احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سر گرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

4.7 خط بندی اور تفرقات

بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی خط بندی[20] پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ متعارف کرتے ہیں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیمائش میں خلل اور حساسیت کو $\mathrm{d}y$ سے ظاہر کریں گے۔

خطی تخمین

آپ شکل 4.126 میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

شکل 4.127 کی علامتیت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ہے۔یوں مماس درج ذیل تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جا سکتا ہے۔

تعریف:
اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

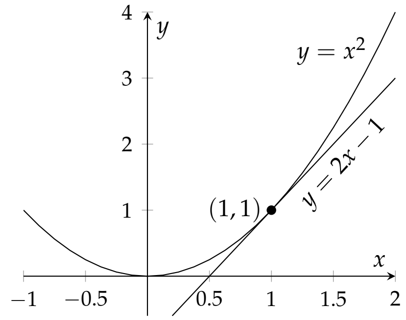
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{4.15}$$

نقطہ a پر f کی خط بندی[21] ہو گی۔ f کی درج ذیل تخمین L

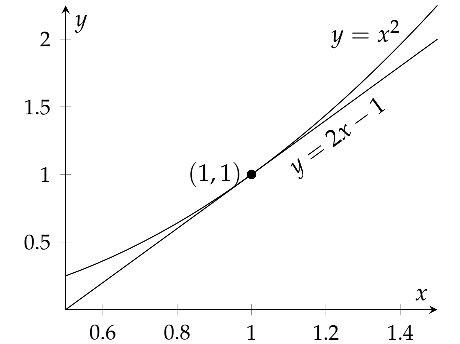
$$f(x) \approx L(x)$$

نقطہ a پر تفاعل f کی معیاری خطی تخمین[22] ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا وسط[23] ہے۔

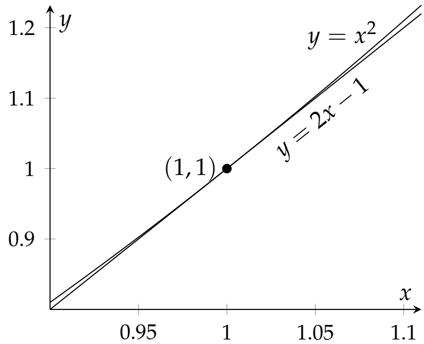
linearizations[20]
linearization[21]
standard linear approximation[22]
center[23]



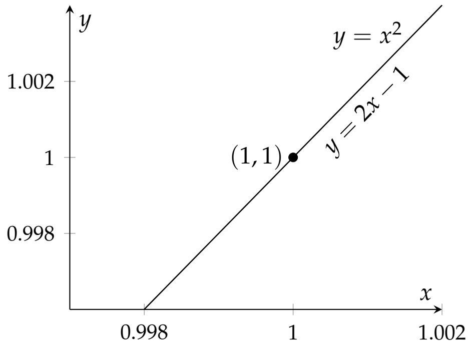
(ا) منحنی اور اس کا نقطہ $(1,1)$ پر مماس



(ب) نقطہ $(1,1)$ کے نزدیک منحنی اور مماس قریب ہیں

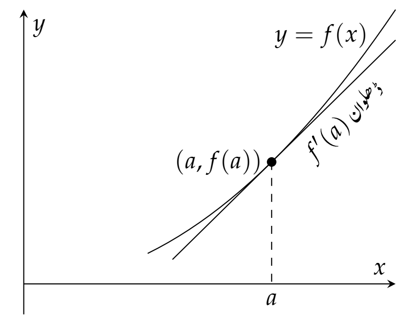


(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

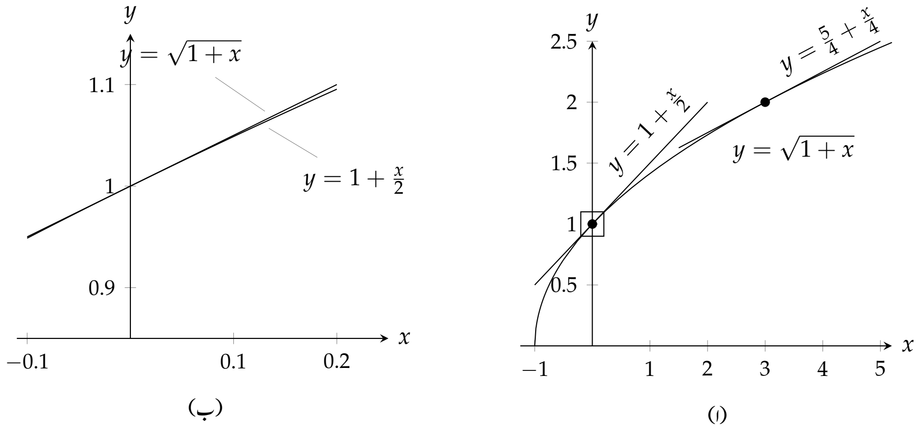


(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

شکل 4.126: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینی طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے



شکل 4.127: نقطہ a پر تفاعل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ہو گا



