信号与系统

第四讲卷积与LTI系统的时域分析

小

本部分不稳定

杜清河

信息与通信工程学院

Email:

duqinghe@mail.xjtu.edu.cn

2025春

对应教材章节

- 2.0-2.3、2.5-2.6

0入—0出：全0/全0

只对输入做出响应

时域. 延迟多少，不变，波形不变

本课程难的部分第一个

会不适应

离散&连续一块讲

很难"十分"理解

给一个完全没学过的人讲明 10分

内容提要

线性时不变（本身成立）

因果

- 从筛选性质到LTI系统的时域分析
- 卷积的运算性质 积分表达式，结合系统
- LTI系统的基本性质 四个

内容提要

- ❖从筛选性质到LTI系统的时域分析
- ❖卷积的运算性质
- ❖LTI系统的基本性质

为什么要引入信号分解

Δt. 单位冲激 * 当时函数值 分治思想.

- 若线性时不变系统的输入信号由若干基本信号相加而成，那么系统的输出信号就是由系统对这些基本信号的输出相加而成。

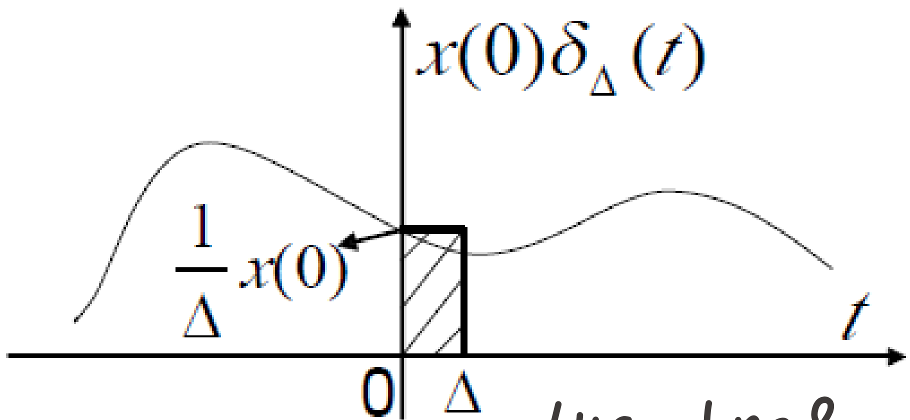
分解　加工 组合

- 若所有信号都可以表示成某基本信号的加权组合，那么只需知道LTI系统对该基本信号的输出，就可以知道系统对所有信号的输出。
- 信号分解对于线性时不变系统的分析具有重要的意义。

筛选性　窄脉冲只选择有值的

带宽有限. 特定Hz

单位冲激函数的筛选性质



1us. 1ns?

$x(t_0)$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$x(t)\delta(t_0-t) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

过积分器 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0-t)\,dt$ 偶函，一个意思

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)\,dt$$

$t_0 = t, t = \tau$

t=τ时刻，无限个τ.

权重

时移到

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(\tau)\delta(t-\tau)}_{幅值}\,d\tau$$

单位冲激响应与卷积积分

$$\delta(t)\rightarrow h(t)$$ 单位冲激响应(测出来的)

时不变性： $\delta(t-\tau)\rightarrow h(t-\tau)$ 形式延迟

齐次性： $x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\rightarrow x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 幅度改变

可加性： $\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\xrightarrow{Sys}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

(线性) 输出信号

$x(t)$

$y(t)$

卷积(面积

分割 $x(t)$

· 乘以系统固有的 $h(t)$

单位冲激响应与卷积积分

单位冲激响应

$$\delta(t) \to h(t)$$

t=τ时刻 冲激的响应

一个x(t) 输入

$$x(t) \to y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

卷积积分

$$\boxed{x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

LTI 帮我们定义积分

单位冲激响应可以唯一地确定LTI系统的特性

卷积的计算步骤——连续时间系统

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)dx$

- 对于给定t_0，如何计算$y(t_0)$？
  - 第一步：将$h(\tau)$反转得到$h(-\tau)$
  - 第二步：将$h(-\tau)$向右平移t_0单位得到$\boxed{h(t_0-\tau)}$

    为什么向右平移？

    因为$h(t_0-\tau)=h(-(\tau-t_0))$.

