4.13 (a) $X(j\omega)=\delta(\omega)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega-5)$ 频谱的频移特性

逆变换 $x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}e^{j\pi t}+\frac{1}{2\pi}e^{j5t}$

$e^{j\pi t}$ 的周期为2　e^{j5t} 周期为 $\frac{2\pi}{5}$ ∉Q

2与 $\frac{2\pi}{5}$ 无最小公倍数可言　∴ $x(t)$ 非周期.

$X(j\omega)=\delta(\omega)+\delta(\omega-\pi)+\delta(\omega-5)$ 即表示了3个频率 发现有频率是无理 那不会有3

(b) $x(t)*h(t)=\frac{1}{2\pi}(1+e^{j\pi t}+e^{j5t})*(u(t)-u(t-2))$ 不关于y轴对称

变换. $H(j\omega)=\mathcal{F}\{\underbrace{[u(t+1)-u(t-1)]}_{\text{y轴对称}}*\delta(t-1)\}$. 可以产生门函数 方便FT.

$=\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j\omega}$

$H(j5)=\frac{2\sin5}{5}e^{-j5}$ ✓

$H(j\pi)=0$　$H(j0)=2$　设 $x(t)=e^{j\omega_0 t}$

∴ $x(t)*h(t)=H(j\omega)e^{j\omega_0 t}$ ✓

∴ $x(t)*h(t)=\frac{1}{2\pi}\left(2+0+\frac{2\sin5}{5}e^{-j5}\cdot e^{j5t}\right)$

$=\frac{1}{\pi}+\frac{2\sin5}{5}e^{j(5t-5)}$ 是周期的

$T=\frac{2\pi}{5}$

(3) 可能是. 但比较难出现

$h(t)$ 使 $x(t)$ 从非周期变为周期,其原因在于.

$e^{j\omega_0 t}\xrightarrow{h(t)}\sum H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$　Q

$$x(t)*h(t)=\frac{1}{2\pi}\left(1\ H(j0)+e^{j\pi t}H(j\pi)+e^{j5t}H(j5)\right).$$

$$u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega).$$

$$u(t-2)\xrightarrow{\mathcal{F}}e^{-2j\omega}\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

$u(t)*\delta(t-2)$

不太方便，但能算

$$u(t)-u(t-2)=[u(t+1)-u(t-1)]*\delta(t-1)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2\sin\omega}{\cancel{\pi}\omega}\ e^{-j\omega}$$ 最好检查一下是否对

$$e^{-j\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}[u(t+1)-u(t-1)]\,e^{-j\omega t}dt$$

$$=e^{-j\omega}\int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega}\frac{e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}}{-j\omega}$$

$$=e^{-j\omega}\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$$=e^{-j\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

特点，$H(j\pi)=0$

这就把无理谐波干掉了！

(c) 上述例子即是

由于 $H(j\pi)=0$ 把 $w=\pi$ 处滤除了.
留下了有周期有理的分量

Q: 是 LTI 的一个重要特性

$$y(t) = H(jw_0)e^{jw_0t}$$

证: $$e^{jw_0t} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jw_0\tau} h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jw_0(t-\tau)+t} \cdot h(t-\tau)\,d\tau.$$

$$= e^{jw_0t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-jw_0(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= e^{jw_0t} H(jw)$$

$\boxed{\begin{matrix} t'=t-\tau \\ 再\ t=t'. \end{matrix}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t)\,e^{-jwt}\,dt = \quad x$$

$x^*(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw) \cdots\right]$

$\times$

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-jw)$$

$X^*(+jw)$

$$X(-jw) = X^*(jw)$$

$= [\quad]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t)\,e^{-jwt}\,dt$$

用信号性质求信号，屡见不鲜.

1. $x^*(t) = x(t)$ 且 $x(t) \geq 0$

2. 说明 $x(t) + \frac{dx(t)}{dt} = Ae^{-2t}u(t)$

3 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

从 2, 不妨把 $Ae^{-2t}u(t)$ 倒回去

则 $X(j\omega)(1+j\omega) = \frac{A}{2+j\omega}$

$\therefore X(j\omega) = \frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

$= A\left(\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}\right)$

$\therefore x(t) = A[e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)]$.

A 要得为正数.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} (Ae^{-t} - Ae^{-2t})^2 dt$

$= A^2\int_{0}^{+\infty} (e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-4t}) dt$

$= A^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = 1$

$A^2 \frac{6-8+3}{12} = 1$

$A = 2\sqrt{3}$

4.14 ① ∵ $x(t)$ 为实值，则 $x(t)=x^*(t)$. 共轭信号.

共轭性

$\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega) = \boxed{\mathcal{F}[x^*(t)] = X(-j\omega)}$ $X^*(j\omega)$

为什么 $\mathcal{F}[x^*(t)]=X(-j\omega)$???

如为实信号

② ∵ $\mathcal{F}^{-1}[(1+j\omega)X(j\omega)] = Ae^{-2t}u(t)$ 由于 $x(t)$ 可拆成 fs 形式，则包含 cos 与 jsin

∵ $\mathcal{F}[Ae^{-2t}u(t)] = A\cdot\frac{1}{j\omega+2} = (1+j\omega)X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \frac{A}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = A\left(\frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{j\omega+2}\right)$$

实则无 jsin. 共轭无变化

③ 由帕塞瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = 1$$

逆变换

由 $X(j\omega)$ 可推知 $x(t) = A[e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)]$

$$\therefore \int_0^{+\infty} A^2(e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-4t})dt = 1$$

$$\therefore A^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = 1$$

$$A^2 = 12.$$

$$\therefore A = \pm 2\sqrt{3}$$

∵ $x(t)$ 为非负 $A = 2\sqrt{3}$

$$\therefore x(t) = 2\sqrt{3}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

① 为何 $\mathcal{F}[x^*(t)] = X(-j\omega)$?

因为 $\mathcal{F}[x^*(t)] = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right)^*$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\boxed{(e^{-j\omega t})^*}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\boxed{e^{+j\omega t}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j(-\omega)t}dt.$$

$$= X(-j\omega).$$

② 闭式表达是什么?

A 不包含 limit, 级数, intergral. differentiation 的表达, 只有4则运算与基本函数

从 $x(t)$ 实虚性 ⇒ 给了一些变换条件

⇒ 分析条件 ⇒ $x(t)$ 找到

那么 $x(t)$ 为实值用在哪了? 共轭没用上 有何意义?

$x(t)$实 → $X(j\omega) = X^*(j\omega)$

4.24 (a) (1). $Re(X(j\omega))=0$ 则 $x(t)$ 为奇信号, (a) (d) 符合

(2) $Im(X(j\omega))=0$ 则 $x(t)$ 偶信号, (e)(f) 符合

(3) $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}x(t+\alpha)$

共轭对称这一块.

即平移后可成为实偶函数

(a). (b) (e) (f). 符合. (C) 平移为虚偶函数 不符合

(4) $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

则 $2\pi x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)\ 1\,d\omega=0$

即 $x(0)=0$ 的信号. (a), (b) (c) (d) (f)

配凑

(5) $\because x'(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}j\omega X(j\omega)$

$\therefore x'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$\frac{2\pi}{j}x'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$\therefore x'(t)=0$ (b) (c), (e) (f)

(6) $X(j\omega)$ 周期则必须 $x(t)$ 离散, 只有 (b) 符合

(b) $x(t)=t^3$ 实奇函数且 $x(0)=x'(0)=0$

(a)

(1) $X(j\omega)$虚奇 $\rightarrow$ $x(t)$奇

(2) $X(j\omega)$实 $\rightarrow$ $x(t)$实偶、

(3) $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ 指的是 $x(t)$ 时移后为一个实函.
且偶（否则 $X(j\omega)$ 必含虚数项）

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega$ VS $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

即 $t=0$ 时刻 2π倍的$x(0)$值

(5) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{dx(t)}{dt}$

(5)求 $2\pi x'(0) \overset{?}{=} 0$.

(6) $X(j\omega)$ 周期. 则 $x(t)$离散

4.25条件解析 $x(t)$时移可变为偶函数.

那 $X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\measuredangle X(j\omega)}$ 中 让 $\measuredangle X(j\omega)$

$e^{+j\omega}X(j\omega)=$ 一个偶函数 $\measuredangle \cancel{X}(j\omega)+\omega=0$

因为 $X(j\omega)=|X(j\omega)|(\cos\measuredangle X(j\omega)+j\sin\measuredangle X(j\omega))$

4.25 (a) $X(j\omega)$ 可表示为 $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\measuredangle X(j\omega)}$

当 $x(t)$ 时移 令 $y(t) = x(t) * \delta(t+1)$

$y(t)$ 是一个实偶信号 ∴ $Y(j\omega) = |Y(j\omega)| e^{j\measuredangle Y(j\omega)}$

$= |Y(j\omega)|$ 且 $\measuredangle Y(j\omega) = 0$.

由频移 $Y(j\omega) = X(j\omega) e^{j\omega} = |X(j\omega)| \cdot e^{j\measuredangle X(j\omega)} \cdot e^{j\omega}$

∴ $\measuredangle X(j\omega) + \omega = 0$ ∴ $\measuredangle X(j\omega) = -\omega$

(b) 由 FT 定义 $X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = S_{面积} = 7$

(c) 由 FT 逆变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

∴ $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega = x(t)\, 2\pi \Big|_{t=0} = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

(d) 设 $Y(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega}$

又 ∵ $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right) = \begin{cases} 1 & -1<t<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$ ∴ $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega}\right] = \begin{cases} 1 & -3<t<-1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

∴ 原式 $= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot Y(j\omega)\, d\omega$

$= 2\pi\ x(t) * y(t) \Big|_{t=0}$

$$= 2\pi\, x(t) * \left(u(t+3) - u(t+1) \right) \Big|_{t=0}$$

硬算
老移

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, u(t-\tau+3) - x(\tau)\, u(t-\tau+1)\, d\tau$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{t+3} x(\tau)\, d\tau - 2\pi \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau)\, d\tau \Big|_{t=0}$$

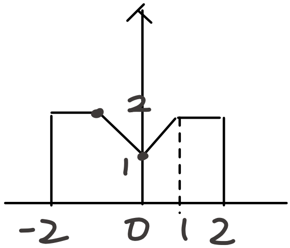
$$= 2\pi \left(7 - \frac{7}{2} \right) = 7\pi$$

(e) 由帕塞瓦尔定理、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

$$\therefore \text{原式} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$\overset{t'=t+1}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t')|^2 dt'$$



$$= 4\pi \int_{0}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 4\pi \int_0^1 (t+1)^2 dt + 4\pi \int_1^2 4\, dt.$$

$$= \frac{25}{3}\pi$$

由于 $X(j\omega)$ 实部逆变换为实偶

(f) $\mathcal{F}[Re(X(j\omega))] = Ev(x(t)) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right)$

4.27 (a) $x(t) = u(t-1) - u(t-2) - u(t-2) + u(t-3)$

$$\therefore X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_1^2 e^{-j\omega t}dt - \int_2^3 e^{-j\omega t}dt$$

$$= \frac{e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}}{j\omega} - \frac{e^{-2j\omega} - e^{-3j\omega}}{j\omega} = \frac{(e^{-j\omega} - e^{-2j\omega})(1-e^{-j\omega})}{j\omega}$$

$$= \frac{(e^{+j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})e^{-\frac{3}{2}j\omega}}{j\omega}(1-e^{-j\omega})$$

$$= \frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}e^{-\frac{3}{2}j\omega}(1-e^{-j\omega})$$

(b) 由周期内FT 记 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = \frac{1}{T}X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{T}}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)e^{-j\omega kt}dt = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$\tilde{x}(t)$ 周期函数

$$= \frac{1}{T}\int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

代入而已

由于 $\tilde{x}(t) = x(t) * \sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$

b_k a_k

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right\} = \frac{1}{T}$$

$\frac{2\pi}{T}$ 3个部分 $\frac{1}{T}$

$$\therefore \tilde{X}(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{2\pi}{T}k\right)\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \quad ①$$

$\tilde{x}(t)=\sum x(t-kT)$ 是一个周期信号

可展成FS

$\tilde{x}(t)=\sum a_k e^{jk\omega_0 t}$ 其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$a_k=\frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$ $x(t)=u(t-1)-u(t-2)-[u(t-2)-u(t-3)]$

$=\frac{1}{T}\left(\int_1^2 e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt-\int_2^3 e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt\right)$

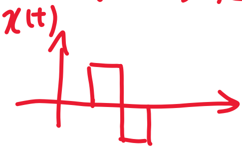
$=\frac{1}{T}\quad = \frac{1}{T}X(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T}}$

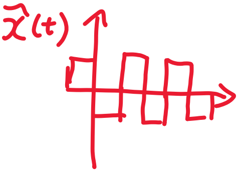
这个事情是怎么做到的?

我们不知道 $\tilde{x}(t)$ 周期

却可以计算 a_k

因为 $x(t)$ 是 $\tilde{x}(t)$ 的一部分!





所以，对周期信号，可以求FT

只需 挑出一个周期 其他扔掉 $\tilde{x}(t)\to x(t)$

可做FT 想求 $\tilde{x}(t)$ 的FS → a_k?

可以，采样即可 $a_k=\frac{1}{T}X(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$

↓ a_k的$\frac{1}{T}$ ↓ a_k的 $k\frac{2\pi}{T}$.

$\therefore \tilde{X}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{+jk\omega_0 t} \xrightarrow{FT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$

$= \tilde{X}(j\omega)\ 2\pi$ ②

$\because a_k = \frac{1}{T} X(j\frac{2\pi}{T}k)$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT).$$

$$\tilde{X}(\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T}$$

$\therefore b_k = a_k/T$

我们 b_k　$\tilde{x}(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(j\frac{2\pi}{T}) \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$

$$\tilde{X}(j\omega) = \mathcal{F}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega t}\right] =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k\ 2\pi \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$\because a_k = \frac{1}{T} X(j\frac{2\pi}{T})$

4
2

4亮4

4亮双

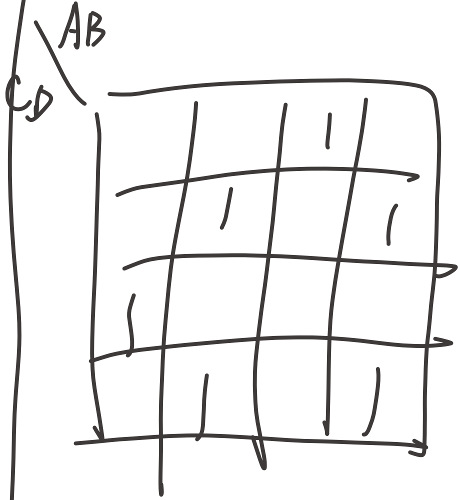
与え：く

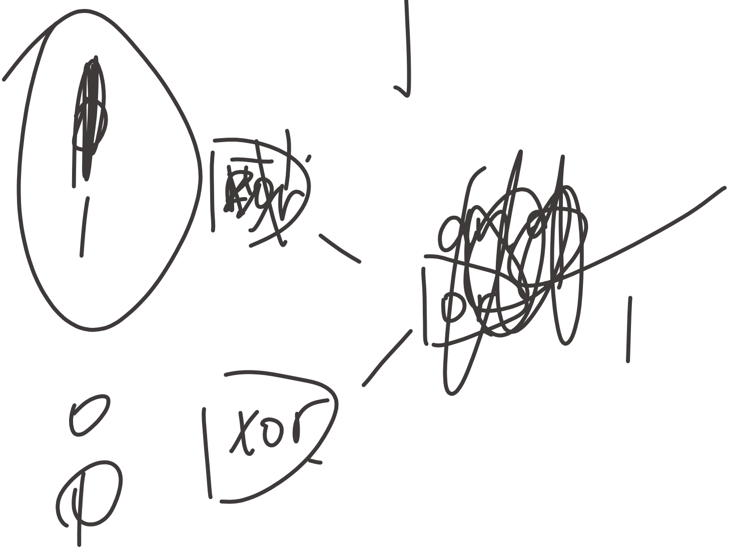
受け入れ成め

ーローロ

~~ーロロ~~

A_4	A_3	A_2	A_1
1	0	0	1
0	0	1	1
0	~~0~~	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0





或 & a

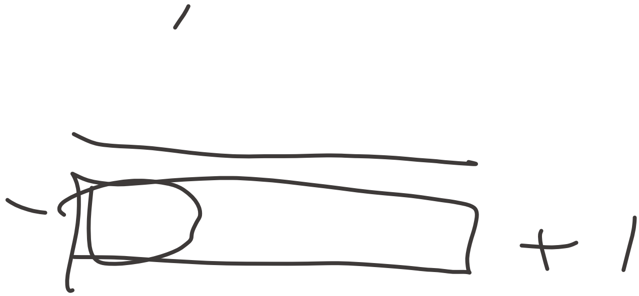
1 1 与. or.

0 0 与

1 0 xor.

1 0 xor.

0	1
1	0



待写 写入

1	0	Delay	Output
1	1		0
1	1		1
0	1		1
0	1		0
0	0		0
1	0		0
0	1		0
1	1		0
1	1		1
1	0		1
0	0		1
0	1		1
0	1		0