第八章　相量法

本章内容

● 重点:

1. 正弦量的表示、相位差

2. 正弦量的相量表示

3. 电路定理的相量形式

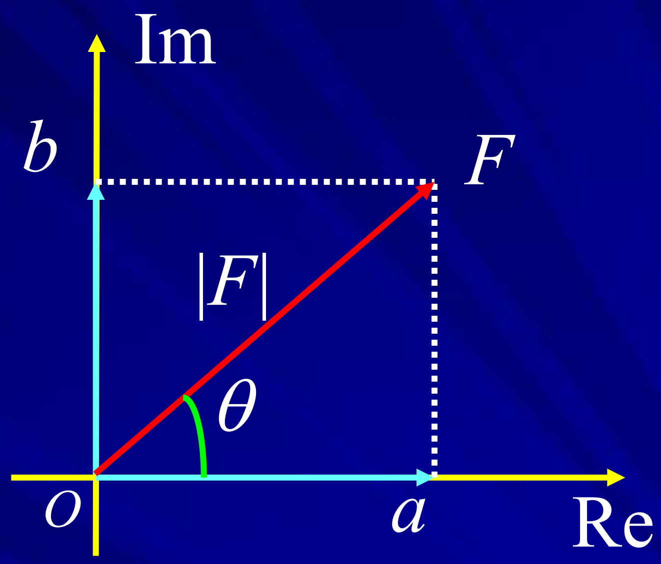
8-1 复数

1. 复数的表示形式

$$F = a + \mathrm{j}b$$ 代数式

($\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位)

$$F = |F|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$ 指数式



三角函数式

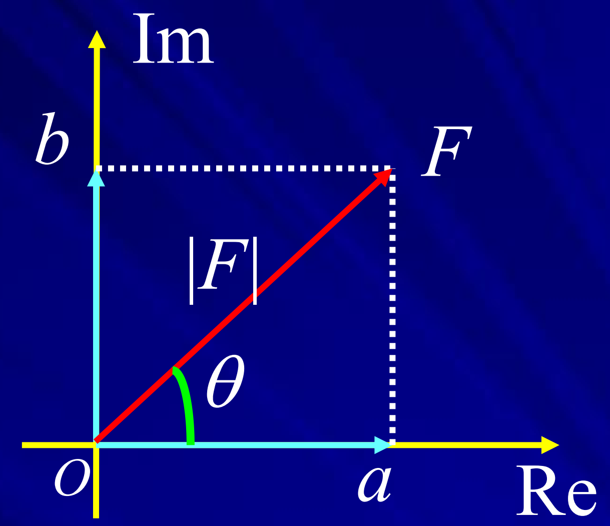
$$F = |F|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = a + \mathrm{j}b$$

$$F = |F|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = |F|\underline{/\theta}$$ 极坐标式

几种表示法的关系：

$$F = a + \mathrm{j}b$$

$$F = |F|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = |F|\angle\theta$$



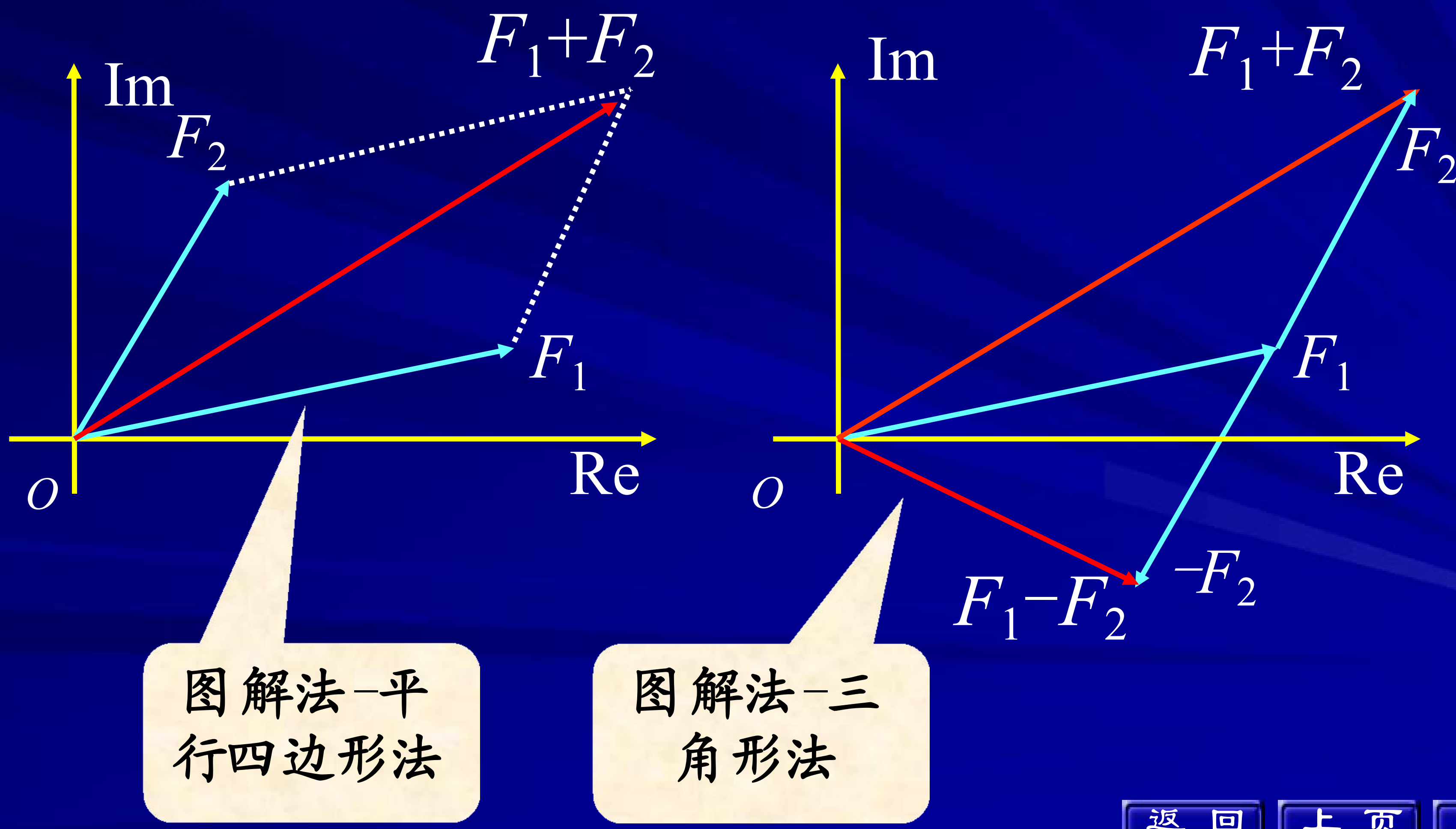
$$\begin{cases} |F| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan(\dfrac{b}{a}) \end{cases}$$ 或 $$\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$$

2. 复数运算

①加减运算 —— 采用代数式

若　$F_1=a_1+jb_1$，$F_2=a_2+jb_2$

则　$F_1 \pm F_2=(a_1 \pm a_2)+j(b_1 \pm b_2)$



②乘除运算 —— 采用极坐标式

若 $F_1=|F_1|\angle\theta_1$ ，$F_2=|F_2|\angle\theta_2$

则 $$F_1\cdot F_2=|F_1|e^{j\theta_1}\cdot|F_2|e^{j\theta_2}=|F_1||F_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$
$$=|F_1||F_2|\angle\theta_1+\theta_2$$

模相乘
角相加

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{|F_1|\angle\theta_1}{|F_2|\angle\theta_2}=\frac{|F_1|e^{j\theta_1}}{|F_2|e^{j\theta 2}}=\frac{|F_1|}{|F_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$
$$=\frac{|F_1|}{|F_2|}\angle\theta_1-\theta_2$$

模相除
角相减

乘除运算也可以采用代数式。

例1-1 $5\angle 47^\circ + 10\angle -25^\circ = ?$

解 原式 $= (3.41 + j3.657) + (9.063 - j4.226)$

$= 12.47 - j0.569 \quad = 12.48\angle -2.61^\circ$

例1-2 $220\angle 35^\circ + \dfrac{(17 + j9)\,(4 + j6)}{20 + j5} = ?$

解 原式 $= 180.2 + j126.2 \quad + \dfrac{19.24\angle 27.9^\circ \times 7.211\angle 56.3^\circ}{20.62\angle 14.04^\circ}$

$= 180.2 + j126.2 + 6.728\angle 70.16^\circ$

$= 180.2 + j126.2 + 2.238 + j6.329$

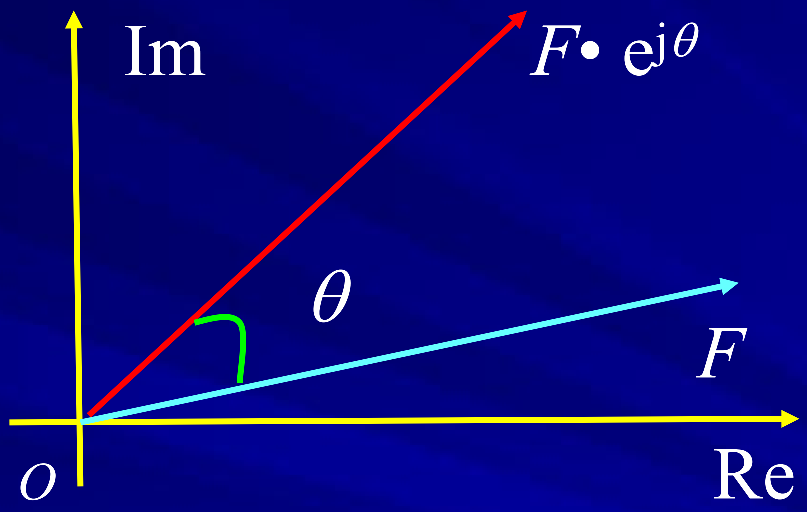
$= 182.5 + j132.5 = 225.5\angle 36^\circ$

③旋转因子

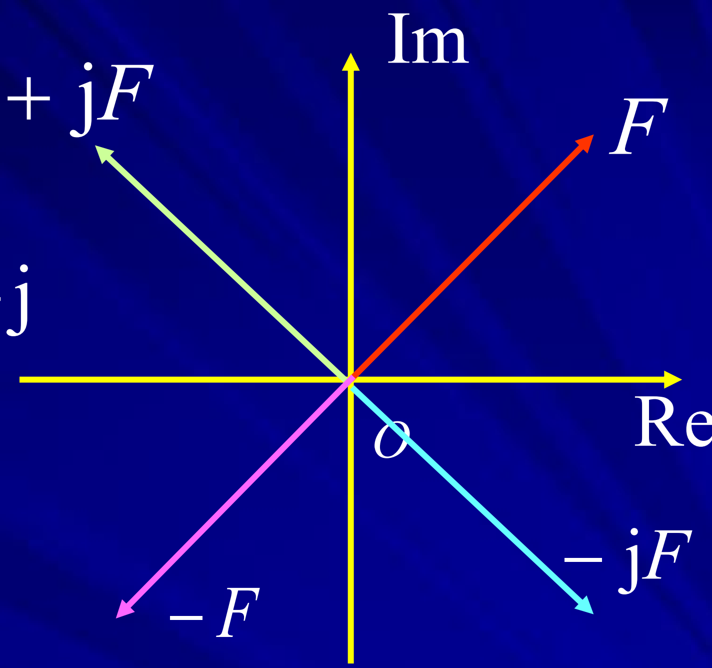
复数 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta=1\angle\theta$

$F\bullet e^{j\theta}$

旋转因子



特殊旋转因子



$$\theta=\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}=\cos(\frac{\pi}{2})+\mathrm{j}\sin(\frac{\pi}{2})=+\mathrm{j}$$

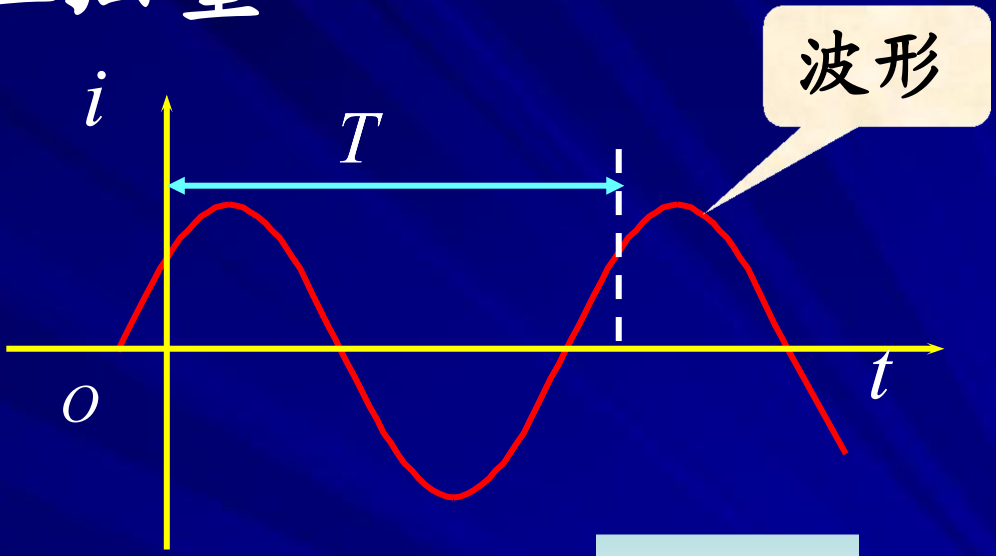
$$\theta=-\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}-\frac{\pi}{2}}=\cos(-\frac{\pi}{2})+\mathrm{j}\sin(-\frac{\pi}{2})=-\mathrm{j}$$

$$\theta=\pm\pi,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pm\pi}=\cos(\pm\pi)+\mathrm{j}\sin(\pm\pi)=-1$$

注意 $+\mathrm{j}, -\mathrm{j}, -1$ 都可以看成旋转因子。

8-2 正弦量

1. 正弦量



●瞬时值表达式

$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)$

正弦量为周期函数 $f(t+kT)=f(t)$

$f=\dfrac{1}{T}$

●周期 T 和频率 f

周期 T：重复变化一次所需的时间。单位：s（秒）

频率 f：每秒重复变化的次数。单位: Hz（赫兹）

●正弦稳态电路

激励和响应均为同频率的正弦量的线性电路（正弦稳态电路）称为正弦稳态电路或交流电路。

●研究正弦稳态电路的意义

1. 正弦稳态电路在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位。

优点

①正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍是同频率的正弦函数。

②正弦信号容易产生、传送和使用。

2. 正弦信号是一种基本信号，任何非正弦周期信号可以分解为按正弦规律变化的分量的叠加。

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega t+\theta_k)$$

结论

对正弦稳态电路的分析研究具有重要的理论价值和实际意义。

2. 正弦量的三要素

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)$$

（1）幅值（振幅、最大值）I_m

→ 反映正弦量变化幅度的大小。

（2）角频率 ω

→ 相位变化的速度，反映正弦量变化快慢。

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

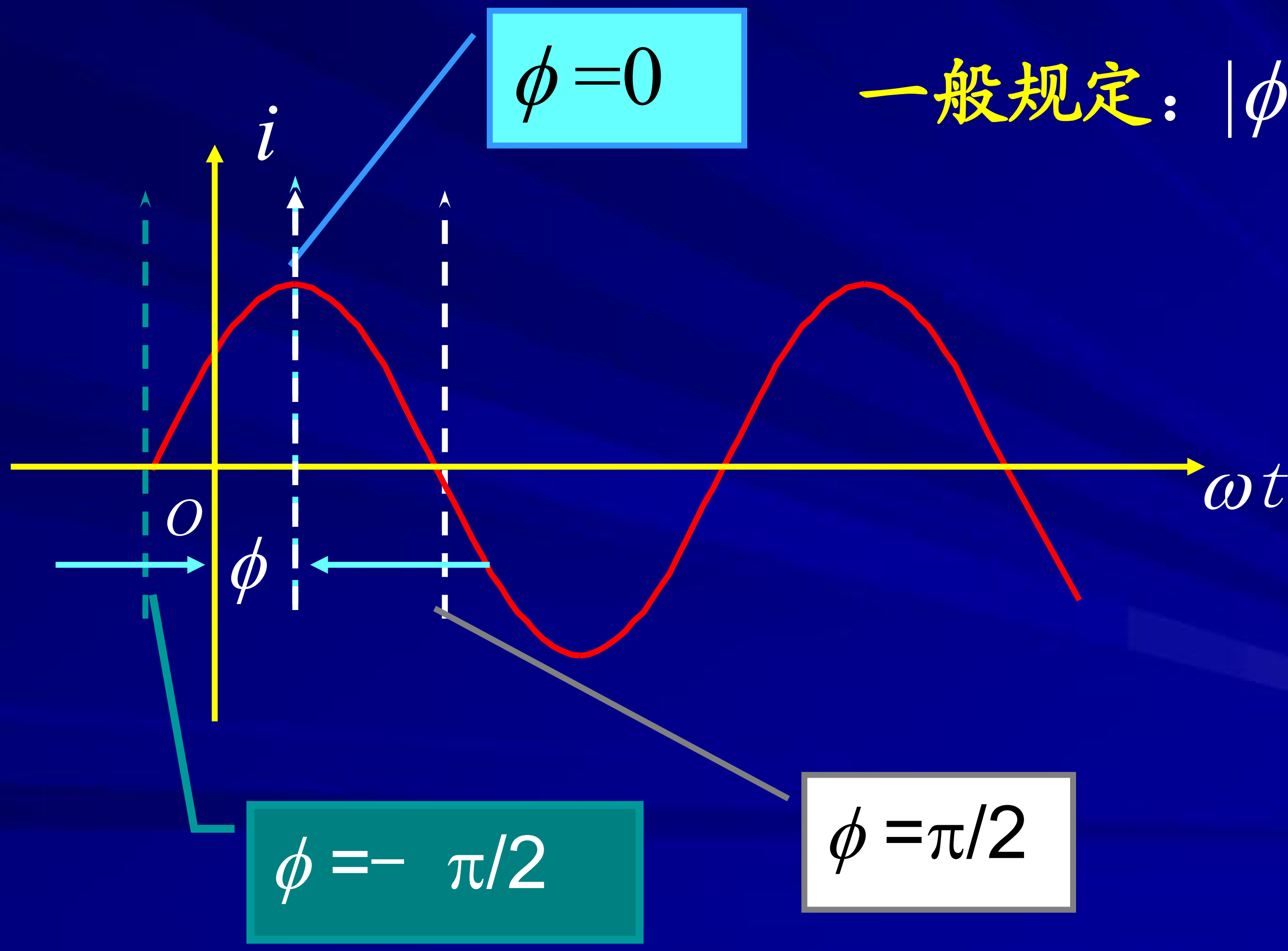
单位：rad/s，弧度/秒

（3）初相位 ϕ

→ 反映正弦量的计时起点，常用角度表示。

注意 同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。

一般规定：$|\phi| \leq \pi$ 。



例2-1已知正弦电流波形如图， $\omega = 10^3$rad/s,

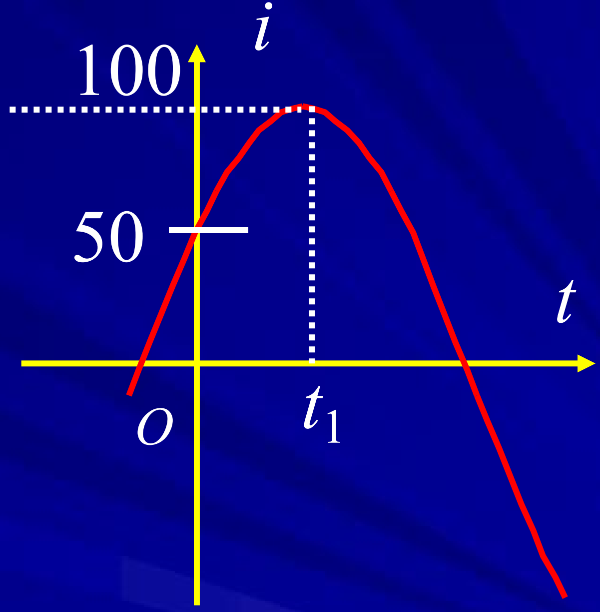
1. 写出 $i(t)$ 表达式；2.求最大值发生的时间 t_1。

解

$$i(t) = 100\cos(10^3 t + \phi)$$

$$t = 0 \rightarrow 50 = 100\cos\phi$$

$$\rightarrow \quad \phi = \pm\pi/3 \quad \rightarrow \quad \phi = -\frac{\pi}{3}$$



由于最大值发生在计时起点右侧

$$i(t) = 100\cos(10^3 t - \frac{\pi}{3})$$

当 $10^3 t_1 = \pi/3$ 有最大值 $\rightarrow$ $t_1 = \dfrac{\pi/3}{10^3}\text{s} = 1.047\text{ms}$

3. 同频率正弦量的相位差

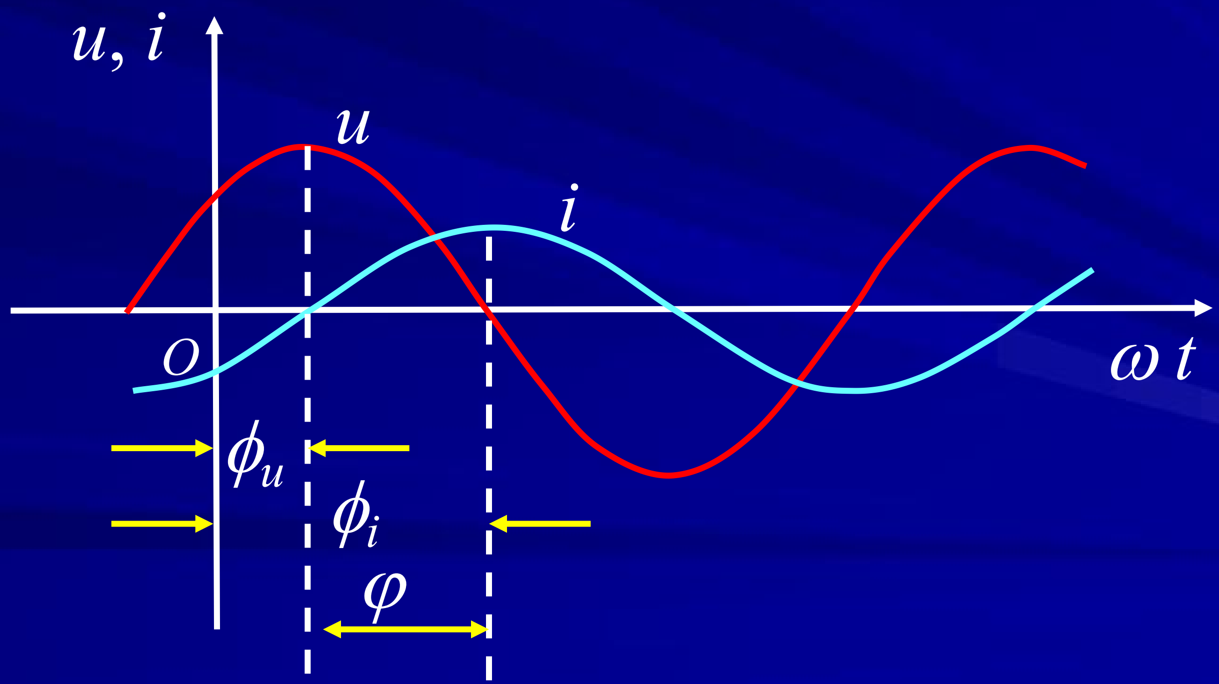
设 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\phi_u)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$

相位差：$\varphi = (\omega t+\phi_u)-(\omega t+\phi_i)= \phi_u-\phi_i$

等于初相位之差

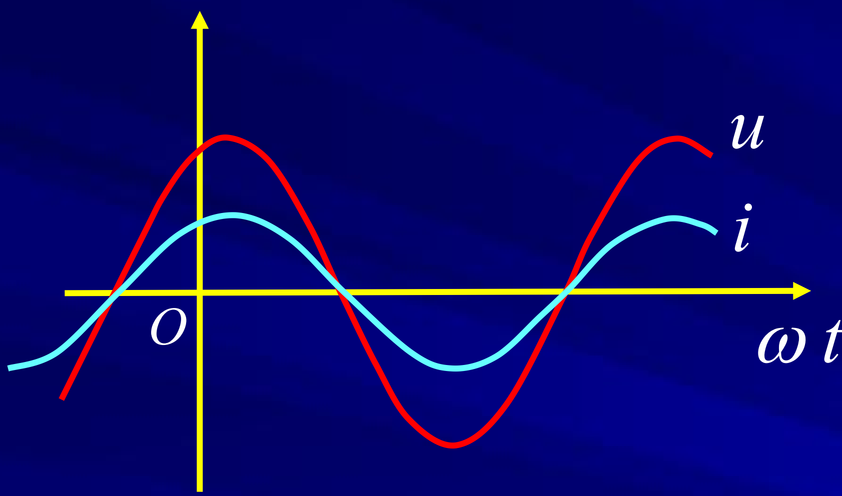
规定：$|\varphi| \leqslant \pi \ (180°)$

- $\varphi>0$， u超前i φ角，或i滞后 u φ角 (u比 i先到达最大值)。
- $\varphi<0$， i超前 u φ角，或u滞后 i φ角(i比 u先到达最大值) 。

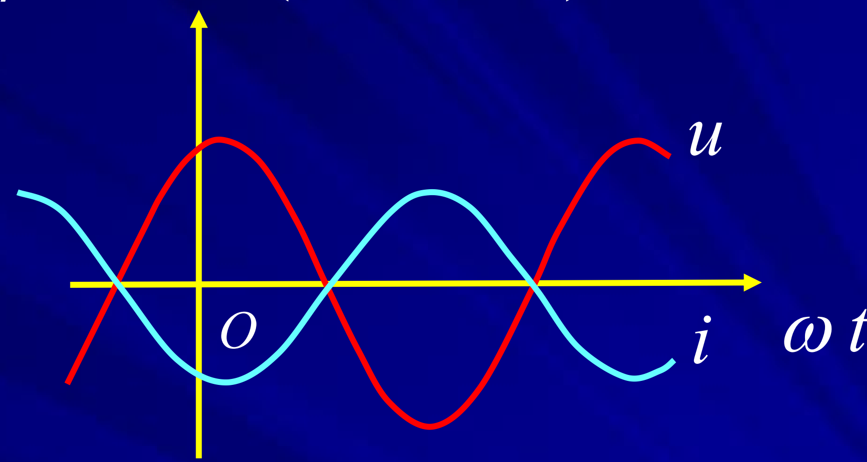


特殊相位关系

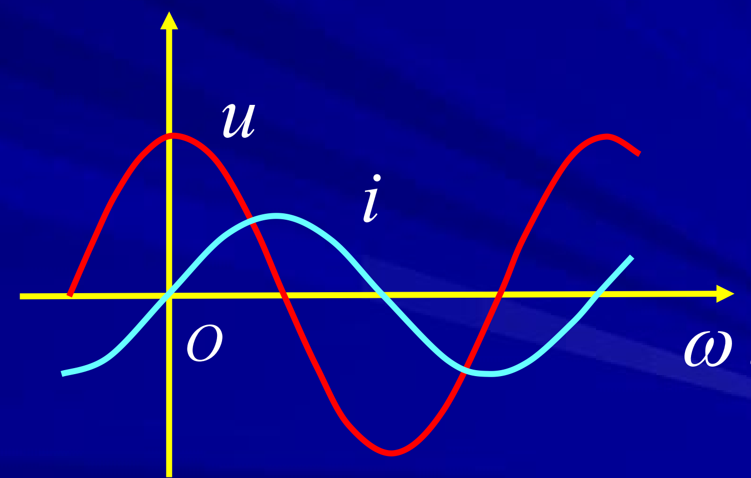
$\varphi = 0$，同相



$\varphi = \pm\pi$ （$\pm 180°$），反相



$\varphi = \pi/2$：u 超先 i $\pi/2$



同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

例 计算下列两正弦量的相位差。

解

(1) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+3\pi/4)$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-\pi/2)$

$\varphi=3\pi/4-(-\pi/2)=5\pi/4>0$

$\rightarrow \varphi=5\pi/4-2\pi=-3\pi/4$

$i_2(t)=3\cos(100\pi t-150^\circ)$

$\rightarrow \varphi=-30^\circ-(-150^\circ)=120^\circ$

(4) $i_1(t)=5\cos(100\pi t-30^\circ)$

$i_2(t)=-3\cos(100\pi t+30^\circ)$

结论

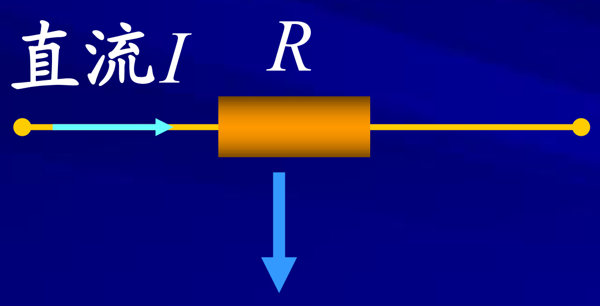
两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果，工程上采用有效值来表示。

●周期电流、电压有效值定义

物理意义



$$W = RI^2T \quad = \quad W = \int_0^T Ri^2(t)\,\mathrm{d}t$$

均方根值

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

定义电压有效值:

$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

● 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\phi\ )$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\phi)\,dt}$$

因为 $\int_0^T \cos^2(\omega t+\phi)\,dt=\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t+\phi)}{2}dt$

$$=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$$

$$\boxed{I_m=\sqrt{2}I}$$

所以 $I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}} \quad 或 \quad U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U$$

若交流电压有效值为 U=220V，　U=380V

其最大值为 U_{m}≈311V　U_{m}≈537V

注意

① 工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。

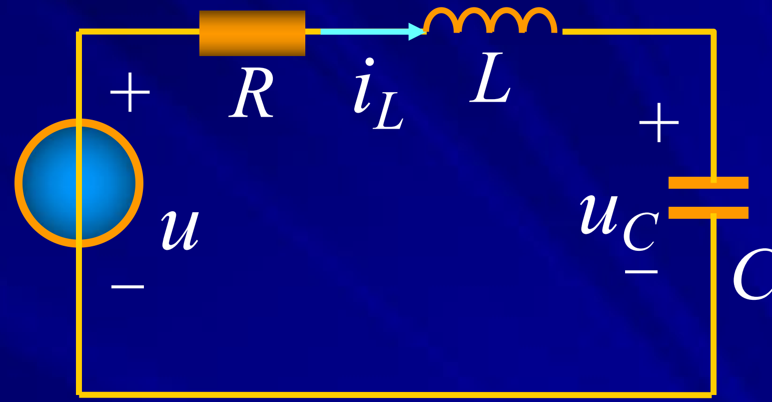
②测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

③区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

$$i\,,I_{\mathrm{m}}\,,I\;,\quad u\,,U_{\mathrm{m}}\,,U$$

8-3 相量法的基础

1. 问题的提出

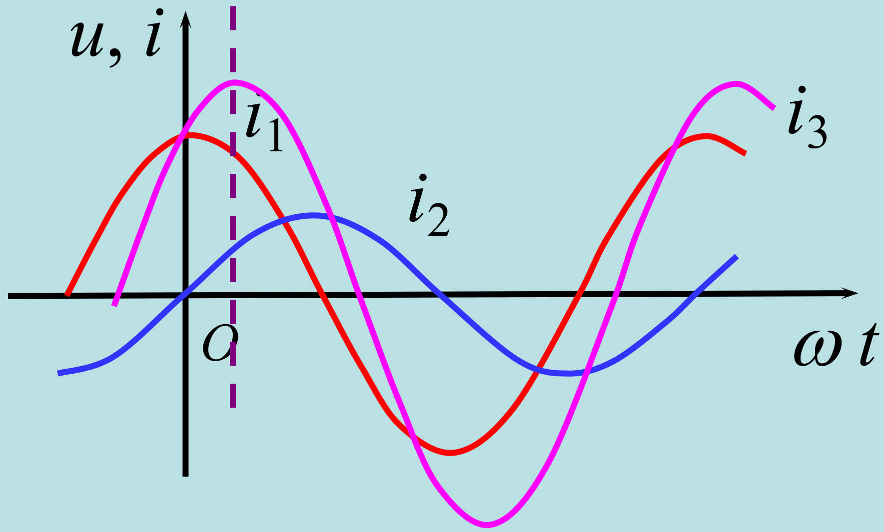


电路方程是微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u(t)$$

两个正弦量的相加，如KCL、KVL方程运算:

$$i_1=\sqrt{2}\,I_1\cos(\omega t+\phi_1)$$
$$i_2=\sqrt{2}\,I_2\cos(\omega t+\phi_2)$$



结论

同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，所以，只需确定初相位和有效值。因此采用

正弦量 ⟷ 复数

变换的思想

3. 正弦量的相量表示

无物理意义

造一个复函数 $F(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$

$$=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)+\mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\omega t+\phi)$$

对 $F(t)$ 取实部 $\mathrm{Re}[F(t)]=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)=i(t)$

是一个正弦量有物理意义

结论

任意一个正弦时间函数都有唯一与其对应的复数函数。

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)\leftrightarrow F(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$$

$F(t)$ 还可以写成

$$F(t)=\sqrt{2}\underbrace{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}_{\text{复常数}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

正弦量对应的相量

$F(t)$ 包含了三要素：I、ϕ、ω，

复常数包含了两个要素：I，ϕ。

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)\Leftrightarrow\dot{I}=I\underline{/\phi}$$

注意

①相量的模表示正弦量的有效值。

②相量的幅角表示正弦量的初相位。

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}=U\underline{/\theta}$$

例3-1 已知 $i=141.4\cos(314t+30^{\circ})\ \text{A}$

$u=311.1\cos(314\text{t}-60^{\circ})\ \text{V}$

试用相量表示 i, u。

解 $\dot{I}=100\underline{/30^{\circ}}\ \text{A},\quad \dot{U}=220\underline{/-60^{\circ}}\ \text{V}$

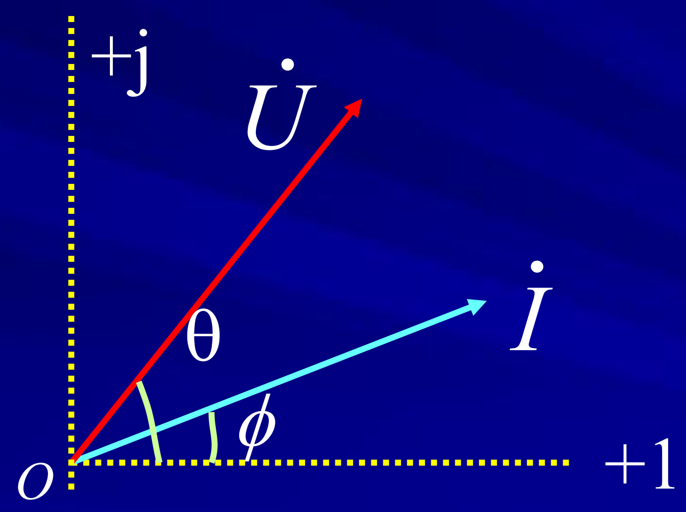
例3-2 已知 $\dot{I}=50\underline{/15^{\circ}}\ \text{A},\ f=50\text{Hz}$，试写出电流的瞬时值表达式。

解 $i=50\sqrt{2}\cos(314t+15^{\circ})\ \text{A}$

● 相量图 → 在复平面上用矢量表示相量的图。

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi)\rightarrow \dot{I}=I\angle\phi$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\rightarrow \dot{U}=U\angle\theta$$



4. 相量法的应用

①同频率正弦量的加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}U_1\cos(\omega t+\phi_1)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}U_2\cos(\omega t+\phi_2)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\underbrace{(\dot{U}_1+\dot{U}_2)}_{\dot{U}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

相量关系为： $\boxed{\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2}$

结论 同频正弦量的加减运算变为对应相量的加减运算。

$$i_1 \pm i_2 = i_3$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow$$

$$\dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

例3-3

$$u_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)\ \text{V}$$

$$u_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(314t + 60^\circ)\ \text{V}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = 6\underline{/30^\circ}\ \text{V} \\ \dot{U}_2 = 4\underline{/60^\circ}\ \text{V} \end{cases}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\underline{/30^\circ} + 4\underline{/60^\circ}$$

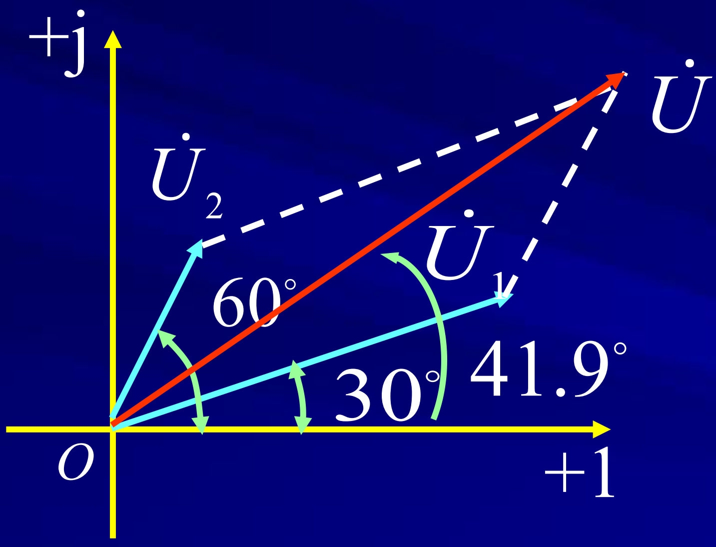
$$= 5.19 + \text{j}3 + 2 + \text{j}3.46 = 7.19 + \text{j}6.46$$

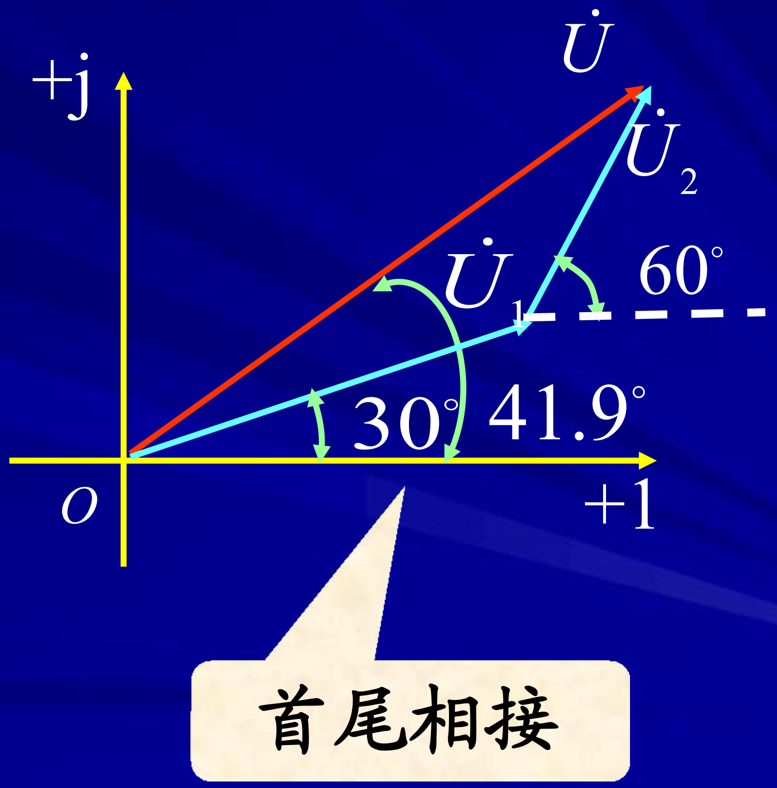
$$= 9.64\underline{/41.9^\circ}\ \text{V}$$

$$\Rightarrow u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 9.64\sqrt{2}\cos(314t + 41.9^\circ)\ \text{V}$$

借助相量图计算

$$\dot{U}_1 = 6\underline{/30^\circ}\ \text{V} \qquad \dot{U}_2 = 4\underline{/60^\circ}\ \text{V}$$





②正弦量的微分、积分运算

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)\leftrightarrow \dot{I}=I\angle\phi_i$$

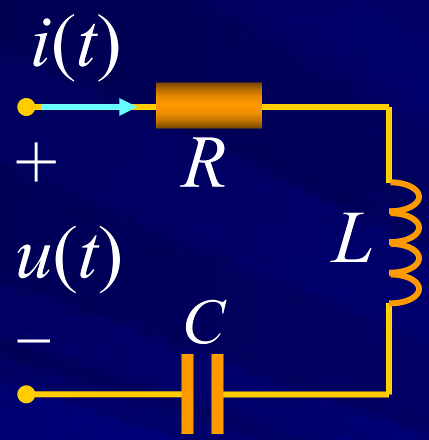
微分运算 $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}\cdot\mathrm{j}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

积分运算 $$\int i\mathrm{d}t=\int\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\rightarrow \mathrm{j}\omega\dot{I}=\omega I\angle\phi_i+\pi/2$$

$$\int i\mathrm{d}t\rightarrow\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}=\frac{I}{\omega}\angle\phi_i-\pi/2$$

例3-4



$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$$

$$u(t)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

用相量运算:

$$\dot{U}=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}+\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega C}$$

相量法的优点

①把时域问题变为复数问题。

②把微积分方程的运算变为复数代数方程运算。

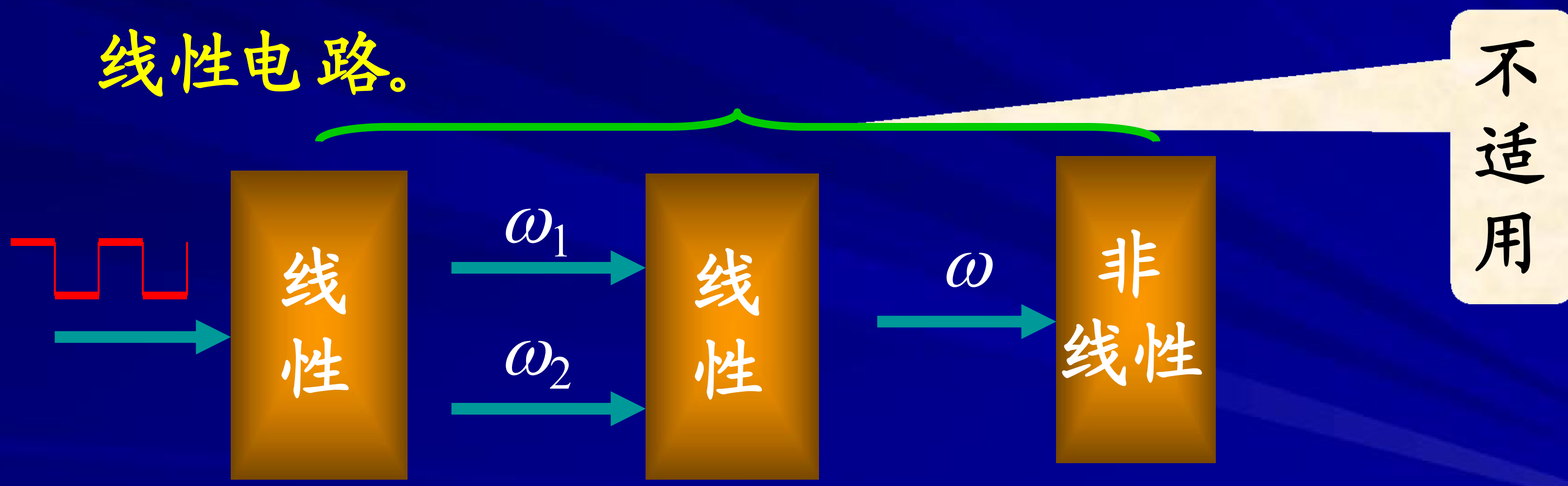
③可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路。

注意 ① 正弦量 ⇄ 相量

时域 频域

正弦波形图 ⇄ 相量图

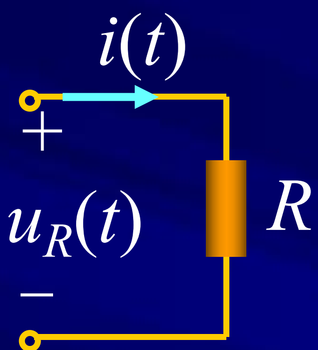
②相量法只适用于激励为同频正弦量的时不变线性电路。



③相量法用来分析正弦稳态电路。

8-4　电路定律的相量形式

1. 电阻元件VCR的相量形式



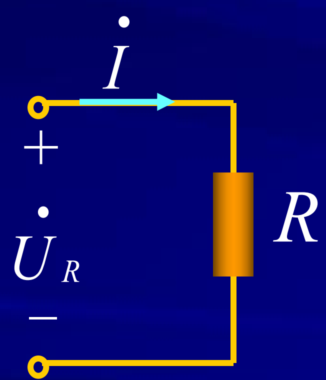
时域形式

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$$

$$u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}\underbrace{RI}_{U_R}\cos(\omega t+\underbrace{\phi_i}_{\phi_u})$$

相量形式

$$\dot{I}=I\angle\phi_i \qquad \dot{U}_R=RI\angle\phi_i$$



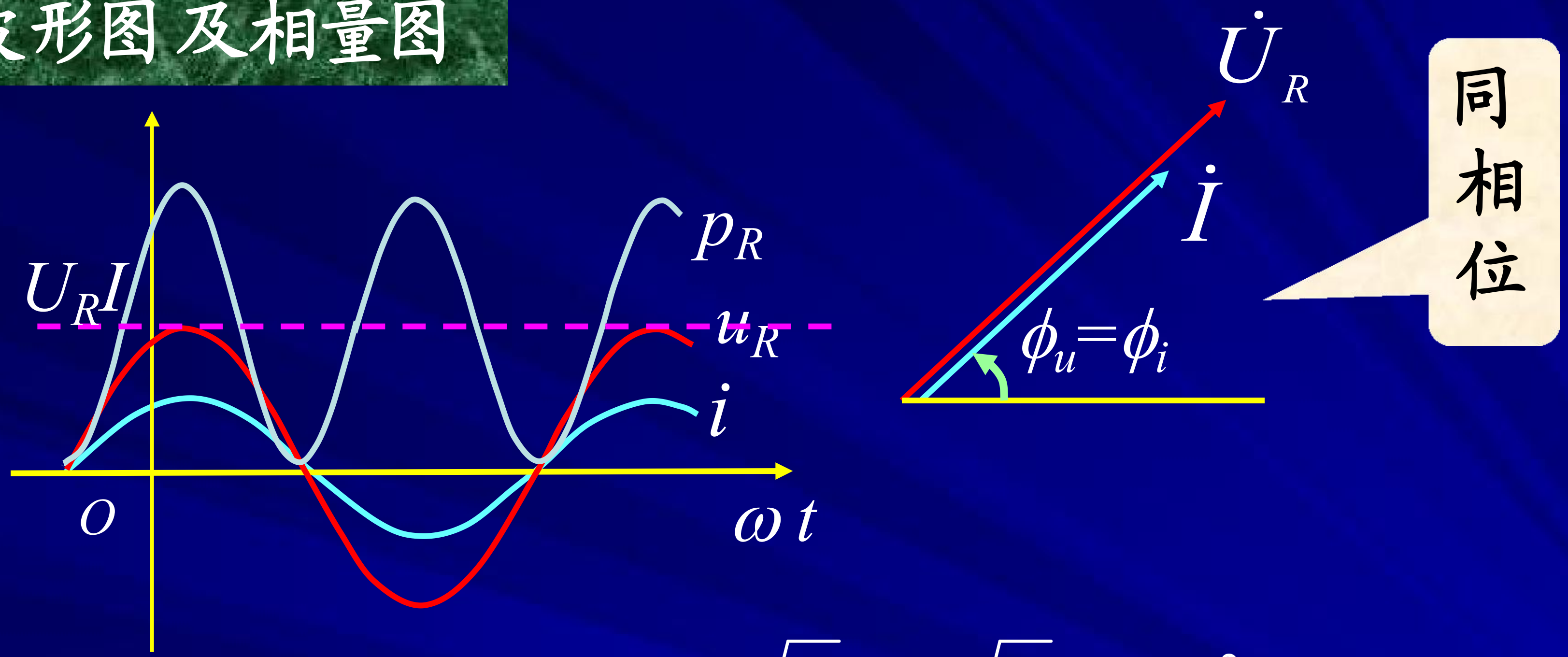
相量模型

相量关系

$$\boxed{\dot{U}_R=R\dot{I}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}U_R=RI & \text{有效值关系}\\ \phi_u=\phi_i & \text{相位关系}\end{cases}$$

波形图及相量图

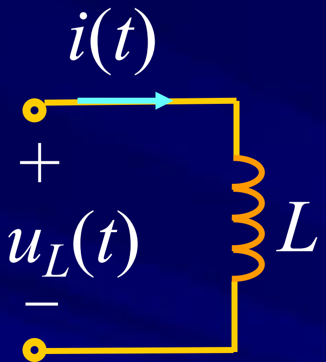


瞬时功率

$$p_R = u_R i = \sqrt{2}U_R \sqrt{2}I\cos^2(\omega t + \phi_i)$$
$$= U_R I[1 + \cos 2(\omega t + \phi_i)]$$

瞬时功率以2ω交变，始终大于零，表明电阻始终吸收功率。

2. 电感元件VCR的相量形式

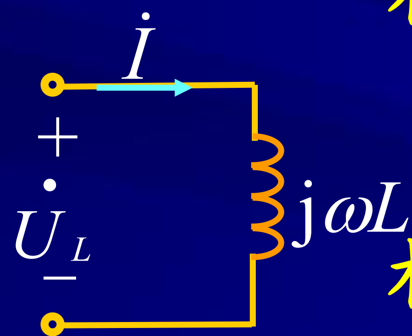


时域形式

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\phi_i)$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega L I\sin(\omega t+\phi_i)$$

$$=\sqrt{2}\omega L I\cos(\omega t+\phi_i+\frac{\pi}{2})$$



相量形式

$$\dot{I}=I\angle\phi_i \qquad \dot{U}_L=\omega LI\angle\phi_i+\pi/2$$

相量关系

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\mathrm{j}X_L\dot{I}$$

相量模型

有效值关系 $U_L=\omega L I$

相位关系 $\phi_u=\phi_i+90^\circ$

感抗和感纳

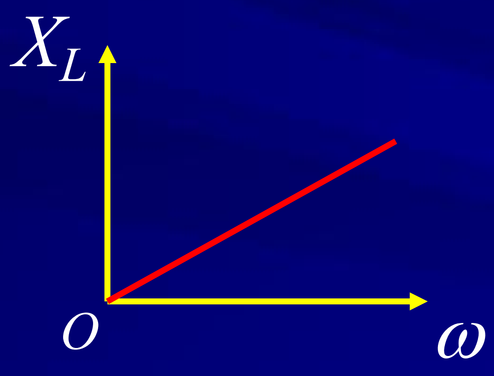
$X_L=\omega L=2\pi fL$，称为感抗，单位为Ω（欧[姆]）

$B_L=-1/\omega L=-1/2\pi fL$，称为感纳，单位为S(西[门子])

感抗的性质

①表示限制电流的能力。

②感抗和频率成正比。



$\omega=0$（直流），$X_L=0$，短路。

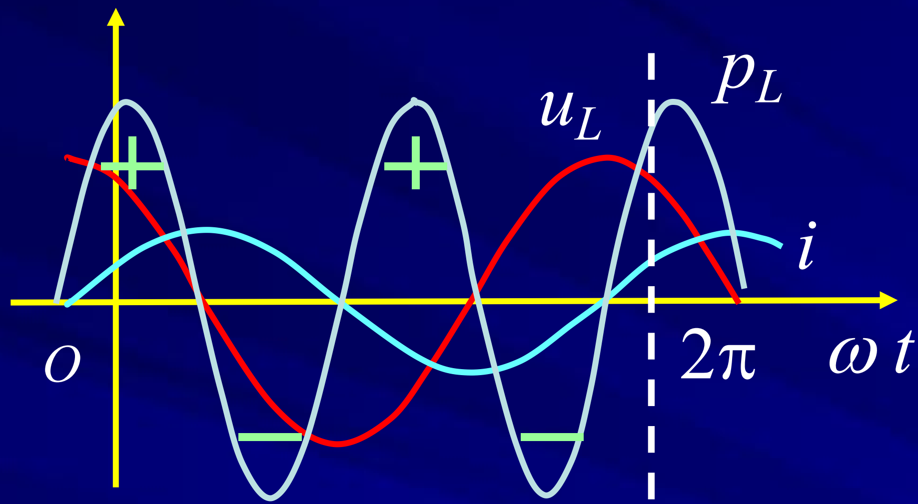
$\omega\to\infty$，$X_L\to\infty$，开路。

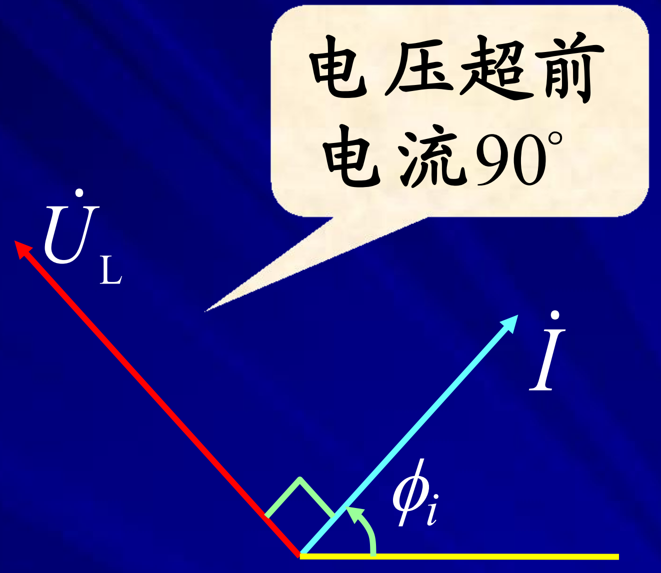
相量表达式

$$\dot U=\mathrm{j}X_L\dot I=\mathrm{j}\omega L\dot I,$$

$$\dot I=\mathrm{j}B_L\dot U=\mathrm{j}\frac{-1}{\omega L}\dot U=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot U$$

波形图及相量图



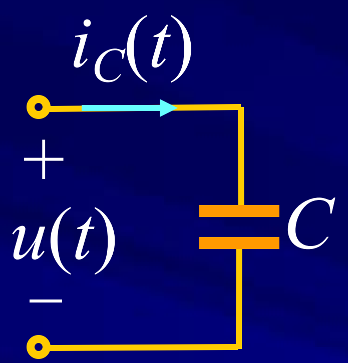


功率

$$p_L = u_L i = U_{Lm} I_m \cos(\omega t + \phi_i)\sin(\omega t + \phi_i)$$
$$= U_L I \sin 2(\omega t + \phi_i)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电感只储能不耗能。

3. 电容元件VCR的相量形式



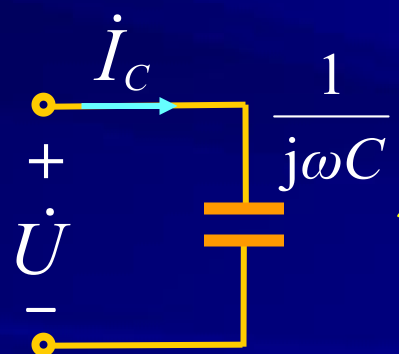
时域形式 $u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\phi_u)$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t+\phi_u)$$

$$=\sqrt{2}\omega CU\cos(\omega t+\phi_u+\frac{\pi}{2})$$

相量形式

$\dot{U}=U\underline{/\phi_u}$ $\dot{I}_C=\omega CU\underline{/\phi_u+\pi/2}$



相量关系

$$\dot{U}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}=\mathrm{j}X_C\dot{I}$$

相量模型

有效值关系 $I_C=\omega CU$

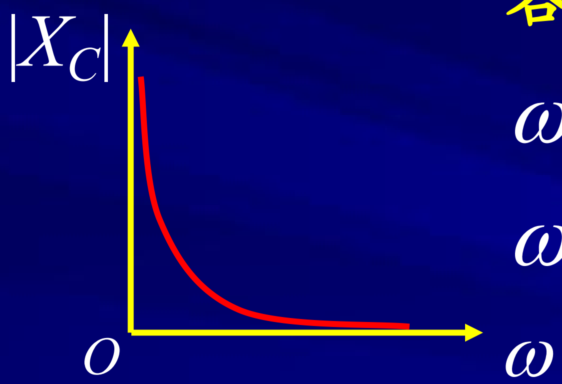
相位关系 $\phi_i=\phi_u+90^\circ$

容抗与容纳

$X_C=-1/\omega C$， 称为容抗，单位为Ω(欧[姆])

$B_C=\omega C$， 称为容纳，单位为S(西[门子])

容抗和频率成反比。



$\omega\rightarrow 0$， $|X_C|\rightarrow\infty$ 直流相当于开路(隔直)。

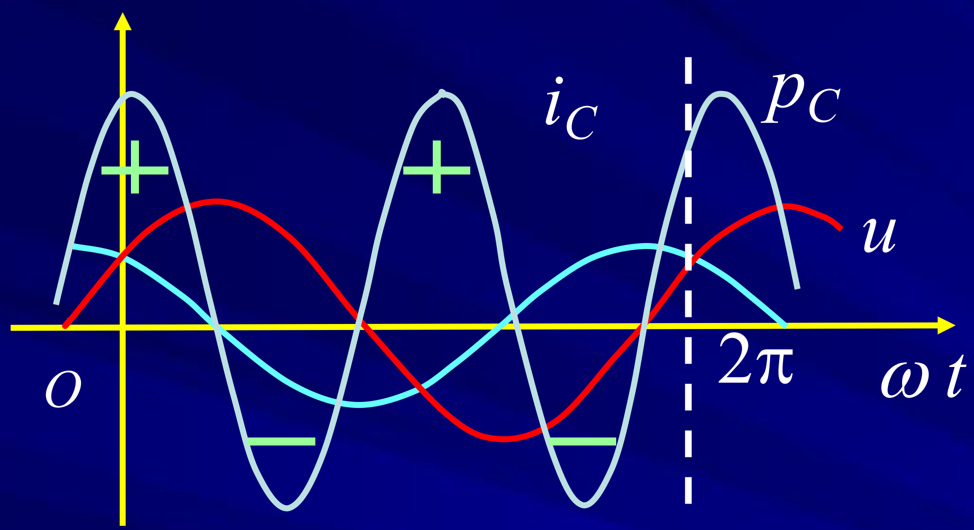
$\omega\rightarrow\infty$， $|X_C|\rightarrow 0$ 高频趋于短路。

相量表达式

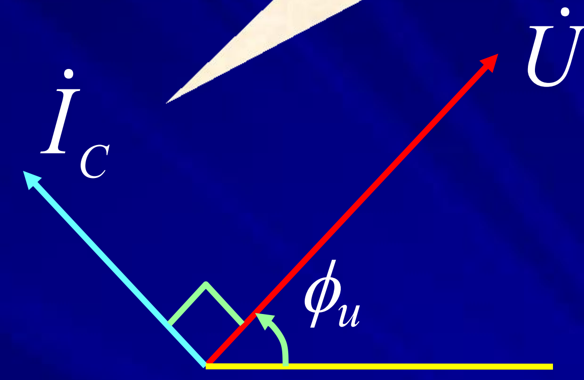
$$\dot{U}=\mathrm{j}X_C\dot{I}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

$$\dot{I}=\mathrm{j}B_C\dot{U}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

波形图及相量图



电流超前电压90°



功率

$$p_C = ui_C = 2UI_C\cos(\omega t+\phi_u)\sin(\omega t+\phi_u)$$

$$= UI_C\sin 2(\omega t+\phi_u)$$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电容只储能不耗能。

4. 基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此，在正弦电流电路中，KCL和KVL可用相应的相量形式表示为

$$\sum i(t)=0 \longrightarrow \sum i(t)=\sum \mathrm{Re}\sqrt{2}\left[\dot{I}_1+\dot{I}_2+\cdots\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=0$$

$$\longrightarrow \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \longrightarrow \sum \dot{U}=0$$

表明 流入某一节点的所有正弦电流用相量表示时仍满足KCL；而任一回路所有支路正弦电压用相量表示时仍满足KVL。

例4-1 试判断下列表达式的正、误。

1. $U = \omega L I$

2. $i = 5\cos\omega t \neq 5\angle 0^\circ$

3. $\dot{I}_{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega C \dot{U}_{\mathrm{m}}$

4. $X_L = \dfrac{U}{I} = \dfrac{U_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}$

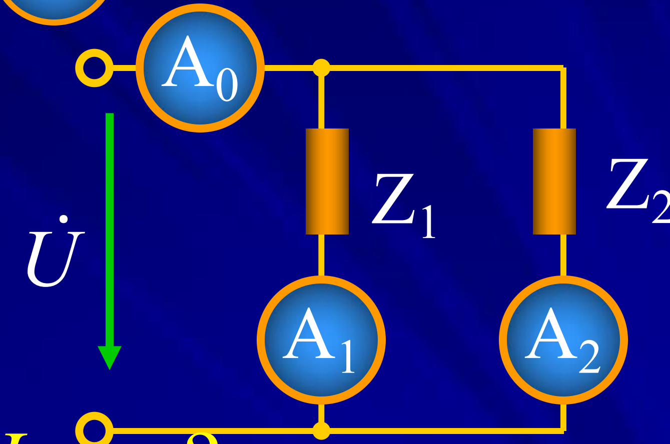
5. $\dfrac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\,\Omega$

6. $\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L \dot{I}_L$

7. $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

例4-2 已知电流表读数: A_1 = 8A, A_2 = 6A。

若 1. $Z_1 = R,\quad Z_2 = \mathrm{j}X_C,$ A_0 = ?



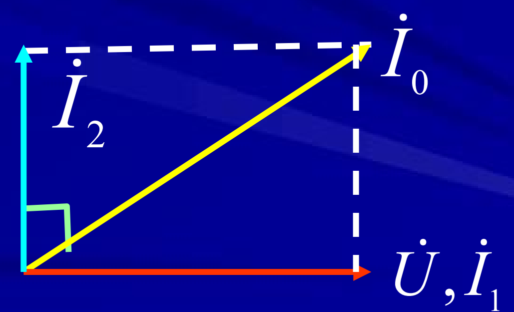
2. $Z_1 = R,\quad Z_2$为何参数使

A_0 = $I_{0\max}$=?

3. $Z_1 = \mathrm{j}X_L, Z_2$为何参数使 A_0 = $I_{0\min}$=?

4. $Z_1 = \mathrm{j}X_L, Z_2$为何参数使 A_0 = A_1? A_2 = ?

解 1. $I_0 = \sqrt{8^2 + 6^2}\,\mathrm{A} = 10\mathrm{A}$

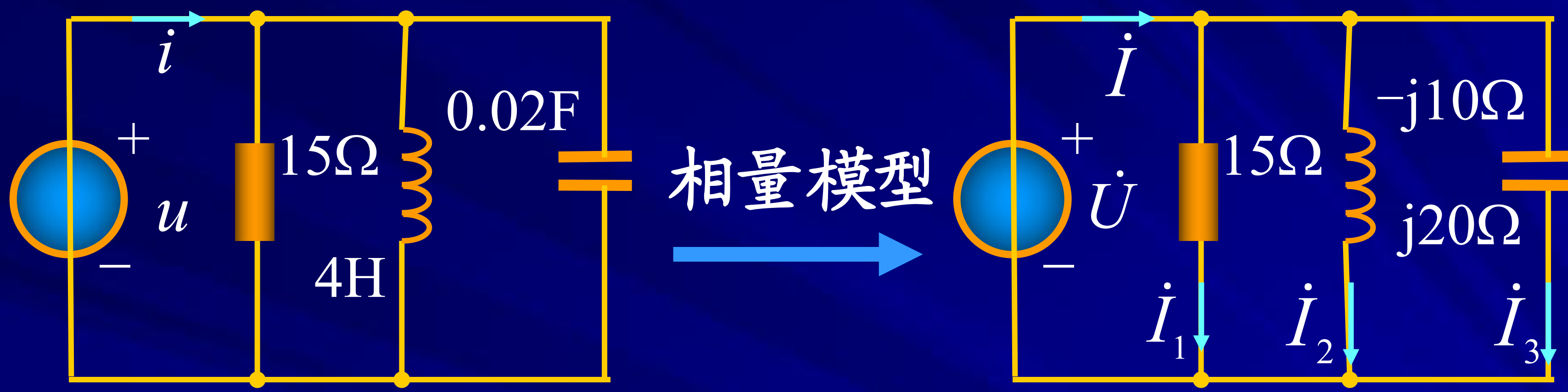


2. $Z_2 = R,\ I_{0\max} = (8+6)\mathrm{A} = 14\mathrm{A}$

3. $Z_2 = \mathrm{j}X_C,\quad I_{0\min} = (8-6)\mathrm{A} = 2\mathrm{A}$

4. $Z_2 = \mathrm{j}X_C,\quad I_0 = I_1 = 8\mathrm{A},\quad I_2 = 16\mathrm{A}$

例4-3 已知 $u(t)=120\sqrt{2}\cos(5t)$, 求$i(t)$。



解 $\dot{U}=120\angle 0^{\circ}$

$$jX_L = j4\times 5\Omega = j20\Omega$$

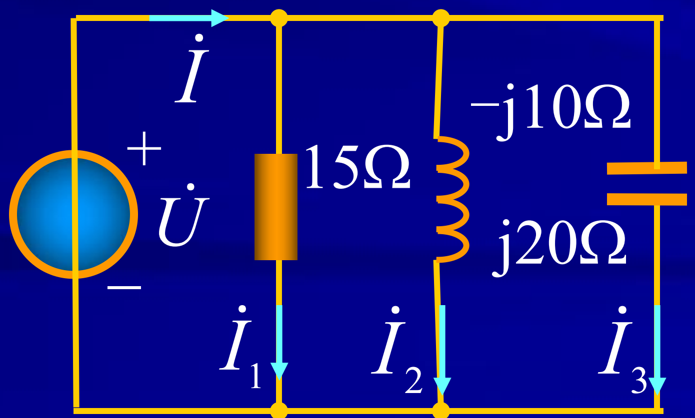
$$jX_C = -j\frac{1}{5\times 0.02}\Omega = -j10\Omega$$

$$\dot I = \dot I_R + \dot I_L + \dot I_C = \frac{\dot U}{R} + \frac{\dot U}{\mathrm{j}X_L} + \frac{\dot U}{\mathrm{j}X_C}$$

$$= 120\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{\mathrm{j}20} - \frac{1}{\mathrm{j}10}\right)\mathrm{A}$$

$$= (8 - \mathrm{j}6 + \mathrm{j}12)\mathrm{A} = (8 + \mathrm{j}6)\mathrm{A} = 10\underline{/36.9^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$i(t) = 10\sqrt{2}\cos(5t + 36.9^\circ)\mathrm{A}$$