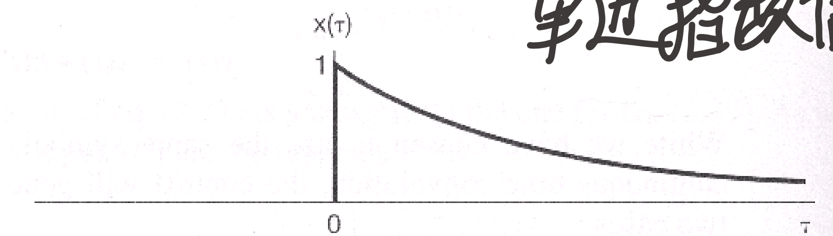
    注意：t_0为正，向右平移；t_0为负，向左平移；
  - 第三步：将$h(t_0-\tau)$与$x(\tau)$相乘，并在$(-\infty,+\infty)$区间对其积分。

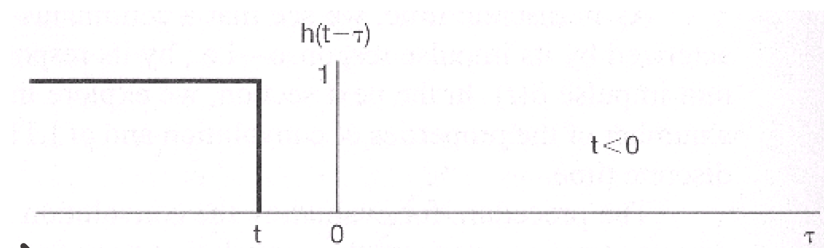
计算卷积

➢ 例1. 求以下两个信号的卷积：

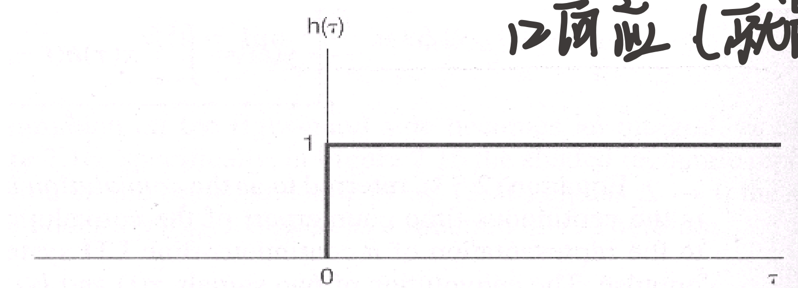
$$x(t)=e^{-\alpha t}u(t),a>0 \qquad h(t)=u(t)$$

单边指数信号

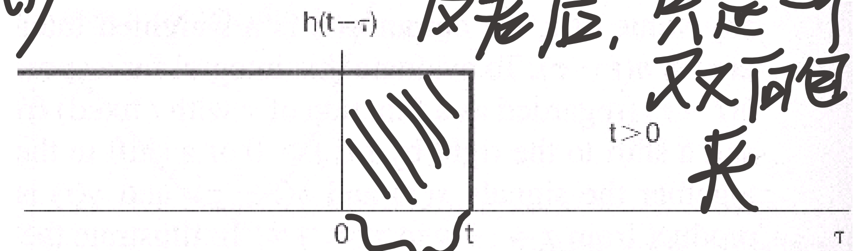




冲激响应（就是u(t)）



反卷后，只是一个双向夹



$t<0 \Longrightarrow y(t)=0$

h(t)=1.

$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau = \cdots$

t>0 才成立

$t\geq 0 \Longrightarrow y(t)=\int_0^t e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$

单位脉冲函数的筛选性质

$x[n]$

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

书上有一些复杂逻辑
没必要完全走老一辈の路，

$$\Downarrow$$

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

单位脉冲响应与卷积和

冲激响应 特殊

$$\delta[n] \to h[n]$$ 一般性响应

时不变性： $\delta[n-k] \to h[n-k]$ 时移k个单位

齐次性： $x[k]\delta[n-k] \to x[k]h[n-k]$

可加性： $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$

$x[n]$

输 $x[n]$

出 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$

$y[n]$

单位脉冲响应与卷积和

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

$$x[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\boxed{x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

符号:共轭* ~ 卷积*

单位脉冲响应可以唯一地确定LTI系统的特性

卷积的计算步骤——离散时间系统

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

一样

❖ 对于给定n_0，如何计算$y[n_0]$?

- 第一步：将$h[k]$反转得到$h[-k]$
- 第二步：将$h[-k]$向右平移n_0单位得到$h[n_0-k]$

  为什么向右平移?

  因为$h[n_0-k] = h[-(k-n_0)]$.

