار بھی اندازاً قیمت حاصل کرنے کی خاطر تفاعل کی قیمت کو ذیلی وقفہ کی لمبائی سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ حاصل کیا گیا ہے۔ □

نتیجہ

اس حصہ میں ہم نے تفاعل کی قیمت کو ذیلی وقفوں کی لمبائی سے ضرب دے کر مجموعہ حاصل کرنے سے درکار قیمتوں کا اندازہ لگایا گیا۔

ہم نے مثال 5.22 میں دیکھا کہ ذیلی وقفوں کی لمبائی کم کرنے سے اصل جواب، جس کو ہم الٹ تفرق سے حاصل کر چکے تھے، کے زیادہ قریب نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ کیا ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم کرنے سے حاصل نتیجہ کی تحدیدی قیمت اصل جواب تک پہنچتی؟ کیا اس مثال میں مجموعہ اور الٹ تفرق کا تعلق اتفاقی ہے؟ کیا ہم مثال 5.21 میں رقبہ، مثال 5.23 اور مثال 5.24 میں حجم اور مثال 5.25 میں اوسط قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں؟ جیسا ہم دیکھیں گے، ان سوالات کے جوابات ہیں "جی ہاں ایسا کیا جا سکتا ہے"، "نہیں یہ اتفاق نہیں ہے" اور "جی ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں۔"



شکل 5.20: تفاعل کا اوسط (مثال 5.25)۔

سوالات

اخراج قلب

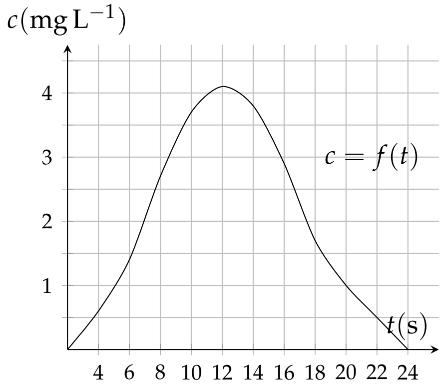
سوال 1: ایک مریض کے اخراج قلب کو رنگ کی ترکیب سے ناپا گیا۔پیائش کے نتائج شکل 5.21 میں دیے گئے ہیں جہاں خون کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار $5\,\mathrm{mg}$ تھی۔ کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبہ کو مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر حاصل کریں۔ اخراج قلب کتنا ہے؟ (مثال 5.21 دیکھیں۔)

سوال 2: ایک مریض کا اخراج قلب جاننے کی خاطر ترکیب رنگ استعمال کیا جاتا ہے۔ کی گئی پیائش کو جدول 5.5 میں پیش کیا گیا ہے جہاں خوب کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار $10\,\mathrm{mg}$ ہے۔ پیائش کو ہموار منحنی سے ترسیم کریں۔ رقبے کا اندازہ مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر تلاش کریں۔ اخراج قلب دریافت کریں۔

فاصلہ

سوال 3: ایک ریل گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت شکل 5.22-ا میں دی گئی ہے۔ دس سیکنڈ وقفے کو 10 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ کے (ا) بائیں سر، (ب) دائیں سر پر قیمتیں لیتے ہوئے طے فاصل تلاش کریں۔
جواب: (ا) $87\,\mathrm{m}$، (ب) $86\mathrm{m}$

سوال 4: نہر کے پانی میں ایک بوتل کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.22-ب میں دیا گیا ہے۔ ایک گھنٹہ کے وقفہ کو 12 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں۔ ان ذیلی وقفوں کے (ا) بائیں سر قیمتیں، (ب) دائیں سر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے وہ فاصل تلاش کریں جو بوتل اس گھنٹہ میں طے کرتا ہے۔



c کثافت رنگ	t لمحہ
0	2
0.6	4
1.4	6
2.7	8
3.7	10
4.1	12
3.8	14
2.9	16
1.7	18
1.0	20
0.5	22
0	24

شکل 5.21: اخراج قلب جاننے کے لئے کثافت رنگ بالمقابل وقت کی پیمائش (سوال 1)۔

جدول 5.5: وقت بالمقابل کثافت رنگ برائے سوال 2۔

کثافت رنگ c	لمحہ t	کثافت رنگ c	لمحہ t
7.9	16	0	0
7.8	18	0	2
6.1	20	0.1	4
4.7	22	0.6	6
3.5	24	2.0	8
2.1	26	4.2	10
0.7	28	6.3	12
0	30	7.5	14

رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{s})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{s})$
11	6	0	0
6	7	12	1
2	8	22	2
6	9	10	3
0	10	5	4
		13	5

(ا) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 3

رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{min})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{min})$
1.2	35	1	0
1.0	40	1.2	5
1.8	45	1.7	10
1.5	50	2.0	15
1.2	55	1.8	20
0	60	1.6	25
		1.4	30

(ب) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 4

شکل 5.22: رفتار بالمقابل وقت کی پیمائشی قیمتیں۔

رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ سیکنڈ	رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ سیکنڈ
15	70	0	0
22	80	44	10
35	90	15	20
44	100	35	30
30	110	30	40
35	120	44	50
		35	60

(ا) برائے سوال 5

رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ گھنٹے	رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ گھنٹے
116	0.006	0	0
125	0.007	40	0.001
132	0.008	62	0.002
137	0.009	82	0.003
142	0.010	96	0.004
		108	0.005

(ب) برائے سوال 6

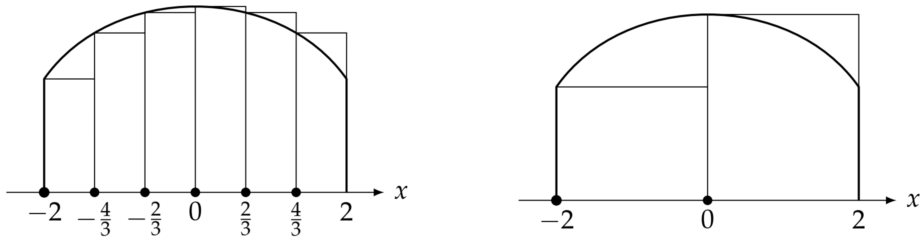
شکل 5.23: گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت۔

سوال 5: ایک گاڑی جس کا رفتار پیما کار آمد لیکن مسافت پیما غیر کار آمد ہے میں آپ سفر کر رہے ہیں۔ آپ ہر 10 سیکنڈ اس کی رفتار قلم بند کرتے ہیں۔ ان نتائج کو شکل 5.23-ا میں دکھایا گیا ہے۔ سڑک کی لمبائی کی اندازاً قیمت کو (ا) بائیں سر نقطی قیمتیں، (ب) دائیں سر نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

جواب: (ا) $969\,\mathrm{m}$ ، (ب) $1067\,\mathrm{m}$

سوال 6: ساکن حال سے 36 سیکنڈ میں ایک گاڑی $142\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) مستطیل استعمال کرتے ہوئے ان 36 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ب) گاڑی تقریباً کتنی دیر میں آدھے فاصلہ تک پہنچی؟ اس لمحے پر گاڑی کی رفتار کتنی تھی؟

سوال 7: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 2 چکور بیلنوں سے کرتے ہیں (شکل 5.24-ا)۔ (ا) حجم H_2 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H-H_2|$ کی H کے لحاظ سے فی صد قیمت حاصل کریں۔



(ا) جسم کے حجم کو 2 چکور بیلنوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

(ب) جسم کے حجم کو 6 چکور بیلنوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

شکل 5.24: حجم کے ذیلی وقفے (سوال 7 اور سوال 8)

سوال 8: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 6 چکور بیلنوں سے کرتے ہیں (شکل 5.24-ب)۔ (ا) حجم H_6 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_6|$ کو H کی فی صد کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال 9: فرض کریں ہم مثال 5.24 میں کرہ کا حجم حاصل کرنے کے لئے وقفہ $-4 \le x \le 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہیں۔ (بائیں ترین بیلن کا رقبہ عمودی تراش صفر ہو گا۔) (ا) ان بیلنوں کا مجموعی حجم H_4 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_4|$ کو H کا فی صد لکھیں؟

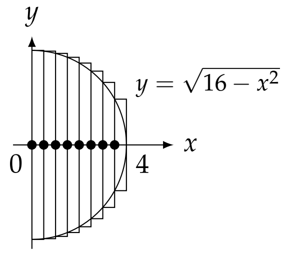
سوال 10: ایک کرہ جس کا رداس 5 ہے کا حجم درکار ہے۔ آپ اس کے قطر کو پانچ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ 2 کے برابر ہو گا۔ آپ ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطوں پر قطر کے عمودی کرہ کو کاٹ کر رقبہ عمودی تراش حاصل کرتے ہیں۔ آپ اتنی ہی رقبہ عمودی تراش والے ایسے بیلن لیتے ہیں جن کی موٹائی 2 ہو۔ ان بیلنوں کے مجموعی حجم سے آپ کرہ کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔ (ا) بیلنوں کا مجموعی حجم H_5 کیا ہو گا؟ (ب) خلل $|H - H_5|$ کو H کا فی صد لکھیں۔

سوال 11: رداس 4 کے کرہ کا حجم درکار ہے۔ اس کا محور تشاکل x محور پر وقفہ $[0,4]$ ہے۔ آپ اس وقفہ کو 8 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن جس کی موٹائی ذیلی وقفہ کی لمبائی جتنی ہو کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم تلاش کیا جاتا ہے (شکل 5.25)۔ (ا) مجموعی حجم H_8 تلاش کریں (جو نصف کرہ کا حجم ہو گا)۔ (ب) کیا H_8 نصف کرہ کے حجم H سے کم یا زیادہ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_8|$ کو H کا فی صد لکھیں۔

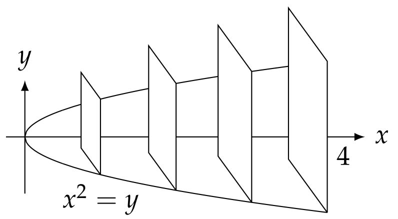
سوال 12: گزشتہ سوال (سوال 11) میں ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطے پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہوئے دوبارہ جوابات حاصل کریں۔

سوال 13: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل

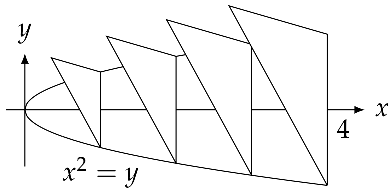
نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش چکور ہے جس کے کنارے قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور $y = \sqrt{x}$ کو مس کرتے ہیں (شکل 5.26)۔ (ا) وقفہ



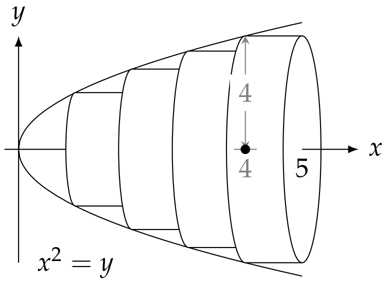
شکل 5.25: نصف کرہ (سوال 11)



شکل 5.26: برائے سوال 13



شکل 5.27: برائے سوال 14



شکل 5.28: راکٹ کی نوک (سوال 17)

$0 \leq x \leq 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے دائیں سر نقطی رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 32$ ہے۔ خلل $|H - H_4|$ کو H کے لحاظ سے فی صد کی صورت میں لکھیں۔ (ج) اس مسئلے کو دوبارہ H_8 کے لئے حل کریں۔

