讲一个考研用的分部积分·表格法

求导	t	1	0	—
积分	e^t	e^t	e^t.	

求导适合那个易被导没的

积分取决于那个适合积分的

eg 对于 $\int_{-1}^{1} te^t dt$

① 列表，选一个合适的作求导 一个积分

② 交叉相乘，会得到分部结果

$$\int_{-1}^{1} te^t dt = te^t\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^t dt$$

对更复杂的· $\int_{-1}^{1} t^3 e^{2t} dt$

求导	t^3	$3t^2$	$6t$	6	0
积分	e^{2t}	$\frac{1}{2}e^{2t}$	$\frac{1}{4}e^{2t}$	$\frac{1}{8}e^{2t}$	$\frac{1}{16}e^{2t}$

$$I = \frac{1}{2}\left(t^3 e^{2t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 3t^2 e^{2t} dt\right)$$

$$= \frac{1}{2} t^3 e^{2t}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, 3t^2 \cdot e^{2t}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 6te^{2t} dt\right)$$

$$= \frac{1}{2} t^3 e^{2t}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{4}\, 3t^2 e^{2t}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(6te^{2t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 6e^{2t} dt\right)$$

$$= \frac{1}{2} t^3 e^{2t}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{4}\, 3t^2 e^{2t}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{8}\cdot 6te^{2t} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\, 6e^{2t}$$

这种复杂的咱也做了.（当然是我亲手算来验证的）

但我们用表格法确实可解决部分问题了
★ 注意：⊕ ⊖ 是相间的 第一项正（半与出的分算）

对傅立叶级数的题目，实际上 FS 的命眼就是 a_k. 因为 $x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{+jk\omega t}$ k 是 $\pm\infty$ 其实算是一种定值，a_k 才是 $x(t)$ 的"最大特征"
去研究"特征"，才发现了一些性质：如

$$x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

你可将 FS 当作一种 Transform，因为 FS 是对 $x(t)$ 的"模仿" 研究这种"icon"便几乎可了解 $x(t)$ 属性. Mashiro ⟷ vocal 也是类似
Yamato ⟷ 460

我们只需研究 a_{-k} 就了解了 $x(-t)$ 否则 $x(t)$ 有点复杂，尤其是多频的叠加

① 奥姆 3.22(a)(1)，介绍 2 种求 FS 的方法.
1) 正常求解. 定周期 → 求 FS → 求 a_k.

2). 变换法：定周期 -> 定 $\tilde{x}(t)$ -> 导 $\tilde{x}'(t)$

$\longrightarrow$ 变换 $\tilde{x}'(t)$ -> 反求 $\tilde{x}(t)$ -> $a_k = \frac{1}{T}\tilde{X}(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$

如果 $\tilde{x}(t)$ 不难，直接变

FT: 时移同号

FS -> FT

-> LT -> ZT.

先扎实 FS. 后面差不多

证明一些 FS 共轭性质.

已知 $x(t)$ 有周期 T. FS 系数 a_k $x(t)$ 实信号.

证 (1) $a_k = a_{-k}^*$ a_0 实数.

(2) $x(t)$ 偶函数 $\Rightarrow$ FS 系数为实偶函数

(3) $x(t)$ 奇函数. FS 为虚奇函数, $a_0=0$

(4) $x(t)$ Even 部 FS 为 $Re\{a_k\}$

(5) $x(t)$ Odd 部 FS 为 $jIm\{a_k\}$

(1). $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$.

我们手上. $x(t) = x^*(t)$ (实信号无共轭)

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x^*(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

$$= \left(\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j(-k)\frac{2\pi}{T}t}dt\right)^*$$

$$= a_{-k}^* \text{ 得证}$$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$ 为实

$x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k}$

(2) 我们有 $x(t) = x(-t) = x^*(t)$ 也有 $a_k = a_{-k}^*$

证 a_k 实偶. $\begin{cases} a_k = a_k^* \\ a_k = a_{-k}, \end{cases}$

$$a_{-k} = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j(-k)\omega_0 t}dt = \left(\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right)^*$$

$$= \left(\frac{1}{T}\int_T x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right)^* = a_{-k}^* \Rightarrow \text{实函数}$$

$a_{-k}^* = a_k = a_{-k}$. (a)结论.

(3) $\begin{cases} x(t) = -x(-t) & x(0)=0 \\ x(t) = x^*(t) \end{cases}$

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t} = -\frac{1}{T}\underbrace{\int_T x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt}$ $a_{-k} \overset{FS}{\longleftrightarrow} x(-t)$

$= -a_{-k}$ a_k奇已证.

纠正一个错：你认为 $a_{-k} = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{+jk\omega_0 t}dt$？

其实是错的 因为 $\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}dt$

$= \frac{1}{T}\int_T x^*(t)(e^{-jk\omega_0 t})^* dt = a_k^*$ (笑死，证的方向是纯虚数).

但 $a_{-k} = \frac{1}{T}\int_T x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt = -\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

$= -a_k$ 这就对了

(4) $Ev[x(t)] = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t)$

$\therefore$ FS $b_k = \frac{1}{T}\int \frac{1}{2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_T \frac{1}{2}x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

$= \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{T}\int_{-T} x(\tau)e^{jk\omega_0 \tau}d\tau(-1)$

$= \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{jk\omega_0 \tau}d\tau$

$= \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + a_k^*) = \frac{1}{2}Re\{a_k\}$

苦苦寻找，终于有了答案.

$a_{-k} = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}dt$

这问题在于

$\int_T$ 是 $\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}$ 了

a_k 最好写.

$\frac{1}{T}\int_T \underline{x(-t)}e^{+jk\omega_0 t}dt$ 不对 删掉

换元. $\int_T$ 要变上下限

$\frac{1}{T}\int_{-T} x(t)e^{jk\omega_0 t}\,{-dt}$

$-T$ 与 $d(-t)$ 抵消