第九讲 应用傅里叶分析方法研究线性时不变系统

杜清河
西安交通大学
2025春

本讲覆盖章节

- 4.7

内容提要

- 利用傅里叶分析求解线性常系数微分方程
- 应用举例：补偿系统的设计问题

内容提要

- 利用傅里叶分析求解线性常系数微分方程
- 应用举例：补偿系统的设计问题

线性常系数微分方程及其时域求解

受迫响应

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

自然响应

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$y_p(t)$： 特解，是与$x(t)$包含特征函数同类的函数

$y_h(t)$： 通解，是如下齐次微分方程的解(齐次解)：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

利用傅里叶分析方法求解微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

利用傅里叶分析方法求解微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

有理分式

利用傅里叶分析方法求解微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}$$

$$=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$$=\frac{1/2}{j\omega+1}+\frac{1/2}{j\omega+3}$$

$$\Rightarrow \quad h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

利用傅里叶分析方法求解微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

假设输入信号为：

$$x(t)=e^{-t}u(t)$$

则输出信号的傅里叶变换为：

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

$$=\frac{A_{11}}{j\omega+1}+\frac{A_{12}}{(j\omega+1)^2}+\frac{A_{21}}{j\omega+3}\Rightarrow A_{11}=\frac{1}{4},A_{12}=\frac{1}{2},A_{21}=-\frac{1}{4}$$

所以：$$y(t)=(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t})u(t)$$

连续时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

线性常系数

积分方程

$w(t)$

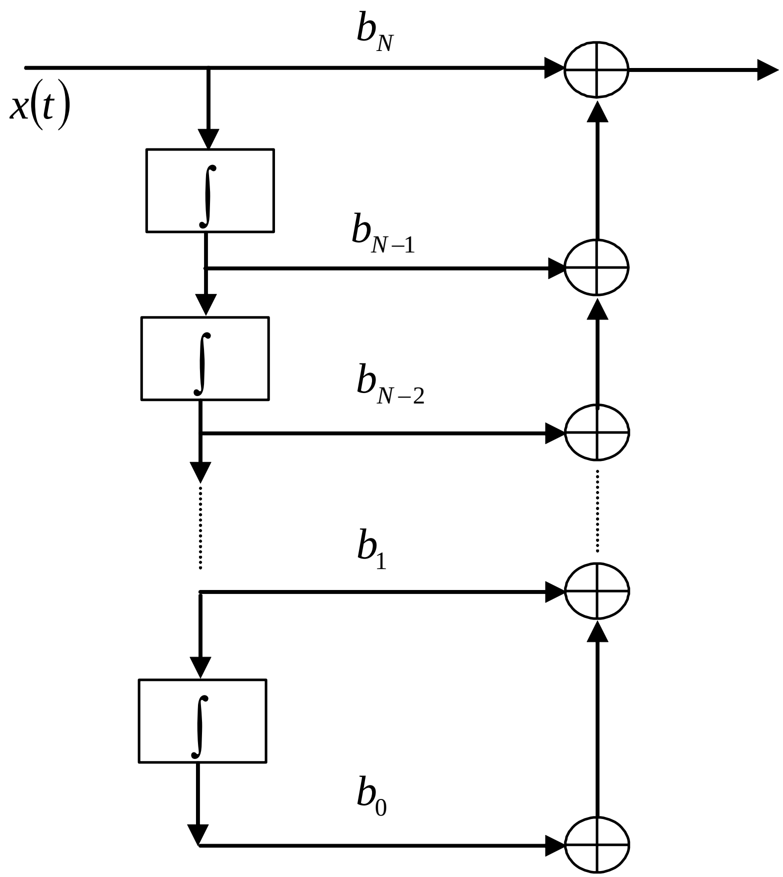
$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

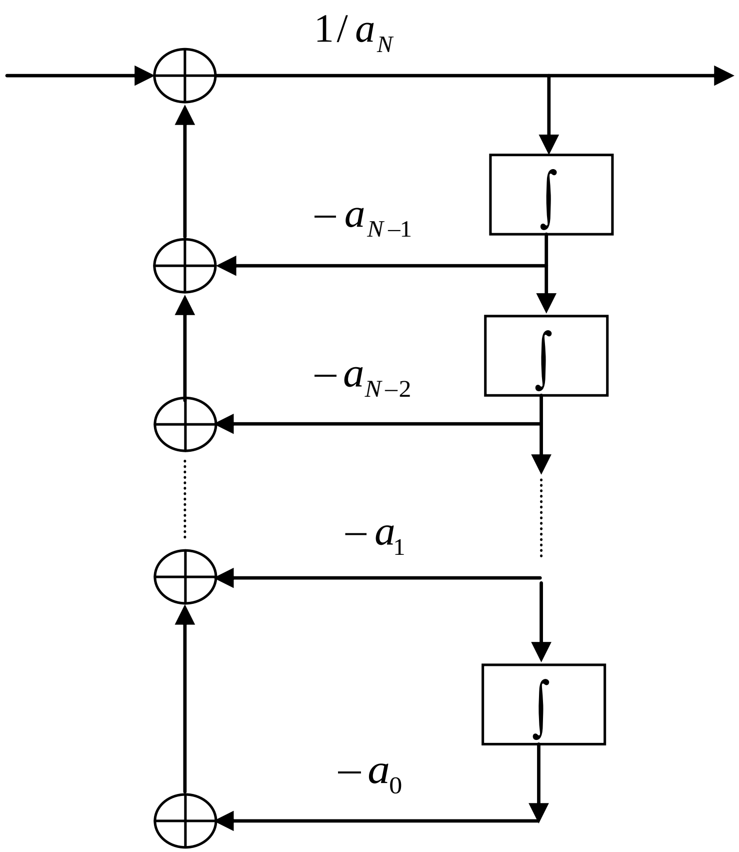
$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left[w(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