سوال 14: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل
نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش متساوی الاضلاع شکل کا ہے جس کے قاعدہ قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور $y = \sqrt{x}$ کو مس کرتا ہے (شکل 5.27)۔ (ا) وقفہ $0 \leq x \leq 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے بائیں سر نقطی رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 8\sqrt{3}$ ہے۔ H کے لحاظ سے خلل $|H - H_4|$ کی فی صد قیمت کتنی ہے؟ (ج) سوال کو دوبارہ H_8 کے لئے حل کریں۔

سوال 15: ایک پانی کی ٹینکی نصف کروی پیالے کی مانند ہے جس کا رداس $8\,\mathrm{m}$ ہے۔ اس میں پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہے۔ (ا) پانی کی گہرائی کو آٹھ ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی نچلی سطح کا رقبہ عمودی تراش والے بیلن استعمال کرتے ہوئے H_8 تلاش کریں۔ (ب) اصل حجم $H = \frac{320\pi}{3}\,\mathrm{m}^3$ ہے۔ H کے لحاظ سے خلل $|H - H_8|$ کی فی صد قیمت تلاش کریں۔

جدول 5.6: تالاب میں پانی کی گہرائی (سوال 16)

مقام x	گہرائی h	مقام x	گہرائی h
0	2.0	6	3.83
1	2.73	7	3.97
2	3.03	8	4.1
3	3.3	9	4.23
4	3.5	10	4.33
5	3.67		

سوال 16: تیراکی کے ایک مستطیل تالاب کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ اور چوڑائی $6\,\mathrm{m}$ ہے۔ تالاب کے ایک سر سے دوسرے سر تک $1\,\mathrm{m}$ وقفوں پر پانی کی گہرائی (میٹر) جدول 5.6 میں دی گئی ہے۔ (ا) h کی بائیں سر نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تالاب میں پانی کا حجم تلاش کریں۔ (ب) دائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال 17: منحنی $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 5$ کو y محور کے گرد گمانے سے ایک راکٹ کی قطع مکافی مجسم نوک حاصل ہوتی ہے جہاں x کی پیائش میٹروں میں ہے (شکل 5.28)۔ اس نوک کا حجم معلوم کرنے کی خاطر ہم $[0,5]$ کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر حصے کی لمبائی 1 ہو گی۔ ہر حصہ کے بائیں سر نقطہ پر x محور کے قائمہ جسم کو کاٹا جاتا ہے اور ان نقطوں پر جسم کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن استعمال کرتے ہوئے نوک کا حجم دریافت کیا جاتا ہے۔ بیلنوں کی لمبائی 1 ہو گی۔ (ا) مجموعہ H_5 تلاش کریں۔ کیا H_5 کی قیمت H سے کم یا زیادہ ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) نوک کا اصل حجم $H = 2\pi\,\mathrm{m}^3$ ہے۔ خلل $|H - H_5|$ کو H کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

جواب: (ا) 1.6π، (ب) $20\,\%$

سوال 18: ہر ذیلی وقفے کے دائیں سر نقطی رقبہ عمودی تراش استعمال کرتے ہوئے سوال 17 کو دوبارہ حل کریں۔

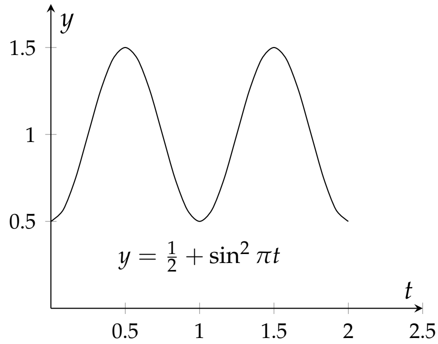
تفاعل کی اوسط قیمت

سوال 19 تا سوال 22 میں تفاعل f کی اوسط قیمت درکار ہے۔ دیے گئے وقفہ کو چار ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی وسط میں تفاعل کی قیمت استعمال کرتے ہوئے متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے اوسط حاصل کریں۔

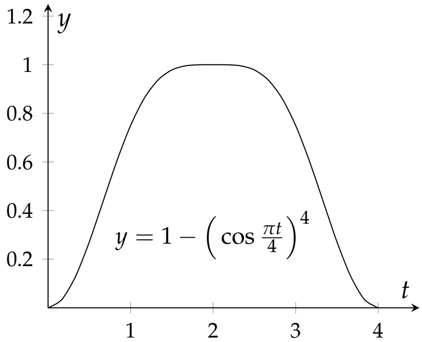
سوال 19: $f(x) = x^3, \quad [0,1]$

سوال 20: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad [1,9]$

سوال 21: $f(t) = \frac{1}{2}\sin^2 \pi t, \quad [0,2]$ شکل 5.29



شکل 5.29: ترسیم برائے سوال 21



شکل 5.30: ترسیم برائے سوال 22

سوال 22: $[0, 4]$ $f(t) = 1 - (\cos \frac{\pi t}{4})^4,$ شکل 5.30

رفتار اور فاصلہ

سوال 23: ایک جسم کو جہاز سے گرنے دیا جاتا ہے۔ جسم کی رفتار مسلسل بڑھتی ہے لیکن ہوائی رگڑ کی بنا گرنے کی اسراع بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ وقت بالمقابل جسم کی اسراع کو درج ذیل جدول میں پیش کیا گیا ہے۔

$t(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5
$a(\mathrm{m\,s^{-2}})$	9.8	5.92	3.59	2.18	1.32	0.80

(ا) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی نچلی حد تلاش کریں۔ (ج) لمحہ $t = 3$ میں گرنے والے فاصلہ کی بالائی حد تلاش کریں۔

جواب: (ا) $22.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $13.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ج) $35.175\,\mathrm{m}$

سوال 24: ایک جسم کو سمندری سطح سے سیدھا اوپر $125\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ اس جسم پر صرف ثقلی قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ (ا) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی نچلی حد تلاش کریں۔ ثقلی اسراع کو $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیں۔

آلودگی پر قابو پانا

سوال 25: تیل کے جہاز سے سمندر میں تیل رس رہا ہے۔ رستا تیل کی مقدار (لٹر فی گھنٹہ) بالمقابل وقت (گھنٹہ) کو نیچے جدول میں دیا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صورت حال بتدریج خراب ہو رہی ہے۔

گھنٹہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{L\,h^{-1}}$	50	70	97	136	190	265	369	516	720

(ا) ان پانچ گھنٹوں میں خارج تیل کی مقدار کی بالائی اور نچلی حد تلاش کریں۔ (ب) آٹھ گھنٹوں میں خارج تیل کی بالائی اور نچلی حد تلاش کریں۔ (ج) ابتدائی آٹھ گھنٹوں بعد تیل مسلسل $720\,\mathrm{L\,h^{-1}}$ سے رستا ہے۔ اگر جہاز میں ابتدائی طور کل $25\,000\,\mathrm{L}$ تیل ہو تب تمام تیل خارج ہونے کے لئے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنا وقت درکار ہو گا۔

جواب: (ا) $758\,\mathrm{L}$ ، $543\,\mathrm{L}$ ،(ب) $2363\,\mathrm{L}$ ، $1693\,\mathrm{L}$ ،(ج) $31.4\,\mathrm{h}$ ، $32.4\,\mathrm{h}$

سوال 26: ایک بجلی گھر تیل کو جلا کر برقی طاقت پیدا کرتا ہے۔ تیل جلنے سے پیدا آلودگی کو کم کرنے کی خاطر دھواں کش کو چھلنی سے گزارا جاتا ہے جو نجاست کو روک دیتا ہے۔ وقت کے ساتھ ساتھ چھلنی کی کارگزاری کم پڑ جاتی ہے اور اس کو تبدیل کرنا لازمی ہو جاتا ہے۔ ہر مہینے کی آخر میں ہوا میں خارج نجاست کی شرح ناپی جاتی ہے، اگر یہ مقدار سرکاری حد سے زیادہ ہو تب چھلنی کو تبدیل کیا جاتا ہے۔اس پیمائش کی ایک مثال نچلی جدول میں دکھائی گئی ہے جہاں یومیہ خارج نجاست کی مقدار کی اکائی ٹن ($1000\,\mathrm{kg}$) ہے۔

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
نجاست	0.2	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

(ا) تمام مہینوں کو 30 دنوں کا تصور کریں۔ فرض کریں نئی چھلنی سے یومیہ 0.05 ٹن نجاست نکل پاتی ہے۔ جون کے مہینے کی آخر تک ہوا میں کل خارج نجاست کی مقدار کی بالائی حد کیا ہو گی؟ اس کی نچلی حد کیا ہو گی؟ (ب) بہترین حالات میں کل 125 ٹن نجاست کتنے عرصہ میں ہوا میں خارج ہو گا؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 27 تا سوال 30 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے (ا) دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) وقفہ کو $n = 100$ ، $n = 200$ اور $n = 1000$ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی وسط میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب میں حاصل قیمتوں سے تفاعل کی اوسط $\bar{f}$ تلاش کریں۔ (د) $n = 1000$ کے لئے حاصل اوسط $\bar{f}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات $f(x) = \bar{f}$ کو حل کریں۔

سوال 27: $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$

سوال 28: $f(x) = \sin^2 x, \quad [0, \pi]$

سوال 29: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

سوال 30: $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات

گزشتہ حصے میں ہم نے فاصلے، رقبے، حجم اور اوسط قیمتوں کو متناہی مجموعوں کی مدد سے حاصل کیا۔ منتخب تفاعل کی قیمتوں کو وقفوں کی لمبائیوں کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے یہ مجموعے حاصل کیے گئے۔اس حصہ میں ان وقفوں کی لمبائیوں کو کم سے کم اور تعداد کو زیادہ سے زیادہ کرتے ہوئے مجموعہ کی تحدیدی قیمت پر غور کیا جائے گا۔ متعدد ارکان پر مشتمل مجموعے کو ظاہر کرنے کی علامت پہلے متعارف کرتے ہیں۔

متناہی مجموعہ کی علامت

درج ذیل مجموعہ کو

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t$$

یونانی حروف تہجی کا بڑا حرف Σ ("سگما") استعمال کرتے ہوئے $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو k کی 1 تا n قیمتوں کے لئے Δt ضرب t_k پر f کی قیمتوں کا مجموعہ ہے۔ مجموعہ کی یوں اظہار کو سگما علامتی اظہار کہتے ہیں۔

تعریف: متناہی مجموعہ کا سگما علامتی اظہار
علامت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ سے مراد مجموعہ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ہے۔ مجموعہ کے ارکان[15] a_1 تا a_n ہیں جہاں a_1 مجموعے کا پہلا اور a_n مجموعے کا آخری رکن ہے۔ متغیر k مجموعی سلسلہ کا اشاری[16] کہلاتا ہے۔ k کی قیمتیں 1 تا n عدد صحیح ہیں۔ مجموعی سلسلہ کا زیریں حد[17] 1 جبکہ مجموعی سلسلہ کا بالائی حد[18] n ہے۔ زیریں اور بالائی حدود کوئی بھی دو عدد صحیح ممکن ہیں۔

□

مثال 5.26:

مجموعہ کی سگما صورت	ارکان کی صورت میں مجموعہ	مجموعہ کی قیمت
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1+2+3+4+5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1+2-3=-2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

□

مجموعی سلسلہ کا زیریں حد 1 سے ہٹ کر ہو سکتا ہے۔

مثال 5.27: مجموعہ $1+3+5+7+9$ کو سگما علامتی روپ میں لکھیں۔

---

[15] terms
[16] index of summation
[17] lower limit of summation
[18] upper limit of summation

حل:

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+1) \qquad k=0 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) \qquad k=1 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

□

متناہی مجموعہ کا الجبرا

متناہی مجموعوں کے ساتھ کام کرتے ہوئے درج ذیل قواعد بروئے کار لائے جا سکتے ہیں۔

قاعدہ مجموعہ: $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

قاعدہ فرق: $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

قاعدہ ضرب مستقل: $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ جہاں c کوئی عدد ہے۔

