第六讲连续时间周期信号的傅里叶级数表示与收敛

杜清河
西安交通大学
2025春

本讲对应章节

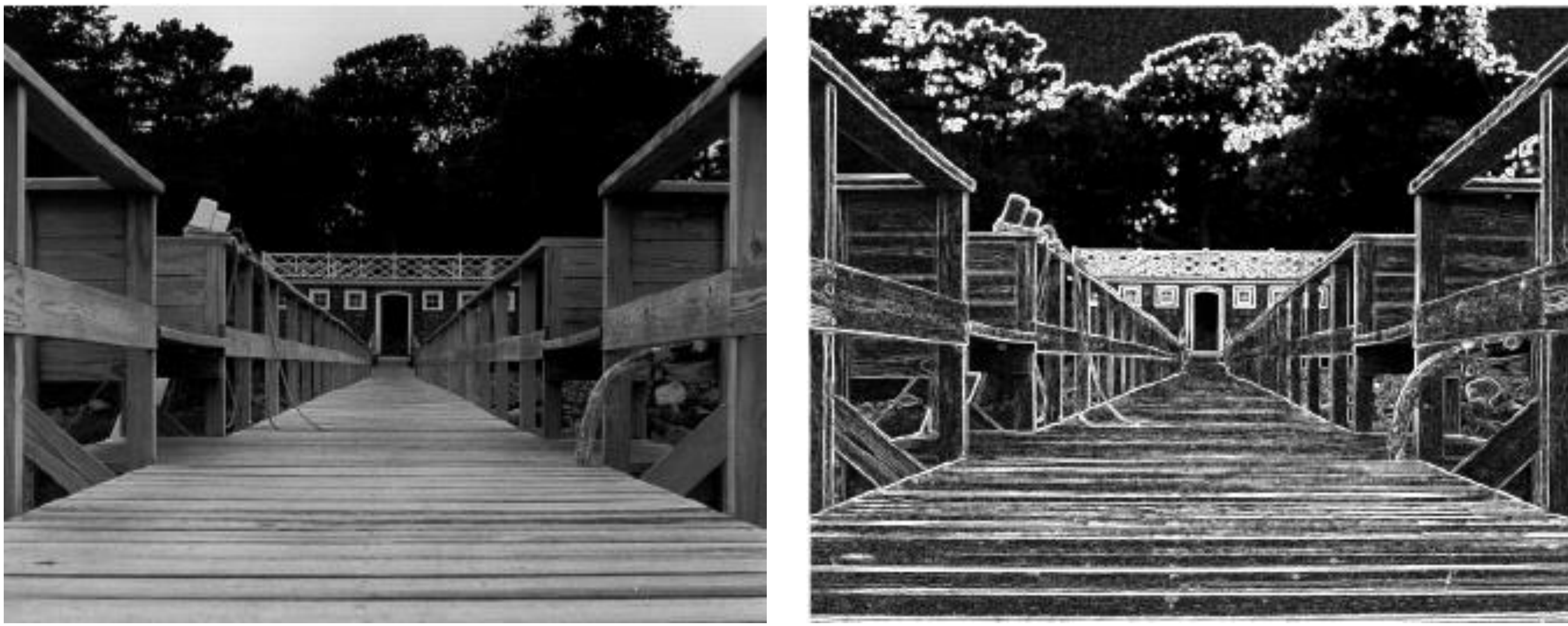
- 3.0-3.4, 3.5, 3.8
- 阅读学习：3.9、3.10
- 后续讲解：3.6、3.7；3.11（阅读学习）

内容提要

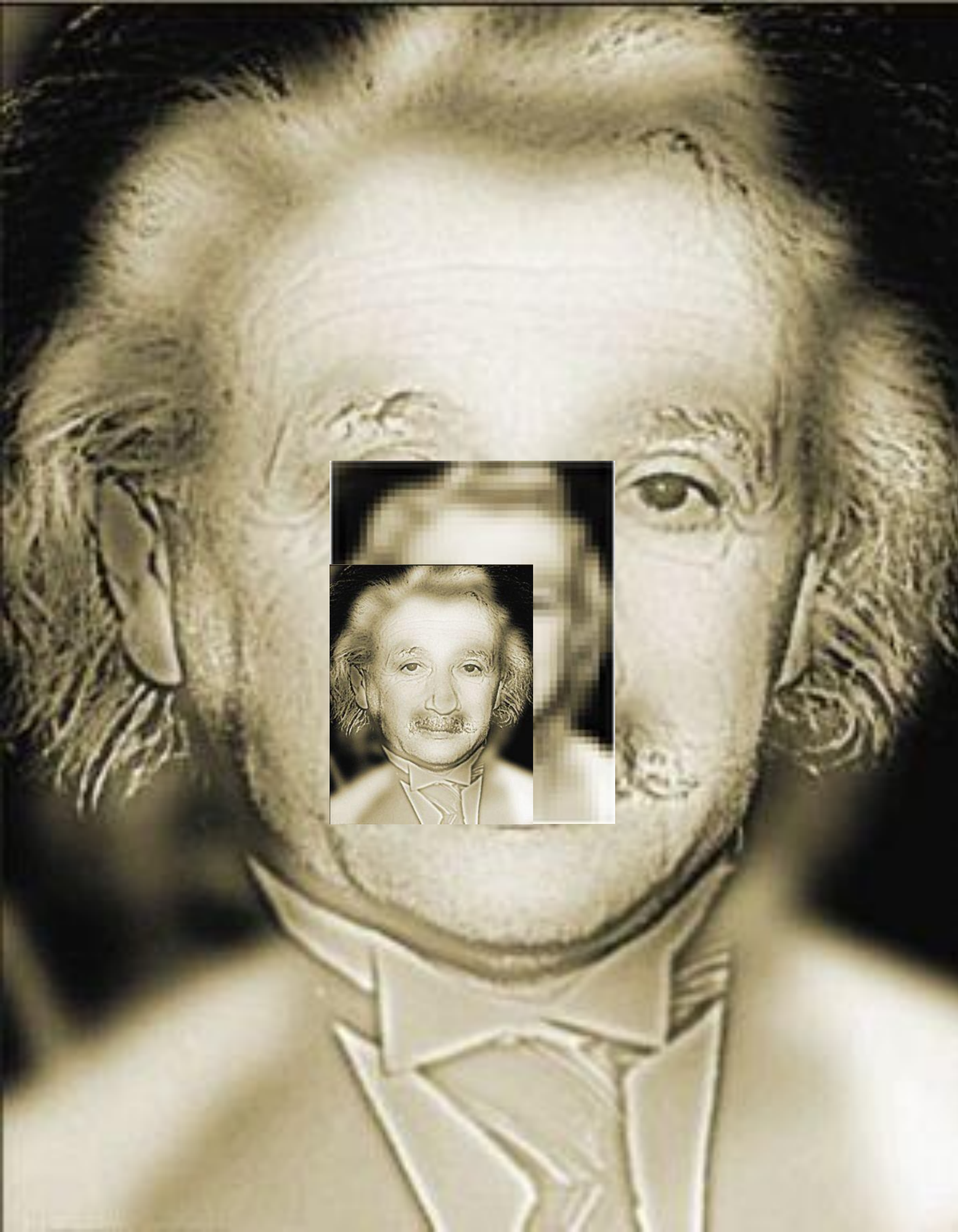
- 引言
- LTI系统对复指数信号的响应
- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 傅里叶级数的收敛性与吉伯斯现象
- 傅里叶级数的性质
- 傅里叶级数与LTI系统

为什么要引入频域分析

- 时域方法在研究信号特性和设计信号处理算法时不够直观



边缘提取



析

析系统特性时不

内容提要

- 引言
- LTI系统对复指数信号的响应
- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 傅里叶级数的收敛性与吉伯斯现象
- 傅里叶级数的性质
- 傅里叶级数与LTI系统

信号分解

- 时域分解

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

把信号表示为基本信号的线性组合

- 基本信号的要求
  - 由这些信号能够表示相当广泛的一类信号
  - LTI系统对每一个基本信号的响应容易确定

特征函数和特征值

$$e^{st} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st}$$

令：

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

可得：

$$e^{st} \rightarrow H(s) e^{st}$$

特征值

特征函数

一个信号，如果系统对它的响应仅是一个常数乘以它，则称该信号为系统的特征函数

特征函数和特征值

$$z^n \to y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}\right] z^n$$

令：

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

可得：

$$z^n \to H(z)\, z^n$$

特征函数

特征值

特征函数和特征值

- 对于某一个LTI系统来说，其特征函数不是唯一的，也不一定具有复指数的形式。

- 尽管某些LTI系统可能有另外的特征函数，但复指数信号是**唯一能够成为一切**LTI系统特征函数的信号。

特征函数和特征值

➢ 举例： $y(t)=x(t-3)$

1)

$$x(t)=e^{j2t} \Rightarrow y(t)=e^{j2(t-3)}=e^{-j6}e^{j2t}$$

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-3)e^{-s\tau}d\tau=e^{-3s} \Rightarrow y(t)=H(j2)e^{j2t}=e^{-j6}e^{j2t}$$

2)

$$x(t)=\cos(4t)+\cos(7t) \Rightarrow y(t)=\cos(4(t-3))+\cos(7(t-3))$$

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j4t}+\frac{1}{2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{j7t}+\frac{1}{2}e^{-j7t}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}e^{-j12}e^{j4t}+\frac{1}{2}e^{j12}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{-j21}e^{j7t}+\frac{1}{2}e^{j21}e^{-j7t}$$

特征函数和特征值

- 连续时间系统：

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{s_k t} \to H(s_k)e^{s_k t}$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=\sum_k a_k H(s_k)e^{s_k t}$$

?

- 离散时间系统：

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n$$

$$\Rightarrow \quad z_k^n \to H(z_k)z_k^n$$

$$\Rightarrow \quad y[n]=\sum_k a_k H(z_k)z_k^n$$

内容提要

- 引言
- LTI系统对复指数信号的响应
- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 傅里叶级数的收敛性与吉伯斯现象
- 傅里叶级数的性质
- 傅里叶级数与LTI系统

成谐波关系的复指数信号的线性组合

$$x(t) = x(t+T)$$

构造如下复指数信号集合：

$$\{\phi_k(t)\} = \left\{e^{jk\omega_0 t}\right\} \quad k = 0, \pm 1, \cdots$$

其中：

$$\omega_0 = 2\pi / T$$

成谐波关系的复指数信号的线性组合：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

傅里叶级数系数的确定

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

因为：$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=T\delta[k-n]$

所以：$a_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

连续时间周期信号的傅里叶级数

综合公式 $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

分析公式 $$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

正交分解

a_k： 频谱系数(频谱)

$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt$： 直流分量(平均值)

$a_k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots,\pm N,\ldots$： k次谐波分量

连续时间周期信号的傅里叶级数

- 讨论：

若 $x(t)$ 为实信号，即： $x(t)=x^{*}(t)$

则： $x(t)=x^{*}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^{*}e^{-jk\omega_0 t}$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{-k}^{*}e^{jk\omega_0 t}$$

而： $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$

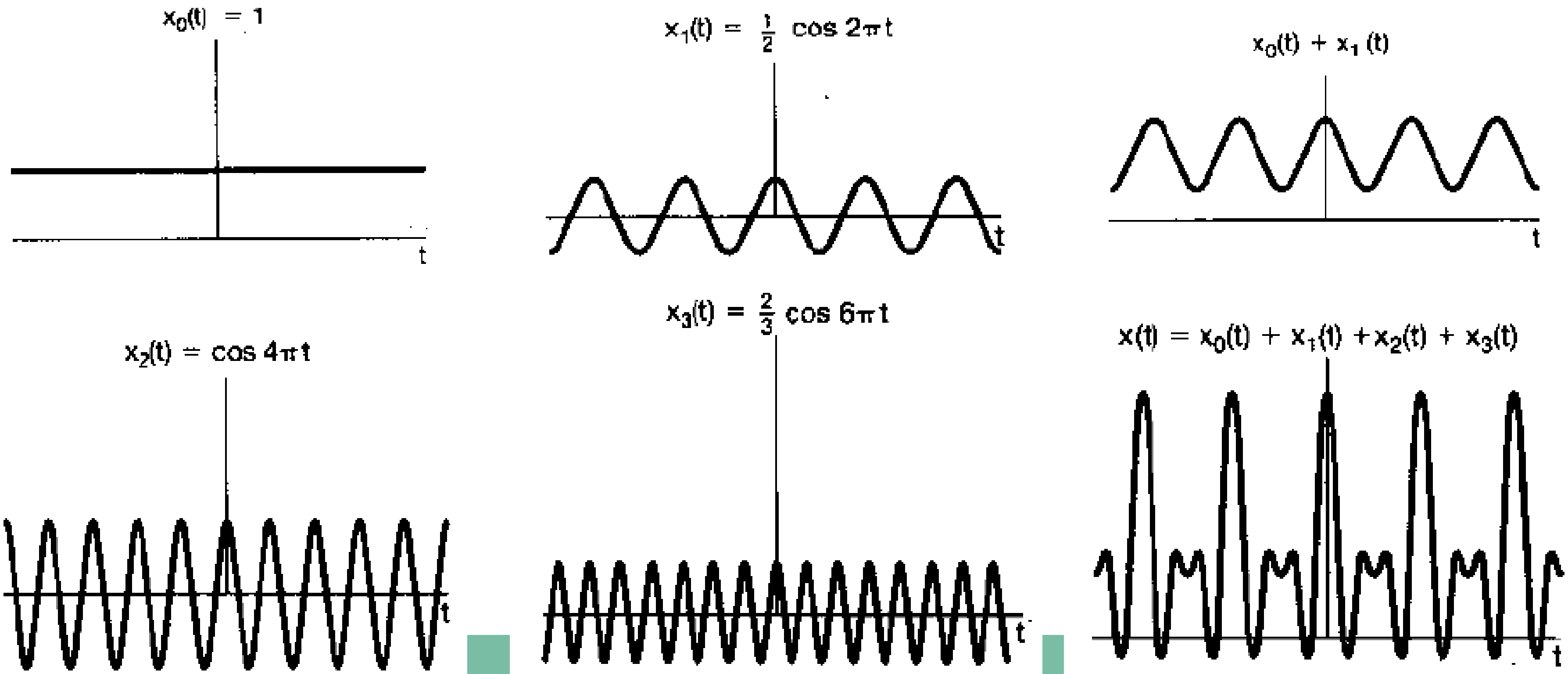
所以： $a_k^{*}=a_{-k} \Rightarrow x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$

$$a_k=A_k e^{j\theta_k}$$

举例

$$x(t)=\sum_{k=-3}^{3}a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0=1,\quad a_1=a_{-1}=\frac{1}{4},\quad a_2=a_{-2}=\frac{1}{2},\quad a_3=a_{-3}=\frac{1}{3}$$



举例

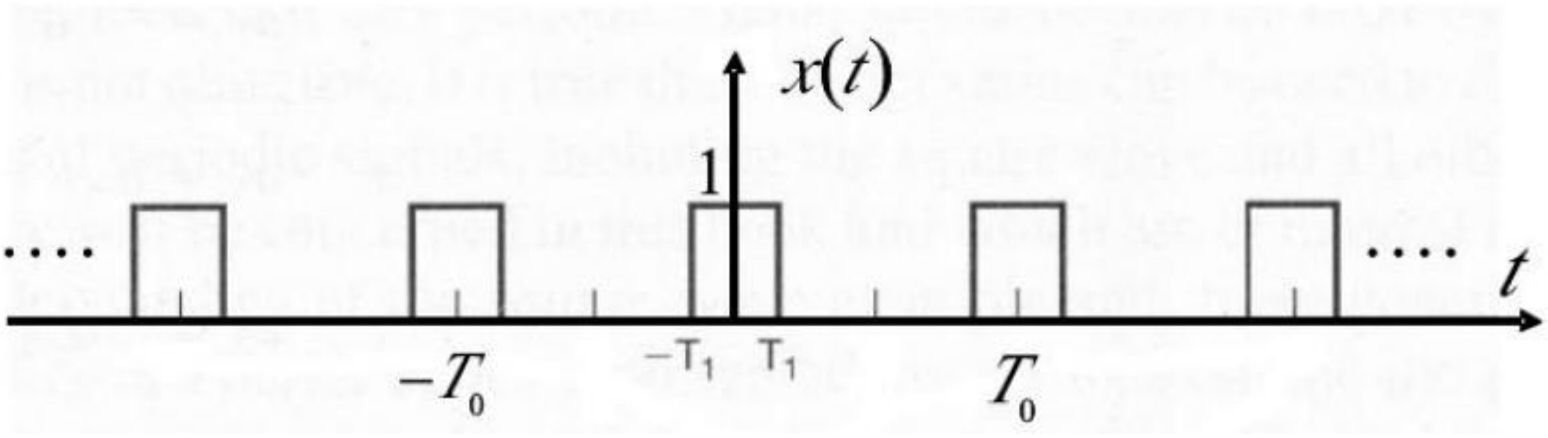
$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, k \neq \pm 1$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt = \frac{1}{T}}$$

