第二十一讲
Z变换及其性质

杜清河
西安交通大学
信息与通信工程学院
2025春

覆盖章节

- 10.1-10.6

内容提要

- Z变换的定义
- Z变换的收敛域
- Z反变换
- Z变换的性质
- 应用举例

内容提要

- Z变换的定义
- Z变换的收敛域
- Z反变换
- Z变换的性质
- 应用举例

Z变换的定义

$$z = re^{j\omega}$$

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

几点说明：

1) $X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right) e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$

2) Z变换仅对某些z的取值才是收敛的

$$\text{ROC} = \left\{ z = re^{j\omega} \text{ at which } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

3) 如果|z|=1在ROC内，则

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = F\{x[n]\}$$

Z变换举例

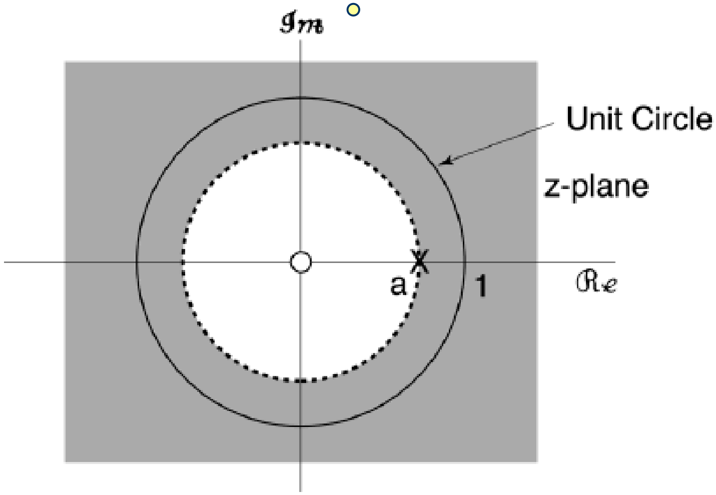
例1： $x[n]=a^n u[n]$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(az^{-1}\right)^n$$

ROC的几何表示

当 $|z|>|a|$ 时，上式收敛，且结果为：

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$



令$a=1$可得$u[n]$的Z变换为：

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1$$

Z变换举例

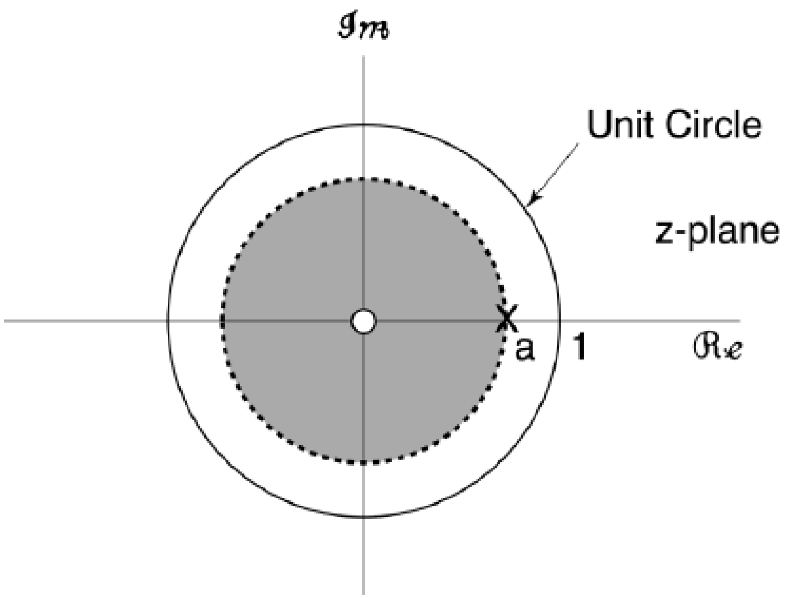
例2： $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$$

$$\boxed{|z| < |a|}$$



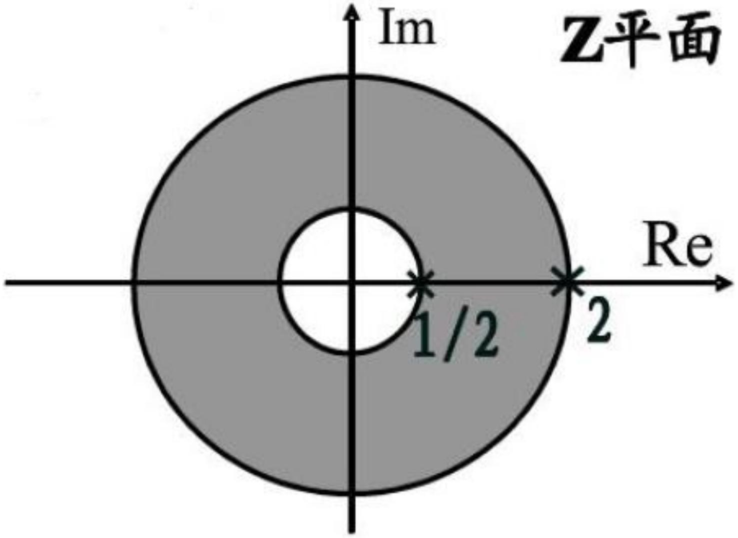
Z变换举例

例3： $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2^n u[-n-1]$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\text{ROC: }\ \frac{1}{2}<|z|<2$$



Z变换与拉普拉斯变换的关系

离散时间序列可以看作由连续时间信号采样得到：

$$x_p(t)=x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$x[n]=x_p(nT)=x_c(nT)$$

$x_p(t)$的拉普拉斯变换为：

$$X_p(s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)e^{-nTs}$$

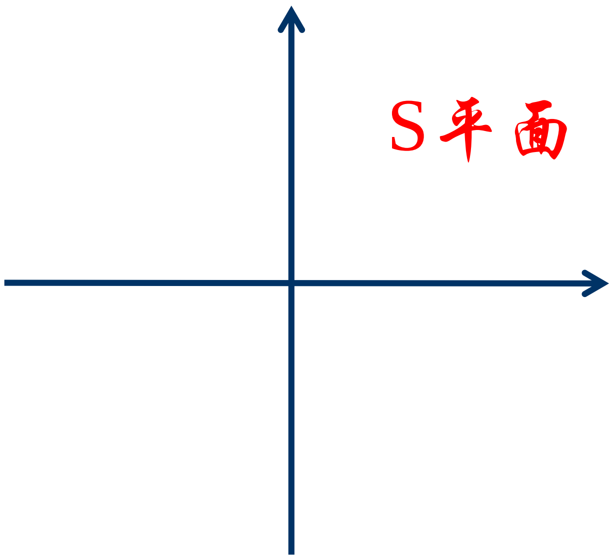
而$x[n]$的Z变换为：

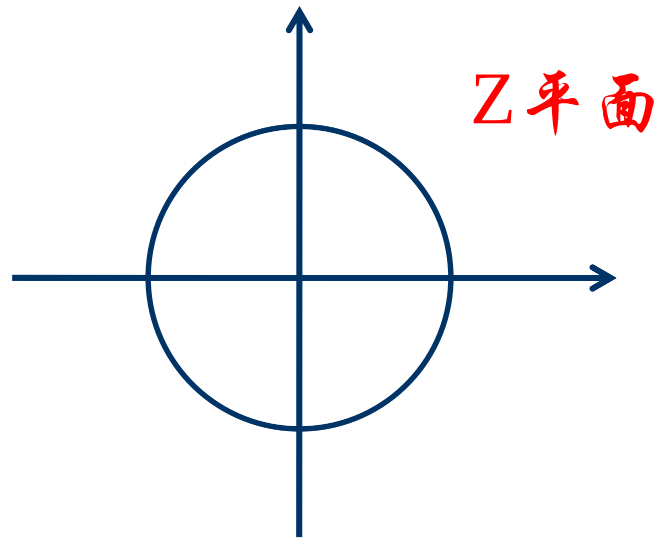
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)z^{-n}$$

Z变换与拉普拉斯变换的关系

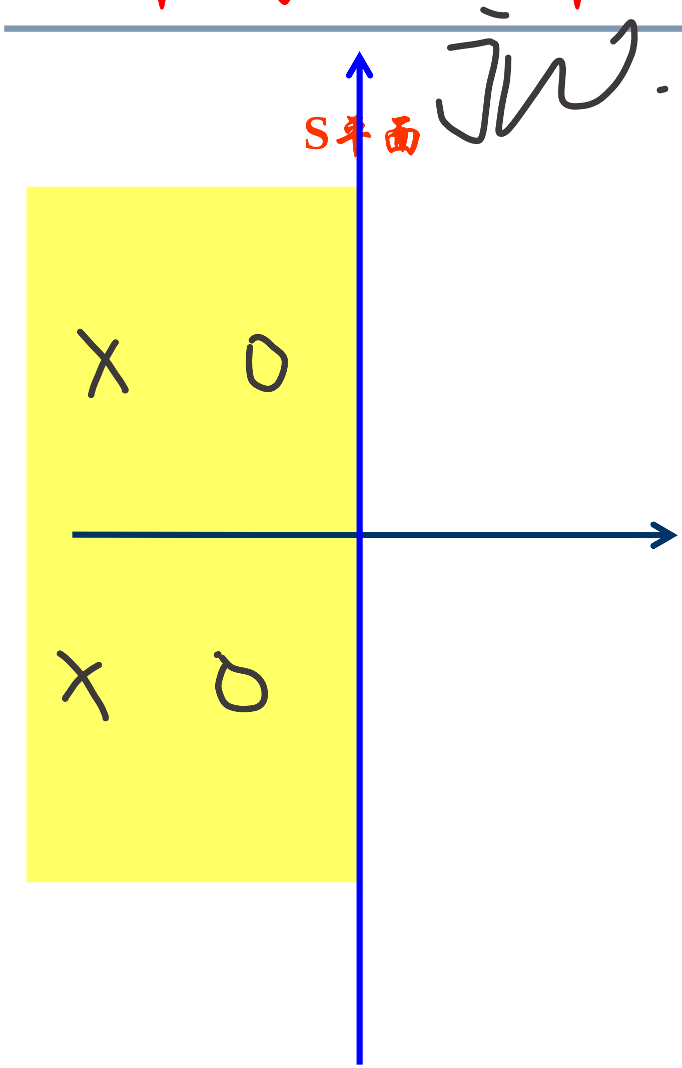
对比上述两式可知：

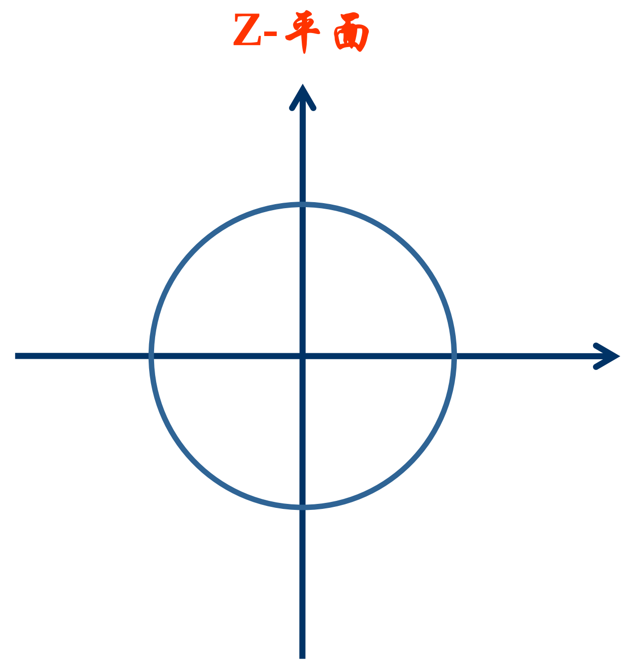
$$X_p(s) = X(z)\big|_{z=e^{Ts}} \Rightarrow \boxed{z = e^{Ts}}$$



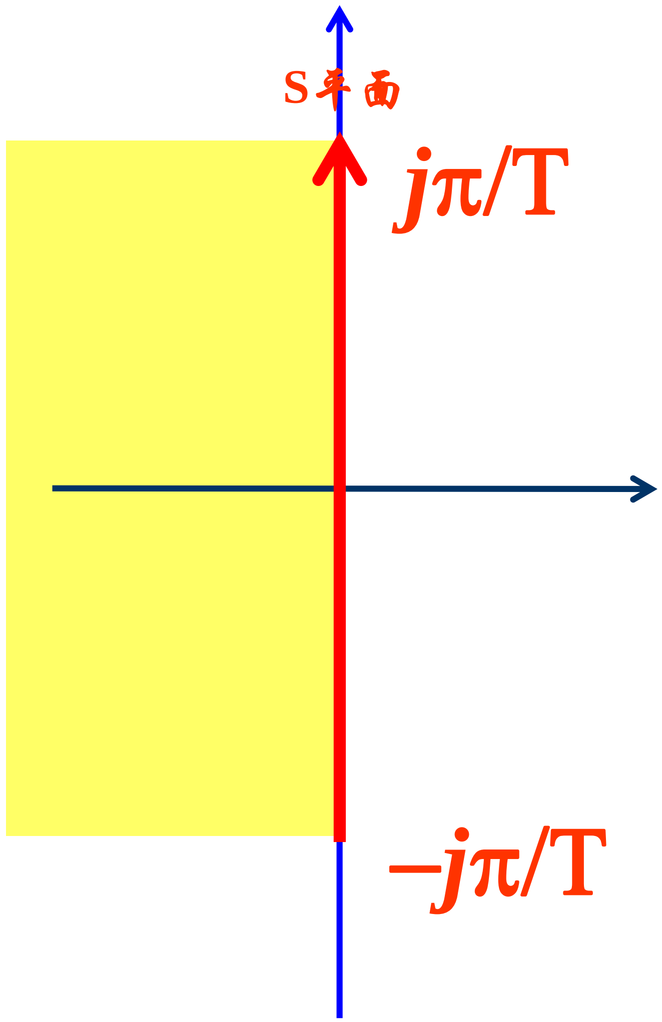


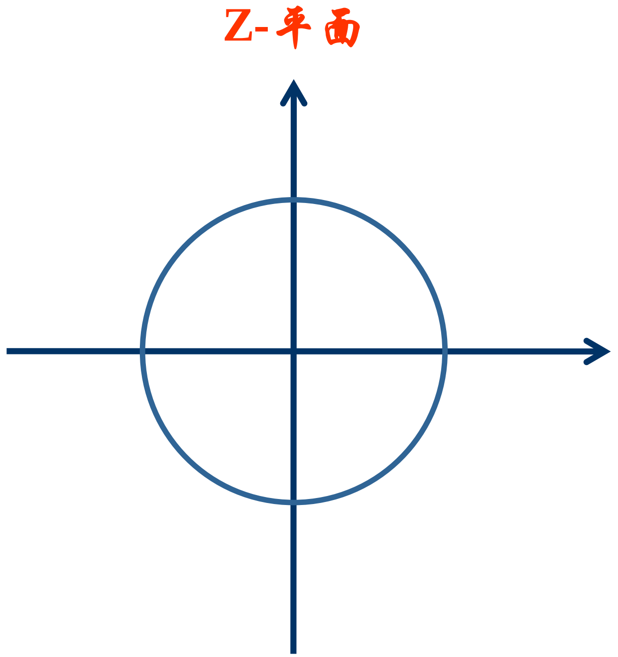
Z-平面 & S平面



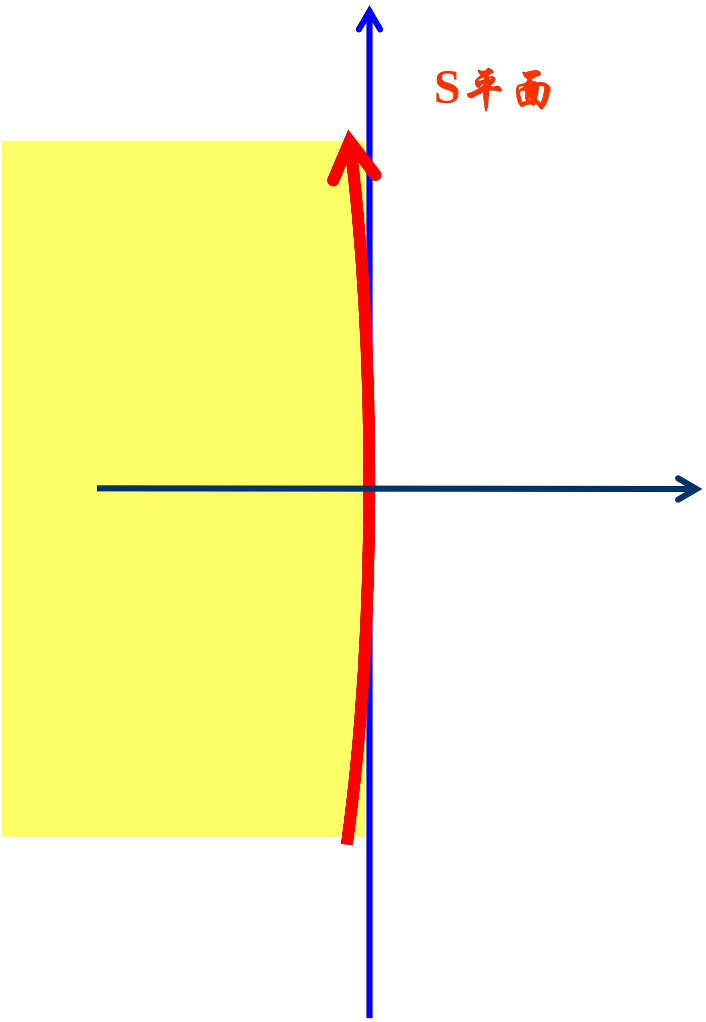


Z-平面 & S平面

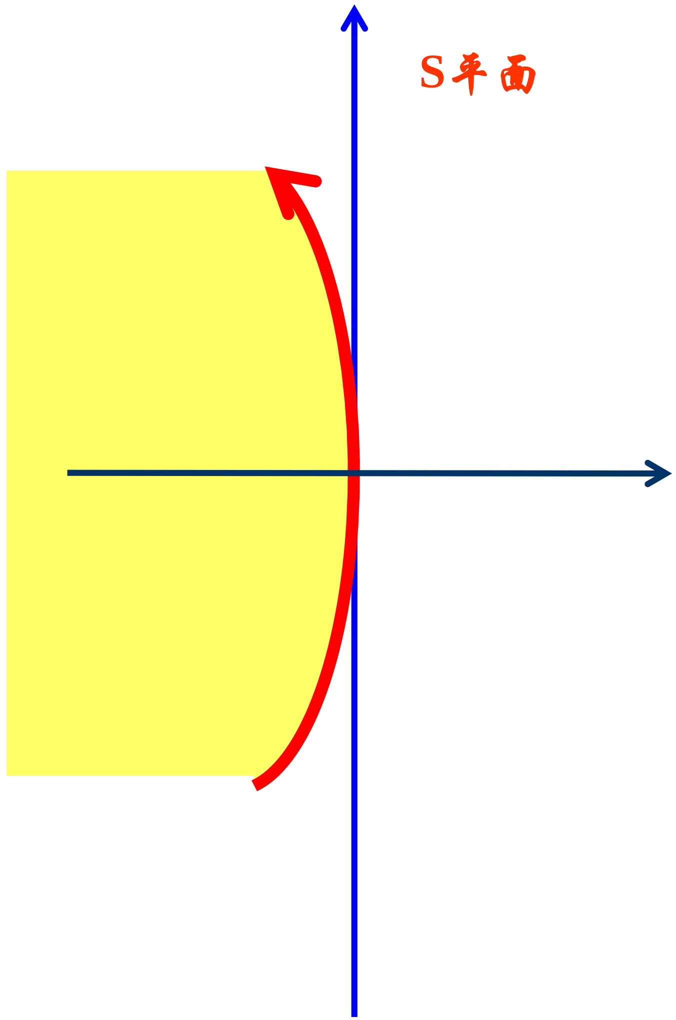




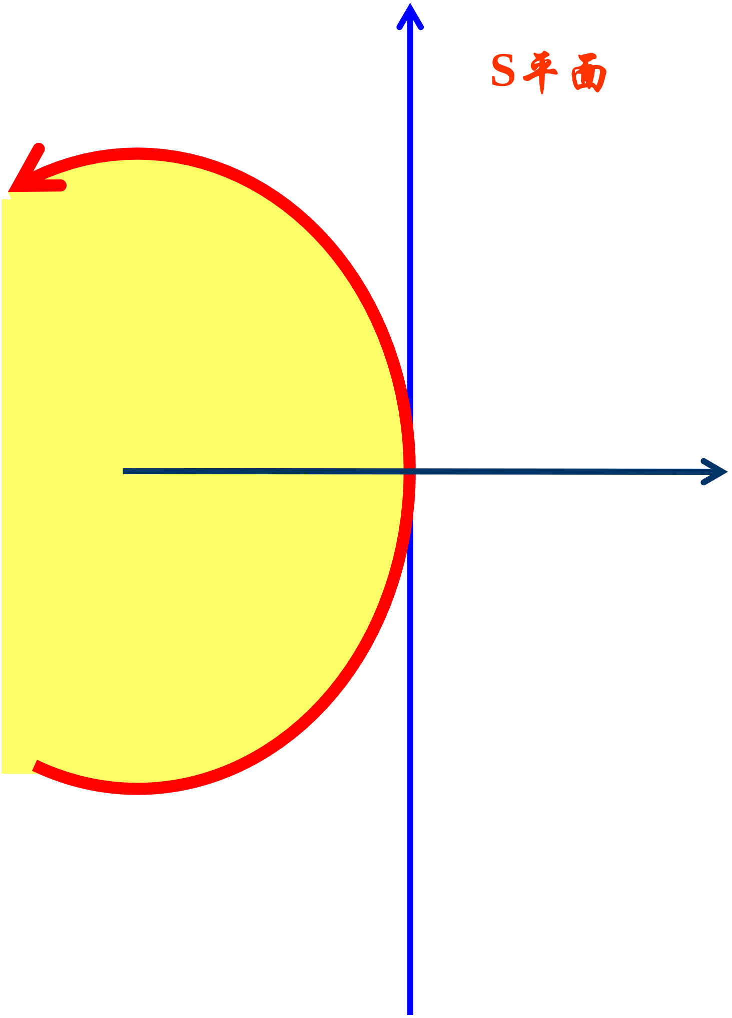
Z-平面 & S平面



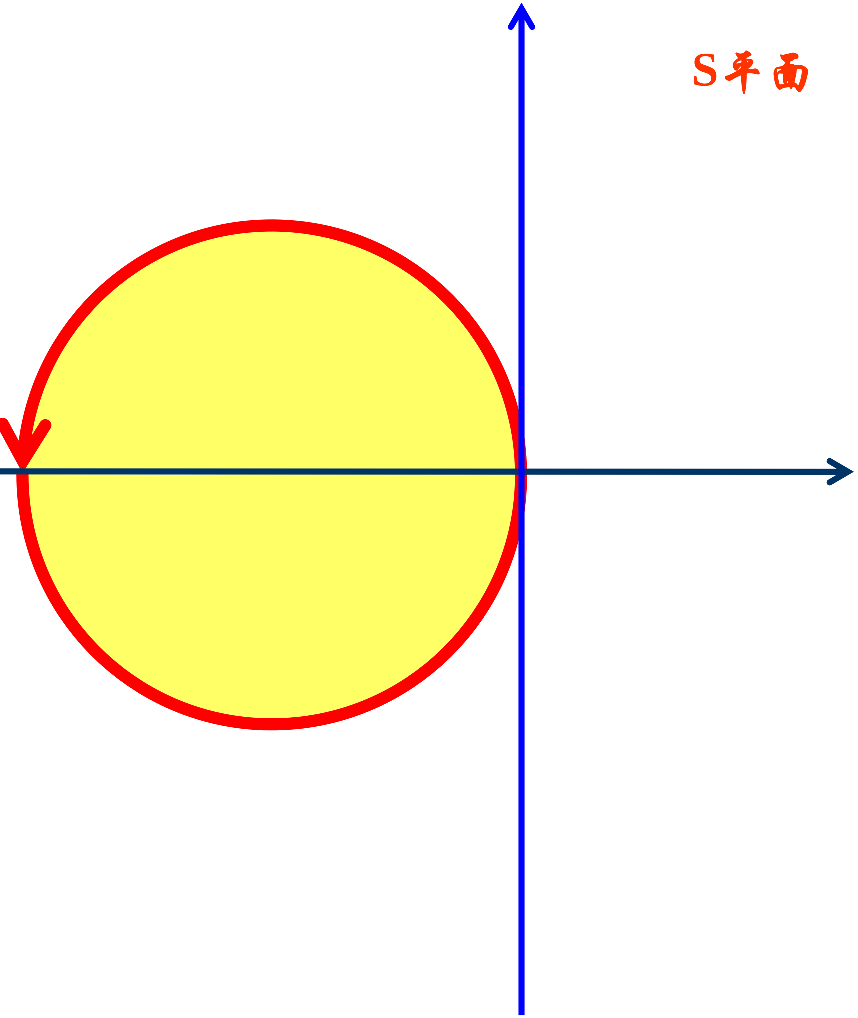
Z-平面 & S平面



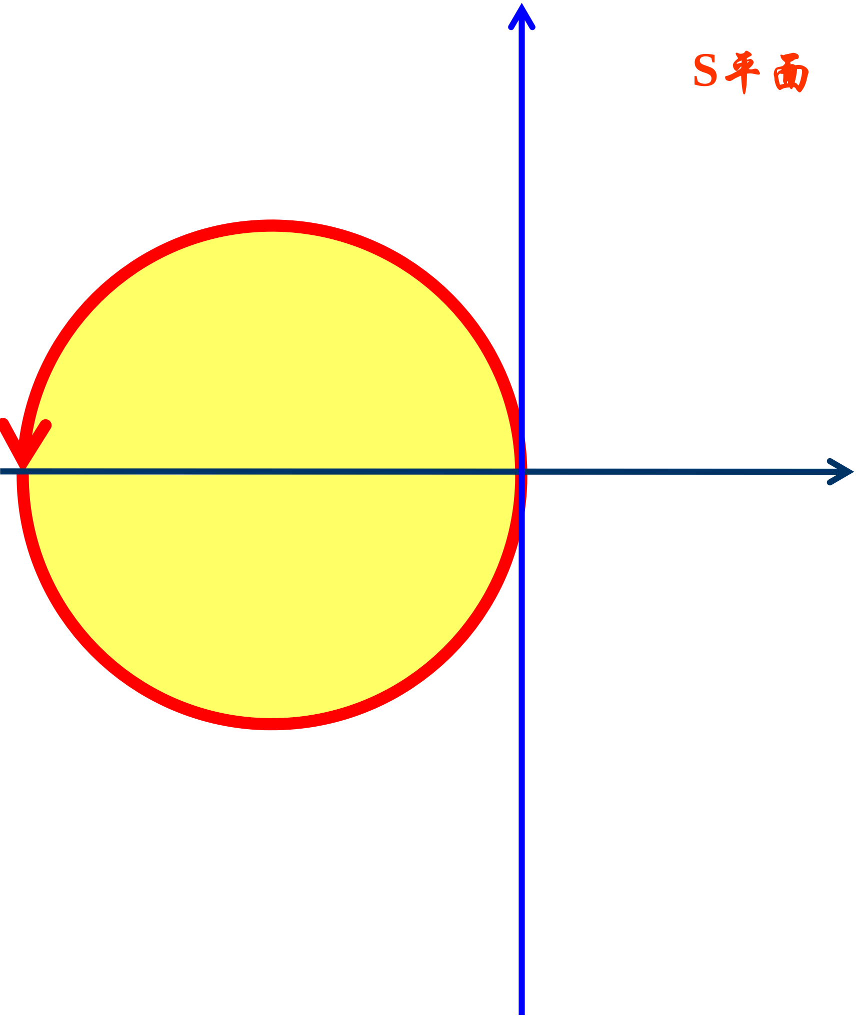
Z-平面 & S平面

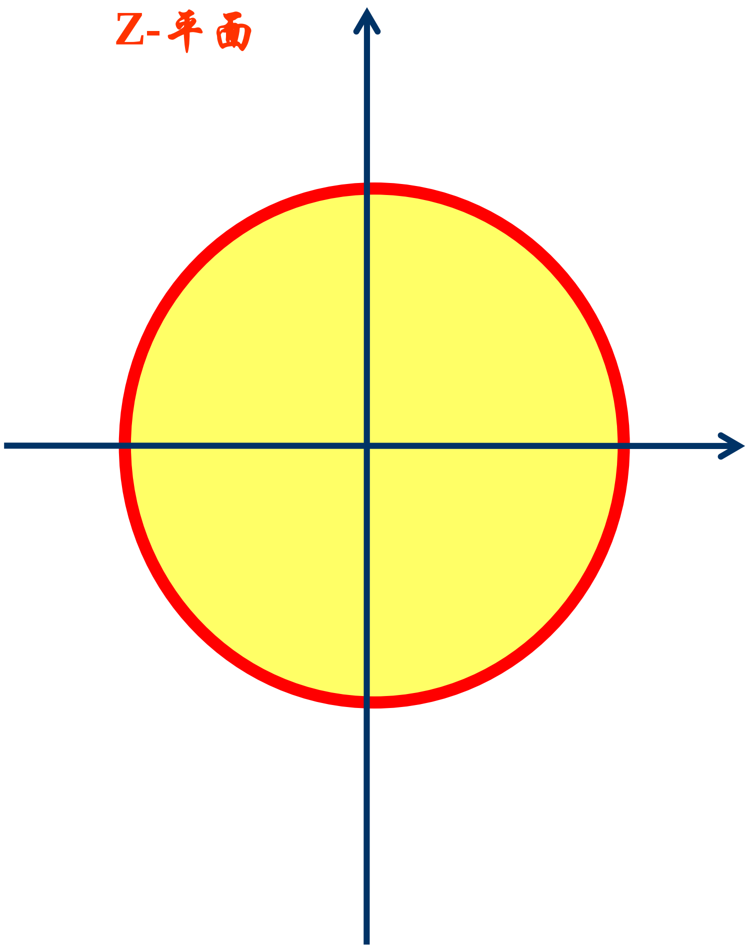


Z-平面 & S平面

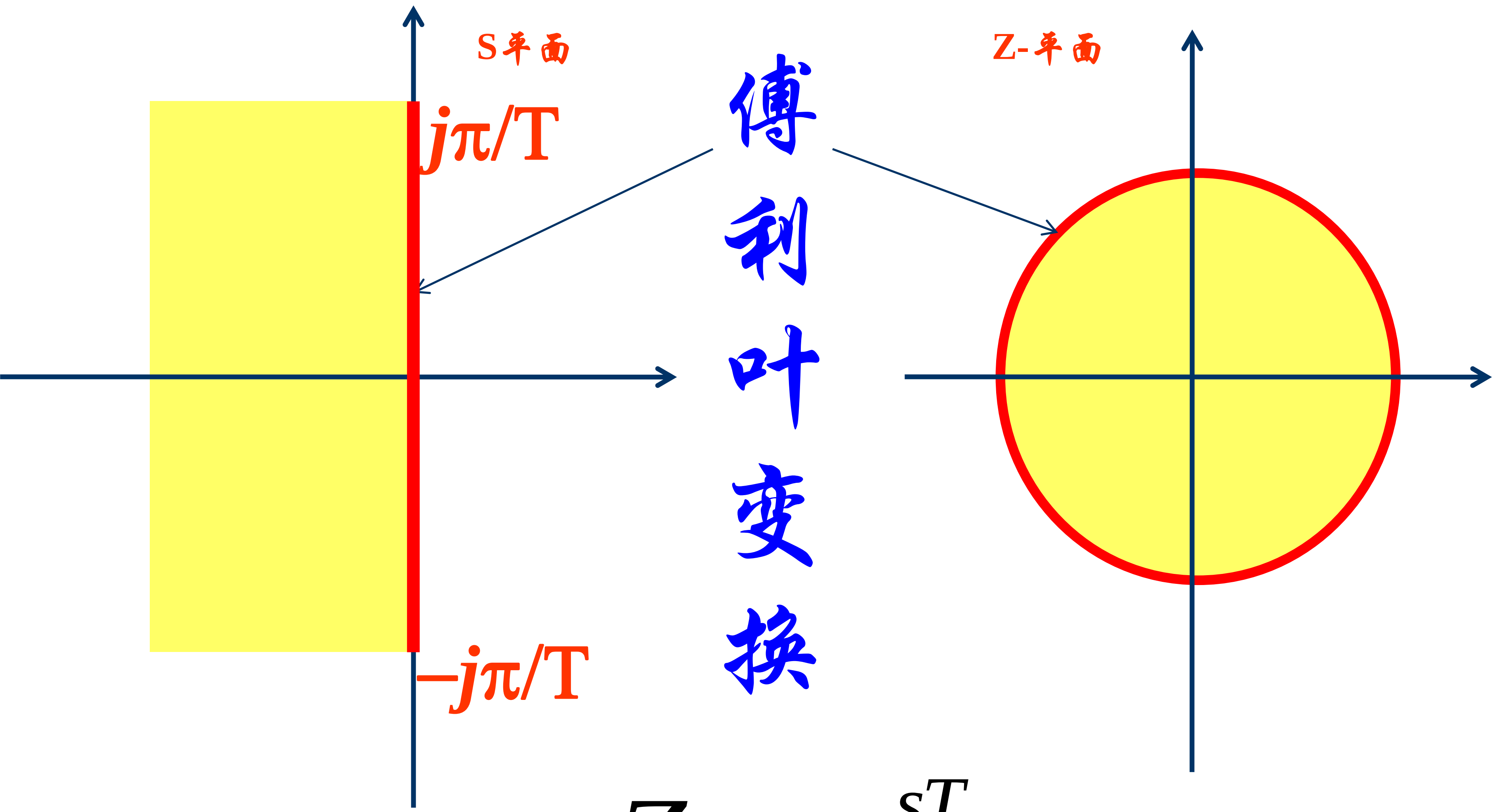


Z-平面 & S平面



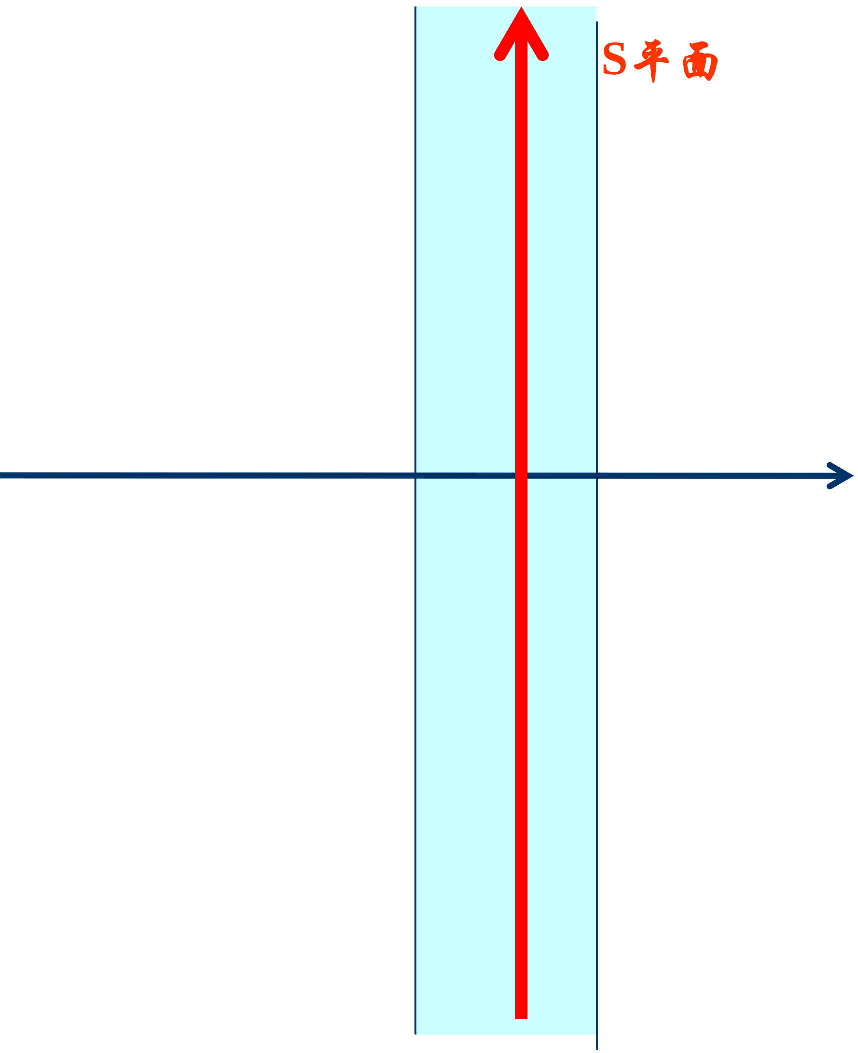


Z-平面 & S平面



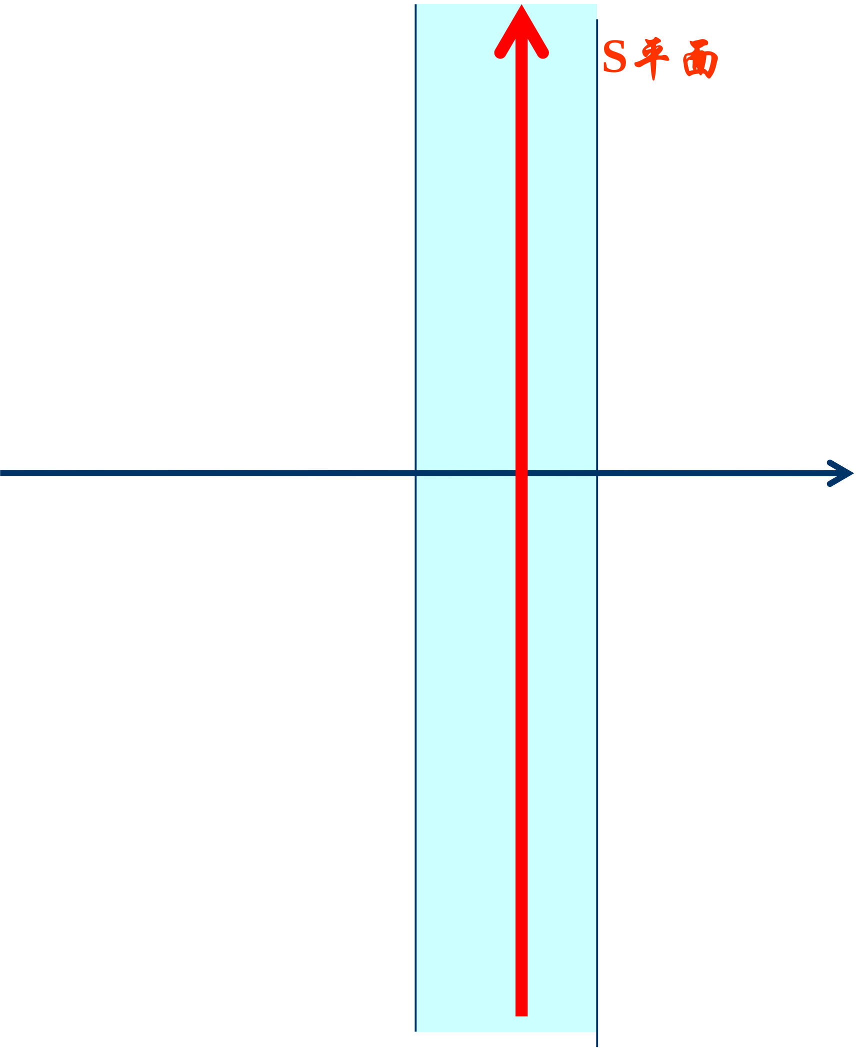
$$Z = e^{sT}$$

Z-平面 & S平面

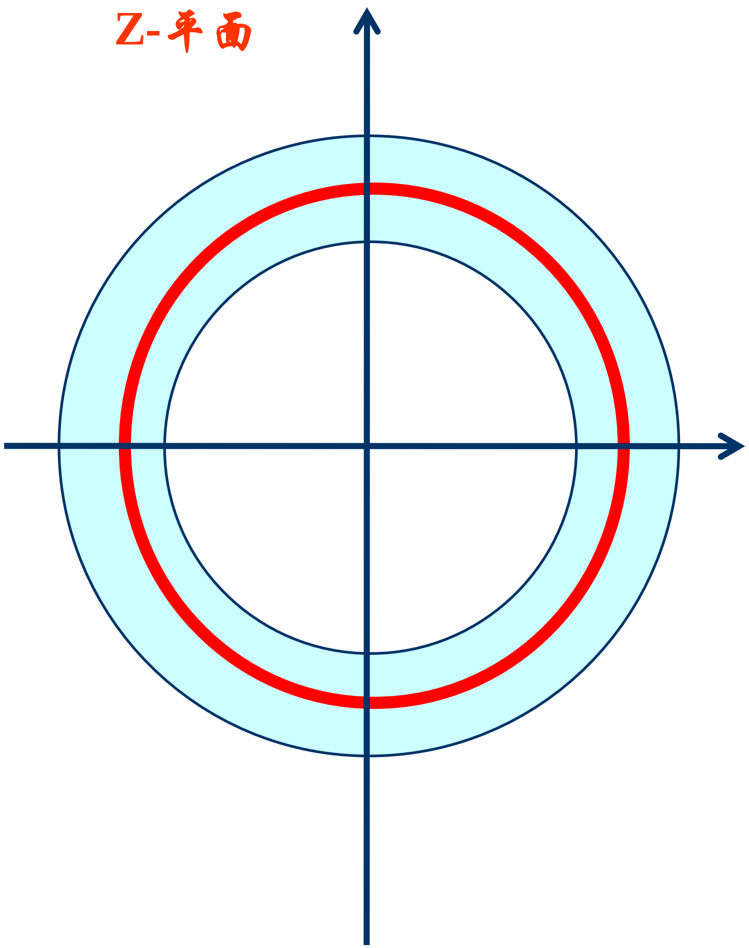


带状ROC

Z-平面 & S平面



带状ROC



环状ROC

内容提要

- Z变换的定义
- Z变换的收敛域
- Z反变换
- Z变换的性质
- 应用举例

Z变换收敛域的性质

性质1：$X(z)$的ROC是z平面内以原点为中心的圆环。

Z变换收敛域的性质

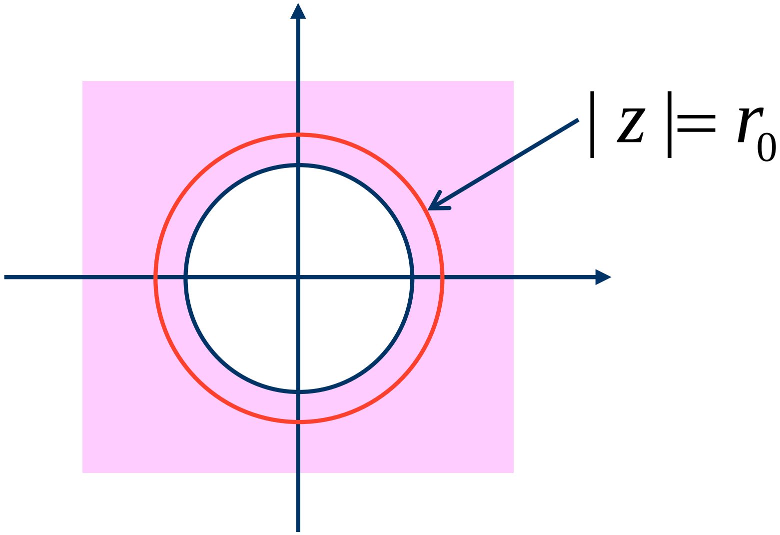
性质2：ROC内不包含任何极点。

Z变换收敛域的性质

性质3：如果$x[n]$是有限长序列，那么ROC就是整个z平面，可能去除z=0和/或$z=\infty$。

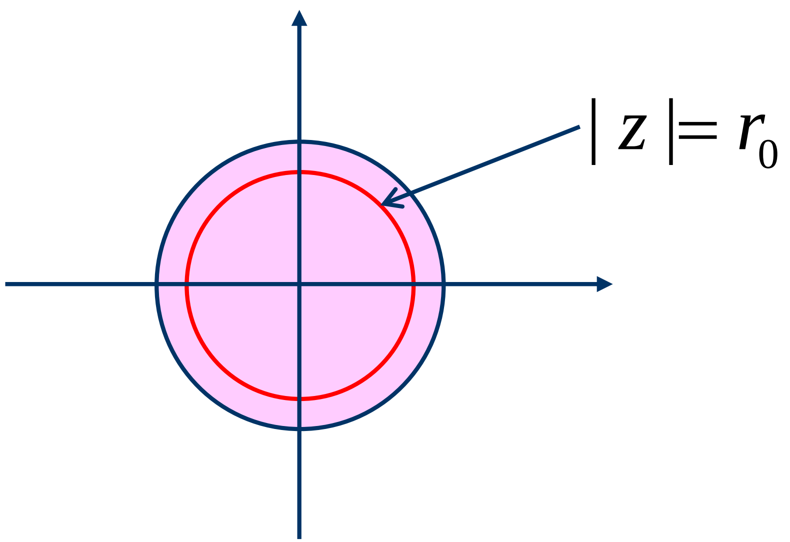
Z变换收敛域的性质

性质4：如果$x[n]$是右边序列，而且$|z|=r_0$的圆在ROC内，那么$|z|>r_0$ 的全部有限z值都一定在ROC内。



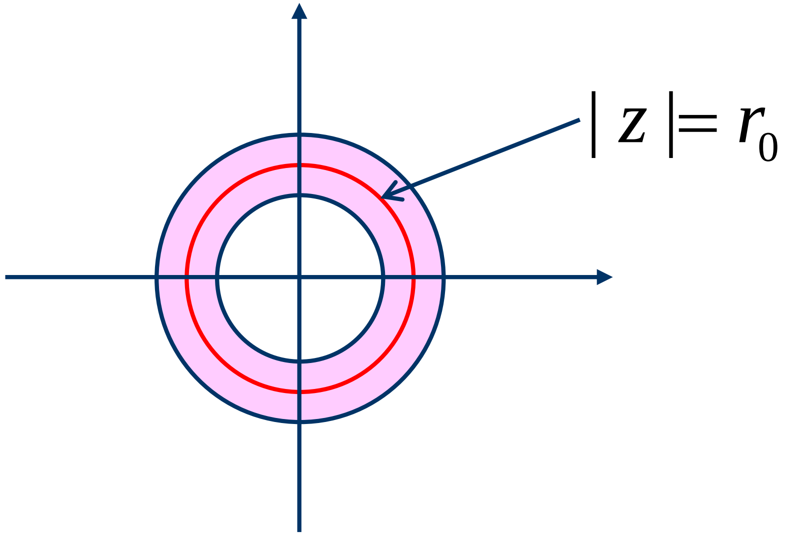
Z变换收敛域的性质

性质5：如果$x[n]$是左边序列，而且$|z|=r_0$的圆在ROC内，那么$0<|z|<r_0$的全部z值都一定在ROC内。



Z变换收敛域的性质

性质6：如果$x[n]$是双边序列，而且$|z|=r_0$的圆在ROC内，那么该ROC一定是由包含$|z|=r_0$的圆环所组成。



Z变换收敛域的性质

性质7：如果$x[n]$的Z变换$X(z)$是有理的，那么它的ROC是被极点所界定或者延伸到无穷远。

Z变换收敛域的性质

性质8：假设$x[n]$的Z变换$X(z)$是有理的。若$x[n]$是右边序列，则其ROC在z平面上位于最外层极点的外边，也就是半径等于$X(z)$极点中最大模值的圆的外边；而且，若$x[n]$是因果信号，则其ROC也包含$z = \infty$。

Z变换收敛域的性质

性质9：假设$x[n]$的Z变换$X(z)$是有理的。若$x[n]$是左边序列，则其ROC在z平面上位于最里层的非零极点的里边，也就是半径等于$X(z)$的除去$z=0$的极点中最小模值的圆的里边，并且可能延伸到$z=0$；而且，若$x[n]$是反因果信号，则其ROC也包含$z=0$。

拉普拉斯变换收敛域的性质

性质10：如果$x[n]$的Z变换$X(z)$的ROC包含单位圆，则$x[n]$的傅里叶变换存在。

内容提要

- Z变换的定义
- Z变换的收敛域
- Z反变换
- Z变换的性质
- 应用举例

Z反变换

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}, z = re^{j\omega} \in \text{ ROC}$$

对于ROC内的任意z=$re^{j\omega}$，根据傅里叶反变换公式，可得：

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})\underbrace{r^n e^{j\omega n}}_{z^n}d\omega$$

Z反变换

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})\underbrace{r^n e^{j\omega n}}_{z^n} d\omega$$

由于$z=re^{j\omega}$，因此对于给定的r，$dz=jre^{j\omega}d\omega$，故：

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz}$$

Z反变换的公式表明，信号$x[n]$可以被分解为复振幅为$\frac{X(z)}{2\pi jz}dz$的复指数信号z^n的线性组合

Z反变换的计算

➢ 部分分式展开法

$$X(z)=\frac{3z^2-\frac{5}{6}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})}=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

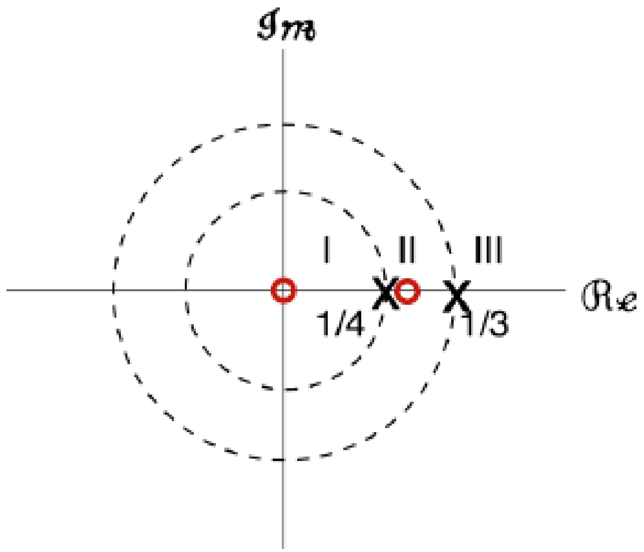
$$=\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad A=1, B=2$$

所以：

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$x_1[n]$ $x_2[n]$

Z反变换的计算



区域III：

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \qquad x_2[n] = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

区域II：

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \qquad x_2[n] = -2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

区域I：

$$x_1[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] \qquad x_2[n] = -2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Z反变换的计算

➢ 幂级数展开法

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$X(z)=z^{2}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

$$=z^{2}-\frac{1}{2}z-1+\frac{1}{2}z^{-1}$$

根据观察可知：

$$x[n]=\delta[n+2]-\frac{1}{2}\delta[n+1]-\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Z反变换的计算

$$X(z)=\ln\left(1+az^{-1}\right),\qquad |z|>|a|$$

由于$|z|>|a|$，所以 $|az^{-1}|<1$，此时可以利用如下的泰勒级数展开式：

$$\ln\left(1+v\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}v^{n}}{n},\qquad |v|<1$$

根据上式有：

$$X\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}z^{-n}}{n}$$

因此：

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n}}{n}, & n\geq 1\\ 0, & n\leq 0\end{cases}$$

Z反变换的计算

- 长除法（幂级数展开法）

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>|a|$$

ROC为 $|z|<|a|$ 呢?

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \quad +az^{-1} \\
\hline
1-az^{-1} & 1 \\
 & \underline{1-az^{-1}} \\
 & \quad az^{-1} \\
 & \quad \underline{az^{-1}-a^2z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad a^2z^{-2}
\end{array}
$$

$$X(z)=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots$$

$$x[n]=a^n u[n]$$

Z反变换的计算

例：利用长除法求

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}},\quad \frac{1}{2}<|z|<1$$

的Z反变换$x[n]$在-2,-1,0,1,2时刻的值。

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{2}{1-z^{-1}}+\frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

对应左边信号

对应右边信号

Z反变换的计算

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{2}{1-z^{-1}}+\frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad \frac{1}{2}<|z|<1$$

$$\begin{array}{r l}
 & -2z \quad -2z^{2} \\
-z^{-1}+1 \,\big) & +2 \\
 & \underline{+2-2z} \\
 & \quad 2z \\
 & \quad \underline{2z-2z^{-2}} \\
 & \qquad 2z^{-2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
 & -2 \quad -z^{-1} \quad \frac{z^{-2}}{-2} \\
1-\frac{1}{2}z^{-1} \,\big) & -2 \\
 & \underline{-2+z^{-1}} \\
 & \quad -z^{-1} \\
 & \quad \underline{-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \\
 & \qquad -\frac{1}{2}z^{-2}
\end{array}$$

所以， $x[-2]=-2;\ x[-1]=-2;\quad x[0]=-2;\ x[1]=-1;\ x[2]=-1/2$

内容提要

- Z变换的定义
- Z变换的收敛域
- Z反变换
- Z变换的性质
- 应用举例

线性

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), \quad \mathrm{ROC}=R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), \quad \mathrm{ROC}=R_2$$

$$ax_1[n]+bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z)+bX_2(z), \quad \mathrm{ROC}\text{包含}R_1 \cap R_2$$

线性

$$x[n]=b^{|n|},\quad b>0$$

$$x[n]=b^{n}u[n]+b^{-n}u[-n-1]$$

$$X_1(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}},\quad |z|>b \qquad X_2(z)=\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}},\quad |z|<b^{-1}$$

当$b>1$时，没有公共的收敛域，Z变换不存在；

当$0<b<1$时，ROC为：$b<|z|<1/b$

$$X(z)=X_1(z)+X_2(z)$$

时移性质

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC}=R$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z), \quad \text{ROC}=R,$$ 原点或无限远点可能加上或除掉

Z域尺度变换

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC}=R$$

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad \text{ROC}=|z_0|R$$

相移

- 当 $z_0 = e^{j\omega_0}$ 时，零极点位置发生旋转

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(e^{-j\omega_0}z\right), \quad \text{ROC}=R$$

不变

- 当 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$ 时，零极点位置发生旋转，且在径向有一个尺度变化

相移

Z域尺度变换性质举例

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \mathrm{ROC}=R$$

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC = |z_0| R$$

求$x[n]=\left[\cos\omega_0 n\right]u[n]$的Z变换

$$\left[\cos\omega_0 n\right]u[n]=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n]+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{2}\left[U(z\cdot e^{-j\omega_0})+U(z\cdot e^{j\omega_0})\right] \qquad |z|>1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}e^{j\omega_0}}+\frac{1}{1-z^{-1}e^{-j\omega_0}}\right]=\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}} \qquad |z|>1$$

时间反转

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC}=R$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{ROC}=\frac{1}{R}$$

时间扩展

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \mathrm{ROC}=R$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{Z} X(z^k), \quad \mathrm{ROC}=R^{1/k}$$

共轭

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \mathrm{ROC}=R$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), \quad \mathrm{ROC}=R$$

卷积性质

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), \quad \text{ROC}=R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), \quad \text{ROC} = R_2$$

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z), \quad \text{ROC包含}R_1 \cap R_2$$

一次差分

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \mathrm{ROC}=R$$

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{Z} \left(1-z^{-1}\right)X(z), \quad \mathrm{ROC}\text{包含}R\cap\{|z|>0\}$$

累加

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \mathrm{ROC}=R$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z), \quad \mathrm{ROC}\text{包含}R \cap \{|z|>1\}$$

Z域微分

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC}=R$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{ROC}=R$$

Z域微分性质举例

$$X(z)=\ln\left(1+az^{-1}\right),\qquad |z|>|a|$$

根据Z域微分性质有：

$$nx[n]\xleftrightarrow{Z}-z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

利用常用Z变换对，可得：

$$a\cdot(-a)^{n}u[n]\xleftrightarrow{Z}\frac{a}{1+az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

进一步利用时移性质，有：

$$a\cdot(-a)^{n-1}u[n-1]\xleftrightarrow{Z}\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

$\Rightarrow$ $$x[n]=\frac{a\cdot(-a)^{n-1}u[n-1]}{n}=\frac{-(-a)^{n}}{n}u[n-1]$$

Z域微分性质举例

$$X(z)=\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^{2}},\qquad |z|>|a|$$

由于：

$$a^{n}u[n]\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

所以有：

$$na^{n}u[n]\xleftrightarrow{Z}-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^{2}},\qquad |z|>|a|$$

初值定理

若$n<0$时，$x[n]=0$，则：

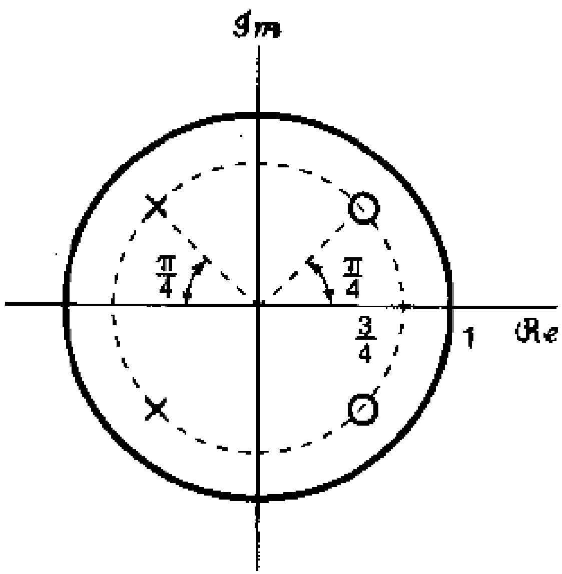
$$x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$$

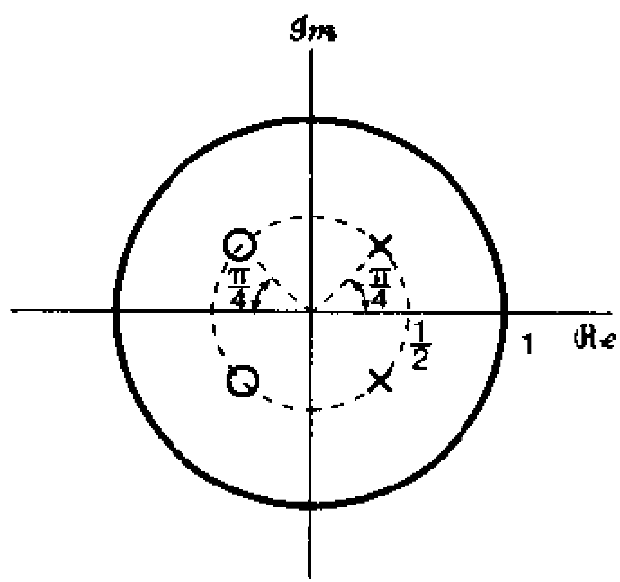
内容提要

- Z变换的定义
- Z变换的收敛域
- Z反变换
- Z变换的性质
- 应用举例

应用举例

假设一个二阶因果LTI系统已经设计成具有实值单位脉冲响应$h_1[n]$和一个有理的系统函数$H_1(z)$，$H_1(z)$的零极点图如左图所示。现在要考虑另一个因果二阶系统，其单位脉冲响应为$h_2[n]$，有理系统函数为$H_2(z)$，$H_2(z)$的零极点图如右图所示。

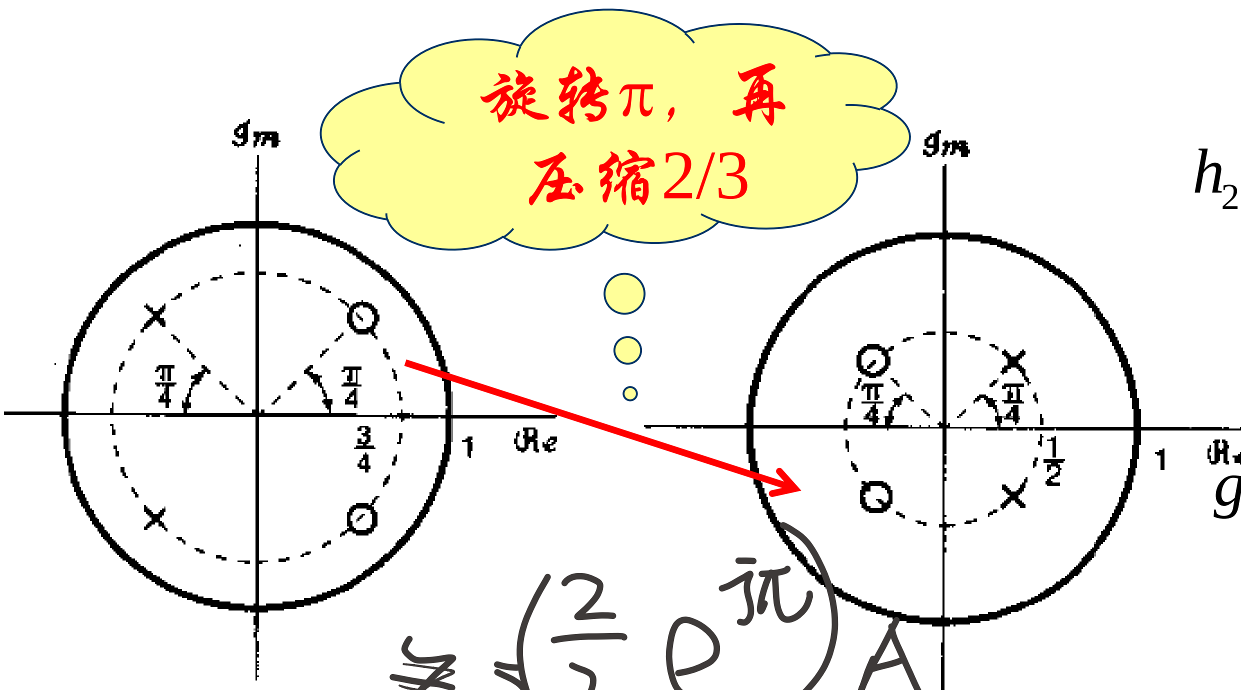




应用举例 $G(z)=A\cdot\dfrac{1}{1+(\frac{2}{3})z^{-1}}$

求一个序列$g[n]$，以使下面三个条件都满足：

1) $h_2[n]=g[n]h_1[n]$　　2) $g[n]=0,\ \ n<0$　　3) $\sum_{k=0}^{\infty}|g[k]|=3$



$\approx\left(\frac{2}{3}e^{j\pi}\right)A$

$$h_2[n]=A\left(-\frac{2}{3}\right)^n h_1[n]$$

$\Downarrow$

$$g[n]=A\left(-\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

$\Downarrow$ 条件3

$$A=5$$

谢谢大家！