连续时间LTI系统的方框图实现

$$M=N:\quad w(t)=\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)$$

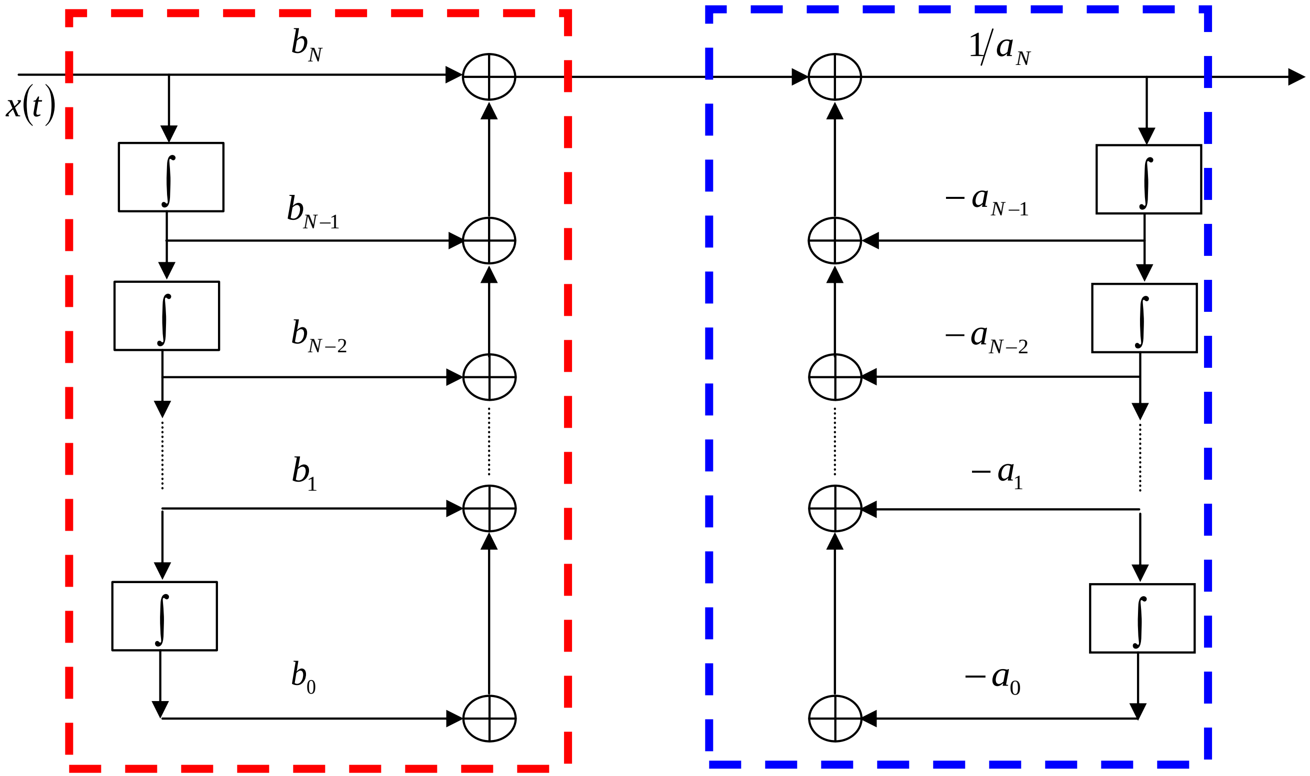
$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[w(t)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$





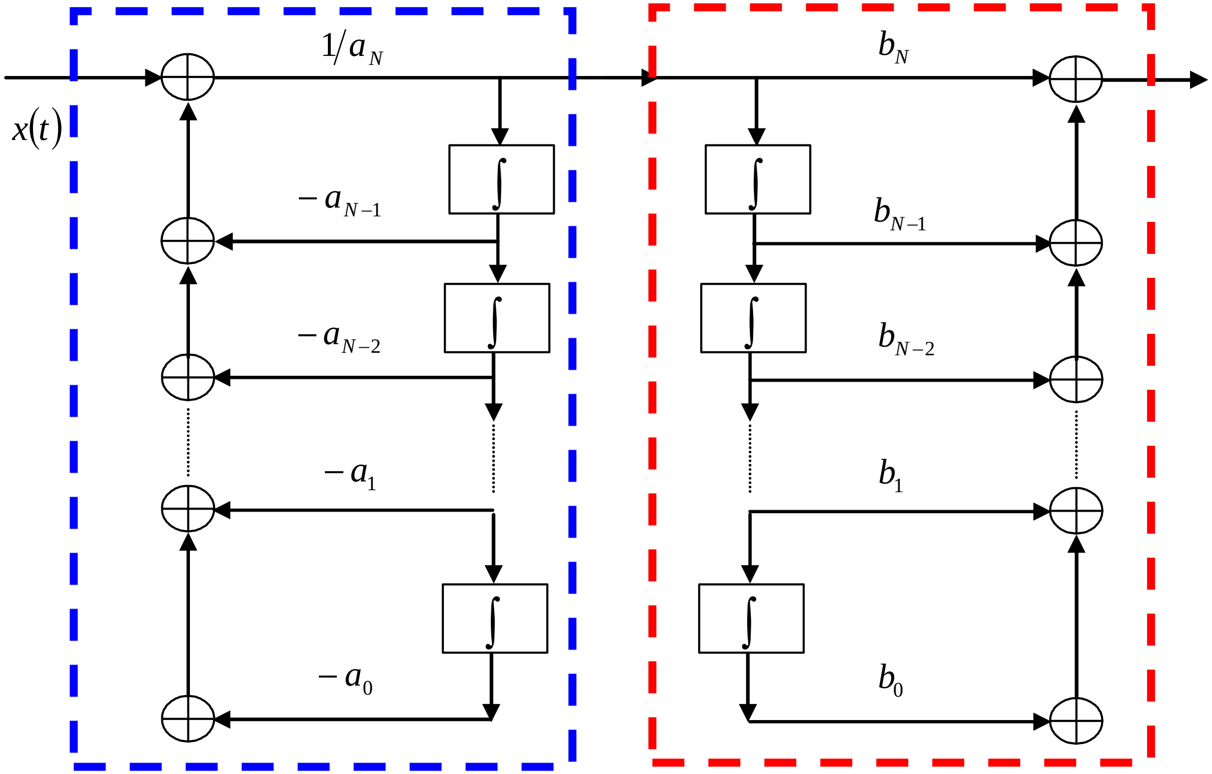
连续时间LTI系统的直接I型实现

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N}b_k x_{(N-k)}(t)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



