

احصاء اور تحليلي جيو ميٽري

خالد خان يوسفزاي

جامعه کاسيٽ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

v

دیباچہ

vii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

1	1	ابتدائی معلومات
1	1.1	حقیقی اعداد اور حقیقی خط
15	1.2	محدود، خطوط اور بڑھوتری
32	1.3	تفاعل
54	1.4	ترسیم کی منتقلی
74	1.5	نکونیا تفاعل
95	2	حدود اور استمرار
95	2.1	تبدیلی کی شرح اور حد
113	2.2	حد تلاش کرنے کے قواعد
126	2.3	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی تعریف
146	2.4	تصور حد کی توسیع
164	2.5	استمرار
165	1	ضمیمہ دوم

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہوگی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- <http://www.urduenglishdictionary.org>

- <http://www.nlpd.gov.pk/lughat/>

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

<https://www.github.com/khalidyouusafzai>

سے حاصل کی جاسکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018ء

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. ایک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب بائیں ہاتھ حد⁷ حاصل ہو گا۔ اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب دائیں ہاتھ حد⁸ حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

ایک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔ اسی لئے عام حد کو بعض اوقات دو طرفہ حد⁹ بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر ایک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔ اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

تعریف: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف

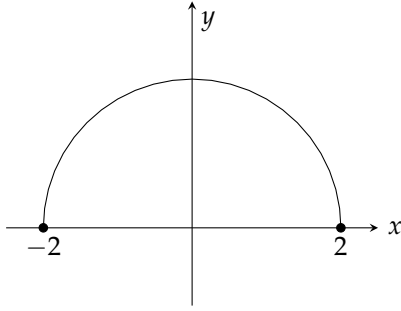
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) ، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

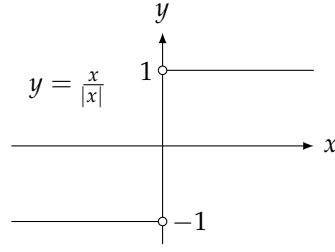
فرض کریں کہ وقفہ (c, a) ، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

left-handed limit⁷
right-handed limit⁸
two-sided limit⁹



شکل 2.43: تقابل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔



شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔

شکل 2.42 میں تقابل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$$

$x \rightarrow a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x \rightarrow a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تقابل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تقابل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ کا دائرہ کار $[-2, 2]$ ہے۔ تقابل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

نقطہ $x = -2$ پر تقابل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x = 2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x = -2$ اور $x = 2$ پر تقابل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ □

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تقابل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تقابل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تقابل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ پتچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: ایک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

$x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔
($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔ (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ
 $f(2) = 2$ ہے۔

$x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

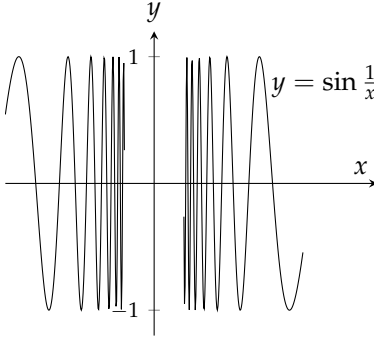
$x = 4$: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔ (نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ $[0, 4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ □

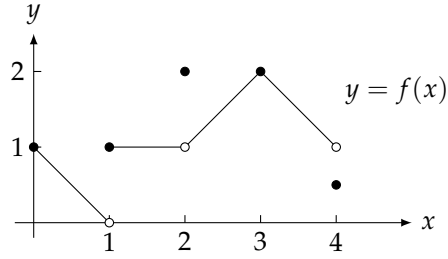
اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا ایک طرفہ حد موجود تھا۔ درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نہ بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin \frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔

حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا پر $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ ایسا کوئی کتنا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔ یوں $x = 0$ پر $\sin \frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نہ کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ □



شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26



شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

لا متناہی حد

آئیں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ جیسے جیسے $x \rightarrow 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔ یوں $x \rightarrow 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

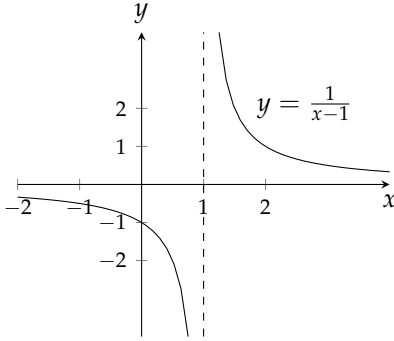
یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

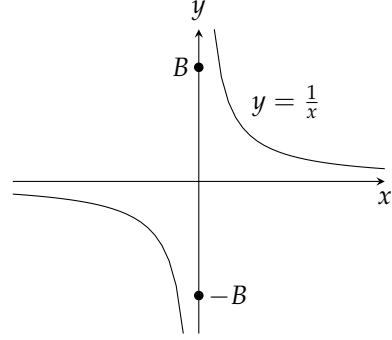
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: ایک طرفہ حد
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔



شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27



شکل 2.46: تقابل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔

حل: ترمیمی حل: تقابل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x-1$ اور اس کے بالکل متناسب پر غور کریں۔ $x \rightarrow 1^+$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$ ملتے ہیں۔ $x \rightarrow 1^-$ کرنے سے $(x-1) \rightarrow 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$ ملتے ہیں۔ □

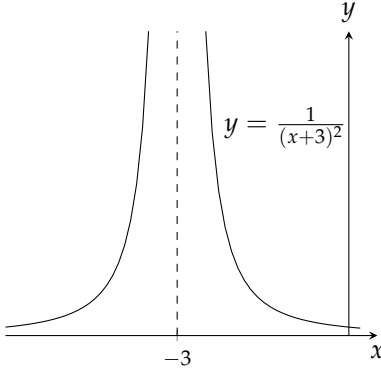
مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد (i) $x=0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x=-3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔
حل: (i) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

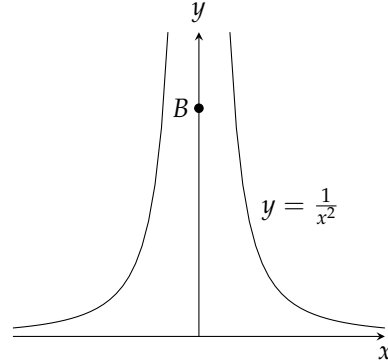
(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□



شکل 2.49: $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)



شکل 2.48: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$x \rightarrow 0$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \rightarrow 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \rightarrow 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔ اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔ صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ حاصل ہوتا ہے لہذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: نااطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \quad (ب)$$

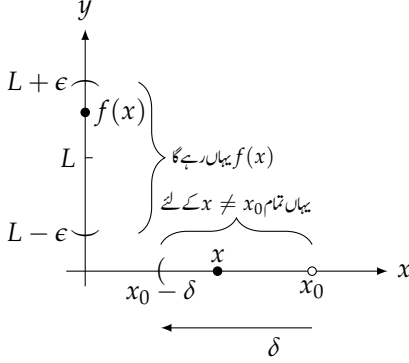
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \quad (د)$$

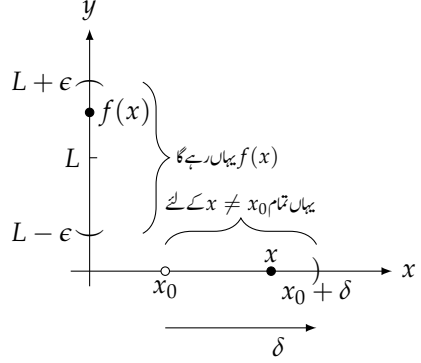
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \quad (و)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \quad (ه)$$

جزو (i) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔ جزو (ه) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □



شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جاسکتی ہے۔

تعریف: دائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$(2.1) \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

