拉普拉斯详解 —款为运算而生的工具

① 收敛域

eg.1

考虑，$x(t)=e^{\alpha t}u(t)$　$S=\sigma+j\omega$

$$\mathcal{L}[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha t}u(t)e^{-st}dt.$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{(\alpha-s)t}dt=\frac{1}{\alpha-s}\left(\lim_{t\to\infty}e^{(\alpha-s)t}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-s}\left(\lim_{t\to\infty}e^{(\alpha-\sigma)t}\cdot e^{-j\omega t}-1\right)$$

$e^{-j\omega t}\Rightarrow$ 关乎振荡　$e^{(\alpha-\sigma)t}$. 关乎收敛

其中 $\sigma=Re\{S\}$ 只有当 σ 使 $e^{(\alpha-\sigma)t}$ 是负指数幂. 则收敛.也不振荡

① $\alpha-\sigma<0$　$\sigma>\alpha$　$\lim_{t\to\infty}e^{(\alpha-\sigma)t}e^{-j\omega t}=0$

原式 $=\frac{1}{S-\alpha}$

② $\alpha=\sigma$　$\lim_{t\to\infty}e^{(\alpha-\sigma)t}e^{-j\omega t}=e^{-j\omega t}\Big|_{t=\infty}$

振荡

③ $\alpha>\sigma$　无穷+振荡

① 情况是合理的 $\sigma>\alpha\Rightarrow Re\{s\}>\alpha$ 是收敛域.

ROC

上述例子, 是因果信号 (0时刻以前没有非零取值) 只需满足 $\sigma>\alpha$ 使复指数实数部分 $(\alpha-\sigma)<0$ 即收敛

eg2. 反因果: $u(-t)$

$$x(t)=e^{\beta t}u(-t)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-st}dt=\left.\frac{e^{(\beta-s)t}}{\beta-s}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{\beta-s}\left[1-\lim_{t\to-\infty}e^{(\beta-s)t}\right]$$

$$=\frac{1}{\beta-s}\left[1-\lim_{t\to\infty}e^{(\beta-\sigma)t}\,e^{-j\omega t}\right]$$

① $\sigma>\beta$ $\beta-\sigma<0$ 无界

② $\sigma=\beta$ 振荡

③ $\sigma<\beta$ $\beta-\sigma>0$ 有界 $\frac{1}{\beta-s}$

与先前认知不同的是 趋负时，$\beta-\sigma$不能为负，否则发散，因果与否要具体分析

注 在$x(t)u(t)$ 若要求双边拉氏变换.其与单拉一样.

但 $x(t)u(-t)$ 则不是

eg3. 双边信号 拆开分析 $\begin{cases}\text{因果}\\\text{反因果}\end{cases}$

如 $x(t)=e^{\alpha t}u(t)+e^{\beta t}u(-t)$

会卡出2个域 对因果: $\sigma>\alpha$.

对反因果 $\sigma<\beta$ $\therefore$ $\alpha<\sigma<\beta$

前提是 $\alpha<\beta$ 否则不存在

②常见变换对由来. 算拉变, 越机得收敛域

1) $u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}\Big|_0^{\infty}}{-s} = \frac{\lim_{t\to\infty} e^{-st} - 1}{-s}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} - 1}{-s}$$ 只需 $\sigma > 0$ $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

$\sigma = Re(s) > 0$ 收敛域.

2) e^{-at}, $e^{-at}u(t)$. $e^{-|a|t}$.

在 $t>0$ 内, 单边拉氏 结果是一样的

双边就不一定了 但这并不影响拉氏的方便

因为系统常分析 $t \geq 0$ 的状况

规定下限为 0_- 后期有再说. 拉氏可处理

$0_- \to 0_+$ 的跳变

3) $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ $Re(s) =$ 任意