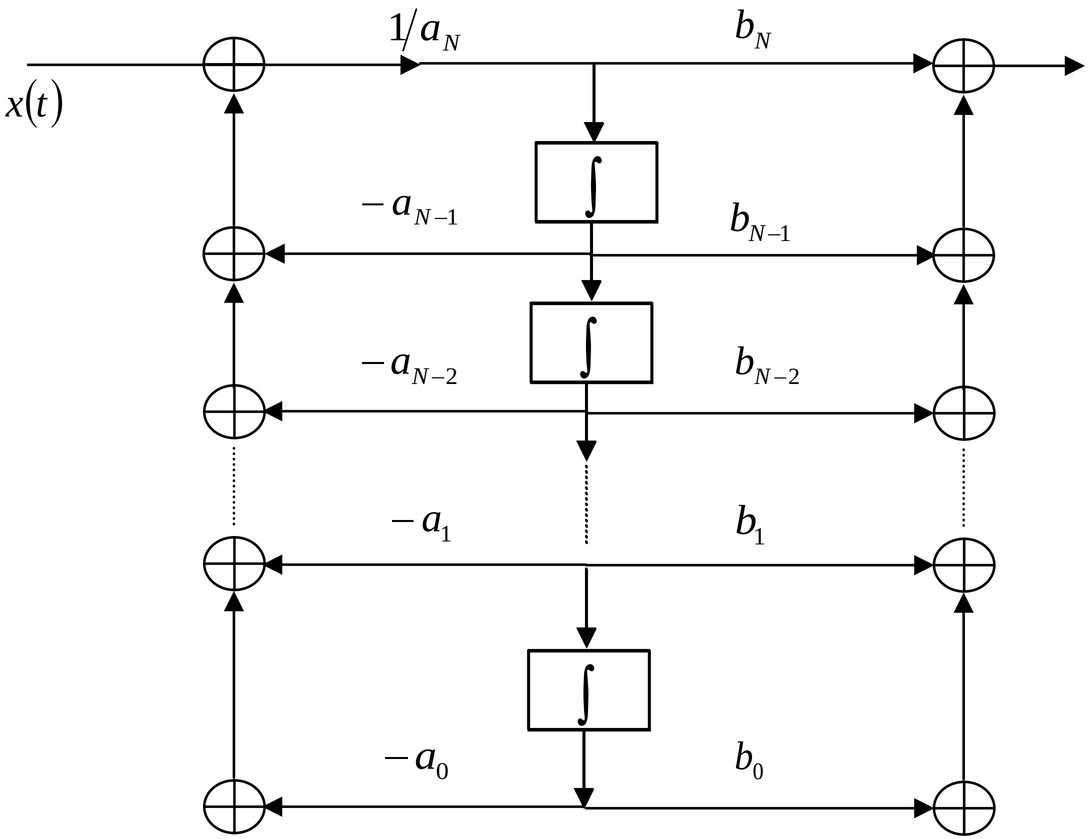
连续时间LTI系统的方框图实现

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



连续时间LTI系统的直接II型实现

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



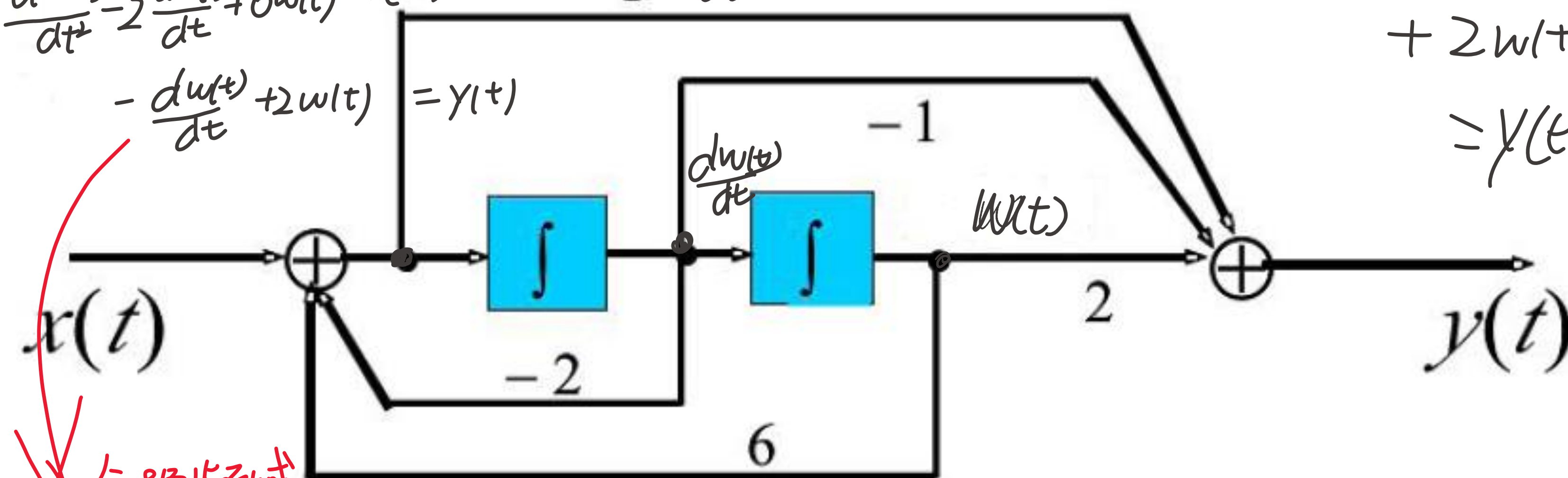
$$H(j\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

利用傅里叶分析研究由方框图描述的系统

① $x(t) + (-2)\dfrac{dw(t)}{dt} + 6w(t) = \dfrac{d^2w(t)}{dt^2}$

② $\dfrac{d^2w(t)}{dt^2} - 2\dfrac{dw(t)}{dt} + 6w(t) + x(t) - \dfrac{dw(t)}{dt} + 2w(t) = y(t)$

$\dfrac{d^2w(t)}{dt^2} - 2\dfrac{dw(t)}{dt} + 6w(t) + x(t) - \dfrac{dw(t)}{dt} + 2w(t) = y(t)$