قاعدہ مستقل قیمت: $\sum_{k=1}^{n}c=n\cdot c$ جہاں c کوئی مستقل قیمت ہے۔

اس فہرست میں کوئی حیران کن حقیقت پیش نہیں کی گئی ہے۔ ان کے با ضابطہ ثبوت (الکراجی) الجبرائی ماخوذ سے حاصل کیے جا سکتے ہیں جنہیں ضمیمہ ا میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال 5.28:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2 \qquad \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-a_k)=\sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k=-1\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k=-\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \text{قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k+4)&=\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}4\\&=(1+2+3)+(3\cdot4) && \text{قاعدہ مستقل قیمت}\\&=6+12=18\end{aligned}$$

□

مثبت عدد صحیح کے کلیات مجموعہ

متناہی مجموعوں کے کئی کلیات پائے جاتے ہیں جن میں سے مشہور ترین کلیات شروع کے n عدد صحیح کا مجموعہ ہے (جو گاوس نے 5 سال کی عمر میں اخذ کیا) اور شروع کے n عدد صحیح کے مربع اور مکعب کے مجموعوں کے کلیات ہیں۔

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح}\\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مربع}\\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مکعب}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

مثال 5.29: $\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k)$ تلاش کریں۔

حل: ہم مجموعہ کو مجموعی سلسلہ کے روپ میں لکھے بغیر الجبرائی قواعد استعمال کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

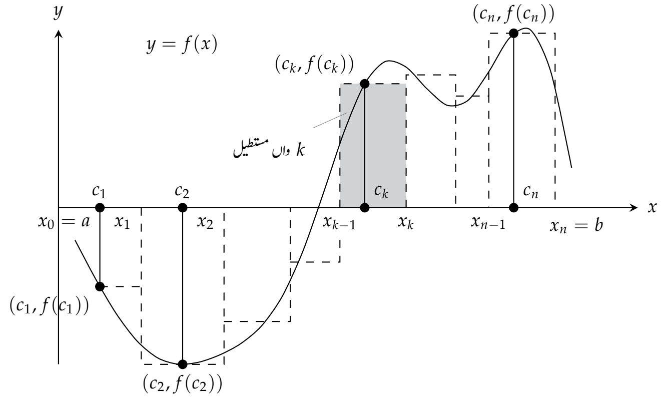
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k) &= \sum_{k=1}^{4} k^2 - 3\sum_{k=1}^{4} k && \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل}\\
&= \frac{4(4+1)(8+1)}{6} - 3\Big(\frac{4(4+1)}{2}\Big) && n=4 \text{ لیتے ہوئے مساوات 5.13}\\
&= 30-30=0
\end{aligned}$$

□

ریمان مجموعے

ہم نے حصہ 5.4 میں تخمینی مجموعوں پر غور کیا جو زیادہ عمومی ریمان مجموعہ کی مخصوص مثالیں تھیں۔ ان مثالوں میں تفاعل کی قیمتیں غیر منفی تھیں جبکہ ریمان مجموعہ میں ایسی پابندی نہیں پائی جاتی ہے۔ وقفہ $[a,b]$ پر دیے گئے اختیاری استمراری تفاعل $y=f(x)$ کو a اور b کے بیچ نقاط $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ پر n ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (شکل 5.31)۔ یہ نقطے صرف درج ذیل شرط کے تحت منتخب کیے جاتے ہیں۔

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$



شکل 5.31: بند وقفہ $[a,b]$ پر عمومی تفاعل $y=f(x)$ ۔ تفاعل اور x محور کے بیچ رقبہ کو تخمینی طور پر مستطیلوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ c_1 کو عین x_0 پر منتخب کیا ہوا دکھایا گیا ہے۔

اس علامتی روپ میں مطابقت پیدا کرنے کی خاطر a کو x_0 اور b کو x_n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل سلسلہ

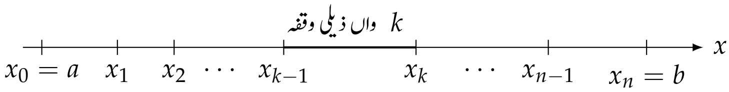
$$P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

کو $[a,b]$ کی خانہ بندی[19] کہتے ہیں۔

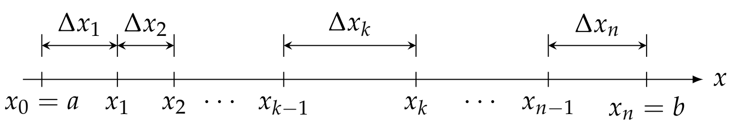
P کی خانہ بندی درج ذیل n عدد بند ذیلی وقفوں[20] کو ظاہر کرتی ہے۔

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

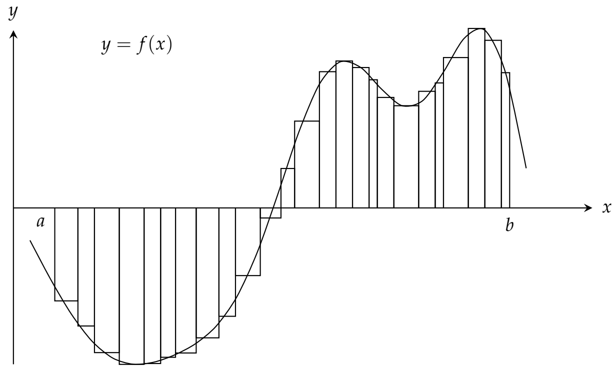
بند ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کو P کا k واں ذیلی وقفہ کہتے ہیں۔



k ویں ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ہے۔



partition[19]
subintervals[20]



شکل 5.32: وقفہ $[a, b]$ کے زیادہ باریک خانہ بندی سے مستطیلوں کی تعداد بڑھتی ہے جن کے قاعدہ نسبتاً چھوٹے ہوتے ہیں۔

ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں ہم کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ذیلی وقفہ میں تفاعل $y = f(x)$ پر نقطہ $(c_k, f(c_k))$ تک مستطیل بناتے ہیں۔ جب تک نقطہ c_k ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں پایا جاتا ہو اس کا مقام غیر اہم ہے (شکل 5.31)۔

اگر $f(c_k)$ مثبت ہو تب عدد $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے قد ضرب قاعدہ یعنی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ اگر $f(c_k)$ منفی عدد ہو تب $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے رقبہ کے نفی کے برابر ہو گا۔ ہم ان تمام $f(c_k)\Delta x_k$ حاصل ضرب جن کی تعداد n ہے کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

یہ مجموعہ جو P اور c_k کی انتخاب پر منحصر ہے وقفہ $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ[21] کہلاتا[22] ہے۔

$[a, b]$ کے خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرتے ہوئے خانہ بندی سے حاصل مستطیل تفاعل f اور x محور کے بیچ خطہ کو بہتر سے بہتر ظاہر کرتے ہیں (شکل 5.32 کا شکل 5.31 کے ساتھ موازنہ کریں)۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ ہماری اس توقع کو پرکھنے کی خاطر ہمیں خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کو ریاضیاتی صورت میں لکھنا ہو گا اور جاننا ہو گا کہ آیا مطابقتی مجموعہ کی کوئی تحدیدی قیمت پائی جاتی ہے۔ ہم درج ذیل تعریف کی مدد سے ایسا کر پائیں گے۔

خانہ بندی P کی معیار[23] سے مراد سب سے لمبے خانے کی لمبائی ہے جس کو درج ذیل علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|P\| \qquad \text{(اس کو "}P\text{ کا معیار" پڑھیں)}$$

---

[21] Riemann sum

[22] جرمنی کے ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے ایسے مجموعوں کی تحدیدی قیمتوں پر کام کیا۔

[23] norm

خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کی بجائے اب ہم کہتے ہیں کہ خانوں کی معیار صفر تک پہنچائی جاتی ہے۔ جیسے جیسے معیار کی قیمت صفر کے نزدیک ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم اور ان کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہوتی جاتی ہے۔ خانوں کی چوڑائی کم کرنے سے باریک مستطیل پیدا ہوں گے۔

مثال 5.30: وقفہ $[0, 2]$ کی خانہ بندی سلسلہ $P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ ہے۔ P کے پانچ ذیلی وقفے درج ذیل ہیں۔

$$[0, 0.2],\ [0.2, 0.6],\ [0.6, 1],\ [1, 1.5],\ [1.5, 2]$$

ان ذیلی وقفوں کی لمبائیاں $\Delta x_1 = 0.2$ ، $\Delta x_2 = 0.4$ ، $\Delta x_3 = 0.4$ ، $\Delta x_4 = 0.5$ اور $\Delta x_5 = 0.5$ ہیں۔ ان میں سب سے لمبے ذیلی وقفہ کی لمبائی 0.5 ہے لہٰذا خانہ بندی P کا معیار $\|P\| = 0.5$ ہے۔ اس مثال میں دو ذیلی وقفوں کی لمبائی 0.5 ہے۔ □

تعریف: قطعی تکمل بطور ریمان مجموعوں کا حد
فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ ایک معین تفاعل ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے وقفہ $[a, b]$ پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ کا حد اس صورت عدد I ہو گا جب درج ذیل شرط پورا ہوتا ہو:

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کسی بھی منتخب عدد c_k کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\|P\| < \delta \quad \implies \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \right| < \epsilon$$

□

اگر یہ حد موجود ہو تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I$$

وقفہ $[a, b]$ پر عدد I تفاعل f کا قطعی تکمل[24] کہلاتا ہے، اور ہم کہتے ہیں کہ $[a, b]$ پر f قابل تکمل[25] ہے اور $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ عدد I پر مرکوز[26] ہے۔

---

[24] definite integral
[25] integrable
[26] converges

ہم عموماً I کو $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ لکھتے ہیں جو " a تا b تفاعل f کا تکمل" پڑھا جاتا ہے۔یوں اگر حد موجود ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ خانہ بندی تبدیل کرتے ہوئے اور ہر خانے میں c_k کا مقام تبدیل کرنے کے باوجود استمراری f کی صورت میں $\|P\|\to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعوں $\sum f(c_k)\Delta x_k$ کی تحدیدی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ریمان نے 1854 میں درج ذیل مسئلہ ثابت کرتے ہوئے اس حقیقت کی تصدیق کر دی۔ ریمان کے ثبوت کی جدید صورت احصاء کی تقریباً تمام اعلیٰ کتابوں میں پایا جاتا ہے۔

مسئلہ 5.1: قطعی تکمل کی موجودگی
تمام استمراری تفاعل قابل تکمل ہیں۔ یعنی وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کا $[a,b]$ پر قطعی تکمل موجود ہو گا۔

ہم کیوں یقین کریں کہ یہ مسئلہ کار آمد ہو گا؟ وقفہ $[a,b]$ کی عمومی خانہ بندی P فرض کریں۔ چونکہ تفاعل f استمراری ہے لہٰذا ہر ذیلی وقفہ پر اس کی کوئی کم سے کم قیمت k_L اور کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت k_H ہو گی۔ کم سے کم قیمتوں (شکل 5.33-ا) سے حاصل ضرب $k_L\Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا زیریں مجموعہ[27] L کہلاتا ہے۔

$$L = k_{L1}\Delta x_1 + k_{L2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Ln}\Delta x_n$$

اسی طرح زیادہ سے زیادہ قیمتوں (شکل 5.33-ب) سے حاصل ضرب $k_H\Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا بالائی مجموعہ H کہلاتا ہے۔

$$H = k_{H1}\Delta x_1 + k_{H2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Hn}\Delta x_n$$

ان کا فرق $H-L$ شکل 5.33-ج میں دکھائے گئے سیاہ ڈبوں کے رقبہ کے برابر ہو گا۔جیسا جیسا $\|P\|\to 0$ کیا جائے ان ڈبوں کی تعداد بڑھتی جائے گی جبکہ ان کی چوڑائی اور لمبائی کم سے کم ہوتی جائے گی۔ ہم $\|P\|$ کو صفر کے کافی نزدیک کرتے ہوئے غیر منفی عدد $H-L$ کو کسی بھی چھوٹے سے چھوٹے مثبت عدد ϵ سے کم کر سکتے ہیں، یعنی

$$\lim_{\|P\|\to 0}(H-L) = 0 \tag{5.14}$$

اور جیسا اعلیٰ نصاب میں دکھایا گیا ہے درج بالا سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} H \tag{5.15}$$

---

[27] lower sum

بند وقفوں پر استمراری تفاعل کی ایک خاصیت جس کو یکساں استمرار[28] کہتے ہیں کی بدولت مساوات 5.14 اور مساوات 5.15 کار آمد ہیں۔ یہ خاصیت ممکن بناتی ہے کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ان ڈبوں، جو H اور L کے فرق کو ظاہر کرتے ہیں، کی چوڑائی کو کم سے کم کرتے ہوئے ان کی قد کو کم سے کم بنایا جا سکتا ہے اور ہم ان کی چوڑائی کم کرتے ہوئے ان کے قد کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ چونکہ یکساں استمرار سے منسلک ϵ بالمقابل δ کی دلیل ہم نے یہاں پیش نہیں کی ہے لہٰذا ہم مساوات 5.15 کو ثبوت نہیں مان سکتے ہیں البتہ مذکورہ بالا دلائل اصل ثبوت کی روح پیش کرتے ہیں۔

ہم وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل f کے لئے مساوات 5.15 کو درست تصور کرتے ہوئے P کے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ لکھتے ہیں. اب ہر k کے لئے $k_L \le f(c_k) \le k_H$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le H$$

f کا ریمان مجموعہ H اور L کے بیچ پایا جاتا ہے۔مسئلہ بیچ (مسئلہ 2.4) کی ترمیم شدہ روپ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کا حد موجود ہو گا اور یہ L اور H کی مشترکہ تحدیدی قیمت ہو گی:

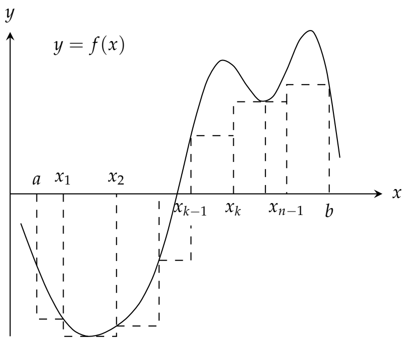
$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} H$$

ایک لمحہ رک کر اس نتیجہ پر غور کریں۔اس نتیجہ کے تحت ہم c_k کو جس طرح بھی منتخب کریں، $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت وہی حاصل ہو گی۔ ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی کم سے کم قیمت منتخب کر کے وہی حد حاصل ہو گا۔ اسی طرح ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت منتخب کر کے بھی وہی حد حاصل ہو گا۔ c_k کو بلا منصوبہ منتخب کر کے بھی یہی حد حاصل ہو گا۔

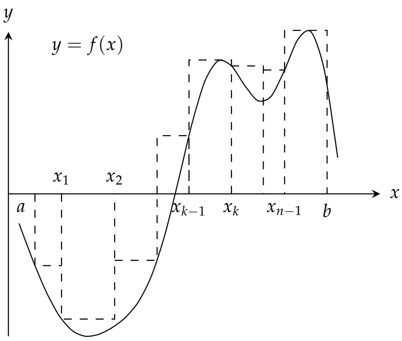
اگرچہ ہم نے قطعی تکمل کی موجودگی کا مسئلہ بالخصوص استمراری تفاعل کے لئے پیش کیا، حقیقت میں کئی غیر استمراری تفاعل بھی قابل تکمل ہیں۔غیر محدود تفاعل کی تکمل پر اسی باب میں غور کیا جائے گا۔

---

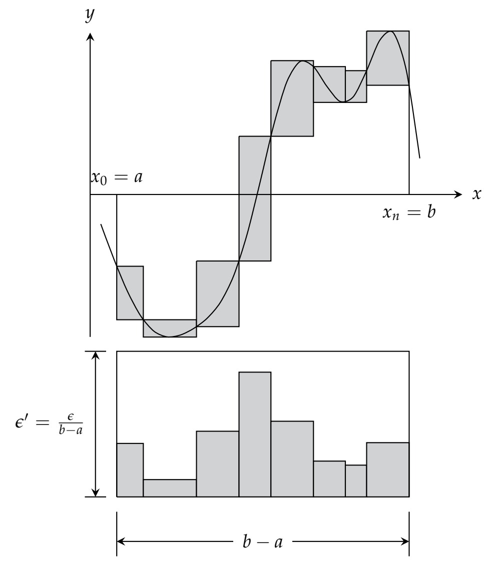
[28] uniform continuity



(ا) زیریں مجموعہ $L = \sum_{k=1}^{n} k_L \Delta x_k$



(ب) بالائی مجموعہ $H = \sum_{k=1}^{n} k_H \Delta x_k$



(ج) فرق $H - L$ کو $\epsilon' \cdot (b - a)$ یعنی ϵ سے کم بنایا جا سکتا ہے۔

شکل 5.33: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق۔

بغیر ریمان تکمل والے تفاعل

غیر استمراری تفاعل، ما سوائے چند، نا قابل تکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا $[0,1]$ پر کوئی ریمان تکمل نہیں پایا جاتا ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ناطق}\\ 0, & \text{غیر ناطق}\end{cases}$$

وقفہ $[0,1]$ کے کسی بھی خانہ بندی P کے لئے بالائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}H&=\sum k_H\Delta x_k=\sum 1\cdot\Delta x_k=\sum\Delta x_k=1,\\ L&=\sum k_L\Delta x_k=\sum 0\cdot\Delta x_k=0\end{aligned}$$

وقفہ $[0,1]$ پر f کے تکمل کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ $\|P\|\to 0$ سے H اور L کی ایک جیسی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں ہے:

$$\lim_{\|P\|\to 0} L=0,\quad \lim_{\|P\|\to 0} H=1$$

یوں $[0,1]$ پر f کا تکمل نہیں پایا جاتا ہے۔ مستقل مضرب kf کا بھی تکمل نہیں پایا جاتا ہے ماسوائے جب k صفر ہو۔

اصطلاحات

علامت $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے ساتھ بہت ساری اصطلاح وابستہ ہیں۔ یوں $\int$ کو علامت تکمل کہتے ہیں، a تکمل کا زیریں حد جبکہ b تکمل کا بالائی حد ہے، f متکمل ہے، x تکمل کا متغیر ہے، جبکہ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ سے مراد a تا b تفاعل f کا تکمل ہے۔ تکمل حل کرنے سے مراد تکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔

تکمل کا بالائی حد

متکمل

علامت تکمل

تکمل کا متغیر x ہے

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{کا تکمل } f \text{ تفاعل } b \text{ تا } a}$$

تکمل کا زیریں حد

کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی تکمل کی قیمت تفاعل پر منحصر ہوتی ہے نا کہ غیر تابع متغیر کی علامت پر۔ یوں تکمل میں غیر تابع متغیر کو x کی بجائے u یا t سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{کی بجائے} \quad \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{یا} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں تکمل سے مراد ریمان مجموعہ ہے للہذا غیر تابع متغیر کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا اور تینوں تکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ اسی لیے تکمل کے متغیر کو نقلی متغیر[29] کہتے ہیں۔

مثال 5.31: درج ذیل ریمان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تکمل کی صورت میں لکھیں جہاں P وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k$$

حل: نقطہ c_k پر تفاعل $f(x)=3x^2-2x+5$ کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں -1 تا 3 تفاعل f کا تکمل درکار ہے:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k=\int_{-1}^{3}(3x^2-2x+5)\,\mathrm{d}x$$

□

مستقل تفاعل

ہمیں مسئلہ 5.1 قطعی تکمل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں ایک دوسرا مسئلہ زیر استعمال ہو گا۔ مستقل تفاعل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ $[a,b]$ پر f ایک مستقل تفاعل $f(x)=c$ ہو تب c_k کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} c\cdot\Delta x_k && \text{ہر نقطہ پر } f(c_k) \text{ کے برابر ہے } c \\
&= c\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب} \\
&= c(b-a) && \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \text{ وقفہ } [a,b] \text{ کی لمبائی } b-a \text{ ہے}
\end{aligned}$$

---

[29] dummy variable

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت $c(b-a)$ کے برابر ہے للذا تکمل کی قیمت بھی یہی ہو گی۔یوں درج ذیل درست ہو گا۔

وقفہ $[a, b]$ جس پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت مستقل c ہے کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

مثال 5.32:

ا. $\int\limits_{-1}^{4} 3\,\mathrm{d}x = 3(4-(-1)) = (3)(5) = 15$

ب. $\int\limits_{-1}^{4} (-3)\,\mathrm{d}x = -3(4-(-1)) = (-3)(5) = -15$

□

غیر منفی تفاعل کے ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال 5.22 میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ $[0, 3]$ پر گولا کی تفاعل رفتار

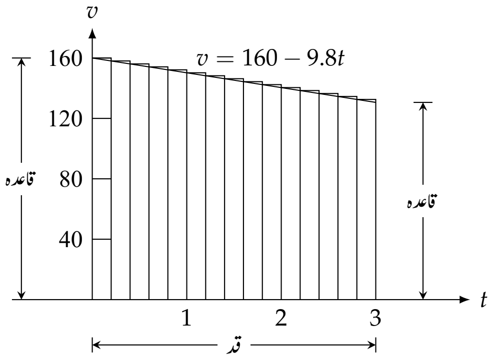
$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے ریمان مجموعے تھے۔ شکل 5.34 میں t محور اور تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔اس ذوزنقہ رقبہ کا قد 3 ، زیریں قاعدہ 160 اور بالائی قاعدہ 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہے، اتنا اصل رقبہ پر مستطیل بہتر بیٹھتے ہیں۔ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$\text{رقبہ} = \text{قد} \cdot \frac{\text{زیریں قاعدہ}+\text{بالائی قاعدہ}}{2} = 3 \cdot \frac{130.6+160}{2} = 435.9$$

آپ کو یاد ہو گا کہ مثال 5.22 میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ہم تکمل کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں:

$$\int_0^3 (160-9.8t)\,\mathrm{d}t = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$



شکل 5.34: وقفہ $[0, 3]$ پر سمتی رفتار تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے ریمان رقبہ کے لئے مستطیل۔

ہم تکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔جب ہمیں x محور اور استمراری غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ رقبہ کا کلیہ معلوم ہو تب ہم تکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے تکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x) \geq 0$ استمراری ہے۔ تفاعل f کے ترسیم اور x محور کے بیچ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

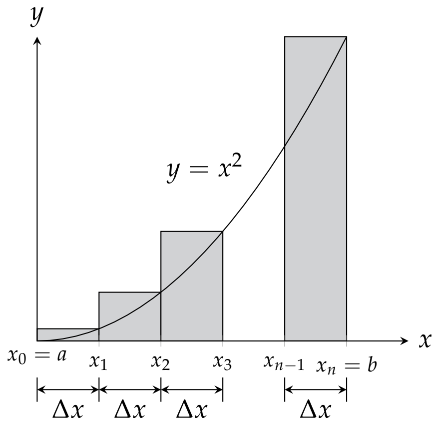
ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لئے پیش کیا۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لئے بھی کارآمد ہو گا؟ اس کا جواب ہے، "جی ہاں"، البتہ یہ ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

