第五讲 从LTI系统的微分/差分方程表征到方框图实现

杜清河
西安交通大学
信息与通信工程学院

2025春

本讲覆盖章节

- 2.4

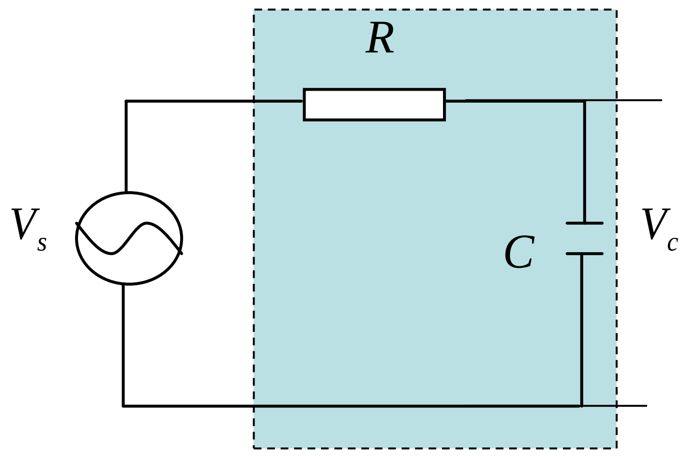
内容提要

- 用微分方程描述的连续时间LTI系统
- 用差分方程描述的离散时间LTI系统
- LTI系统的方框图实现

内容提要

- 用微分方程描述的连续时间LTI系统
- 用差分方程描述的离散时间LTI系统
- LTI系统的方框图实现

连续时间系统的微分方程描述



输入 V_s

输出 V_c

微分方程

电阻 $i(t)=\dfrac{V_s(t)-V_c(t)}{R}$

电容 $i(t)=C\dfrac{dV_c(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}V_c(t)=\frac{1}{RC}V_s(t)$$

线性常系数微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- N阶线性常系数微分方程
- 微分方程给出的是系统的一种隐含的特性
- N反映系统的复杂程度，a_k、b_k反映系统的输出与哪些因素有关，以及关联程度如何
- 实际中一般应满足$N \geq M$

线性常系数微分方程的时域求解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

受迫响应

自然响应

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$y_p(t)$: 特解，是一个由$x(t)$影响并决定的函数

$y_h(t)$: 通解，是如下齐次微分方程的解(齐次解):

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

线性常系数微分方程的时域求解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

该方程有N个根

一般情况下，该齐次方程的解具有如下形式：

$$y_h(t) = \text{span}\left\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots, e^{s_K t}\right\}$$

如何获得指数的系数部分，将$y_h(t) = Ae^{st}$代入齐次微分方程，可得：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k A s^k e^{st} = 0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$$

如果没有重根，则：

$$y_h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \ldots + A_N e^{s_N t}$$

线性常系数微分方程的时域求解

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad x(t)=Ke^{3t}u(t)$$

$$y_p(t)=Ye^{3t} \rightarrow 3Ye^{3t}+2Ye^{3t}=Ke^{3t} \rightarrow y_p(t)=\frac{K}{5}e^{3t}$$

$$y_h(t)=Ae^{st} \rightarrow Ase^{st}+2Ae^{st}=Ae^{st}(s+2)=0$$

$$\downarrow$$

$$s=-2,\ y_h(t)=Ae^{-2t}$$

$$y(t)=Ae^{-2t}+\frac{K}{5}e^{3t},\quad t>0$$

不同的附加条件
导致不同的解

初始松弛条件

- **初始松弛：**

  若$t<t_0$时，$x(t)=0$，那么$t<t_0$时，$y(t)=0$。

- **初始松弛的意义：**

  在初始松弛条件下，线性常系数微分方程所描述的系统是因果线性时不变系统。

- **零初始条件：**

$$y(t_0)=\frac{dy(t_0)}{dt}=\ldots=\frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}}=0$$

线性常系数微分方程的时域求解

$$y(t)=Ae^{-2t}+\frac{K}{5}e^{3t},\quad t>0$$

应用初始松弛条件，则有：

$$y(0)=0$$

所以：

$$A=-\frac{K}{5}$$

系统的完全解为：

$$y(t)=\frac{K}{5}\left[e^{3t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

内容提要

- 用微分方程描述的连续时间LTI系统
- 用差分方程描述的离散时间LTI系统
- LTI系统的方框图实现

离散时间系统的差分方程描述

房贷问题：住房问题已成为最受关注的社会话题之一。A君因为买房从银行贷了10万元的款，其利息按每年未偿还金额的12%来计算（或者说月利息为1%），例如，第一个月，总的欠款等于

$$100\,000+\left(\frac{0.12}{12}\right)\times 100\,000=101\,000$$

一个现实的问题就是要确定月供（亦即每月需要偿还的金额），以使得在某一规定时间内，贷款全部还清。

离散时间系统的差分方程描述

为了研究这个问题，需要首先建立欠款的数学模型——差分方程。

令$y[n]$表示第n个月支付还款后余下的未付欠款。假设贷款是在第0个月借的，第一个月开始每月偿还，则第n个月余下的未付还款可以表示为：

$$y[n] = 1.01y[n-1] - x[n] \qquad n \geq 1$$

贷款+利息

本月还款

线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- N阶线性常系数差分方程
- 对差分方程通常不必限制 $N \ge M$
- 差分方程的时域求解方法与微分方程类似：