  注意：n_0为正，向右平移；n_0为负，向左平移；
- 第三步：将$h[n_0-k]$与$x[k]$相乘，并在$(-\infty,+\infty)$区间对其积分。

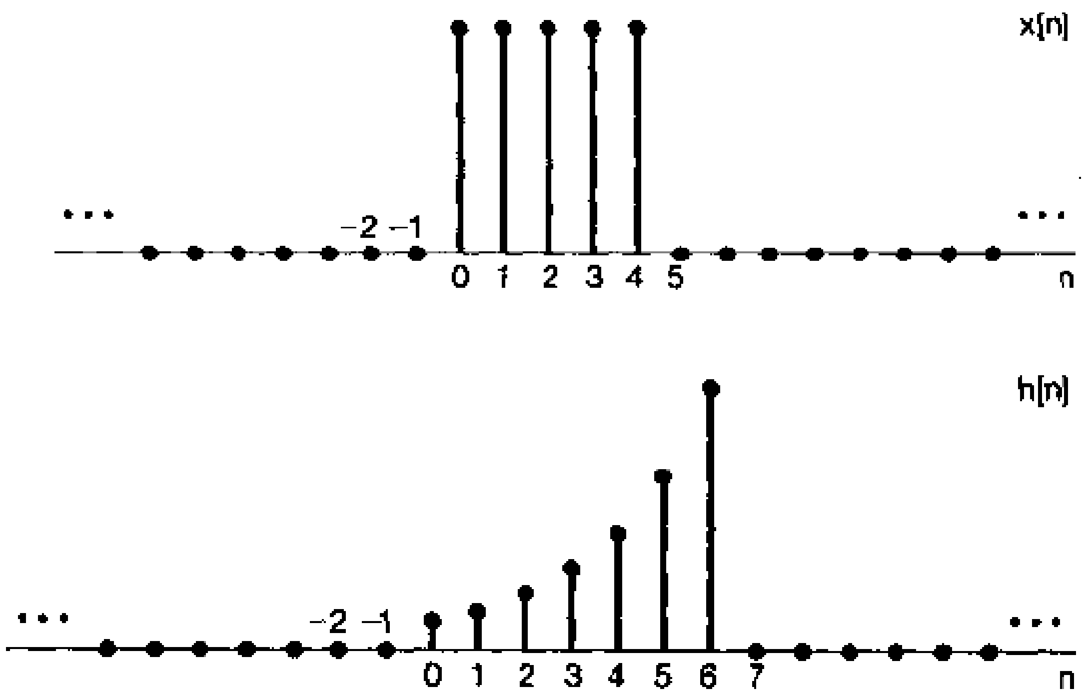
计算卷积

- 例2. 求以下两个信号的卷积：

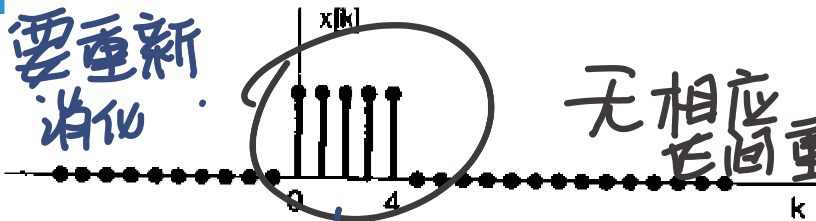
响应.

7个点、

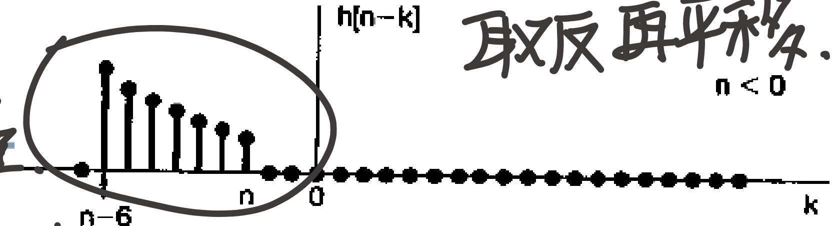
$$x[n]=\begin{cases}1, 0\le n\le 4\\ 0, \text{else}\end{cases}\qquad h[n]=\begin{cases}\alpha^{n}, 0\le n\le 6\\ 0, \quad \text{else}\end{cases}$$



要重新消化。



无相应区间重叠

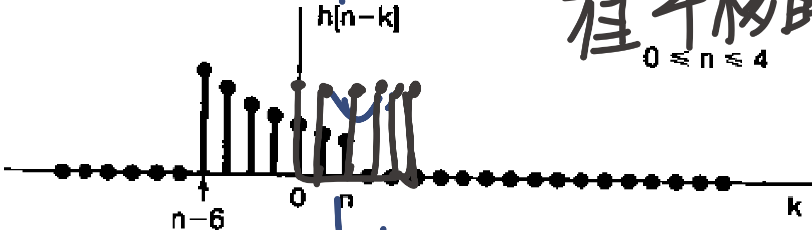


取反再平移。

看平移的参数

分开，n取 n<0?

