第十一讲

从离散周期信号傅里叶级数到离散时间傅里叶变换

杜清河
西安交通大学
2025春

本讲覆盖章节

- 5.0-5.2

内容提要

- 离散时间周期信号的傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 离散时间周期信号的傅里叶变换
- 常用傅里叶变换对

内容提要

- 离散时间周期信号的傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 离散时间周期信号的傅里叶变换
- 常用傅里叶变换对

特征函数和特征值

$$z^n \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}\right] z^n$$

令：

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

特征值

可得：

$$z^n \rightarrow H(z)z^n$$

特征函数

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

$$z_k^n \rightarrow H(z_k)z_k^n$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

离散时间傅里叶级数变换对

$$x[n]=x[n+N]$$

$$N \Rightarrow e^{j(2\pi/N)n} \Rightarrow \phi_k[n]=e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$\phi_{k+N}[n]=\phi_k[n]$$

$$x[n]\overset{?}{=}\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \\ a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \end{aligned}}$$

离散时间傅里叶级数变换对

综合公式 $$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

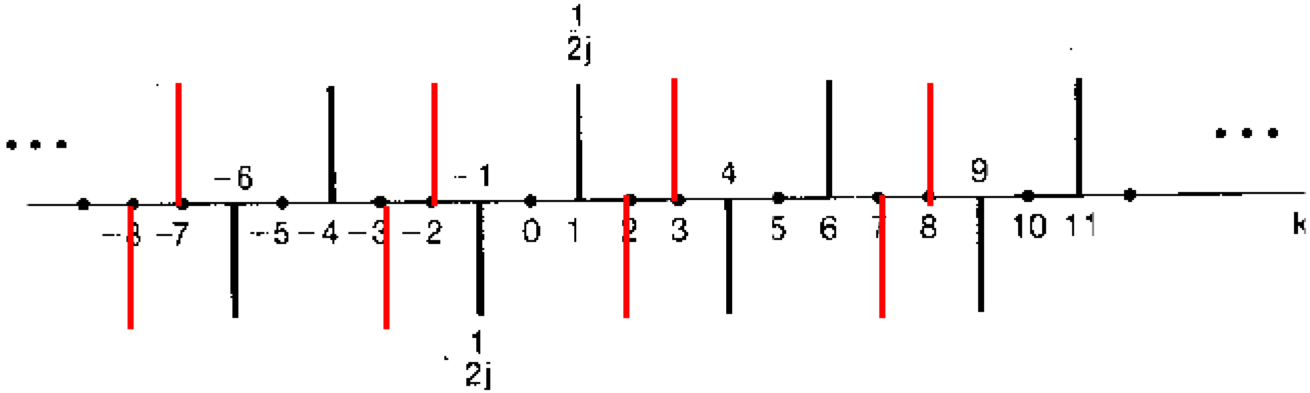
分析公式 $$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

- 离散时间傅里叶级数是一个有限项级数，综合公式中只有N个独立的谐波分量
- a_k称为频谱系数，它满足$a_k = a_{k+rN}$
- 如果$x[n]$是实信号，则有$a_k^* = a_{-k}$

举例：正弦信号

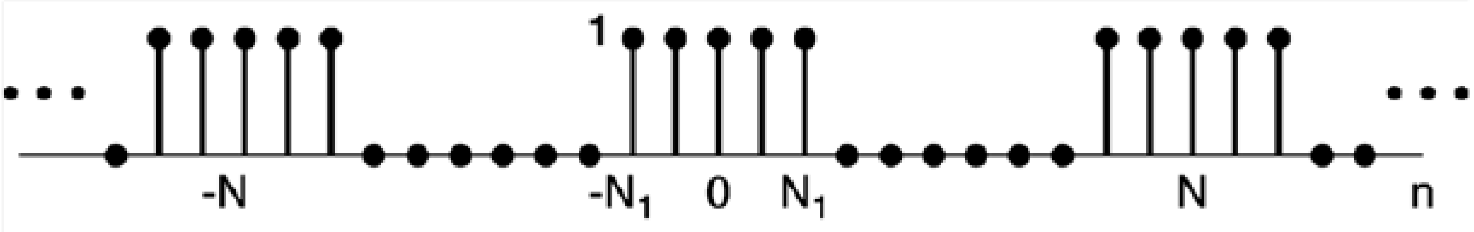
$$x[n]=\sin\omega_0 n$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{5} \quad \Longrightarrow \quad x[n]=\sin\frac{2\pi}{5}n=\frac{1}{2j}e^{j(2\pi/5)n}-\frac{1}{2j}e^{-j(2\pi/5)n}$$



$$\omega_0=3\frac{2\pi}{5} \quad \Longrightarrow \quad x[n]=\sin 3\frac{2\pi}{5}n=\frac{1}{2j}e^{j3(2\pi/5)n}-\frac{1}{2j}e^{-j3(2\pi/5)n}$$