特解+齐次解

假设没有重根

$$y_h[n] = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + \ldots + A_N z_N^n$$

其中：z_i是方程$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0$的$N$个根。

线性常系数差分方程的时域求解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- $N=0$：

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n-k]$$

这表示的就是一个LTI系统，其脉冲响应为：

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

有限长脉冲响应(Finite Impulse Response, FIR)系统

线性常系数差分方程的时域求解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

递归方程

- $N \neq 0$：

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

为了计算y[n]，就需要知道y[n-1], y[n-2],…, y[n-N]，即：需要给定一组附加条件。

初始松弛条件

- 初始松弛：

  若$n<n_0$时，$x[n]=0$，那么$n<n_0$时，$y[n]=0$。

- 初始松弛的意义：

  在初始松弛条件下，线性常系数差分方程所描述的系统是因果线性时不变系统。

- 零初始条件：

$$y[n_0-1]=y[n_0-2]=\ldots=y[n_0-N]=0$$

线性常系数差分方程的时域求解

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n] \qquad x[n]=\delta[n]$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

由初始松弛条件可得y[-1]=0，所以：

$$y[0]=x[0]+\frac{1}{2}y[-1]=1$$

$$y[1]=x[1]+\frac{1}{2}y[0]=\frac{1}{2}$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