شکل 4.128: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کی خط بندی۔

□

مثال 4.40: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی تلاش کریں۔

حل: ہم $a = 0$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہٰذا

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

ہو گا۔ شکل 4.128-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔

□

تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل 4.128-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$$ 2 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$$ 3 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$$ 5 اعشاریہ درست

وسط سے دور خط بندی میں خلل نا قابل نظر انداز ہو گا۔یوں $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}$ کو $x=3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔ آپ کو $x=3$ پر نئی خط بندی حاصل کرنی ہو گی۔

مثال 4.41: $x=3$ پر تفاعل $f(x)=\sqrt{1+x}$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: ہم $a=3$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3)=2, \quad f'(3)=\left.\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right|_{x=3}=\frac{1}{4}$$

ہے لہٰذا

$$L(x)=2+\frac{1}{4}(x-3)=\frac{5}{4}+\frac{x}{4}$$

ہو گا (شکل 4.128-ا)۔ اس خط بندی سے $x=3.2$ پر

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{1+3.2}\approx\frac{5}{4}+\frac{3.2}{4}=1.250+0.800=2.050$$

حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2}\approx 2.04939$ سے $0.000\,61$ ہٹ کر ہے۔

اگر ہم مثال 4.40 میں حاصل خط بندی استعمال کریں تب

$$\sqrt{+x}=\sqrt{1+3.2}\approx 1+\frac{3.2}{2}=1+1.6=2.6$$

حاصل ہو گا جس میں $25\,\%$ خلل پایا جاتا ہے۔ $\square$

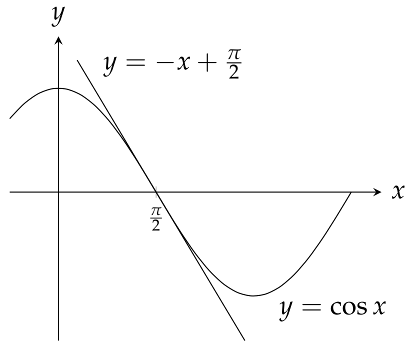
مثال 4.42: جذروں اور طاقتوں کے لئے اہم ترین خط بندی درج ذیل ہے۔

$$(1+x)^k\approx 1+kx \qquad x\approx 0; \text{کوئی عدد ہے } k \tag{4.16}$$

$x=0$ کے نزدیک یہ قابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔ $\square$

مساوات 4.16 سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن کا وسط $x=0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x}&=(1+x)^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{x}{2} && k=\frac{1}{2}\\
\frac{1}{1-x}&=(1-x)^{-1}\approx 1+(-1)(-x)=1+x && k=-1\\
\sqrt[3]{1+5x^4}&=(1+5x^4)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}(5x^4)=1+\frac{5}{3}x^4 && k=\frac{1}{3}\\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\approx 1+(-\tfrac{1}{2})(-x^2)=1+\frac{x^2}{2} && k=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$



شکل 4.129: کوسائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خط بندی۔

دیگر اہم خط بندی درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\sin x \approx x$$
$$\cos x \approx 1$$
$$\tan x \approx x$$

مثال 4.43: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کی خط بندی حاصل کریں۔
حل: درج ذیل

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

لیتے ہوئے خط بندی درج ذیل ہو گی (شکل 4.129)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0 + (-1)(x - \tfrac{\pi}{2}) = -x + \tfrac{\pi}{2}$$

□

تفرقات

تعریف:
فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے۔ تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر ہے۔ تفرق $\mathrm{d}y$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\square$

عموماً تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر میں تبدیلی Δx ہو گی۔ البتہ تعریف ہیں ہم $\mathrm{d}x$ پر یہ شرط لاگو نہیں کرتے ہیں۔ تفرق $\mathrm{d}y$ ہر صورت تابع ہو گا اور اس کی قیمت x اور $\mathrm{d}x$ پر منحصر ہو گی۔

مثال 4.44: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لئے $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔
حل:

$$\mathrm{d}y = (5x^4 + 37)\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y = (3\cos 3x)\,\mathrm{d}x$$

$\square$

اگر $\mathrm{d}x \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $\mathrm{d}x \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ تفرقات کا حاصل تقسیم ہو گا۔

بعض اوقات ہم $\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}f'(x)$ کی بجائے

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کا تفرق کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}(3x^2 - 6) = 6x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔

تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

حاصل ہو گی۔ چند تفرق کلیات پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{lll} \mathrm{d}c = 0, & \mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}, & \mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u, \\ \mathrm{d}(\sin u) = \cos u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\cos u) = -\sin u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\tan u) = \sec^2 u\,\mathrm{d}u, \\ \mathrm{d}(\cot u) = -\csc^2 u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\sec u) = \sec u \tan u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\csc u) = -\csc u \cot u\,\mathrm{d}u \end{array}$$

مثال 4.45:

$$\mathrm{d}(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,\mathrm{d}(2x) = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\tfrac{x}{x+1}) = \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$$

□

تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ پر جانے سے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کتنی ہو گی۔ اگر $\mathrm{d}x$ نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کی خط بندی L ایک دوسرے کے برابر تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب زیادہ آسان ہے لہٰذا اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