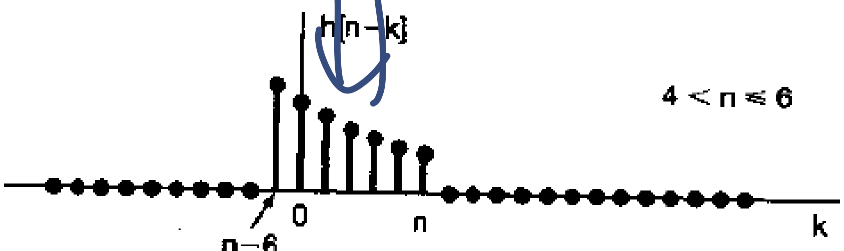
$$y[n]=0, n<0$$



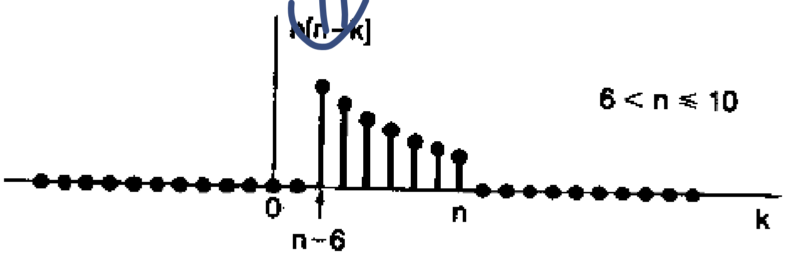
h[n-k]

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\boxed{\alpha^{n-k}}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, 0\le n\le 4$$

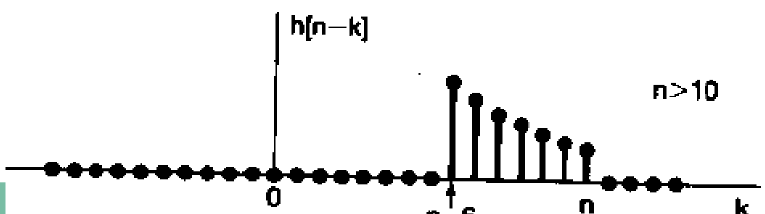
等比求和



$$y[n]=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, 4<n\le 6$$



$$y[n]=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}, 6<n\le 10$$



$$y[n]=0, n>10$$

筛选性质

$= x(t)$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$$

后来δ(t)会被某些奇异函数代替

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]=x[n]*\delta[n]$$

任何信号与单位冲激/单位脉冲信号的卷积仍等于该信号本身

卷冲激=没卷

⇨ 恒等系统满足：$h[n]=\delta[n]$　$h(t)=\delta(t)$

$\sum f[n]\delta[n]$ 其实恒等　离　连

几种重要系统的冲激/脉冲响应

$x(t-t_0)=x(t)*\delta(t-t_0)$

- **时移系统：** 获得单位冲激响应 $h(t)$

$$y(t)=x(t-t_0) \Longrightarrow h(t)=\delta(t-t_0)$$

结果推脉响应 $h(t)$

但可以是时移

$x(t)$自 $=x(t)*\delta(t)$

但 $x(t-t_0)=x(t)*\delta(t-t_0)$

- **累加器与积分器：**

这是一个 $h[n]$ 系统

$y[n]=h[n]$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \Longrightarrow h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=u[n]$$

求和上限差别

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \Longrightarrow h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

我想要实现 $y[n]=\Sigma$ 的效果 那么可等效为 $x[t]*h[n]$.

- **差分器与微分器：**

错位了 而 $h[n]$ 就是上述的 $h[n]$ $h(t)$

$$y[n]=x[n]-x[n-1] \Longrightarrow h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}=x'(t)$ $=x(t)*\delta'(t)$

时移

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow h(t)=\delta'(t)=u_1(t)$$

冲激偶 画出波形 (不重要)

这个不是 $u(t)$

微分器

内容提要

- 从筛选性质到LTI系统的时域分析
- 卷积的运算性质
- LTI系统的基本性质

交换律

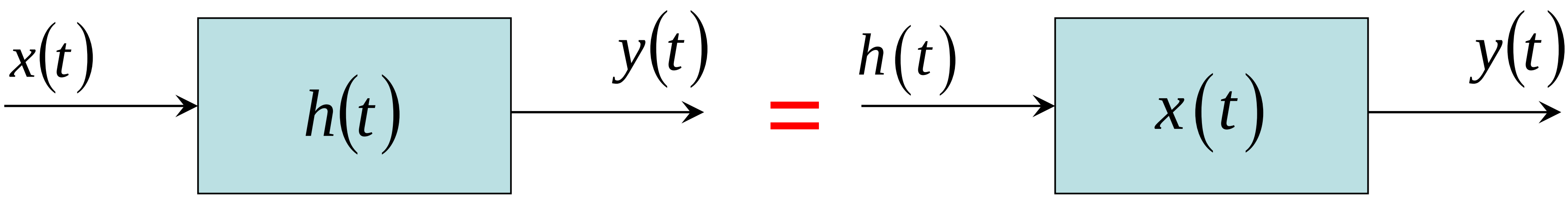
深刻道理. 不应推导. 系统本性

- 数学描述

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

- 物理意义 系统可以互换.



