احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima اور کتاب کی آخر میں جدول Libre Office Calc کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای- میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 3

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

3.1 تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کی ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

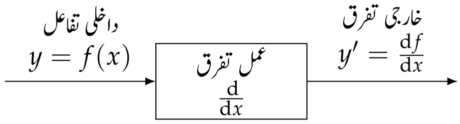
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔اس حصے میں f کی دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کی ڈھلوان پر بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا **تفرق**[1] درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

[1] derivative



شکل 3.1: تفرق کے عمل کی ڈبہ صورت

f' کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x پر f کا **تفرق** پایا جاتا ہے یا کہ x پر f **قابل تفرق**[2] ہے۔

علامتیت

تفاعل $y = f(x)$ کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل 3.1)۔

$D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔

$\dot{y}$ نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو "x کے لحاظ سے y کو تفرق" پڑھتے ہیں۔اسی طرح $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ کو "x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

[2] differentiable

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال 2.40 اور مثال 2.41 میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال 2.40 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx + b) = m$$

اور مثال 2.41 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{3.1}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کے حاصل کے اقدام

1. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

2. درج ذیل تفریقی حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

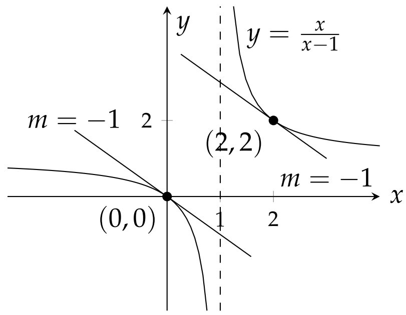
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال 3.1:

ا. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟



شکل 3.2: $x = 0$ اور $x = 2$ پر $y' = -1$ ہو گا (مثال 3.1)۔

حل: (ا) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔
پہلا قدم: یہاں $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h) = \frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔
دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\
&= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\
&= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}
\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب) $y = f(x)$ کی ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہو گی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

اس مساوات $(x-1)^2 = 1$ کے مترادف ہے لہٰذا $x = 2$ اور $x = 0$ درکار نتائج ہیں (شکل 3.2)۔ □

مثال 3.2:

1. $x > 0$ کے لئے $y = \sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

.2 $x=4$ پر تفاعل $y=\sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (ا) **پہلا قدم:**

$$f(x)=\sqrt{x},\quad f(x+h)=\sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}&=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} && \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \text{ سے ضرب دیتے ہیں}\\&=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل 3.3 دیکھیں۔
(ب) $x=4$ پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4}=\frac{1}{4}$$

نقطہ $(4,2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4,2)$ پر f کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y=2+\frac{1}{4}(x-4)=\frac{1}{4}x+1$$

□

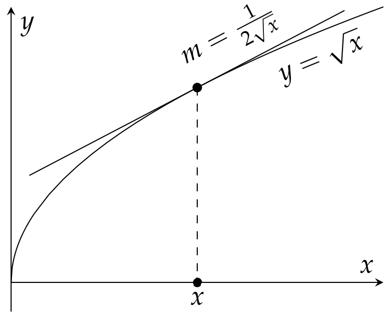
نقطہ $x=a$ پر تفاعل $y=f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

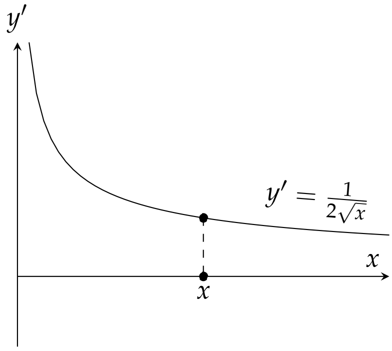
کے علاوہ

$$y'\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

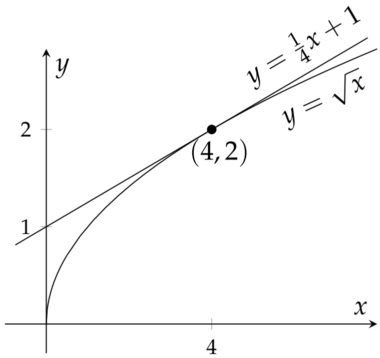
سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں $|_{x=a}$ علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو $x=a$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔



(ا) تفاعل $y = \sqrt{x}$

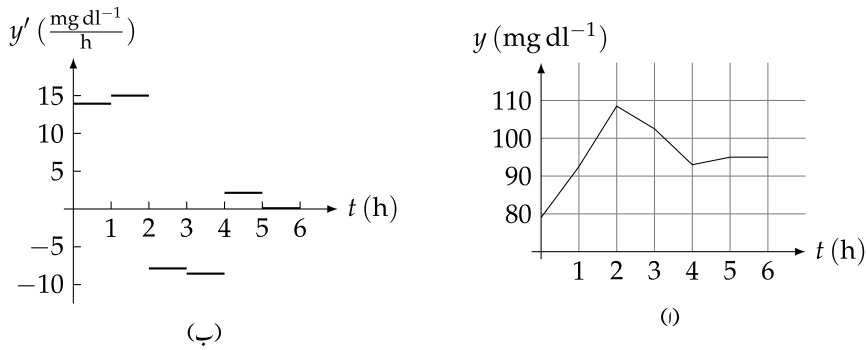


(ب) $x > 0$ کے لئے $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



(ج) تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور نقطہ $(4,2)$ پر اس کا مماس $y = \frac{1}{4}x + 1$

شکل 3.3: اشکال برائے مثال 3.2۔نقطہ $x = 0$ پر تفاعل معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔



شکل 3.4: (ا) قبل پرواز پرکھ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پرکھ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

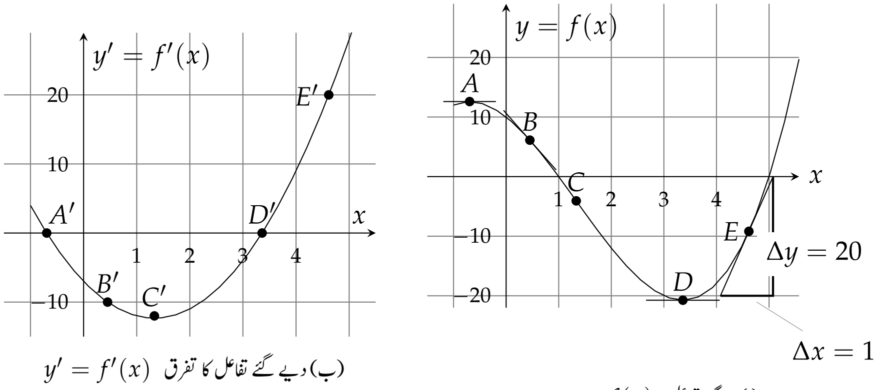
تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباو بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تاکہ ہمیں f کی صورت نظر آئے۔ مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان f' سے ہم عموماً f' کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

مثال 3.3: **دوا**

23 اپریل 1988 کو 31 کلو گرام وزنی، ڈیڈلس[3] نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریتی[4] سے جزیرہ سانٹورینی[5] تک اڑا کر 115.11 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔ یہ جہاز امریکی یونیورسٹی[6] کے طلبہ نے تیار کیا۔ اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل 3.4-ا میں دکھایا گیا ہے۔ موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جا سکتا ہے۔ تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل 3.4-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر $79\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ سے بڑھ کر $83\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ ہو جاتا ہے۔ یوں تبدیلی $\Delta y = 93 - 79 = 14\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}$ ہے جس کو $\Delta x = 1\,\mathrm{h}$ سے تقسیم کرتے ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14\,\mathrm{mg\,dl^{-1}}}{\mathrm{h}}$$

[3] Daedalus
[4] Crete
[5] Santorini
[6] MIT



(ب) دیے گئے تفاعل کا تفرق $y' = f'(x)$

(ا) دیا گیا تفاعل $y = f(x)$

شکل 3.5: اشکال برائے مثال 3.5

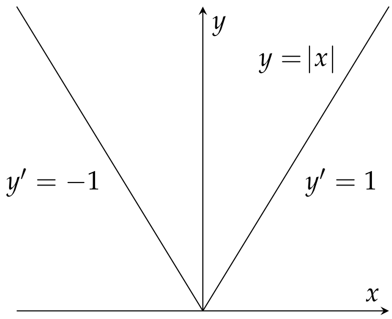
حاصل ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \cdots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ان نقطوں پر تفرقی سیڑھی تفاعل غیر معین ہے۔ $\square$

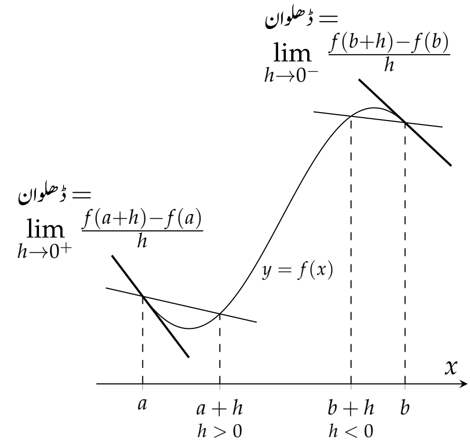
جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.4: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 3.5-ا میں دکھایا گیا ہے۔اس کے تفرق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل: شکل 3.5-ا کے ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔شکل-ا کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔ A سے D تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل 3.5-ب کے مطابقتی نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔نقطہ E پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جا سکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔آپ شکل-ا میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو -10 ہو گا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔شکل-ا میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔ $\square$



شکل 3.7: چونکہ مبدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال 3.5)۔



شکل 3.6: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لا متناہی) پر تفاعل $y = f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a,b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل 3.6)۔

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
a پر دائیں ہاتھ تفرق

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$
b پر بائیں ہاتھ تفرق

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ 2.5 کی بنا کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال 3.5: تفاعل $y = |x|$ وقفہ $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مبدا کے دائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 \cdot x) = 1, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot x) = -1$$

ہے (شکل 3.7)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h>0 \text{ تب } |h|=h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h<0 \text{ تب } |h|=-h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1\end{aligned}$$

□

کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

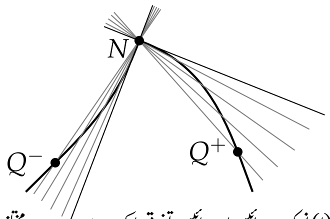
اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہو گا۔ اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

1. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل 3.8-ا)۔

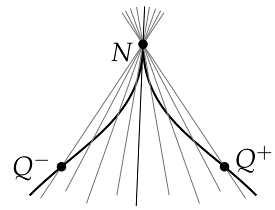
2. راس، جہاں NQ کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ب)۔

3. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کی ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ج)۔

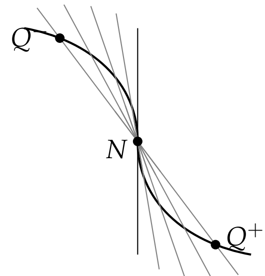
4. عدم استمرار (شکل 3.8-د اور شکل 3.8-ہ)۔



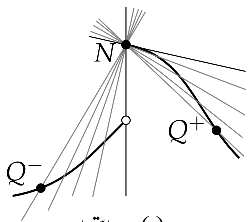
(ا) نوک پر بائیں اور دائیں تفرق ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔



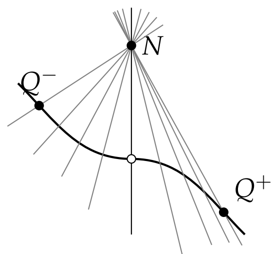
(ب) راس پر ایک طرف سے ڈھلوان ∞ جبکہ دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے۔



(ج) نقطہ N پر مماس انتصابی ہے۔



(د) عدم استمرار



(ہ) عدم استمرار

شکل 3.8: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل نا قابل تفرق ہو گا۔

قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہو گا۔

مسئلہ 3.1: اگر $x=c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x=c$ پر f استمراری ہو گا۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہیں۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

اب $h \to 0$ لیں۔ مسئلہ 2.1 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x=c$ پر f کا یک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x=c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دائیں) سے استمراری ہو گا۔

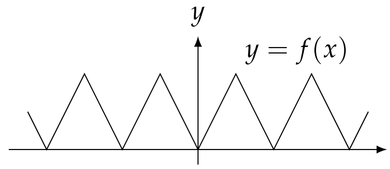
انتباہ مسئلہ 3.1 کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال 3.5 میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y=|x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل 3.9) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

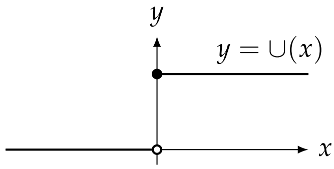
کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائشٹراس[7] نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

[7] [1815-1897]



شکل 3.9: دندان ترسیم استمراری لیکن لا متناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔



شکل 3.10: اکائی سیڑھی تفاعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے لہٰذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔

یہ کلیہ f کو بڑھتی تعدد کے کوسائن تفاعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔بل کو بل دینے سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کا مماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفاعل جن کا کسی بھی نقطے پر مماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری[8] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفاعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفاعل کسی دوسرے کا تفرقی تفاعل ہو۔درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.2: اگر جس وقفے پر f قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ a اور b پائے جاتے ہیں تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے بیچ ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ 3.2 (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفاعل اس صورت تک کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل 3.10)۔ ایک تفاعل کب کسی دوسرے تفاعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبنٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ان کے جواب کو ہم باب میں دیکھیں گے۔

[8] chaos theory

سوالات

تفرق تفاعل اور قیمتوں کی تلاش

سوال 1 تا سوال 6 میں تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1: $f(x) = 4 - x^2; \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$
جواب: $-2x, 6, 0, -2$

سوال 2: $F(x) = (x-1)^2 + 1; \quad F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال 3: $g(t) = \frac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
جواب: $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

سوال 4: $k(z) = \frac{1-z}{2z}; \quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال 5: $p(\theta) = \sqrt{3\theta}; \quad p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$
جواب: $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$

سوال 6: $r(s) = \sqrt{2s+1}; \quad r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال 7 تا سوال 12 میں دیا گیا تفرق حاصل کریں۔

سوال 7: $y = 2x^3; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
جواب: $6x^2$

سوال 8: $r = \frac{s^3}{2} + 1; \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$

سوال 9: $s = \frac{t}{2t+1}; \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$
جواب: $\frac{1}{(2t+1)^2}$

سوال 10: $v = t - \frac{1}{t}; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

سوال 11: $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$
جواب: $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

سوال 12: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$; $z=\frac{1}{\sqrt{3w-2}}$

ڈھلوان اور مماسی خطوط

سوال 13 تا سوال 16 میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 13: $f(x)=x+\frac{9}{x};\quad x=-3$
جواب: $1-\frac{9}{x^2}, 0$

سوال 14: $k(x)=\frac{1}{2+x};\quad x=2$

سوال 15: $s=t^3-t^2;\quad t=-1$
جواب: $3t^2-2t, 5$

سوال 16: $y=(x+1)^3;\quad x=-2$

سوال 17 تا سوال 18 میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 17: $f(x)=\frac{8}{\sqrt{x-2}};\quad (x,y)=(6,4)$
جواب: $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y-4=-\frac{1}{2}(x-6)$

سوال 18: $g(z)=1+\sqrt{4-z};\quad (z,w)=(3,2)$

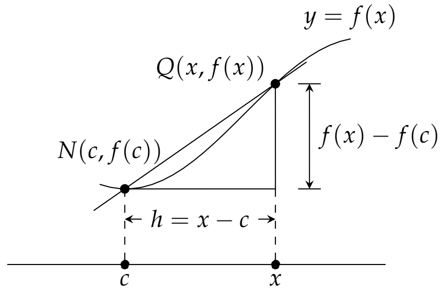
سوال 19 تا سوال 22 میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19: $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1};\quad s=1-3t^2$
جواب: 6

سوال 20: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sqrt{3}};\quad y=1-\frac{1}{x}$

سوال 21: $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0};\quad r=\frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 22: $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=4};\quad w=z+\sqrt{z}$



شکل 3.11: حصول تفرق کا متبادل کلیہ

تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ

تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل 3.11 میں سیکنٹ کی ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال 23 تا سوال 26 میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

سوال 23: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad c = -1$
جواب: -1

سوال 24: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad c = 2$

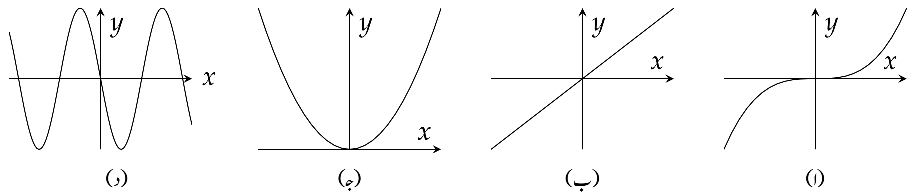
سوال 25: $g(t) = \frac{t}{t-1}, \quad c = 3$
جواب: $-\frac{1}{4}$

سوال 26: $k(s) = 1 + \sqrt{s}, \quad c = 9$

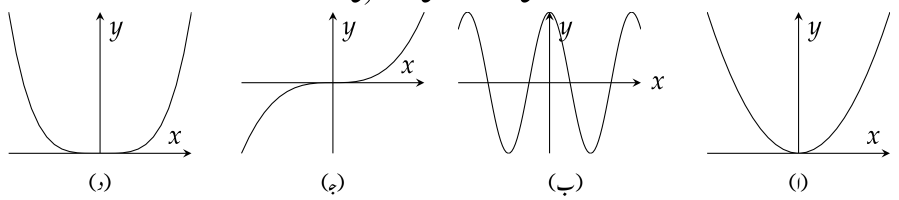
ترسیمات سوال 27 تا سوال 30 میں دیے گئے تفاعل کا تفرق شکل 3.12 میں تلاش کریں۔

سوال 27: شکل 3.13-ا
جواب: شکل 3.12-ب

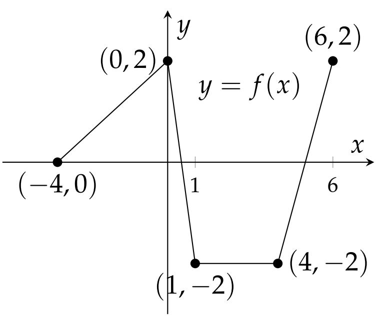
سوال 28: شکل 3.13-ب
جواب: شکل 3.12-د



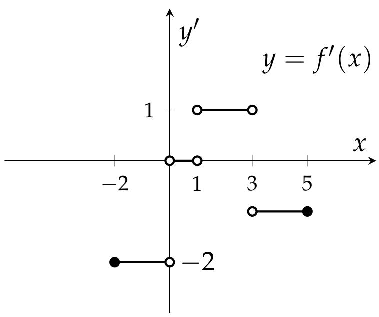
شکل 3.12: تفاعل کے تفرق



شکل 3.13: اصل تفاعل



شکل 3.14: ترسیم برائے سوال 31



شکل 3.15: تفاعل کے تفرق کا ترسیم برائے سوال 32

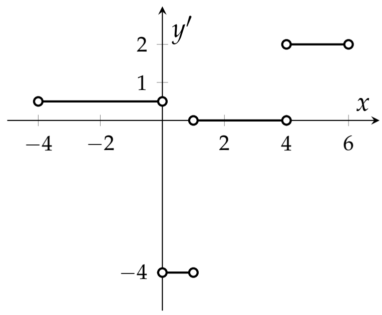
سوال 29: شکل 3.13-ج
جواب: شکل 3.12-ج

سوال 30: شکل 3.13-د
جواب: شکل 3.12-ا

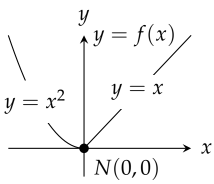
سوال 31: قطعات کو جوڑ کر شکل 3.14 حاصل کی گئی ہے۔(ا) وقفہ $[-4, 6]$ پر کہاں f' غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) انتصابی محور کو y' کہتے ہوئے f' کو ترسیم کریں۔ ترسیم سیڑھی نما ہو گا۔

جواب: (ا) $x = 0, 1, 4$ ؛ (ب) شکل 3.16

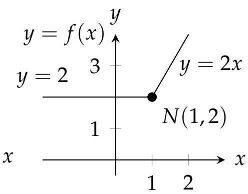
سوال 32: تفاعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی
(ا) درج ذیل طریقے سے تفاعل f ترسیم کو وقفہ $[-2, 5]$ پر کریں۔



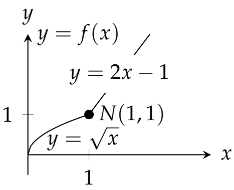
شکل 3.16: جواب برائے سوال 32



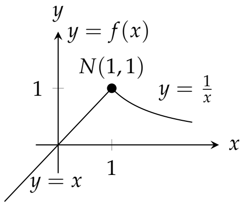
شکل 3.17



شکل 3.18



شکل 3.19



شکل 3.20

1. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔

2. ترسیم کو نقطہ $(-2,3)$ سے شروع کریں۔

3. تفاعل کا تفرق شکل 3.15 میں دکھایا گیا ہے۔

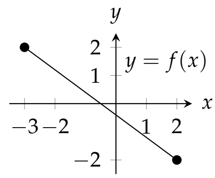
(ب) نقطہ $(-2,0)$ سے شروع کرتے ہوئے جزو (ا) کا ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 33 تا سوال 36 میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تفاعل نا قابل تفرق ہے۔

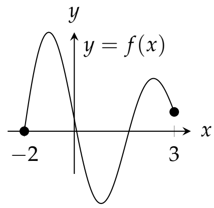
سوال 33: تفاعل کو شکل 3.17 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$ جبکہ $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 0$ ہے لہٰذا $x = 0$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔

سوال 34: تفاعل کو شکل 3.18 میں دکھایا گیا ہے۔

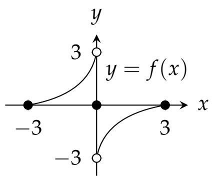
سوال 35: تفاعل کو شکل 3.19 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to1^+} f'(x) = 2$ جبکہ $\lim_{x\to1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ ہے لہٰذا $x = 1$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔



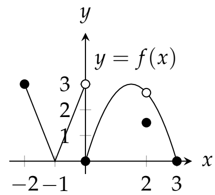
شکل 3.21



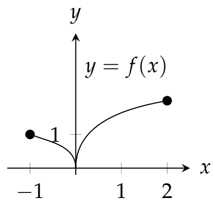
شکل 3.22



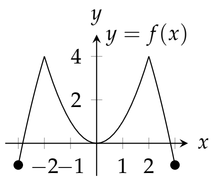
شکل 3.23



شکل 3.24



شکل 3.25



شکل 3.26

سوال 36: تفاعل کو شکل 3.20 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 37 تا سوال 42 میں بند دائرہ کار D پر تفاعل کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کن نقطوں پر تفاعل (ا) قابل تفرق، (ب) استمراری لیکن نا قابل تفرق، (ج) غیر استمراری اور نا قابل تفرق ہے؟

سوال 37: ترسیم شکل 3.21 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 2$ ہے۔

جواب: (ا) $-3 \le x \le 2$ (ب) کوئی نہیں (ج) کوئی نہیں۔

سوال 38: ترسیم شکل 3.22 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \le x \le 3$ ہے۔

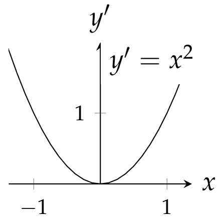
سوال 39: ترسیم شکل 3.23 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 3$ ہے۔
جواب: (ا) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ (ب) کوئی نہیں (ج) $x = 0$

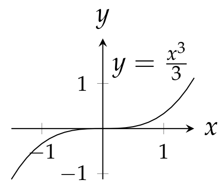
سوال 40: ترسیم شکل 3.24 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 41: ترسیم شکل 3.25 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -1 \le x \le 2$ ہے۔
جواب: (ا) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ (ب) $x = 0$ (ج) کوئی نہیں۔

سوال 42: ترسیم شکل 3.26 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 43 تا سوال 46 میں درج ذیل کریں۔





شکل 3.27: ترسیم برائے شکل 45

ا. تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق $y' = f'(x)$ تلاش کریں۔

ب. $y = f(x)$ اور $y' = f'(x)$ کو علیحدہ محدد پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج. x کی کن قیمتوں کے لئے y' کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د. x بڑھنے سے x کی قیمتوں کے کن وقفوں پر $y = f(x)$ بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (اگلے باب میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال 43: $y = -x^2$
جواب: (ا) $y' = -2x$ (ج) $x < 0, x = 0, x > 0$ (د) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

سوال 44: $y = -\frac{1}{x}$

سوال 45: $y = \frac{x^3}{3}$
جواب: (ا) $y' = x^2$، (ب) شکل 3.27، (ج) $x \neq 0$ ، $x = 0$ ، کوئی نہیں، (د) $-\infty < x < \infty$ ، کوئی نہیں۔

سوال 46: $y = \frac{x^4}{4}$

سوال 47: کیا $y = x^3$ کا کبھی منفی ڈھلوان ہو گا؟ اگر ہے تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $y' = 3x^2$ کبھی بھی منفی نہیں ہو گا۔

سوال 48: کیا $y = 2\sqrt{x}$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 49: کیا قطع مکافی $y = 2x^2 - 13x + 5$ کے مماس کا ڈھلوان -1 ہو سکتا ہے۔اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں ہے تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں، $y + 16 = -(x - 3)$ نقطہ $(3, -16)$ پر مماس ہے۔

سوال 50: کیا منحنی $y = \sqrt{x}$ کا کوئی مماس x محور کو $x = -1$ پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال 51: کیا $(-\infty, \infty)$ پر قابل تفرق تفاعل کا تفرق $y = \lfloor x \rfloor$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: نہیں، چونکہ تفاعل $y = \lfloor x \rfloor$ متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا ہے۔

سوال 52: $f(x) = |x|$ کے تفرق کو ترسیم کرنے کے بعد $y = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ ترسیم کریں۔ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال 53: یہ جانتے ہوئے کہ $x = x_0$ پر تفاعل $f(x)$ قابل تفرق ہے، آپ $x = x_0$ پر تفاعل $-f$ کی قابل تفرق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں؛ $(-f)'(x) = -(f'(x))$

سوال 54: کیا $t = 7$ پر $g(t)$ کا قابل تفرق ہونے سے آپ $t = 7$ پر $3g$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 55: فرض کریں کہ t کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $g(t)$ اور $h(t)$ معین ہیں اور $g(0) = h(0) = 0$ ہے۔ کیا $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)}$ موجود ہو گا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $g(t) = mt$ اور $h(t) = t$ کے لئے $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)} = m$ ہو گا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

سوال 56: (ا) فرض کریں کہ $-1 \le x \le 1$ کے لئے تفاعل $f(x)$ شرط $|f(x)| \le x^2$ کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ $x = 0$ پر f قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ $x = 0$ پر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 57: $0 \le x \le 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ کو ترسیم کریں۔اس کے اوپر پہلے $h = 1, 0.5, 0.1$ لیتے ہوئے $y = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -1, -0.5, -0.1$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 58: $-2 \le x \le 2$ اور $0 \le y \le 3$ لیتے ہوئے $y = 3x^2$ ترسیم کریں۔اسی کے اوپر پہلے $h = 2, 1, 0.2$ لیتے ہوئے $y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -2, -1, -0.2$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کیا ہو رہا ہے۔

سوال 59: وائشٹراس کا نا قابل تفرق تفاعل وائشٹراس تفاعل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ()^n \cos(9^n \pi x)$ کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں کہ یہ کتنی بلدار ہے۔

سوال 60 تا سوال 65 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت قدم h لیتے ہوئے عمومی نقطہ x پر حاصل تقسیم q متعارف کریں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د. $x = x_0$ پر کرتے ہوئے تفاعل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ہ. x_0 سے x کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پر کریں۔ کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (ا) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 60: $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

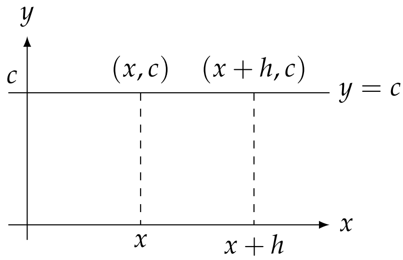
سوال 61: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1$

سوال 62: $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

سوال 63: $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1$

سوال 64: $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 65: $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$



شکل 3.28: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

3.2 قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ 3.1: **مستقل کا تفرق**
اگر c مستقل ہو تب $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c=0$ ہو گا۔

مثال 3.6: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3})=0$ □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے $f(x)=c$ کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل 3.28)۔ ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں x^n کا تفرق دیتا ہے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔

قاعدہ 3.2: قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح
اگر n مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت n سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو n سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 3.7:

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

□

ثبوت قاعدہ: اگر $f(x) = x^n$ ہو تب $f(x+h) = (x+h)^n$ ہو گا۔چونکہ n مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1+a^{n-2}b} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

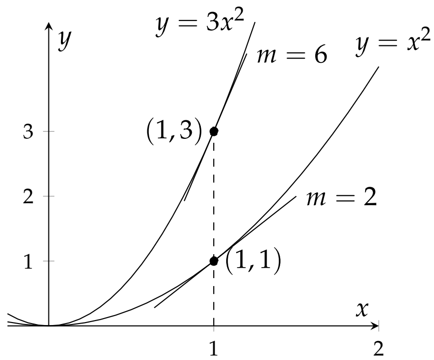
استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ہم $a = x+h$ اور $b = x$ لیتے ہیں۔یوں $h = a - b$ ہو گا۔اس طرح

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جو n ارکان پر مشتمل ہے اور $h \to 0$ کرتے ہوئے ہر رکن کا حد x^{n-1} ہے۔یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

□



شکل 3.29: ترسیم برائے مثال 3.8

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

قاعدہ 3.3: **قاعدہ مستقل مضرب**
اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

بالخصوص مثبت عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

مثال 3.8: تفرقی کلیہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$ کہتی ہے کہ y محور کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم $y = x^2$ کی پیمائش تبدیل کرنے سے ہر نقطے کی ڈھلوان 3 سے ضرب ہو گی (شکل 3.29)۔ □

مثال 3.9: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ 3.3 میں $c = -1$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} && f(x)=cu(x) \text{ کے تفرق کی تعریف} \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{تحدیدی خاصیت} \\ &= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && u \text{ قابل تفرق ہے} \end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفرق تفاعل کے مجموعے کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.4: **قاعدہ مجموعہ**
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ $u+v$ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہو گا جہاں u اور v دونوں قابل تفرق ہوں۔ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی **تفریقی قاعدہ** حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفرق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفرق ان کے تفرق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u+(-1)v]=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعل کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعہ میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔اگر $u_1, u_2, \cdots, u_n$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب $u_1+u_2+\cdots+u_n$ بھی قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.10:

(ا) $y = x^4 + 12x$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(12x)\\ &= 4x^3 + 12\end{aligned}$$

(ب) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1)\\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0\\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$

□

آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.4) ہم تفرق کی تعریف کو $f(x) = u(x) + v(x)$ پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)+v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\ &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لئے ثبوت

ہم درج ذیل فقرے کو **ریاضی ماخوذ**[9] کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} \tag{3.2}$$

جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ $n = 2$ کے لئے درست ہے۔یہ ریاضی ماخوذ کا پہلا قدم ہے۔

[9] mathematical induction

دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح $n = k$ (جہاں $k \geq n_0 = 2$ ہے) کے لئے درست ہے تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}$$

ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}})\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}\\
&= \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح $n \geq 2$ کے لئے قاعدہ 3.4 کی درستگی کی تصدیق کرتا ہے۔

مثال 3.11: کیا منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تب کہاں پایا جاتا ہے؟

حل: افقی مماس وہاں ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ صفر کے برابر ہو۔ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

اور اس کے بعد مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ کو x کے لئے حل کرتے ہیں۔

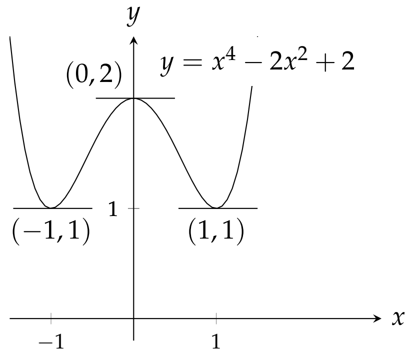
$$\begin{aligned}
4x^3 - 4x &= 0\\
4x(x^2 - 1) &= 0\\
x &= 0, 1, -1
\end{aligned}$$

منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس $x = 0, 1, -1$ پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابقتی نقطے $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(0, 2)$ ہیں (شکل 3.30)۔ □

حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔مثال کے طور پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x \quad \text{ہے جبکہ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{ہو گا۔}$$



شکل 3.30: افقی مماس (مثال 3.11)

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.5: **قاعدہ حاصل ضرب**
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب uv بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

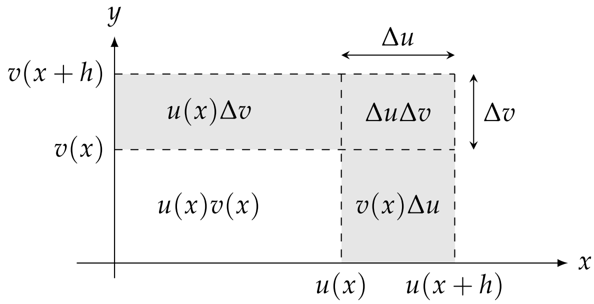
حاصل ضرب uv کا تفرق u ضرب v کا تفرق جمع v ضرب u کا تفرق ہو گا۔اس کو $(uv)' = uv' + vu'$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفرق کی تعریف کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہو گا جس کو u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں $u(x+h)v(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[u(x+h)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}
\end{aligned}$$



شکل 3.31: قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی۔

چونکہ x پر u قابل تفرق ہے لہٰذا $0 \to h$ کرنے سے $u(x+h) \to u(x)$ ہو گا۔ دو کسر کی تحدیدی قیمتیں x پر $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ہیں۔ مختصراً درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ مثبت ہوں اور x بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب $h > 0$ کی صورت میں شکل 3.31 حاصل ہو گا۔ $u(x)$ اور $v(x)$ بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u \Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کو h سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$

حاصل ہو گا۔ اب $h \to 0^+$ کرنے سے $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.12: تفاعل $y = (x^2+1)(x^3+3)$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: قاعدہ حاصل ضرب میں $u = x^2+1$ اور $v = x^3+3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2+1)(x^3+3)] &= (x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)\\ &= 3x^4+3x^2+2x^4+6x\\ &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

□

اس مثال میں قوسین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5+x^3+3x^2+3\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

ملتا ہے جو مثال 3.12 میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال 3.13: فرض کریں کہ $y = uv$ تفاعل u اور v کا حاصل ضرب ہے۔درج ذیل استعمال کرتے ہوئے $y'(2)$ تلاش کریں۔

$$u(2)=3, \quad u'(2)=-4, \quad v(2)=1, \quad v'(2)=2$$

حل: قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y'(2) &= u(2)v'(2)+v(2)u'(2)\\ &= (3)(2)+(1)(-4) = 6-4 = 2\end{aligned}$$

□

حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں تھا اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں ہو گا۔درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

قاعدہ 3.6: **قاعدہ حاصل تقسیم**
اگر $u(x)$ اور $v()$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم $\frac{u}{v}$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

اس آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں $v(x)u(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسب نما میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.14: تفاعل $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: ہم $u = t^2 - 1$ اور $v = t^2 + 1$ لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2t,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2t\right)\\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2}\\ &= \frac{4t}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

□

منفی عدد صحیح کے لئے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ 3.7: **منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ**
اگر n منفی عدد صحیح اور $x \neq 0$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔اگر n منفی عدد صحیح ہو تب $m = -n$ مثبت عدد صحیح ہو گا۔یوں $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) - 1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہٰذا } \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} && \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے}
\end{aligned}$$

□

مثال 3.15:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{x^3}\right) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

□

مثال 3.16: منحنی $y = x + \frac{2}{x}$ کا نقطہ $(1,3)$ پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔
حل: منحنی کی ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 + 2\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

ہے جس کی قیمت نقطہ $x = 1$ پر

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

ہو گی۔نقطہ $(1,3)$ پر ڈھلوان $m = -1$ کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y - 3 &= (-1)(x-1) && \text{نقطہ-ڈھلوان مساوات} \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$

□

قاعدہ کا انتخاب
تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 3.17: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کی بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر x^4 سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

□

دو درجی اور بلند درجی تفرق

تفرق $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ اول تفرق**[10] یا **یک درجی تفرق** یا مختصراً **پہلا تفرق**[11] کہتے ہیں۔یہ تفرق ازخود x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ دوم تفرق**[12] یا **دو درجی تفرق** یا مختصراً **دوسرا تفرق**[13] کہتے ہیں۔

دو درجی تفرق کی علامت $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ میں شمار کنندہ میں d جبکہ نسب نما میں x کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔درج بالا مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ سے مراد تفرقی علامتوں کا ضرب نہیں ہے بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر y'' قابل تفرق ہو تب اس کے تفرق $y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ تین تفرق** یا **تین درجی تفرق** یا مختصراً **تیسرا تفرق** کہتے ہیں۔اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(n-1)}$$

کو x کے لحاظ سے y کا **درجہ** n **تفرق** یا n **درجی تفرق** یا n **واں تفرق** کہیں گے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔آپ نے دیکھا کہ بلند درجی تفرق کو قوسین میں بند y کا طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال 3.18: تفاعل $y = x^3 - 3x^2 + 2$ کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 6x \\ y'' &= 6x - 6 \\ y''' &= 6 \\ y^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

چونکہ $y^{(4)} = 0$ ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہٰذا اس کا تفرق در حقیقت صفر (یعنی مستقل) کا تفرق ہو گا جو صفر ہی ہے۔یوں اس تفاعل کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے۔اس کا چار درجی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

---

[10] first order derivative
[11] first derivative
[12] second order derivative
[13] second derivative

سوالات

تفرق کا حساب

سوال 1 تا سوال 12 میں تفاعل کا درجہ اول اور درجہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال 1: $y = -x^2 + 3$
جواب: $y' = -2x, \quad y'' = -2$

سوال 2: $y = x^2 + x + 8$

سوال 3: $s = 5t^3 - 3t^5$
جواب: $s' = 15t^2 - 15t^4, \quad s'' = 30t - 60t^3$

سوال 4: $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال 5: $y = \frac{4x^3}{3} - x$
جواب: $y' = 4x^2 - 1, \quad y'' = 8x$

سوال 6: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال 7: $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$
جواب: $w' = -6z^{-3} + \frac{1}{z^2}, \quad w'' = 18z^{-4} - \frac{2}{z^3}$

سوال 8: $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال 9: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
جواب: $y' = 12x - 10 + 10x^{-3}, \quad y'' = 12 - 30x^{-4}$

سوال 10: $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال 11: $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
جواب: $r' = -\frac{2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \quad r'' = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

سوال 12: $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال 13 تا سوال 16 میں (ا) y' کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفرق حاصل کریں۔

سوال 13: $y=(3-x^2)(x^3-x+1)$
جواب: $y'=-5x^4+12x^2-2x-3$

سوال 14: $y=(x-1)(x^2+x+1)$

سوال 15: $y=(x^2+1)\left(x+5+\frac{1}{x}\right)$
جواب: $y'=3x^2+10x+2-\frac{1}{x^2}$

سوال 16: $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}+1\right)$

سوال 17 تا سوال 28 میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 17: $y=\frac{2x+5}{3x-2}$
جواب: $y'=\frac{-19}{(3x-2)^2}$

سوال 18: $z=\frac{2x+1}{x^2-1}$

سوال 19: $g(x)=\frac{x^2-4}{x+0.5}$
جواب: $g'(x)=\frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

سوال 20: $f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

سوال 21: $v=(1-t)(1+t^2)^{-1}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

سوال 22: $w=(2x-7)^{-1}(x+5)$

سوال 23: $f(s)=\frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$
جواب: $f'(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

سوال 24: $u=\frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

سوال 25: $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$
جواب: $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

سوال 26: $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

سوال 27: $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$
جواب: $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

سوال 28: $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

سوال 29: تفاعل $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ کے تمام بلند درجی تفرق تلاش کریں۔
جواب: $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12$ جبکہ تمام $n \geq 5$ کے لئے $y^{(n)} = 0$

سوال 30: تفاعل $y = \frac{x^5}{120}$ کے تمام بلند درجی تفرق تلاش کریں۔

سوال 31 تا سوال 38 میں یک درجی اور دو درجی تفرق تلاش کریں۔

سوال 31: $y = \frac{x^3+7}{x}$
جواب: $y' = 2x - 7x^{-2}, \quad y'' = 2 + 14x^{-3}$

سوال 32: $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

سوال 33: $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\theta^{-4}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} = -12\theta^{-5}$

سوال 34: $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

سوال 35: $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$
جواب: $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -z^{-2} - 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = 2z^{-3}$

سوال 36: $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

سوال 37: $p = \left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$

جواب: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

سوال 38: $p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال 39: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے تفاعل ہیں جو $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

$x = 0$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

جواب:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = 13, \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = -7, \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{7}{25}, \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u) = 20$$

سوال 40: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

$x = 1$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

ڈھلوان اور مماس

ضمیمہ ا

ضمیمہ دوم