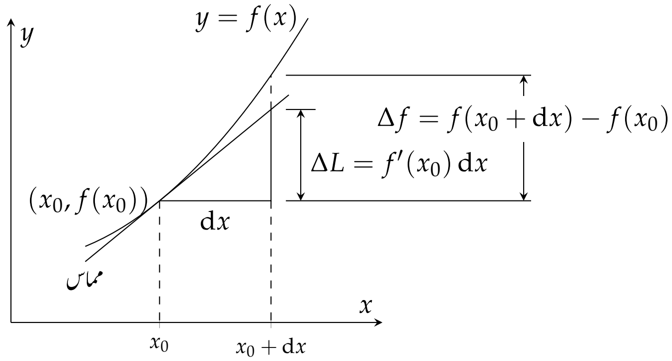
شکل 4.130 میں دیے علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$$

L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(x_0 + \mathrm{d}x) - L(x_0) \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \mathrm{d}x) - x_0]}_{L(x_0+\mathrm{d}x)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)} \\ &= f'(x_0)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

تفرق $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کا جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $x = x_0$ پر $\mathrm{d}f$ کی قیمت حاصل کی جائے تب $\mathrm{d}f = \Delta L$ ہو گا یعنی خط بندی میں تبدیل $\mathrm{d}f$ کے برابر ہو گی۔ تفرق تبدیلی کی اندازاً قیمت



شکل 4.130: چھوٹے $\mathrm{d}x$ کی صورت میں f کی خط بندی تقریباً f میں تبدیلی کے برابر ہو گی۔

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

مثال 4.46: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ سے $10.1\,\mathrm{cm}$ کیا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}S$ کا حساب کرتے ہوئے ہوئے اس کے رقبہ S میں تبدیلی حاصل کریں۔ اس کا موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔
حل: چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہٰذا اندازاً تبدیلی

$$\mathrm{d}S = S'(r_0)\,\mathrm{d}r = 2\pi r_0\,\mathrm{d}r = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\,\mathrm{m}^2$$

ہو گی۔ حقیقی تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{\mathrm{d}S} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{خلل}}$$

□

مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی

x_0 سے نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ منتقل ہوتے ہوئے ہم f میں تبدیلی کو تین طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 4.1: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

	اصل	اندازاً
حتمی تبدیلی	$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$	$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$
اضافی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)} \times 100$

مثال 4.47: گزشتہ مثال میں فی صف اندازاً تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\,\%$$

□

مثال 4.48: زمین کا سطحی رقبہ
زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \mp 0.1\,\mathrm{km}$ ہے۔زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟
حل: رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی بنا S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r = 8\pi(6371)(0.1) = 16\,012\,\mathrm{km}^2$$

□

مثال 4.49: رداس r کے کرہ کا رقبہ $1\,\%$ درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہو گا؟
حل: ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|\Delta S| \leq \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

ہم اس عدم مساوات میں Δs کی جگہ

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r$$

پر کرتے ہیں۔یوں

$$|8\pi r\,\mathrm{d}r| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \quad \implies \quad |\mathrm{d}r| \leq \frac{1}{8\pi r}\cdot\frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2}\frac{r}{100}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں رداس میں خلل اصل رداس کے $0.5\,\%$ سے کم ہونا ضروری ہے۔ □

مثال 4.50: بند شریانوں کا کھولنا (انجیوپلاسٹی[24])

جزوی طور پر بند شریانوں کی رداس کو بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاو حاصل کی جا سکتی ہے۔ 1830 کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزوئے نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \qquad (k \text{ مستقل})$$

جو مستقل دباو پر فی اکائی وقت میں ایک چھوٹی نالی میں حجم بہاو H دیتا ہے۔ اس نالی کا رداس r ہے۔ رداس $10\,\%$ بڑھانے سے بہاو پر کیا اثر ہو گا؟

حل: r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 4kr^3\,\mathrm{d}r$$

یوں

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{4kr^3\,\mathrm{d}r}{kr^4} = 4\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا یعنی H میں اضافی تبدیل r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔ یوں r میں $10\,\%$ تبدیلی سے H میں $40\,\%$ تبدیلی پیدا ہو گی۔ □

حساسیت

مختلف x پر مساوات $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ ہمیں f کی حساسیت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی $\mathrm{d}x$ کے لئے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہو گی۔

مثال 4.51: آپ ایک پل کی اونچائی ناپنے کی خاطر ایک پتھر کو پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ $s = 4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حساسیت کیا ہو گی؟

حل: مساوات $\mathrm{d}s = 9.8t\,\mathrm{d}t$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔ اگر $t = 2$ ہو تب

$$\mathrm{d}s = 9.8(2)(0.1) = 1.96\,\mathrm{m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t = 5\,\mathrm{s}$ پر خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}s = 9.8(5)(0.1) = 4.9\,\mathrm{m}$$

□

---

[24] angioplasty

تخمین $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ میں خلل

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) && \text{اصل تبدیلی} \\
\mathrm{d} &= f'(x_0)\Delta x && \text{تفرقی اندازہ}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{d}f$ اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم خلل تخمین کو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\text{خلل تخمین} &= \Delta f - \mathrm{d}f \\
&= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\
&= \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\
&= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\
&= \epsilon \cdot \Delta x
\end{aligned}
$$