مثال 5.33: رقبہ استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت کا تلاش
درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

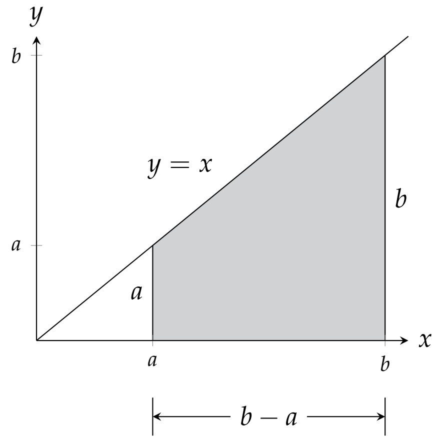
$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x, \quad 0 < a < b$$

حل: ہم خطہ $a < x < b$ کے لئے $y = x$ ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل 5.35)۔ تکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش کرتے ہیں۔

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot\frac{a+b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$



شکل 5.36: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال 5.34)



شکل 5.35: خطہ برائے مثال 5.33

یوں $a = 1$ اور $b = \sqrt{5}$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_1^{\sqrt{5}} x \, dx = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

دھیان رہے کہ x کا الٹ تفرق $\frac{x^2}{2}$ ہے جو تکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔ $\square$

مثال 5.34: قطعی تکمل سے رقبے کا حصول
قطع مکافی $y = x^2$ اور x محور کے بیچ وقفہ $[0, b]$ پر رقبہ تلاش کریں (شکل 5.36)۔

حل: ہم تکمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تفاعل کو ترسیم کر کے وقفہ $[0, b]$ کو n یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$ ہو گی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \cdots, \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x, \quad x_n = n\Delta x = b$$

ہم جس طرح چاہیں c_k نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو c_k منتخب کرتے ہیں۔یوں $c_1 = x_1$ ، $c_2 = x_2$ ، وغیرہ ہو گا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(c_1)\Delta x &= f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2 \Delta x = (1^2)(\Delta x)^3 \\
f(c_2)\Delta x &= f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2 \Delta x = (2^2)(\Delta x)^3 \\
&\vdots \\
f(c_n)\Delta x &= f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2 \Delta x = (n^2)(\Delta x)^3
\end{aligned}$$

ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2(\Delta x)^3 \\
&= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{مستقل ہے } (\Delta x)^3 \\
&= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \Delta x = \tfrac{b}{n} \text{ مساوات 5.13 میں } \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\Big(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}
$$

اب قطعی تکمل کی تعریف

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

استعمال کرتے ہوئے $x=0$ تا $x=b$ قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S_n && \text{یہاں } \|P\|\to 0 \text{ سے مراد } n\to\infty \text{ ہے} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\cdot\Big(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\Big) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot(2+0+0) = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}
$$

یوں $b=1$ اور $b=1.5$ کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3},\quad \int_0^{1.5} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

یہاں بھی دھیان رہے کہ x^2 کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3}$ ہے۔ □

سوالات

سگما روپ

سوال 1 تا سوال 6 میں مجموعہ کو سگما روپ میں لکھنے کے بعد اس کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

سوال 2: $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

سوال 3: $\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

سوال 4: $\sum_{k=1}^{5} \sin k\pi$

سوال 5: $\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

سوال 6: $\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} \cos k\pi$

سوال 7: درج ذیل میں سے کونسی $1+2+4+8+16+32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{5} 2^{k}$ ج. $\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

سوال 8: درج ذیل میں سے کونسی $1-2+4-8+16-32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{5} (-1)^{k} 2^{k}$ ج. $\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

سوال 9: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{k}}{k+1}$ ج. $\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^{k}}{k+2}$

سوال 10: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$ ب. $\sum_{k=-1}^{3} (k+1)^2$ ج. $\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

سوال 11 تا سوال 16 میں دیے مجموعوں کو سگما روپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلہ کی زیریں حد پر منحصر ہو گا۔

سوال 11: $1+2+3+4+5+6$

سوال 12: $1+4+9+16$

سوال 13: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

سوال 14: $2+4+6+8+10$

سوال 15: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

سوال 16: $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$

متناہی مجموعہ کی قیمت

سوال 17: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^{n} a_k = -5$ اور $\sum_{k=1}^{n} b_k = 6$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ ج. $\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)$ ہ. $\sum_{k=1}^{n} (b_k-2a_k)$

ب. $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ د. $\sum_{k=1}^{n} (a_k-b_k)$

سوال 18: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ اور $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ ب. $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$ ج. $\sum_{k=1}^{n} (a_k+1)$ د. $\sum_{k=1}^{n} (b_k-1)$

سوال 19 تا سوال 28 میں دیے گئے الجبرائی فقروں کی قیمتوں کو صفحہ 533 پر دیے گئے متناہی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات 5.13 میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال 19:

ا. $\sum_{k=1}^{10} k$ ب. $\sum_{k=1}^{10} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{10} k^3$

سوال 20:

ا. $\sum_{k=1}^{13} k$ ب. $\sum_{k=1}^{13} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{13} k^3$

سوال 21: $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$

سوال 22: $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

سوال 23: $\sum_{k=1}^{6} (3-k^2)$

سوال 24: $\sum_{k=1}^{6} (k^2-5)$

سوال 25: $\sum_{k=1}^{5} k(3k+5)$

سوال 26: $\sum_{k=1}^{7} k(2k+1)$

سوال 27: $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$

سوال 28: $\left(\sum\limits_{k=1}^{7} k\right)^2 - \sum\limits_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$

ریمان مجموعوں کے لئے مستطیلیں

سوال 29 تا سوال 32 میں تفاعل $f(x)$ کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کی ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k$ کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں k ویں ذیلی وقفہ کا (ا) بایاں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ c_k ہے۔ (بائیں، دائیں اور وسطی نقطوں کے لئے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

سوال 29: $f(x) = x^2 - 1, \quad [0,2]$

سوال 30: $f(x) = -x^2, \quad [0,1]$

سوال 31: $f(x) = \sin x, \quad [-\pi, \pi]$

سوال 32: $f(x) = \sin x + 1, \quad [-\pi, \pi]$

سوال 33: خانہ بندی $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ کا معیار تلاش کریں۔

سوال 34: خانہ بندی $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ کا معیار تلاش کریں۔

حد کا بطور تکمل اظہار

سوال 35 تا سوال 42 میں دیے گئے حد کو بطور قطعی تکمل ظاہر کریں۔

سوال 35: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$ جہاں $[0,2]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 36: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} 2c_k^3 \Delta x_k$ جہاں $[-1,0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 37: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\Delta x_k$ جہاں $[-7,5]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 38: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \Delta x_k$ جہاں $[1,4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 39: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$ جہاں $[2,3]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 40: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4-c_k^2}\Delta x_k$ جہاں $[0,1]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 41: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\Delta x_k$ جہاں $[-\pi/4,0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 42: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan c_k)\Delta x_k$ جہاں $[0,\pi/4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

مستقل تفاعل

سوال 43 تا سوال 48 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 43: $\int_{-2}^{1} 5\,\mathrm{d}x$

سوال 44: $\int_{3}^{7} (-20)\,\mathrm{d}x$

سوال 45: $\int_{0}^{3} (-160)\,\mathrm{d}t$

سوال 46: $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 47: $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5\,\mathrm{d}s$

سوال 48: $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}r$

رقبہ سے تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 49 تا سوال 56 میں متکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبہ سے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 49: $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$

سوال 50: $\int_{1/2}^{3/2} (-2x+4)\,\mathrm{d}x$

سوال 51: $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 52: $\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 53: $\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$

سوال 54: $\int_{-1}^{1} (1-|x|) \,\mathrm{d}x$

سوال 55: $\int_{-1}^{1} (2-|x|) \,\mathrm{d}x$

سوال 56: $\int_{-1}^{1} (1+\sqrt{1-x^2}) \,\mathrm{d}x$

سوال 57 تا سوال 60 میں تکمل کی قیمت کو رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال 57: $\int_{0}^{b} x \,\mathrm{d}x, \quad b>0$

سوال 58: $\int_{0}^{b} 4x \,\mathrm{d}x, \quad b>0$

سوال 59: $\int_{a}^{b} 2s \,\mathrm{d}s, \quad 0<a<b$

سوال 60: $\int_{a}^{b} 3t \,\mathrm{d}t, \quad 0<a<b$

قیمت کی تلاش

سوال 61 تا سوال 72 میں دیے تکمل کی قیمت کو مثال 5.33 اور مثال 5.34 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 61: $\int_{1}^{\sqrt{2}} x \,\mathrm{d}x$

سوال 62: $\int_{0.5}^{2.5} x \,\mathrm{d}x$

سوال 63: $\int_{\pi}^{2\pi} \theta \,\mathrm{d}\theta$

سوال 64: $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r \,\mathrm{d}r$

سوال 65: $\int_{0}^{\sqrt[3]{7}} x^2 \,\mathrm{d}x$

سوال 66: $\int_{0}^{0.3} s^2 \,\mathrm{d}s$

سوال 67: $\int_{0}^{1/2} t^2 \,\mathrm{d}t$

سوال 68: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \,\mathrm{d}\theta$

سوال 69: $\int_0^{2a} x \,\mathrm{d}x$

سوال 70: $\int_a^{\sqrt{3}a} x \,\mathrm{d}x$

سوال 71: $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 \,\mathrm{d}x$

سوال 72: $\int_0^{3b} x^2 \,\mathrm{d}x$

رقبے کی تلاش

سوال 73 تا سوال 76 میں وقفہ $[0, b]$ پر x محور اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ قطعی تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 73: $y = 3x^2$

سوال 74: $y = \pi x^2$

سوال 75: $y = 2x$

سوال 76: $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال 77: درج ذیل تکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کہاں مثبت ہے؟)

$$\int_a^b (x - x^2) \,\mathrm{d}x$$

سوال 78: درج ذیل تکمل کی قیمت کم سے کم کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) \,\mathrm{d}x$$

سوال 79: بڑھتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے

(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج اوپر اٹھتی ہے۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی n عدد ذیلی وقفوں میں خانہ بندی P ہے جہاں ایک خانے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہے۔ شکل کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس خانہ بندی پر f کے بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق کو ترسیمی طور پر مستطیل R سے ظاہر کیا جا

سکتا ہے جس کی جسامت $[f(b)-f(a)]$ ضرب Δx ہے۔(اشارہ: فرق $H-L$ ان رقبوں کا مجموعہ ہے جن کے وتر $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \cdots, Q_{n-1}Q_n$ اس ترسیم پر پائے جاتے ہیں۔انہیں افقی مستطیل R پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔)
(ب) فرض کریں ذیلی وقفوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں بلکہ خانہ بندی $[a,b]$ پر مختلف ذیلی وقفوں کی لمبائی Δx_k مختلف ہے۔ اگر Δx_H خانہ بندی P کا معیار ہو تب دکھائیں کہ

$$H-L \leq \left|f(b)-f(a)\Delta x_H\right|$$

ہو گا لہٰذا $\lim_{\|P\|\to 0}(H-L)=0$ ہو گا۔

سوال 80: گھٹتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے
(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a,b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج نیچے گرتی ہے۔ سوال 79 کی طرح اس کا خاکہ بنائیں۔ فرض کریں وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی P ہے جہاں تمام خانوں کی لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہیں۔ سوال 79 کی طرح فرق $H-L$ تلاش کریں۔
(ب) فرض کریں کہ خانوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہے بلکہ ہر Δx_k مختلف ہے۔ دکھائیں کہ سوال 79 کی عدم مساوات

$$H-L \leq \left|f(b)-f(a)\right| \Delta x_H$$

اب بھی کار آمد ہے لہٰذا $\lim_{\|P\|\to 0}(H-L)=0$ ہو گا۔

سوال 81: تکمل $\int_0^b x^2 \,\mathrm{d}x,\ b>0$ کی قیمت مثال 5.34 کی طرز پر حاصل کریں البتہ اب ہر خانے کا بائیں سر نقطی قیمت استعمال کریں۔

