

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	ابتدائی معلومات	1
1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط	1.1
15	محدود، خطوط اور بڑھوتری	1.2
32	تفاعل	1.3
54	ترسیم کی منتقلی	1.4
74	تکوینیاتی تفاعل	1.5
95	حدود اور استمرار	2
95	تبدیلی کی شرح اور حد	2.1
113	حد تلاش کرنے کے قواعد	2.2
126	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف	2.3
146	تصور حد کی توسیع	2.4
165	استمرار	2.5
184	مماسی خط	2.6
199	تفرق	3
199	تفاعل کا تفرق	3.1
221	قواعد تفرق	3.2
240	تبدیلی کی شرح	3.3
257	تکوینیاتی تفاعل کا تفرق	3.4
277	زنجیری قاعدہ	3.5
294	خفی تفرق اور نااطق قوت نما	3.6
310	دیگر شرح تبدیلی	3.7

325	4	تفرق کا استعمال
325	4.1	تفاعل کی انتہائی قیمتیں
340	4.2	مسئلہ اوسط قیمت
356	4.3	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفرقی پرکھ
356	4.3.1	پرکھ
368	4.4	y' اور y'' کے ساتھ ترسیم
391	4.5	$x \rightarrow \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء
418	4.6	بہترین بنانا
442	4.7	خط بندی اور تفرقات
465	4.8	ترکیب نیوٹن
477	5	تکمل
477	5.1	غیر قطعی تکملات
489	5.2	تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی
505	5.3	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق
516	5.4	اندازہ بذریعہ تنہائی مجموعہ
534	5.5	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات
561	5.6	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ
578	5.7	بنیادی مسئلہ
599	5.8	قطعی تکمل میں بدل
605	5.9	اعدادی تکمل
605	5.10	قاعدہ ذوزرقہ
625	6	تکمل کا استعمال
625	6.1	منحنیات کے بیچ رقبہ
629	6.1.1	تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد
640	6.2	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش
648	6.3	اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا
663	6.4	تکلی چھلے
676	6.5	مستوی منحنیات کی لمبائیاں
687	6.6	سطح طواف کا رقبہ
699	6.7	معیار اثر اور مرکز کمیت
711	6.7.1	وسطانی مرکز
716	6.8	کام
731	6.9	فشار سیال اور قوت سیال
740	6.10	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال
755	7	ماورائی تفاعل
756	7.1	الٹ تفاعل اور ان کے تفرق

774	قدرتی لوگار تھم	7.2
792	قوت نمائی تفاعل	7.3
807	$\log_a x$ اور a^x	7.4
818	افزائش اور تنزل	7.5
832	قاعدہ لھوپیٹال	7.6
848	اضافی شرح نمو	7.7
853	7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش	
859	الٹ ہکونیاتی تفاعل	7.8
875	الٹ ہکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	7.9
892	بدلولی تفاعل	7.10
913	یک رتبی تفرقی مساوات	7.11
931	یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	7.12
943	8 مکمل کے طریقے	
943	8.1 مکمل کے بنیادی کلیات	
959	8.2 مکمل بالخصص	
964	8.2.1 بار بار استعمال	
974	8.3 جزوی کسر	
989	8.4 ہکونیاتی بدل	
1000	8.5 جدول مکمل اور کمپیوٹر	
1017	8.6 غیر مناسب مکمل	
1043	9 لامتناہی تسلسل	
1043	9.1 اعداد کی ترتیب کی حد	
1061	9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	
1078	9.3 لامتناہی تسلسل	
1097	9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	
1108	9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	
1118	9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ	
1129	9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	
1143	9.8 طاقی تسلسل	
1160	9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل	
1172	9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ غلطی کے اندازے	
1191	9.11 طاقی تسلسل کے استعمال	
1211	10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدود	
1211	10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں	
1219	ضمیمہ اول	

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔
طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تفصیل دیا گیا ہے۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>
- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری
تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں
گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 جون 2019

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہن ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 10

مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدود

جائزہ

حرکت پر غور احصاء کی مدد سے کیا جاسکتا ہے۔ اس حصہ میں ہم وقت کے ساتھ ایک ذرے کے بدلتے مقام پر غور کریں گے۔ ہم مخروطی حصوں کی مساوات سے شروع کرتے ہیں چونکہ بالعموم مربع قوت کی بنا سیارے، مصنوعی سیارے، اور دیگر اجسام مخروطی راہ پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک جسم مخروطی راہ پر حرکت کر رہا ہے تب ہم اس کی رفتار اور اس پر عمل کرنے والی قوت دریافت کر سکتے ہیں۔ قطبی محدود سیاروں کی حرکت پر غور کو بہت آسان بناتا ہے لہذا ہم اس نئے محدود میں منحنیات، تفرق اور مکمل پر بھی غور کریں گے۔

10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ مخروطی حصوں کو کس طرح محدودی سطح پر بطور دو قدری مساوات پیش کیا جاتا ہے۔ دوہرے مخروط کو سطح سے کاٹ کر مخروطی منحنیات پیدا کی جاتی ہیں اور اسی کی بنا مخروطی حصہ کی اصطلاح پیدا ہوئی۔

دائرہ

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے اس مستوی میں کسی مقررہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو دائرہ¹ کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقطہ کو دائرے کا مرکز² کہتے ہیں جبکہ اس مستقل فاصلہ کو رداس³ کہتے ہیں۔

□

دائرے کے معیاری مساوات جنہیں حصہ 1.4 میں فاصلہ کی مساوات $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ سے اخذ کیا گیا درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 & \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (0, 0) \\ (x - h)^2 + (y - k)^2 &= a^2 & \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (h, k) \end{aligned}$$

قطع مکانی

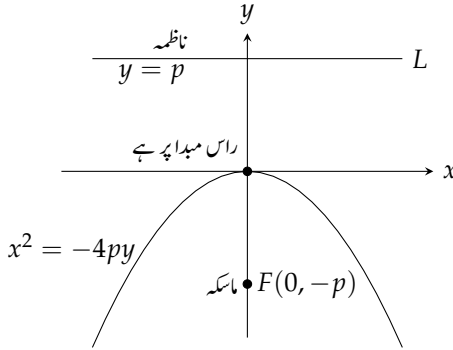
تعریف: ایک سطح میں رہتے ہوئے کسی مقررہ سیدھی لکیر اور مقررہ نقطہ (جو اس مقررہ سیدھی لکیر پر نہیں پایا جاتا ہو) سے مستقل فاصلہ پر پائے جانے والے تمام نقطوں کے سلسلہ کو قطع مکانی⁴ کہتے ہیں۔ مقررہ نقطے کو قطع مکانی کا⁵ کہتے ہیں جبکہ مقررہ لکیر کو ناظمہ⁶ کہتے ہیں۔

□

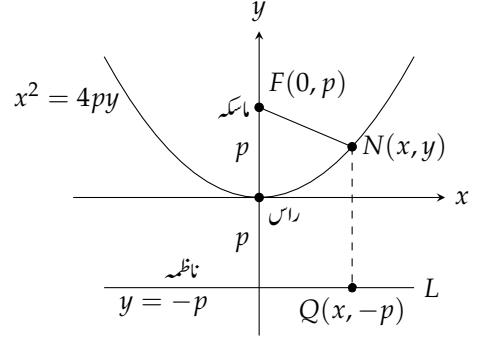
جب ماسکہ کسی محدودی محور پر ہو اور ناظمہ اس محدودی محور کے متوازی ہو تب قطع مکانی کی مساوات سادہ ترین ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ماسکہ y محور پر نقطہ $F(0, p)$ پر پایا جاتا ہے اور لکیر $y = -p$ ناظمہ (شکل 10.1) ہے۔ یوں شکل 10.1 میں نقطہ $N(x, y)$ صرف اور صرف اس صورت اس قطع مکانی پر پایا جائے گا جب $NF = NQ$ ہو۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} NF &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \\ NQ &= \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} = \sqrt{(y + p)^2} \end{aligned}$$

circle¹
center²
radius³
parabola⁴
focus⁵
directrix⁶



شکل 10.2: قطع مکانی $x^2 = -4py$



شکل 10.1: قطع مکانی $x^2 = 4py$ ؛ راس کا فاصلہ ماسکہ اور ناظمہ سے ایک جیسا ہے۔

لکھا جاسکتا ہے۔ ان مساوات کو ایک دوسرے کے برابر پر کر کے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(10.1) \quad y = \frac{x^2}{4p} \implies x^2 = 4py \quad \text{معیاری روپ}$$

اس مساوات سے قطع مکانی کی y محور کے لحاظ سے تشاکلی واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ محور y اس قطع مکانی کا محور تشاکلی ہے جس کو عموماً چھوٹا کر کے صرف محور⁷ پکارا جاتا ہے۔

وہ نقطہ جس پر قطع مکانی اپنے محور کو قطع کرتا ہو راس⁸ کہلاتا ہے۔ قطع مکانی $x^2 = 4py$ کا راس مبداء پر پایا جاتا ہے (شکل 10.1)۔ مثبت عدد p کو قطع مکانی کا طول ماسکہ⁹ کہتے ہیں۔

اگر قطع مکانی نیچے رخ کھلتا ہو اور اس کا ماسکہ $(0, -p)$ جبکہ ناظمہ لکیر $y = p$ ہو تب مساوات 10.1 درج ذیل روپ اختیار کرے گی (شکل 10.2)۔

$$y = -\frac{x^2}{4p} \implies x^2 = -4py$$

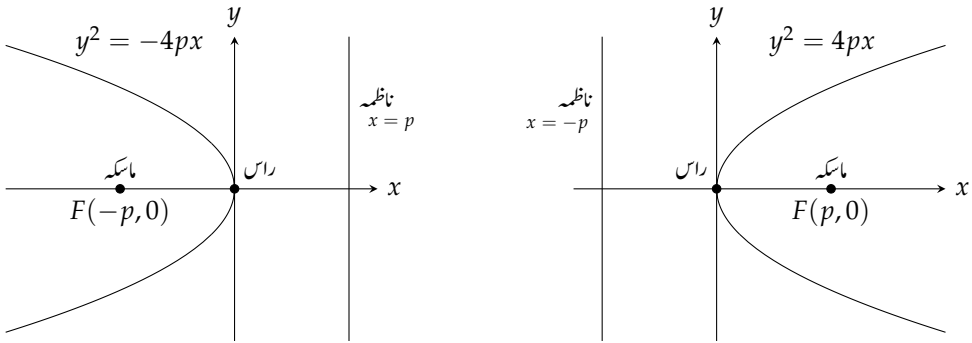
ہم اسی طرح کے مساوات ہم دائیں اور بائیں کھلنے والے قطع مکانی کے لئے حاصل کر سکتے ہیں (جدول 10.1 اور شکل 10.3)۔

مثال 10.1: قطع مکانی $y^2 = 10x$ کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کریں۔

axis⁷
vertex⁸
focal length⁹

جدول 10.1: مہدا پر راس والے قطع مکانی کے معیاری مساوات ($p > 0$)

مساوات	ماسکہ	ناظمہ	محور	کھلنے کا رخ
$x^2 = 4py$	$(0, p)$	$y = -p$	محور y	اوپر
$x^2 = -4py$	$(0, -p)$	$y = p$	محور y	نیچے
$y^2 = 4px$	$(p, 0)$	$x = -p$	محور x	دائیں
$y^2 = -4px$	$(-p, 0)$	$x = p$	محور x	بائیں



شکل 10.3: قطع مکانی $y^2 = 4px$ اور $y^2 = -4px$ کے ترسیات۔

حل: ہم معیاری مساوات $y^2 = 4px$ میں p کی قیمت تلاش کرتے ہیں:

$$4p = 10 \implies p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

اس کے بعد ہم حاصل کردہ p کے لئے ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرتے ہیں۔

$$(p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right) \quad \text{ماسکہ}$$

$$x = -p, \quad x = -\frac{5}{2} \quad \text{ناظمہ}$$

□

جدول 10.1 کے کلیات پر حصہ 1.4 میں دیے گئے منتقلی کے کلیات لاگو کرتے ہوئے دیگر مقامات پر واقع قطع مکانی کے مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