举例：离散时间周期方波



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-jk(2\pi/N)n}\overset{m=n+N_1}{=}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1}e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)}$$

$$=\frac{1}{N}e^{jk(2\pi/N)N_1}\sum_{m=0}^{2N_1}e^{-jk(2\pi/N)m}=\frac{1}{N}e^{jk(2\pi/N)N_1}\left(\frac{1-e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1-e^{-jk2\pi/N}}\right)$$

$$=\frac{1}{N}e^{jk(2\pi/N)N_1}\frac{e^{-jk2\pi(2N_1+1)/(2N)}\left(e^{jk2\pi(2N_1+1)/(2N)}-e^{-jk2\pi(2N_1+1)/(2N)}\right)}{e^{-jk2\pi/(2N)}\left(e^{jk2\pi/(2N)}-e^{-jk2\pi/(2N)}\right)}$$

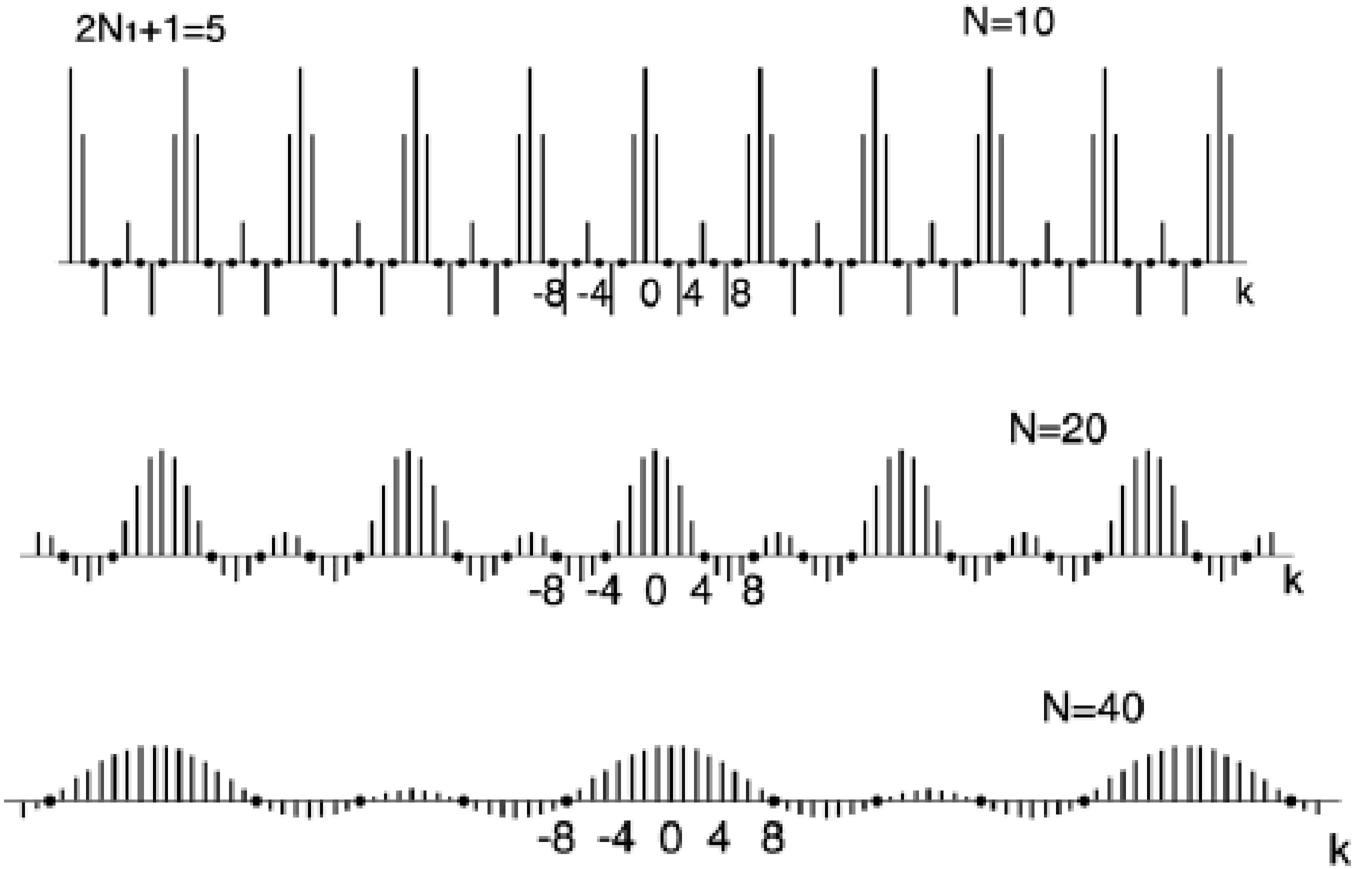
$$=\frac{1}{N}\frac{\sin\left[2\pi k\left(N_1+1/2\right)/N\right]}{\sin\left(k\pi/N\right)}$$

$k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\ldots$

$$a_k=\frac{2N_1+1}{N},\quad k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots$$

举例：离散时间周期方波

$$Na_k = \frac{\sin\left[2\pi k\left(N_1 + 1/2\right)/N\right]}{\sin\left(k\pi/N\right)}$$



举例：离散时间周期方波

$$\frac{\sin \beta x}{\sin x}$$

- 几点讨论：

1) $a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\left[\left(2N_1+1\right)\omega/2\right]}{\sin\left(\omega/2\right)}\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ $\qquad a_k = a_{k+N}$

2) $a_k = a^*_{-k}，\quad a_k = a_{-k}$

3) 有效带宽（第一零点带宽）：

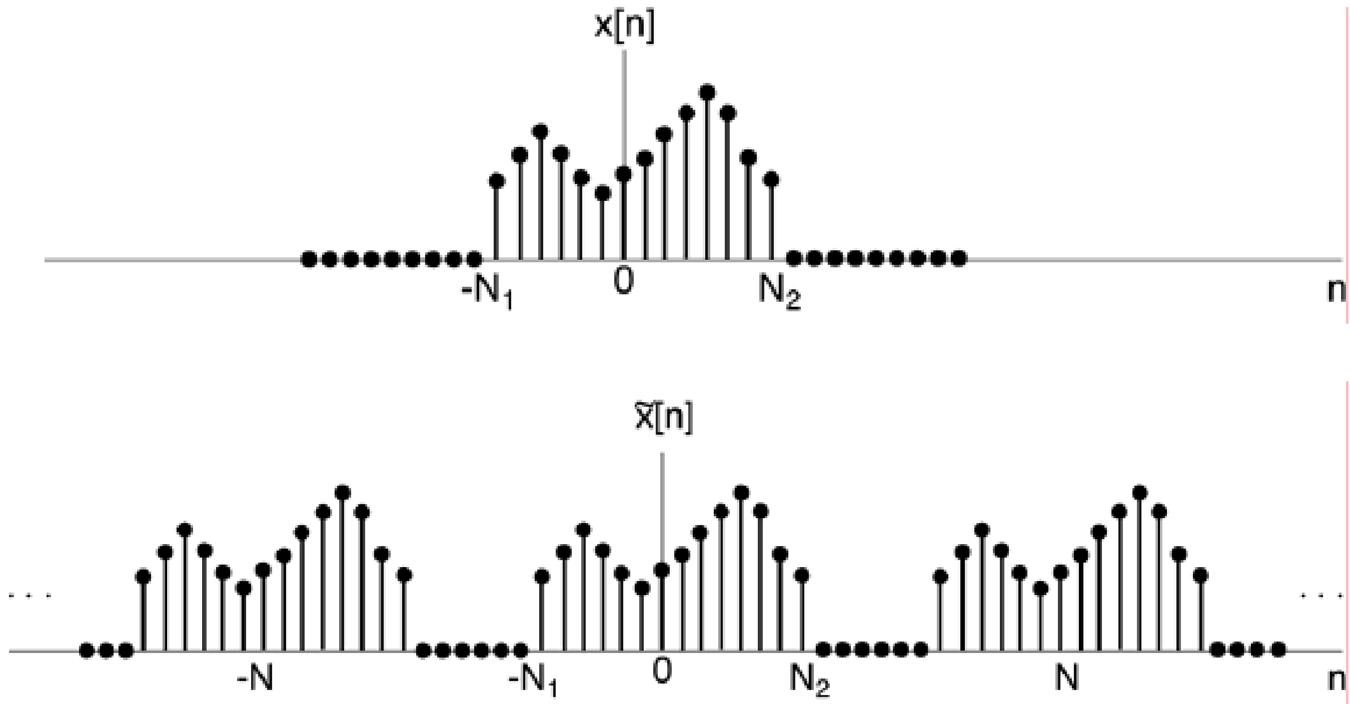
$$2\pi k\left(N_1+1/2\right)/N=\pi \Rightarrow k=\frac{N}{2N_1+1}$$

即：该信号的有效带宽与占空比成反比

内容提要

- 离散时间周期信号的傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 离散时间周期信号的傅里叶变换
- 常用傅里叶变换对

非周期信号傅里叶变换的导出



$N \to \infty$ ⇨ $\tilde{x}[n] = x[n]$

非周期信号傅里叶变换的导出

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \end{aligned}$$

引入记号： $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

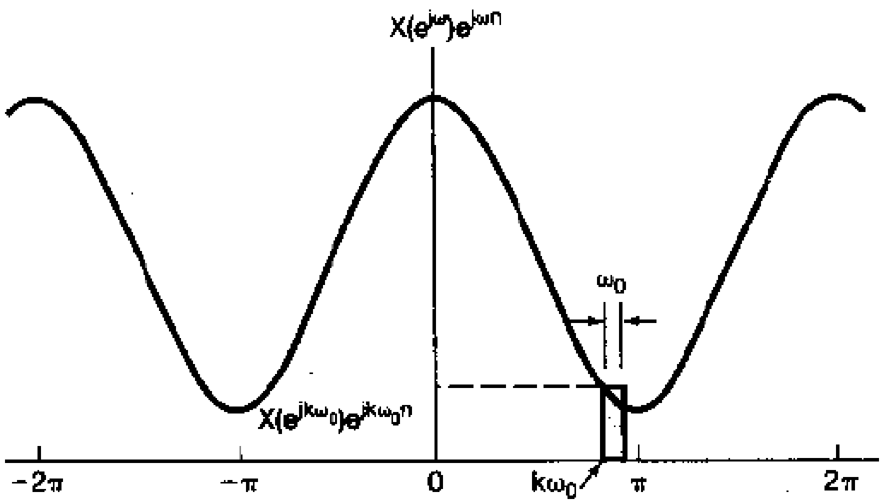
则有： $a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$

非周期信号傅里叶变换的导出

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

将该结果代入傅里叶级数综合公式，可得：

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \underbrace{\frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})}_{a_k} e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$



$N \to \infty$:

$$\tilde{x}[n] \to x[n]$$

$$\omega_0 \to d\omega$$

$$X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \to X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

$$\sum_{k=<N>} \to \int_{2\pi}$$

非周期信号傅里叶变换的导出

综合公式（反变换） $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

分析公式（正变换） $$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

关于离散时间傅里叶变换的几点说明

1. 综合公式表明，非周期信号可以表示为一组复指数信号的线性组合，这些复指数信号出现在连续频率上，其复振幅为 $X(e^{j\omega})(d\omega/2\pi)$

2. $X(e^{j\omega})$ 称为**频谱密度**，它反映了各个频率分量的相对复振幅。频谱密度也简称为**频谱**

3. 周期信号的傅里叶级数可以用与其相应的非周期信号傅里叶变换的**样本**来表示

4. 离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期，且综合公式的积分区间为有限区间

内容提要

- 离散时间周期信号的傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 离散时间周期信号的傅里叶变换
- 常用傅里叶变换对

离散时间傅里叶级数的收敛问题

综合公式 $$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

分析公式 $$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

- 不存在收敛问题
- 没有吉伯斯现象

离散时间傅里叶变换的收敛问题

综合公式（反变换） $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

分析公式（正变换） $$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

- 分析公式收敛条件：信号$x[n]$是绝对可和或者能量有限的。
- 综合公式不存在收敛问题，也没有吉伯斯现象存在。

内容提要

- 离散时间周期信号的傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 离散时间周期信号的傅里叶变换
- 常用傅里叶变换对

周期信号的傅里叶变换

考虑一个离散时间信号，其傅里叶变换为：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta\left(\omega-\omega_0-2\pi l\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta\left(\omega-\omega_0-2\pi l\right)e^{j\omega n}d\omega=e^{j\omega_0 n}$$

因此，若：

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

则：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_0\delta\left(\omega-0-2\pi l\right)+\cdots$$

$$+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_{N-1}\delta\left(\omega-(N-1)\frac{2\pi}{N}-2\pi l\right)$$

周期信号的傅里叶变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_0\delta\left(\omega-0-2\pi l\right)+\cdots$$

$$+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi a_{N-1}\delta\left(\omega-(N-1)\frac{2\pi}{N}-2\pi l\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)}$$

离散时间傅里叶级数变换对

综合公式 $$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

分析公式 $$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

非周期信号傅里叶变换的导出

综合公式（反变换） $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$

分析公式（正变换） $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$

内容提要

- 离散时间周期信号的傅里叶级数
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 离散时间周期信号的傅里叶变换
- 常用傅里叶变换对

单边指数序列

$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(ae^{-j\omega}\right)^n}_{|ae^{-j\omega}|<1}$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega}$$

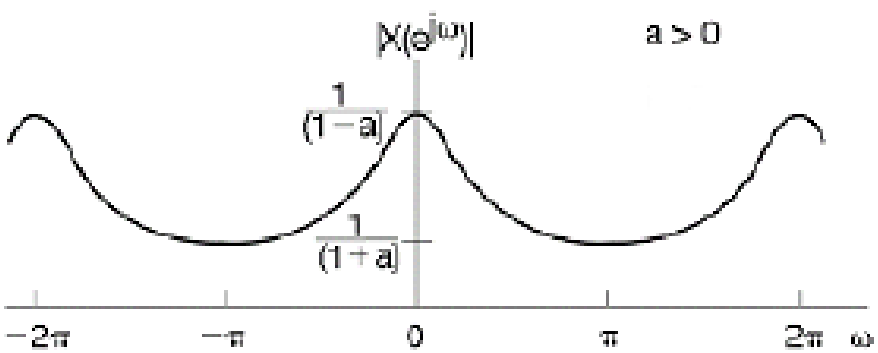
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}$$

$$\omega = 0: X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1-2a+a^2}} = \frac{1}{1-a}$$

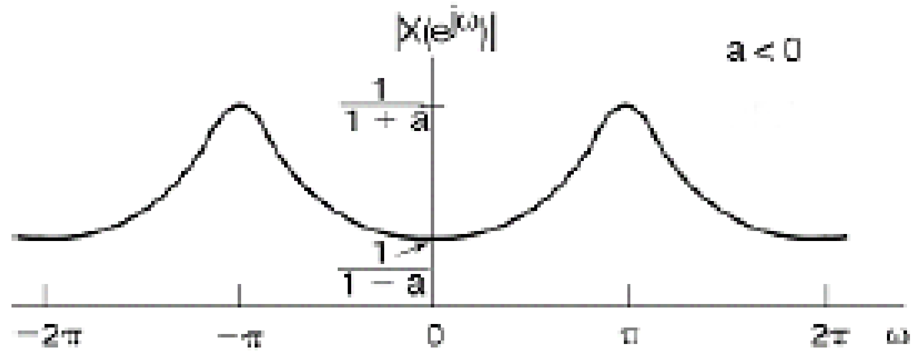
$$\omega = \pi: X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1+2a+a^2}} = \frac{1}{1+a}$$

单边指数序列

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + a^2}}$$



低通滤波器



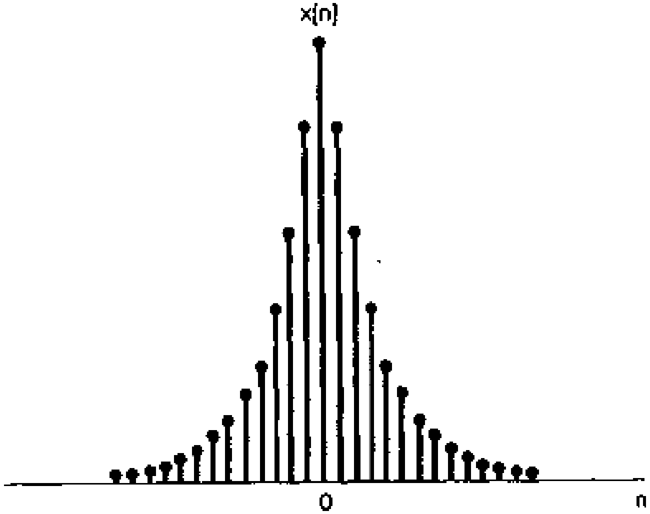
高通滤波器

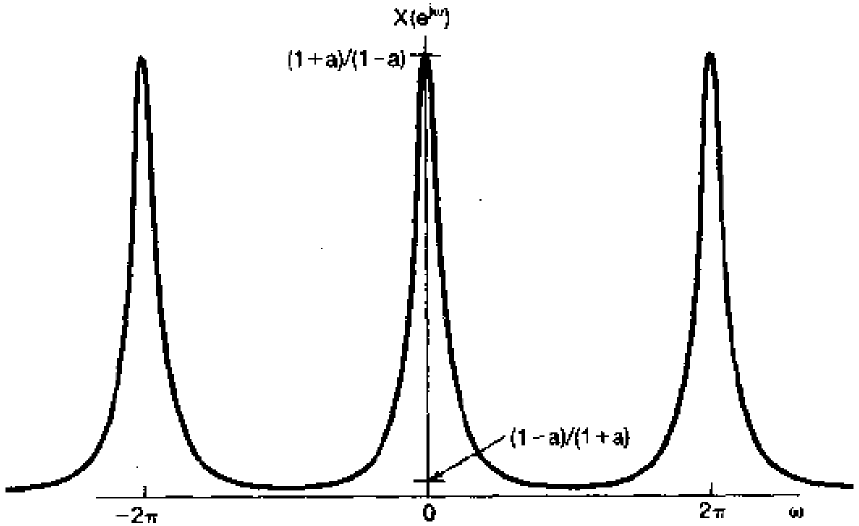
双边指数序列

$$x[n]=a^{|n|},\quad |a|<1$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^{n}+\sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\omega})^{m}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}=\frac{1-a^{2}}{1-2a\cos\omega+a^{2}}$$





单位脉冲序列

$$x[n] = \delta[n]$$

$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

$$x[n] = \delta[n - n_0]$$

$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

常数序列

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta\left(\omega-\omega_0-2\pi l\right)$$

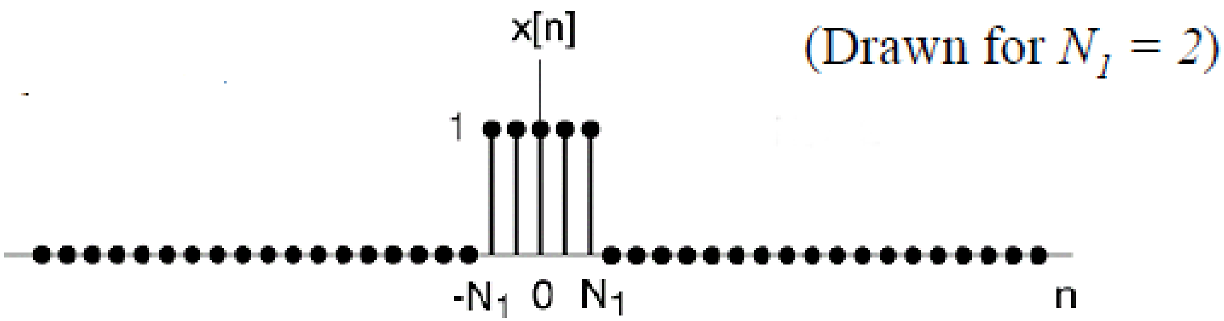
$$\Downarrow$$

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}$$

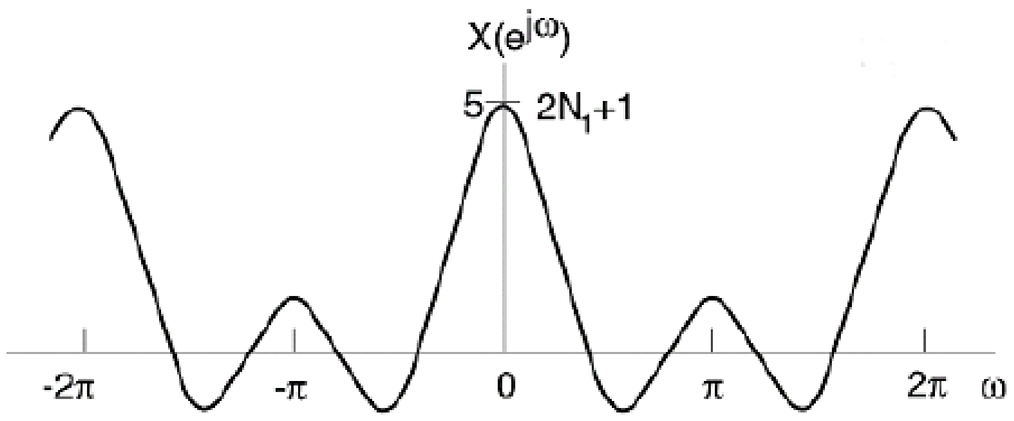
所以：

$$x[n]=1 \quad \Longrightarrow \quad X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta\left(\omega-2\pi l\right)$$

矩形脉冲序列

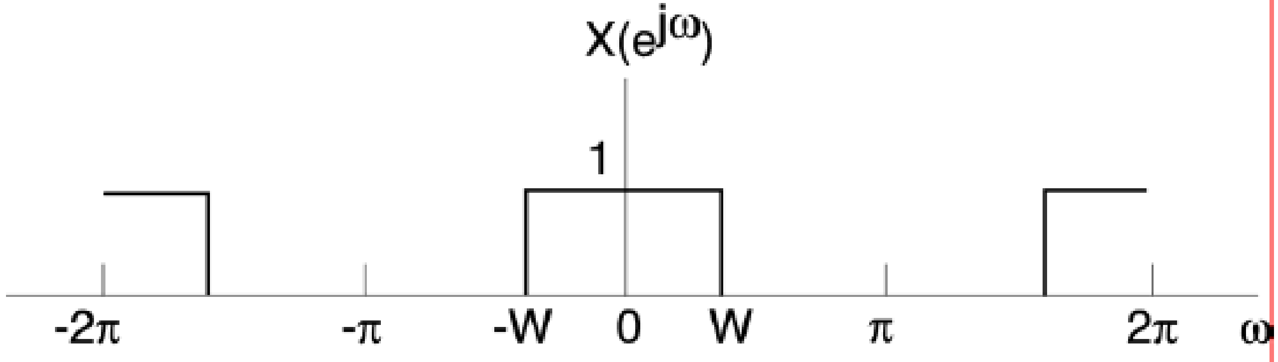


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (e^{-j\omega})^n = \frac{\sin\omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)} = X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

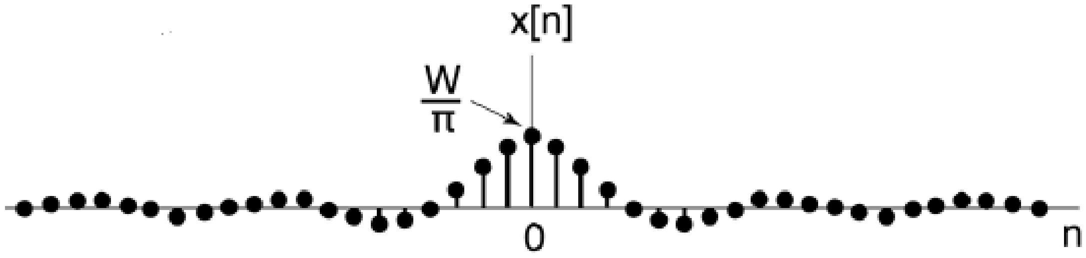


sinc序列

考虑一个信号$x[n]$，其傅里叶变换为：



则该信号为： $$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



符号函数与单位阶跃

$$\operatorname{sgn}[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ -1, & n<0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{2}{1-e^{-j\omega}}$$

$$u[n]=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}[n]+\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

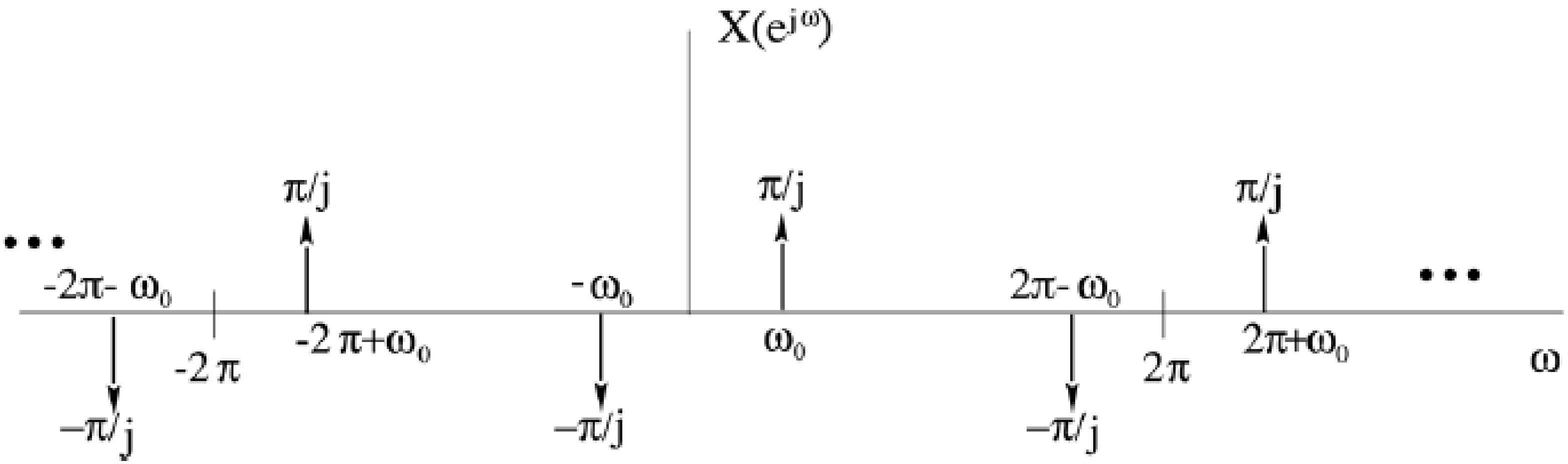
$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega-2\pi l)$$

正弦信号

$$x[n] = \sin \omega_0 n = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 n}$$

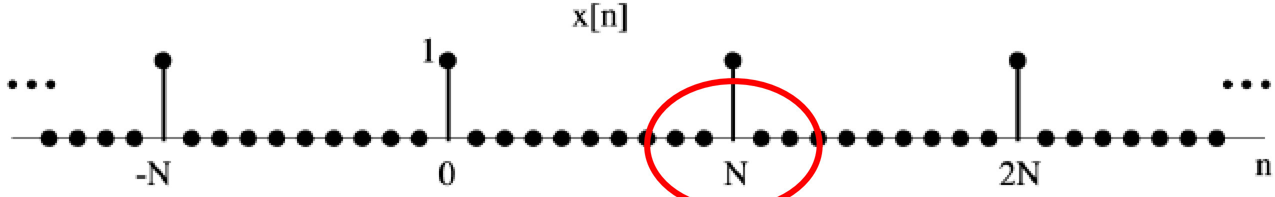
$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) - \frac{\pi}{j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m)$$



周期性冲激串

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \qquad \omega_0 = 2\pi/N$$



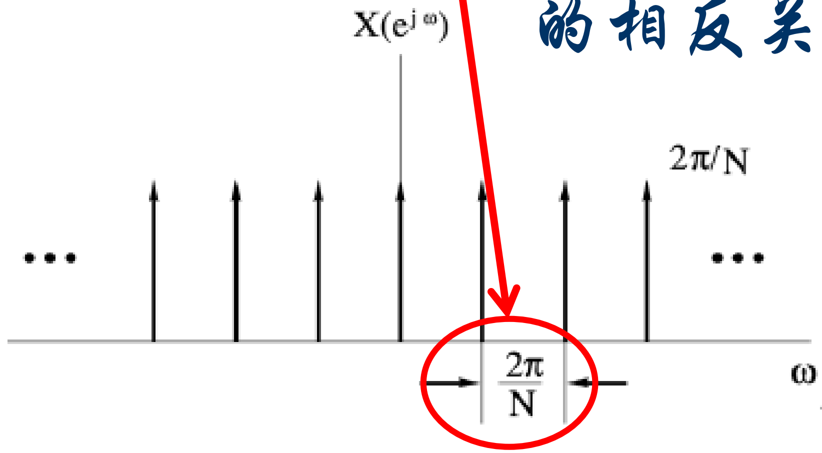
$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x[n]}_{=\delta[n]} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

时频域之间的相反关系



谢谢大家！