سوال 82: دکھائیں کہ مجموعہ

$$S_n=\frac{1}{n}\Big[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\Big]$$

درحقیقت $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ کا تخمینی رقبہ دیتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔(اشارہ: وقفہ $[0,1]$ کا یکساں n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کا بائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبہ کا مجموعہ لکھیں۔)

سوال 83: درج ذیل

$$S_n=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{(n-1)^2}{n^3}$$

کو

$$S_n=\frac{1}{n}\Big[\Big(\frac{1}{n}\Big)^2+\Big(\frac{2}{n}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2\Big]$$

روپ میں لکھیں جس کو $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ $[0,1]$ کو n برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں اور ہر خانے کے بائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیں۔)

سوال 84: درج ذیل کلیہ استعمال

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \cdots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos(m+1/2)h}{2\sin(h/2)}$$

کرتے ہوئے $y = \sin x$ کے نیچے $x = 0$ تا $x = \pi/2$ رقبہ درج ذیل دو اقدام سے تلاش کریں۔

ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ کو n برابر لمبائیوں کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مطابقتی بالائی مجموعہ H تلاش کریں۔

ب. $n \to \infty$ اور $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$ کرتے ہوئے H کا حد تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 85 تا سوال 90 میں دیے گئے تکمل پر مرکوز ریمان مجموعوں کے ساتھ منسلک مستطیلوں کو کمپیوٹر پر بنائیں۔ ذیلی وقفوں کی تعداد $n = 4, 10, 20, 50$ لیں اور ان کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر لیں۔

سوال 85: $\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

سوال 86: $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

سوال 87: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = 0$

سوال 88: $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \,\mathrm{d}x = 1$

سوال 89: $\int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}x = 1$

سوال 90: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$

سوال 91: (ا) مجموعہ S_n جس کو سوال 82 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (ب) سوال 83 میں دیے گئے S_n کے لئے دوبارہ حل کریں۔

سوال 92: مجموعہ $\sin h + \sin 2h + \cdots \sin mh$ جسے سوال 84 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر کی مدد سے $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔

سوال 93: بائیں نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مثال 5.23 کے مجموعہ کی سگما علامتی روپ درج ذیل ہے۔

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} 4[9 - (-2 + (k-1))^2]$$

ا. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_8 اور S_{25} لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{4}{8}$ اور $\frac{4}{25}$ ہو گی۔

ب. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_n لکھیں جو n خانوں پر مشتمل ہے اور جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{4}{n}$ ہے۔

ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 94: بائیں سر نقطی قیمت مجموعہ برائے مثال 5.24 درج ذیل ہے۔

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} \pi[16 - (-1 + (k-1))^2]$$

ا. بائیں سر نقطی مجموعہ S_{16} اور S_{80} کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{10}$ ہو گی۔

ب. بائیں سر نقطی مجموعہ S_n کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{8}{n}$ اور خانوں کی تعداد n ہو گی۔

ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ

اس حصہ میں تکمل کے قواعد اور تکمل کا رقبے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ اوسط قیمت پر دوبارہ غور کیا جائے گا۔

قطعی تکمل کے خواص

ہم عموماً قطعی تکملوں کا مجموعہ اور فرق حاصل کرنا چاہتے ہیں یا متکمل کو مستقل سے ضرب دینا چاہتے ہیں یا ان کا موازنہ دیگر قطعی تکمل کے ساتھ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ایسا درج ذیل قواعد کے تحت کرتے ہیں۔

قواعد برائے قطعی تکمل

1. صفر: $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (تعریف)

2. تکمل کی ترتیب: $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (تعریف)

3. مستقل مضرب: $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے)
$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(k=-1)$

4. مجموعہ اور فرق: $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mp \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

5. جمع پذیری: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

6. کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات: اگر وقفہ $[a,b]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت f_H اور کم سے کم قیمت f_L ہو تب درج ذیل ہو گا:

$$f_L \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f_H \cdot (b-a)$$

7. غلبہ: اگر $[a,b]$ پر $f(x) \ge g(x)$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

اگر $[a,b]$ پر $f(x) \ge 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$$

ماسوائے پہلے دو قواعد کے تمام کو قطعی تکمل کی تعریف بذریعہ ریمان مجموعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ ان قواعد کے ثبوت نہایت آسان ہوں گے۔ چونکہ ریمان مجموعہ یہ خواص رکھتا ہے لہٰذا آپ سوچتے ہوں گے کہ مجموعہ کا حد بھی یہی خواص رکھتا ہو گا۔ حقیقت میں ثبوت پیش کرتے ہوئے ذیلی وقفوں کے معیار کے $\epsilon - \delta$ کے پیچیدہ دلائل درکار ہوں گے۔ یقیناً ان قواعد کے ثبوت اتنے آسان نہیں ہیں۔ہم صرف دو قواعد کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ باقی قواعد کے ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پائے جاتے ہیں۔

دھیان رہے کہ قاعدہ 1 درحقیقت ایک تعریف ہے۔ ہم چاہیں گے کہ صفر لمبائی کے تمام تکمل کی قیمت صفر ہو۔ پہلا قاعدہ قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $a = b$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 2 بھی تعریف ہے جو قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $b < a$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 3 اور قاعدہ 4 حد اور غیر قطعی تکمل کے مماثل قواعد کی طرح ہیں۔دو تفاعل کے تکمل جانتے ہوئے ہم ان کے تمام مستقل مضرب، مجموعہ اور فرق کے تکمل جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ 3 اور 4 کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

اختیاری قابل تکمل تفاعل کے کسی بھی متناہی خطی میل کا جزو در جزو تکمل حاصل کر سکتے ہیں۔ کسی بھی مستقل $c_1, \cdot c_n$ جن کی علامتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں، اور وقفہ $[a, b]$ پر قابل تکمل تفاعل $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + c_n \int_a^n f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

جس کا ثبوت، جو ریاضی ماخوذ سے حاصل کیا جا سکتا ہے، کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

شکل میں مثبت تفاعل کے لئے قاعدہ 5 دکھایا گیا ہے اگرچہ یہ قاعدہ کسی بھی تفاعل کے لئے درست ہے۔

ثبوت: قاعدہ 3

قاعدہ 3 کے تحت تفاعل ضرب k کا تکمل تفاعل کا تکمل ضرب k ہو گا۔ یہ درج ذیل کی بنا پر درست ہے۔

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(c_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\|\to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\ &= k \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\ &= k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

ثبوت: قاعدہ 6

قاعدہ 6 کہتا ہے کہ $[a, b]$ پر تکمل کی قیمت کبھی بھی f کی کم سے کم قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے کم نہیں ہو گی اور نا ہی یہ کبھی f کی زیادہ سے زیادہ قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے زیادہ ہو گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $[a, b]$ کی کسی بھی خانہ بندی اور c_k کی کسی بھی انتخاب

کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f_L \cdot (b-a) &= f_L \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_L \cdot \Delta x_k \\
&\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \\
&\le f_H \cdot \Delta x_k \\
&= f_H \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \\
&= f_H \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

مختصراً وقفہ $[a,b]$ پر f کے تمام ریمان مجموعے درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$f_L \cdot (b-a) \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le f_H \cdot (b-a)$$

لہٰذا ان کا حد، یعنی تکمل، بھی اس شرط کو مطمئن کرتا ہو گا۔

□

مثال 5.35: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 5, \quad \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -2, \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x = 7$$

درج ذیل ہوں گے۔

.1

$$\int_{4}^{1} = -\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -(-2) = 2 \qquad \text{قاعدہ } 2$$

.2

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2(5) + 3(7) = 31 \qquad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}
\end{aligned}$$

.3

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-2) = 3 \qquad \text{قاعدہ 5}$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں درج ذیل تین عمومی تکملات کا حصول سیکھا۔

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a) \qquad (c \text{ مستقل}) \tag{5.16}$$

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad (0 < a < b) \tag{5.17}$$

$$\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} \qquad (b < 0) \tag{5.18}$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتائج کو وسعت دی جا سکتی ہے۔

مثال 5.36: قیمت تلاش کریں: $\int_0^2 (\frac{t^2}{4} - 7t + 5)\,\mathrm{d}t$

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - 7t + 5\right) \mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t - 7\int_0^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 5\,\mathrm{d}t && \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2^3}{3}\right) - 7\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 5(2-0) && \text{مساوات 5.16 تا مساوات 5.18}\\
&= \frac{2}{3} - 14 + 10 = -\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

□

مثال 5.37: قیمت تلاش کریں: $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx &= \int_0^3 x^2\,dx && \text{قاعدہ 5}\\
\int_2^3 x^2\,dx &= \int_0^3 x^2\,dx - \int_0^2 x^2\,dx && \text{درج بالا حل کریں}\\
&= \frac{3^2}{3} - \frac{2^3}{3} && \text{مساوات 5.18}\\
&= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

□

ہم $\int_2^3 x^2\,dx$ کے حل پر مزید غور حصہ میں کریں گے۔

قطعی تکمل کا کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات (کمتر بلند تر عدم مساوات، قاعدہ 6) کہتا ہے کہ $\int_a^b f\,dx$ کا $f_L \cdot (b-a)$ کم سے کم حد ہے جبکہ $f_H \cdot (b-a)$ زیادہ سے زیادہ حد ہے۔

مثال 5.38: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx$ کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

حل: وقفہ $[0,1]$ پر $\sqrt{1+\cos x}$ کی زیادہ سے زیادہ (بلند تر) قیمت $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx &\le \sqrt{1+\cos x}_{\text{بلند تر}} \cdot (1-0) && \text{قاعدہ 6}\\
&\le \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

تکمل کی قیمت $\sqrt{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تکمل 2 نہیں ہو سکتا ہے۔ □

مثال 5.39: عدم مساوات $\cos x \ge (1 - x^2/2)$ تمام x کے لئے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \cos x\,dx$ کی کم سے کم (کمتر) قیمت تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos x\,dx &\ge \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx && \text{قاعدہ 7}\\
&\ge \int_0^1 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx && \text{قاعدہ 3، قاعدہ 4}\\
&\ge 1\cdot(1-0) - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1)^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83
\end{aligned}$$

تکمل کی قیمت کم از کم $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔ □

تکمل اور کل رقبہ

اگر وقفہ $[a,b]$ پر $y=f(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو جس کی قیمتیں مثبت بھی اور منفی بھی ہوں تب $[a,b]$ پر f کا ریمان مجموعہ x محور کے بالائی جانب مستطیلوں کا مثبت رقبوں اور x محور کے نیچے جانب مستطیلوں کا منفی رقبوں کا مجموعہ ہو گا۔ چونکہ مثبت اور منفی مقداریں ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں لہٰذا اس مجموعے کی تحدیدی قیمت تفاعل اور x محور کے بیچ کل رقبہ سے کم ہو گی۔ تکمل کی قیمت محور سے اوپر جانب رقبہ منفی محور سے نیچے جانب رقبہ کے برابر ہو گی۔