$\Delta x \to 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے ($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔ یوں قوسین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لئے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔ درحقیقت $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا جب Δx چھوٹا ہو تخمینی خلل $\epsilon\Delta x$ مزید چھوٹا ہو گا۔

$$
\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon\Delta x}_{\text{خلل}}
$$

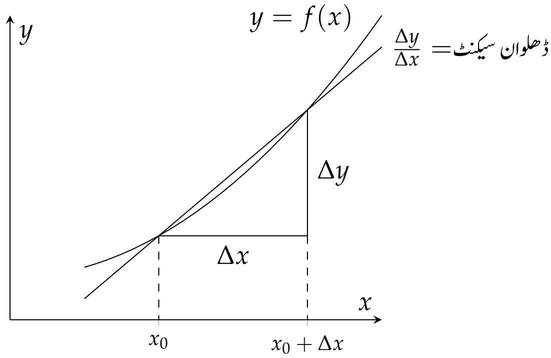
اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں ہے کہ خلل کتنا چھوٹا ہو گا یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$
\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \tag{4.17}
$$

ہو گی جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔



شکل 4.131: $x = x_0$ پر y کے تفرق سے مراد $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ہے۔

زنجیری تفرق کا ثبوت

زنجیری قاعدہ کے بارے میں ہم حصہ 3.5 میں بات کی گئی جہاں اس کا ثبوت پیش نہیں کیا گیا۔ آئیں مساوات 4.17 کی مدد سے زنجیری قاعدے کا ثبوت پیش کریں۔

فرض کریں $f(u)$ متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $u = g(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ اگر x_0 پر g قابل تفرق ہو اور $g(x_0)$ پر f قابل تفرق ہو تب مرکب تفاعل x_0 پر قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

فرض کریں x میں اضافہ Δx ہے اور فرض کریں کہ u اور y میں مطابقتی اضافے بالترتیب Δu اور Δy ہیں۔ جیسا آپ شکل 4.131 میں دیکھ سکتے ہیں

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ہو گا لہٰذا ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ یہ حد $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ کے برابر ہو گا۔

مساوات 4.17 کے تحت

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

ہو گا جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ ہو گا۔ اسی طرح

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

ہو گا جہاں $\Delta u \to 0$ کرنے سے $\epsilon_2 \to 0$ ہو گا۔ Δu اور Δy کی مساواتوں کو ملا کر

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

ہو گا۔ چونکہ $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ اور $\epsilon_2 \to 0$ ہوں گے لہٰذا دائیں ہاتھ تین اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

کمیت کا توانائی میں تبادل

نیوٹن کا دوسرا قانون

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mv) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma$$

کمیت کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔ جیسا آپ جانتے ہیں حقیقت میں کمیت کی قیمت سمتی رفتار پر منحصر ہے یعنی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

جہاں ساکن کمیت m_0 ہے اور روشنی کی رفتار $c = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر کمیت کی سمتی رفتار v روشنی کی رفتار سے بہت کم ہو تب ہم تخمینی طور پر

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}(\frac{v^2}{c^2})$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$m = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0[1+\frac{1}{2}(\tfrac{v^2}{c^2})] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2(\tfrac{1}{c^2})$$

یعنی

$$m = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2(\tfrac{1}{c^2}) \tag{4.18}$$

ہو گا۔ مساوات 4.18 رفتار کی بنا کمیت میں اضافہ بیان کرتی ہے۔

طبیعیات نیوٹن میں $\frac{1}{2}m_0v^2$ کو جسم کی حرکی توانائی کہتے ہیں اور اگر ہم مساوات 4.18 کو

$$(m-m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

لکھیں تب

$$(m-m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

یعنی

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{حرکی توانائی}) \tag{4.19}$$

ہو گا۔ یوں صفر سمتی رفتار سے v سمتی رفتار تک پہنچنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی تقریباً $(\Delta m)c^2$ ہو گی۔

مساوات 4.19 میں $c = 3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ پر کرتے ہوئے

$$\Delta(\text{حرکی توانائی}) \approx 90\,000\,000\,000\,000\,000\,\Delta m$$

توانائی حاصل ہو گی جہاں کمیت کی اکائی kg اور توانائی کی اکائی جاول J ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کمیت میں معمولی تبدیلی سے توانائی میں بہت بڑی تبدیلی آتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم میں ایک گرام سے کم کمیت توانائی میں تبدیل ہوتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم سے مراد وہ ایٹمی بم ہے جو 20 000 ٹن یعنی $2\times10^7\,\mathrm{kg}$ بارودی مواد (ٹی این ٹی[25]) کے دھماکہ کے برابر توانائی خارج کرتا ہو۔

[25] TNT, trinitrotoluene

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال 1 تا سوال 6 میں $x=a$ پر $f(x)$ کی خط بندی $L(x)$ تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x)=x^4,\quad x=1$

سوال 2: $f(x)=x^{-1},\quad x=2$

سوال 3: $f(x)=x^3-x,\quad x=1$

سوال 4: $f(x)=x^3-2x+3,\quad x=2$

سوال 5: $f(x)=\sqrt{x},\quad x=4$

سوال 6: $f(x)=\sqrt{x^2+9},\quad x=-4$

آپ سوال 7 تا سوال 12 میں دیے تفاعل کی خط بندی استعمال کرنا چاہتے ہیں۔ بعد کا کام آسان بنانے کی خاطر آپ خط بندی کے وقفے کا وسط دیے گئے نقطہ x_0 کے نزدیک عدد صحیح پر رکھنا چاہیں گے جہاں تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ خط بندی تلاش کریں۔

سوال 7: $f(x)=x^2+2x,\quad x_0=0.1$

سوال 8: $f(x)=x^{-1},\quad x_0=0.6$

سوال 9: $f(x)=2x^2+4x-3,\quad x_0=-0.9$

سوال 10: $f(x)=1+x,\quad x_0=8.1$

سوال 11: $f(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_0=8.5$

سوال 12: $f(x)=\frac{x}{x+1},\quad x_0=1.3$

تکونیاتی تفاعل کی خط بندی

سوال 13 تا سوال 16 میں $x=a$ پر تفاعل f کی خط بندی تلاش کریں۔ دو مختلف نقطوں پر دو مختلف حد بندی درکار ہیں۔ تفاعل اور تفاعل کی خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 13: $f(x)=\sin x,\quad x=0,\ x=\pi$

سوال 14: $f(x)=\cos x,\quad x=0,\ x=-\frac{\pi}{2}$

سوال 15: $f(x)=\sec x,\quad x=0,\ x=-\frac{\pi}{3}$

سوال 16: $f(x)=\tan x,\quad x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$

تخمین $(1+x)^k\approx 1+kx$

سوال 17: $(1+x)^k\approx 1+kx$ کی قیمت صفر کے قریب لیتے ہوئے درج ذیل تفاعل کی خطی تخمین تلاش کریں۔ کلیہ $(1+x)^k\approx 1+kx$ استعمال کریں۔

ا. $f(x) = (1+x)^2$ ج. $g(x) = \frac{2}{1-x}$ ہ. $h(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}}$

ب. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}$ د. $g(x) = (1-x)^6$ و. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

سوال 18: کیلکولیٹر سے تیز تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمتیں حاصل کریں۔

ا. $(1.0002)^{50}$ ب. $\sqrt[3]{1.009}$

سوال 19: $x=0$ پر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ کی خط بندی تلاش کریں۔اس کا $\sqrt{1+x}$ اور $\sin x$ کی انفرادی خط بندی کے ساتھ کیا رشتہ ہے؟

سوال 20: ہم طاقتی قاعدہ سے جانتے ہیں کہ تمام ناطق اعداد k کے لئے مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

مطمئن ہوتی ہے۔ ہم بعد کے ایک باب میں دیکھیں گے کہ یہ مساوات غیر ناطق اعداد کے لئے بھی مطمئن ہوتی ہے۔یہی یہاں فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x=0$ پر $f(x) = (1+k)^k$ کی خط بندی $L(x) = 1+kx$ ہے۔

تفرقات

سوال 21 تا سوال 32 میں $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔

سوال 21: $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

سوال 22: $y = x\sqrt{1-x^2}$

سوال 23: $y = \frac{2x}{1+x^2}$

سوال 24: $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$

سوال 25: $2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$

سوال 26: $xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$

سوال 27: $y = \sin(5\sqrt{x})$

سوال 28: $y = \cos(x^2)$

سوال 29: $y = 4\tan(\frac{x^3}{3})$

سوال 30: $y = \sec(x^2 - 1)$

سوال 31: $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

سوال 32: $y = 2\cot(\frac{1}{\sqrt{x}})$

خلل تخمین

سوال 33 تا سوال 38 میں x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہونے کی بنا تفاعل $f(x)$ کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ درج ذیل تلاش کریں (شکل 4.130)۔

ا. تبدیلی $\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$

ب. اندازاً تبدیلی $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$

ج. خلل تخمین $\left|\Delta f - \mathrm{d}f\right|$

سوال 33: $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 0,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 34: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3,\ x_0 = -1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 35: $f(x) = x^3 - x,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 36: $f(x) = x^4,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 37: $f(x) = x^{-1},\ x_0 = 0.5,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 38: $f(x) = x^3 - 2x + 3,\ x_0 = 2,\ \mathrm{d}x = 0.1$

تبدیلی کا تفرقی اندازہ
سوال 39 تا سوال 44 میں رقبہ یا حجم میں تبدیلی کی تفرقی صورت لکھیں۔

سوال 39: رداس r کے کرہ کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ میں تبدیلی جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے۔

سوال 40: مکعب کے حجم $H = x^3$ میں تبدیلی جب اس کے ضلع کی لمبائی x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتی ہے۔

سوال 41: مکعب کی سطحی رقبہ $S = 6x^2$ میں تبدیلی جب اس کا ضلع x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتا ہے۔

سوال 42: قائمہ مخروط کا رقبہ پہلو $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے جبکہ اس کی اونچائی h تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