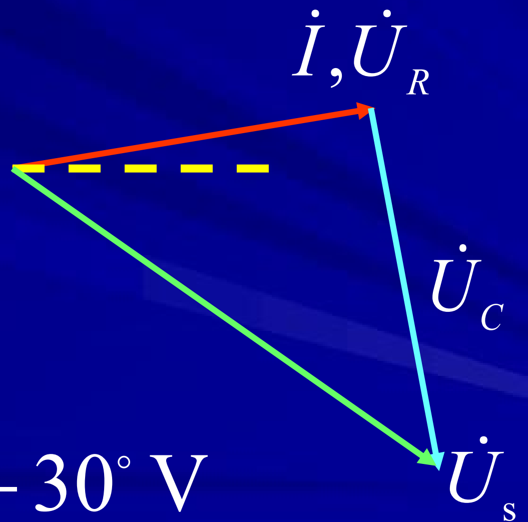
例4-4 已知 $i(t)=5\sqrt{2}\cos(10^6 t+15^\circ)\text{A}$，求 $u_S(t)$。

解 $\dot{I}=5\angle 15^\circ \text{ A}$

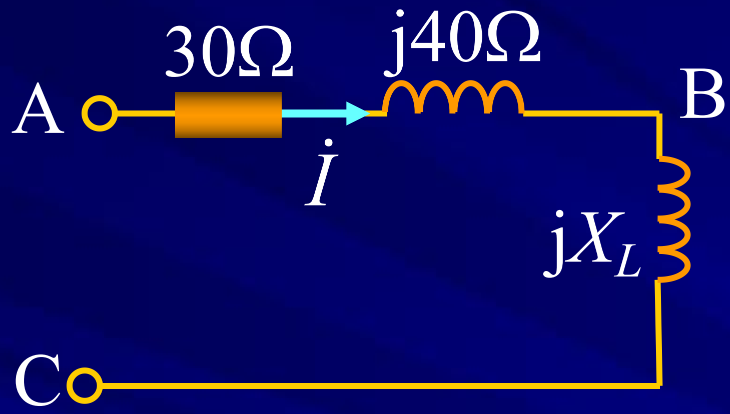
$$\mathrm{j}X_C=-\mathrm{j}\frac{1}{10^6\times 0.2\times 10^{-6}}\Omega=-\mathrm{j}5\Omega$$

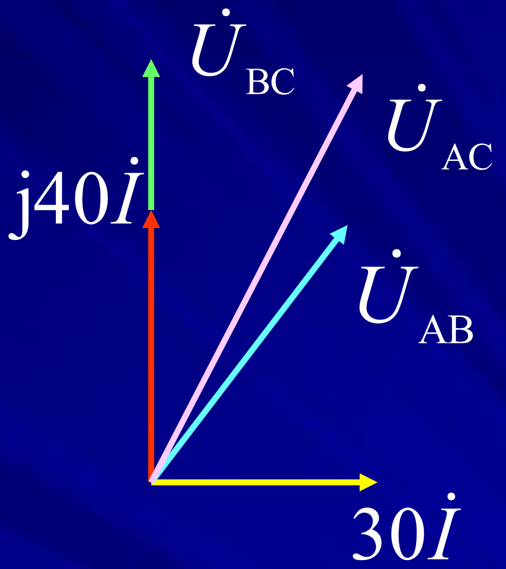
$$\dot{U}_s=\dot{U}_R+\dot{U}_C=5\angle 15^\circ(5-\mathrm{j}5)\text{V}$$

$$=5\angle 15^\circ\times 5\sqrt{2}\angle -45^\circ\text{ V}=25\sqrt{2}\angle -30^\circ\text{ V}$$



例4-5 已知 $U_{AB}=50\text{V}$，$U_{AC}=78\text{V}$，问：$U_{BC}=?$





解

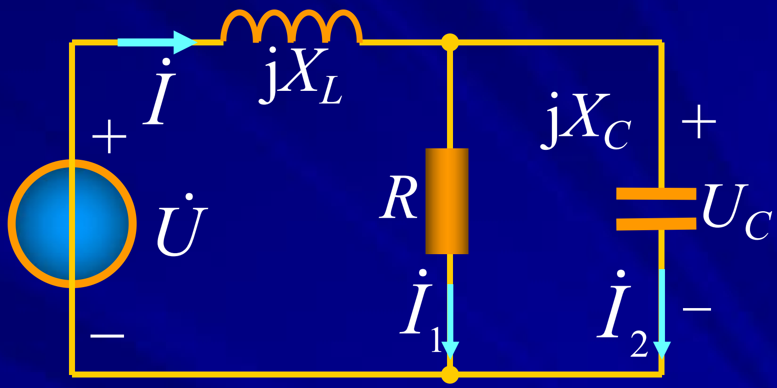
$$U_{AB}=\sqrt{(30I)^2+(40I)^2}=50I$$

$$\Rightarrow I=1\text{A},\quad U_R=30\text{V},\quad U_L=40\text{V}$$

$$U_{AC}=78=\sqrt{(30)^2+(40+U_{BC})^2}$$

$$\Rightarrow U_{BC}=\left[\sqrt{(78)^2-(30)^2}-40\right]\text{V}=32\text{V}$$

例4-6图示电路$I_1=I_2=5\text{A}$，$U=50\text{V}$，总电压与总电流同相位，求I、R、X_C、X_L。



解法1 设 $\dot{U}_C = U_C\angle 0^\circ$

$$\dot{I}_1 = 5\angle 0^\circ\ \text{A},\ \dot{I}_2 = \text{j}5\text{A}$$

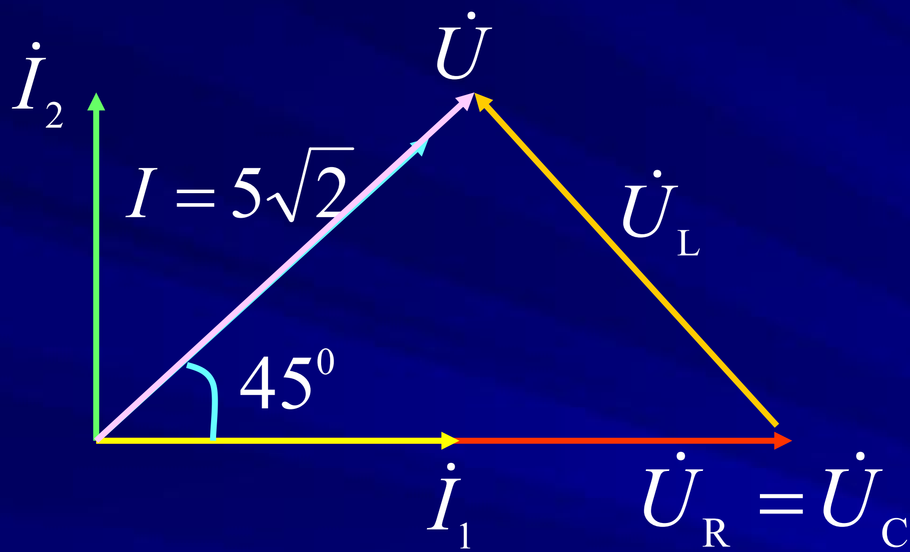
$$\dot{I} = (5+\text{j}5)\text{A} = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{A}$$

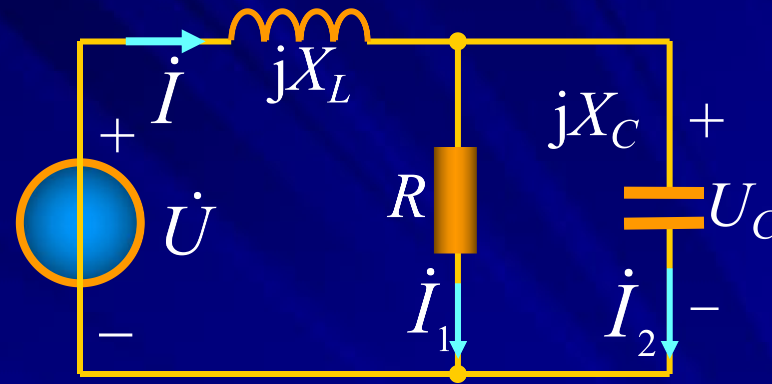
$$\dot{U} = 50\angle 45^\circ = (5+\text{j}5)\times \text{j}X_L + 5R = \frac{50}{\sqrt{2}}(1+\text{j})\text{V}$$

令等式两边实部等于实部，虚部等于虚部

$$\begin{cases} 5X_L = 50/\sqrt{2} \Rightarrow X_L = 5\sqrt{2} \\ 5R = \dfrac{50}{\sqrt{2}} + 5\times 5\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \Rightarrow R = |X_C| = 10\sqrt{2}\Omega \end{cases}$$

解法2 画相量图计算。





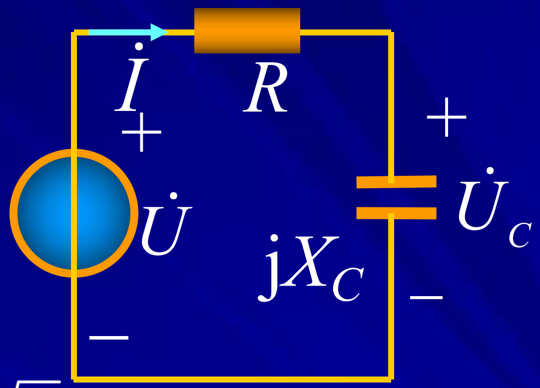
$$U=U_L=50\text{V}$$

$$X_L=\frac{50}{5\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\Omega$$

$$|X_C|=R=\frac{50\sqrt{2}}{5}\Omega=10\sqrt{2}\Omega$$

例4-7 图示电路为阻容移项装置，如要求电容电压滞后于电源电压π/3，问 R、C应如何选择。

解1 $\dot U_s = R\dot I + jX_C\dot I$



$$\dot I = \frac{\dot U_s}{R + jX_C},\quad \dot U_C = jX_C\frac{\dot U_s}{R + jX_C}$$

$$\frac{\dot U_s}{\dot U_C} = j\omega CR + 1 \rightarrow \omega CR = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

解2 画相量图计算。

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{U_R}{U_C} = \frac{RI}{I/\omega C} = \omega CR$$