اس کا مطلب ہے کہ رقبہ کو تکمل سے حاصل کرتے ہوئے دھیان رکھنا ہو گا۔

مثال 5.40: وقفہ $0 \le x \le 3$ پر منحنی $y=4-x^2$ اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: x پر وقفہ $[0,3]$ کو منحنی دو خانوں میں تقسیم کرتی ہے۔ایک خانے میں $f(x)=4-x^2$ کی قیمت مثبت اور دوسرے خانے میں منفی ہے۔ منحنی اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان خانوں پر تکمل لے کر جوابات کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔

وقفہ $[0,2]$ پر تکمل:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 4\,\mathrm{d}x - \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= 4(2-0) - \frac{(2)^3}{3} && \text{مساوات 5.16 اور مساوات 5.18}\\ &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

وقفہ $[2,3]$ پر تکمل:

$$\begin{aligned}\int_2^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 4\,\mathrm{d}x - \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= 4(3-2) - \Big(\frac{(3)^2}{3} - \frac{(2)^3}{3}\Big) && \text{مساوات 5.16 اور مثال 5.37}\\ &= 4 - \frac{19}{3} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

کل رقبہ $\frac{16}{3} + \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{23}{3}$ ہو گا۔ □

اختیاری استمراری تفاعل کی اوسط قیمت

ہم نے مثال 5.25 میں غیر منفی استمراری تفاعل کی اوسط قیمت پر تبصرہ کیا۔ ہم اب f کا غیر منفی ہونے کی شرط کو ختم کرتے ہوئے تفاعل کی اوسط قیمت کی تعریف پیش کرنے کے قابل ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر استمراری تفاعل کم از کم ایک بار اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔

ہم دوبارہ ریاضیات سے اوسط قیمت کا تصور لیتے ہیں جہاں n اعداد کی انفرادی قیمتوں کے مجموعہ کو n سے تقسیم کرنے سے اعداد کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔بند وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کے لئے لامتناہی تعداد کے اعداد کو لینا ہو گا لیکن ہم یکساں وقفوں پر تفاعل سے نمونہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم $[a,b]$ کو برابر لمبائیوں کے n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہو گی۔ ہم ہر ذیلی وقفے پر f کی قیمت نقطہ c_k پر حاصل کرتے ہیں۔ ان n نمونوں کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \text{مجموعہ کی سگما روپ}\\
&= \frac{\Delta x}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n}\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x}_{\text{پر } f \text{ کا ریمان مجموعہ } [a,b]}
\end{aligned}
$$

یوں نمونی قیمتوں کی اوسط قیمت ہر صورت $[a,b]$ پر f کا ریمان مجموعہ ضرب $\frac{1}{b-1}$ ہو گی۔ ہم جیسے جیسے نمونہ کی جسامت (تعداد) بڑھاتے جائیں اور خانہ بندی کے معیار کو صفر کے قریب تر کریں، یہ اوسط قیمت $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ تک پہنچے گی۔ اس نتیجہ سے ہمیں درج ذیل تعریف ملتی ہے۔

تعریف: اگر $[a,b]$ پر f قابل تکمل تفاعل ہو تب $[a,b]$ پر f کی اوسط قیمت[30] درج ذیل ہو گی۔

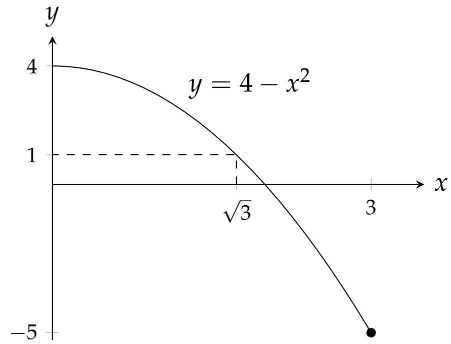
$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

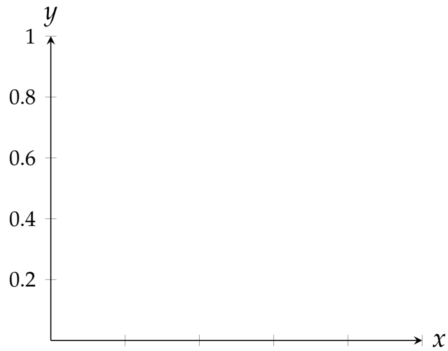
مثال 5.41: وقفہ $[0,3]$ پر $f(x) = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ کیا دیے گئے وقفے میں کسی نقطے پر f کی قیمت اس اوسط جتنی ہو گی؟

---

[30] average (mean) value



شکل 5.37: وقفہ $[0,3]$ پر تفاعل $f = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت 1 کو تفاعل $x = \sqrt{3}$ پر اختیار کرتا ہے (مثال 5.41)۔



حل:

$$\begin{aligned}
f_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big(\int_0^3 4\,\mathrm{d}x - \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{3}\Big(4(3-0) - \frac{(3)^3}{3}\Big) = \frac{1}{3}(12-9) = 1
\end{aligned}$$

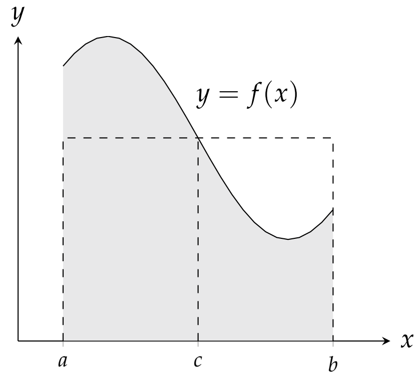
وقفہ $[0,3]$ پر f کی اوسط قیمت 1 ہے۔ تفاعل کی قیمت یہی تب ہو گی جب $4 - x^2 = 1$ ہو گا جس سے $x = \mp\sqrt{3}$ ملتے ہیں۔ چونکہ ان دو نقطوں میں سے صرف $x = \sqrt{3}$ وقفہ $[0,3]$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا دیے گئے وقفے میں $x = \sqrt{3}$ پر f کی قیمت اوسط قیمت 1 کے برابر ہو گی (شکل 5.37)۔ □

اوسط قیمت مسئلہ برائے قطعی تکملات

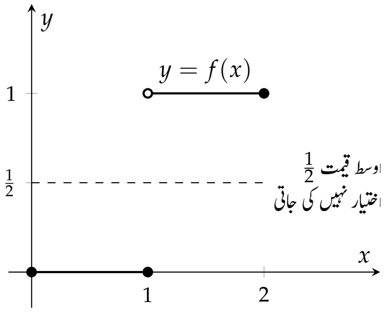
بند وقفہ پر استمراری تفاعل کی قیمت، بند وقفہ پر کم از کم ایک بار، تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی۔ اس فقرے کو قطعی تکملات کا اوسط قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ 5.2: مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات
اگر $[a,b]$ پر f قابل تکمل ہو تب $[a,b]$ میں کسی نقطہ c پر درج ذیل ہو گا (شکل 5.38)۔

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



شکل 5.38: وقفہ $[a, b]$ کے کسی نقطہ c پر $f(c) \cdot (b-1) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔



شکل 5.39: غیر استمراری تفاعل ضروری نہیں کہ اوسط قیمت اختیار کرے۔

ہم نے مثال 5.41 میں f کو حاصل اوسط قیمت کے برابر پر کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کی جہاں تفاعل اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔ البتہ اس سے یہ حقیقت ثابت نہیں ہوتی ہے کہ ایسا نقطہ موجود ہونا لازمی ہے۔ اس سے صرف اتنا ثابت ہوتا ہے کہ مثال 5.41 میں ایسا نقطہ موجود تھا۔ مسئلہ 5.2 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں زیادہ عمومی دلیل درکار ہو گی۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.2
اگر ہم قاعدہ 6 میں (کمتر بلند تر قاعدہ) دونوں اطراف کو $(b-a)$ سے تقسیم کریں تب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f_L \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f_H$$

چونکہ f استمراری ہے لہٰذا استمراری تفاعل کے مسئلہ 2.9 کے تحت تفاعل f_L اور f_H کے بیچ تمام قیمتیں اختیار کرے گا۔ اس طرح f ہر صورت وقفہ $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ قیمت بھی اختیار کرے گا۔

□

تفاعل کا استمراری ہونا یہاں ضروری ہے۔ غیر استمراری تفاعل اپنی اوسط قیمت کے اوپر سے چھلانگ لگا کر گزر سکتا ہے (شکل 5.39)۔

ہم مسئلہ 5.2 سے مزید کیا جان سکتے ہیں؟ ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5.42: اگر $[a,b]$ پر f قابل تکمل ہو جہاں $a \neq b$ ہے اور اگر

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

ہو تب $[a,b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x) = 0$ ہو گا۔

حل: وقفہ $[a,b]$ پر f کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0$$

مسئلہ 5.2 کے تحت $[a,b]$ میں کسی نقطہ c پر f یہی اوسط قیمت اختیار کرے گا۔ □

سوالات

معلوم خواص اور قیمتوں سے دیگر تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال 1: فرض کریں f اور g استمراری ہیں اور درج ذیل تکملات دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 8$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_2^2 g(x)\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_5^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

ج. $\int_1^2 3f(x)\,\mathrm{d}x$

د. $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

ہ. $\int_1^5 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

و. $\int_1^5 [4f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

سوال 2: فرض کریں f اور f استمراری ہیں اور درج ذیل دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 h(x)\,\mathrm{d}x = 4$$

صفحہ 556 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^9 -2f(x)\,\mathrm{d}x$ ج. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,\mathrm{d}x$ ہ. $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,\mathrm{d}x$ د. $\int_9^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ و. $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$

سوال 3: فرض کریں $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u$ ج. $\int_2^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

ب. $\int_1^2 \sqrt{3}f(z)\,\mathrm{d}z$ د. $\int_1^2 [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

سوال 4: فرض کریں $\int_{-3}^0 g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}$ دیا گیا ہے۔درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_0^{-3} g(t)\,\mathrm{d}t$ ب. $\int_{-3}^0 g(u)\,\mathrm{d}u$ ج. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,\mathrm{d}x$ د. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r$

سوال 5: فرض کریں f استمراری ہے جبکہ $\int_0^3 f(z)\,\mathrm{d}z = 3$ اور $\int_0^4 f(z)\,\mathrm{d}z = 7$ دیے گیے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_3^4 f(z)\,\mathrm{d}z$ ب. $\int_4^3 f(t)\,\mathrm{d}t$

سوال 6: فرض کریں h استمراری ہے جبکہ $\int_{-1}^1 h(r)\,\mathrm{d}r = 0$ اور $\int_{-1}^3 h(r)\,\mathrm{d}r = 6$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^3 h(r)\,\mathrm{d}r$ ب. $-\int_3^1 h(u)\,\mathrm{d}u$

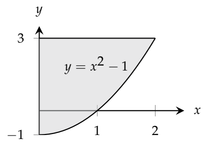
سوال 7 تا سوال 18 میں دیے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7: $\int_3^1 7\,\mathrm{d}x$

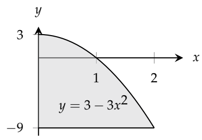
سوال 8: $\int_0^{-2} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

سوال 9: $\int_0^2 5x\,\mathrm{d}x$

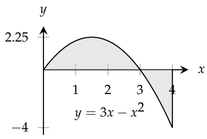
سوال 10: $\int_3^5 \frac{x}{8}\,\mathrm{d}x$



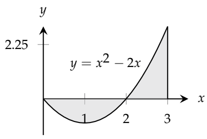
شکل 5.40: رقبہ سوال 19



شکل 5.41: رقبہ سوال 20



شکل 5.42: رقبہ سوال 21



شکل 5.43: رقبہ سوال 22

سوال 11: $\int_0^2 (2t-3)\,\mathrm{d}t$

سوال 12: $\int_0^{\sqrt{2}} (t-\sqrt{2})\,\mathrm{d}t$

سوال 13: $\int_2^1 (1+\frac{z}{2})\,\mathrm{d}z$

سوال 14: $\int_3^0 (2z-3)\,\mathrm{d}z$

سوال 15: $\int_1^2 3u^2\,\mathrm{d}u$

سوال 16: $\int_{1/2}^1 24u^2\,\mathrm{d}u$

سوال 17: $\int_0^2 (3x^2+x-5)\,\mathrm{d}x$

سوال 18: $\int_1^0 (3x^2+x-5)\,\mathrm{d}x$

رقبے

سوال 19 تا سوال 22 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 19: $x=0$ تا $x=2$ کے مابین منحنی $y=x^2-1$ اور y محور کے بیچ رقبہ (شکل 5.40)۔

سوال 20: رقبہ شکل 5.41 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 21: رقبہ شکل 5.42 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 22: رقبہ شکل 5.43 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 23 تا سوال 26 میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد (ا) دیے وقفے پر تفاعل تکمل کریں، اور (ب) تفاعل اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 23: $y = x^2 - 6x + 8, \quad [0,3]$

سوال 24: $y = -x^2 + 5x - 4, \quad [0,2]$

سوال 25: $y = 2x - x^2, \quad [0,3]$

سوال 26: $y = x^2 - 4x, \quad [0,5]$

اوسط قیمت

سوال 27 تا سوال 34 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اس وقفے پر تفاعل کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ دیے گئے وقفہ پر کس نقطہ یا نقطوں پر تفاعل کی قیمت اس کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی؟

سوال 27: $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, \sqrt{3}]$

سوال 28: $f(x) = -\frac{x^2}{2}, \quad [0,3]$

سوال 29: $f(x) = -3x^2 - 1, \quad [0,1]$

سوال 30: $f(x) = 3x^2 - 3, \quad [0,1]$

سوال 31: $f(t) = (t-1)^2, \quad [0,3]$

سوال 32: $f(t) = t^2 - t, \quad [-2,1]$

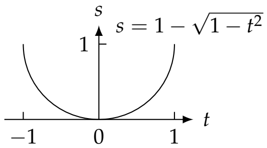
سوال 33: (ا)$[0,3]$، (ب)$[1,3]$، (ج)$[-1,3]$، $g(x) = |x| - 1$

سوال 34: (ا)$[-1,0]$، (ب)$[0,1]$، (ج)$[-1,1]$، $h(x) = -|x|$

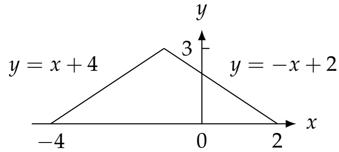
سوال 35 تا سوال 38 دیے گئے وقفہ پر تفاعل کی اوسط قیمت (بغیر تکمل) تلاش کریں۔

سوال 35:

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & -4 \le x \le -1 \\ -x+2, & -1 < x \le 2 \end{cases} \qquad [-4,2] \qquad \text{شکل } 5.44$$



شکل 5.45



شکل 5.44

سوال 36: وقفہ $[-1, 1]$ پر تفاعل $f(t) = 1 - \sqrt{1-t^2}$ جس کو شکل 5.45 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 37: وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $f(t) = \sin t$ دیا گیا ہے۔

سوال 38: وقفہ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ پر تفاعل $f(\theta) = \tan\theta$ دیا گیا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 39: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔
$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 40: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کا بہتر اندازہ حاصل کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

سوال 41: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کسی صورت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 42: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{x+8}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $2\sqrt{2}$ اور 3 کے بیچ پائی جاتی ہے۔

سوال 43: فرض کریں f استمراری ہے اور $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[1, 2]$ پر کم از کم ایک بار $f(x) = 4$ ہو گا۔

سوال 44: فرض کریں $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہیں جہاں $a \neq b$ ہے۔ مزید $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 0$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[a, b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x) = g(x)$ ہو گا۔

سوال 45: غیر منفی تفاعل کا تکمل
کمتر بلند تر عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \geq 0, \quad [a,b] \quad \stackrel{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

سوال 46: غیر مثبت تفاعل کا تکمل
درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \leq 0, \quad [a,b] \quad \stackrel{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

سوال 47: عدم مساوات $\sin x \leq x$ کسی بھی $x \geq 0$ کے لئے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کی بالائی حد تلاش کریں۔

سوال 48: وقفہ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ پر عدم مساوات $\sec x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ درست ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے $\int_0^1 \sec x\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کی زیریں حد تلاش کریں۔

سوال 49: اگر $[a,b]$ پر قابل تکمل f کی عمومی قیمت $f_{\text{اوسط}}$ ہو تب $[a,b]$ پر عدد $f_{\text{اوسط}}$ اور f کے تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ کیا ایسا ہوتا ہے؟ کیا درج ذیل درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b f_{\text{اوسط}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

سوال 50: کیا اچھا ہوتا کہ وقفہ $[a,b]$ پر قابل تکمل تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل قواعد پر پورا اترتی۔

ا. $(f+g)_{\text{اوسط}} = f_{\text{اوسط}} + g_{\text{اوسط}}$

ب. $(kf)_{\text{اوسط}} = k(f_{\text{اوسط}})$

ج. $f_{\text{اوسط}} \leq g_{\text{اوسط}}$ اگر $f(x) \leq g(x)$

سوال 51: اگر $150\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ اور واپسی اسی راہ کو طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو تب دونوں اطراف کو ملا کر آپ کی اوسط رفتار کتنی ہو گی؟

سوال 52: ایک ڈیم سے $10\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا اور اس کے بعد $20\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے مزید $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا۔ پانی خارج کرنے کی اوسط شرح دریافت کریں۔

5.7 بنیادی مسئلہ

اس حصہ میں تکملی احصاء کا بنیادی مسئلہ پیش کیا جائے گا جو تکمل اور تفرق کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اس مسئلہ نے ریاضیات میں بہت زیادہ ترقی کو ممکن بنایا جس نے اگلے دو صدیوں تک سائنس میں ہلچل مچا دی۔انسانی تاریخ میں اس مسئلہ کی دریافت کو سب سے زیادہ اہم تصور کیا جاتا ہے۔ لبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس مسئلہ کو دریافت کیا۔

بنیادی مسئلہ، جزو اول

قابل تکمل تفاعل $f(t)$ کا مقررہ عدد a سے عدد x تک تکمل از خود ایک تفاعل F ہو گا جس کی x پر قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.19}$$

مثال کے طور پر اگر f غیر منفی ہو اور a کے دائیں جانب x پایا جاتا ہو تب a تا x ترسیم کے نیچے رقبہ $F(x)$ ہو گا۔ تکمل کا بالائی حد x ہے اور F کسی بھی حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی طرح ایک تفاعل ہے۔ یوں متغیر x کی ہر قیمت کے لئے $F(x)$ ایک مخصوص قیمت دیگا جو a تا x تفاعل f کا تکمل ہو گا۔

نئے تفاعل متعارف کرنے کی ایک اہم ترکیب مساوات 5.19 دیتی ہے جو تفرقی مساوات کا حل بھی دیتی ہے (جس پر کچھ دیر میں غور کیا جائے گا)۔ مساوات 5.19 کا یہاں ذکر کرنا اس لئے ضروری ہے کہ یہ تکمل اور تفرق کے بیچ تعلق بیان کرتی ہے۔ یوں اگر f کوئی بھی استمراری تفاعل ہو تب F متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق f ہو گا۔ اس طرح ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

یہ تصور اتنا اہم ہے کہ یہ احصاء کے بنیادی مسئلہ کا پہلا جزو دیتا ہے۔

مسئلہ 5.3: احصاء کا بنیادی مسئلہ، جزو اول
اگر $[a,b]$ پر f استمراری ہو تب $[a,b]$ کے ہر نقطہ پر $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کا درج ذیل تفرق پایا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x), \quad a \le x \le b \tag{5.20}$$

یہ نتیجہ خوبصورت، طاقتور اور حیران کن ہے اور عین ممکن ہے کہ مساوات 5.20 پوری ریاضیات میں اہم ترین مساوات ہو۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کے لئے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$ کا حل موجود ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کسی دوسرے تفاعل،

یعنی $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ، کا تفرق ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے۔ اور یہ کہتی ہے کہ تکمل اور تفرق کے عمل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5.3
ہم تفرق کی تعریف کو تفاعل $F(x)$ پر لاگو کرتے ہوئے اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل حاصل تقسیم

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \tag{5.21}$$

لکھ کر دکھاتے ہیں کہ $h \to 0$ کرتے ہوئے اس کا حد $f(x)$ ملتا ہے۔

مساوات 5.21 میں $F(x+h)$ اور $F(x)$ کی تکملی روپ پر کرنے سے شمار کنندہ درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

صفحہ 556 پر جمع پذیری کا قاعدہ برائے تکملات دائیں ہاتھ کی درج ذیل سادہ روپ دیتی ہے

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

لہٰذا مساوات 5.21 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}&=\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]\\&=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.22}$$

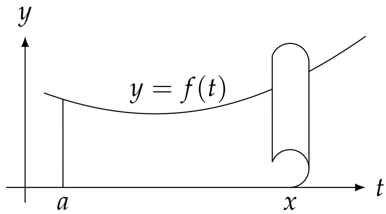
مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات (مسئلہ 5.2) کے تحت مساوات 5.22 میں دی گئی آخری تعلق کی قیمت، وقفہ x تا $x+h$ پر f کی کسی ایک قیمت کے برابر ہو گی۔ یوں اس وقفہ میں کسی عدد c پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=f(c) \tag{5.23}$$

یوں $h \to 0$ کرتے ہوئے $\frac{1}{h}$ ضرب تکمل $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ کی قیمت جاننے کی لئے ہم $h \to 0$ کرتے ہوئے $f(c)$ کی قیمت پر نظر رکھتے ہیں۔

جیسے جیسے $h \to 0$ ہوتا ہے ویسے ویسے وقفے کا سر $x+h$ اس کے سر x کے قریب سے قریب ہوتا جاتا ہے جس کی وجہ سے c بھی x کے قریب سے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ چونکہ x پر f استمراری ہے لہٰذا $f(c)$ کی قیمت $f(x)$ کے قریب سے قریب پہنچتی ہے:

$$\lim_{h\to 0} f(c)=f(x) \tag{5.24}$$



شکل 5.46: نقطہ x پر زمین کو قالین شرح $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x)$ سے ڈھانپتا ہے۔

دوبارہ شروع سے بات کرتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} && \text{تفرق کی تعریف} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{مساوات 5.22} \\
&= \lim_{h\to 0} f(c) && \text{مساوات 5.23} \\
&= f(x) && \text{مساوات 5.24}
\end{aligned}
$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگر f کی قیمتیں مثبت ہوں تب درج ذیل مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

کی ایک خوبصورت جیومیٹریائی معنی اخذ کی جا سکتی ہے۔چونکہ تب a تا x تفاعل f کا تکمل a تا x محور x اور f کے بیچ رقبہ ہو گا۔فرض کریں کہ آپ اس رقبہ پر بائیں سے دائیں چلتے ہوئے ایک قالین بچھاتے ہیں جس کی متغیر چوڑائی $f(t)$ ہو۔جب قالین نقطہ x سے گزرتا ہے اس لمحہ زمین ڈھانپنے کی شرح $f(x)$ ہو گی (شکل 5.46)۔

مثال 5.43:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\pi}^x \cos t\,\mathrm{d}t = \cos x && \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \cos t \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2} && \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

□

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم