

פיזיקה קלאסית 2 - אלקטרומגנטיות קלאסית

ASF סיון ואילאי וישנבסקי שלוש

20 באוקטובר 2024

תקציר

קורס שהועבר בשנת 2024 סמסטר ב' על ידי ד"ר ישי פומרץ, והmort�לת תאה. ציון הקורס הינו ציון הבחינה. הספר ידוע ברובו ביחידות CGS - סנטימטר, גרם, שנייה. הסמסטר לא נלמד שיטת מטעני הדמות, זרמים בייצוג מרוכב, גלים א"מ.

תודות לשילי סופר החצי מאירית של המחברת(היא הכרירה אותה לשים אותה פה)

תוכן העניינים

1 מבוא	4
2 אלקטרוסטטיקה	5
2.1 מטען	5
2.2 גודלו של המטען החשמלי	5
2.3 מוליכים וմבודדים	6
2.4 מחולל ואן דר גראן	6
2.5 תכפיות קולון (1771)	6
2.6 חוק קולון (1784)	7
2.7 סופרפרואיציה	7
2.8 בשטף	7
2.8.1 דוגמא למציאת כוח קולון של התפלגות מטען רציפה	7
2.9 השדה החשמלי	8
2.9.1 דוגמא להישוב שדה חשמלי של התפלגות מטען: <u>טבעת טעונה</u>	8
2.9.2 דיסקה טעונה	8
2.9.3 קווי שדה	9
2.10 חוק גאוס	10
2.10.1 שטף של שדה וקטורי(Flux)	11
2.10.2 חוק גאוס	11
2.10.3 דוגמאות:	12
2.11 אנרגיה ופוטנציאל באלקטרוסטטיקה	13
2.11.1 פוטנציאל חשמלי	13
2.11.2 חישוב השדה החשמלי של פוטנציאל נתון	14
2.11.3 הפוטנציאל שיוצרת התפלגות מטען נתונה	14
2.12 תיאור מקומי לחוק גאוס - משפט דיברגנץ	15
2.12.1 הדוגמאות לחוק גאוס הדיפרנציאלי	15
2.13 משוואות פואסון ולפלאס	16
2.14 סיכום קשר בין ציפויות המטען, שדה והפוטנציאל.	16
2.15 האנרגיה האלקטרוסטטית של מערכת מטענים	16
2.15.1 הקשר בין ϕ , E , U	17
2.15.2 מציאת האנרגיה הכלולת בהינתן \vec{E}	17
2.15.3 ציפויות אנרגיה	17
2.16 מוליכים	18
2.16.1 מוליך אידיאלי	18
2.17 קיבול	19
2.17.1 קבל	20
2.18 חיבור קבילים בטור ובמקביל	21
2.18.1 חיבור במקביל	21
2.18.2 חיבור בטור	21

21	האנרגייה האצורה בקבל	2.18.3
22	חומרים דיאלקטריים	2.19
22	הטען המושרה בשפה של חומר דיאלקטרי	2.19.1
24	זרם צפוני	3
24	مولיכות וחוק א Ohm	3.1
24	תיל חד מימדי	3.2
25	הספק צפוני במוליכים	3.3
25	מודל דרודה למוליכות - (1900) Model Drude	3.4
25	מעגלי זרם ישיר	3.5
26	3.5.1 חיבור נגדים בטור	3.5.1
26	חיבור נגדים במקביל	3.6
26	חוקי קירכהוף	3.7
26	חוק קירכהוף הראשון(שינוי מסען)	3.7.1
26	חוק קירכהוף השני(הגדלת הפוטנציאל)	3.7.2
26	דוגמא לחוקי קירכהוף	3.7.3
27	מעגל RC - פরיקה	3.8
28	מעגל RC - טעינה	3.9
29	מנטיות	4
29	הקדמה	4.1
29	ניסוי אמפר - כוח בין תיל זרם	4.2
29	הכוח המגנטי שיוצר תיל זרם	4.3
30	כוח לורנצץ	4.4
30	הכוח המגנטי על תיל זרם בצורה כלשהי	4.5
31	תנועה של מסען בשדה מגנטי	4.6
31	מכשירים המשמשים בתנועת מסען תחת שדה מגנטי	4.7
31	4.7.1 ציקלוטרון	4.7.1
32	ספקטומטר מסווט	4.8
32	בורד מהירות	4.9
32	מנוע זרם ישיר	4.10
33	אפקט הול	4.11
34	יצירת שדה מגנטי	5
34	חוק אמפר	5.1
35	5.1.1 דוגמא לשימוש בחוק אמפר: תיל זרם עבה	5.1.1
35	חוק אמפר בהציג דיפרנציאלית	5.2
36	סיכום הידע על המצב הסטטי	5.3
36	הפוטנציאל הוקורי	5.4
37	הוכחת קיום כיוול קולון	5.5
37	המשמעות הפיזיקלית שלבחירה בכיוול קולון	5.6
38	השדה המגנטי שיוצרת התפלגות זרם כלשהי בכיוול קולון	5.7
39	מציאת הפוטנציאל הוקורי בהינתן השדה	5.8
39	חוק בי-סבר (1820)	5.9
40	דוגמה - תיל זרם סופי	5.10
40	טבעת זרם	5.11
40	שדה מגנטי של סליל זרם	5.12
40	השראה	5.13
41	5.13.1 הניסויים של פארדי	5.13.1
41	השראה בלולאה בצורה כלשהי	5.14
41	חוק פארדי	5.15
41	5.15.1 בהציג דיפרנציאלית	5.15.1
41	5.16 מעגל RC	5.16
42	5.17 חוק לנץ	5.17
42	5.17.1 זרמי מערכות	5.17.1
43	6 קשר בין א"מ ליחסות פרטיה	

45	7	הਪתרונות למשוואות מקסול בריך - גלים א"מ
45	7.1	gal א"מ מישורי
47	7.2	מקרה פרטי: gal א"מ בקייטוב לנארי
47	7.3	מקרה פרטי: קיטוב מעגלי
47	7.4	מקרה פרטי: gal א"מ מישורי עומד
48	7.5	החזרה של gal א"מ ממוליך
48	7.6	גלים בחומר דיאלקטרי

1 מבוא

המודל הסטנדרטי מותאר את כל תופעות הטבע באמצעות ארבעה כוחות בלבד: גראביטציה, כוח גרעיני חזק, כוח גרעיני חלש, ולבסוף **הכוח האלקטרומגנטי**.

בקורס זה נעסק בכוח האלקטרומגנטי. ספציפית, א"מ קלאסית (לא יחסותית או קוונטיטטיבית, אלא עבור מהירויות נמוכות, וגדלים לא קטנים מדי). לדוגמה, כוח הנורמל הוא למעשה כוח אלקטромגנטי (א"מ).

א"מ קלאסית הינה אחת ההצלחות הגדולות של האנושות, התיאוריה נותנת הסבר גדול למגוון תופעות כגון: מגנטיות, אופטיקה, גלי רדיו, מעגלים חשמליים ורוב הכימיה.

התיאוריה מנוסחת על ידי 4 חוקים פשוטים לככיבתיה - משוואות מקסול.

הא"מ הקלאסית הייתה השראה לאינשטיין בפיתוח היחסות הפרטיטית.
משוואות מקסול:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \left(4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

לא נלמד כי אין זמן (באסחה):

- שיטות מטענני הדמות
- זרמים בייצוג מרוכב
- גלים א"מ

2 אלקטרוסטטיקה

2.1 מטען

כבר ביוון העתיקה, שמו לב כי כאשר משפכים פרווה בענבר (Electro) שעורות הפרווה מתרחקות אחת מהשניה. לתופעה זו קראו האפקט הטריבו אלקטורי. בניסוי אחד, שפכו מוטות מחומרים זהים בגרב, וגילו כי המוטות דוחים אחד את השני. מסקנה מהניסוי היא שישנה תכונה שעוברת מחומר אחד לחומר שני, האחראית לכוח החשמלי. בניסוי אחר, שפכו מוטות מחומרים שונים בגרב, ומצאו כי קיימות差異 ביןיהם. מסקנה מניסוי זה, שקיימים מטען אחד וטען שניים: "חיובי" ו"שלילי".

כלומר:

1. מטענים זהים דוחים אחד את השני.
2. מטענים שונים מושכים אחד את השני.
3. **חוק שימור המטען** - המטען הכלול במערכת סגורה נשמר כסכום אלגברי של שני סוגי המטענים (חיובי ושלילי).

הסביר: במקורה הראשון לא התבצע שום תהליך, בחלק השני התקיים תהליך בשם איזון, בקורס לא נגע באפקטים הקוונטיים המתבצעים אך לידע כללי כאשר שני המטענים הללו נפגשים הם "עלמים" ובמקרים מסוימים שני חלקיקי פרוטונים. בחלק השלישי נראה שכנסו שני פוטונים יצרו שני מטענים בתהליכי הנקרה "יצירת זוגות".

מסקנה נוספת שנגיעה בה בהמשך הקורס: 4. אם נחזיר על ניסוי הקופסה בקוביות קטנות יותר וייתר. נגלה שהשמור המטען תמיד יתקיים. או במילים אחרות, שימור מטען היא תכונה לוקלית.

בניסויים נוספים מכנית הקוונטיים עולה שמטענים חיוביים ככפולות של יחידת מטען בסיסית, למשל במערכת היחידות (SI): $C = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ כאשר C הינה יחידת מידת הקרויה Coulomb / קולון. מטען האלקטרון הינו: e^- . מטען הפרוטון הינו: e^+ .

בשנות השבעים גילינו מקרים שבהם לדין יותר את ההגדרה של פרוטונים ולניוטרונים וחלקיקים תת אטומיים אחרים, כיון שגילינו שיש להם מבנה פנימי. היום אנחנו יודעים שהפרוטונים והניוטרונים עשויים מחלקים הנקראים קווארקים, להם יש מטען ככפולות של $\frac{1}{3}e$. לדוגמה לקווארק מסוג u יש מטען של $\frac{2}{3}e$ ולקווארק מסוג d יש מטען $-\frac{1}{3}e$. פרוטון מורכב מ $u+d+u$ ועוד נייטرون מורכב מ $d+u+d$ כלומר $1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$.

2.2 גודלו של המטען החשמלי

בטיפול במערכות מאקרוסkopיות תמיד מעורב מספר גדול של מטענים.

דוגמא: כמה אלקטרונים יש במטבע נחושת משקל 3 גרם? המסה המולרית של נחושת: $M = 63.5 \text{ g/mol}$. מול הינו כמות החומר שמכילים N_A אטומים. $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. המספר האטומי של נחושת הינו: $z = 23$ נמצא את מספר האלקטרונים:

$$N \cdot Z = \frac{N_A \cdot m}{M} \approx 10^{24} \quad (5)$$

סה"כ המטען במטבע:

$$q = -N \cdot z \cdot |e| = -1.3 \cdot 10^5 C \quad (6)$$

האם זה הרבה? שני מטענים בני 1 קולון הנמצאים במרחק 1 מטר מפעלים אחד על השני הוא כוח של 10 ניוטון!

אך המטבע אינו מתפוצץ מכיוון שהטען החלילי מתאזור בדיק פנטסטי עם המטען החיובי של גרעיני הנחושת. מסקנה: הטעב ניטרלי חשמלית בדיק.



איור 1: פרופ' דני מעיר נוגע במחולל ואן דר גראף

2.3 מוליכים וմבודדים

ניתן לסוג את כל החומרים בטבע באופן גס לשני סוגים, מוליכים וմבודדים. מוליכים מאפשרים למטען לנوع בהם באופן חופשי. מבודדים משאירים את המטען מוקובע.

אלקטروسקופ הוא מכשיר מדידה הבודק נוכחות מטען חשמלי של גוף ואת גודל המטען אך לא את סימנו.

גם בחומר שבו כל מולקולה היא ניטרלית, ישנה התפלגות מטען לא אחידה בטוחה המיקורוסкопית. לכן גם חומר ניטרלי (לדוגמה מים) יכול להיות מושפע מכוח משיכה/דחיה חשמלי.

גם בחומר מבודד, למולקולות יש דרגת חופש של סיבוב (אך על פי שלא נועות).

2.4 מחולל ואן דר גראף

מורכב מגלאליות, בינהן רצואה מבודדת. הגלגליות מחוברות למטען פועל כך שהרצואה מסתובבת והמטענים עליה נעים יחד אליה. בנקודה מסוימת על הרצואה מחוברת אלектרוודה (מוליכה) המחברת לקליפה מוליכה. כמובן שכאשר המטענים על הרצואה מגיעים לאלקטרוודה הם עוברים לכיפה המוליכה.

אם אדם יגע בקליפה המוליכה, לא יפגע כי כמו המטען עירירה. אך היא מספיק גדולה כך שהטען עבר בשיערו כך שהיא כוח דחיה בין השערות השונות על ראש האדם.

יש לשים לב שהאדם עומד על חומר מבודד כך שהטען לא עבר למבודד ענק - האדמה.

2.5 תכפיות קולון (1771)

קולון מבצע סדרה של מדידות של הכוח בין מטענים. אם נמדד את הכוח בין מטען q_1 ו- q_2 (נסמן ב \vec{F}_{21} את הכוח שפועל על חלקיק 2 ע"י חלקיק 1). נגלה שהוא תמיד קבוע:

1. תמיד פועל בכיוון הקו המחבר בינויהם
2. הכוח פרופורציוני לגודל המטענים
3. הכוח פרופורציוני ל r^{-2}

כתוצאה מניסויים אלה נבע חוק קולון, אשר הינו חוק פנומנולוגי (مبוסס תכפית).

2.6 חוק קולון (1784)

חוק קולון הוא חוק ניסיוני אשר קובע כי הכוח בין 2 חלקיקים בעלי מטען q_1 ו- q_2 הינו:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad (7)$$

(נסמן ב F_{21} את הכוח שפועל על חלקיק 2 ע"י חלקיק 1). כאשר k קבוע פרופורציאלי.

נקבע $k = 1$ באופן טבעי. דרישת זו היא המגדירה את מערכת היחידות CGS בה נשתמש בקורס זה. במערכת זו יחידת המטען $dyne$ stat / unit (electrostatic esu

$$\text{במערכת MKS(SI) מתקיים } k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

2.7 סופרפוזיציה

כאשר יש $n > 2$ מטענים, הכוח הפועל על המטען ה- i הוא

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \quad (8)$$

כלומר ניתן **לסכום** את הכוחות. זה עקרון הסופרפוזיציה, והוא עקרון מבוסס תצפית.

2.8 בשטף

התרומה לכך על מטען q_0 מהתפלגות מטען רציפה המחולקת לפיסות אינפי: dq

$$d\vec{F} = \frac{dq \cdot q_0}{r'^2} \hat{r}$$

כאשר וקטור \hat{r} הוא הוktor המחבר בין dq ל q_0 . הכוח הכלול על המטען הינו $\vec{F} = \int_V d\vec{F}$.

1. מימד אחד: התפלגות מטען קוית λ ביח' $\frac{esu}{cm}$

2. שני מימדים: התפלגות מטען משטחית σ ביח' $\frac{esu}{cm^2}$ וגודלו $dq = \sigma dA$ וגודלו dA

3. שלושה מימדים: התפלגות מטען נפחית ρ ביח' $\frac{esu}{cm^3}$ וגודלו בדומה אחרים.

2.8.1 דוגמא למציאת כוח קולון של התפלגות מטען רציפה

נתון קו מטען באורך L בתפלגות קוית אחתה λ מהו הכוח על המטען Q הנמצא מול מרכז הקו במרחב? נסמן ב dq אלמנט מטען אינפי' במרחב z ממרכז המוט. מיסמירה לכל פיסת מטען dq ינסה פיסה נגדית המבטלת את התורמה של $dF_r = |F_r| \cos \theta$. לכן $F_z = 0$ ונותר רק לחשב את $dF_r = |F_r| \cos \theta$. לצורך האימון נעשה את האינטגרל על θ בין שתי זוויות $(-\theta_{max}, \theta_{max})$.

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{\cos \theta} \\ z &= r \tan \theta \\ dz &= \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

נחשב עכשו את האינטגרל:

$$F_r = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{Q \lambda dz}{R^2} \cos \theta = \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \frac{Q \lambda \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta}}{\left(\frac{r}{\cos \theta}\right)^2} = \frac{Q \lambda}{r} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \cos \theta d\theta = \frac{2 Q \lambda}{r} \sin \theta_{max} = \frac{2 Q \lambda}{r} \frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}}$$

נדיר את סך כל המטען במוט L , נקבל:

$$F_r = \frac{Qq}{r \sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}}$$

חשוב: במקרים כאלה חשוב לחשב ולרשום מה יקרה באינסוף, במקרה שלנו בגבול של מוט אינסופי, נקבל:

$$F_r = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{Q \lambda L}{r \sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{Q \lambda}{r \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{r}{L}\right)^2}} = \frac{2 Q \lambda}{r}$$

2.9 השדה החסמי

שדה חסמי הוא שדה וקטורי. הכוח שפעילים N מטענים על מטען q_0 :

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^N \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i} = q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}$$

נדיר:

$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}(r_o) \quad (9)$$

כאשר:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i} \quad (10)$$

ובכל המרחב:

$$\vec{E}(r) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (11)$$

במבט ראשוני, השדה החסמי נראה כמו כלי עזר אלגברי, עם זאת, בהמשך הקורס נראה שיש לו תפקיד יסודי בתאוריה הכלוא". למשל ניתן לודא שלא תופר "קוואליות" ע"י התיאור הפיליסופי הבא: מטענים בשמש יוצרים שדה ומשמע השדה החסמי נע במויריות האור. לאחר 8 דקוטה הוא מגע לכדו"א ומפעיל כוח על מטענים אחרים. $\vec{F} = q\vec{E}(r)$ השדה החסמי של התפלגות מטען:

1. מטען בודד מטען בודד בנקודה \vec{r}' מה השדה החסמי בנקודה \vec{r} ?

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} (\vec{r} - \hat{\vec{r}}')$$

2. שדה שיוצרים N מטענים:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^2} (\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i)$$

3. עברו התפלגות מטען רציפה

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} (\vec{r} - \hat{\vec{r}}') = \int \frac{dq}{(r - r_i)^2} \text{התרומה של המטען} \cdot \text{הරחק בין } dq \text{ לנקודה המדידה (אני לא רואה)} \\ dE &= \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} (\vec{r} - \hat{\vec{r}}') \end{aligned}$$

2.9.1 דוגמא לחישוב שדה חסמי של התפלגות מטען: טבעת טעונה

נתונה טבעת טעונה במטען כולל q ברדיוס a . המטען מפולג באופן אחד. הטבעת ניצבת לציר \hat{x} העובר במרכזה. מהו השדה בנקודה \vec{r} לשתי \hat{x} לאורך ציר \hat{x} ?
לא נסכים את dE מאחר שטסימטריה לכל פיסת מטען dq שונה פיסה במיקום נגיד. שיתן פיסה במיקום גדי. $dE_x = |d\vec{E}| \cos \theta$. מכיוון שככל התרומות הקיימים בלבד \hat{x} וכן מראש נסכים רק את dE_x . $dE_x = |d\vec{E}| \cos \theta = \frac{dq}{r'} \cdot \cos \theta = \frac{x}{r'} \cdot \cos \theta = \frac{dq}{|r'|^2}$

$$dE_x = \frac{dq}{r'^2} \frac{x}{r'} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dq$$

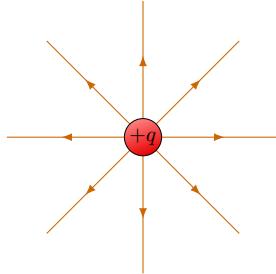
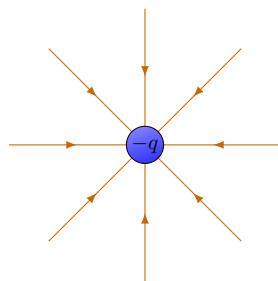
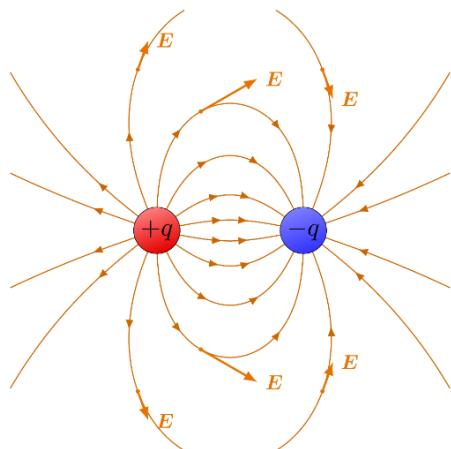
$$E_x = \int dE_x = \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dq = \frac{xq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

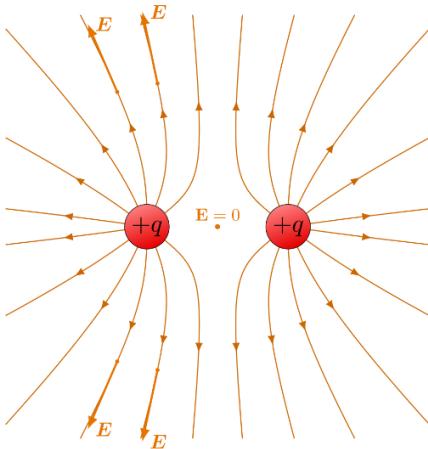
2.9.2 דיסקה טעונה

נרחיב את התוצאה שקיבנו במקרה של דיסקה בנקודה R טעונה במטען כולל Q המפולג באופן אחד.
כפיות מטען משטחית: $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ נחלק את הדיסקה לטבעות דקotas ברדיוס a וברוחב da . השטח הכלול של כל טבעת איןפּ: $da = 2\pi a \sigma da$ והטען שלו: $dq = \sigma da = 2\pi a \sigma da$ נשתמש בדוגמה הקודמת: $\partial E_x = \frac{x \cdot 2\pi a \sigma da}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ ומכאן זה אינטגרל שאחנו מכירים.

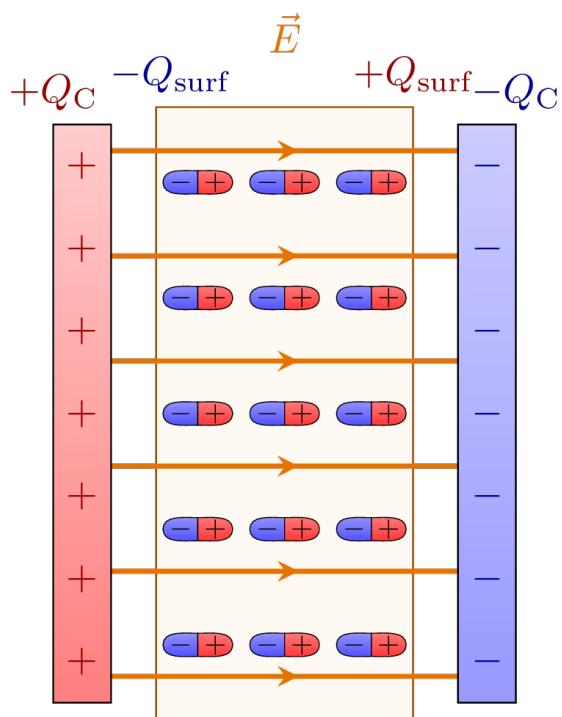
2.9.3 קווי שדה

דרך גרפיות ניתן ליצג ערכאים של שדה חשמלי. מציררים את השדה כחצים היוצאים מטען חיובי ונגמרים בטען שליליים. צפיפות החצים מייצגת את עוצמת השדה.
טען אחד חיובי:

טען אחד שלילי:אחד חיובי ואחד שלילישני חיוביים:



* שימו לב כי בדוגמאות האלו, גודל המטעןים שוויים ולכן צפיפות קווי השדה שוויים.
שני קבלים



2.10 חוק גאוס

יתרונות:

1. נותן דרך אלגנטית יותר למצוא את השדה כאשר לבעה יש סמטריה.
2. נראה בהמשל שהחוק גauss מתמודד טבעי עם מטען נעים.
3. חוק גauss מאפשר לשמור בקלות על קזאליות(דרך מפונפנת להגדיר שטום דבר לא ינוע מהר יותר ממהירות האור)
4. חוק גauss חוש סמטריות عمוקות יותר לטבע דרך השדה המגנטי.

2.10.1 שטף של שדה וקטורי (Flux)

הערה: נושא מתמטי, מי שודע אותו יכול לדלג לנושא הבא.
 השטף הוא גודל סקלרי שمبטא את עצמת השדה הכללית דרך משטח נתון. נדמיין שדה וקטורי \vec{V} המתאר זרימה של מים. מים בנهر - מה השטף דרך לולאה מלכנית בשטח A ? $|\vec{v}|A = \Phi$. אם הלולאה המלבנית הייתה מקבילה לזרם המים, לא היה עובר דרכה מים ולכן $0 = \Phi$. במקרה כללי, אם המלבן היה בזווית θ אז השטף היה: $|\vec{v}| \cdot A \cos\theta = \Phi$.
 נשים לב כי ביטוי זה דומה מאוד למכפלה סקלרית, נקדם את A לדרוגת וקטור \vec{A} - נקרה לו "יקטור המשטח" הגדל שלו מייצג את השטף של המשטח, וכיונו מייצג את כיוון האנך למשטח. וכך נקבל שטף הינו:

$$\Phi = \vec{V} \cdot \vec{A} = |\vec{V}| |\vec{A}| \cos\theta \quad (12)$$

2.10.2 חוק גאוס

חוק גאוס עוסק בשטחים סגורים. למשל קובייה שכל צלע שלה מתווארת על ידי וקטור המסומן באותות לטיניות:

$$\Phi = \vec{V}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{l} + \vec{e} + \vec{f})$$

קובננציה: במשטח סגור וקטורי המשטח מצבעים החוצה.
 נראה שהשטף הכללי דרך המשטח הסגור במקורה שקיים מטען מוחוץ לשיטה חייב להיות אפס, מכיוון שכל קו שדה תורם לשטף הכללי. בכנישה ותרומה הפוכה ביציאה. נראה שנוכל לקבל שטף חשמלי שונה מ於是 רק אם יש מטענים נטו בתחום המשטח הסגור.

שטח חשמלי דרך שטח סגור כשלחו: בהינתן משטח סגור S באזור בו שורר שדה חשמלי \vec{E} . תמיד נוכל לחלק את S למשטחים אינפי a_2 כך שכל אחד מהם מספיק שטח שנווכל להגדיר לו וקטור משטחי \vec{a}_2 התרומה של כל \vec{a}_2 לשטף $\vec{E}_2 \cdot \vec{a}_2$. השטף הכללי דרך המשטח: $\Phi = \sum \vec{a}_2 \cdot \vec{E}_2$. נלק לגובל ונקבל:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (13)$$

שטח חשמלי כולל של מטען בודד דרך משטחים סגורים שונים:

1. מצב ראשון: המטען בראשית, נחשב את השטף דרך משטח גאוסי בצורת כדור ברדיוס r. נחלק את המשטח לתתי- משטחים $d\vec{a}$ ונסכום את השטף. על פני מעטפת כדורים השדה בכל מקום מצבע בכיוון \hat{r} והגודל שלו שווה. בסיסי הוא גם מקביל ל $d\vec{a}$

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = |E_r(r)| \int |d\vec{a}| = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q$$

רואים כי אין תלות ברדיוס.

2. משטח סגור בצורה כלהי S_2 . נטיל את $d\vec{a}$ על S_2 ונקבל $d\vec{A}$ ונdag ש $d\vec{a}$ מספיק קטן כדי שגם $d\vec{A}$ שטוח. מה היחס בין $d\vec{a}$ ל $d\vec{A}$?

אילו s_2 היה כדור ברדיוס R או יחס המשטחים היה: $\frac{da}{dA} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$. אבל $d\vec{A}$ מוטה בזווית θ ביחס ל $d\vec{a}$. ולכן

$$\frac{|da|}{|dA|} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos\theta \Rightarrow |dA| = |da| \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

ועצמת השדה של מטען בראשית דועכת כמו $\frac{1}{r^2}$ ולכן:

$$\frac{E(r)}{E(R)} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

התרומה של $d\vec{A}$ לשטף:

$$\vec{E}(R) \cdot d\vec{A} = \left| \vec{E}(R) \right| \left| D\vec{A} \right| \cos\theta = \left| E(r) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right| |da| \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cos\theta = \vec{E}(r) \cdot d\vec{a} \quad (14)$$

מסקנה: השטף הכללי שיוצר מטען בראשית דרך משטח סגור כלהו ונמצא בתוכו אינו תלוי בצורת המשטח, ככלומר:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d = 4\pi q \quad (15)$$

מה לגבי מספר מטענים? מסווגריזציה נוכל לסכם את השdots שיצרו כל אחד מהמטענים ולסכם את השטף:

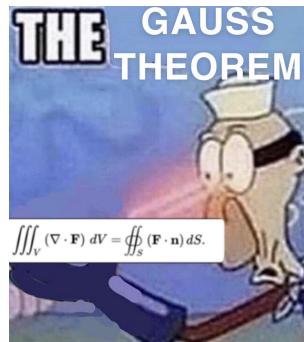
$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d \stackrel{?}{=} \int_S (1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \dots) d\vec{a} \quad (16)$$

ולכן יסתכם ל:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi \sum q_i = 4\pi \int_V \rho dv \quad (17)$$

עבור:
 ρ - התפלגות המטען
 S - משטח חוסם
 V - הנפח החסום במשטח S .

זהו חוק גאוס. מ.ש.ל.



2.10.3 דוגמאות:

1. התפלגות מטען סימטרית. לצורך הדוגמא נניח שההתפלגות מוגבלת עד כדי איזה רדיוס R . כלומר כל דבר מחוץ לרדיוס אנחנו יכולים להיות בטוחים שאין מטען $0 = 0(|r| > R)$. מטען סימטרי השדה יכול להיות תלוי רק בקווי \hat{r} והשדה חייב להצביע רק בכיוון \hat{r} . או בשפת אנגליה וקוטורית:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(|r|)\hat{r}$$

נשתמש בחוק גאוס: נבחר "משטח גauss": מעטפת של כדור ברדיוס R . עבור $r_1 > R$:

$$\begin{aligned} \int_{s_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} &= |E_1| \int |d\vec{a}| = |E_1| 4\pi r_1^2 = 4\pi \int_V \rho(\vec{r}) d^3r \\ \vec{E}_1(\vec{r}_1) &= \frac{\int \rho(r) d^3r}{r_1^2} \hat{r} \end{aligned}$$

$r_1 < R$: החישוב של חוק גאוס ישאר זהה. כל הבדל הוא שהאינטגרל באגף ימין יעצור ב

$$\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{\int \rho(\vec{r}) d^3r}{r_2^2} \hat{r}$$

מסקנות: השדה תלוי רק במטען שחסום ברדיוס קטן יותר מנקודות המדידה! בנוסך, השדה בכל נקודה \vec{r} הוא אותו שדה שהוא יותר מטען נקי בראשית בגודל של כל המטען החסום בכדור קטן מ- $|r|$

2. מקרה פרטי פשוט: כדור טוען באופן אחד ברדיאוס R :

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

מוחץ לכדור:

$$\vec{E} = \frac{\rho dv}{r^2} \hat{r} = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3}{r^2} \hat{r}$$

בתוך הכלור:

$$\vec{E} = \frac{\int_0^{|r|} \rho dv}{r^2} \hat{r} = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4\pi}{3} r^3}{r^2} \hat{r} = \frac{r\pi}{3} \rho_0 |r| \hat{r}$$

מסקנות: בתוך הכלור השדה גודל באופן לינארי ומוחצת לו השדה דועץ ביחס לאחד חלקו המרחק בריבוע..

3. התפלגות מטען קוית אינסופית נתונה התפלגות מטען קוית אינסופית אחיד λ מהיר עצמת השדה במרחב r מהקו מטען. מסימטריה, השדה יצביע רק בכיוון הרדיאלי ותליי רק במרחב הרדיאלי. נבחר משטח גאוסי בצורת גליל ברדיוס z ובאורך L .

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{down}} E d\vec{a}_{E_\perp d\vec{a}} + \int_{\text{up}} \vec{E} d\vec{a}_{E_\perp d\vec{a}} + \int_{\text{sides}} \vec{E} d\vec{a} = |E_r| \int |da| = |E_r| L 2\pi r = 4\pi \int \rho dv = 4\pi L \lambda$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\lambda}{|r|} \hat{r}$$

4. נתונה התפלגות מטען משטחית אחידה σ במישור $y-z$ מה והשדה במרחב כלשהו y מהמשטח. מסימטריה השדה יכול להיות רק בכיוון \hat{y} ואולי תלוי רק ב- y . בנוספ' קיים שיקוף: $E(y) = -E(-y)$. נבחר משטח גאוסי גלילי באורך $2y$ עם שטח בסיס A ממוקמץ על גבי המשטח הטעון.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{right}} \vec{E} d\vec{a} + \int_{\text{left}} \vec{E} d\vec{a} + \int_{\text{sides}} \vec{E} d\vec{a}_{E_\perp d\vec{a}} = \int_{\text{right}} \vec{E} d\vec{a} + \int_{\text{left}} \vec{E} d\vec{a} =$$

$$= 2 \int_{\text{right}} \vec{E} d\vec{a} = 2E_2 \int_{\text{right}} |da| = 2E_2 A =_{\text{gauss}} 4\pi \int \rho dv = 4\pi \sigma A$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 2\pi\sigma \hat{y} & y > 0 \\ -2\pi\sigma \hat{y} & y < 0 \end{cases}$$

מסקנות: במעבר בין הסימן של y היהת "קפיצה"(אי-רציפות) בערך השדה בכיוון הניצב למשטח. בנוספ' אין לשדה תלות ב- y , דבר זה לא מפתיע מאחר שאין לנו בעולם משטחים אין סופיים אך התוצאה שcolaה ל蹶ה של השדה שיוצר משטח סופי כאשר מודדים אותו קרוב מאוד למשטח.

מסקנה כללית: במעבר מצד אחד לצד שני של משטח טוון ישנה אי-רציפות בשדה בגודל $\sigma = 4\pi E_{bot}$

2.11 אנרגיה ופוטנציאל באלקטרוסטטיקה

כמו שבמכניקה למדנו לפטור בעיות באמצעות משוואות תנואה או שימור אנרגיה, גם באלקטרוסטטיקה נוכל לפטור בעיות מתוק תכונות שימור האנרגיה. נוכיח שהכוח האלקטרוסטטי הוא כוח משמר מותך כך שהוא כוח מרכזי, כלומר כוח שפועל בכיוון הרדיאלי. כדי להוכיח, נביא מטען q_2 מהאינסוף לSUB{B} של המטען q_1 המסומן בוקטור $\vec{r}_{2,1}$ [?]? היוצאה מהרשות. נסכם את העבודה הכלולת הכרוכה בהבאת המטען:

$$W = - \int_{\infty}^{\vec{r}_{2,1}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{\vec{r}_{2,1}} |F| |dl| \cos\theta = - \int_{\infty}^{\vec{r}_{2,1}} |F| dr \quad (18)$$

קיבלו שלבביה מטען מאינסוף אינו כרוך במסלולו של המטען ולכן כוח קולון הינו כוח משמר! ובפרט עובdot הכוח האלקטרוסטטי אינה תלואה במסלול אלא רק בקצוות המסלול (נקודת ההתחלה והסיום). לכן גם האינטגרל $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ במסלול אינו תלוי במסלול.

2.11.1 פוטנציאל חשמלי

לכוח משמר ניתן להגדיר פונקציית אנרגיה פוטנציאלית. עבור השדה (שגם האינטגרל עליו אינו תלוי במסלול) נגדיר פוטנציאל חשמלי:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{r=\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(19)

נזהה ש ϕ "הפוטנציאל החשמלי" עבור מטען בודד בראשית:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{r=\infty}^{\vec{r}} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{r} \quad (20)$$

ולכן נזהה שמתקיים הקשר:

$$W_{21} = q_2 \phi_1(\vec{r}_{21})$$

(21)

היחידות של הפוטנציאל החשמלי. בזאת $Volt = J/C$ ובסדרה של הפוטנציל רואים כי $\phi(\infty) \rightarrow 0$.
כיוון שהפוטנציאל מוגדר כאינטגרל, ישנה דרגת חופש של קבוע. כלומר אם ϕ פוטנציאל שמתאר מערכת אלקטרוסטטית, אז גם $c + \phi$ מתאר את אותה המערכת. עם מוטיבציה זו, נגידר הפרש פוטנציאלי:

$$\Delta\phi = \phi_{21} = - \int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (22)$$

2.11.2 חישוב השדה החשמלי של פוטנציאל נתון

עבור פוטנציאל נתון, כמובן שהשדה יהיה נתון בתור

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (23)$$

זאת כמובן ש $d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$ וגם $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$

2.11.3 הפוטנציאל שיוצרת התפלגות מטען נתונה

עבור מטענים q קטנים:

$$\phi(\vec{r}) = k \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (24)$$

דוגמאות למציאת פוטנציאל:

1. דוגמא למציאת פוטנציאל עבור דיסקה טעונה

נתונה דיסקה ברדיוס a והתפלגות מטען σ . מהו הפוטנציאל לאורך ציר הסימטריה?

נסתכל על טבעת ברדיוס s ורוחב ds . המטען על הטבעת $2\pi s ds$ וכאן המטען $\sigma 2\pi s ds = \sigma ds$. במרחב y לאורך ציר הסימטריה מתקבל $r = \sqrt{y^2 + s^2}$.

$$\phi(y) = \int_{s=0}^a \frac{2\pi\sigma s}{\sqrt{y^2 + s^2}} ds = 2\pi\sigma \sqrt{y^2 + s^2} \Big|_0^a = 2\pi\sigma \left(\sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right)$$

2. דוגמא למציאת פוטנציאל בעזרת ההגדירה

נתון כדור טוען בתפלגות מטען אחידה ρ_0 ברדיוס R .

נשתמש בשדה שכבר מכחנו עבור הכדור באמצעות חוק גauss, ובצע אינטגרל בהתאם להגדרת הפוטנציאל.начילה מנקודה מחוץ לכדור. כיוון שהאינטגרל לא תלוי במסלול נבחר את המסלול הפשטוט ביותר ביותר - קו ישר רדיאלי.

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^r \frac{Q_0}{r'^2} dr' = \frac{Q_0}{r}$$

קיבliśmy פוטנציאל מטען נקודתי, בהתאם לכך שאנו יודעים שהשדה כדור טוען מחוץ לו הוא כשהה מטען נקודתי. כתע בתוך הכדור. נחלק את האינטגרל לחלק שמחוץ לכדור ולהחלק שבתוכו הכדור.

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^R \vec{E}_{out} dr - \int_R^r \vec{E}_{in} dr = - \int_{\infty}^R \frac{Q_0}{r'^2} dr - \int_R^r \frac{Q_0}{R^3} r' dr' = \frac{Q_0}{R} + \frac{Q_0}{2R^3} (R^2 - r^2)$$

3. תיל אינסופי נתון קו מטען אינסופי בתפלגות אורך אחידה λ , מה הפוטנציאל במרחב $|r|$?

נשתמש בנוסחה:

$$\phi(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\phi(\vec{r}) = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dx}{R} = 2k \int_0^{\infty} \frac{\lambda dx}{\sqrt{r^2 + x^2}} = 2\lambda k \ln[x + \sqrt{x^2 + r^2}]_0^{\infty} = " \infty - 2\lambda k \ln|r| "$$

קיבלונו תוצאה חסרת משמעות שלא שמו לב שאין אפשר לטעון כי $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ בכל זאת ניתן למצוא הפרש פוטנציאליים בין שני רדיוסים: r ו- r_0 :

$$\Delta\phi = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0) = - \int_{r_0}^r \frac{2\lambda}{r} dr = -2\lambda \ln \frac{r_0}{r}$$

2.12 תיאור מקומי לחוק גאוס - משפט דיברגנץ

חוק גאוס נתן לנו קשר בין אינטגרל נפחית לבין אינטגרל חום גדול כרצונו.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_V \rho dv$$

נבחן את השטף הכלול של שדה \vec{F} דרך משטח סגור S . ראשית, ניתן לחלק את הנפח להרבה "תות נפחים". עבור כל אחד מהם ניתן לחשב אינטגרל משטחי (על המשטח שתחום כל אחד מהם).

אם נסכום אינטגרלים אלה, נקבל את האינטגרל המשטחי על המשטח המקורי הגדל! זאת בכלל שכחיליקנו לנפחים שונים, לכל נפח יש דפנות מסווגות עם דפנות אחרים, כך שהשטף דרך מותבולד כשלוכמים (כי הנפחים בצדדים שונים של דפנות מסווגות אלו או הסימן הפוך). המשקנה היא שהשטף הכלול של משטח סגור שווה לסכום השטפים כאשר מחלקים אותו:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_i \int_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

ונזכור ממספר 2 שהדיברגנץ הוא השטף דרך משטח אינפִי חלקו הנפח התחום בו. השתמש בטريق, מכפלה וחילוקה בנפח התחום בכל משטח, כך קיבל:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_i \int_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_i \frac{1}{\Delta V_i} \left(\int_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{a} \right) \Delta V_i \rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv$$

משפט הדיברגנץ הינו:

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}}$$

וכעת כיון שהוא מתקיים עבור כל נפח, בפרט (ע"פ חוק גאוס) קיבל את **חוק גאוס הדיפרנציאלי**, המשוואה הראשונה ממשוואות מקסול!

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho}$$

me calculating the electric field outside of a charged sphere using gauss law

coulomb's law:



2.12.1 הדוגמאות לחוק גאוס הדיפרנציאלי

:2.9.3 הדעבור 1.

עבור מטען יחיד אחד חיובי $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} > 0$

עבור מטען יחיד שלילי: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} < 0$

עבור קובל: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

2. נתנו כדור טעון בהतפלגות אחידה ρ_0 ברדיוס R סך כל המטען $Q = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3}$ מצאנו את השדה:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & |r| > R \\ \frac{Q}{R^3} r \hat{r} & |r| < R \end{cases} = \begin{cases} \frac{Q}{r^2} \vec{r} & |r| > R \\ \frac{Q}{R^3} \vec{r} & |r| < R \end{cases}$$

נפעיל גאוס דיפרנציאלי על \vec{E} ונבדוק האם מתקבל כדור:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

מחוץ לכדור:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{Qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = Q \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right) = Q \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right)$$

בתוך הכדור:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 \vec{r} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) \right) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \cdot 3 = 4\pi \rho_0$$

2.13 משוואות פואסון ולפלס

ונכל לשלב את חוק גauss הדיפרנציאלי עם הקשר בין השדה לפוטנציאל:

$$\vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\phi) = 4\pi\rho \quad (25)$$

נדיר את אופרטור הלפוסיאן:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \quad (26)$$

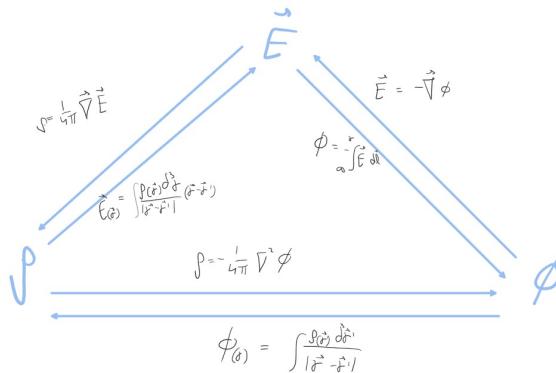
ועכשיו נוכל לבתוב:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -4\pi\rho} \quad (27)$$

במקרה הפרטני: אזור ללא מטען:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad (28)$$

2.14 סיכום קשר בין צפיפות המטען, שדה והפוטנציאל.



2.15 האנרגיה האלקטרוסטטית של מערכת מטענים

ראינו כבר את העבודה הדרושה להביא מטען לסביבה של מטען אחר, כתע נביא נטען שלישי q_3 לשיבת המטעןים $\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$, q_2, q_1 .

$$w_3 = - \int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{F}_3 \cdot dl = - \int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{F}_{3,1} \cdot dl + \left(- \int_{\infty}^{\vec{r}_3} \vec{F}_{3,2} \cdot dl \right) = \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}}$$

נמצא את סה"כ כל האנרגיה שהושקע בבנייה שלושת המטענים:

$$U = 0 + \frac{q_1 q_2}{r_{21}} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \quad (29)$$

הביטוי סימטרי תחת החלפת סדר המטענים. ככלומר סדר הבאת המטענים במבנה המערכת לא משנה את האנרגיה הכוללת. נכליל למערכת בעלת N מטענים:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} \quad (30)$$

נזכיר שאי אפשר ליחס חלקים מסוימים מ U למטענים מסוימים.

2.15.1 הקשר בין E, U, ϕ

האנרגיה האלקטרוסטטית של מערכת מטענים:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{2} \sum_i^N q_i \left(\sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{r_{i,j}} \right) = \frac{1}{2} \sum_i^N q_i \phi^i (\vec{r}_i) \quad (31)$$

מעבר לרצף:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dv \quad (32)$$

נשתמש בפואסון:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int_V \phi \nabla^2 \phi dv \quad (33)$$

2.15.2 מציאת האנרגיה הכוללת בהינתן \vec{E}

נתחיל בחישוב חזר:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (\phi \cdot \vec{\nabla} \phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dots = \vec{\nabla} \phi + \phi \nabla^2 \phi \\ \Rightarrow -\phi \nabla^2 \phi &= E^2 + \vec{\nabla} (\phi \vec{E}) \end{aligned}$$

נציב:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int_V \phi \nabla^2 \phi dv = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dv + \int_V \vec{\nabla} \phi \vec{E} dv = \quad (34)$$

נשתמש בחוק הדיברגנס על האיבר שני וכדי להיפטר מהאיבר זהה נבחר S המשטח החוסם את כל היקום:

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dv + \int_V \phi \vec{E} dv = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dv$$

המחריר היחידי הוא שצרכי לסכום את השדה על כל היקום.

2.15.3 כפיפות אנרגיה

נדיר כפיפות אנרגיה להיות:

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\vec{r}) \quad (35)$$

$$U = \int u dv \quad (36)$$

чисוב האנרגיה הכוללת הכרוכה במבנה כדור מטען בתפלגות אחידת: כדור טוון ברדיוס R ומטען כולל Q.

1. חישוב לפ'י:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$$

אנחנו יודעים כי $dv = dr \cdot r \cdot d\theta \cdot r \sin(\theta) d\phi$

$$\phi(r) = \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right)$$

אבל במקרה ספרי סמטרי:

$$\int f(r) d^3r = 4\pi \int f(r) r^2 dr$$

נבצע האינטגרציה בתחום $0 < r < R$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \phi(r) dv = \frac{3Q}{8\pi R^3} \cdot 4\pi \int_0^R \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{R^2} \right) r^2 dr = \frac{3Q^2}{2R^4} \int_0^R \left(\frac{3}{2} \left(\frac{Q^2}{R^4} \right) - \frac{1}{10} R^3 \right) dr = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^3}{R}$$

2. חישוב U לפ'י :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{R^5} r \hat{r} & |r| < R \\ \frac{Q}{r^2} \hat{r} & |r| > R \end{cases}$$

$$U_{r < R} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d^3r = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \frac{Q^2}{R^6} r^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{Q^2}{10R}$$

$$U_{|r| > R} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d^3r = \frac{1}{8\pi} \int_R^\infty \frac{Q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{2R}$$

$$\text{וסה"כ נקבע: } U = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^3}{R}$$

2.16 מוליכים

באופן גס ניתן לסווג את כל החומרים בטבע לשתי קבוצות:

1. מוליכים

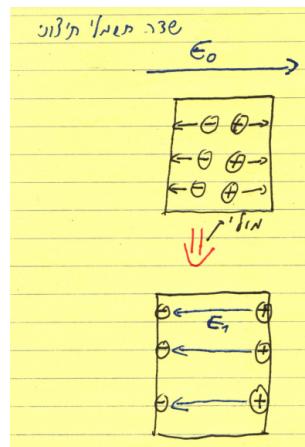
2. מבודדים

הגדרה זו גסה מאחר שיש מוליכים טובים יותר ממוליכים אחרים.

	חומר	התנדות סגוליית
מוליך	נחושת	$1.7 \cdot 10^{-8}$
מוליך	זהב	$2.3 \cdot 10^{-8}$
מבנה	צוכית	10^{12}
מבנה	אוויר	10^{16}

2.16.1 מוליך אידיאלי

מוליך הוא חומר שיכל לספק הרבה מאוד מטענים חופשיים שיכולים לנوع בתוכו ללא הפרעה



1. תחת השפעת שדה חיצוני E_0 נוצרה הפרדת מטען

2. יוצר שדה חשמלי פנימי E_1

מוליך אידיאלי חומר שתמיד יש לו מספיק מטען חופשיים כדי ליצור שדה פנימי כך ש: $0 = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$. בכל המחברת נדבר על מוליכים אידיאלים (אלא אם נאמר אחרת) ולכן נגיד "מוליך" בלבד. למוליכים אידיאלים קיימים תכונות:

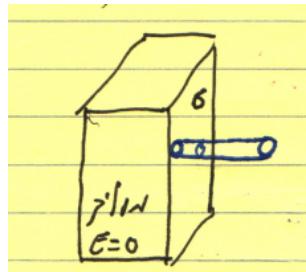
1. השדה הכלול בתחום המוליך מותאפס

2. נפעיל את חוק גauss בתחום המוליך: $0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \vec{S} \Leftrightarrow$ אין מטען חופשי בגוף המוליך.

3. אם ישנו מטען חופשיים הם רק על המוליך.

4. במוליך $\phi - \vec{E} =$ הפוטנציאלי בכל נקודה במוליך קבוע. (בעצם מוליך הוא מכשיר הנועד לקבוע פוטנציאלי באזור מסוימים למרחב)

5. על שפת המוליך נוכל לבנות משטח גאוסי, בדיק כמוהו זה שבינו לוח טען אינסובי.



$E_{outside} - E_{inside} = \Delta E = 4\pi\sigma$: ראיינו שבכל משטח טען: $|E| = 4\pi\sigma \Leftrightarrow E_1 = 0$

6. כיון שהשדה מחוץ לשדה, נעמוד על השפה ונמודד את $\phi - \vec{E}$ בכיוונים המקבילים לשפה הפוטנציאלי קבוע ולכן לא יהיה רחיב לשדה:

$$\vec{E}_{floor} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}$$

ולכן ϕ יכול להשתנות רק בכיוון הניצב לשפה ולכן כיון \vec{E} הוא ניצב לשפה.

2.17 קיבול

כמויות המטען של מוליך פרופורציונית לפוטנציאל עליו.

$$Q = C\phi \quad (37)$$

למקדם פרופורציה זה "קיבול". לדוגמה מוליכים בצורת כדור, חישבנו את הפוטנציאלי של התפלגות מטען כדורים.

$$\phi(R) = \frac{Q}{R} \Rightarrow C = R$$

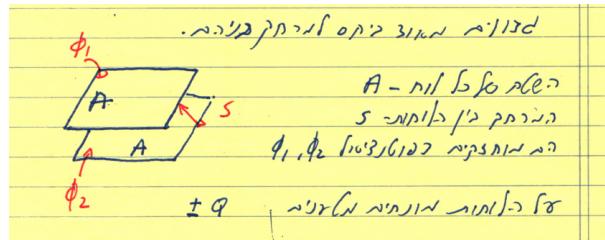
במערכת CGS: $[C] = \frac{Columb}{Volt} = Farad$ [C] במערכת יחידות IS היחידות של הקיבול צריכה להיות מטען למתחה: $C = cm$ CGS: $C = \frac{Columb}{Volts}$ למשת מהו קיבולו של מוליך כדור בגודל כדור הארץ (ב-IS):

$$Q = k \frac{Q}{R} \Rightarrow C = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C_{earth} = 7 \cdot 10^{-5} Farad$$

2.17.1 קובל

קובל הינו מערכת של זוג מוליכים, נגדי לה קיבול. נוצר בדוגמה, נסתכם על זוג מוליכים בצורת שני משטחים מוליכים גדולים מאוד ביחס למרקם בניהם:

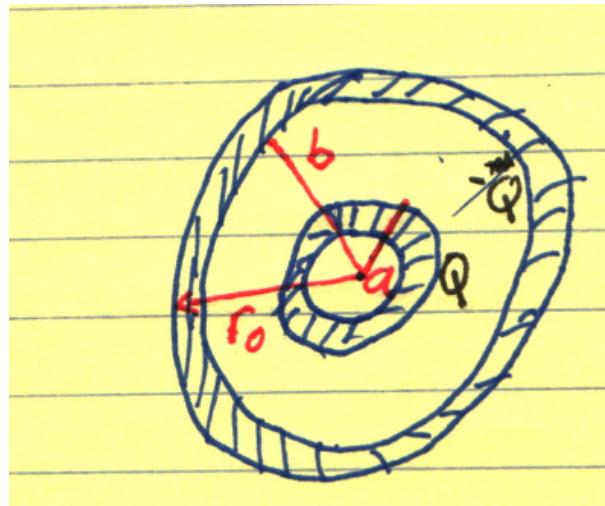


על הלוחות נמצאים מטען Q – שיוצרים שדה חשמלי בניהם, נזכר שהשدة קרובה לשפת המוליך: $\sigma \sigma$ השדה בין הלוחות: $4\pi \cdot \sigma$. נחשב את הפרש הפוטנציאלי:

$$\Delta\phi = -int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -|E| \cdot S \Rightarrow |E| = \frac{\Delta\phi}{S} \quad (38)$$

$$\sigma = \frac{|E|}{4\pi} = \frac{\Delta\phi}{4\pi S} = Q = \sigma A = \frac{\Delta\phi \cdot A}{4\pi S} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{A}{r\pi S} \quad (39)$$

מה קורה אם השטח של הלוחות שונה – שאלת טובה, חשוב לחשב עלייה בבית (ישן אמר שאולי יהיה במחנן גם).
דוגמה של שתי קליפות מוליכות: נתונות שתי קליפות כדוריות קונצנטריות מחומר מוליך, a - הרדיוס החיצוני של הקליפה הפנימית, b - הרדיוס הפנימי של הקליפה החיצונית.



מבנה מעטה גאוסית – מעטפת של כדורי "בשר" של הקליפה החיצונית.

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \left(\sum Q \right) = +Q + (Q_{outRing}) = 0$$

קיבלו כי המטען על השפה הפנימית של הקליפה החיצונית צריך להיות מינוס המטען על השפה הפנימית. השדה בין הקליפות:

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

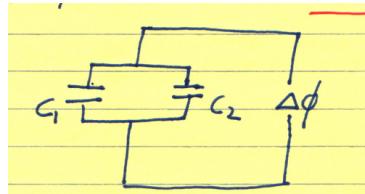
$$\Delta\phi = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b |E| \cdot dr = \int_b^a \frac{Q}{r^2} dr = Q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow C = \frac{ab}{a-b}$$

2.18 חיבור קבילים בטoor ובקביל**2.18.1 חיבור במקביל**

נסמן קובל כך:



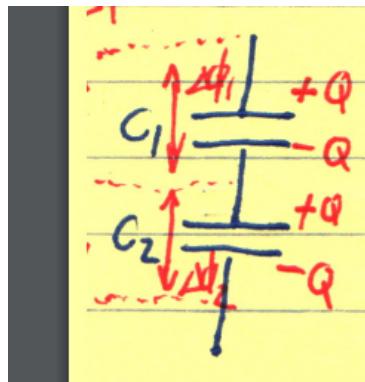
מה יהיה הקיבול הכלול של זוג הקבילים:



שני קבילים c_1, c_2 מחוברים למקור מטען שדווג לשומר על הפרש פוטנציאלי קבוע ביניהם. ולכל אחד מהקבילים מתקיים: $C = \frac{Q}{\Delta Q} = \frac{Q_1+Q_2}{\Delta\phi} = c_1 + c_2$ אצלו: $c_1 = \frac{Q_1}{\Delta\phi_1}$, $c_2 = \frac{Q_2}{\Delta\phi_2}$

2.18.2 חיבור בטoor

נשים מטען Q ± על הלוחות החיצוניים, הם יגרמו להפרדת מטען Q ± על הלוחות הפנימיים.



$$\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{Q}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

2.18.3 האנרגיה האצורה בקובל

ונסה לחשב את סך כל העבודה שהשकענו בהחביא מטען Q כנגד הפוטנציאלי ϕ בין לוחות קובל. המטען על הלוחות $Q = C\phi$. אם נרצה להניר יחידת מטען dQ מהלוח הטוען שלילית ללוח הטוען חיובי: $W = Q\Delta\phi \Rightarrow dW = dQ\Delta\phi$ $\Rightarrow dW = dQ\Delta\phi = dQ(C\phi) = C\phi dQ$. ככל שנעביר עוד ועוד מטענים, הפוטנציאלי בין הלוחות יגדל ונצרך להשקייע יותר עבודה. נסכם את העבודה הכוללת $Q = Q_f$ ועד $Q = 0$.

$$W = \int dW = \int \phi dQ = \int_{Q=0}^{Q=Q_f} \frac{Q}{C} dq = \frac{Q_f^2}{2C} \quad (40)$$

סך כל העבודה היא האנרגיה האלקטרוסטטית האגורה בקובל:

$$Q = c\phi \Rightarrow U = \frac{1}{2} C\phi^2 \quad (41)$$

נסתכל טכנית על קובל לוחות:

$$E = \frac{\phi}{s}, C = \frac{A}{4\pi s}$$

$$U = \frac{1}{2} c\phi^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{4\pi s} \right) (|E| \cdot S)^2 = \underbrace{\frac{1}{8\pi} E^2}_{\text{נפח בין לוחות קובל}} \cdot \underbrace{(A \cdot S)}_{\text{כפיפות אנרגיה}} \quad (42)$$

2.19 חומרים דיאלקטריים

המטרה שלנו היא לפתח מודל מיקרוסקופי לגבי מה קורה לכל מולקולה כאשר היא מתקבבת ואיך תיראה בתופעה זו באופן מיקרוסקופי. נסמן את המרחק ממטען נקודתי שלילי ומעו נקודתי חיובי ב- \vec{d} ונגיד מומנט הדיפול השמאלי ב- $q \cdot \vec{P} = \vec{d} \cdot \vec{E}$.

נשתמש במומנט הדיפול כדי לתאר הפרדת מטען באופן כללי – כל מולקולה או אטום מורכב מגרעין נקודתי בעל מטען חיובי $+ze$ ומכדור קשיח שלALKטרוונים בעל מטען שלילי $-ze$ – ברדיוס R . המטען החלילי מפולג בכדור באופן אחיד q . אנחנו מיעוניים לדעת מה יקרה אם נפעיל שדה חשמלי חיוני \vec{E}_0 למשל, על ידי לשים את הטעותם בין להוות קבל. הגרעין החיוני יונגי כוח בכיוון השדה והכדור החלילי יונגי כוח נגד כיוון השדה. נסמן את המרחק בו הגרעין ומרכז הכדור אחד מהשני ב- r עד שיווצר שיוויון כוחות בין הכה החיצוני לשדה.

הפרדת המטען $+ze$ לכדי מרחק r נותנת מומנט דיפול \vec{p} , נוכחים כי $\vec{E}_0 \propto \vec{p}$: ראיינו בעבר כי השדה החשמלי בתוך כדורי עם התפלגות מטען אחידה:

$$\rho = \frac{-ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$|E_e| = k \frac{4\pi}{3} |\rho| r = k \frac{ze}{R^3} r$$

במצב שיווי משקל $r = b$ וגם

$$|E_e| = k \cdot \frac{zeb}{R^3} = |E_0|b = \frac{R^3}{zek} |E_0|$$

מומנט הדיפול: $|P| = zeb = \frac{R^3}{k} |E_0|$ קיבנו שモומנט הדיפול המושרה באטום במודל שלנו פרופורציונלי לשדה החשמלי. ננטוש את המודל ורק נשאר עם ההבנה שזה אפשרי ש $\vec{P} = \alpha \vec{E}_0$.

α – polarizability. והינה תקונה של חומר מסוים.

נשתמש בסופרפוזיציה כדי לתאר את התגובה הכללית של החומר לשדה חשמלי חיוני:

$$\vec{P}_{tot} = n\vec{P} = n\alpha\vec{E}_0 = \frac{\chi_e}{4\pi} \vec{E} \quad (43)$$

χ_e – סופטבilities חשמליות.

2.19.1 המטען המושרה בשפה של חומר דיאלקטרי

نبין מה קורה כאשר מסדרים דיפולים חשמליים בטו. $\vec{d} \uparrow_{-q}^{+q} \Leftrightarrow \vec{P}$. בכל נקודה שדיפולים נגשימים, או במלils אחרות בכל נקודה שבה ראש $+q$ של דיפול חופף זנב $-q$ – של דיפול אחר $-q$ – $+q$ – נשאר עם מטען q . נחשב את מומנט הדיפול הכללי ונסמן אותו ב- \vec{P}_0 של קוביה עשויה מחומר מבודד שבינויו מדיפולים זהים.

1. דרך ראשונה:

נסדר קוביה של דיפולים מכובנים בכיוון שדה חיוני \vec{E}_0 בכיוון \hat{z} . מטען נטו יצטבר רק בפאה העליונה והתחתונה.

$$\vec{P}_0 = Q\vec{z} \Rightarrow Q = \frac{|\vec{P}_0|}{|z|}$$

2. דרך שנייה: נסמן ב- \vec{P} את צפיפות הדיפולים בקוביה.

$$\vec{P}_0 = \vec{P} \cdot V_{cube} = \vec{P}(A|\vec{z}|) = |\vec{p}| \cdot A\vec{z} \Rightarrow \frac{|\vec{P}_0|}{|\vec{z}|} = |P| \cdot A$$

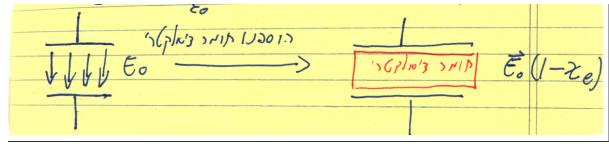
נשווה בין אחד לשתיים:

$$Q = |p|A \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{A} = |P| \quad (44)$$

לסיום, שדה חשמלי חיוני יצר מומנט דיפול בחומר, הבנו על ידי הקוביה שנוצרה הפרדת מטען מיקרוסטטפית בין שתי פאות נגדירות בקוביה, כך שהצטבר מטען $+Q$ בפאה העליונה ו- $-Q$ בפאה התחתונה. זו בדיקת התפלגות המטען של קובל \vec{E}_{ind} להשתמש בכל התוצאות לקבלת. יוצר שדה פנימי מושרה

$$|\vec{P}| = \sigma = \frac{|E_{ind}|}{4\pi}$$

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E} + \vec{E}_{ind} = \vec{E}_0 - r\pi\vec{P} = \vec{E}_0 - \chi_e\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{1 + \chi_e}$$



הפוטנציאל בין לוחות קיבל:

$$\Delta\phi = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_0|z| \quad (45)$$

$$C = \frac{Q}{E_0|z|} \quad (46)$$

נוסיף חומר דיאלקטרי בין הלוחות,

$$\Delta\phi = (\vec{E}_0 - 4\pi\vec{P})|z| \quad (47)$$

הקיים:

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{Q}{(\vec{E}_0 - 4\pi\vec{P})|z|} = C_0 \frac{E_0}{E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}} = C_0 \frac{E + 4\pi P}{E} = C_0 \left(1 + \frac{4\pi P}{E}\right) = C_0(1 + \chi_e) = \kappa_e c_0 \quad (48)$$

לדוגמא הקאפפא של וакום הינה 1, פלסטיק 3 ואומנם מים מוליכים אינם מבודדים אך הקאפפא שלהם הינה 80 ונראה בפרק הבא למה.

3 זרם חשמלי

בחלק זה של המחברת נדבר על התנועה(gento) של מטענים, נרצה לתאר מצב שבו מטענים יכולים לנوع במרחב באופן הכללי ביותר. נתחיל עם להסתכ על קבוצה של מטענים בעלי מהירות \vec{u} בצפיפות $n = \frac{1}{cm^3} = [n]$. כמה מטענים(בעלי מטען q) יעברו ביחידת זמן Δt דרך משטח $\vec{d}\vec{a}$? בזמן Δt החלקיים Über $\vec{d}\vec{a}$, החלקיים שאכן עברו בזמן זהה דרך המסגרת יהיו בתוך נפח תיבת: $\Delta v = \Delta t \cdot \vec{u} \cdot \vec{d}\vec{a}$. אם כך, הזרם החשמלי, כמות המטען ליחידת זמן שעבירה דרך $\vec{d}\vec{a}$:

$$I_a = \frac{q\Delta N}{\Delta t} = qn\vec{u}d\vec{a} = \vec{J}_a d\vec{a}$$

כאשר נגדיר את צפיפות הזרם להיות: $[J_a] = \frac{statC}{s \cdot cm^2}$, $\vec{J}_a = qn\vec{u}$

כעת נוכל להכליל זאת עבור מצב שבו לכל חלקיק מהירות שונה. במקרה זה, כתוב שהזרם דרך משטח S כלשהו הינו:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

חוק שימור מטען

נבחן משטח סגור S - נסמן את כמות המטען בתוכו Q , ועל פי קונבנצייה נבחר שהזרים חיובי כמשמעותם יוצאים מהනפה החתומות ע"י המשטח הסגור, כלומר, $\frac{dQ}{dt} = -I$. מדרךים שביטהנו את הזרים (בתור אינטגרל צפיפות הזרם על המשטח, ובתור שינוי כמות המטען בתוך המשטח) קיבלנו:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

נוכל לכתוב את אגן שמאל בתור אינטגרל נפחית באמצעות הדיברגנץ. קיבל שמותקינים שווין האינטגרל עבור כל נפח, ולכן האינטגרנדים עצם זהים. כמובן, בכל נקודה למרחב מותקינים הקשר

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0} \quad (49)$$

זה קשר מאד הגיוני - בדיק כמה שmailtoן זרם החוצה זה כמה שהצפיפות תקוטן.

3.1 מוליכות וחוק אוּהָם

בניסוי נגלה שבמרבבית המוליכים צפיפות הזרם פרופורציונלית לשדה החשמלי.

$$\boxed{\vec{E} = \rho \vec{J} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad (50)$$

כאשר

$$\text{הנגדות סגולית} = \rho \quad \text{מוליכות סגולית} = \sigma$$

$$egs: \quad [\rho] = sec \quad [\sigma] = 1/sec$$

$$SI: \quad [\rho] = \omega \cdot M \quad [\sigma] = \frac{1}{\omega \cdot M}$$

זהו חוק אוּהָם שניסח גאורג סימון אוּהָם בשנת 1827! החוק הוא אוסף של נקודות אמפיריות.

3.2 תיל חד מימדי

במקרה של תיל מוליך חד מימדי באורך ℓ , \vec{J} מאולץ להיות בכיוון \vec{dl} , ובמקרה של שסתיל מוליך מוליך אוּהָם (מקיים את חוק אוּהָם) אז גם \vec{E} בכיוון \vec{dl} .

הפרש הפוטנציאלים בין קצוות התיל הינו

$$V = |\Delta\phi| = \left| \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| = |E| \int dl = |E| \cdot l$$

עכשו אם נבחן תיל עם עובי דק (אך עם זרם קבוע עדין), בפרט שטח חתך a , מהגדרת צפיפות הזרם מותקינים $|J| = I/a$. לכן,

$$V = |E| l \stackrel{\text{חוק אוּהָם}}{=} \rho |J| l = \rho \frac{I}{a} l = IR$$

כאשר הגדרנו את $R = \rho l/a$ התנגדות התיל, ומיצאנו את חוק אוּהָם המוכר יותר $V=IR$.

3.3 הספק חשמלי במוליכים

העובדת שמבצע שדה חשמלי על מטען q הנע מרחק \vec{dl} :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dl} = q\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

ההספק של מטען בודד:

$$P_q = \frac{dw}{dt} = q\vec{E} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{u} \quad (51)$$

ההספק ליחידת נפח של n מטענים:

$$P_n = n \cdot P_q = nq \cdot \vec{E} \cdot \vec{u} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (52)$$

במקרה שהמטענים עוברים בתוך מוליך אוממי (מוליך המקיים את חוק אוּהום), ההספק הכללי:

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \int_V \rho J^2 dV = \int_V \sigma E^2 dV \quad (53)$$

3.4 מודל דרודה למוליכות - (1900) Model Drude

פאול דרודה ניסח למצוא הסבר קלאסי לתופעות המוליכות. הקשר בין צפיפות זרם ומהירות ממוצעת של אלקטرونים:

$$\vec{J}_e = en_e < \vec{u}_e >$$

נציב את חוק אוּהום ב מהירות ממוצעת של האלקטרונים:

$$< \vec{u}_e > = -\frac{\sigma}{en_e} \vec{E}$$

נראה שבמוליך אוממי כאשר השדה החשמלי קבוע נקבל מהירות ממוצעת קבועה של אלקטرونים. איך זה מסתדר עם העובדת ששדה כוח קבוע \vec{E} יפעל לפי החוק השני של ניוטון?

$$\vec{F} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{a}_e = \frac{\vec{F}}{M} = -\frac{e}{M} \vec{E} \Rightarrow$$

דרודה הציע שאולי האלקטרונים המואצים בשדה לפי החוק השני של ניוטון אבל אחרי מרחק מסוים הם מתנגשים אקרראית באטום ונבלמים. מהירות של אלקטרון אחריו זמן t עבר מאז ההתנגשות האחרונה

$$\vec{U}_e = \vec{a}_e \cdot t$$

נדיר את "זמן המהALK החופשי" בזמן המומוצע בין שתי התנגשויות

$$M\vec{U}_e >= \vec{a}_e J = \frac{-eJ}{M} \vec{E}$$

ואז לפי חוק אוּהום"

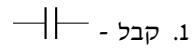
$$\vec{J}_e = -en_e \vec{u}_e >= \frac{e^2 n_3 J}{M} \vec{E} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \sigma = \frac{e^2 n_e J}{m}$$

המודל נראה מצוין, הוא אומר, לא משנה למה זה קורה, אם יש לכם את הפרמטרים אתם תדעו את σ . אז מה הבעיה עם המודל? הוא לא נכון.

עבור מתכת נקבל לפי מודל דרודה כי: $l \approx cm$, $l = < u_e > J = A^\circ$ בפועל,

3.5 מעגלי זרם ישיר

לרכבים בעלי שני קטבים ניתן סימון סכמטי כדי שנוכל לנתח מה קורה במעגל חשמלי:

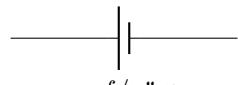


1. קובל -

2. תיל ממוליך אדילי -

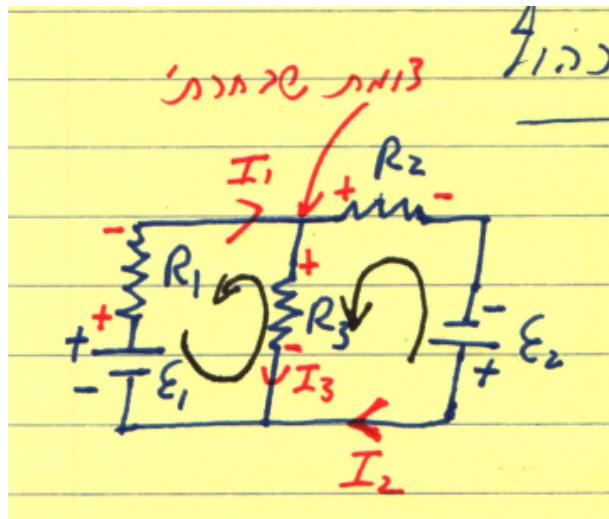


3. נגד -

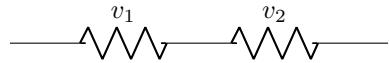


כאשר הקוו

4. כוח אלקטרו-מניע(כא"מ) - רכיב שיודיע להניע מטענים חשמליים כלפי מטה כנגד השדה - הארוך מסומן את הפוטנציאלי הגבוה.



איור 2: כחול - המעגל הנוכחי, אדום - הבחירה שלנו לכיווני הזרם, שחור - הלוואות שבחרנו

3.5.1 חיבור נגדים בטוֹר

$$V_1 + V_2 = V_{tot} = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2) \quad (54)$$

נרצה לתאר את ההתנגדות השוקולה של שני הנגדים:

$$V = RI \Rightarrow R = R_1 + R_2$$

3.6 חיבור נגדים במקביל

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow R_{tot} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

3.7 חוק קירכהוף

קirchoff (1845) ניסח את חוק שימור המטען ואת הגדרת הפוטנציאל באופן חד-ממדי.

3.7.1 חוק קירכהוף הראשון (שימור מטען)

הסכום האלגברי של כל הזרמים בצומת הוא אפס.

3.7.2 חוק קירכהוף השני (הגדרת הפוטנציאלי)

בכל לולאה סגורה סכום מפלי המתוח הוא 0.

3.7.3 דוגמא לחוקי קירכהוף

לפי החוק הראשון בצומת שבחرتהי:

$$+I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

לפי החוק השני:

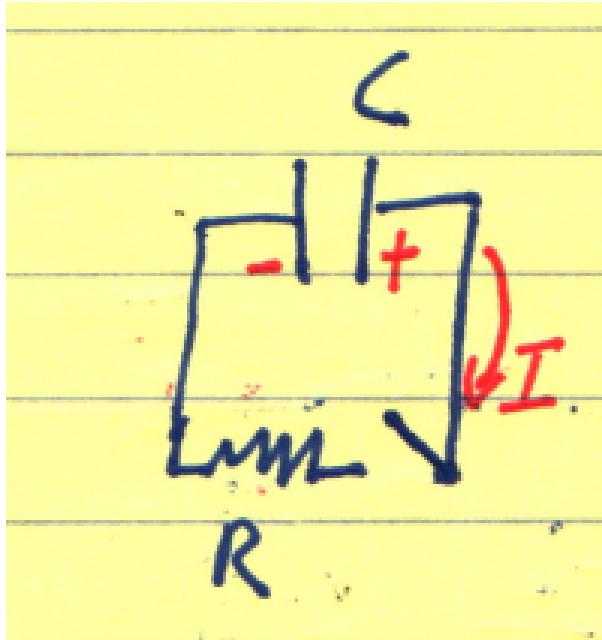
$$\epsilon_1 - R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0$$

$$\epsilon_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$$

ובכך למצוא את הזרמים על כל נגד.

3.8 מעגל RC - פריקה

הקובל טעון בטען Q בזמן 0 סוגרים את המתג ומטענים יתחלו לזרום במעגל. מצא את $I(t)$



המתוך על הקובל: $I = -\frac{dQ}{dt}$. הזרם על הנגד: $I = \frac{V}{R}$. במקרה שלנו הקשר בין I ל Q , הינו $V = \frac{Q}{c}$: נציג את בשניה:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{Rc} \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{dt}{Rc} \Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{Rc} + C \quad (55)$$

$$\text{נתנו לנו שב } V = V_0, Q = Q_0 \text{ при } t=0$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{Rc}} = V_0 c e^{-\frac{t}{Rc}} \Rightarrow I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{Rc}} \quad (56)$$

קבענו שהזרם דועך כפונקציה של הזמן אקספונצייאלית עם קבועה דעיכה $1/Rc$. אנחנו יודעים שהאנרגיה האצורה בקובל:

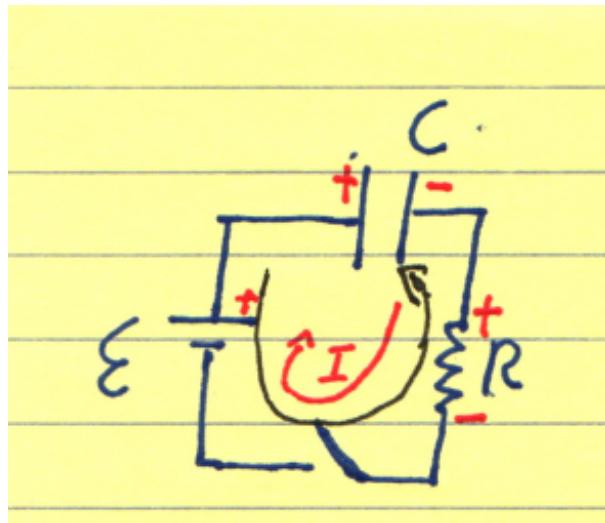
$$U(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{c} \quad (57)$$

מהו ההספק שאובד מהקובל בזמן בפריקה?

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2c} \right) = -\frac{Q}{c} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{c} I = V_c I = V_R I = \text{ההספק על הנגד} \quad (58)$$

האנרגיה "נעלה" בנגד, לא ניגע זהה בקורס אך האנרגיה מועברת לאנרגיית חום.

3.9 מעגל RC-טעינה



נשותמש בקירכהוף. בזמן $t=0$ הקובל היה פרוק ואז סגרו את המתג $Q(t=0) = 0$. מצאו את $I(t)$

$$+\epsilon - V_R - V_c = 0 \Rightarrow \epsilon - IR - \frac{Q}{c} = 0 \quad (59)$$

כל שועור הזמן ו I חיובי, Q גדול.

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{Q} \quad (60)$$

$$\frac{Q}{c} + \dot{Q}R = \epsilon \quad (61)$$

קיבלונו מ"ר לא הומוגני, נניח $Q(t) = Q_h(t) + Q_s(t)$ נפתרו את הבעה ההומוגנית:

$$\dot{Q}_h + \frac{Q}{Rc} = 0, \dot{Q}_h = -\frac{Q}{Rc}, \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{Rc} \Rightarrow Q_h(t) = Ae^{-\frac{t}{Rc}} \quad (62)$$

הפתרון העמید בזמן: הקובל ילק ויטען $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{Rc}}$ ילק ויגדל ולכן $V_c = Q/c = \epsilon e^{-\frac{t}{Rc}}$ אז הפרש הפוטנציאלים בנים יהיה אפס והזרם יפסיק. $t \rightarrow \infty : I = 0, V_R = 0 \Rightarrow Q_f = \epsilon c$. נתפוך את הפתורונות:

$$Q(t) = Ae^{-\frac{t}{Rc}} + \epsilon c \quad (63)$$

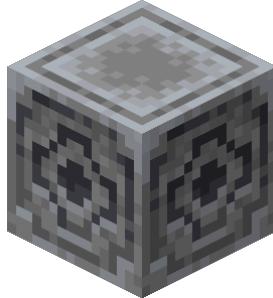
תנאי התחלת:

$$Q(t=0) = 0 = A + \epsilon c \Rightarrow A = -\epsilon c \Rightarrow Q(t) = \epsilon c(1 - e^{-\frac{t}{Rc}}) \Rightarrow I(t) = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{Rc}} \quad (64)$$

4 מגנטיות

4.1 הקדמה

עוד מיוון העתיקה הייתה מגנטיות מוכרת. היוונים ידעו שיש אזור במערב טורקיה, "מגנסיה", ויש בו מחצבים, "אבן שואבת" (Lodestone) שפעילים כה אחד על השני וגם על מוכחות.



איור 3: האבן השואבת

בנוסח, נפחים שמו לב שישן מוכחות (בעיקר ברזל) שכאר מותיכים אותו ונוטנים להן להתפרק לצורה של מוט בכיוון מסוימים בנפחיה, הן שומרות על "זכרון" של הכיוון הזה כלומר פועל עליהם כוח חלש בכיוון A. מסתבר כי הדבר זה אינו נכון, ב-2011 נבדק והשזה של כדו"א לא חזק מספיק על מנת לגרום לתופעה זו את ב-1600 ולכן הם כנראה השתמשו באבן שואבת.

ב-1819 מדען דני בשם Chrstes Niels נמצפן משנה את כיוונו בnockחות זרם חשמלי. ניצפה שהמצפניהם מסתדרים בכיוון מסויקי ביחס לתיל זרם. הכוח עליהם פרופורציונלי לזרם I . קלומו אם ישנו שדה כוח \vec{B} שפועל על הממצפנים, אז התכזיבת קבועה שמתקיים

$$\vec{B} \propto \frac{I}{r} \hat{\varphi}$$

מסקנה: יש קשר בין זרם חשמלי לכוח מגנטי.

4.2 ניסוי אמפר - כוח בין תילי זרם

ב-1820 אמפר ביצע ניסוי בתיל זרם. הניסוי מכונה "ניסוי אמפר". נמקם שני תילים מקבילים כך שהמרחק ביניהם r זניח ביחס לאורכם. הזרמים בתילים I_1, I_2 . עם שינוי הזרמים בכיוונים הפוכים (ראו איור). תוצאות הניסוי: כאשר כיוון הזרם זהה בשני התילים, התילים נמשכים אחד לשני. כאשר כיוון הזרם הפוך, התילים דוחים אחד את השני. כתעתם לשנות את המשתנים השונים (r, I_1, I_2) ולנסות למצוא את תלות הכוח בין התילים במשתנים אלו.

אם פרט מתקבל תוצאה מהניסוי, שהכוח הפועל על תיל באורך ℓ :

$$|F_{21}| = \left(\begin{array}{c} \text{קבוע} \\ \text{פרופורציה} \end{array} \right) \ell_2 \frac{I_1 I_2}{r}$$

כאשר הפועל קבוע הפרופורציה ביחידות SI הינו $\frac{\mu_0}{A^2}$, ו- μ_0 משמעו הפרמאביליות של הריק וערך $10^{-7} \frac{N}{A^2}$.

ב CGS יחידות הקבוע הין

$$\frac{[F]}{[I]^2} = \frac{\frac{statC^2}{cm^2}}{\left(\frac{statC}{sec}\right)^2} = \frac{1}{(cm/sec)^2}$$

ולמעשה ביחידות CGS הקבוע הינו $\frac{2}{c^2}$! כאשר $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sec}$ מהירות האור.

4.3 הכוח המגנטי שיוצר תיל זרם

כשעשכנו בחוק קולון ראיינו כי ניתן לייצג את הכוח הפועל על כל מטען על ידי שדה הידוע בנקודה אחת. השאלה היא האם ניתן לייצג את הכוח המגנטי באותה השיטה?



מ מבט על: נשים לב אבל שהכוח תליי גם ב I_2 שכן ננסה להבין מה הכוח הפועל על כל מטען העובר בתיל 2. השתמש במספר גודלים כדי לתאר את התיל. a_2 שטח החתך, N_2 מספר המטענים בתיל, $n_2 = \frac{N_2}{V_2}$ צפיפות המטען בתיל, J_2 צפיפות הזרם בתיל.

$$|F_{21}| = \frac{2}{c^2} \ell_2 \frac{I_1 I_2}{r} = \frac{1}{c} |B_1(r_2)| \cdot \ell_2 I_2$$

$$\ell_2 I_2 = |J_2| a_2 \ell_2 = |J_2| V_2 = |J_2| \frac{N_2}{n_2}$$

לכן מתקיים הכוח על מטען באורך ℓ_2 :

$$|F_{21}| = |B_1(r_2)| |J_2| \frac{N_2}{cn_2}$$

נשתמש בדרך קלה ונקבל עכשו כשבענו את הכוח על כל מטען בתיל 2 כתלות ב $|q|$ וגם ב $|\vec{B}|$ הוכל להביע את הכיוון של \vec{F} באמצעות מכפלה וקטורית:

$$\boxed{\vec{F}_{21} = q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)} \quad (65)$$

את ההבנה זו יכול לבדוק עם תיili זרם בזווית שונה. איזה מין \vec{B}_1 יתן את הכוח שמצא אמרה: $I_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} l_2 \frac{I_1 I_2}{r} = cgs \frac{2}{C^2} L_2 \frac{I_1 I_2}{r}$

4.4 כוח לורנץ

נקווה שבאים שבו נוכל לעשות ניסויים על הכוח המגנטי הפועל על מטען בתנואה כלשהי (לא מרוטק למוליך), נגלי שזו תוצאה כללית:

$$\vec{F}_m = \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B} \quad (66)$$

ובאופן מלא, **הכוח האלקטרו-מגנטי או כוח לורנץ**:

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{V} \times \vec{B}} \quad (67)$$

לסיכום: השדה המגנטי שיוצר תיל זרם:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2}{c} \frac{I}{r} \hat{\varphi} \quad (68)$$

הכוח בין שני תיili זרים:

$$|F_{21}| = \frac{2}{c} l_2 \frac{I_1 I_2}{r} \quad (69)$$

4.5 הכוח המגנטי על תיל זרם בצורה כלשהי

בהתנון מקום מסוים, מה הכוח המגנטי הפועל עליו במרחב?

$$d\vec{F} = dq \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} = \frac{1}{c} nq |dl| \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{c} |J| adl \times \vec{B} \quad (70)$$

$$\boxed{d\vec{F} = \frac{I}{c} dl \times \vec{B}} \Rightarrow \vec{F} = \frac{I}{c} \int d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{I}{c} \int \vec{B} \times dl \quad (71)$$

4.6 תנועה של מטען בשדה מגנטי

נציר כי כוח לורן הינו:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{V} \times \vec{B} \quad (72)$$

הכוח המגנטי ניצב למehlerות המטען תמיד ולכן אינו מבצע עבודה על המטען. במיושר הניצב לשדה האלקטרוסטטי החלקיק יבצע תנועה מעגלית במehlerות זוויתית קבועה. מכניתם קלאסית אנחנו ידעים כי לפי ניוטון:

$$|F_m| = \frac{1}{c}|v||B| = \frac{mv^2}{r} \quad (73)$$

רדיווס הסיבוב(רדיויס לרמור):

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{Pc}{qB} \quad (74)$$

המehlerות הזוויתית:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{mc} \quad (75)$$

התדרות("תדרות הциקלוטרון"):

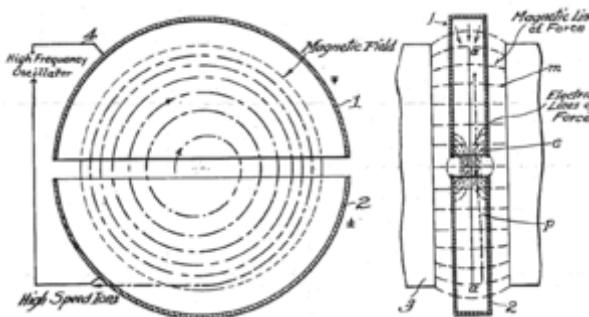
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2mc} \quad (76)$$

זמן מחזור:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi mc}{qB} \quad (77)$$

4.7 מכשירים המשתמשים בתנועת מטען תחת שדה מגנטי

4.7.1 ציקלotron



איור 4: דיאגרמה של מכשיר הциקלotron

הциקלotron הוא דרך להאיץ מטענים לבערק MeV ומעלה. כאשר eV - אלקטرون וולט ומשמעותו היא האנרגיה שמקבלת יחידת מטען בסדר גודל e שתחת הפרש פוטנציאלי של וולט אחד. באירור ניתן לראות שני מוליכים (שני חיצים עיגול) בשדה מגנטי ניצב, שני המוליכים מחוברים לכ"מ ולכן בין המוליכים יש שדה אחד. אם נשים אלקטרון בתחילת החץ באירור, הוא יאץ בין המוליכים וכשיגיע למוליך החדש יבצע תנועה מעגלית ובזמן זה השדה החשמלי יחליף כיוונו (הכ"מ) ולכן יאץ שוב בכיוון השני כמו באירור. וכך כל מה שרציך זה להחליף את הכ"מ בתדרות מסוימות. החלקיקים יסימנו עם אנרגיה קינטית:

$$E_k = K = \frac{P^2}{2m} = \frac{q^2 R^2 B^2}{2c^2 m} \quad (78)$$

המאץ של לורן היה קטן יותר להחיזק אותו ככ"ד, כיוון מאץ זה לא בשימוש מכמה סיבות, ראשית לבני אדם אין דרך לעשות שדה חשמלי אחד במכשירים גדולים, שנית כאשר אנחנו מתקרבים למehlerות האור המשוואות האלו משתנות ולכן המכשיר לא עובד כצפוי.

4.8 ספקטrometer מסות

שיטת למדידת מסה בקרה רגילה מאוד. למכךיר אנחנו נכניס חלקיקים בעלי מהירות ידועה ומטען ידוע דרך חריר לאוזור בו שורר שדה מגנטי ניצב לכיוון התנועה. אנחנו יודעים כי הרדיוס הינו

$$r(m) = \frac{mv_0 c}{qB_0} \quad (79)$$

ולפי הרדיוס נמצא את המסה.

4.9 בורר מהירות

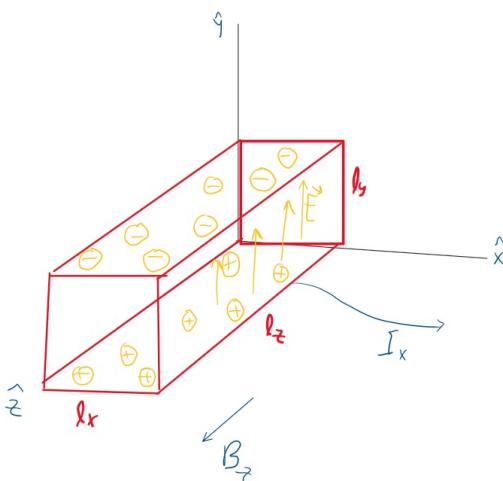
משמאלי לחיריר (לדוגמא החיריר מספקטrometer מסות) יש שדה חשמלי ושדה מגנטי, הכח על החלקיק הינו

$$|F| = q|E| - \frac{q}{c}v_0|B| = 0 \quad (80)$$

ובכך כל מטען שאינו המטען הנוכחי או מהירות נכונה לא יכנס לחיריר.

4.10 מנע זרם ישיר

מומנט כוח על לולאת זרם בשדה מגנטי נסתכל על לולאת זרם מלכנית:

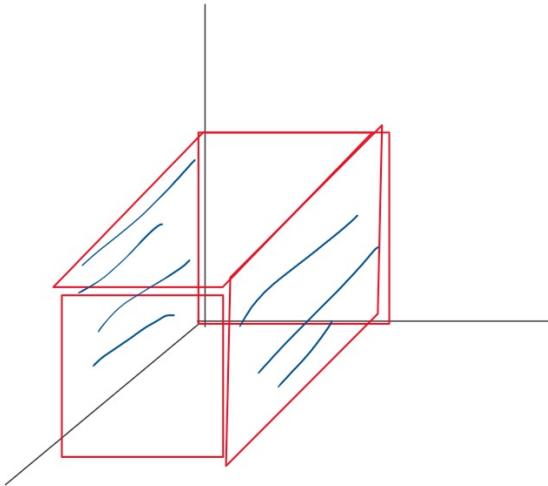


נתחיל ממצב שבו הלולאה מקבילה למישור השדה:

$$dF_m = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \vec{B} \quad (81)$$

על המקטעים הקצרים, כיון הזרם מקביל ל \vec{B} ולכן $dF_m = 0$ על המקטעים הארכיים פועלים לפי כלל ימין כוחות שוים והפוכי סימן ולכן סה"פ הכוחות על הלולאה שוים לאפס. אבל אכן יש מומנט כוח שיאważ לסובב את הלולאה סביב ציר. אין המשך.

4.11 אפקט הול



בלוק מוליך בעל צלעות באורך ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z , ופועל בכל המרחב שדה מגנטי בכיוון \hat{z} . מזרימים זרם I_x בכיוון \hat{x} . כМОבון כוח לורנץ נותן $B \times \vec{v} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$ ולפי חוק>ID ימין נקלט כוח כלפי מטהעל מטענים חיוביים.

$$\vec{F}_M = -\frac{q}{c} v_x B_z \hat{y} = -F_{M,y} \hat{y}$$

נרצה לענות על השאלה - כיצד השדה המגנטי ישפיע על המטענים במוליך? לפי הכוח שקיבלו נוכל לענות- השדה המגנטי יוצר הפרדת מטען בכיוון המאונך לזרם. (כלומר הפרדת מטען בין השפה העליונה והתחתונה). הארים במוליך יגיע למצב יציב כאשר הכוח החשמלי הנובע מהפרדת המטען בדיק ביטל את הכוח מהשדה המגנטי (אכן נגיע למצב כזה כיון שהוא מוליך).

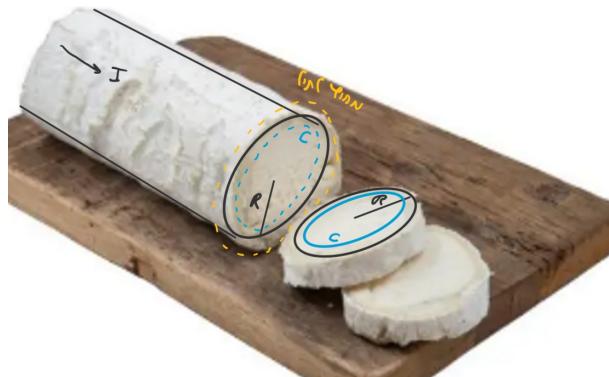
נרצה לאפיין מצב זה (מה התנאי להגעה למצב הייציב).

$$|F_{M,y}| = q |E_y| , \quad \left(\begin{array}{l} I_x = J_x l_y l_z \\ J_x = nqv_x \end{array} \right) \Rightarrow E_y = \frac{B_z}{cnq} J_x$$

קיבלו קשר דומה מאוד לחוק אוּהם, בין E ו- J , אך בכיוונים שונים.
נחשב את המתח שנוצר:

$$V_y = E_y l_y \Rightarrow \boxed{V_y = \frac{B_z I_x}{cnql_z}}$$

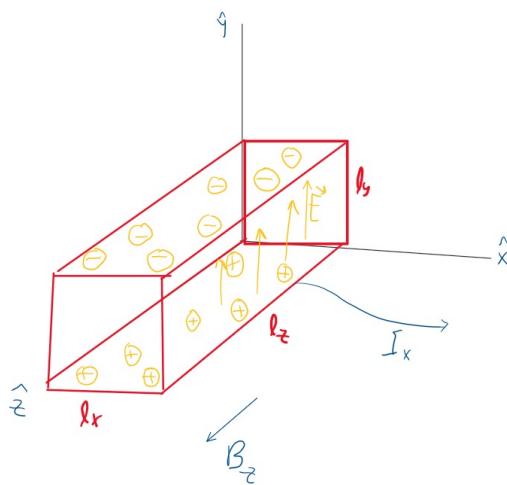
למעשה כך ניתן ליצור מד שדה מגנטי! נעביר זרם ידוע במוליך עם מימדים ותכונות ידועות, ונמדד את המתח. כך נוכל למצוא את השדה המגנטי. מכשיר זה נקרא "מד הול", והמתח שהчисבנו הוא "מתח הול".



אир 5: רק אינסופי

5 ייצירת שדה מגנטי

5.1 אמפר חוק



נתון תיל זרם ישר אינסופי, נקי' את התיל בלולאה המותארת מסלול סגור C. כניסה למצא מהו אינטגרל השדה המגנטי לאורך המסלול כלומר $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ השדה שיוצא תיל זרם אינסופי?

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2I}{cr}\hat{\phi} \quad (82)$$

בכל מקטע dl אנחנו יודעים ש $dr = dr\hat{r} + rd\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$ השדה מצבי \hat{r} בכיוון המשיקי ולכן

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{2I}{cr} r d\phi = \frac{2I}{c} \oint d\phi = \frac{4\pi}{c} I_{\text{סולג}}$$
(83)

קיבלנו כי האינטגרל $\int B \cdot dl$ תלוי במסלול, זה נראה מבטיח . זה מוכיח מכך את חוק גאוס - רק הפעם עם שדה מגנטי וללאה במקום משטח (משפט סטוקס מישוה?).

נמצא את $B(\vec{r})$ ומחשב את Bdl] ונגלה כי הכוח המגנטי מקיים גם הוא סופרפרוזיציה

$$1821 \text{ חוק אמפרה} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad (84)$$

5.1.1 דוגמא לשימוש בחוק אמפר: תיל זרם עבה

נתון תיל אינסופי עבה ברדיוס R בו זרם זרם כולל I בהतפלגות זרם משטחית אחתה, מהו השדה \vec{B} בכל מקום? נבחר לולאה אמפריאנית: C מעגל ברדיוס r . כאשר $r < R$

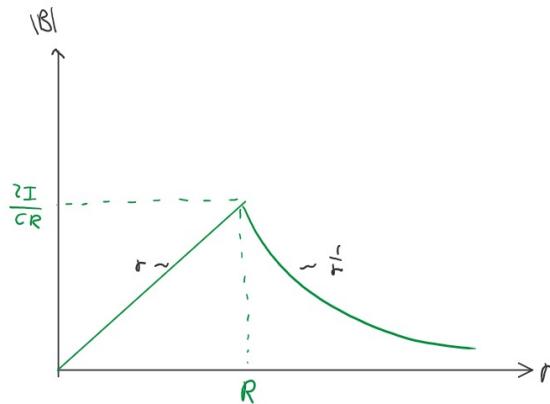
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = |B| \oint_C |dl| = 2\pi r |B|$$

$$I_{\text{LOOP}} = I \cdot \frac{\text{שטח הלולאה}}{\text{שטח החותך}} = I \frac{\pi r^2}{2} = I \frac{r^2}{R^2}$$

$$|B| = \frac{2r}{cR^2} I$$

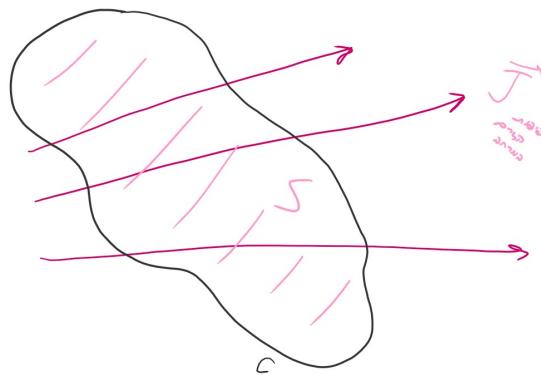
מחוץ לתיל זרם $r > R$

$$B = \frac{\frac{4\pi}{c} I_{\text{LOOP}}}{2\pi r} = \frac{2I}{cr} \quad (85)$$



איור 6: גרף של הכוח המגנטי כפונקציה של המרחק

5.2 חוק אמפר בהצגה דיפרנציאלית



\vec{J} צפיפות הזרם במרחב.

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (86)$$

לולאה C חוסמת משטח S . אנחנו עוסקים במגנטוסטטיקה כלומר הזרם יציב נוון חוק שימוש מיטען:

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} t = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (87)$$

משפט סטוקס: לכל שדה וקטור \vec{F} ומסלול סגור C החוסם משטח S מתקיים:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{a} \quad (88)$$

ובפרט עבור \vec{B} :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{תחום}} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (89)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{r})} px \quad (90)$$

5.3 סיכום המידע על המagnetostaticus:

במagnetostaticus:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0$$

נסכם את מה שידוע לנו. השדה החשמלי משמר:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

ואנו יודעים את חוק גאוס:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

עבור השדה המגנטי:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

דבר זה נמצא ניסיונית. מעולם לא נמצא שדה מגנטי שבו באיזושהי נקודה \vec{r} התקיים $\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \neq 0$.

זה "חומר מונופולים מגנטיים". כלומר מגנטיים בזוגות (דיפול, קווטר דרום וצפון) או יותר.

וחוק אמפר:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

נרשוםיפה, איזה כיף לנו: **משוואות מקסול בмагנטостטיקה!**

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

"The integral form of Maxwell's equations is superior to all others"

Me:



5.4 הפוטנציאל הוקטורי

עבור השדה החשמלי ראיינו שאפשר למצוא פונקציית פוטנציאלית ϕ כך שיתקיים $-\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ - זה נובע מהעובדת שהשדה

$$\text{משמר} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$$

האם נוכל למצוא פונקציית פוטנציאלית עבור השדה המגנטי? הקREL של השדה המגנטי לא אפס, לכן לא נוכל לעשות זאת

באותה הדרך כמו עבר השדה החשמלי. עם זאת, כך מתקיים $0 = \vec{B} \cdot \vec{\nabla}$. לכן ידוע (מופיע 2) שקיים פוטנציאל \vec{A} כך $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\text{כך אכן מתקיים } 0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

מעבר השדה האלקטרוסטטי יכולנו למצוא באמצעות סופרפויזציה את הפוטנציאל בכל מקום

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r'}{|r - r'|}$$

האם נוכל למצוא ביטוי דומה עבור $\vec{J}(\vec{r})$ על ידי סופרפויזציה של תרומות $\vec{J}(\vec{r}')$.

$$\frac{4\pi}{c} \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

כלומר קיבלנו קשר בין A ו- J , כך שנוכל לקבל מערכת כללית כלשהי, מ J למצוא את A ומשם את B , לכל מערכת, גם אם אין לה סימטריה. אבל הקשר שמצאנו מורכב מאד ☺ - כדי לפשט אותו נשתמש בעובדה של הפוטנציאל הוקטורי. ניתן להוסיף לו גרדיאנט של פונקציה סקלריתabil לשנות את פיזיקת המערכת, זאת כיון שמתקיים

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

באמצעות בחירה מוחכמת של \vec{A} , נוכל למצוא קשר פשוט יותר! הבחירה של \vec{A} נקראת כיוול gauge. (חפשו theory זה מגניב, ונושא עמוק בפיזיקה שנובע מהמתמטיקה של הסימטריות של המערכת). נבחר את "כיוול קולון". זהה הבחירה של \vec{A} כך $\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

$$\frac{4\pi}{c} \vec{J} = -\vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

נשים לב שבעצם התקבלו 3 משוואות פואסון בלתי תלויות על רכיבי הוקטור, A_x, A_y, A_z , וכך גם גילינו שהותוצאה של משוואת פואסון הינה:

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r$$

נקבל:

$$A_x(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r$$

ובאופן דומה עבור הרכיבים A_y, A_z

5.5 הוכחת קיום כיוול קולון

מצאנו שתחת כיוול קולון הקשר בין \vec{A} ו- \vec{J} הופך להיות שלוש משוואות פואסון. אך, מי מבטיח לנו כי קיימים שבערו השדה המגנטי הנמדד במעבדה מקיימים $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ וגם $\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$? נוכיח כי זה אכן מתקיים! מעבר שדה \vec{A} המקיים $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -f(\vec{r})$ כאשר $f(\vec{r}) \neq 0$ ניתן תמיד למצוא שדה וקטורי אחר $0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ וגם $\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = f(\vec{r})$ כאשר אנחנו יודעים זאת כי זה המבנה של השדה החשמלי:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho(r) \quad (91)$$

כלומר היינו תמיד יכולים בסדר מטענים בצורה $\rho(r) = \frac{-f(\vec{r})}{4\pi}$ שיקיים את התוכנות הרצויות. נעשה "טרנספורמציה כיוול":

$$\vec{A}_{new} = \vec{A} + \vec{A}' \quad (92)$$

כך שMOVEDTO ש-0 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{new}$ (נדרש נובע מליינאריות של הפעולות).

5.6 המשמעות הפיזיקלית של בחירה בכיוול קולון

שראינו שמכל וקטור פוטנציאלי נתון נוכל לעבור לוקטור פוטנציאלי המקיים את התנאים הדרושים! יהיה טוב אם נמצא איך נראה $\vec{J}(\vec{r})$ שעבורו אוטומטית $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ בכיוול קולון

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{J(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (93)$$

ונשאלו את עצמנו, מה צריך לדרש מ(r) J כללי, כדי שהקשר יתקיים? (כלומר מהי הצורה הכללית של פוטנציאל וקטורי \vec{A} שמקיים את כיוול קולון, ובנוספ' מהקרל שלו נקבל את השדה המגנטי). נחשב ישירות את

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \nabla \cdot \int \frac{J(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (94)$$

ונבדוק מתי הוא מתאפשר. האופרטור ∇ גוזר לפי הkorודינטאות r ולא r' , לכן ניתן להכניס את הדיברגנס לתוך האינטגרל: $\nabla \cdot (\vec{f}\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \nabla \cdot \vec{F}$, נקבל:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cancel{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}')} \quad \text{לא תלוי בקורודינטות הנזירה} \quad (95)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \int \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') d^3 r \quad (96)$$

נדיר אופרטור ∇' , רואים שמתקיים $\nabla'(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}) = -\nabla'(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|})$ נציב בחזרה בביטוי ל $\nabla \cdot \vec{A}$:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \int \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') d^3 r$$

נשתמש שוב בזהות הוקטורית ממוקדם, הפעם בכיוון הפוך, על מנת לבצע "אינטגרציה בחלקים" (בגרסתה הוקטורית). קלומר נציג $\nabla \cdot (\vec{f}\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} - f \nabla \cdot \vec{F}$ ונקבל

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r + \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cancel{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}'))} d^3 r$$

(נראה כתעט למזהיר התבטל) זהה תוצאה כללית. עכשו נראה מה צריך לדרש מ(r) J כדי שנקבל את הקשר שלנו. קודם כל נגביל את עצמנו למגנטוסטטיקה כולם הרם J קבוע בזמן.

דרישה 1: מגנטוסטטיקה. אכן משימור המטען מותקיים

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}$$

ולכן האיבר השני נופל.

דרישה 2: $\rightarrow 0 \rightarrow 0$ (r) J כאשר $\infty \rightarrow r$. נוכל להשתמש במשפט הדיברגנס על האיבר הראשון ונקבל אינטגרל משטחי על משטח באינסוף. וכך גם האיבר הראשון יתאפשר ונקבל $0 = \vec{A} \cdot \nabla$ קלומר עבור \vec{J} התאפס באינסוף וזרמים קבועים מותקיים מיידית כיוול קולון.

קלומר ALSO 2 דרישות מספיקות על \vec{J} כדי לקבל באינטגרל (93) את כיוול קולון.

5.7 השדה המגנטי שיוצרת התפלגות זרם כשלשי בכיוול קולון

בהינתן (\vec{r}) J המתאפס באינסוף וגם קבוע בזמן כיוול קולון.

$$\vec{B} = \nabla \times A = \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (97)$$

נשתמש בזהות:

$$\nabla \times (\vec{f}\vec{F}) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f \nabla \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times J(\vec{r}') d^3 r' + 0$$

כאשר האיבר השני התאפס כי J אינו תלוי ב r . הפעם נחשב במפורש:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2} &= -\frac{1}{2} \frac{2(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

נציב ונקבל:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'} \quad (98)$$

הערה: הוכחנו שלכל שדה מגנטי קיים פוטנציאלי $\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. מיד אחרי המשכנו למןות דרישות על \vec{J} שרק עבורי ניתן לקיים את כיוול קולון. מה קרה בזה?

למעשה בהוכחה לקיים פוטנציאלי שמקיים את הכיוול השתמשנו בכך שהמagnetostatic. נבין זאת יותר בהמשך.

5.8 מציאת הפונצייאלי הוקטוררי בהינתן השדה

אנחנו רוצים למצוא וקטור המקיים:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (99)$$

נשים לב ש מבחינה אלגברית זהה למה שדרשנו מהשדה המגנטי באופן כללי:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (100)$$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'} \quad (101)$$

5.9 חוק ביו-סבר (1820)

נסתכל על מקטע קצר של תיל מוליך זרם I בעל שטח חתך: a: צפיפות הזרם תהיה $J = \frac{I}{a}$, אלמנט הנפח $d^3 r' = adl$ נקבע כי:

$$\vec{J} d^3 r' = \frac{I}{a} \hat{J} \cdot adl = Id\vec{l}$$

נציב בפתרונו ל \vec{A} בכיוול קולון:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(r') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int \frac{Id\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (102)$$

לכן הדיפרנציאלי הינו

$$d\vec{A} = \frac{Id\vec{l}}{c |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (103)$$

נמצא את התרומה של $d\vec{A}$ ל- $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{Id\vec{l}}{c |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{I}{c} \left[\vec{\nabla} \times d\vec{l} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times d\vec{l} \right] \quad (104)$$

האיבר הראשון מהתאפס כי $d\vec{l}$ תלוי רק ב- \vec{r}' . לבסוף, קיבלנו את חוק ביו-סבר:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}} \quad (105)$$

5.10 דוגמה - תיל זרם סופיעבור תיל זרם סופי עם זרם I

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{l} \times (\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (106)$$

צריך סרטוט!
nocell לדעת מיד מה הכוון של השדה המגנטי - כל רכיב $d\vec{l}$ תורם בכיוון $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')$ ונפעיל חוק יד ימין (באופן כללי מתקובל הכוון המשיקי).
נעשה חישוב עזר

$$|d\vec{l} \times (\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}'})| = |dl| \cdot 1 \cdot \sin(\alpha) \hat{\varphi} = |dl| \cos(\theta) \hat{\varphi} \quad (107)$$

1

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \quad (108)$$

נותן

$$\frac{dl \times (\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{dl \cos^3 \theta}{r^2} \hat{\varphi} \quad (109)$$

נעשה החלפת משתנה מ dl ל $d\theta$

$$\frac{dr'}{d\theta} = \frac{r}{\cos^2 \theta} \Rightarrow |dl| = |dr'| = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (110)$$

ונקבל

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \hat{\varphi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{r} d\theta = \frac{I}{cr} \hat{\varphi} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (111)$$

ניקח גבול לתיל אינסופי. כלומר הזרות שוואות ל $\pm \pi/2$. נקבל

$$\vec{B}_\infty(\vec{r}) = \frac{2I}{cr} \hat{\varphi} \quad (112)$$

5.11 טבעת זרם

נתונה טבעת זרם ברדיוס b וזרם I . היא מונחת במישור xy . מה שדה המגנטי על ציר הסימטריה (לאורך ציר \hat{z})?
כਮובן נקבל שהכח כפוי מעלה (בכיוון \hat{z}) משיקולי סימטריה וחוק יד ימין.

$$d\vec{B}_z = \frac{I}{c} \frac{d\vec{l} \times (\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \hat{z} = \frac{I |dl|}{c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{b}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (113)$$

נבצע אינטגרציה ונקבל תשובה

$$\vec{B}_z(z) = \int dB_z = \frac{2\pi}{c} I \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (114)$$

5.12 שדה מגנטי של סליל זרם

לא יודע אין לי כוח אני רוצה לישון

5.13 השראהמייקל פאראדיי שם לב שיש אסימטריה בתיאור של משוואות מקסול הסטטיים מכיוון ש \vec{J} , ρ אינם בלתי תלויים

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} t = \nabla \cdot J$$

5.13.1 הניסויים של פארדי

ניסוי 1: מוט מוליך מונח במישור y-x ניז אוטו בכיוון \hat{y} תחת שדה מגנטי בכיוון \hat{z} : $\vec{F}_m = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$. על פי כלל יד ימין, כוח לורנץ יגרום לטען חיובי להצטרף בקצת $x+$ של המוט ובהתאם מטען שלילי יצטרף ב- $x-$. וכך יתפתח שדה חשמלי בכיוון \hat{x} – בموוי.

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{q}{c} V_y |B| \hat{x} \quad (115)$$

עד שיווצר ש"מ $F_x = QE_x + \frac{q}{c}|V||B| = 0 \Rightarrow E_x = -\frac{|V||B|}{c}$ לשדה החשמלי המושרה שמתפתח בגלל תנועה תחת שדה מגנטי נקרא "שדה מושרה".

ניסוי 2: פארדי החליף את המוט בלולאה מלבנית. פארדי מצא דרך להזירים זרם כלולאה ע"י שדה מגנטי בכיוון \hat{z} שהולך ודווקע בכיוון \hat{y} הכוחות על הצלעות השונות בכיוון x אבל הכוח על הצלע שעובר דרך שדה מגנטי חזק יותר, הכוח חזק יותר. וכך יתפתח זרם I נגדר כיוון השעון. פארדי חישב מה הכא"מ שיתפתח בלולאה:

$$\Delta\phi = \epsilon = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{qc} \left[0 + lqVB_B(y_i) + 0 - lqvB_D(y_2) \right] \quad (116)$$

$$\Delta w = \Delta\phi \cdot q = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \epsilon = \frac{lv}{c} [B(y_i) - B(y_2)]$$

פארדי מחשב גם את השינוי בשטף המגנטי דרך הלולאה $d\vec{a} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{a}$ בזמן dt הלולאה התקדמה מרחק $dvdt$ והרוואה שטוף $lvdt$ מימין והפסידה שטוח משמאלי $lvdt$ משמאלי יותר גדור בהס'כ השטוף דרך הלולאה ירד:

$$\begin{aligned} d\Phi &= B(y_2)lvdt - B(y_1)lvdt \\ \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} &= lv [B(y_2) - B(y_1)] \end{aligned}$$

5.14 השראה בלולאה בצורה כלשהי

נסתכל על לולה C שנעה במהירות \vec{v} , כוח לורנץ פועל על כל נקודה בלולאה: $\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$. הכא"מ בלולאה:

$$\epsilon = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{qc} \oint q\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \oint_C \vec{v} \times d\vec{l} \cdot \vec{B} \quad (117)$$

נחשב את השטוף בהפרשי זמנים

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{s1} \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ \Phi(t+dt) &= \int_{s2} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{s1} \vec{B} \cdot d\vec{a} + \int_{\text{יציאה}} \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ d\phi &= \Phi(t+dt) - \Phi(t) = \int_{\text{חרזואה}} \vec{B} \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\dots \Rightarrow \epsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}} \quad (118)$$

5.15 חוק פארדי

$$\boxed{\epsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}} \quad (119)$$

5.15.1 בהציג דיפרנציאלית

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (120)$$

5.16 מעגל RC

נדיר משறן – סליל במעגל העובר בו זרם ויוצר שד

5.17 חוק לנץ

"כלל אצבע" שיעזר לנו לזכור באיזה כיוון מושריה כא"מ בollowah bi' לחשב את הכוח על המטען עפ"י חוק פארדי. כיוון הכא"מ המושריה בollowah הוא תמיד כך שהשدة המגנטי שהוא יוצר מפעילה על השינוי בשטף המגנטי שהשרה אותו, "מתכוון" לשימוש בחוק לנץ:

1. באיזה כיוון משתנה השטף? השدة המושריה יהיה בכיוון הפוך.
2. זרם באיזה כיוון ייצור את השدة המושריה לפי כלל יד ימין?

5.17.1 זרמי מערבולות

נסתכל על משטח מוליך שנע בינו לבין השדה מגנטי באיזור תחום מרחב. באזור שנכנס לשדה השטף יגדל ולכון יושרה על המשטח זרם שייצור שדה מגנטי בכיוון $Z+$ באזור שיוצאה מהשדה מצד ימין השטף יקטן ולכון יושרה על המשטח זרם שייצור שדה בכיוון $Z-$ פעול כוח לורנס בין הזרמים המושרים לשדה החיצוני

9 קשר בין א"מ ליחסות פרטית

נסתמן על שלוש תוצאות יסוד מהתורת היחסות הפרטית:

1. כיווץ הרחב

$$\Delta x' = \frac{\Delta x_0}{\gamma} \quad (121)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (122)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (123)$$

2. חיבור מהירותיות

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}} \quad (124)$$

3. טרנספורמציה לורנץ

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (125)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \quad (126)$$

כדי למצוא את איך \vec{E} , \vec{B} עוברים טרנספורמציה, נסתכל על דוגמא בה יש שני משטחים טעוניים אינסופיים במישור XY, עם צפיפות מטען $\sigma \pm$ נעה ב מהירות v_0 בכיוון \hat{x} במערכת ייחוס F השדה החשמלי בין הלוחות σ . השדה המגנטי בין הלוחות $B_z = \frac{2\pi}{c}\sigma v_0$

$$B = \frac{2\pi}{c}\sigma v_0 - \frac{2\pi}{c}(-\sigma)v_0 = \frac{4\pi}{c}\sigma v_0 \quad (127)$$

מעבר למערכת F' הנעה ב מהירות $\hat{x} = v\hat{x}$ ביחס למערכת F. מהירות הלוחות במערכת F':

$$V'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}} = c \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \quad (128)$$

כדי למצוא F' נמצא קודם את צפיפות המטען במערכת המנוחה v_0

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\gamma_0} p x \quad \gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (129)$$

נשים לב שבמעבר ממוקד המנוחה למערכת F המרחיב התכווץ ולבן הצליפות עליה.Cut, נוכל לעשות טרנספורמציה לורנץ נוספת ממערכת המנוחה של הלוחות למערכת F'

$$\beta'_0 = \frac{v'_0}{c} = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta \beta_0} \Rightarrow \beta'^2_0 = \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta \beta_0} \right)^2 \Rightarrow 1 - \beta'^2_0 = \frac{1}{\gamma^2 \gamma_0^2 (1 - \beta_0 \beta)^2} \quad (130)$$

(131)

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2_0}} = \gamma \gamma_0 (1 - \beta_0 \beta) \Rightarrow \sigma' = \sigma \gamma (1 - \beta_0 \beta) \Rightarrow \sigma' v'_0 = \sigma \gamma (1 - \beta \beta_0) \cdot \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} = \sigma \gamma (v_0 - v)$$

עכשו יש ברשותינו את המטענים והזרמים במערכת F'. נוכל למצוא את השדות:

$$E'_y = 4\pi \sigma' = 4\pi \sigma \gamma \left(1 - \frac{v_0}{c} \frac{v}{c} \right) \quad (132)$$

$$\beta'_z = \frac{4\pi}{c} \sigma \gamma (v_0 - v) \quad (133)$$

סה"כ קיבל:

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z), B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad (134)$$

כבר ממש מוכיח את טרנספורמציה לורנץ. אילו היינו לוקחים לוחות במישורים אחרים היינו מקבלים קשרים דומים בין כל רכיבי השדות במערכת F ומערכת F'. השdots הא"מ הם לוקאליים, כלומר הערכאים של E,B בנקודת \vec{r} במערכת F' קובעת ח"ח את \vec{E}' , \vec{B}' בנקודת \vec{r} במערכת F'.
נסכם את הטרנספורמציה שעוברים השdots במקורה כללי שבו ממערכת F' נעה ב מהירות $\hat{v} = u\hat{x}$ ביחס למערכת F:

$$E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad E'_z = \gamma(E_z - \beta B_y) \quad (135)$$

$$B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma(B_y - \beta E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad (136)$$

7 הפתרונות למשוואות מקסול ברייק - גלים א"ם

נציר את המשוואות מקסול עבור $\rho = 0$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (137)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (138)$$

נחשב curl למשוואת פארדי: אונ' שמאל:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (139)$$

אונ' ימין:

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (140)$$

אם נעשה את אותו טיפול לחוק אמפר:

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (141)$$

קיבלו ש MDR - ש שמשוואות גלים. נשים לב שהמשוואות לינאריות ולכן אם E_1, E_2 פתרונות אז גם $E_1 + E_2$ פתרונות או מינ' c הינו פתרון. נראה מיד שהפתרונות למשוואות הגלים מתארים הפרעה המתקדמת ב מהירות c . כאשר מקסול מצא את הפתרונות הוא שם לב ש- c היא מהירות האור שנמדדה כמה שנים קודם בניו ז'ז'ה ("Fizeau", מכאן הבין מקסול שהוא גל אלקטרומגנטי).

7.1 גל א"ם מיישורי

מקורה פרטני חשוב: גל מיישורי - גל שבו כל רכיבי השדות תלויים רק בקוודיננטה אחת (למשל ציר ה \hat{x} \Leftarrow כל הנגזרות לפי y, z يتבטלו): חוק גאוס:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

אין מונופולים מגנטיים:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}}$$

חוק פארדי:

$$(\nabla \times \vec{E})_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla \times \vec{E})_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$(\nabla \times \vec{E})_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

אם נעשה אותו דבר לחוק אמפר נקבל:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

נעבור לבעה שונה שבה $E_x = 0, B_x = 0$, תמיד נוכל בסוף להוסיף את קבועים של הבעה המקורית:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad I$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad II$$

שני הסתומים מתארים שני פתרונות בלתי תלויים שקוראים להם "קיטוב". נתחיל עם הסט הראשון, נגזר את המשוואת הראשונה ונציב בשנייה:

$$\frac{\partial E_y^2}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

נستכל על פתרון אפשרי ל E_y

$$E_y(x, y) = f(\gamma) = f(x - ct) \quad \gamma \equiv x - ct$$

אם גוזרים ניתן לראות כי אכן פתרון למשוואת המשפחה $f(x - ct)$ מותארת הפרעה השומרת על הצורה שלה במרחב ומתקדמת במהירות c : B_z מ כתוב על ידי סט המשוואות הראשון ולכז

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = f' \Rightarrow cB_z(x, t) = f(x - ct)$$



גם $g(x + ct)$ פותר את משוואת הגליםiao. g יתאר הפרעות שמתקדדים בכיוון \hat{x} . אם נפתרו את הסט השני, נקבל עוד זוג פתרונות כאלה בלתי תלויים, נקרה להם: $G(x + ct), F(x - ct)$. נסכם:

$$E_z(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (142)$$

$$B_y(x, t) = -F(x - ct) + G(x + ct) \quad (143)$$

$$E_y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (144)$$

$$B_z(x, t) = -f(x - ct) - g(x + ct) \quad (145)$$

$$E_x = 0 \quad B_x = 0 \quad (146)$$

כיווני השדות של גל א"מ מישורי נستכל על מקרה פרטי 1: גל מישורי שמתקדם בכיוון \hat{x} עם שדה חשמלי רק בכיוון \hat{y} .

$$E_y(x, t) = f(x - ct) \quad E_z(x, t) = 0$$

כאשר $B_z(x, t) = f(x - ct) \Rightarrow$ הכיוון של השדה המגנטי הינו $0, B_y = 0, G = 0, F = 0$, c בלבד, $E_z(x, t) = F(x - ct), E_y(x, t) = 0$ מה כיון השדה המגנטי?

$$B_y(x, t) = -F(x - ct) \quad (147)$$

כלומר רק נגד ציר \hat{y} . בשני המקרים:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 .$$

2. כיוון התקדמות הגל מקיים כלל יד ימין עם המכפלה של השדות

$$\hat{n} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E} \times \vec{B}|} \quad (148)$$

אלו שתי תכונות כלליות של גל א"מ מישורי.

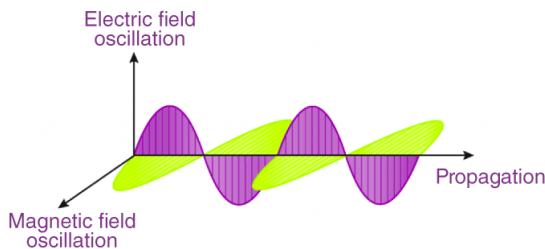
7.2 מקרה פרטי: גל א"ם בקיטוב לינארינבחר f, g, F, G :

$$f = A \cos(\phi) \cos(k(x - ct)) = A \cos(\phi) \cos(kx - \omega t) \quad (149)$$

" k " מספר הגל"

$$F = A \sin(\phi) \cos(k(x - ct)) = A \sin(\phi) \cos(kx - \omega t) \quad (150)$$

השدة החשמלי מבצע תנודות על קו במישור z-y עם זווית ϕ ביחס ל- \hat{y} . $g = 0, G = 0$

ELECTROMAGNETIC WAVES

איור 7: גל א"ם, בסוגו ניתן לראות את האופי של השדה החשמלי, בצד שמאל, בצד ימין ניתן לראות את השדה המגנטי וציר התקדמות בהם הגים מתקדמיים ב מהירות האור. ניתן לראות כאן הדוגמה.

7.3 מקרה פרטי: קיטוב מעגליעבור $g = 0, G = 0$

$$f = A \cos(kx - \omega t) \quad F = A \sin(kx - \omega t) \quad (151)$$

$$\vec{E} = A [\cos(kx - \omega t)\hat{y} + \sin(kx - \omega t)\hat{z}] \quad (152)$$

השדה החשמלי מקבלים ערכיהם הנופלים על מעגל במישור z-y.

7.4 מקרה פרטי: גל א"ם מישורי עומד

נסתכל על שני גלים מישוריים זהים הנעים לאורך ציר \hat{x} בכיוונים מנוגדים, עבור $g = 0, E_1 = 0, F_1 = 0$

$$E_{1y} = f_1(x - ct) = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right] \quad (153)$$

$.k = \frac{2\pi}{\lambda}$ כאשר $f_2 = 0, F_2 = 0, G_2 = 0$

$$E_{2y} = f_2(x - ct) = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right] \quad (154)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \hat{y} E_0 \left[\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) \right] = \hat{y} E_0 \left[\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right) \right] \quad (155)$$

קבענו מכפלה של חלק תלוי בזמן וחלק תלוי במרחב, זהו "gel עומד", בכל נקודה x נקבל שדה E_y : משתנה בזמן באמפליטודה $(\frac{2\pi x}{\lambda})$ ובנקודה $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots, E_y = 0, \pi, 2\pi, \dots$ ומתקבל $\widetilde{E}_0 = 2E_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. ראיינו שלמרות שהאיזור עם $J = 0, \rho = 0$ נראה במבט ראשון "משעטם", תנאי השפה עלי יכולם ליצור פתרונות מעניינים.

7.5 החזרה של גל א"מ ממוליך

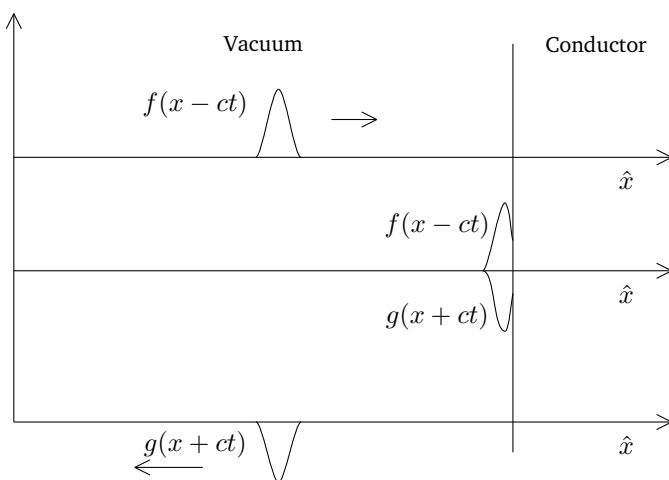
תנאי השפה שכופה לווח מוליך על השדה החשמלי:

$$E \perp = 4\pi\sigma$$

$$E_{||} = 0$$

עבור גל א"מ שיפגע במוליך, הרכיב המקביל לשפת המוליך יאולץ להתאפס. נסמן ב- \vec{k} (מספר הגל) את כיוון התקדמות הגל. אפשרי לפתור את המערכת כרגיל, אך קל הרבה יותר לכפota את תנאי השפה באמצעות ייצוג השדות במספרים מרוכבים - את זה נעשה בקורס בಗלים (סמסטר הבא).

בכל מקרה, נבנה מערכת ציריים כך ש \hat{x} מאונך למשטח המוליך ו- \hat{y} מקביל אליו. נניח פולס ב- E_y מתudson בכיוון המוליך. כאשר הוא יגע למוליך, על מנת לכפota שהרכיב המקביל מתאפס, המוליך ייצור שדה המאפס את רכיב זה.



פולורייד: מקטב פלסטי זול לאור נראה.

ניסוי: נניח של גל א"מ יש קיטוב אקרוי במישור $y - x$. והוא עובר במקטב, כך שימושיר רק את רכיב y . אז לאחר הקיטוב נראה שדה שהינו רק בכיוון y .

בוצע ניסוי שני: מציבים שני מקטבים המקבילים בכיוונים מאונכים. אז השדה החשמלי שנמדדד מאחוריהם יהיה אפס.

בוצע ניסוי שלישי (مفתייע): נציב שלושה מקדים, ובין כל שניים מדידת שדה. כל מקטב יקטב בזווית של 45 ביחס לקודמו. נצפה שהוא נקבל שהשדה מתאפס. אך בפועל חלק מהאור עדיין יעבור! זה בגלל שכל מקטב לוקח את היחסן השדה על הכיוון שבו הוא מקטב, וכך לאחר המקטב האמצעי מבין השלוש יש רכיב בכיוון של המקטב השלישי.

7.6 גלים בחומר דיאלקטרי

באופטיקה לא משתמשים ב- CGS , על כן נבעוד ב- SI . ראיינו שבחומרים דיאלקטריים השדה החשמלי נחלש בכך. זה קורה גם עבור השדה המגנטי $\vec{B} \rightarrow \frac{1}{\mu} \vec{B}$ תכוניות שמייקמים את תוכנות אלה נקראים חומרים לינארים.