第七讲 傅里叶变换

杜清河
西安交通大学
2025春

本讲覆盖章节

- 4.0、4.1、4.2

内容提要

- 非周期信号傅里叶变换表示的导出
- 傅里叶变换的收敛
- 周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换举例

内容提要

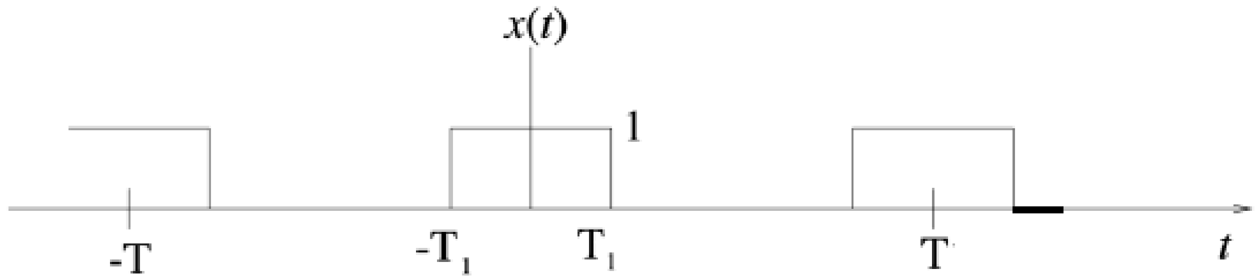
- 非周期信号傅里叶变换表示的导出
- 傅里叶变换的收敛
- 周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换举例

建立傅里叶变换表示的基本思想

- 自然界和工程中存在大量的非周期信号。为了从频域理解信号与系统，必须建立非周期信号的频域表示。

- 把非周期信号看作是周期信号在周期趋于无穷大时的极限，从而考察连续时间傅里叶级数在周期趋于无穷大时的结果，就能够得到非周期信号的频域表示。

建立傅里叶变换表示的基本思想



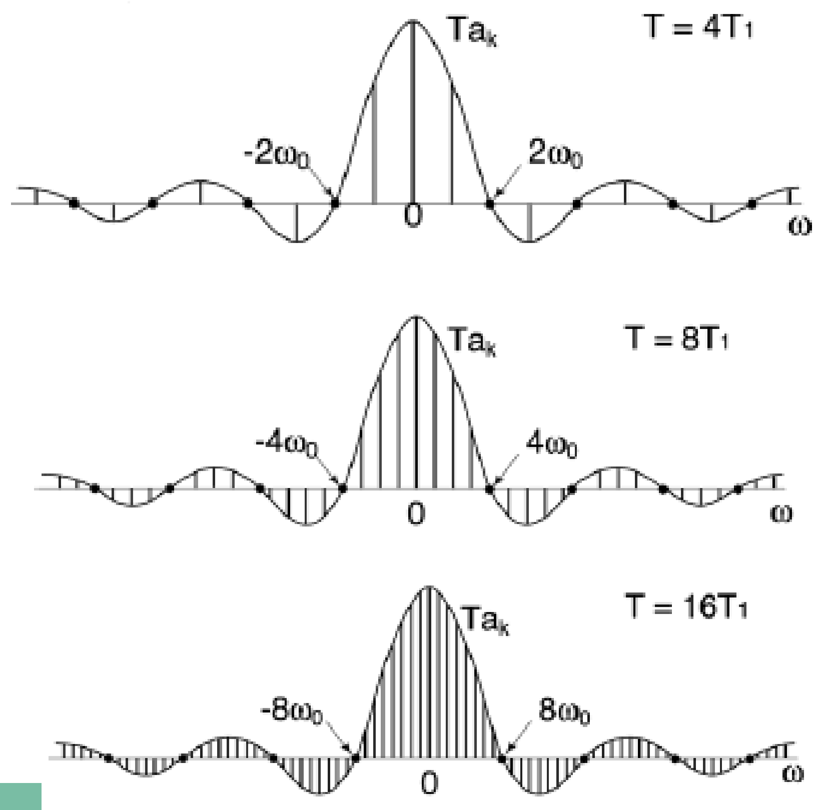
T_1不变

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T_0/2\end{cases}$$

$$a_k=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

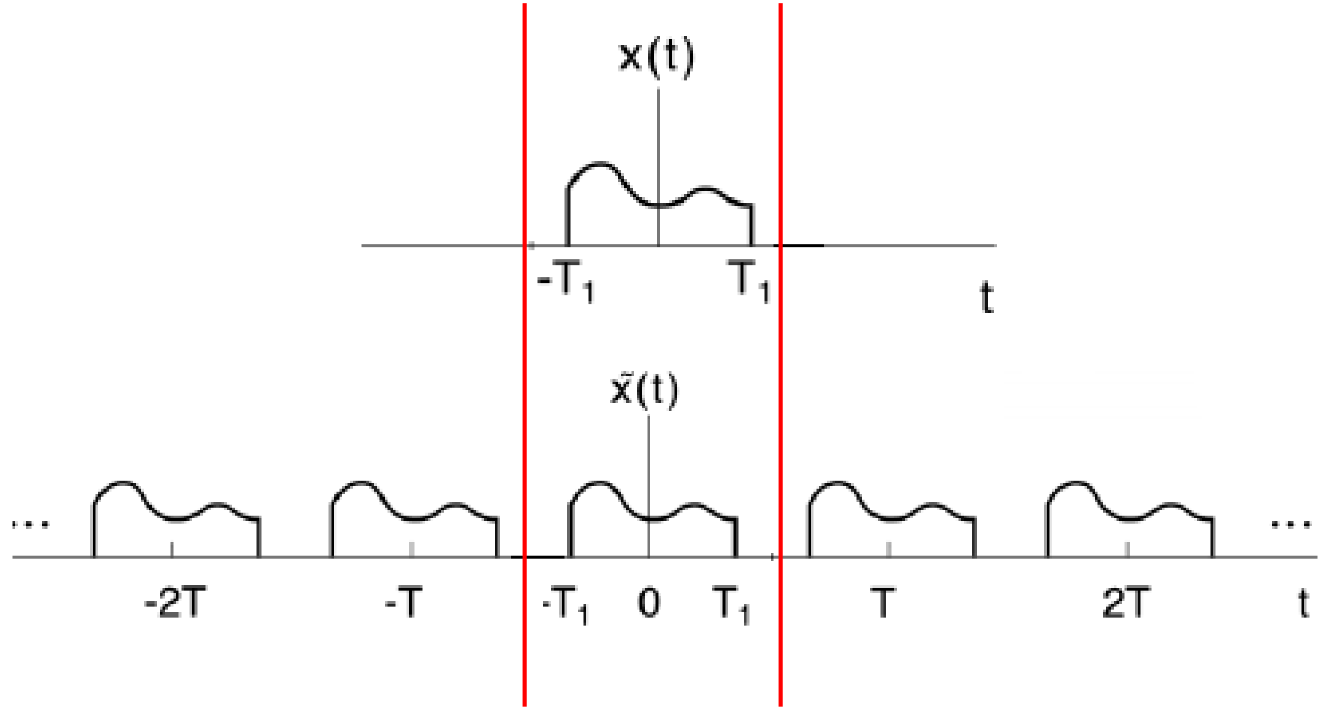
⇓

$$Ta_k=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\Big|_{\omega=k\omega_0}$$



$T\rightarrow\infty$

非周期信号傅里叶变换的导出



$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \text{periodic}, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad \xrightarrow{T \to \infty} \quad \tilde{x}(t) = x(t)$$

非周期信号傅里叶变换的导出

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

引入记号： $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

则有： $a_k = \dfrac{X(jk\omega_0)}{T}$

非周期信号傅里叶变换的导出

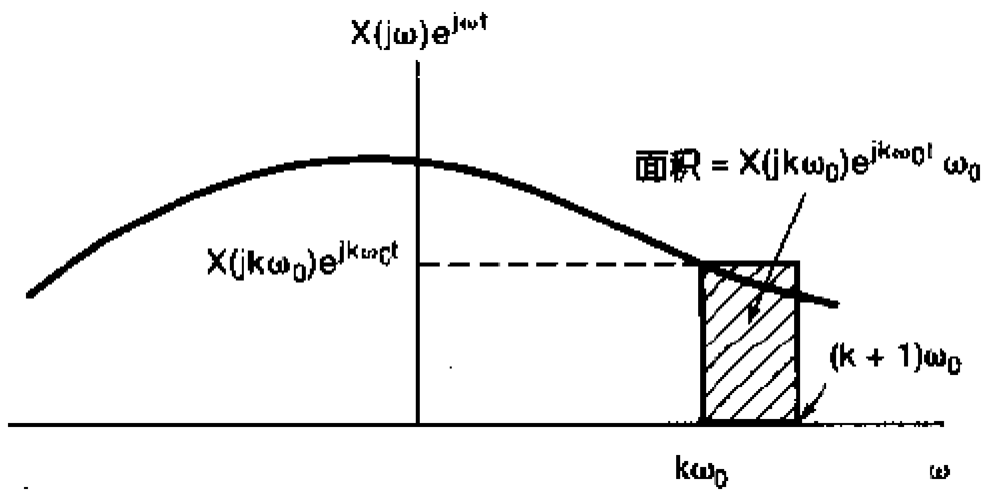
$$a_k = \frac{X(jk\omega_0)}{T}$$

将该结果代入傅里叶级数综合公式，可得：

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} X(jk\omega_0)}_{a_k} e^{jk\omega_0 t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}$$