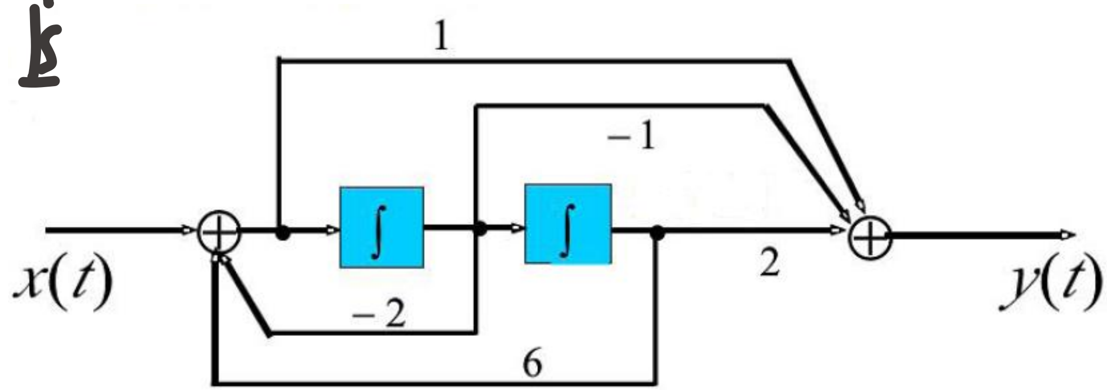


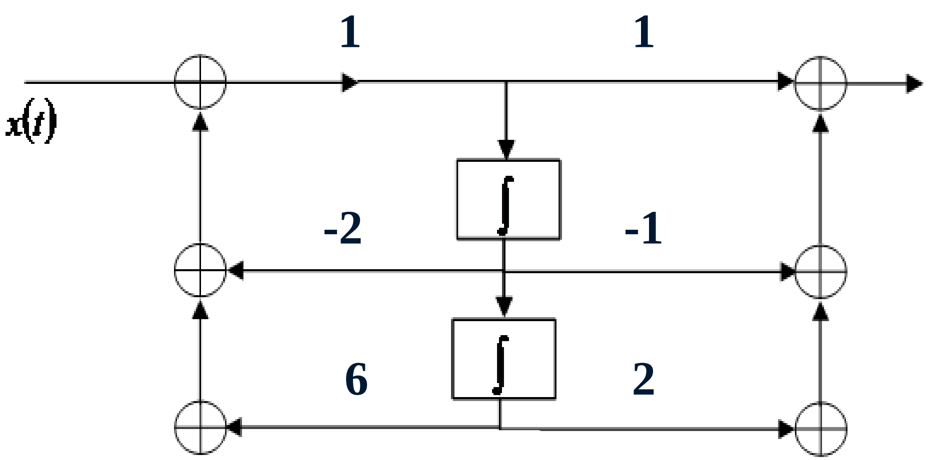
全换频域

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - (j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) - 6}$$

① —

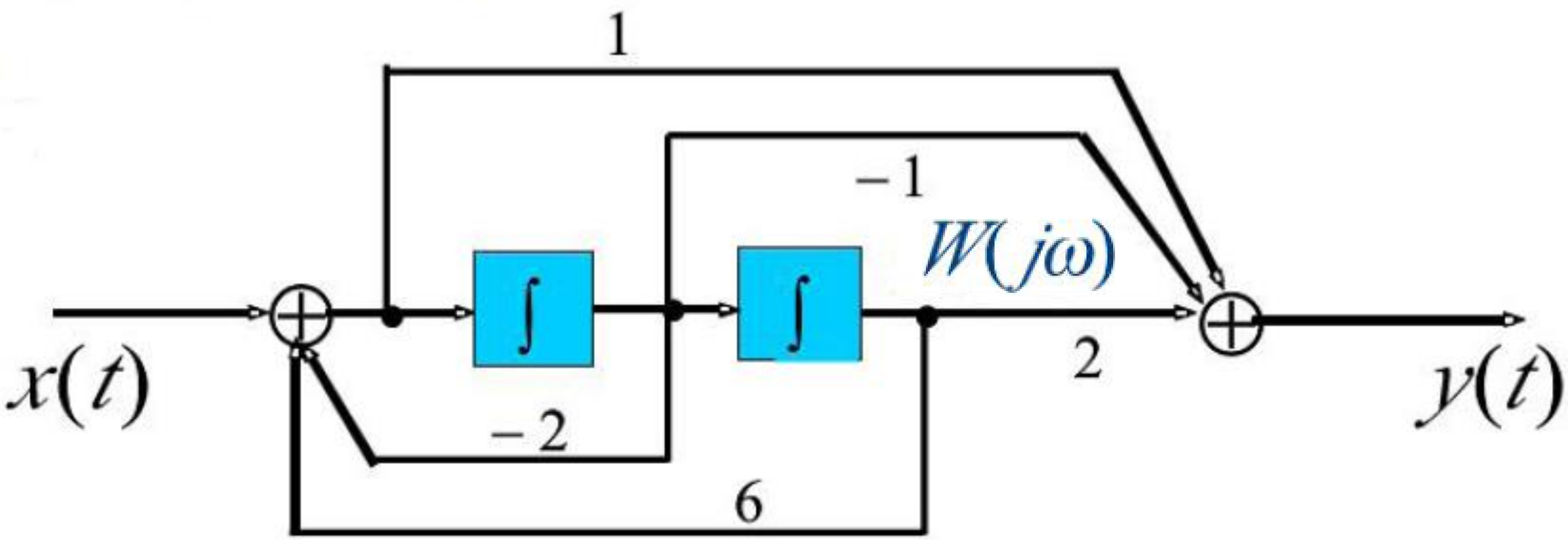
$\frac{1}{s}$





II

另一种解法



$$Y(j\omega) = 2W(j\omega) - j\omega W(j\omega) + (j\omega)^2 W(j\omega)$$

$$(j\omega)^2 W(j\omega) = X(j\omega) - 2j\omega W(j\omega) + 6W(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - (j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) - 6}$$

关于M与N的关系问题

考察具有如下形式的函数：

$$H(v)=\frac{\beta_M v^M+\beta_{M-1}v^{M-1}+\ldots+\beta_1 v+\beta_0}{\alpha_N v^N+\alpha_{N-1}v^{N-1}+\ldots+\alpha_1 v+\alpha_0}$$

如果 $M>N$，则：

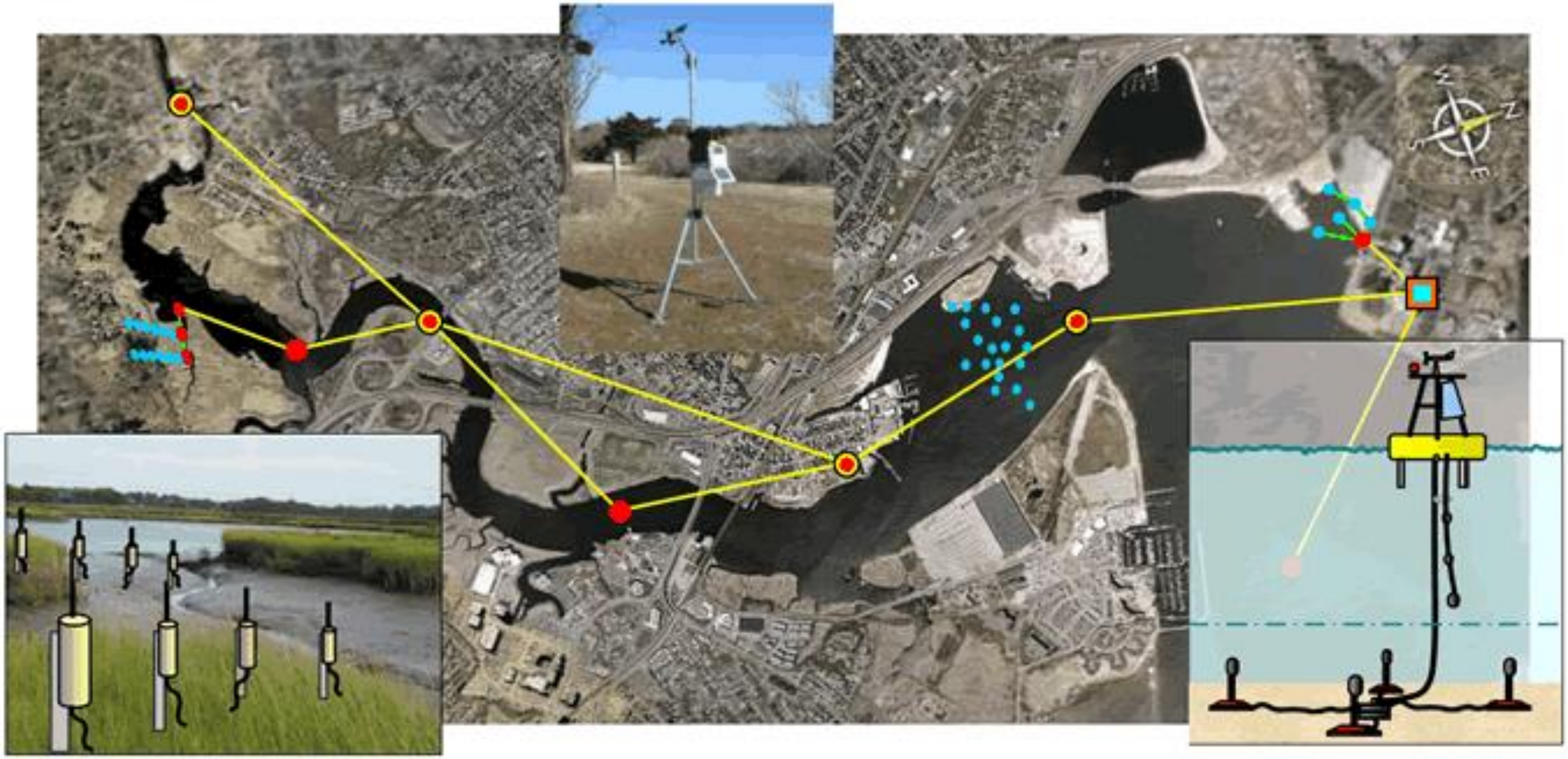
$$H(v)=c_{M-N}v^{M-N}+c_{M-N-1}v^{M-N-1}+\ldots+c_1 v+c_0+\frac{b_{N-1}v^{N-1}+b_{N-2}v^{N-2}+\ldots+b_1 v+b_0}{v^N+a_{N-1}v^{N-1}+\ldots+a_1 v+a_0}$$