无限长脉冲响应
(Infinite Impulse
Response, IIR) 系统

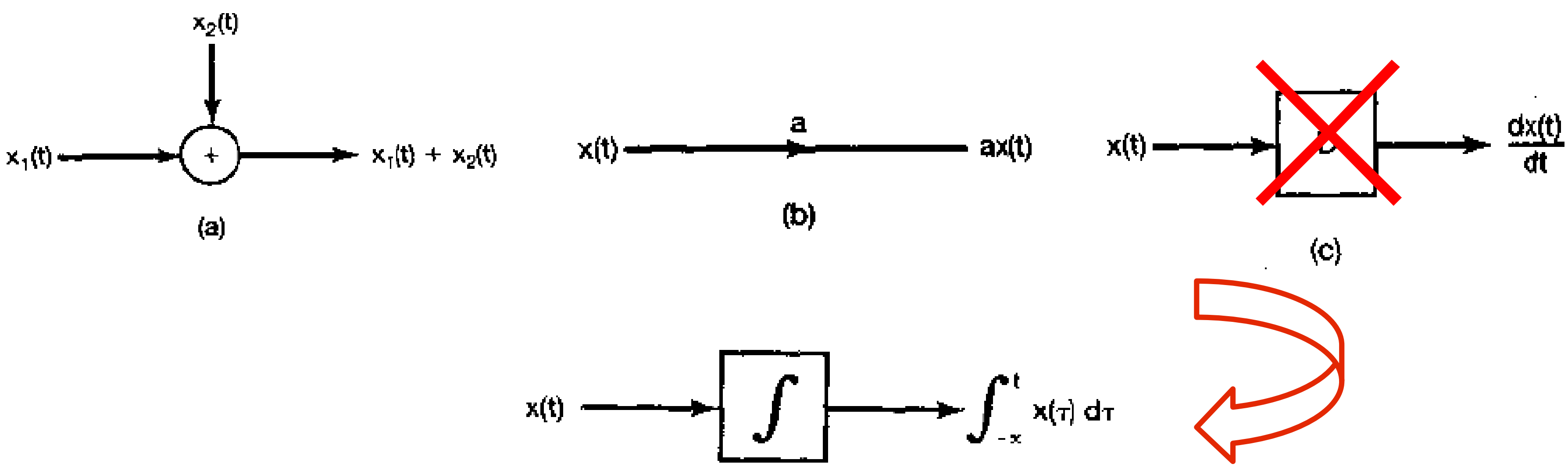
内容提要

- 用微分方程描述的连续时间LTI系统
- 用差分方程描述的离散时间LTI系统
- LTI系统的方框图实现

连续时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

涉及的三种基本运算：相加、乘以系数、微分



连续时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

线性常系数

积分方程

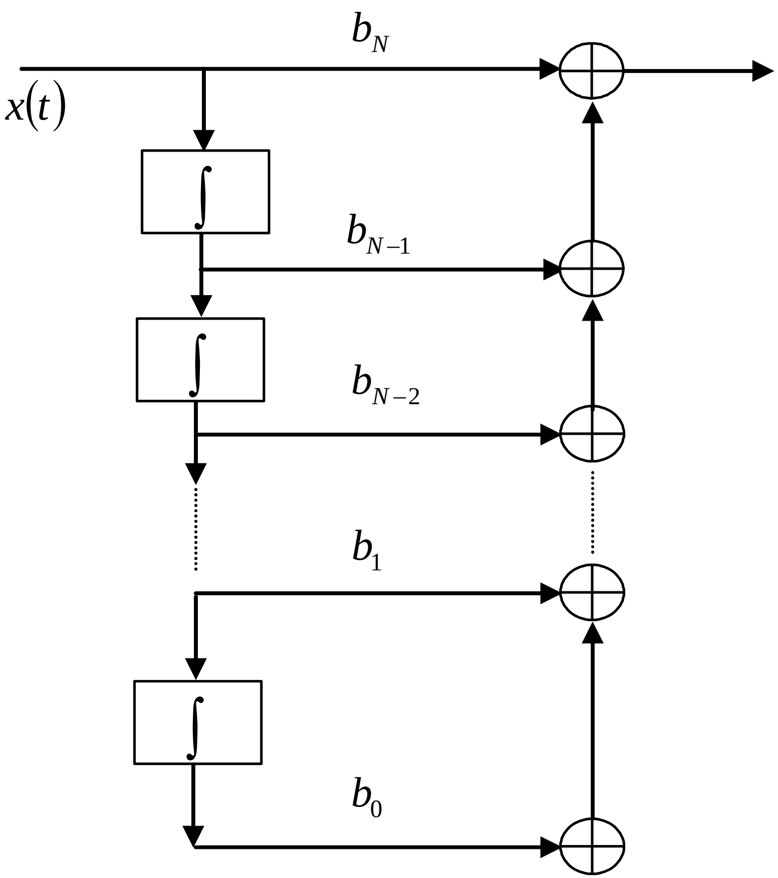
$w(t)$

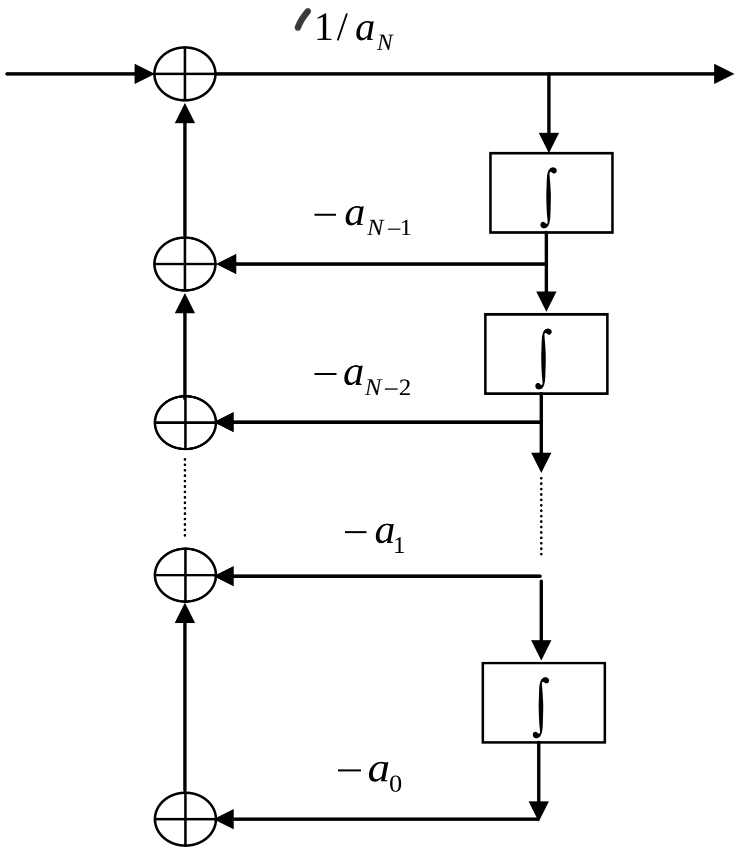
$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left[w(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

连续时间LTI系统的方框图实现

$$w(t)=\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t) \qquad y(t)=\frac{1}{a_N}\left[w(t)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



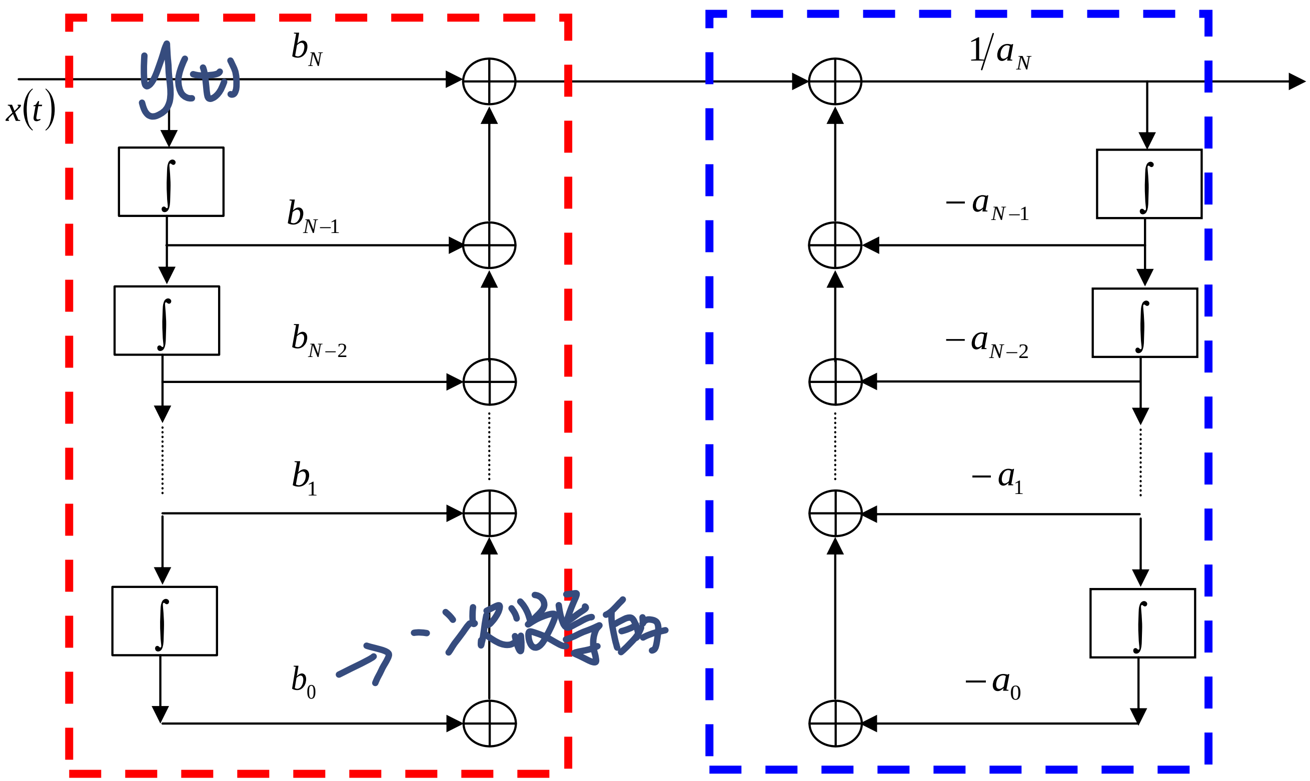


连续时间LTI系统的直接I型实现

~~是~~

导数多的形式.

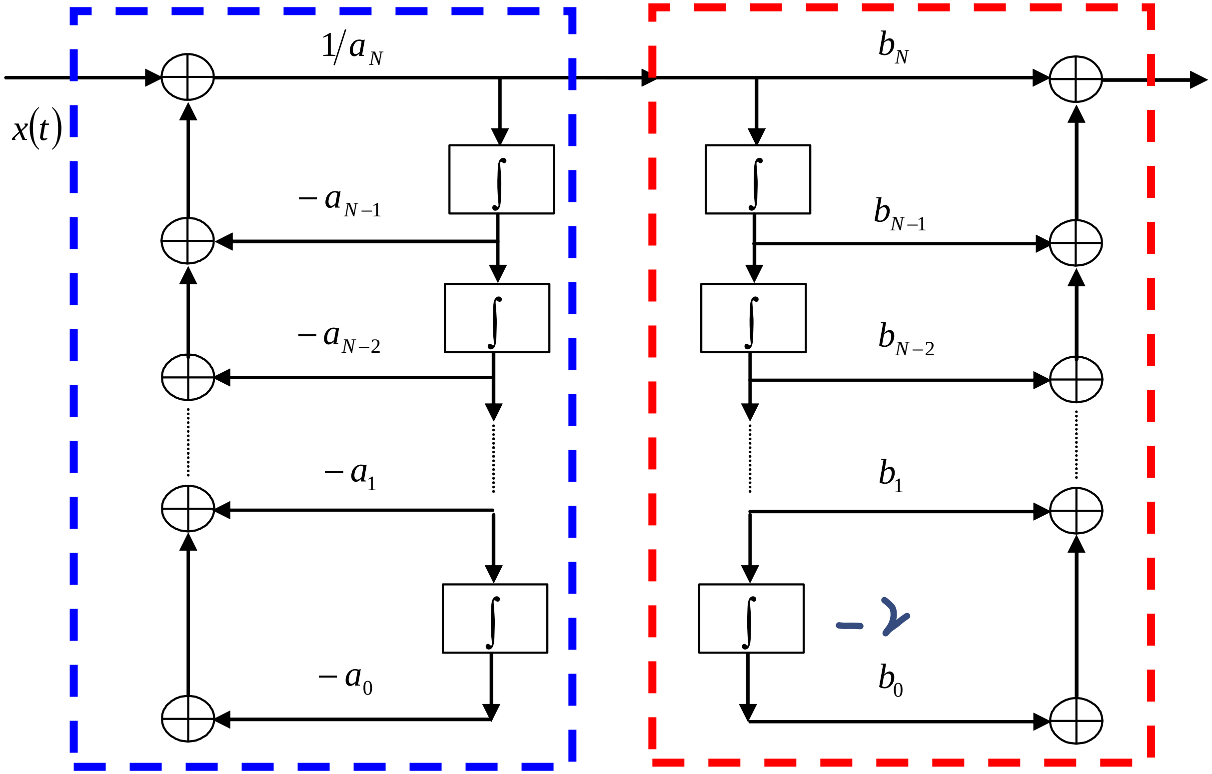
$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



x在积 y也在积

连续时间LTI系统的方框图实现

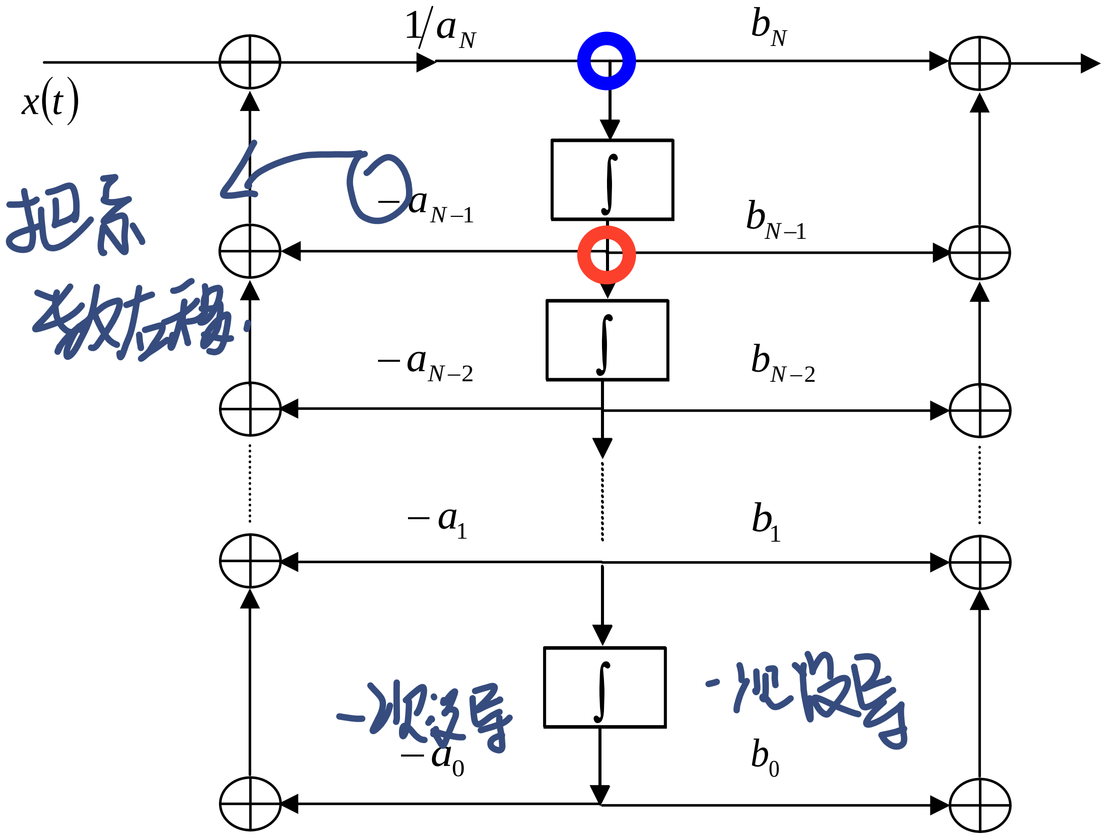
$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



连续时间LTI系统的直接II型实现

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

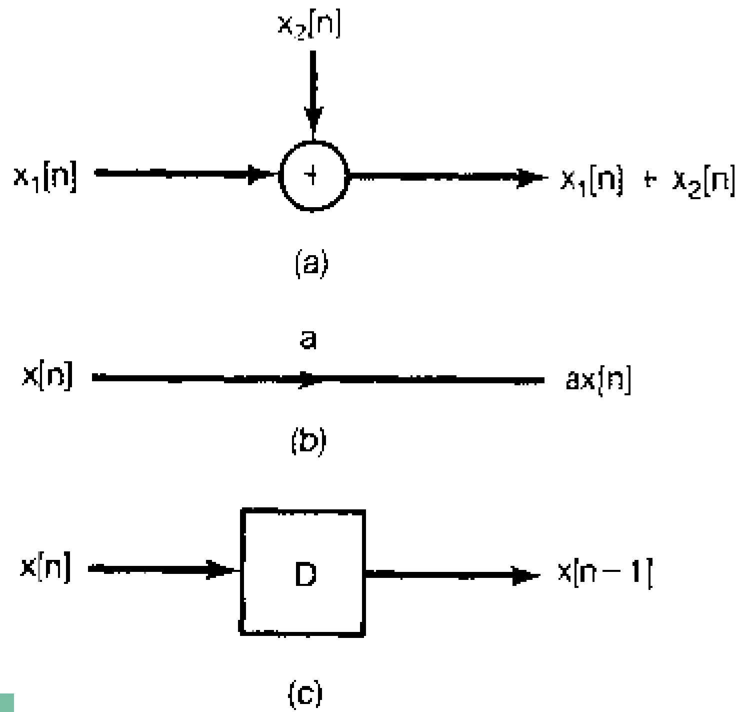
要求写出框图实现方程



离散时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

涉及的三种基本运算：相加、乘以系数、延迟



离散时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

$$w[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

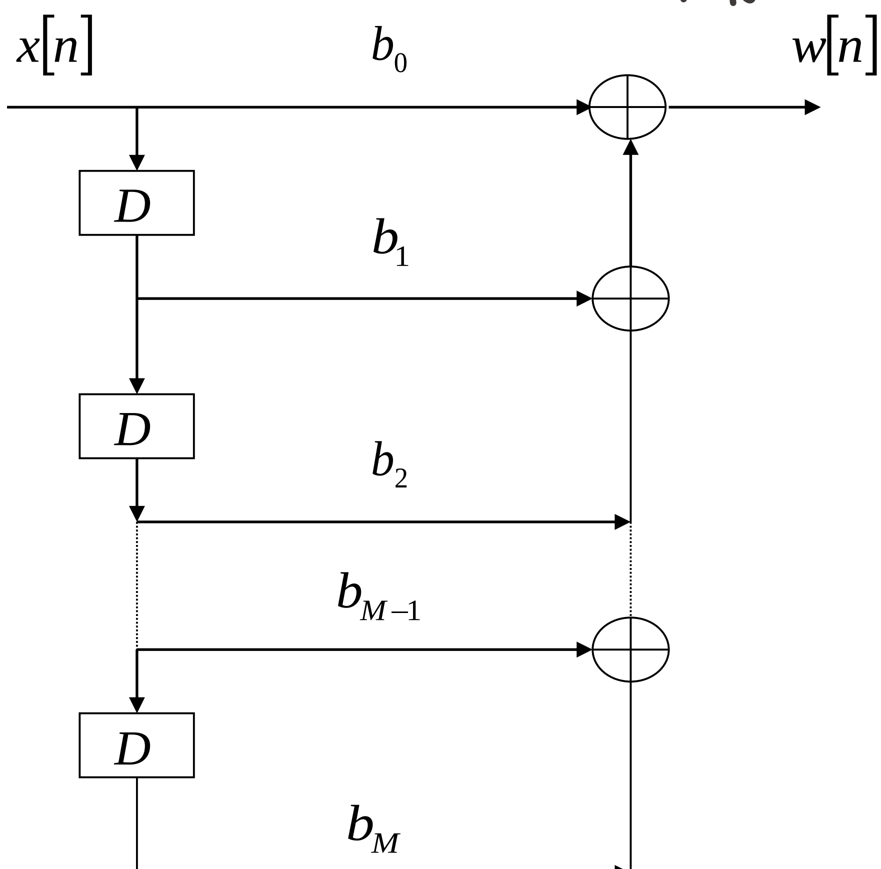
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(w[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

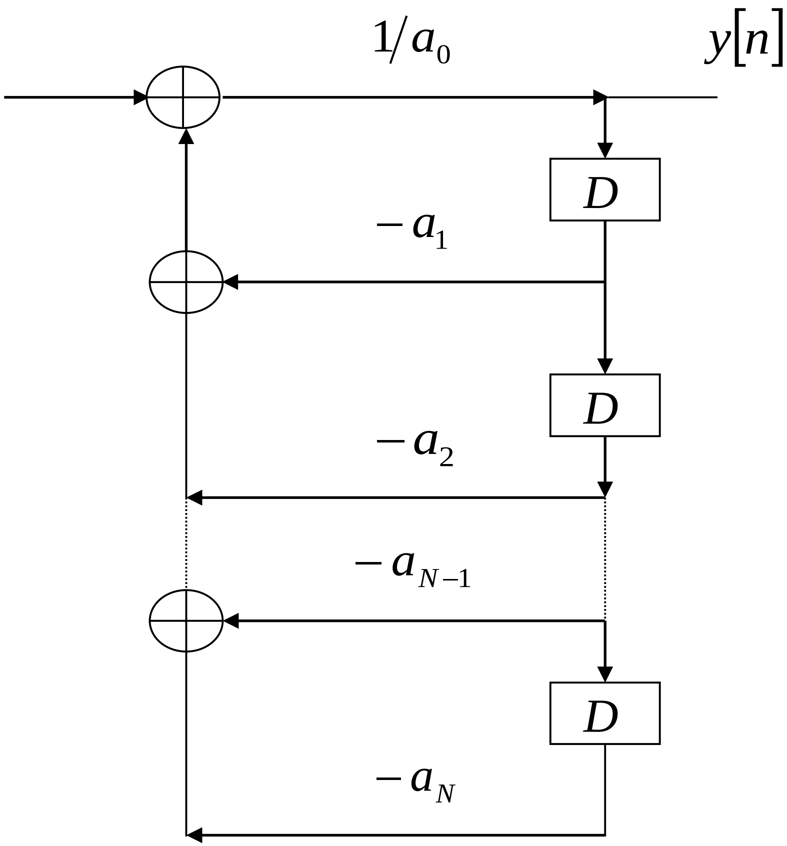
离散时间LTI系统的方框图实现

$$w[n]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

想明白啦
不用记

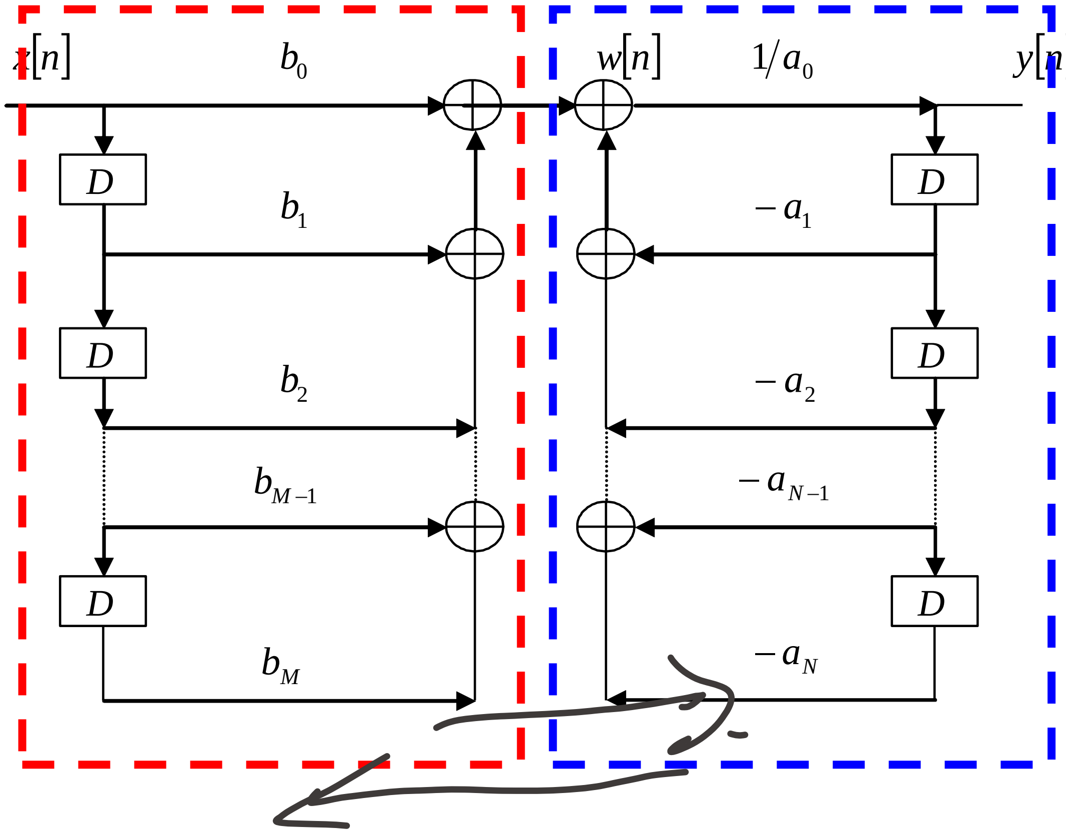
$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left(w[n]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right)$$





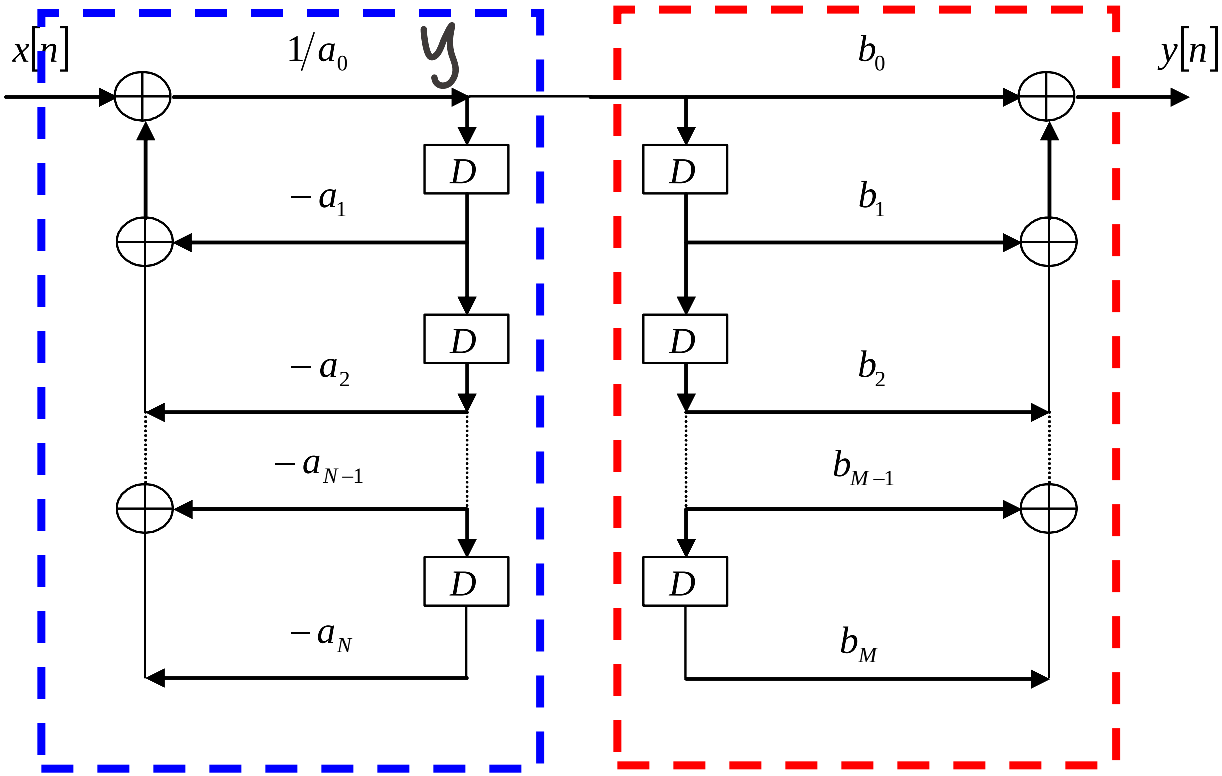
离散时间LTI系统的直接I型实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



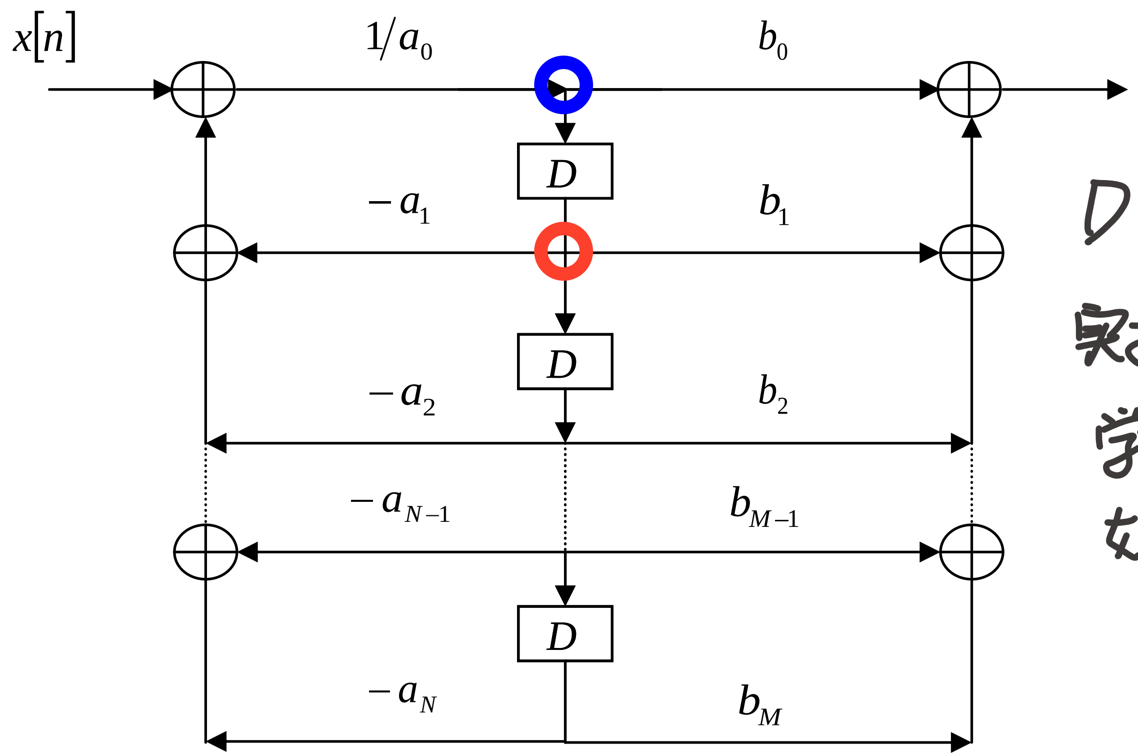
离散时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



离散时间LTI系统的直接II型实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



D · 延时函数.

实操复杂

学频域后

好解决

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

系统响应求解

信号检

信统辨识

能否时域直接做完?

谢谢大家!

$$\vec{y} = H\vec{x}$$

$$H^T\vec{y} = \boxed{H^T H}\vec{x}$$

可以求逆

$$=$$