非周期信号傅里叶变换的导出

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_0 X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$



$T \to \infty$ $\Rightarrow$ $\tilde{x}(t) \to x(t)$,

$\omega_0 \to d\omega,\ X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \to X(j\omega)e^{j\omega t},\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$

所以：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

连续时间傅里叶变换对

综合公式(反变换) $x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

分析公式(正变换) $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

- 几点讨论：

1. 综合公式表明，非周期信号可以表示为一组复指数信号的线性组合，这些复指数信号出现在连续频率上，并且其复振幅为$X(j\omega)(d\omega/2\pi)$

连续时间傅里叶变换对

综合公式(反变换) $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

分析公式(正变换) $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

2. $X(j\omega)$ 称为频谱密度，它反映了各个频率分量的相对复振幅，与a_k不同。频谱密度也简称为频谱。

$$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$$

幅频特性

相频特性

连续时间傅里叶变换对

综合公式(反变换)　$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

分析公式(正变换)　$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

3. $$a_k=\frac{1}{T}X(j\omega)\big|_{\omega=k\omega_0}$$

时域周期化，
频域离散化

周期信号的频谱正比于对应非周期信号频谱的**样本**；非周期信号的频谱正比于对应周期信号频谱的**包络**

内容提要

- 非周期信号傅里叶变换表示的导出
- 傅里叶变换的收敛
- 周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换举例

傅里叶变换的收敛性

综合公式(反变换) $x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

分析公式(正变换) $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

收敛的含义：

- $X(j\omega)$为有限值
- 综合公式中的无穷积分收敛于$x(t)$

傅里叶变换收敛的条件

第一组条件（平方可积条件）：$x(t)$平方可积，或者说能量有限，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

第二组条件(狄里赫利条件)：

- $x(t)$绝对可积；
- 在任何有限区间内，$x(t)$只有有限个最大值和最小值；
- 在任何有限区间内，$x(t)$只有有限个不连续点，且在这些点处$x(t)$为有限值。

关于傅里叶变换收敛性的几点说明

- 收敛并不意味着逐点相等，而只意味着信号和它的傅里叶变换表示之间不存在能量上的差别
- 平方可积条件和狄里赫利条件并不等价，它们都是傅里叶变换收敛的充分条件，而不是必要条件
- 通过引入冲激函数，既不绝对可积也不平方可积的信号也可以建立傅里叶变换

内容提要

- 非周期信号傅里叶变换表示的导出
- 傅里叶变换的收敛
- 周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换举例

周期信号的傅里叶变换

考虑一个连续时间信号，其傅里叶变换为：

$$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

因此，若：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

则：

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

周期信号的傅里叶变换

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

傅里叶级数系数为a_k的周期信号的傅里叶变换就是出现在成谐波关系的频率上的一串冲激，发生于第k次谐波频率上的冲激函数的面积是第k个傅里叶级数系数a_k的2π倍。

1的傅里叶变换是$2\pi\delta(\omega)$

内容提要

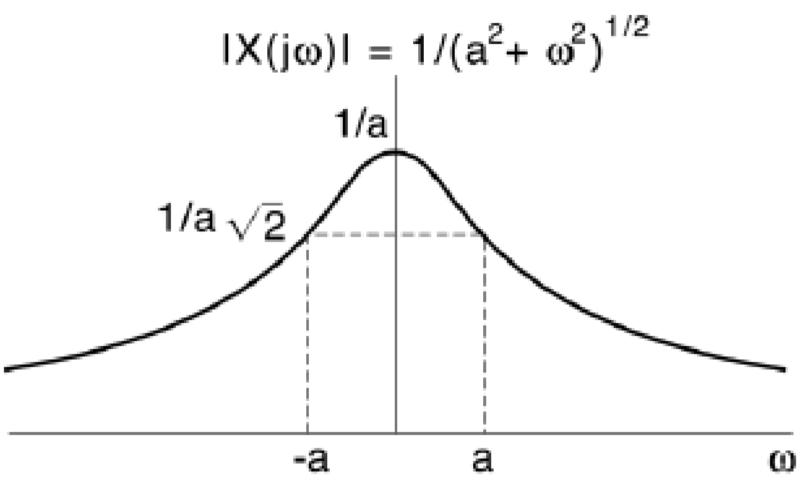
- 非周期信号傅里叶变换表示的导出
- 傅里叶变换的收敛
- 周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶变换举例

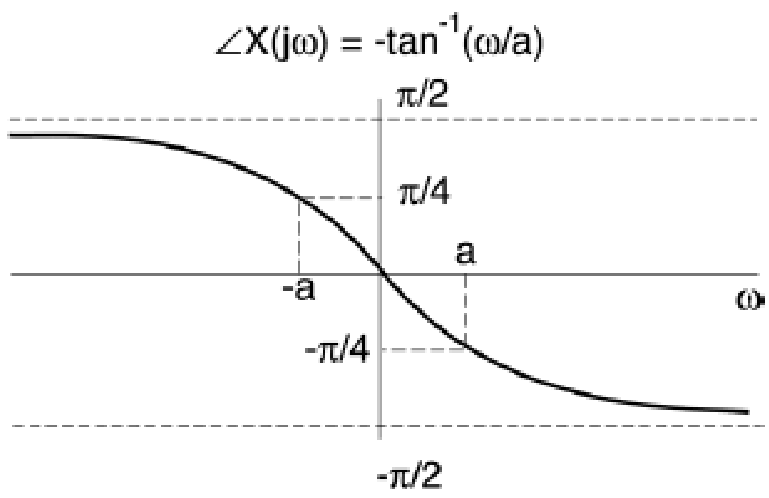
例1：单边指数信号

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)t}}dt$$

$$= -\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$



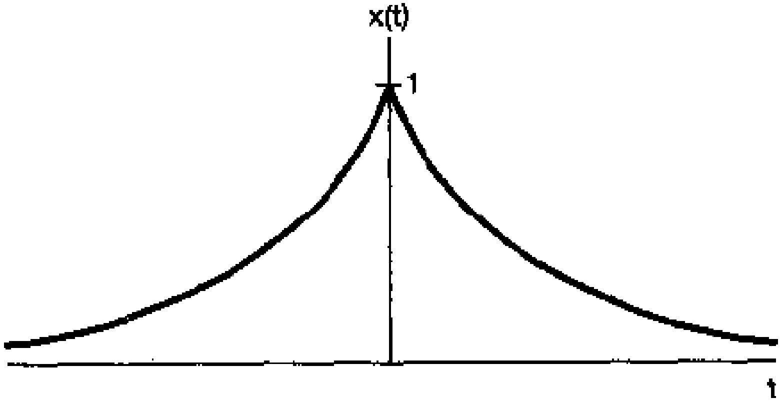


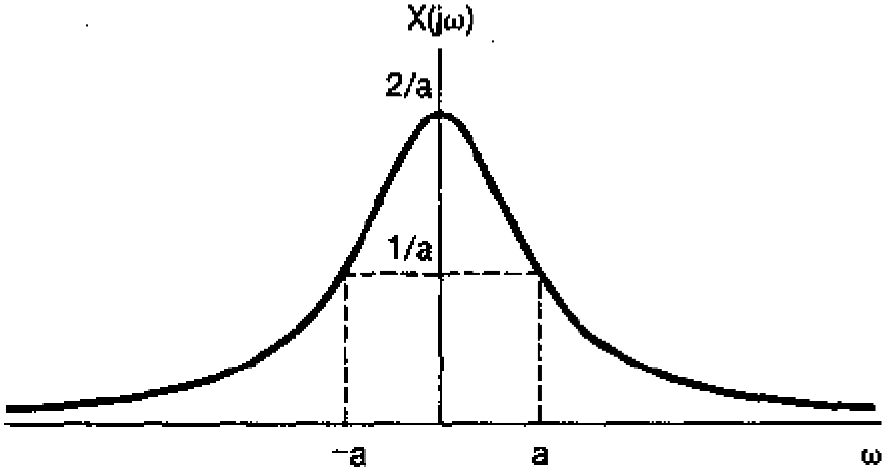
例2：双边指数信号

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$





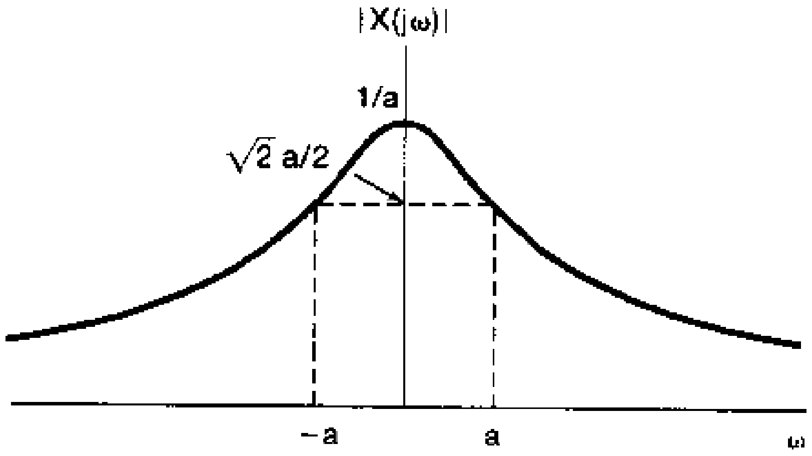
单边 vs. 双边指数信号

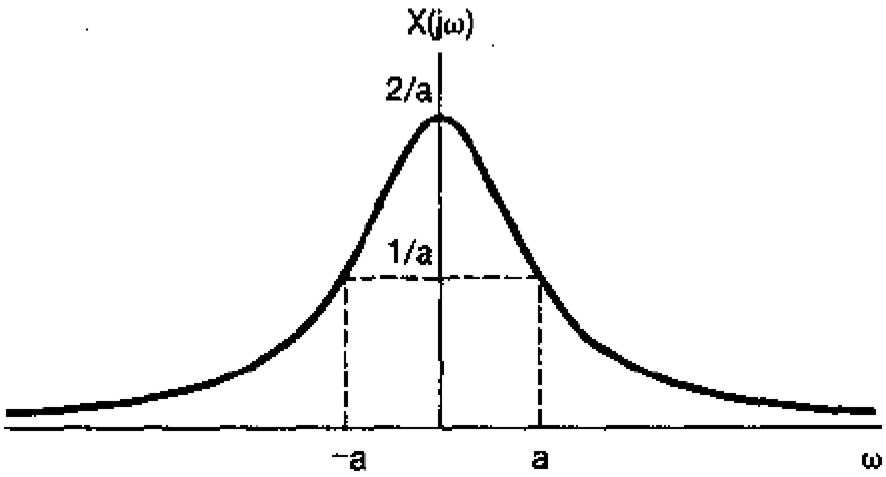
$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$





例3：冲激信号

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

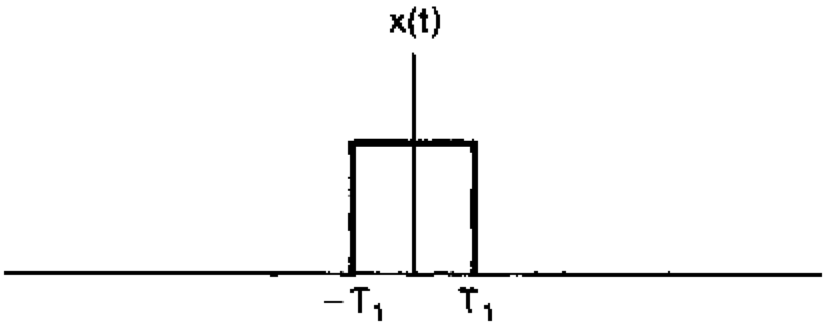
$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \ = e^{-j\omega t_0}$$

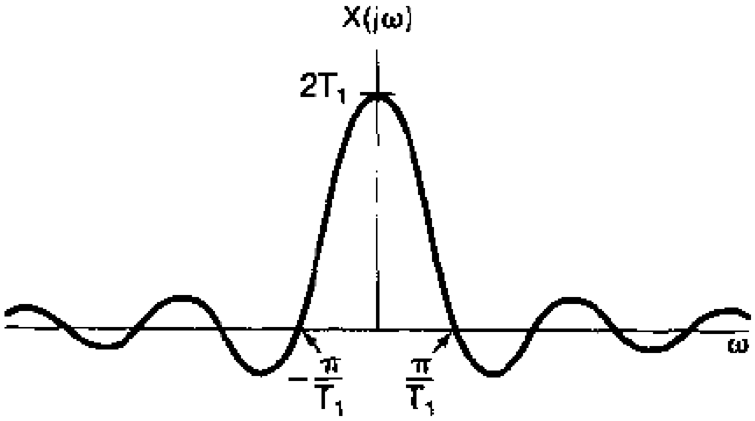
例4：方波信号

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2\frac{\sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



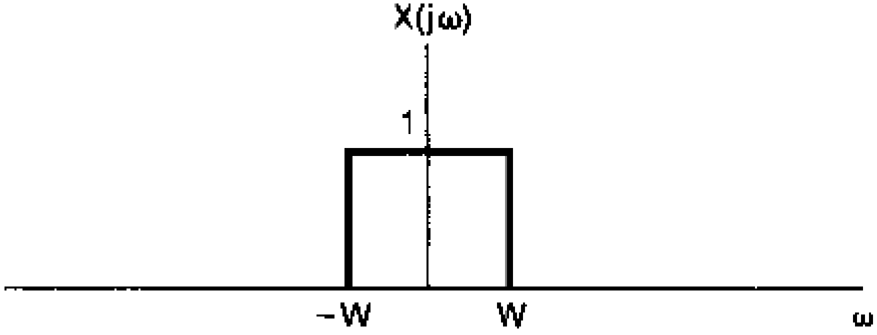


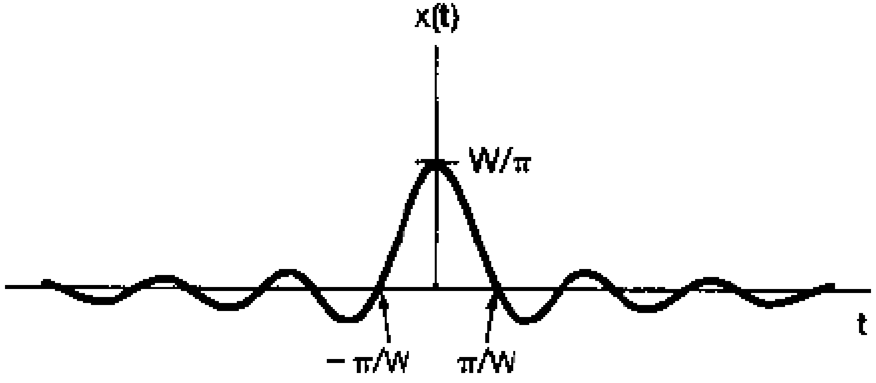
例5：sinc信号

考虑一个信号$x(t)$，其傅里叶变换为：

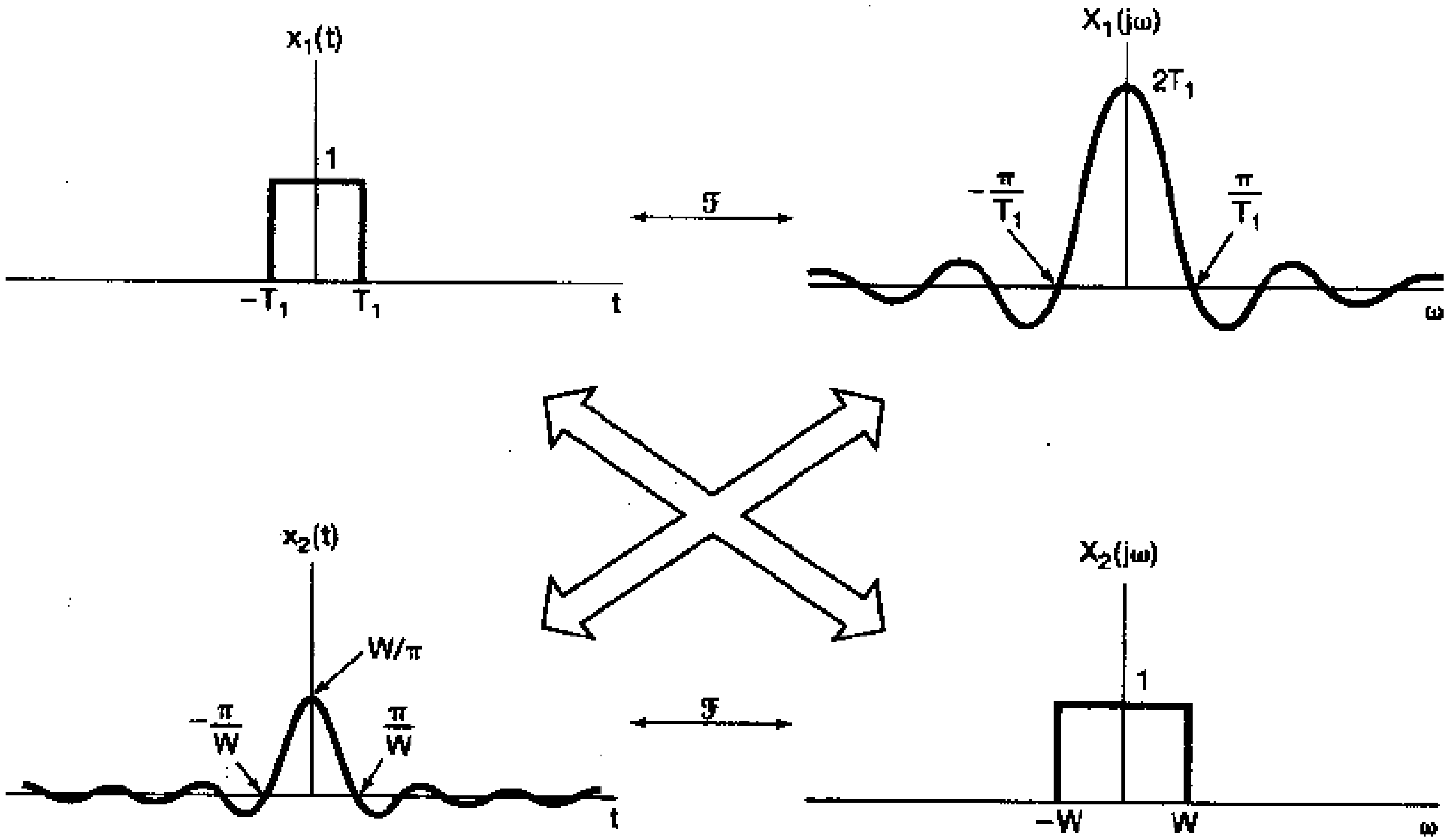
$$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W \\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\sin Wt}{\pi t}=\frac{W}{\pi}\sin c\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$





时域/频域矩形脉冲



$x_1(t)$
1
$-T_1$
T_1
t
$\mathfrak{F}$
$X_1(j\omega)$
$2T_1$
$-\frac{\pi}{T_1}$
$\frac{\pi}{T_1}$
ω
$x_2(t)$
W/π
$-\frac{\pi}{W}$
$\frac{\pi}{W}$
t
$\mathfrak{F}$
$X_2(j\omega)$
1
$-W$
W
ω

信号的频谱和带宽

❖ 频谱

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

$|X(j\omega)|$: 幅度谱

$\angle X(j\omega)$: 相位谱

➢ 带宽

1) 理论定义:

$$B = \omega_H - \omega_L$$

信号的频谱和带宽

2) 3dB带宽：

$X(j\omega)$下降到最大值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$时所对应的频率范围

3) 第一零点带宽：

对于包络是sinc函数形状的频谱，通常定义主瓣宽度(即频谱第一个过零点内的频率范围)为信号带宽

例6：符号函数

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

$x_1(t)$

$$\mathrm{sgn}(t)=\lim_{a\to 0}\left(e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t)\right)$$

$$X_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}-e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$$

所以，符号函数的傅里叶变换为：

$$X(j\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

$$|X(j\omega)|=\frac{2}{|\omega|}\qquad \angle X(j\omega)=\begin{cases}-\pi/2, & \omega>0\\ \pi/2, & \omega<0\end{cases}$$

例7：阶跃信号

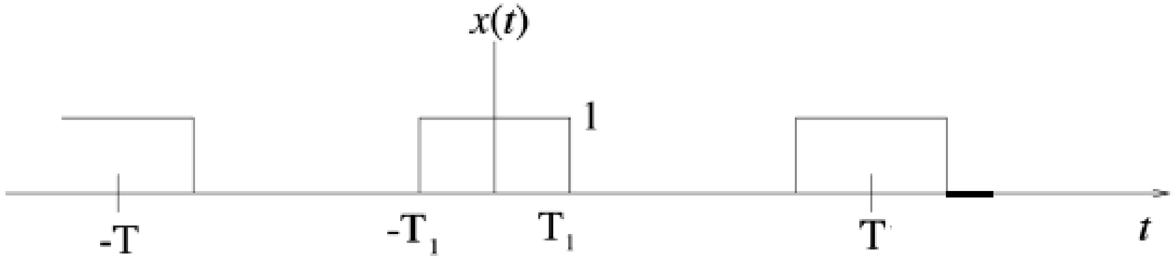
$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$u(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)+\frac{1}{2}$$

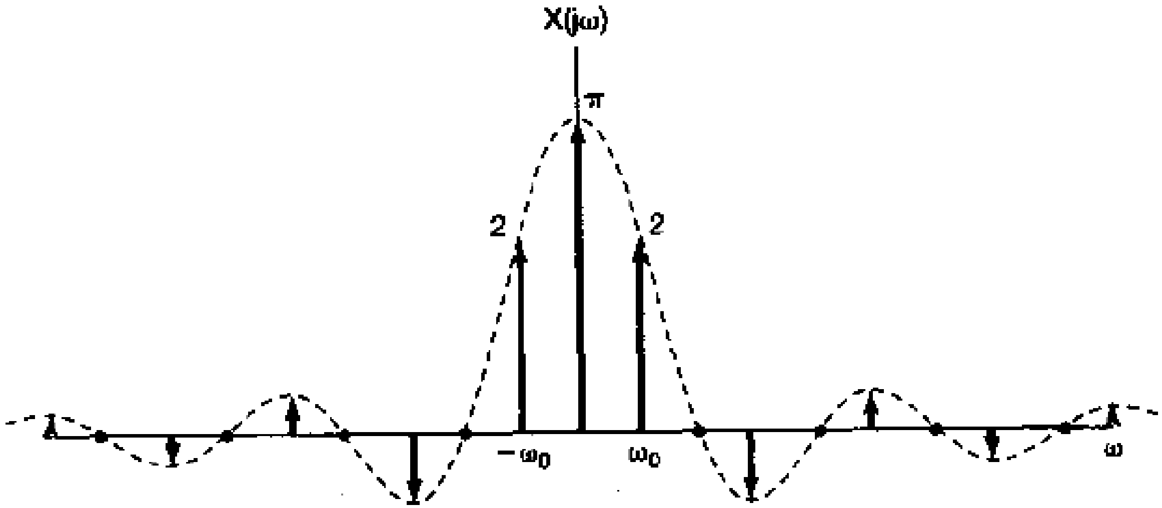
因此，它的傅里叶变换为：

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

例8：周期性方波



$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \qquad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$$



例9：正弦信号

$$x(t)=\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$\Downarrow$$

$$X(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

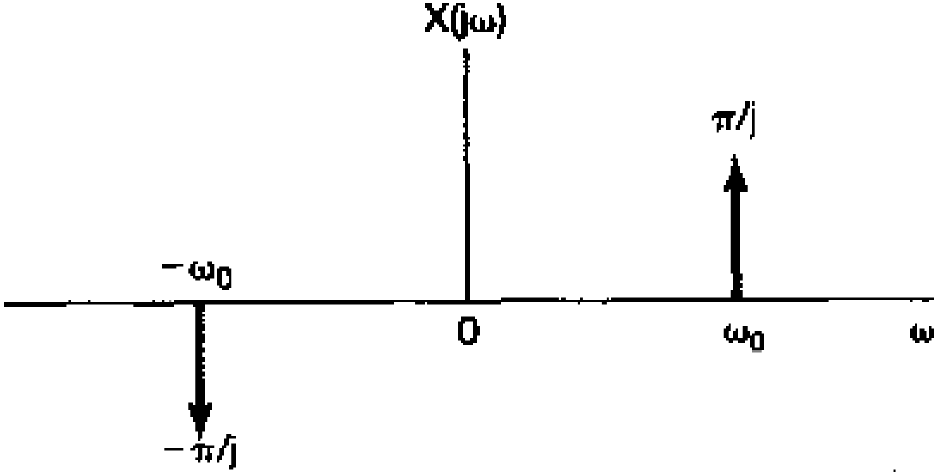
$X(j\omega)$

例9：正弦信号(续)

$$x(t)=\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

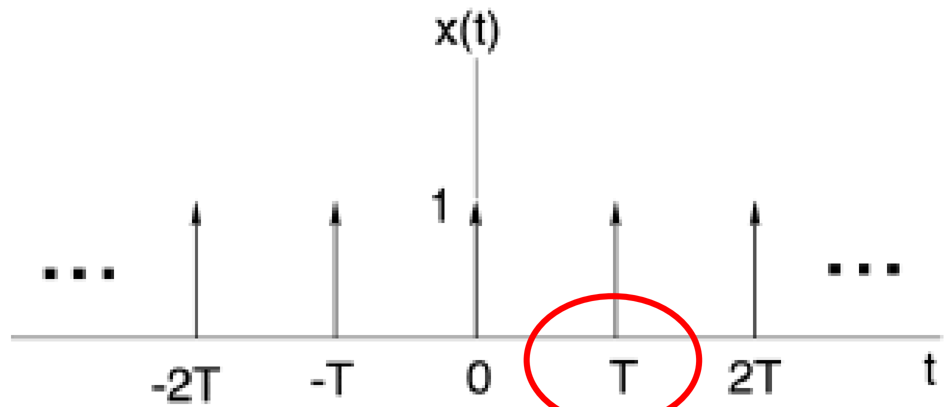
⇩

$$X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$$



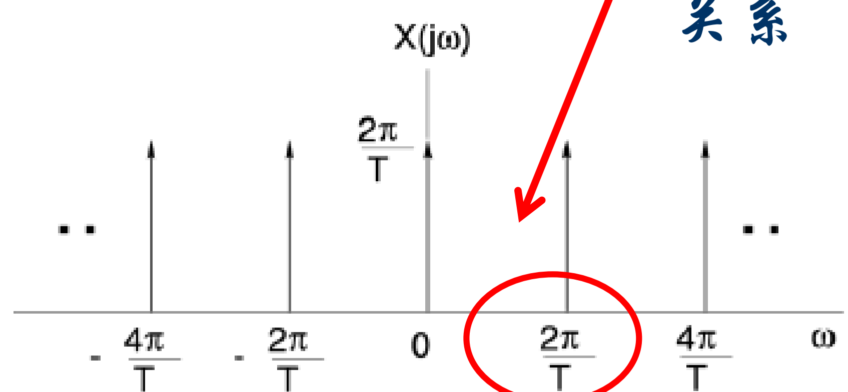
例10：周期性冲激串

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



$$x(t)\leftrightarrow a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}$$

$$X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{2\pi a_k}\delta(\omega-\underbrace{\frac{k2\pi}{T}}_{k\omega_0})$$



时频域之间的相反关系

谢谢大家！