这说明系统中包含微分环节，这样的系统在实际中一般来说是不存在的。 $\Rightarrow$ $M\le N$

内容提要

- 利用傅里叶分析求解线性常系数微分方程
- 应用举例：补偿系统的设计问题

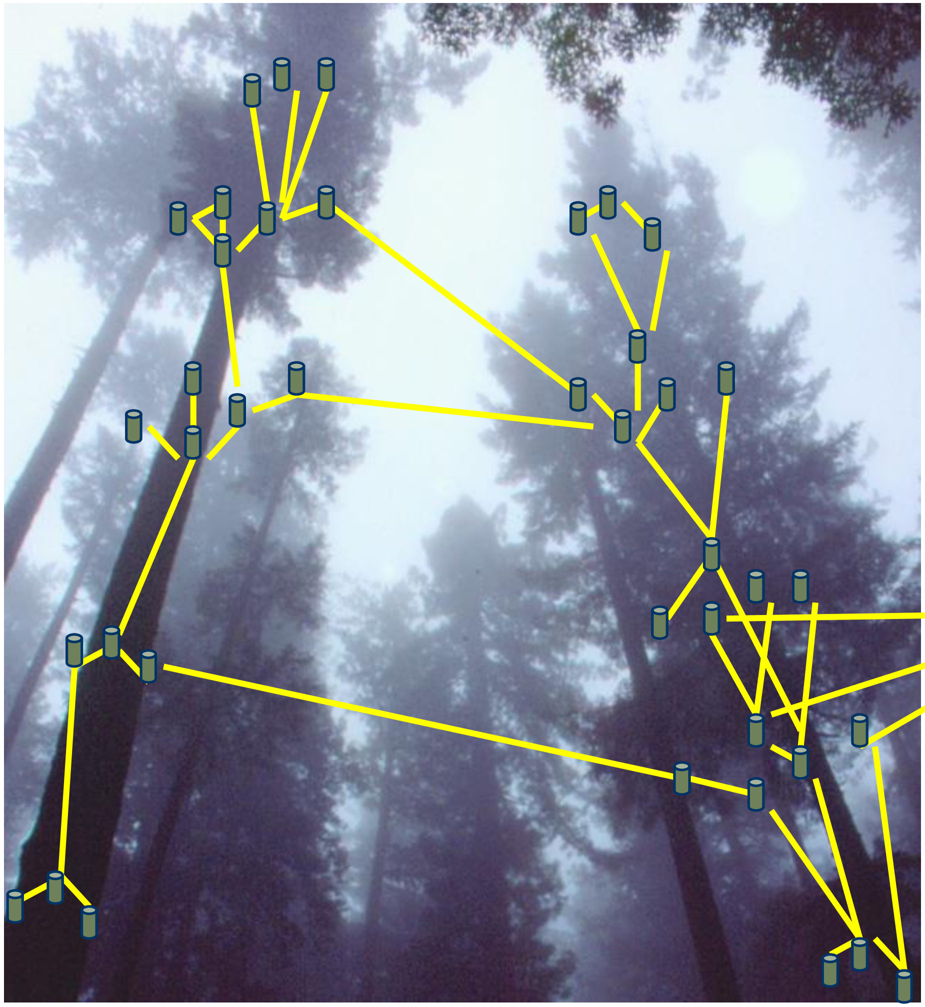
无线传感器网络



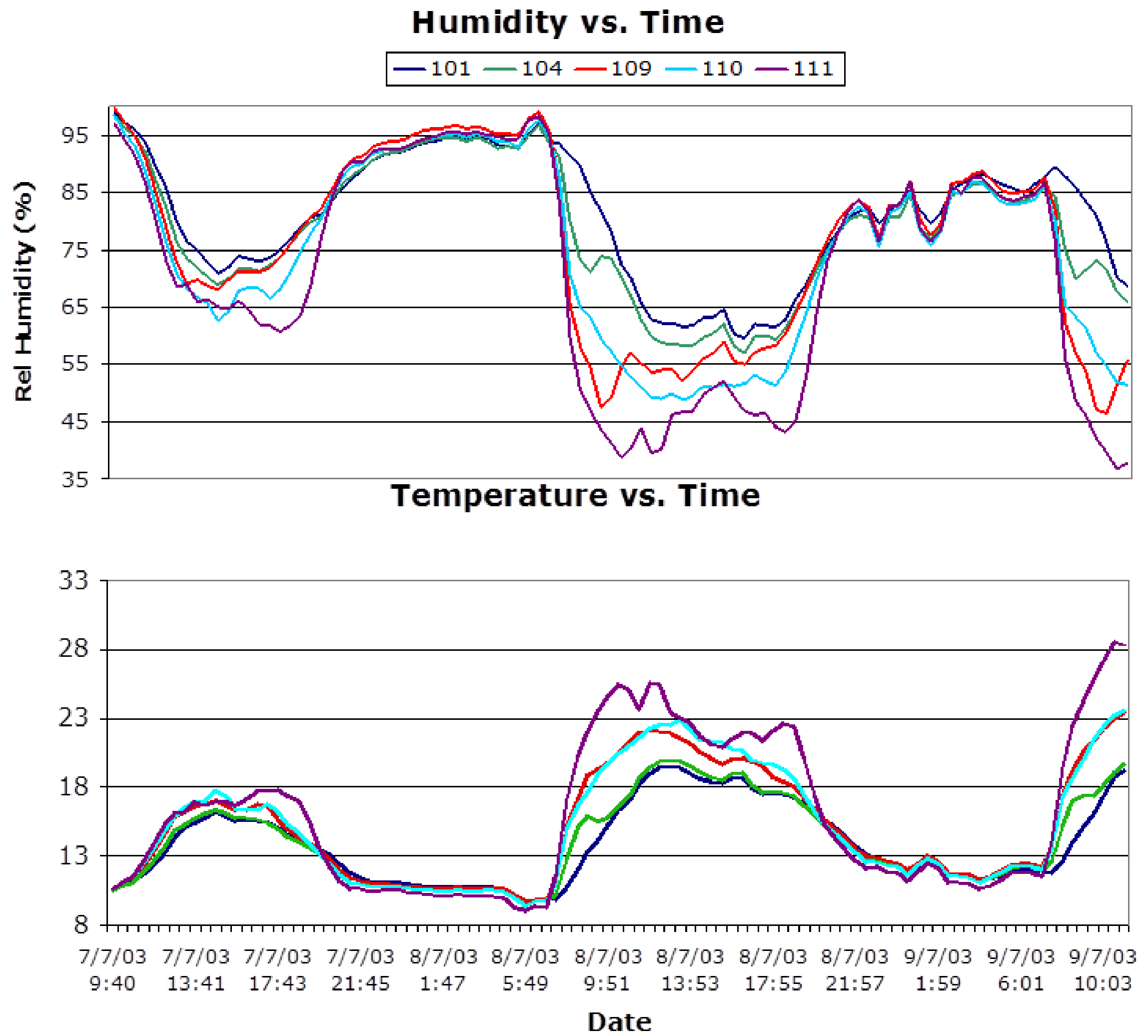
无线传感器网络

- 传感器节点（Sensors）对周围环境进行感知和测量，收集数据
- 采集到的数据通过无线的方式发送至数据融合中心，进行分析和判断
- 无线传感器网络（Wireless Sensor Networks, WSN）在自然环境监测、工业过程控制、远程医疗、智能家居等领域有广泛的应用

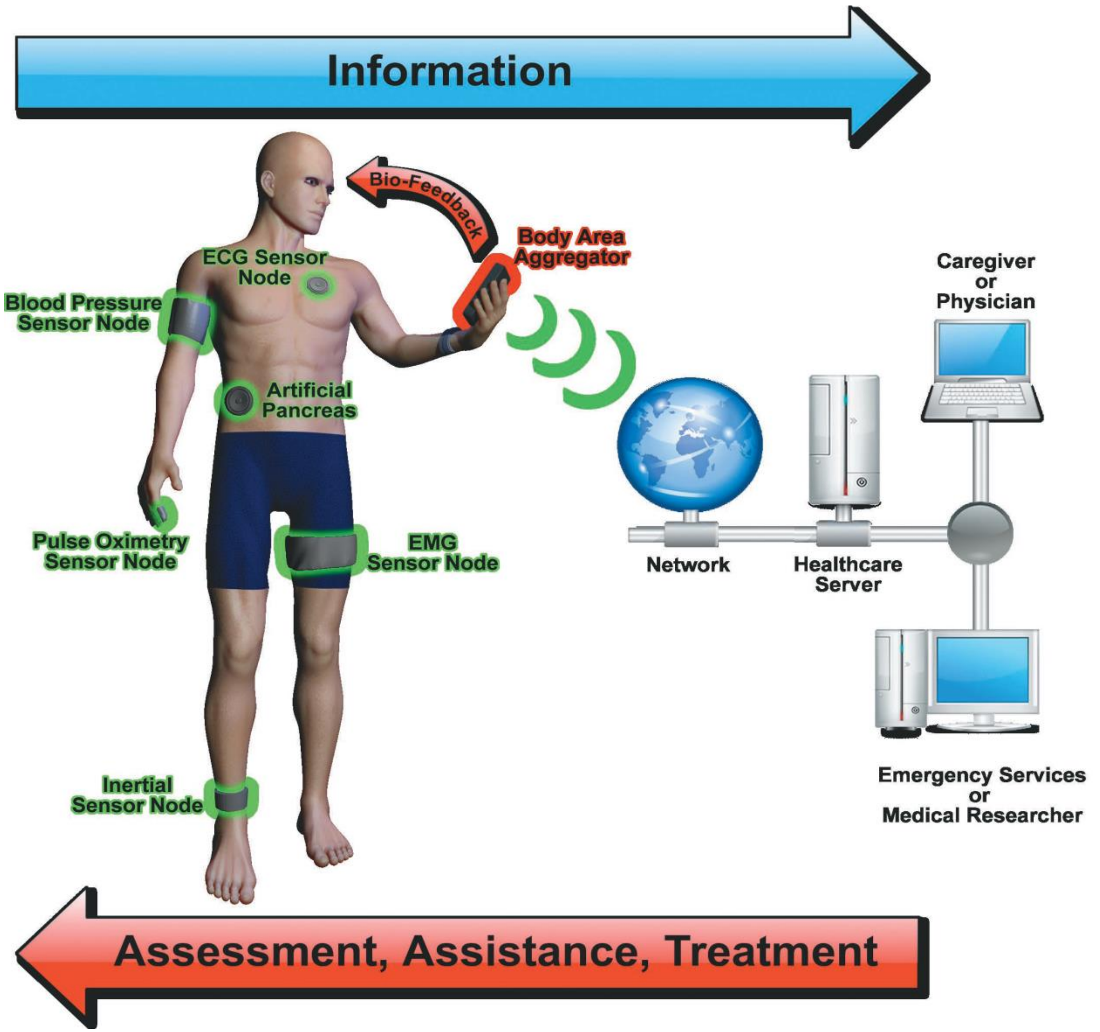
无线传感器网络



无线传感器网络


Humidity vs. Time
101
104
109
110
111
Rel Humidity (%)
95
85
75
65
55
45
35
Temperature vs. Time
33
28
23
18
13
8
7/7/03 9:40
7/7/03 13:41
7/7/03 17:43
7/7/03 21:45
8/7/03 1:47
8/7/03 5:49
8/7/03 9:51
8/7/03 13:53
8/7/03 17:55
8/7/03 21:57
9/7/03 1:59
9/7/03 6:01
9/7/03 10:03
Date

无线传感器网络

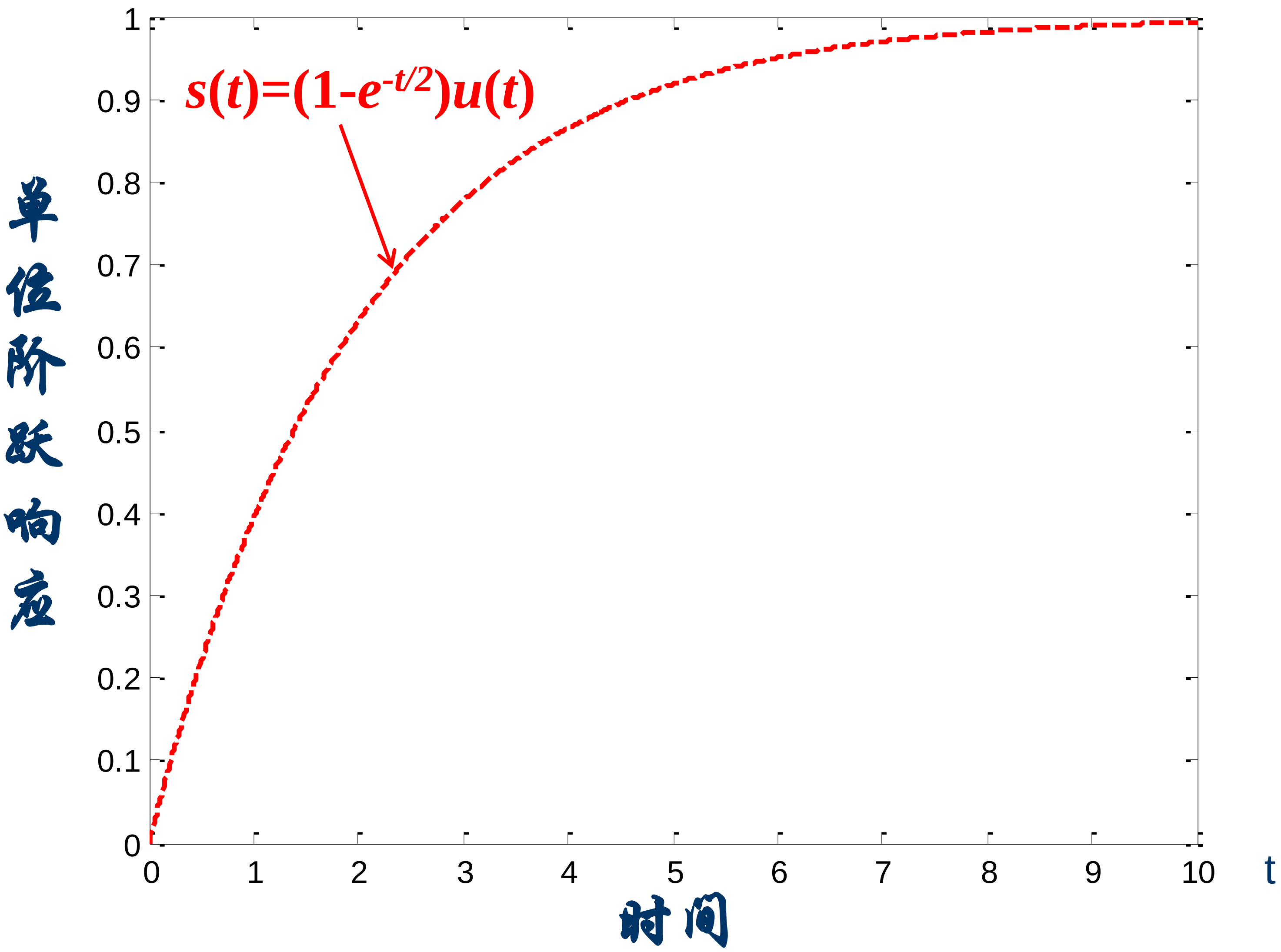


Information
Bio-Feedback
Body Area Aggregator
ECG Sensor Node
Blood Pressure Sensor Node
Artificial Pancreas
Pulse Oximetry Sensor Node
EMG Sensor Node
Inertial Sensor Node
Caregiver or Physician
Network
Healthcare Server
Emergency Services or Medical Researcher
Assessment, Assistance, Treatment

传感器网络中的数据采集与补偿问题

考虑一个测量液体温度的传感器节点。由于测量元件响应特性的缺陷，系统不能对温度的变化作出瞬时的响应，我们可以将它建模为一个LTI系统，并将其单位阶跃响应描述为$s(t)=(1-e^{-t/2})u(t)$。请设计一个补偿系统，当把该测量元件的输出提供给该系统时，它产生的输出等于液体的实际瞬时温度。

示例



传感器网络中的数据采集与补偿问题

分析与求解：

上述问题本质上是一个逆系统设计问题。

测量元件的单位冲激响应为：

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

其频率响应为：

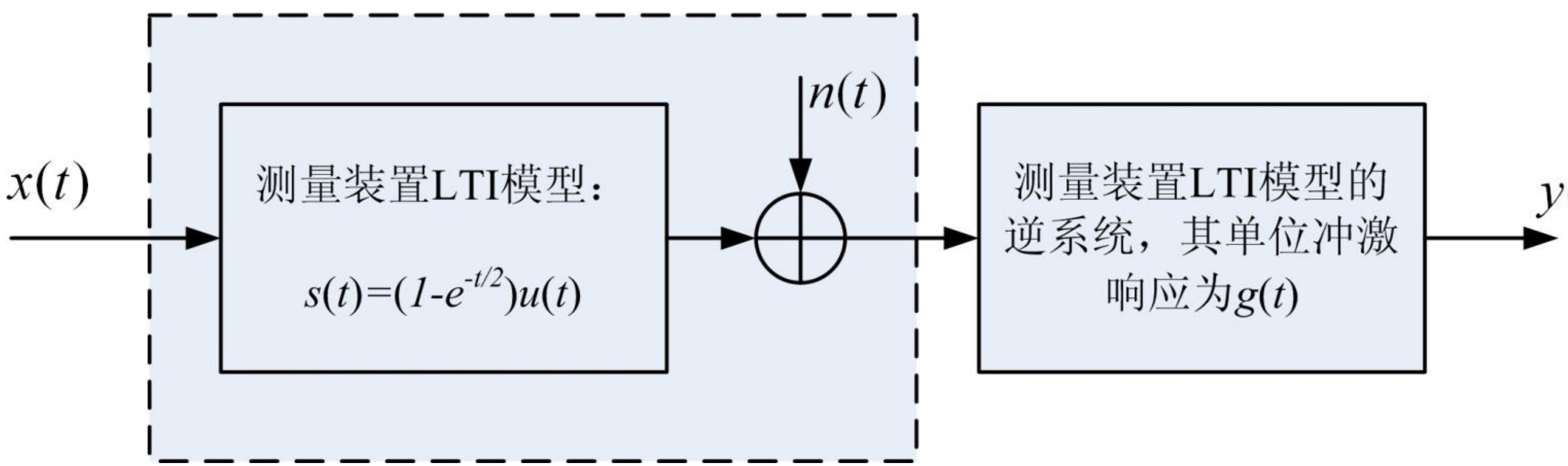
$$H(j\omega)=\frac{1}{1+2j\omega}$$

因此，补偿系统的频率响应为：

$$G(j\omega)=\frac{1}{H(j\omega)}=1+2j\omega$$

传感器网络中的数据采集与补偿问题

在实际的测量系统中，不可避免地存在测量误差，我们把这一效果用一噪声信号 $n(t)$ 来建模。这样，所考虑的系统将如下图所示。现假定 $n(t)=\sin\omega t$，求 $n(t)$ 通过逆系统的输出，并考虑：随着 ω 的增加，这个输出将怎样变化？



传感器网络中的数据采集与补偿问题

分析与求解：

由上一问，补偿系统的单位冲激响应为：

$$g(t)=\delta(t)+2\frac{d\delta(t)}{dt}$$

噪声信号通过该系统后的输出为：

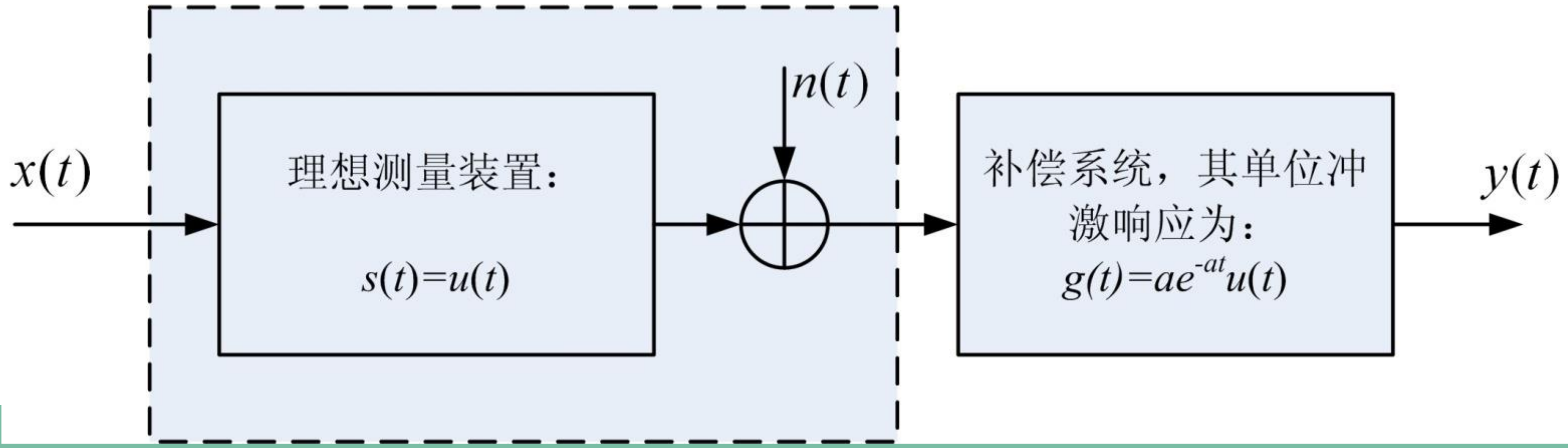
$$g(t)*\sin\omega t=\sin\omega t+2\omega\cos\omega t$$

可见，在整个系统的输出中，除了包含原有噪声之外，还有一个正比于ω的噪声输出。

系统的响应速度和对高频干扰的抑制能力之间存在折衷与权衡

传感器网络中的数据采集与补偿问题

为了进一步说明上述思想，考虑如下图所示的测量装置。我们试图设计这样一个补偿系统，它的单位冲激响应为$g(t)=ae^{-at}u(t)$。试选择合适的a，使得系统在满足对噪声输入$n(t)=\sin 6t$所产生的输出幅度不大于1/4的条件下，对温度阶跃变化的响应尽量快。



传感器网络中的数据采集与补偿问题

分析与求解：补偿系统的频率响应为：

$$G(j\omega)=\frac{a}{a+j\omega}$$

为了满足抑制噪声的要求，应有：

$$\left|G(j6)\right|\le\frac{1}{4}$$

即：

$$\left|G(j6)\right|^2=\frac{a^2}{a^2+36}\le\frac{1}{16}$$

为了使响应尽量快，在满足上述要求的前提下，a的取值应尽量大，故：$a=\frac{6}{\sqrt{15}}$

谢谢大家！