卷积的定义再思考

输入$x(t)$ $\rightarrow$ 系统$h(t)$ $\rightarrow$ 输出$y(t)$

线性时不变系统究竟对于输入信号做了些什么样的操作？

分解 → 冲激 → 响应 → 组合，加权.

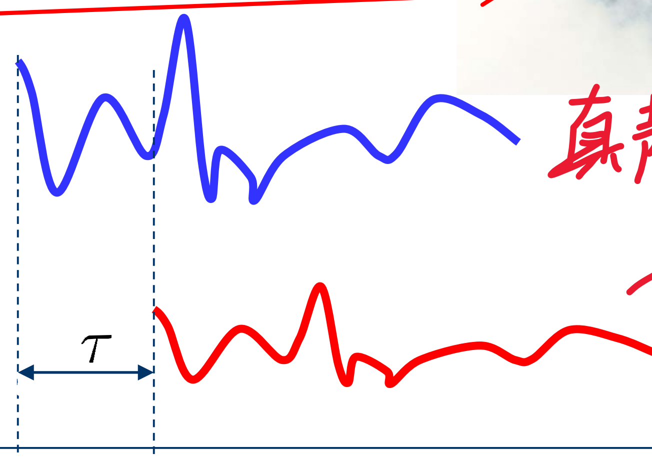
（黑箱） 等效

整体

LTI系统示例

回声

形式一样，强度减弱了
衰减后回来.



$x(t)$ 真声

幅度↓

$+\ hx(t-\tau)$

τ

→录了又播

反射路径
无穷
时延不同

交换律
角度看待系统

两条路径 $y(t) = x(t) + hx(t-\tau)$ 延迟，版本不同

延迟.衰减.叠加.

无数条? $y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h(\tau_i)x(t-\tau_i) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

系数 →参考时间

$$y(t) \triangleq x(t) * h(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

LTI系统示例

图像：模糊的图像、近视、重影

清晰

平移 叠加

缩放

h(t)系数

清晰

清晰

卷积的定义再思考

☆要做个

逐点 整体 无数组合. 延时

$$y(t) \triangleq x(t) * h(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x(\tau)}\, h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\,d\tau$$

整

两种定义表达式的含义？

信号分解
系统整体

信号整体
系统分解

分配律

➢ 数学描述

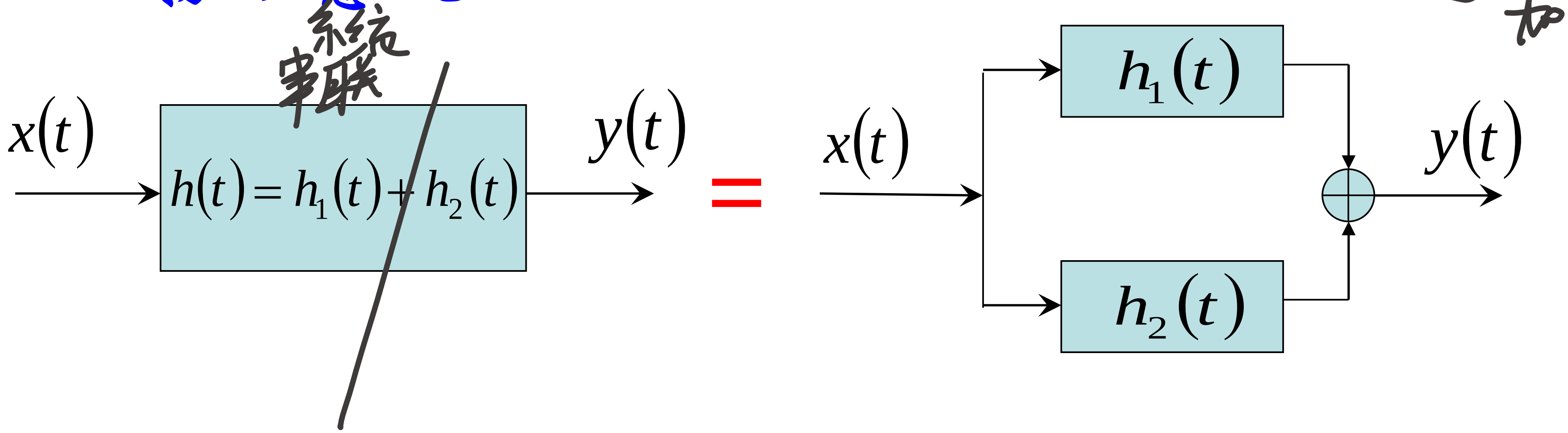
线性 顺理成章 卷积和

$$y(t)=x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

$$y[n]=x[n]*\left\{h_1[n]+h_2[n]\right\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

