احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دھان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

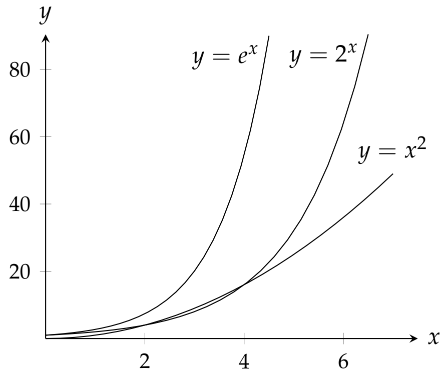
اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

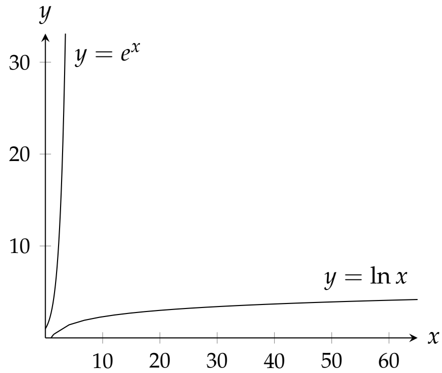
میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011



شکل 7.37: تفاعل $y = e^x$ ، $y = 2^x$ اور تفاعل $y = x^2$



شکل 7.38: تفاعل $y = e^x$ اور $y = \ln x$ کا موازنہ

7.7 اضافی شرح نمو

اس حصہ میں x کی بڑھتی قیمت پر x کے تفاعل کی شرح تبدیلی پر غور کیا جائے گا۔ ہم ان تفاعل پر غور کریں گے جو $x \to \infty$ کرنے سے آخر کار مثبت ہو کر مثبت ہی رہتے ہیں۔

اضافی شرح نمو

آپ نے دیکھا ہو گا کہ متغیر x بڑھانے سے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل (جنہیں ہم نے باب 4 میں ترسیم کیا تھا) کے لحاظ سے قوت نما تفاعل، مثلاً 2^x اور e^x ، زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ قوت نما تفاعل یقیناً x کے لحاظ سے زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ آپ شکل 7.37 میں دیکھ سکتے ہیں کہ x بڑھانے سے x^2 کے لحاظ سے 2^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔ درحقیقت $x \to \infty$ کرنے سے تفاعل 2^x اور e^x کے بڑھنے کی شرح، x کے کسی بھی طاقت (مثلاً $x^{1\,000\,000}$) کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔

متغیر x بڑھاتے ہوئے تفاعل $y = e^x$ کے بڑھنے کی شرح کو سمجھنے کی خاطر تصور کریں کہ آپ اس تفاعل کو ترسیم کرتے ہیں جہاں محور کا پیمانہ $1\,\text{cm}$ ہے۔ یوں $x = 1\,\text{cm}$ پر $y = e^1 \approx 3\,\text{cm}$ ہو گا۔ یوں $x = 6\,\text{cm}$ پر $y = e^6 \approx 403\,\text{cm}$ یعنی تقریباً 4 میٹر ہو گا جو کمرے کی چھت کے برابر ہو گا۔ اسی طرح $x = 10\,\text{cm}$ پر $y = e^{10} \approx 22\,026\,\text{cm}$ یعنی $220\,\text{m}$ ہو گا جو شہر کے عموماً عمارتوں سے زیادہ بلند ہو گا۔ اگر $x = 24\,\text{cm}$ ہو تب y چاند تک آدھے فاصلہ سے زیادہ طے کر چکا ہو گا اور $x = 24\,\text{cm}$ پر y سورج کے قریب ترین ستارہ سے زیادہ دور ہو گا:

$$\begin{aligned} e^{43} &\approx 4.73 \times 10^{18}\,\text{cm} \\ &= 4.73 \times 10^{13}\,\text{km} \\ &\approx 5 \text{ نوری سال} \end{aligned}$$

اس کے باوجود x محور پر آپ مبدا سے صرف $43\,\text{cm}$ فاصلہ پر ہوں گے۔

اس کے برعکس $x \to \infty$ کرنے سے لوگارتھمی تفاعل $y = \log_2 x$ اور $y = \ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے کسی بھی مثبت طاقت کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گا۔یوں محور کا پیمانہ $1\,\text{cm}$ لیتے ہوئے مبدا سے صرف $43\,\text{cm}$ بلندی تک پہنچنے کی خاطر آپ کو محور x پر 5 نوری سال دور جانا ہو گا (شکل 7.38)۔

قوت نما، کثیر رکنی اور لوگارتھمی تفاعل کا ایک دوسرے کے ساتھ مذکورہ بالا موازنہ کو زیادہ درستگی سے بیان کرنے کی خاطر ہم ایک تعریف پیش کرتے ہیں۔جب ہم کہتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرنے سے کسی بھی تفاعل $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح سے تفاعل $f(x)$ کے بڑھنے کی شرح زیادہ ہے تب اس سے مراد درج ذیل ہو گا۔

تعریف: $x \to \infty$ کرتے ہوئے بڑھنے کی شرح
فرض کریں کافی بڑے x کے لئے $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔

ا. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

یا، اس کا مماثل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے g کے بڑھنے کی شرح، f کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی۔

ب. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L =\neq 0 \qquad L \text{ غیر صفر اور متناہی ہے}$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح کے برابر ہو گی۔

□

ان تعریف کے تحت تفاعل $y = 2x$ تفاعل $y = x$ سے زیادہ تیزی سے نہیں بڑھتا ہے۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

ہے جو غیر صفر اور متناہی حد ہے۔ زیادہ تیزی سے بڑھنے کے عمومی مطلب کو ہم اس لئے نظر انداز کرتے ہیں کہ جب ہم کہیں کہ x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے بڑھنے کی شرح g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہے تب اس سے مراد "x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے لحاظ سے g کی قیمت قابل نظر انداز ہے،" لینا چاہیے۔

مثال 7.45: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے لحاظ سے e^x درج ذیل کی بنا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\frac{\infty}{\infty}}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}}_{\frac{\infty}{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty \qquad \text{قاعدہ لھوپیٹال دو مرتبہ استعمال کیا گیا}$$

□

مثال 7.46: (ا) $x \to \infty$ کرتے ہوئے 2^x کے لحاظ سے 3^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے چونکہ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty$$

(ب) $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے قوت نما تفاعل کبھی بھی ایک شرح سے نہیں بڑھتے ہیں۔اگر $a > b > 0$ ہو تب a^x کے بڑھنے کی شرح b^x کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{b^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^x=\infty$$

□

مثال 7.47: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے بڑھنے کی شرح $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}2x^2=\infty$$

□

مثال 7.48: $x \to \infty$ کرنے سے $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی:

$$\lim x\to\infty\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

□

مثال 7.49: قوت نما تفاعل کے برعکس $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے لوگارتھمی تفاعل ایک جیسے شرح سے بڑھتے ہیں:

$$\lim x \to \infty \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x / \ln a}{\ln x / \ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

یہ حد غیر صفر اور متناہی ہے۔ □

اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، اور $x \to \infty$ کرتے ہوئے gf کے بڑھنے کی شرح اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو گی۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

یعنی

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

ہے۔اگر L_1 اور L_2 غیر صفر اور متناہی ہوں تب L_1L_2 بھی غیر صفر اور متناہی ہو گا۔

مثال 7.50: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^2+5}$ اور $(2\sqrt{x}-1)^2$ کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہے۔

حل: ہم دکھاتے ہیں کہ دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح رہی ہے جو تفاعل x کی ہے:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\Big)^2 = \lim_{x\to\infty} \Big(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^2 = 4$$

یوں دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنے ہو گی۔ □

رتبہ

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم