第八讲
连续时间傅里叶变换的性质

杜清河
西安交通大学
2025春

傅里叶变换回顾

❖ 傅里叶变换的数学定义：

时域信号 $x(t)$ $\underset{\text{傅里叶反变换}}{\overset{\text{傅里叶变换}}{\rightleftarrows}}$ 频域表示 $X(j\omega)$

傅里叶变换 $$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅里叶反变换 $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅里叶变换的物理含义

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow x(t)=\begin{cases}\dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_1)e^{j\omega_1 t}\\ +\\ \dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_2)e^{j\omega_2 t}\\ +\\ \vdots\\ +\\ \dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_N)e^{j\omega_N t}\\ +\\ \vdots\end{cases}$$

$N\to\infty,$

$\omega_i\in(-\infty,\infty)$

傅里叶变换的物理含义

复正弦信号 $e^{j\omega_i t}$：代表一个频率

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_1)e^{j\omega_1 t} \\ + \\ \dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_2)e^{j\omega_2 t} \\ + \\ \vdots \\ + \\ \dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_N)e^{j\omega_N t} \\ + \\ \vdots \end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\omega_1 t + j\sin\omega_1 t \\ + \\ \cos\omega_2 t + j\sin\omega_2 t \\ + \\ \vdots \\ + \\ \cos\omega_N t + j\sin\omega_N t \\ + \\ \vdots \end{cases}$$

$N\to\infty,$

$\omega_i\in(-\infty,\infty)$

对应复正弦信号的系数！

$$\frac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_i)e^{j\omega_i t}$$

可能为复数：

1. 幅度：强度
2. 相位：正弦波一个周期内的时间位置

内容提要

- 连续时间傅里叶变换的性质
- 应用举例

线性性质

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega)$$

$$ax(t)+by(t) \xleftrightarrow{F} aX(j\omega)+bY(j\omega)$$

线性性质

复正弦信号之和！ **复正弦信号$e^{j\omega_i t}$：代表一个频率**

$$x(t)=\left\{\begin{array}{c}\frac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_1)e^{j\omega_1 t}\\+\\\frac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_2)e^{j\omega_2 t}\\+\\\vdots\\+\\\frac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_N)e^{j\omega_N t}\\+\\\vdots\end{array}\right.\qquad y(t)=\left\{\begin{array}{c}\frac{d\omega}{2\pi}Y(j\omega_1)e^{j\omega_1 t}\\+\\\frac{d\omega}{2\pi}Y(j\omega_2)e^{j\omega_2 t}\\+\\\vdots\\+\\\frac{d\omega}{2\pi}Y(j\omega_N)e^{j\omega_N t}\\+\\\vdots\end{array}\right.\qquad x(t)+y(t)=\left\{\begin{array}{c}\frac{d\omega}{2\pi}\left[X(j\omega_1)+Y(j\omega_1)\right]e^{j\omega_1 t}\\+\\\frac{d\omega}{2\pi}\left[X(j\omega_2)+Y(j\omega_2)\right]e^{j\omega_1 t}\\+\\\vdots\\+\\\frac{d\omega}{2\pi}\left[X(j\omega_N)+Y(j\omega_N)\right]e^{j\omega_N t}\\+\\\vdots\end{array}\right.$$

$$N\to\infty,\quad \omega_i\in(-\infty,\infty)$$

时移性质

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

时移性质

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt \overset{u=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega(u+t_0)}du$$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u}du = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

时移性质

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

- 时移对信号的影响：
  - 延迟不改变任何频率的幅度
  - 延迟仅改变频谱的相位特性

    因此，可以由相位特性来表征某给定频率的延迟
  - 所有复正弦信号所经历延迟均相同

共轭及共轭对称性

$$x(t)\stackrel{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)$$

$$x^*(t)\stackrel{F}{\longleftrightarrow}X^*(-j\omega)$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{-j\omega t}dt=\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j(-\omega)t}dt\right)^*=X^*(-j\omega)$$

共轭及共轭对称性

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$x^*(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)$$

- 若$x(t)$为实信号，则 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

$$X(j\omega) = \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\} \end{cases}$$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\angle X(j\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$$

共轭及共轭对称性

若$x(t)$为实偶函数，则其傅里叶变换一定是实偶函数

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$x(t)=x^*(t)$

$x(t)=x(-t)$

$$X(-j\omega)=X^*(j\omega)$$

$$X(j\omega)=X(-j\omega)$$

偶！

$$X(j\omega)=X^*(j\omega)$$

实！

共轭及共轭对称性

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

- 若$x(t)$为实偶信号，则$X(j\omega)$是实偶函数
- 若$x(t)$为实奇信号，则$X(j\omega)$是虚奇函数

共轭及共轭对称性

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

若 $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ 为实信号，则

$$x_e(t) = Ev\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$x_o(t) = Odd\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

微分

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

证明：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[X(j\omega)\,j\omega\right]e^{j\omega t}d\omega$$

微分

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

微分在图像处理中的应用

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

原始图

微分后

积分性质

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

积分性质的证明

$$F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau$$

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \Rightarrow u(t-\tau) \xleftrightarrow{F} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)e^{-j\omega\tau}$$

$\frac{1}{2}Sgn(t)+\frac{1}{2}$ 常量（费man积分）

$\frac{2}{j\omega}\cdot\frac{1}{2}+2\pi\delta(w)\cdot\frac{1}{2}$

所以：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\pi\delta(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

筛选性质

$$= \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \underline{\pi\delta(\omega)X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

尺度变换

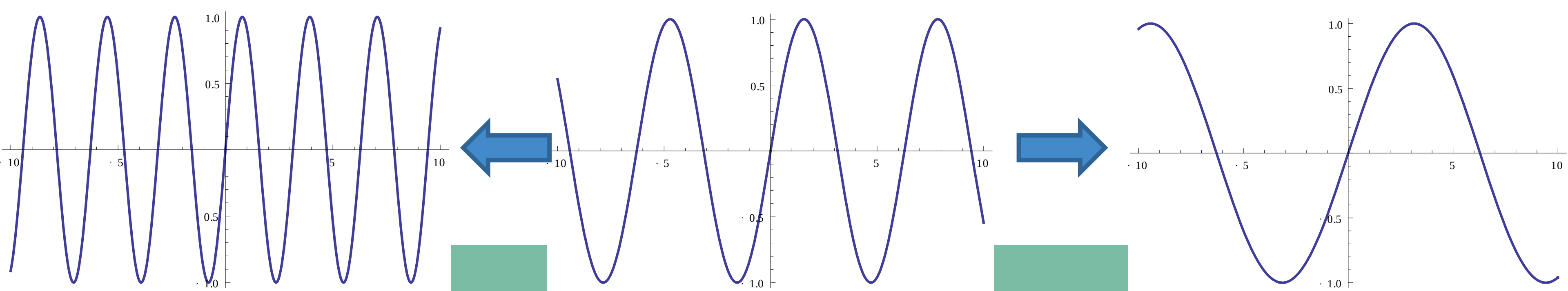
$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

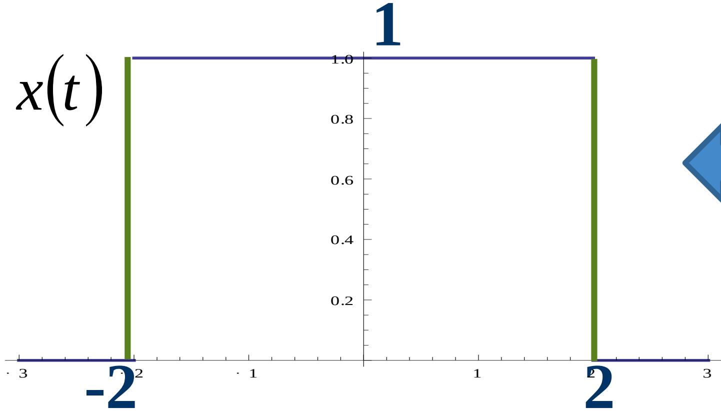
压缩与扩张

$|a|>1$ 时域压缩 ⟷ 频域展宽

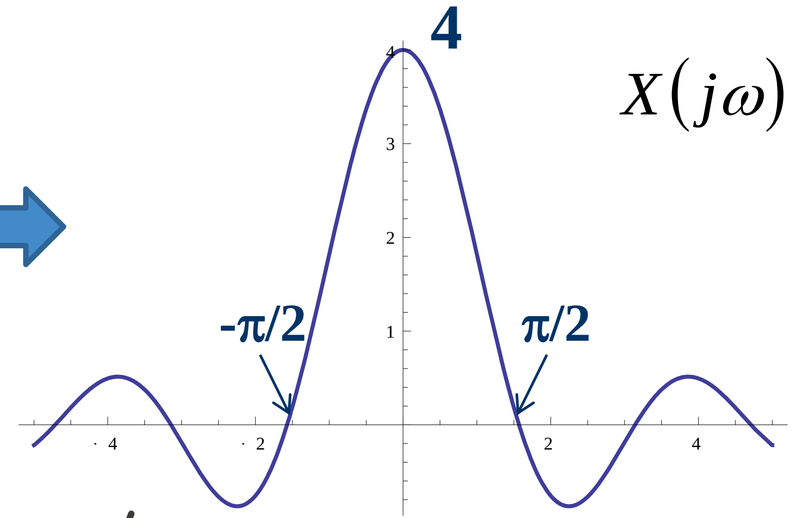
$|a|<1$ 时域展宽 ⟷ 频域压缩



尺度变换

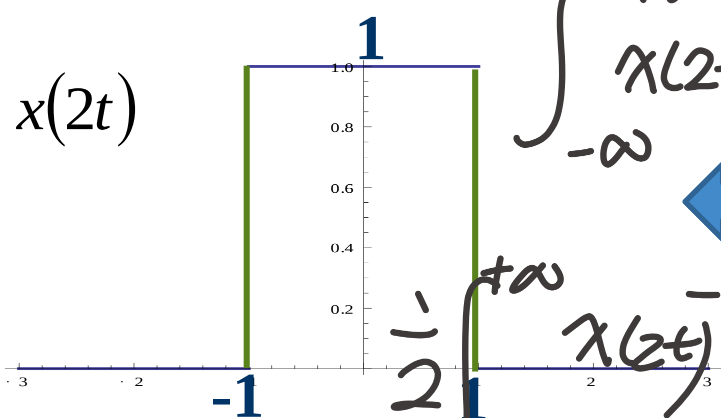


$x(t)$

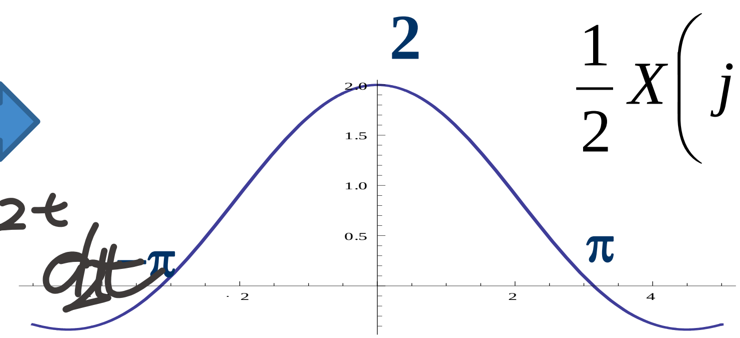


$X(j\omega)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(2t)e^{-j\omega t}dt$$



$x(2t)$



$\frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(2t)e^{-j\frac{\omega}{2}\cdot 2t}d(2t)$$

$$\frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

对偶性 Fourier 正反变换

门: $\frac{2\tau \sin \omega\tau}{\omega\tau}$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-j\omega)$$

$\frac{2}{\tau}$

$2\tau Sa(\tau)$

- **频移性质**

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega - \omega_0))$$

- **频域微分性质**

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

帕斯瓦尔定理

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

卷积性质

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega) X_2(j\omega)$$

卷积定理

输入：复正弦信号(特征函数)之和！

系统：特征函数的频率响应

输出：特征函数的幅度改变

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_1)e^{j\omega_1 t}\\ + \\ \dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_2)e^{j\omega_2 t}\\ + \\ \vdots \\ + \\ \dfrac{d\omega}{2\pi}X(j\omega_N)e^{j\omega_N t}\\ + \\ \vdots\end{cases}$$

$$y(t):\begin{cases}Y(j\omega_1)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega_1 t}d\omega \\ + \\ Y(j\omega_2)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega_2 t}d\omega \\ + \\ \vdots \\ + \\ Y(j\omega_N)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega_N t}d\omega \\ + \\ \vdots\end{cases}$$

$$x(t)*y(t)=\begin{cases}\dfrac{d\omega}{2\pi}\left[X(j\omega_1)\times Y(j\omega_1)\right]e^{j\omega_1 t}\\ + \\ \dfrac{d\omega}{2\pi}\left[X(j\omega_2)\times Y(j\omega_2)\right]e^{j\omega_1 t}\\ + \\ \vdots \\ + \\ \dfrac{d\omega}{2\pi}\left[X(j\omega_N)\times Y(j\omega_N)\right]e^{j\omega_i N}\\ + \\ \vdots\end{cases}$$

$$N\to\infty,\quad \omega_i\in(-\infty,\infty)$$

关于卷积性质的讨论

- 卷积性质表明：信号通过LTI系统不会产生新的频率分量

滤波器

- LTI系统的频率响应：

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

完全表征了一个LTI系统

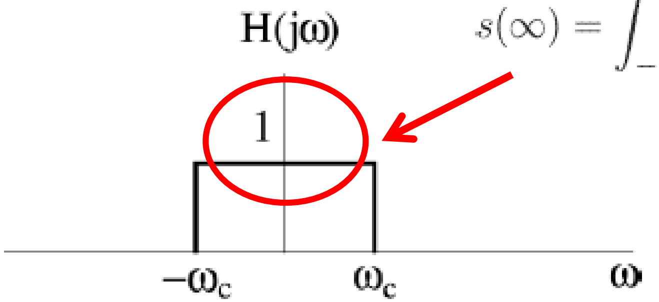
- LTI系统输出响应的频域求解

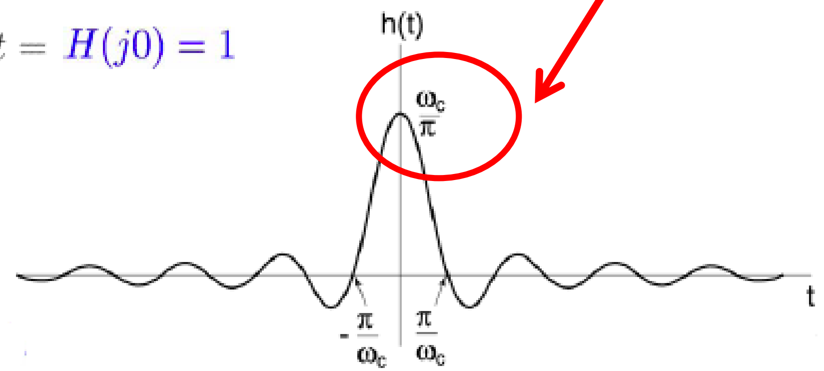
理想低通滤波器的频率响应

- 理想低通滤波器

$$h(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)d\omega=\frac{2\omega_c}{2\pi}=\frac{\omega_c}{\pi}$$

$$s(\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=H(j0)=1$$





$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$

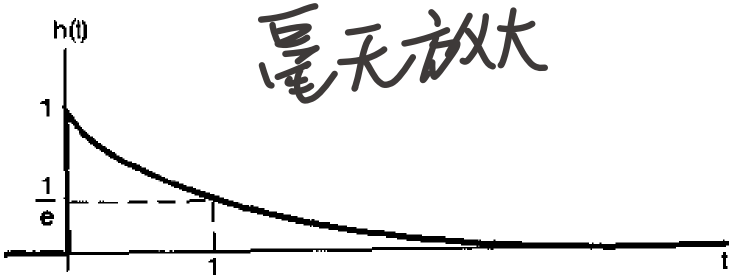
时域和频域之间的折衷与权衡

理想低通滤波器的频率响应

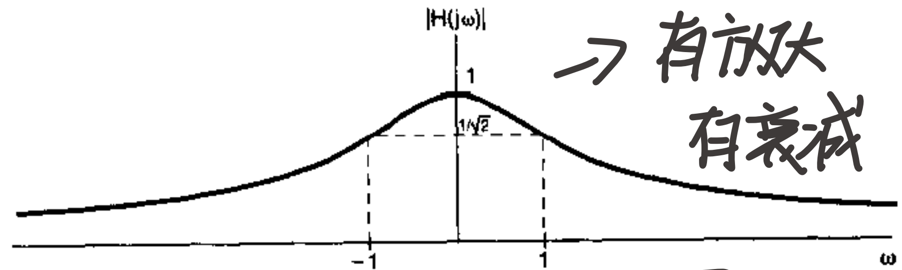
- 一种折衷方案

降噪. 滤去歌曲之外的频率信号

$$h(t)=e^{-t}u(t) \qquad H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$



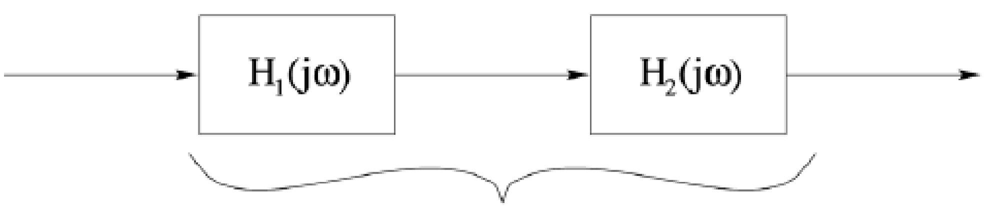
毫无放大



→ 有放大 有衰减

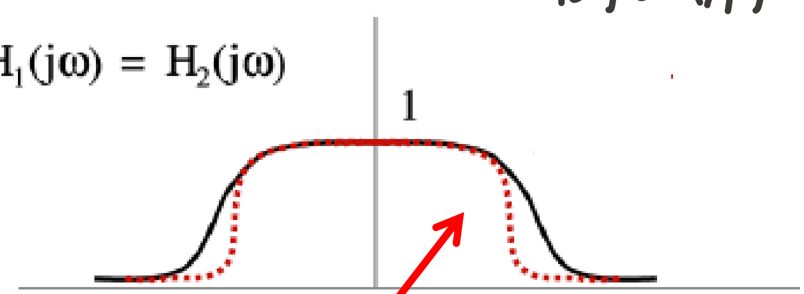
可以用

卷一次一次时延



$H(j\omega) = H_1(j\omega)\, H_2(j\omega)$

$H_1(j\omega) = H_2(j\omega)$



$H(j\omega)$

利用卷积性质求解系统响应

$$h(t)=e^{-at}u(t),a>0 \qquad \Rightarrow \qquad H(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$$

$$x(t)=e^{-bt}u(t),b>0 \qquad \qquad X(j\omega)=\frac{1}{b+j\omega}$$

因此：

$$Y(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)}=\frac{A}{a+j\omega}+\frac{B}{b+j\omega}$$

当 $a\neq b$ 时：$A=\dfrac{1}{b-a}=-B \quad y(t)=\dfrac{1}{b-a}\left[e^{-at}u(t)-e^{-bt}u(t)\right]$

当 $a=b$ 时：$Y(j\omega)=\dfrac{1}{(a+j\omega)^2} \quad \underline{y(t)=te^{-at}u(t)}$ 频率微分

相乘性质(调制性质) 用对偶直接出

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

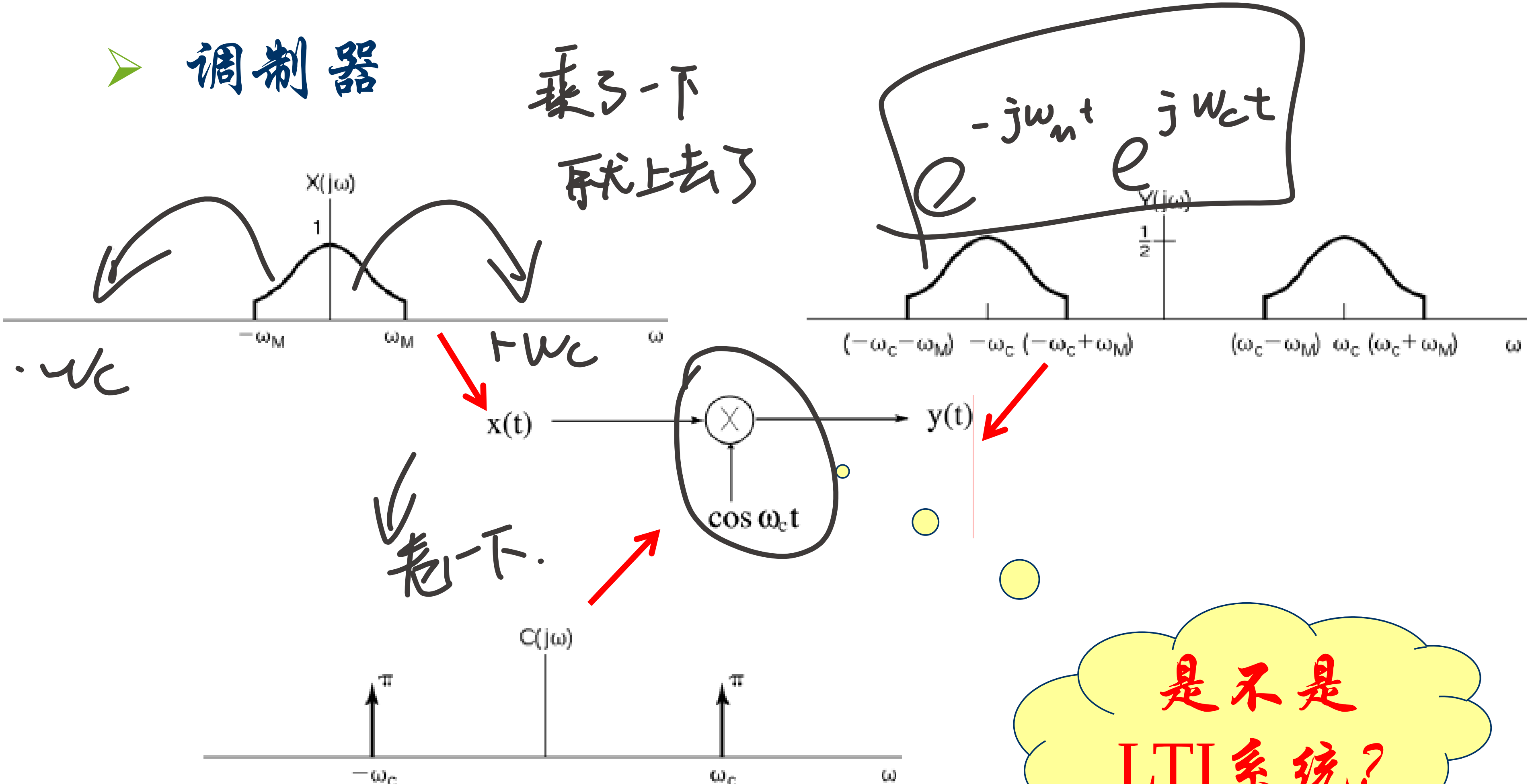
$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\left[X_1(j\omega)*X_2(j\omega)\right]$$

无限信号 → 有限频域 → 截断带宽

结合相乘性质和卷积性质可知：**时限信号的带宽是无限的，带限信号的时间持续期是无限长的。**

相乘性质的应用1：幅度调制与解调

- 调制器

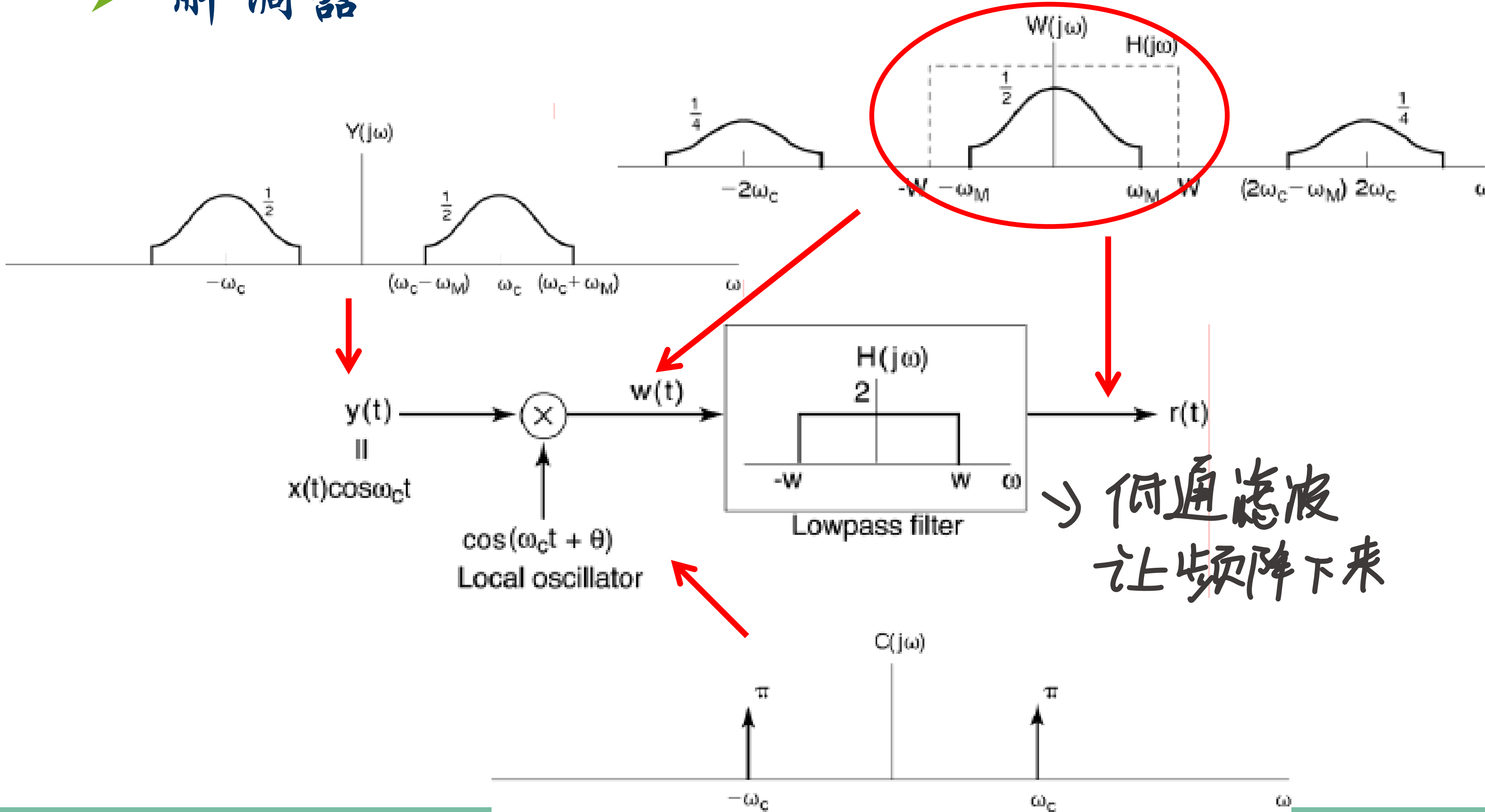


是不是
LTI系统？

相乘性质的应用1：幅度调制与解调

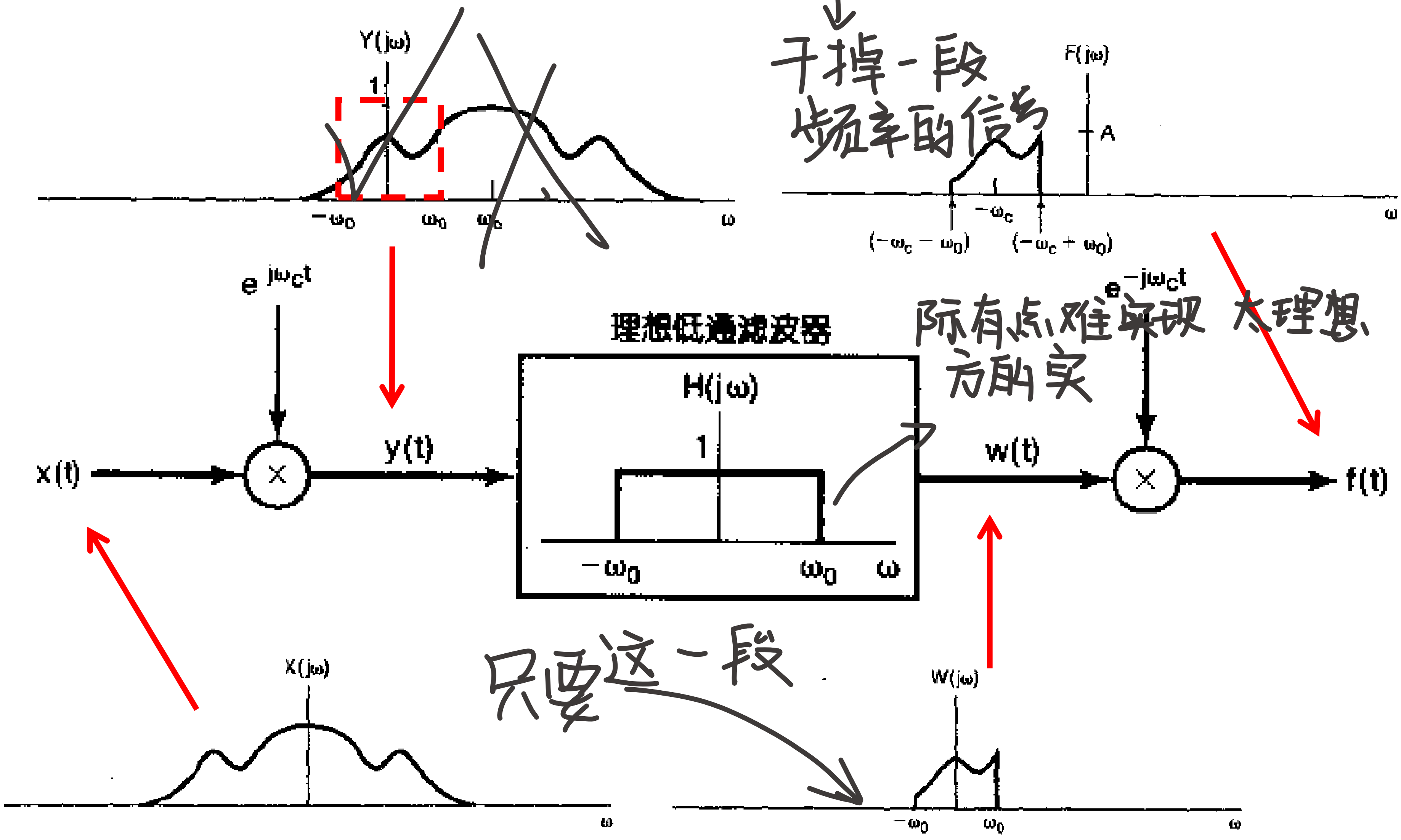
➤ 解调器

LTI 不能有新的频率分量

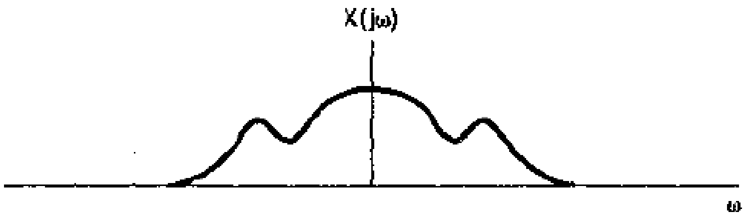


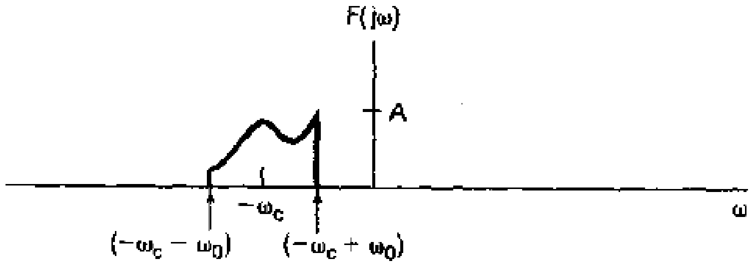
→ 低通滤波
让频降下来

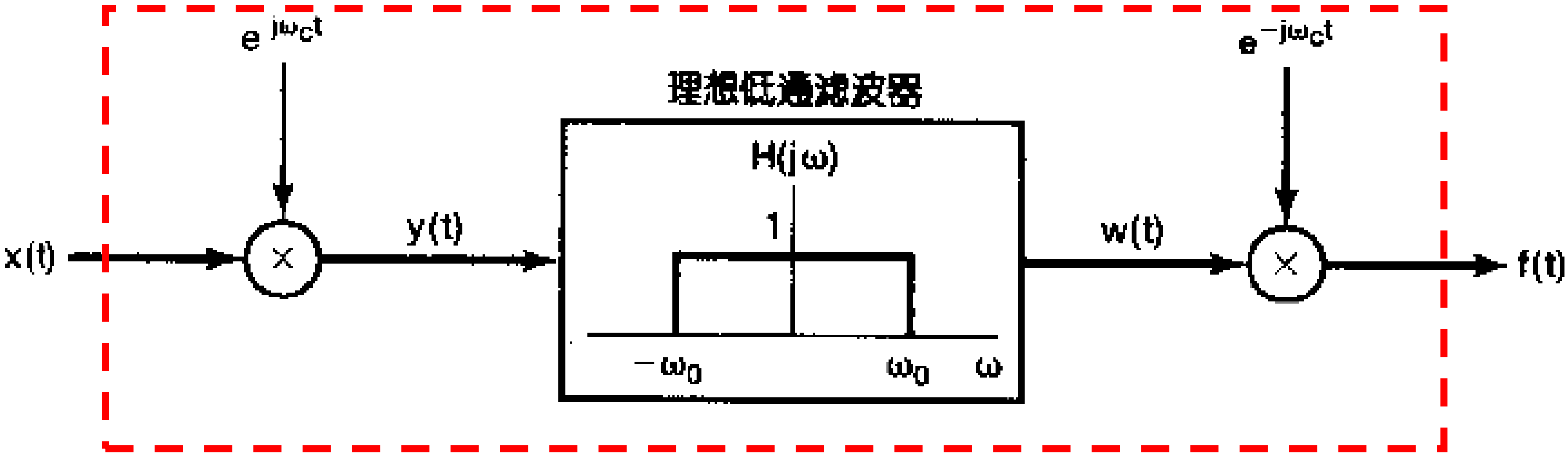
相乘性质的应用2：带通滤波器设计

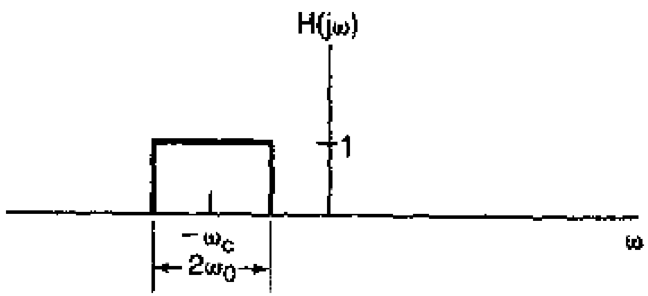


相乘性质的应用2：带通滤波器设计









中心频率可变
的带通滤波器

内容提要

- 连续时间傅里叶变换的性质
- 应用举例

例1

求下列信号的傅里叶变换：

$$x(t)=\frac{\sin 4\pi t\cdot\sin 8\pi t}{\pi t^{2}}$$

解：

$$x(t)=\frac{\sin 4\pi t\cdot\sin 8\pi t}{\pi t^{2}}=\pi\cdot\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\sin 8\pi t}{\pi t}$$

$$x_1(t)=\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}\leftrightarrow X_1(j\omega)=\begin{cases}1,|\omega|<4\pi\\0,|\omega|>4\pi\end{cases}\quad x_2(t)=\frac{\sin 8\pi t}{\pi t}\leftrightarrow X_2(j\omega)=\begin{cases}1,|\omega|<8\pi\\0,|\omega|>8\pi\end{cases}$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*X_2(j\omega)=\begin{cases}4\pi,|\omega|<4\pi\\\frac{1}{2}\omega+6\pi,-12\pi<\omega\le-4\pi\\-\frac{1}{2}\omega+6\pi,4\pi<\omega\le12\pi\\0,|\omega|>12\pi\end{cases}$$

例2

求下列信号的傅里叶变换：

$$g(t)=\frac{1}{1+t^2}$$ $\Rightarrow \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

解：注意到

$e^{-|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{2}{1+\omega^2}$

$$x(t)=e^{-a|t|}\xleftrightarrow{F}\frac{2a}{a^2+\omega^2}\Rightarrow e^{-|t|}\xleftrightarrow{F}\frac{2}{1+\omega^2}$$

所以：

$$G(j\omega)=\pi e^{-|\omega|}$$

例3

考虑一个信号$x(t)$，其傅里叶变换为$X(j\omega)$，假设给出下列条件：

$X = A\left(\frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{j\omega+2}\right)$,

$(1+j\omega)X = A \cdot \frac{1}{j\omega+2}$

1. $x(t)$是实值且非负的；

2. $F^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-2t}u(t)$，$A$与$t$无关；

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$ $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = 1$

求$x(t)$的表达式。

例3

解：由条件2可知

$$X(j\omega)=\frac{A}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=A\left\{\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}\right\}$$

$$x(t)=Ae^{-t}u(t)-Ae^{-2t}u(t)$$

由条件3可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt=2\pi \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^2 dt=1$$

所以

$$A^2\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-2t}+e^{-2t}-2e^{-3t}\right)dt=1 \rightarrow A^2=12$$

由条件1可知： $A=\sqrt{12} \rightarrow x(t)=\sqrt{12}\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

例4

已知某LTI系统的单位冲激响应为：

$$h(t)=\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$$

求下列信号通过该系统后的输出：

$$x_1(t)=\cos\frac{\pi}{2}t \qquad x_2(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}t+\cos\frac{4\pi}{3}t+\cos 3\pi t\right)$$

解：

$$y_1(t)=\cos\frac{\pi}{2}t \qquad y_2(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}t+\cos\frac{4\pi}{3}t\right)$$

谢谢大家！