ترخیم

تعریف: ایک مستوی پر رہتے ہوئے، مستوی پر دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو، ان کے سلسلہ کو ترخیم¹⁰ کہتے ہیں۔ ان دو مقررہ نقطوں کو ترخیم کے ماسکے کہتے ہیں (شکل 10.4 اور شکل 10.5)۔

□

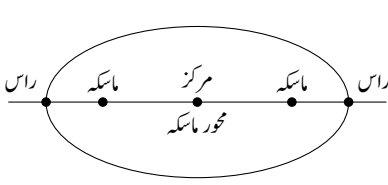
ترخیم کو اس کی تعریف استعمال کرتے ہوئے بہت جلد ترسیم کیا جاسکتا ہے۔ مقررہ نقطوں F_1 اور F_2 پر ڈوری باندھیں۔ ڈوری کو قلم سے کھینچ کر رکھتے ہوئے قلم کو بند دائری حرکت دیں۔ چونکہ ڈوری کی لمبائی مستقل ہے لہذا قلم ترخیم کو ترسیم کرے گا (شکل 10.4)۔

اگر ماسکے $F_1(-c, 0)$ اور $F_2(c, 0)$ ہوں (شکل 10.6) اور فاصلہ $NF_1 + NF_2$ کو $2a$ سے ظاہر کیا جائے تب ترخیم پر نقطہ $N(x, y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

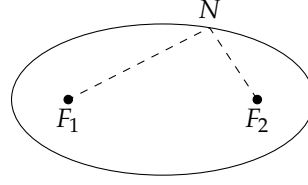
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذری جزو کو دائیں منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذری جزو کو ایک ہاتھ رکھتے ہوئے دوبارہ مربع لیتے ہیں۔ نتیجتاً درج ذیل حاصل ہو گا۔

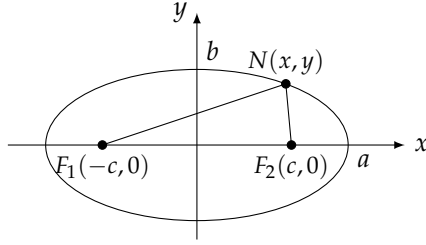
$$(10.2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$



شکل 10.5: ترخیم پر اہم نقطے۔



شکل 10.4: دونوں ماسکوں (F1 اور F2) سے کسی بھی نقطہ N تک فاصلوں کا مجموعہ (نقطہ دار لکیر) ایک مستقل ہے۔



شکل 10.6: ترخیم کی تعریف سے اس کی مساوات کا حصول۔

چونکہ $NF_1 + NF_2$ کی لمبائی F_1F_2 کی لمبائی سے زیادہ ہے (تکون NF_1F_2 کے لئے تکونی عدم مساوات) لہذا عدد $2a$ عدد $2c$ سے بڑا ہو گا۔ یوں $a > c$ ہو گا لہذا مساوات 10.2 میں $a^2 - c^2$ ایک مثبت عدد ہو گا۔

ہم مساوات 10.2 حاصل کرنے کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ جو مساوات 10.2 کو $0 < c < a$ کے لئے مطمئن کرتا ہو $NF_1 + NF_2 = 2a$ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت ترخیم پر پایا جائے گا اگر وہ مساوات 10.2 کو مطمئن کرتا ہو۔

اگر

$$(10.3) \quad b\sqrt{a^2 - c^2}$$

ہو تب $a^2 - c^2 = b^2$ ہو گا اور مساوات 10.2 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$(10.4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مساوات 10.4 کے تحت مبدا اور دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ $x = \pm a$ اور $y = \pm b$ لکیروں میں بند مستطیل کے اندر پایا جاتا ہے۔ یہ محوروں کو نقطہ $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

کی قیمت $x = 0$ پر صفر اور $y = 0$ پر لامتناہی ہے لہذا $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر مماثل محوروں کو عمودی ہوں گے۔

ترخیم کا اکبر اور اصغر محور

ضمیمہ ۱

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