➢ 物理意义

同时经过再叠加



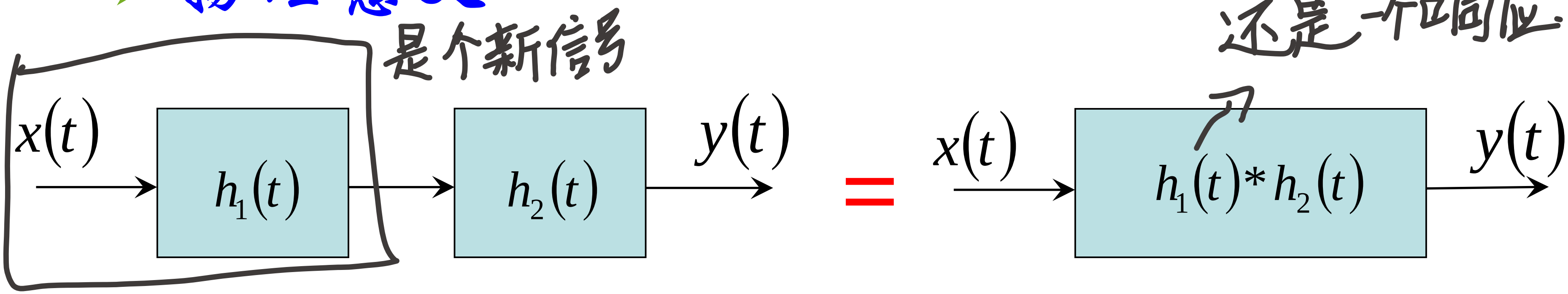
结合律

➢ 数学描述

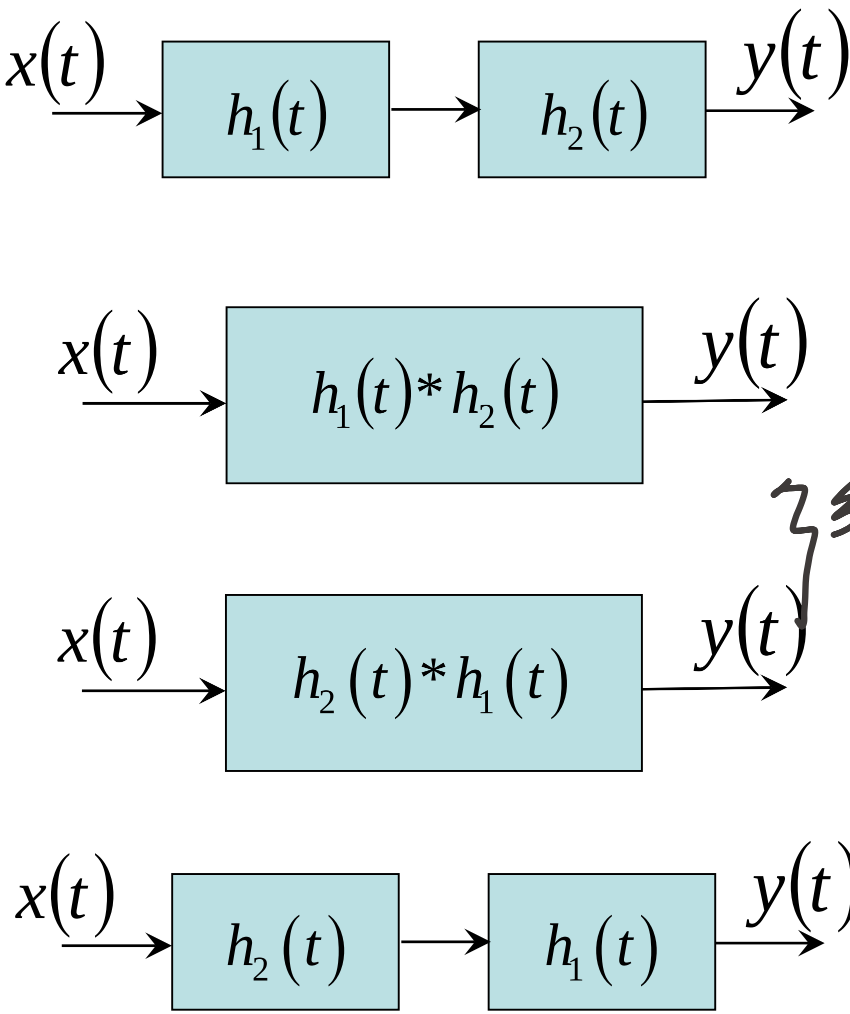
$$y(t)=x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*\left[h_1(t)*h_2(t)\right]$$ 先卷后面 的

$$y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]=x[n]*\left\{h_1[n]*h_2[n]\right\}$$