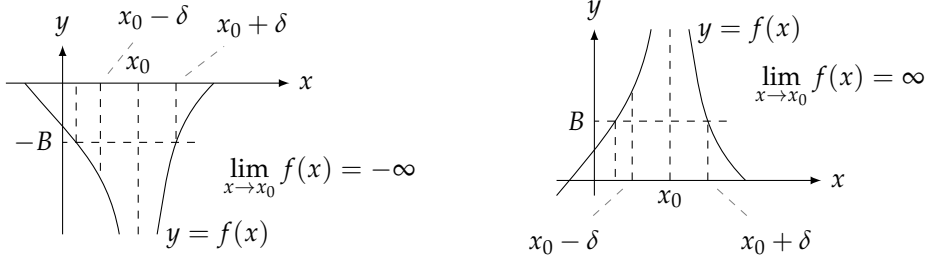
بائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

$$(2.2) \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$



شکل 2.52: لائنہائی حد کی تعریف

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.3) \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(2.4) \quad -\delta < x - x_0 < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$(2.5) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لائنہائی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لائنہائی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبداسے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔ اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لامتناہی حد

(i) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے

$f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

ایک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔ اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 1: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{ا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ب.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \text{ه.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{و.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad \text{ز.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{ح.}$$

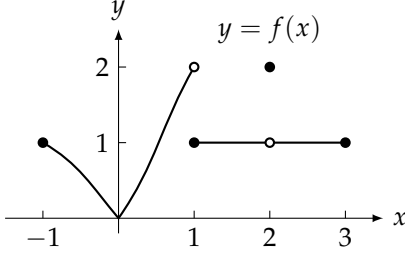
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{ط.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ موجود ہے۔} \quad \text{ث.}$$

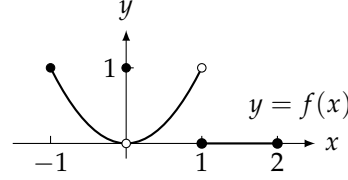
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \quad \text{ی.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{ک.}$$

سوال 2: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تفاعل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔



شکل 2.54: تقابل برائے سوال 2



شکل 2.53: تقابل برائے سوال 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{ن.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{ا.}$$

ج. کھلے وقفہ $(-1, 1)$ میں ہر c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \quad \text{ج.}$$

ط. کھلے وقفہ $(1, 3)$ میں ہر c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \text{د.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \quad \text{ی.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{ہ.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{یا.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ غیر موجود ہے۔} \quad \text{و.}$$

سوال 3: درج ذیل تقابل کو شکل 3 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

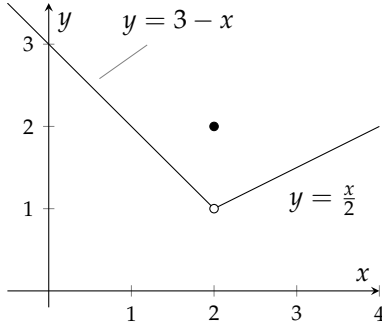
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔

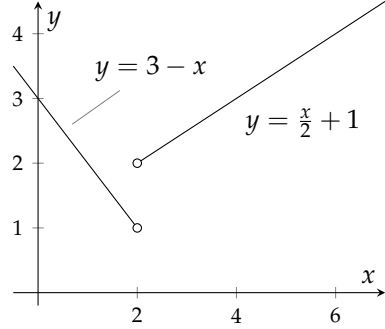
ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود ہے۔ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.56: تقابل برائے سوال 4



شکل 2.55: تقابل برائے سوال 3

سوال 4: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

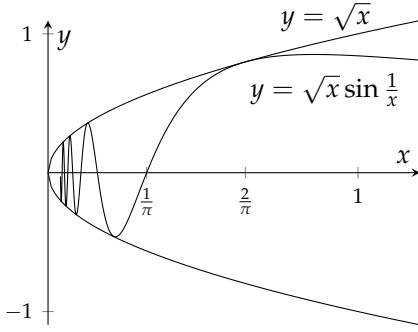
د. کیا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5: درج ذیل تقابل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

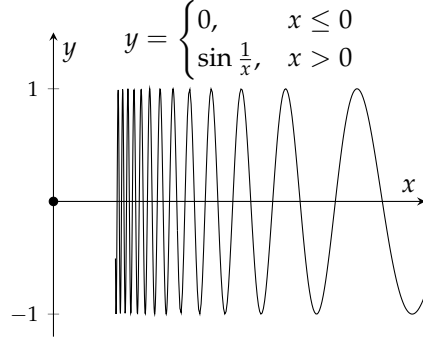
$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 6



شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 5

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

ا. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 8:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9 اور سوال 10 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases} \quad \text{سوال 9:}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \text{ یا } 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \quad \text{سوال 10:}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 11 تا سوال 20 میں حد تلاش کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \quad \text{سوال 11:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \quad \text{سوال 12:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{x+1} \right) \left(\frac{2x+5}{x^2+x} \right) \quad \text{سوال 13:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\frac{x+6}{x} \right) \left(\frac{3-x}{7} \right) \quad \text{سوال 14:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} \quad \text{سوال 15:}$$

سوال 16: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$

سوال 17: (i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$

سوال 18: (i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 19: (i) $\lim_{\theta \rightarrow 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta \rightarrow 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$

سوال 20: (i) $\lim_{t \rightarrow 4^+} (t - |t|)$ (ب) $\lim_{t \rightarrow 4^-} (t - |t|)$

لامتناہی حد: سوال 21 تا سوال 32 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 21: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x}$

سوال 22: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 23: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$

سوال 24: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 25: $\lim_{x \rightarrow -8^+} \frac{2x}{x+8}$

سوال 26: $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 27: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4}{(x-7)^2}$

سوال 28: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 29: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$

سوال 30: (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

سوال 31: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^{2/5}}$

سوال 32: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 33 تا سوال 36 میں حد تلاش کریں۔

سوال 33: $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x$

سوال 34: $\lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 35: $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} (1 + \csc \theta)$

سوال 36: $\lim_{\theta \rightarrow 0} (2 - \cot \theta)$

مزید حساب: سوال 37 تا سوال 42 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 37: $\lim_{x^2 \rightarrow 4} \frac{1}{x^2 - 4}$

ا. $x \rightarrow 2^+$ ب. $x \rightarrow 2^-$ ج. $x \rightarrow -2^+$ د. $x \rightarrow -2^-$

سوال 38: $\lim_{x^2 \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1}$

ا. $x \rightarrow 1^+$ ب. $x \rightarrow 1^-$ ج. $x \rightarrow -1^+$ د. $x \rightarrow -1^-$

سوال 39: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} \right)$

ا. $x \rightarrow 0^+$ ب. $x \rightarrow 0^-$ ج. $x \rightarrow \sqrt[3]{2}$ د. $x \rightarrow -1$

سوال 40: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

$$ا. \quad x \rightarrow -2^+ \quad ب. \quad x \rightarrow -2^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 41:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 2^+ \quad ج. \quad x \rightarrow 2^- \quad د. \quad x \rightarrow 2$$

$$\text{سوال 42:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$$

$$ا. \quad x \rightarrow 2^+ \quad ب. \quad x \rightarrow -2^+ \quad ج. \quad x \rightarrow 0^- \quad د. \quad x \rightarrow 1^+$$

سوال 43 تا سوال 46 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

$$\text{سوال 43:} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (2 - \frac{3}{t^{1/3}})$$

$$ا. \quad t \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad t \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 44:} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$$

$$ا. \quad t \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad t \rightarrow 0^-$$

$$\text{سوال 45:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\text{سوال 46:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$$

$$ا. \quad x \rightarrow 0^+ \quad ب. \quad x \rightarrow 0^- \quad ج. \quad x \rightarrow 1^+ \quad د. \quad x \rightarrow 1^-$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 47: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 48: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 50: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

یک طرفہ حد کی با ضابطہ تعریف

سوال 51: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5 + \delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟

سوال 52: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4 - \delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جارہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 53 اور سوال 54 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \quad \text{سوال 53}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1 \quad \text{سوال 54}$$

سوال 55: (ا) $\lim_{x \rightarrow 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x \rightarrow 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 56: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔ (ا) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 57 تا سوال 60 میں دیے گئے فقروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{سوال 57}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \quad \text{سوال 58}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty \quad \text{سوال 59}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty \quad \text{سوال 60}$$

ایک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لامتناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطلق عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} = \infty$$

سوال 61: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{ا.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{ج.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{ب.}$$

ایک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 62 تا سوال 67 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{سوال 62}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{سوال 63}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{سوال 64}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{سوال 65}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \quad \text{سوال 66}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty \quad \text{سوال 67}$$

ضمیمہ ۱

ضمیمہ دوم