سوال 43: قائمہ بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ جب اس کا رداس r_0 سے تبدیل ہو کر $r_0 + \mathrm{d}r$ ہو جبکہ اس کی لمبائی h تبدیل نہ ہو۔

سوال 44: قائمہ بیلن کا رقبہ پہلو $S = 2\pi r h$ جب اس کی لمبائی h_0 سے $h_0 + \mathrm{d}h$ ہو جائے جبکہ اس کا رداس تبدیل نہ ہو۔

استعمال
سوال 45: ایک دائرے کا رداس $2\,\mathrm{m}$ سے بڑھ کر $2.02\,\mathrm{m}$ ہو جاتا ہے۔

ا. رقبے میں تبدیلی تلاش کریں۔

ب. رقبہ میں تبدیلی اور ابتدائی رقبہ کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 46: ایک درخت کا قطر $30\,\mathrm{cm}$ تھا۔ اگلے سال اس کا محیط $2\,\mathrm{cm}$ بڑھ گیا۔ درخت کا قطر کتنا بڑھا؟ درخت کا رقبہ عمودی تراش کتنا بڑھا؟

سوال 47: ایک مکعب کی اضلاع کی لمبائی $10\,\mathrm{cm}$ ہے جس میں $1\,\%$ خلل متوقع ہے۔ اس کے حجم میں کتنا فی صد خلل ہو گا؟

سوال 48: ایک چکور کے رقبہ میں $2\,\%$ سے کم خلل قابل قبول ہے۔ اس کے ضلع کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 49: ایک کرہ کا قطر $100 \mp 1\,\mathrm{cm}$ ناپا جاتا ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم حاصل کیا جاتا ہے۔ حجم میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال 50: ایک کرہ کے حجم میں $3\,\%$ تک خلل قابل قبول ہے۔ اس کے قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 51: ایک قائمہ بیلن کا رداس اور اس کی لمبائی ایک دوسرے کے برابر ہیں۔یوں اس کا حجم πh^3 ہو گا۔اس کے حجم میں $1\,\%$ خلل قابل قبول ہے۔ اس کی لمبائی کی پیمائش میں قابل قبول خلل کتنا ہو گا؟

سوال 52: ایک قائمہ ٹینکی کا قد $10\,\mathrm{m}$ ہے۔اس کی پیمائش حجم اور اصل حجم میں $1\,\%$ کا فرق قابل قبول ہے۔ اس کے اندرونی قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا۔

سوال 53: ایک دائری قرص کے رداس میں کتنا فرق $\mathrm{d}r$ قابل قبول ہو گا تا کہ اس کی کمیت میں فرق اصل کمیت کے $\frac{1}{1000}$ سے کم ہو۔قرص کی موٹائی میں خلل کو نظر انداز کریں۔

سوال 54: خون کے بہاو میں $50\,\%$ اضافہ حاصل کرنے کی خاطر مثال 4.50 میں r کو کتنا فی صد بڑھانا ہو گا؟

سوال 55: دکھائیں کہ مثال 4.51 میں t میں $5\,\%$ خلل کی بنا s میں $10\,\%$ خلل پیدا ہو گا۔

سوال 56: دل پر خلائی مشق کے اثرات
اکائی وقت میں دل درج ذیل

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

کام کرتا ہے جہاں W اکائی وقت میں کام ہے، P دباو خون ہے، V دل سے اکائی وقت میں خارج خون کا حجم ہے، δ خون کی کثافت ہے، v دل سے اخراج کے وقت خون کی اوسط رفتار ہے، اور g ثقلی اسراع ہے۔

مستقل P ، V δ اور v کی صورت میں W صرف g کا تفاعل ہو گا۔ایسی صورت میں یہ مساوات درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$W = a + \frac{b}{g} \qquad (a, b\ \text{مستقل}) \tag{4.20}$$

آپ چاند پر g میں تبدیلی $\mathrm{d}g$ اور زمین پر g میں اتنی ہی تبدیلی $\mathrm{d}g$ کا W پر اثر دیکھنا چاہتے ہیں۔چاند پر $g = 1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور زمین پر $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہیں۔مساوات 4.20 سے $\mathrm{d}W_{\text{چاند}}$ اور $\mathrm{d}W_{\text{زمین}}$ کی نسبت حاصل کریں۔ نتیجہ کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

سوال 57: مکعب کا حجم $H = x^3$ ہے۔اس کے کنارے کی لمبائی میں Δx کے اضافہ سے حجم میں ΔH اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اضافی حجم ΔH کا خاکہ بنا کر اس کو درج ذیل کا مجموعہ ظاہر کریں۔

ا. تین تختے جن کے اطراف x ، x اور Δx ہیں۔

ب. تین ڈنڈے جن کے اطراف x ، Δx اور Δx ہیں۔

ج. ایک مکعب جس کے اطراف Δ ، Δx اور Δx ہیں۔

تفرقی کلیہ $\mathrm{d}H = 3x^2\,\mathrm{d}x$ حجم میں تبدیلی کو تین تختوں کے حجم (جزو-ا) سے حاصل کرتی ہے۔