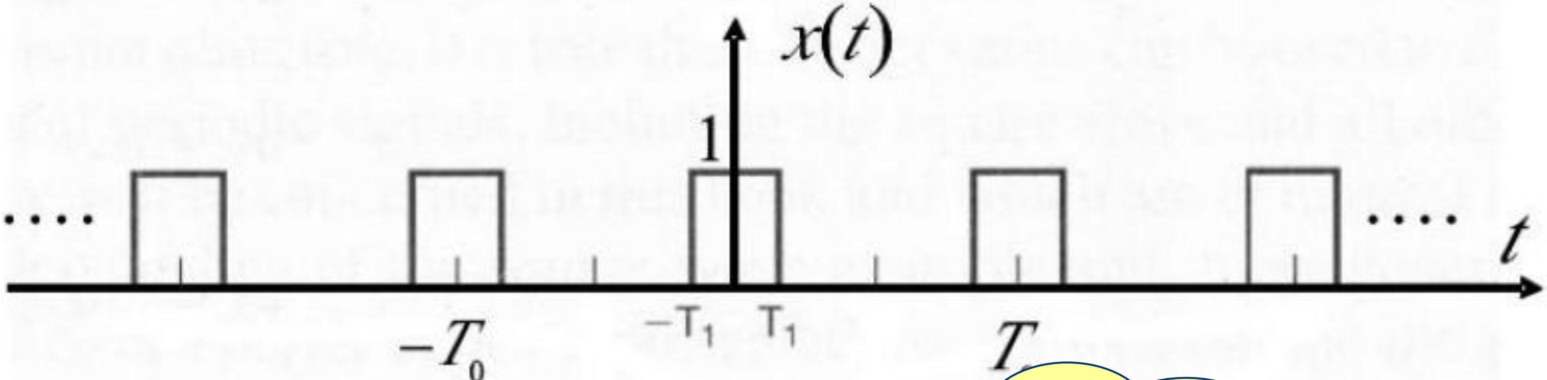
举例：周期性方波的傅里叶级数表示



该周期性方波在一个周期内的定义如下：

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T_0/2\end{cases}$$

举例：周期性方波的傅里叶级数表示



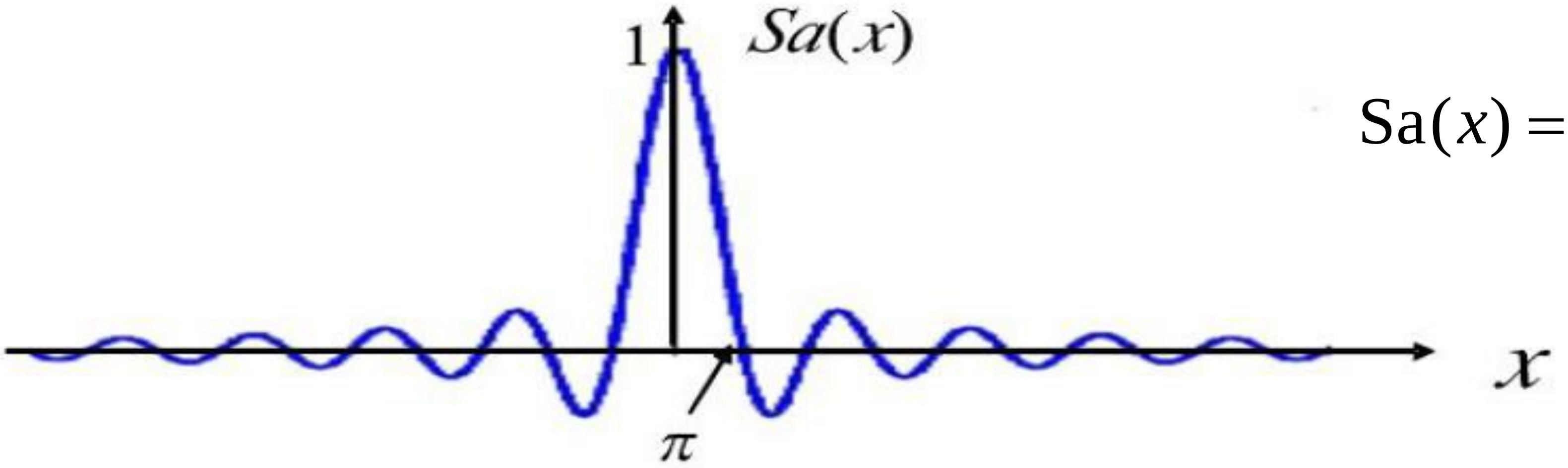
占空比

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0}$$

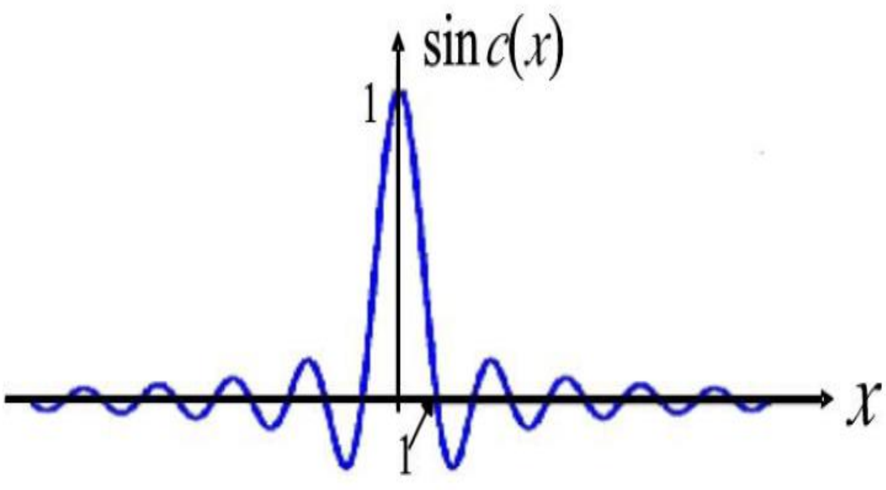
$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} = \frac{2T_1}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1}, k \neq 0$$

$$= \frac{2T_1}{T_0}\mathrm{Sa}\left(k\omega_0 T_1\right) = \frac{2T_1}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{2T_1}{T_0}k\right), k \neq 0$$

举例：周期性方波的傅里叶级数表示



$$\mathrm{Sa}(x)=\frac{\sin x}{x}$$



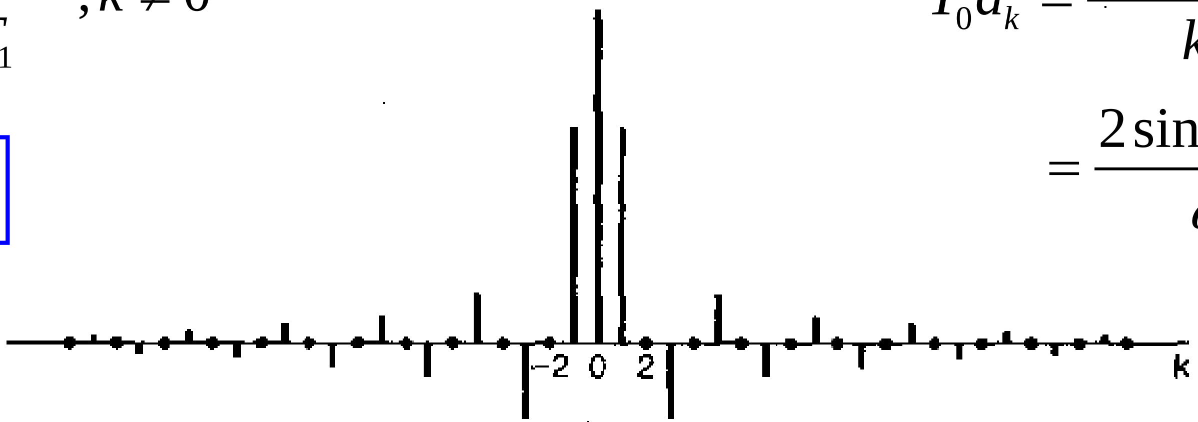
$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

举例：周期性方波的傅里叶级数表示

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1}, k \neq 0$$

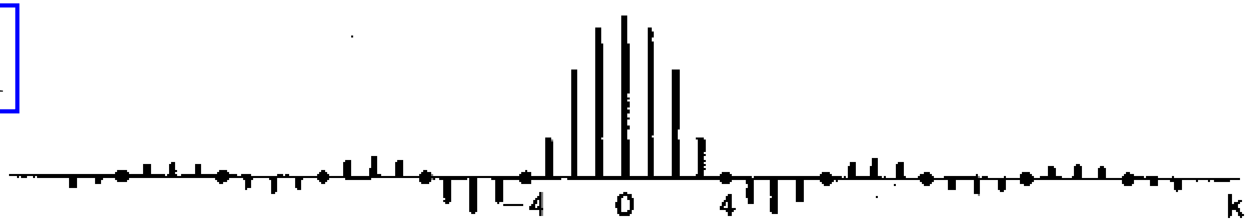
$$T_0 a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$$

$\boxed{T_0 = 4T_1}$



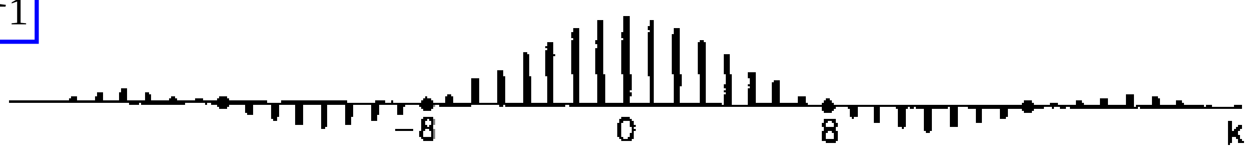
(a)

$\boxed{T_0 = 8T_1}$



(b)

$\boxed{T_0 = 16T_1}$



(c)

举例：周期性方波的傅里叶级数表示

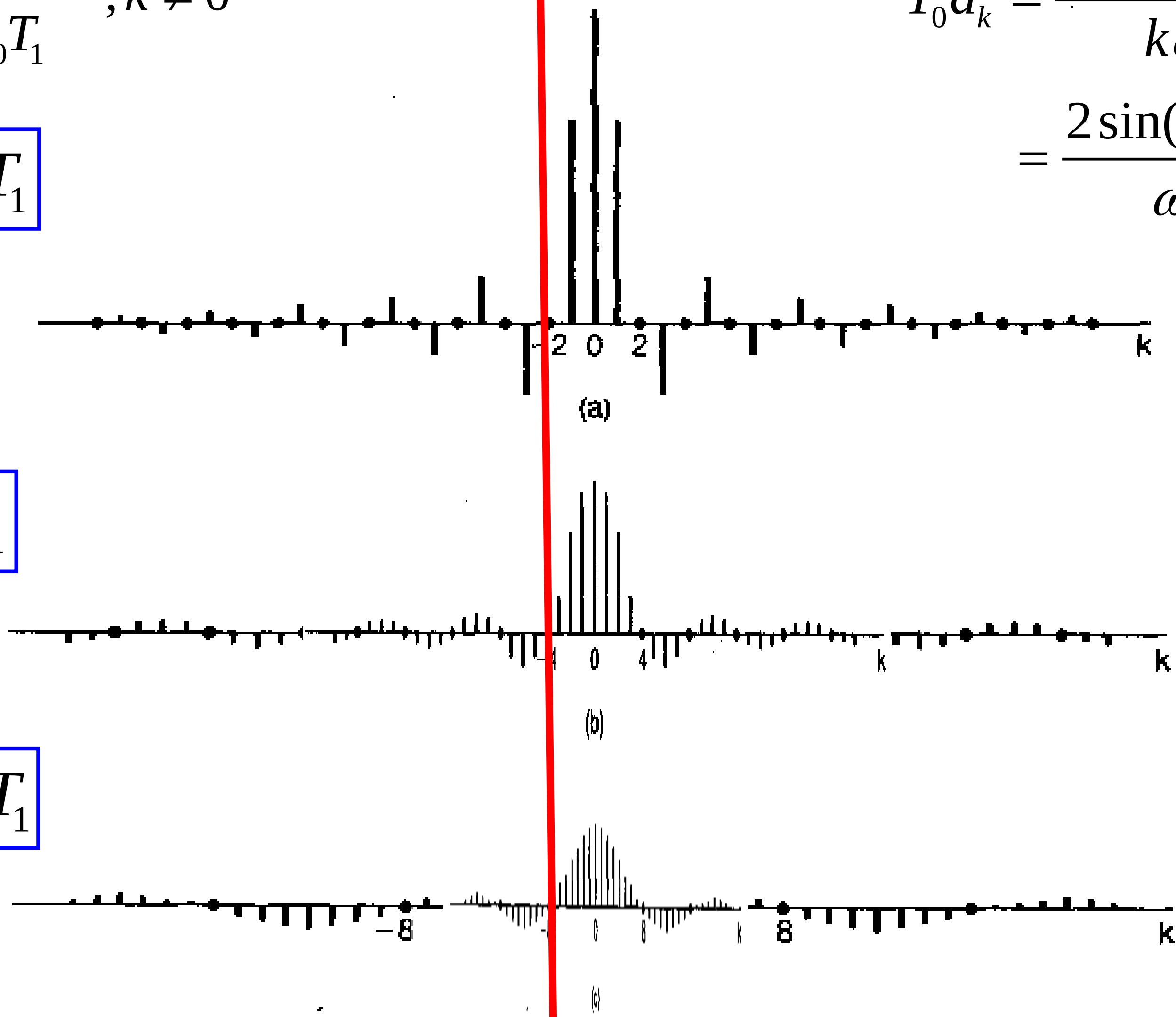
$$a_k = \frac{2T_1}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1}, k \neq 0$$

$$T_0 a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\bigg|_{\omega=k\omega_0}$$

$\boxed{T_0 = 4T_1}$

$\boxed{T_0 = 8T_1}$

$\boxed{T_0 = 16T_1}$



举例：周期性方波的傅里叶级数表示

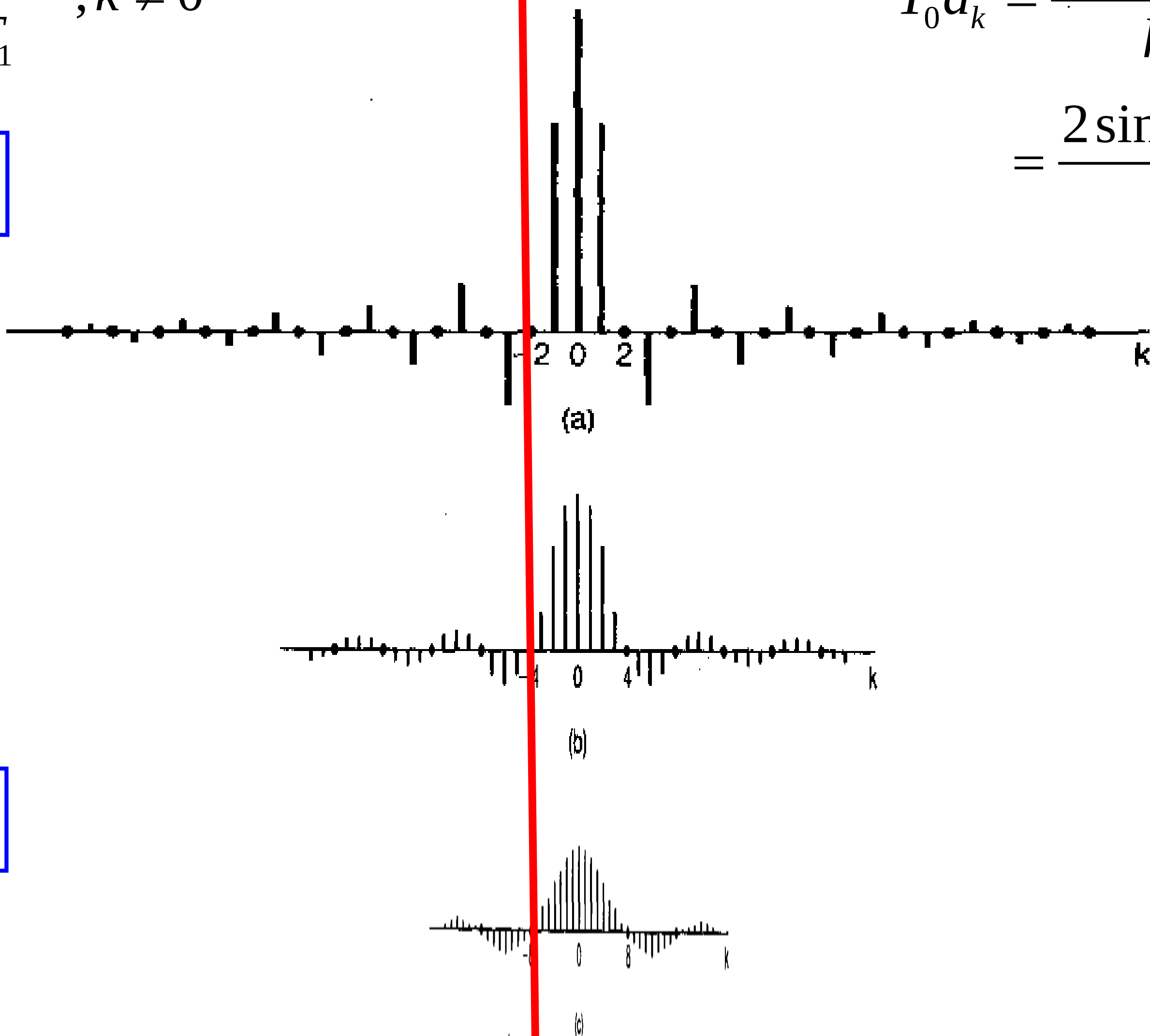
$$a_k = \frac{2T_1}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1}, k \neq 0$$

$$T_0 a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$

$\boxed{T_0 = 4T_1}$

$\boxed{T_0 = 8T_1}$

$\boxed{T_0 = 16T_1}$



举例：周期性方波的傅里叶级数表示

- 几点讨论：

1) 周期性方波的频谱系数是包络 $2\sin(\omega T_1)/\omega$ 的等间隔样本，样本间隔随周期的增大而减小

2) 频谱含量与有效带宽：

$$k\omega_0 T_1 = \pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{T_0}{2T_1}$$

时域和频域之间的相反关系

3) 随着 k 的增加，a_k 减小，说明信号的能量主要集中在低频附近

内容提要

- 引言
- LTI系统对复指数信号的响应
- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 傅里叶级数的收敛性与吉伯斯现象
- 傅里叶级数的性质
- 傅里叶级数与LTI系统

傅里叶级数的收敛性

综合公式 $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

分析公式 $$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

收敛的含义：

- a_k为有限值
- 综合公式中的无穷级数收敛于$x(t)$

傅里叶级数的收敛条件

第一组条件（平方可积条件）： 周期信号在一个周期内平方可积，即：

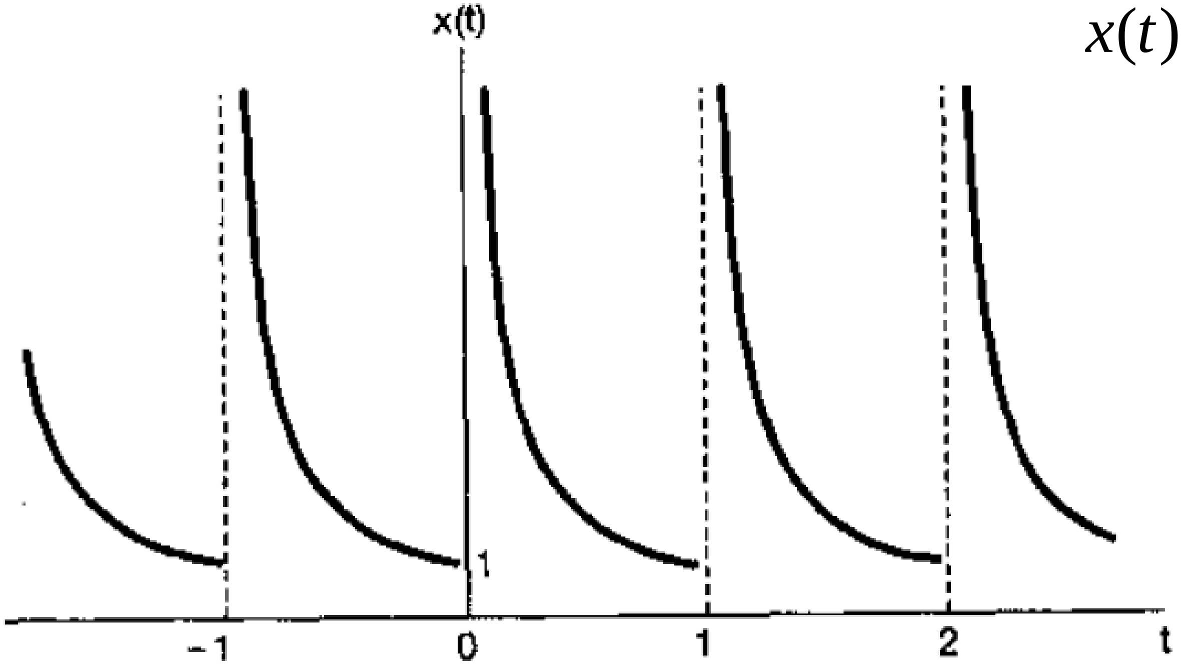
$$\int_T |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

第二组条件(狄里赫利条件)：

- 在任何周期内，$x(t)$均绝对可积；
- 在任何有限区间内，$x(t)$只有有限个起伏变化；即任何单个周期内，$x(t)$的最大值和最小值的数目有限；
- 在任何有限区间内，$x(t)$只有有限个不连续点，且在这些点处$x(t)$为有限值。

几个不满足狄里赫利条件的信号

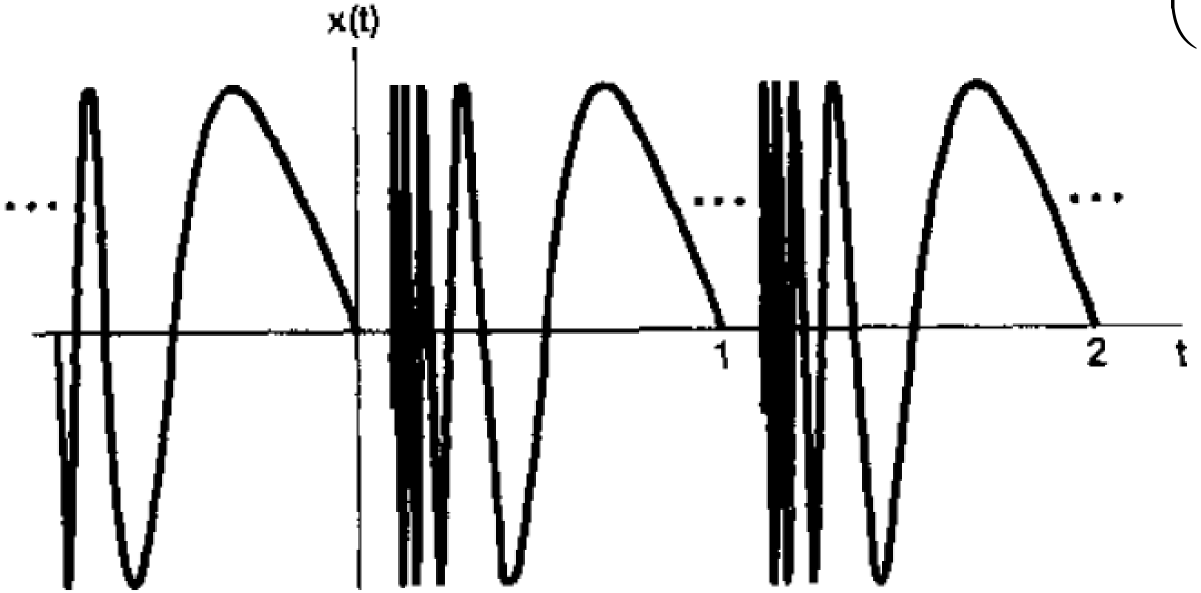
$$x(t)=\frac{1}{t},\quad 0<t\le 1$$



不满足条件1

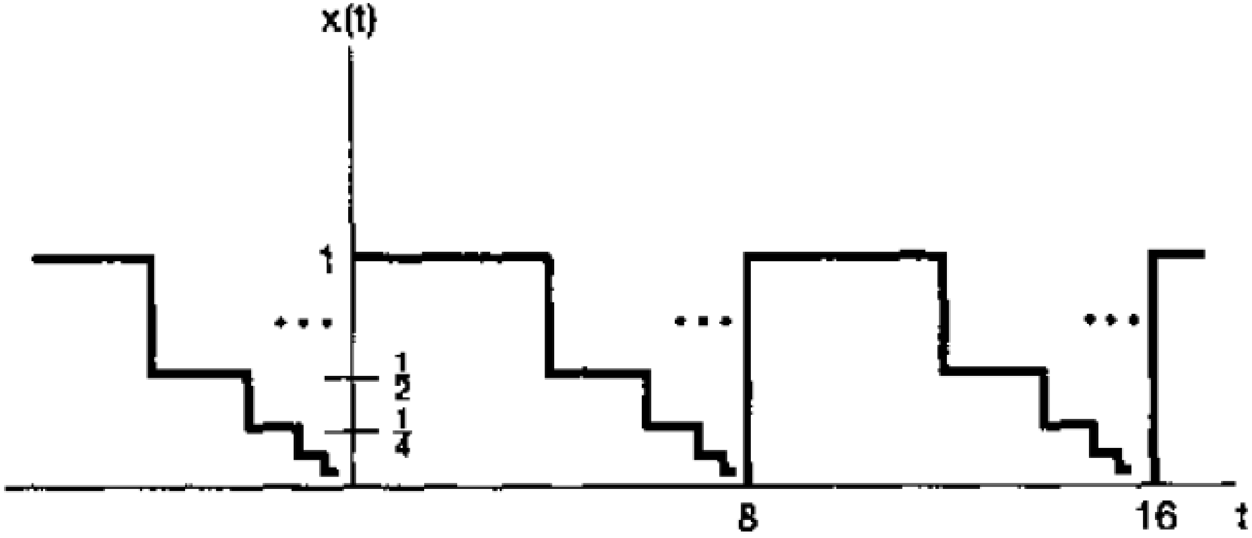
几个不满足狄里赫利条件的信号

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \le 1$$



不满足条件2

几个不满足狄里赫利条件的信号



不满足条件3

关于傅里叶级数收敛性的几点说明

- 收敛并不意味着逐点相等，而只意味着信号和它的傅里叶级数表示之间不存在能量上的差别
- 平方可积条件和狄里赫利条件并不等价，它们都是傅里叶级数收敛的充分条件，而不是必要条件
- 工程实际应用中的绝大多数信号都满足平方可积条件或狄里赫利条件

傅里叶级数系数的物理含义

- 连续时间周期信号 $x(t)$ 周期为 T，其中 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$
  - 使用另一组复指数的线性组合信号去近似 $x(t)$

$$x^{(N)}(t)=\sum_{k=-N}^{N}\widetilde{a}_k e^{jk\omega_0 t}$$

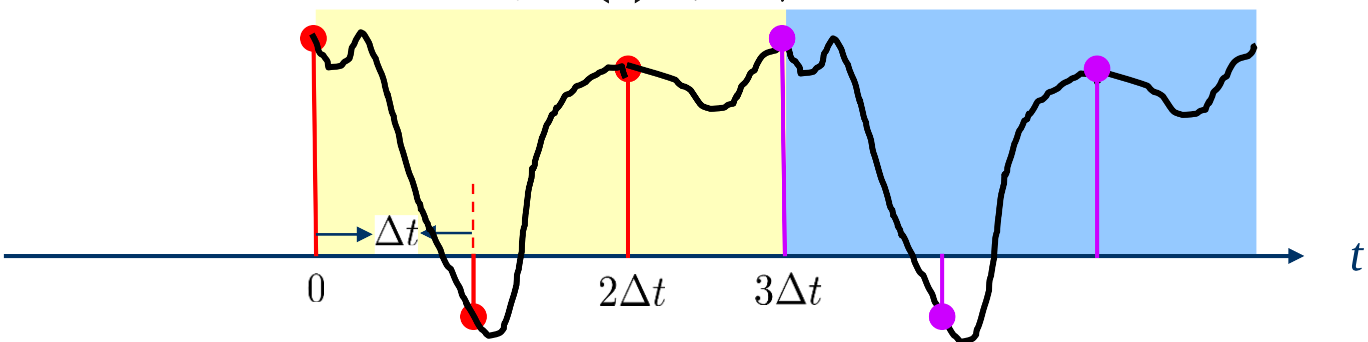
  - 系数的确定遵循如下的最小方差(距离)准则：

$$\min_{\{\widetilde{a}_i\}_{i=-N}^{N}}\left\{\left\|x^{(N)}(t)-x(t)\right\|^2\right\}$$

$$\min_{\{\widetilde{a}_i\}_{i=-N}^{N}}\left\{\int_T\left|x(t)-\sum_{k=-N}^{N}\widetilde{a}_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt\right\}$$

信号与向量

- 对一个连续时间信号 $x(t)$ 采样：



$$\begin{bmatrix} x(0) & x(\Delta t) & x(2\Delta t) \end{bmatrix}^T$$

- $\Delta t \to \infty : x(t)$ 可以视为一个无穷维的矢量

- 向量与函数的内积运算（投影）
  - 向量： $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ （实）； $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\mathbf{x}^H\mathbf{y}$ （复）
  - 函数： $<x(t),y(t)>=\int y(t)x(t)dt$ （实）； $<x(t),y(t)>=\int y^*(t)x(t)dt$ （复）

- 正交： 内积为0

投影定理

- 考察一个 N 维向量空间 $\mathbb{R}^N$，其中 $\mathbb{R}$ 代表实数集合。假定 $S\subset\mathbb{R}^N$ 为 $\mathbb{R}^N$ 的一个子空间。则对于任意 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N$，都存在唯一的 $\mathbf{w}^*\in S$，其为优化问题

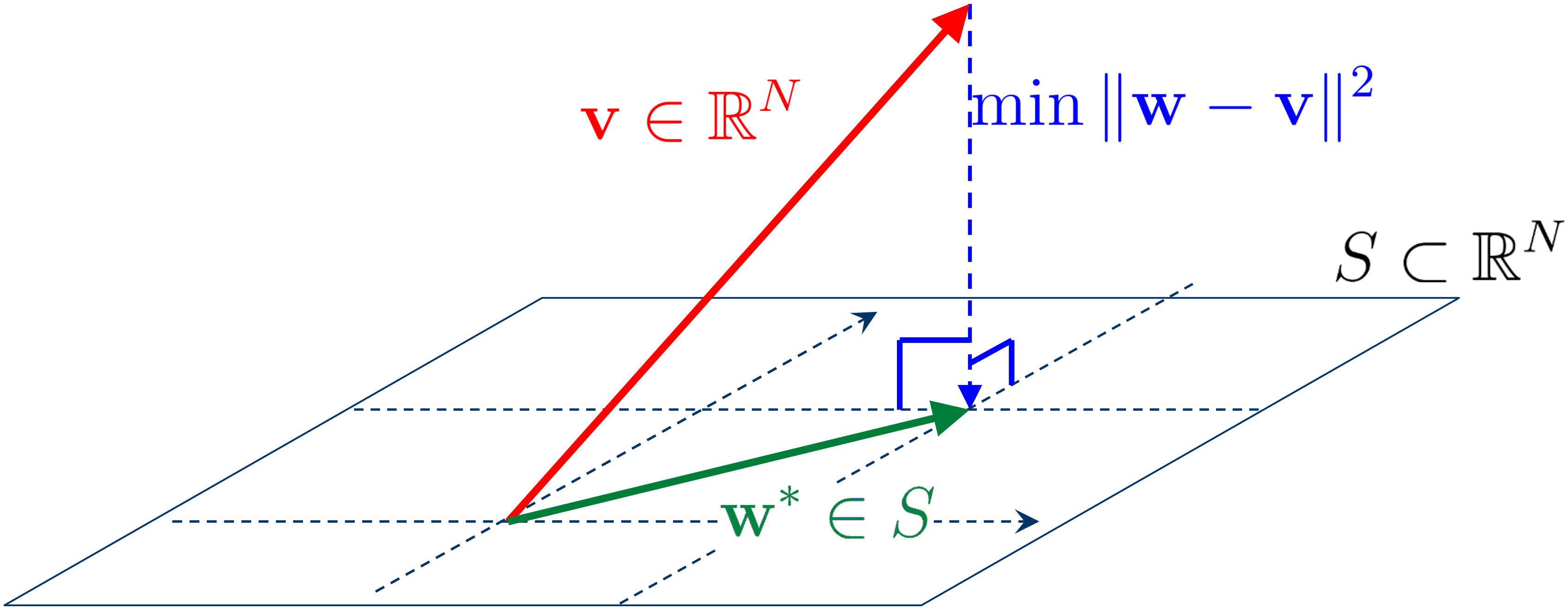
$$\min_{\mathbf{w}\in S}\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2$$

的解，获得 $\mathbf{w}^*$的充要条件是：

$$(\mathbf{v}-\mathbf{w}^*)\perp S$$

投影定理

$$\boxed{(\mathbf{v}-\mathbf{w}^*)\perp S}$$



傅里叶级数系数的物理含义

$$\min_{\{\widetilde{a}_i\}_{i=-N}^{N}} \left\{ \| x^{(N)}(t) - x(t) \|^2 \right\}, \qquad x^{(N)}(t) = \sum_{k=-N}^{N} \widetilde{a}_k e^{jk\omega_0 t}$$

❖根据投影定理

$$\left[x(t) - x^{(N)} \right] \perp e^{jk\omega_0 t}, \quad k = -N, -N+1, \ldots, N-1, N$$

$$\int_T \left[x(t) - x^{(N)} \right] e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_T \left[x(t) - \sum_{m=-N}^{N} \widetilde{a}_k e^{jm\omega_0 t} \right] e^{-jk\omega_0 t} dt = 0$$

$$\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-N}^{N} \widetilde{a}_k \int_T e^{j(m-k)\omega_0 t} dt$$

仅有m=k
时非0

$$\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = T\widetilde{a}_k$$

VS.

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

傅里叶级数系数的物理含义

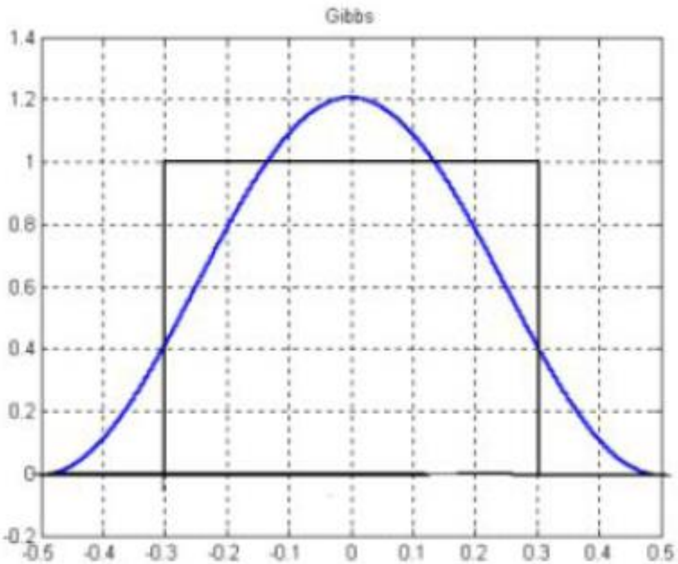
综合公式 $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

分析公式 $$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

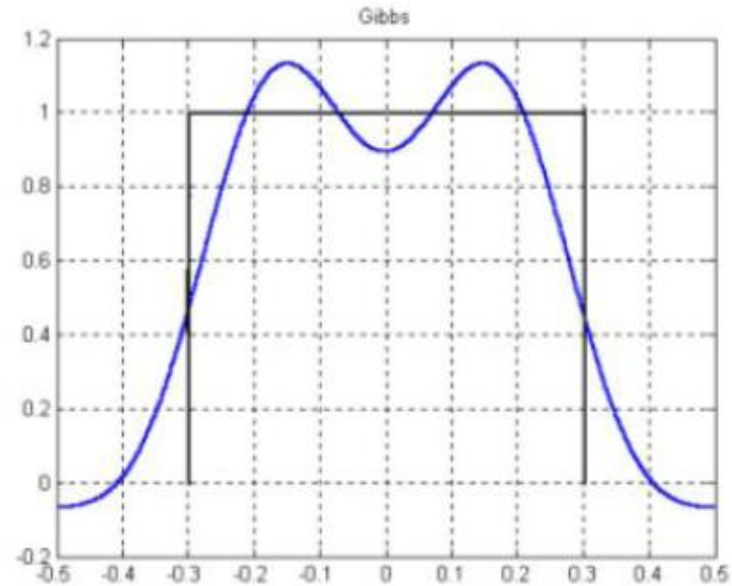
- 信号分解： 利用成谐波关系的复指数信号的线性加权和逼近给定信号
- 频谱系数： 最佳逼近的权系数

吉伯斯现象

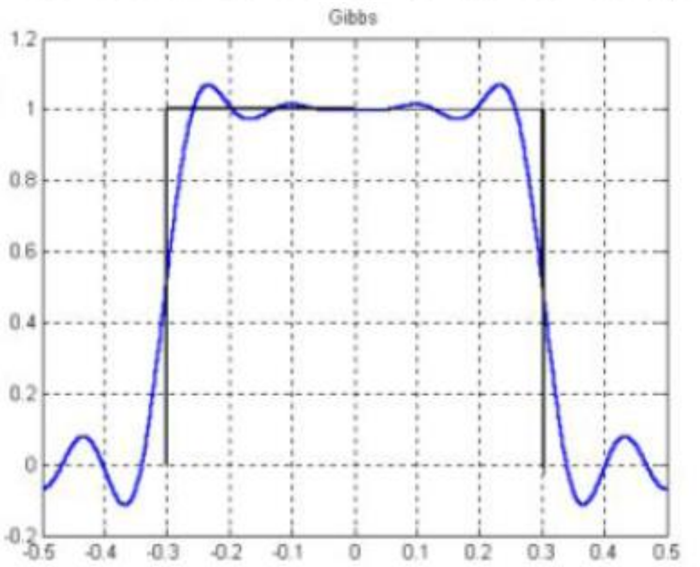
$N=1$



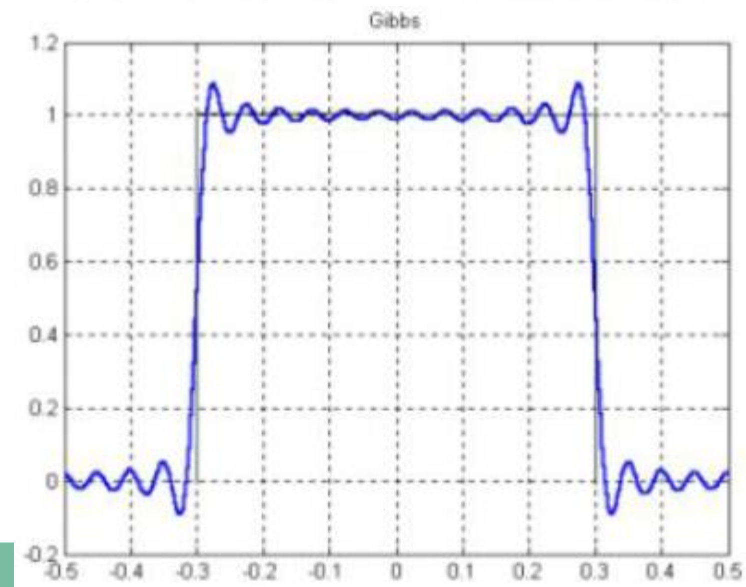
$N=3$



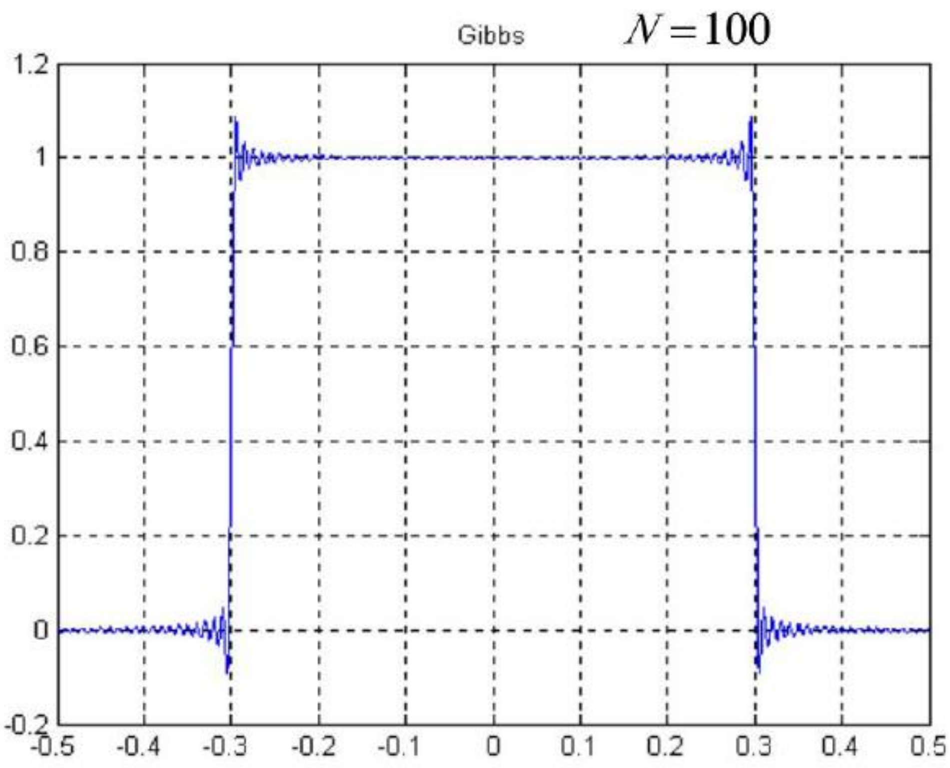
$N=7$



$N=19$



吉伯斯现象



吉伯斯现象：当用傅里叶级数的部分和来近似周期信号时，在间断点附近会不可避免地出现振荡和超量，并且超量的幅度不会随所取项数的增加而减小。

内容提要

- 引言
- LTI系统对复指数信号的响应
- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 傅里叶级数的收敛性与吉伯斯现象
- 傅里叶级数的性质
- 傅里叶级数与LTI系统

傅里叶级数的性质

- 线性性质
- 时移性质
- 时间反转性质
- 时域尺度变换性质
- 相乘性质
- 周期卷积性质
- 共轭对称性
- 帕斯瓦尔定理

时域尺度变换性质

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

傅里叶级数系数虽然没有变化，但是傅里叶级数表示发生了变化

相乘性质

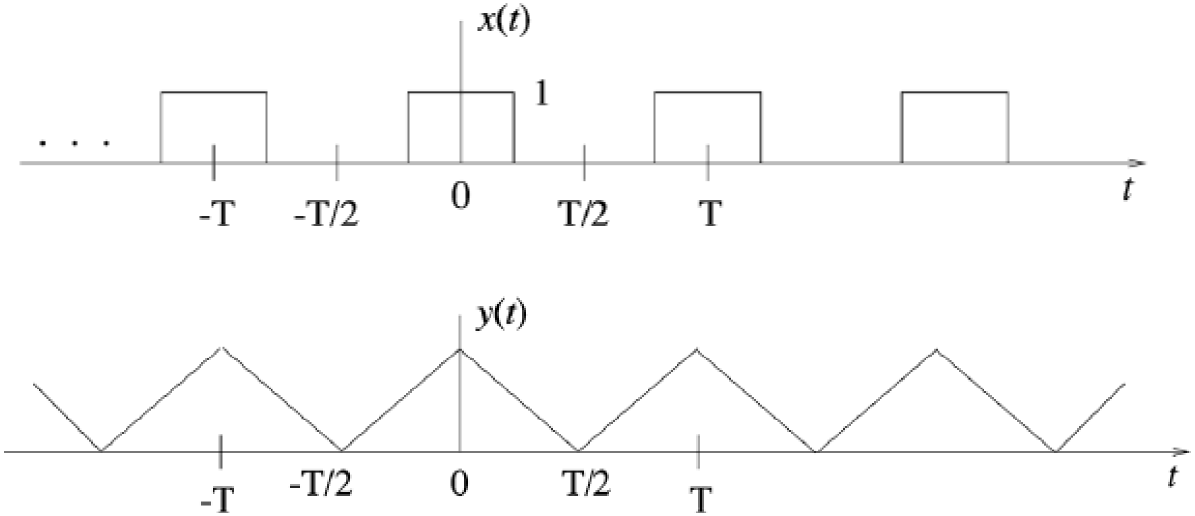
$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$$

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

周期卷积性质

假设$x(t)$和$y(t)$都是周期为T的周期信号。



$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau \Rightarrow$$ 缺乏实际意义

周期卷积性质

周期卷积：

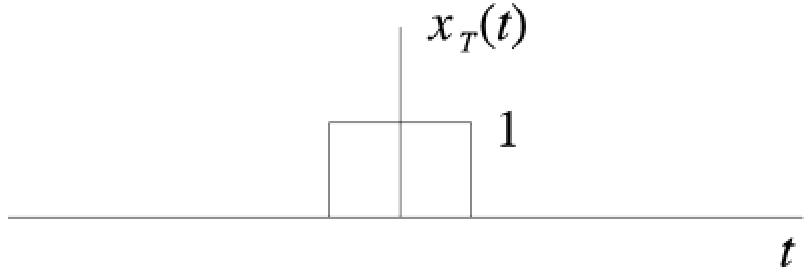
$$z(t)=\int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

仍然是一个周期为T的周期信号

其中：

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & -T/2<t<T/2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$



注意：周期卷积可以在任何一个周期内进行。

周期卷积性质

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$$

$$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \xleftrightarrow{FS} Ta_k b_k$$

帕斯瓦尔定理

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

一个周期信号的平均功率等于它的全部谐波分量的平均功率之和

内容提要

- 引言
- LTI系统对复指数信号的响应
- 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
- 傅里叶级数的收敛性与吉伯斯现象
- 傅里叶级数的性质
- 傅里叶级数与LTI系统

系统函数与频率响应

$$e^{st} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st}$$

- 系统函数

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- 频率响应

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

利用傅里叶级数求LTI系统的输出

如果一个LTI系统的输入是周期信号$x(t)$，则：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

输出信号的傅里叶级数系数

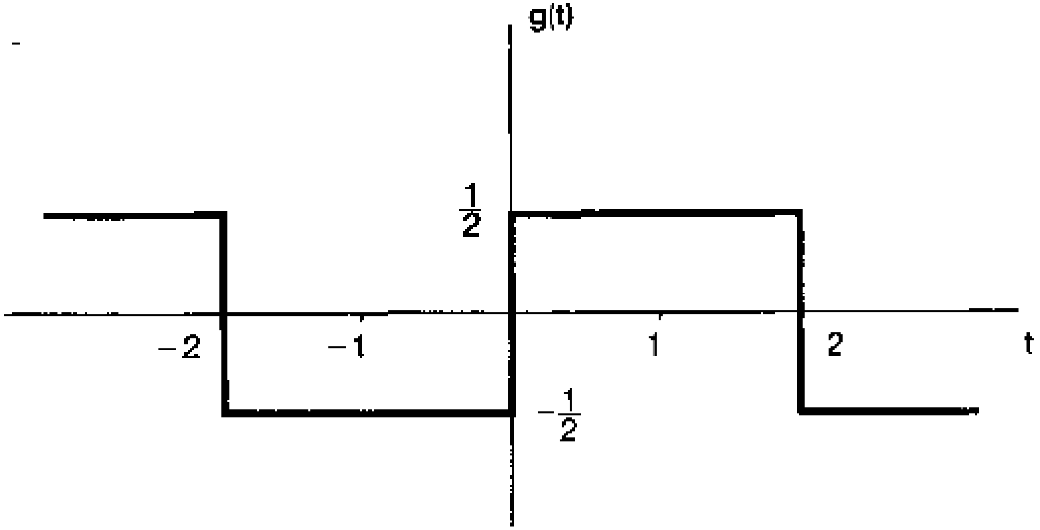
系统的输出响应为：

$$y(t)=\sum_k a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

可见：输出信号是与输入信号同周期的周期信号，LTI系统的作用是改变各个谐波分量的幅度和相位，再将结果相加。

谢谢大家！

练习题1：



$$a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

练习题2：

关于一个周期为3和傅里叶级数系数为a_k的连续时间周期信号给出如下信息：1. $a_k=a_{k+2}$；2. $a_k=a_{-k}$；3. $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)dt=1$；4. $\int_{0.5}^{2} x(t)dt=2$ 试确定$x(t)$。

解： 由条件1可知：$x(t)=x(t)e^{-j(4\pi/3)t}$

所以$x(t)$仅在t=0, ±3/2, ±3, ±9/2…有非零值

由条件2可知：$x(t)=x(-t)$

由条件3可知：$x(t)=\delta(t)$, $-0.5\le t\le 0.5$

由条件4可知：$x(t)=2\delta(t-1.5)$, $0.5\le t\le 2$

$$\Rightarrow\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)+2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k-3/2)$$