➢ 物理意义



交换律与结合律



- 对于由若干线性时不变子系统级联而成的系统，总的系统响应与级联次序无关。

纯数学

- 注意：卷积的结合律不是无条件成立的。

2律共同作用才成立

时移、微分、积分性质

时移性质

$x(t) \to \delta(t-t_0) \to h(t)$

$\delta(t-t_0) * h(t)$ 先结合（交换）

$$y(t)=x(t)*h(t) \to y(t-t_0)=x(t-t_0)*h(t)=x(t)*h(t-t_0)$$

$$y[n]=x[n]*h[n] \to y[n-n_0]=x[n-n_0]*h[n]=x[n]*h[n-n_0]$$

$\delta'(t)$ 冲激偶

微分/差分性质

$x(t) \to \boxed{\frac{d}{dt}} \to \boxed{h(t)} \to y(t)$

先做后做 or 交换

$$y(t)=x(t)*h(t) \to \boxed{y'(t)}=x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)$$

$$y[n]=x[n]*h[n] \to y[n]-y[n-1]=\{x[n]-x[n-1]\}*h[n]$$

$$=x[n]*\{h[n]-h[n-1]\}$$

再进一次微分器

也进了一次微分器

积分/求和性质

进一次积分

$$y(t)=x(t)*h(t) \to \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau*h(t)=x(t)*\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

后进一次积分器

$$y[n]=x[n]*h[n] \to \sum_{k=-\infty}^{n} y[k]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]*h[n]=x[n]*\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

卷积运算性质的应用(1)

例1：考虑两个线性时不变系统，其单位脉冲响应分别为 $h_1[n]=\sin 8n$ 和 $h_2[n]=a^n u[n]$，$|a|<1$。这两个系统按照如下图所示的方式级联。请计算当输入为 $x[n]=\delta[n]-a\delta[n-1]$ 时系统的输出。

$$x[n]=\delta[n]-a\delta[n-1] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$\sin 8n$ $\qquad$ $a^n u[n]$

$(a^n u[n]) * (\delta[n]-a\delta[n-1])$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta[n-n_0]-a\delta[n-n_0]) a^n u[n]$

$\sum \delta[n_0-n]-a[n_0-n]\, a^n u[n]$

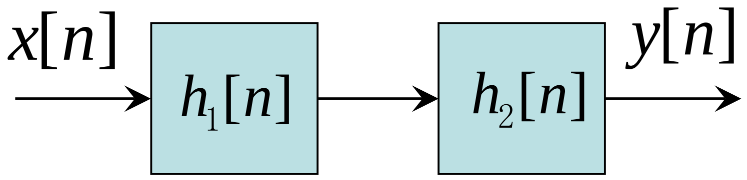
$= a^n u[n] - a^n u[n-1]$

$= a^n \delta[n]$

$a^n[n] - a^{n-1}[n-1]\, a.$

$= \delta[n].$

卷积运算性质的应用(1)



解：利用卷积运算的交换律和结合律，有

$$y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]$$
$$=x[n]*\left(h_2[n]*h_1[n]\right)$$
$$=\left(x[n]*h_2[n]\right)*h_1[n]$$

注意到： $x[n]*h_2[n]=a^n u[n]-a^{n+1}u[n-1]=\delta[n]$

因此： $y[n]=\delta[n]*h_1[n]=\sin 8n$

n=1时.

$1=\delta[n]$

$a^n\delta[n].$

$a^n[u[n]-u[n-1]]$

$\boxed{a^n\delta[n]}$

$a^0\delta[n]=\delta[n]$

卷积运算性质的应用(2)

不用掌握(只是应用)
非典计算题

例2：若一个LTI系统对输入$x(t)=e^{-5t}u(t)$的响应为$y(t)=\boxed{\sin t}$，试确定该系统的单位冲激响应。

逆运算

解：

$$x'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-5t}u(t)\right)$$

$$=u(t)\frac{de^{-5t}}{dt}+e^{-5t}\frac{du(t)}{dt}$$

求导积形态

$$=-5e^{-5t}u(t)+\boxed{e^{-5t}\delta(t)}$$

当成了 $e^{0}\delta(t)$

$$=-5e^{-5t}u(t)+\delta(t)$$

净化作用

$$=-5x(t)+\delta(t)$$

$$y'(t)=x'(t)*h(t)$$

$$=(-5x(t)+\delta(t))*h(t)$$

$$=-5y(t)+h(t)$$

$$\Downarrow$$

$$h(t)=y'(t)+5y(t)$$

$$=\cos t+5\sin t$$

主要是加法+导数+y的综合(反推)

卷积运算性质的应用(3)

❖ 面积定理。若我们把一个连续时间信号 下面的面积定义为：

$$A_v=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)dt$$

再做积分

试证明：如果 $y(t)=x(t)*h(t)$ ，则 $A_y=A_x\bullet A_h$

证：$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$\int_{-\infty}^{+a}$ 都一样

$$A_y=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right)dt$$

可以 $t'=t+\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)dt\right)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)A_h d\tau=A_x\bullet A_h$$

内容提要

- 从筛选性质到LTI系统的时域分析
- 卷积的运算性质
- LTI系统的基本性质

记忆性

考判断

- 无记忆系统

$$h[n]=K\delta[n]$$

$h(t)=K\delta(t)$ (×) 也是无记忆性

$$h(t)=K\delta(t)$$

不一定

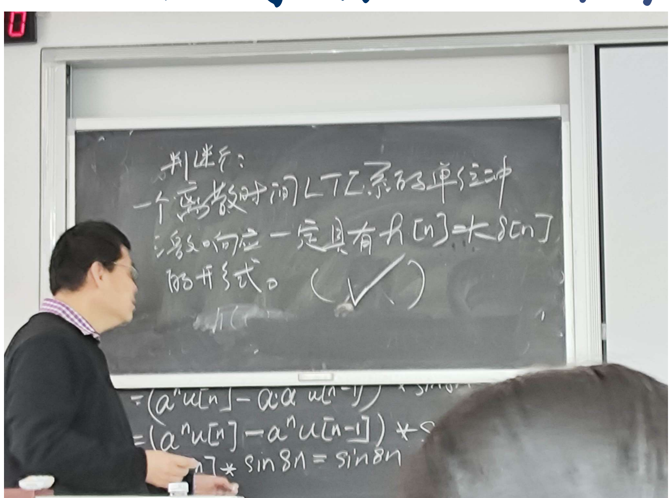
单纯倍数

换成连续LTI.

$h(t)=K\delta(t)$ 就错，因为微分会存在

$h(t)=K\delta(t)$ 也行.

- 恒等系统



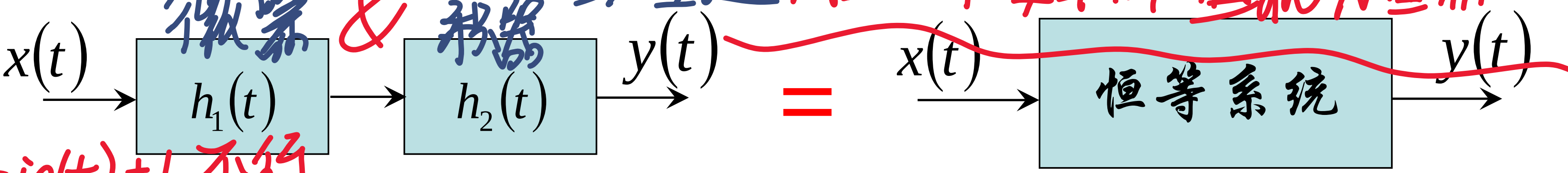
$$h[n]=\delta[n]$$

$$h(t)=\delta(t)$$

可逆性

- 如果一个LTI系统是可逆的，那么它就有一个LTI的逆系统 成对出现
- 系统与其逆系统的级联是一恒等系统

微分 & 积分 ⇒ 互逆 成立·不要输入直流分量!!!



sin(t)+1 不行 ×

$$h_1(t) * h_2(t) = \delta(t) \qquad h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$$

sint 可以

eg 右.左平移

- 注意该结论成立的条件

因果性

- 因果系统 物理

$$h[n]=0,\ n<0$$

$$h(t)=0,\ t<0$$

- 因果信号

$$x[n]=0,\ n<0$$

$$x(t)=0,\ t<0$$

充分必要条件

$$y(t)=x(t)*h(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

取 $y(5)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(5-\tau)h(\tau)d\tau$$

会有 $x(6)$ 将来，

除非

$h(\tau)$ 在 $\tau<-1$ 时

$h(\tau)=0$

即时阻止

稳定性

$y(t) = x(t) * h(t)$

$|y(t)| \le x_{max} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau$ 要有界

- 一个LTI系统是稳定的充分必要条件是：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

- 容易验证：积分器和累加器都不是稳定系统。

单位阶跃响应

➢ 单位阶跃响应：

输一个u(t)得s(t).
很难产生冲激

7-8

单阶 单冲

傅(频) 拉(s

线常微方程

$$s(t)=u(t)*h(t)$$

$$s[n]=u[n]*h[n]$$

➢ 阶跃响应和冲激/脉冲响应的关系：

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

➢ LTI系统的特性也可以用单位阶跃响应等价描述

单位阶跃响应

- 单位阶跃响应：

$$s(t)=u(t)*h(t)$$

$$s[n]=u[n]*h[n]$$

- 阶跃响应和冲激/脉冲响应的关系：

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

- LTI系统的特性也可以用单位阶跃响应描述