سوال 58: گھڑیال کی لٹکن کی لمبائی اٹل رکھنے کی خاطر اس کا درجہ حرارت برقرار رکھا جاتا ہے۔ لٹکن کا دوری عرصہ T لٹکن کی لمبائی L اور کروی اسراع g پر منحصر ہے۔یوں سطح زمین پر گھڑیال کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے g کی مقامی قیمت میں معمولی تبدیل کی بنا T میں معمولی تبدیلی پیدا ہو گی۔ ΔT پر نظر رکھنے سے g میں تبدیلی $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

ا. L کو اٹل اور g کو متغیر تصور کرتے ہوئے $\mathrm{d}T$ کی مساوات حاصل کر کے جزو-ب اور جزو-ج کے جوابات دیں۔

ب. g بڑھنے سے T بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے؟ کیا گھڑیال کم وقت یا زیادہ وقت دے گا؟

ج. $100\,\mathrm{cm}$ لٹکن والے گھڑیال کو ایک مقام جہاں $g = 980\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ ہو سے دوسرے مقام پر منتقل کیا جاتا ہے جس کی بنا دوری عرصہ $\Delta T = 0.001\,\mathrm{s}$ بڑھ جاتا ہے۔ $\mathrm{d}g$ حاصل کرتے ہوئے نیے مقام پر g کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 59: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $\sqrt{1+x}$ کی خط بندی $x \to 0$ کرنے سے بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} = 1$$

سوال 60: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $x \to 0$ کرنے سے $\tan x$ کی خط بندی بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

سوال 61: فرض کریں تفاعل $f(x)$ کی ترسیم کا $x = a$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔کیا $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 62: ڈھلوان سے تفرق کا حصول۔ قابل تفرق منحنی کو بڑا کرنے سے مقامی نقطے پر منحنی سیدھا خط نما نظر آتا ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے پر منحنی کا تفرق ترسیم کی ڈھلوان ناپ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. یہ عمل دیکھنے کی خاطر $y = x^2$ کی ترسیم کو کمپیوٹر کے شیشے پر اتنا بڑا کریں کہ $x = 1$ پر ترسیم سیدھا خط نظر آتا ہو۔ $x = 1$ پر اس سیدھے خط کا ڈھلوان 2 ہو گا جو اس نقطے پر ترسیم کا تفرق ہو گا۔

ب. اب $y = e^x$ کی ترسیم کو باری باری $x = 0$ ، $x = 1$ اور $x = -1$ پر بڑا کر کے دیکھیں۔ ہر نقطے پر ترسیم کی ڈھلوان کا موازنہ اس نقطے پر e^x کی قیمت کے ساتھ کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال 63: نقطہ تصریف پر خط بندی۔ جیسا شکل 4.129 سے واضح ہے، نقطہ تصریف پر خط بندی مزید بہتر بیٹھتی ہے۔اس کی وضاحت بعد میں اس کتاب میں کی جائے گی۔ترسیم سے $x = 0$ اور $x = \sqrt{3}$ پر $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

سوال 64: خط بندی بہترین خطی تخمین ہے۔ (ہم خط بندی کو یوں استعمال کرتے ہیں۔) فرض کریں $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہے اور $g(x) = m(x-a) + c$ ایک خطی تفاعل ہے جہاں m اور c مستقل ہیں۔ اگر $x = a$ کے نزدیک خلل $E(x) = f(x) - g(x)$ بہت کم ہو تب ہم خط بندی $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ کی بجائے g کو بطور خطی تخمین استعمال کر سکتے ہیں۔ دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط لاگو کرنے سے $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ حاصل ہو گا۔

ا. $E(a) = 0$ \quad $x = a$ پر تخمینی خلل صفر ہے

ب. $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$ \quad $x - a$ کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔

یوں خط بندی $L(x)$ وہ واحد خطی تخمین ہے جو $x = a$ پر صفر خلل دیتا ہے اور جس کا خلل $x - a$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

سوال 65: کیلکولیٹر میں 2 کا ہندسہ لکھ کر بار بار جذر لیں۔ آپ کیا ترتیب دیکھتے ہیں؟ بار بار $\sqrt[10]{\ }$ لینے سے کیا ترتیب دیکھنے کو ملتی ہے؟

سوال 66: گزشتہ سوال کو 2 کی بجائے 0.5 کے لئے دہرائیں۔ اب کیا دیکھنے کو ملتا ہے؟ کیا 2 کی جگہ کوئی بھی مثبت عدد x استعمال کیا جا سکتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 67 تا سوال 70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے وقفہ I پر تفاعل کی بجائے خط بندی استعمال کرتے ہوئے خلل کی مقدار کا اندازہ لگانا ہو گا۔درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ I پر تفاعل f ترسیم کریں۔

ب. نقطہ $x = a$ پر تفاعل کی خط بندی L تلاش کریں۔

ج. f اور L کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں۔

د. وقفہ I پر مطلق خلل $\left|f(x) - L(x)\right|$ ترسیم کر کے اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں۔

ہ. جزو-د کی ترسیم سے $\delta > 0$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں جو $|x-a| < \delta \implies \left|f(x) - L(x)\right| < \epsilon$ کو مطمئن کرتی ہو جہاں۔ $\epsilon = 0.5, 0.1, 0.01$ لیں۔ ترسیم کو دیکھ کر بتائیں آیا آپ کی تخمینی δ کی قیمتیں درست ہیں؟

سوال 67: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

سوال 68: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad [-\frac{3}{4}, 1], \quad a = \frac{1}{2}$

سوال 69: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

سوال 70: $f(x) = \sqrt{x} - \sin x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

4.8 ترکیب نیوٹن

ہم خطی اور دو درجی مساوات حل کرنے کے سادہ کلیات جانتے ہیں۔ تین درجی اور چار درجی مساوات حل کرنے کے نسبتاً مشکل کلیات بھی پائے جاتے ہیں۔ ناروے کے ریاضی دان نیلز ہنری ابیل ($1802 - 1829$) نے ثابت کیا کہ چار سے زیادہ درجے کی مساوات حل کرنے کا کوئی کلیہ نہیں پایا جاتا ہے۔

جب $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا بالکل درست حل حاصل کرنا ممکن نہ ہو تب ہم احصاء کے اعدادی طریقوں کو استعمال کرتے ہوئے حل کی تخمین حاصل کرتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن ایسی ایک ترکیب ہے۔اس ترکیب میں، جن نقطوں پر $f(x)$ صفر ہو ان نقطوں کے نزدیک $y = f(x)$ کو مماس سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں بھی خط بندی کے ذریعہ مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

نظریہ

ترکیب نیوٹن مساوات $f(x) = 0$ کے حل کی تخمینی قیمتوں کی ترتیب حاصل کرتا ہے جو اصل حل تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے۔ہم اس ترتیب کا پہلا عدد x_0 منتخب کرتے ہیں۔ موزوں صورتوں میں یہ ترتیب قدم با قدم آگے بڑھتے ہوئے دیگر نقطے دیتا ہے۔ x_0 پر f کا مماس x محور کو ترتیب کے اگلے نقطہ x_1 پر قطع کرتا ہے۔

ابتدائی نقطہ x_0 کو ترسیم دیکھ کر یا قیاساً منتخب کیا جا سکتا ہے۔یہ ترکیب نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل کے مماس کو تفاعل کا تخمین لیتے ہوئے مماس اور x محور کے مقطع کو x_1 کہتا ہے جو ترتیب کا دوسرا عدد ہو گا۔ x_1 عموماً x_0 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح نقطہ $(x_1, f(x_1))$ پر تفاعل کا مماس x محور کو x_2 پر قطع کرے گا جو ترتیب کا تیسرا عدد ہو گا۔ x_2 عموماً x_1 سے بہتر حل ہو گا۔اسی

طرح قدم با قدم چلتے ہوئے بہتر سے بہتر حل کی ترتیب حاصل کی جاتی ہے۔یہ ترتیب اصل حل کے نزدیک سے نزدیک ہوتی چلی جاتی ہے۔ قابل قبول حل تک پہنچ کر ہم رک جاتے ہیں۔

ہم یک بعد دیگرے تخمینی قیمتوں کے حصول کا کلیہ اخذ کر سکتے ہیں۔ دیے گئے تخمین x_n پر تفاعل کے مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \tag{4.21}$$

جو x محور کو اس نقطے پر قطع کرے گا جہاں $y = 0$ ہو۔ مساوات 4.21 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے نقطہ قطع یعنی اگلا نقطہ x_{n+1} حاصل کرتے ہیں

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad \implies x = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

جہاں $f'(x_n) \neq 0$ فرض کیا گیا ہے۔

ترکیب نیوٹن کا لائحہ عمل

ا. مساوات $f(x) = 0$ کے جذر کی قیمت قیاساً حاصل کریں۔ مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم مددگار ثابت ہو گی۔

ب. درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے پہلی تخمین سے دوسری تخمین، دوسری تخمین سے تیسری تخمین، وغیرہ، حاصل کریں

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (f'(x_n) \neq 0) \tag{4.22}$$

جہاں نقطہ x_n پر تفاعل کا تفرق $f'(x_n)$ ہے۔

ہم اپنی پہلی مثال میں $\sqrt{2}$ کا مثبت جذر مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

مثال 4.52: مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ کا مثبت جذر تلاش کریں۔
حل: $f(x) = x^2 - 2$ اور $f'(x) = 2x$ لیتے ہوئے مساوات 4.22 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

کم سے کم حساب و کتاب کی خاطر ہم اس مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

سے درج ذیل بتدریج بہتر تخمینی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

	خلل	درست ہندسوں کی تعداد
$x_0 = 1$	-0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

□

چونکہ ترکیب نیوٹن کی مرکوزیت بہت تیز ہے (جس پر جلد بات کی جائے گی) لہٰذا عموماً کیلکولیٹر جذر کا حصول ترکیب نیوٹن سے تلاش کرتے ہیں۔اگر درج بالا جدول میں 5 کی بجائے 13 اعشاریہ درست ہندسے لیے جاتے تب اگلے قدم میں $\sqrt{2}$ کی قیمت 10 اعشاریہ درست حاصل ہوتی۔

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم