证明：时域微分（默认单边）

$$f(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f'(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \int_{0^-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}df(t)$$

$$= e^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)de^{-st}$$

$$= -f(0^-) - \int_{0^-}^{+\infty} -sf(t)e^{-st}dt$$

$$= -f(0^-) + sF(s)$$

如果因果，不用算跳变了。

$$f''(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s^2F(s) - sy(0_-) - y'(0_-)$$

在解微分方程时 因果系统中 $y(0_-)=y'(0_-)=0$

若不因果，则把这些代入即可

拉普拉斯考研

T_1 奥本9.14 $x(t)$ 实偶 $x(t)=x^*(t)$.
$x(t)=x(-t)$

$$s_1=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$$X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=4$$ { 含 $j\omega$ 收敛域

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{-st}dt=X^*(s)$$

$x(t)\overset{ST}{\longleftrightarrow}X(s)\Rightarrow x^*(t)\overset{ST}{\longleftrightarrow}X^*(s^*)$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)\underbrace{e^{-\sigma t}}_{\text{不动}}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{-\sigma t}(e^{+j\omega t})^*dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{-s^*t}dt$$
$$=X^*(s^*)$$ 一个凑出的形式.

$e^{-\sigma t}$ 本身是个实信号，对它做共轭是无效的.

$$(e^{-\sigma t}e^{j\omega t})^*=e^{-s^*t}$$

若偶信号 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(-t)e^{-st}dt$

$$X(s)=X(-s)$$

$$X^*(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{-st}dt$$

$X^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-st}dt$

$= X(-s)$

∵ $X(s)$ 实偶 $s_2 = (\frac{1}{2})e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$x(t)=x^*(t)=x(-t)$

$\Downarrow$ ST

$X(s)=X^*(s^*)=X(-s)$

$s \Leftrightarrow s^* \Leftrightarrow -s \Leftrightarrow -s^*$

4个极点

由现在已知 s_1, s_2 后.

$$X(s)= A\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-p_3)(s-p_4)} = X(-s)$$

$$X(-s)= A\frac{1}{(-s-s_1)(-s-s_2)(-s-p_3)(-s-p_4)}$$

$$= \frac{A}{(s+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(s+p_3)(s+p_4)}$$

$=X(s)$

有了另2个极点 $p_3 = -\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$

$p_4 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2}$

想表达的是 p_3, p_4 不是

但 $X(s)$ 还有

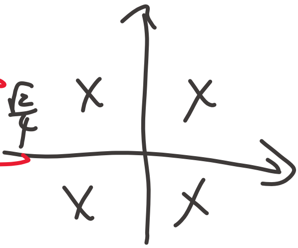
$-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ $-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

这两个被确定的极点..

隐含条件

由条件④ 含 $j\omega$ 轴

则收敛域 $-\frac{\sqrt{2}}{4} < Re(s) < \frac{\sqrt{2}}{4}$



代入 $X(0) = 4$

会解出 A

总的来说，这个题难在极点判断上，又主要是共轭性质，建议重新理解共轭在Laplace中的使用.

如果用一个晚上仔细理解好共轭，那会意义非凡

① $x(t) \xrightarrow{ST} X(s)$ or $X(\sigma+j\omega)$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{x(t)} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$

② $x(-t) \xrightarrow{ST} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-(\sigma)(-t)} e^{-j(-\omega)(-t)} dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-\overset{s}{\underline{(-\sigma-j\omega)}}(-t)} dt = X(-s)$

也即 "-t" 形式不变，注：这是尺度变换!!!

③ $x^*(t) \xrightarrow{ST} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{-\sigma t} (e^{+j\omega t})^* dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) (e^{-\sigma t} e^{+j\omega t})^* dt = X^*(s^*)$

整体

指数

④ 若 $x(t)$ 信号实的

$X^*(s^*) = X(s)$ 传递得到

⑤ $x(t)$ 为实偶

$X(s) = X(-s) = X^*(s^*)$

~~$X(s) \stackrel{?}{=} X^*(s)$~~ ✗ 考研书写错了!!!

$s = a + ib \quad -s = -a - ib$

$s^* = a - ib$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} & -s = -\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ s^* = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} & -s^* = -\frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

排列成对出现

9.34(3)(4) P209 《小马》

因果+稳定：H(s) 包含ROC ⇒ jw轴、

① $H(1) = \frac{1}{6}$ 特殊处理

② $u(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} \quad Re(s) > 0$

即 $Y(s) = \frac{1}{s} H(s)$ 是含ROC ⇒ jw轴

则分母必含s一次项（否则没零点）

③ $tu(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s^2}$

$Y(s) = \frac{1}{s^2} H(s)$ 不含jw轴

$\frac{1}{s^2}H(s)$ 至少有 s一次项

④ $\underbrace{\quad}_{\text{分子}}$

$s^2 H(s) + 2sH(s) + 2H(s)$ 是有限长，

ROC全平面. $H(s) = \frac{As}{s^2+2s+2}$

$H(1) = \frac{1}{6} \Rightarrow A = \frac{5}{6}. \quad Re(s) > -1$

从分子分母形态去理解H(s)有几个零/极点，最后整合。

4-1-1 $u(t-2) \xrightarrow{ST} \frac{1}{s} e^{-2s}$ $Re(s)>0$ 右边信号

因为 $u(t-2) = u(t) * \delta(t-2) \xrightarrow{ST} \frac{1}{s} e^{-2s}$

$\therefore u(t+3) \xrightarrow{ST} \frac{1}{s} \cdot e^{3s}$ $Re(s)>0$

$\therefore u(t-2) * u(t-3) \xrightarrow{ST} \frac{e^{s}}{s^2} = \frac{1}{s} \frac{e^{s}}{s}$

$\therefore \frac{e^{s}}{s^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} tu(t)$

最好不要在 Laplace 中出现 $\delta(t)$ 放在变换

又 $\therefore \int_{-\infty}^{t} x(t)dt \cancel{\xleftrightarrow{ST}} \frac{1}{s} X(s)$

$\frac{1}{s^2} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} tu(t)$

$\therefore \int_{-\infty}^{t} u(t)dt = tu(t)$

$\frac{e^{s}}{s^2} \xleftrightarrow{\mathscr{L}} (t+1)u(t+1)$

卷积可变换域.

4-1-2 $u(t) \xleftrightarrow{ST} \frac{1}{s}$

$t^2u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} t^2e^{-st}dt$

$$\begin{array}{ccccccc} e^{-st} & & \frac{e^{-st}}{-s} & & \frac{e^{-st}}{s^2} & & \frac{e^{-st}}{-s^3} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ t^2 & & 2t & & 2 & & 0 \end{array} = t^2\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{+\infty} - 2t\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^{+\infty} + 2\frac{e^{-st}}{-s^3}\Big|_0^{+\infty}$$

$= 0 - 0 + 2\frac{0-1}{-s^3} = \frac{2}{s^3}$

$\therefore (t^2+t+1)u(t) \xleftrightarrow{ST} \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$

$\therefore (t^2+t+1)u(t) * u(t) \xleftrightarrow{ST} \frac{1}{s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$

$= \frac{2}{s^4} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2}$

$\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \boxed{\frac{1}{3}t^3u(t)} + \frac{1}{2}t^2u(t) + tu(t)$

实际上 $t^n u(t) \xrightarrow{ST}$ 都是系数正的

$$t^3u(t) = \cdots = -6\,\frac{e^{-st}\Big|_0^{+\infty}}{s^4} = 6\,\frac{1}{s^4}$$

4-1-3 $f_1(t) = X(s+2) \quad X(s) = \frac{1}{s}$

$\therefore F_1(s) = \frac{1}{s+2}$

$f_2(t) \xrightarrow{ST} \frac{2e^{-2s}}{s}$

$\therefore f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s+2}\,\frac{2}{s}e^{-2s}$

$$= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)e^{-2s}$$

$\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}}$

$$u(t-2) - e^{-2t}u(t-2) = \left(1-e^{-2(t-2)}\right)u(t-2)$$

不戳

4-1-4 $f_1(t) = e^{-t}u(t-1) = e^{-(t-1)}\cdot e\cdot u(t-1)$

$\xleftrightarrow{ST} e\,(e^{-s})\,\frac{1}{s+1}$

这些题基本右边信号，故 $Re(s) > 0$ 是个默认状态

$f_2(t) = u(t+3) = \frac{e^{3s}}{s}$

$\therefore F(s) = F_1(s)\,F_2(s) = \frac{e\;e^{-s}\;e^{3s}}{(s+1)s} = e\,\frac{e^{2s}}{(s+1)s}$

$$= e\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)e^{2s}$$

$\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} f(t) = f_1(t) * f_2(t) = e\left(1-e^{-(t+2)}\right)u(t+2)$

4-1-8 老生常谈の题.

$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{ST} \frac{1}{s+\alpha} \quad (Re(s) > 0)$

$e^{-\beta t}u(t) \xleftrightarrow{ST} \frac{1}{s+\beta}$

$e^{-\alpha t}u(t) * e^{-\beta t}u(t) \xleftrightarrow{ST} \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s+\beta}\right)$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\beta-a}\left(e^{-at}-e^{-\beta t}\right)u(t)$

4-1-10 (1) $f_1(t) \xrightarrow{ST} F_1(s)=\frac{1}{s+a}$

$F_2(s)=\frac{1}{s}$

$\therefore f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)u(t)$

(4) $f_1(2t)=\underline{e^{-2at}\,u(2t)}$ $f_2(2t)=u(2t)$

$F_1(s)=\frac{1}{s+2a}$ $F_2(s)=\frac{1}{s}$ 犯了一个期中考的错误

$u(2t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{s}{2}}=\frac{1}{s}=\mathcal{L}[u(t)]$

$F_1(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{s}{2}+\alpha}=\frac{1}{s+2\alpha}$

$F(s)=\frac{1}{s+2a}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2a}\right)$

$f(t)=\frac{1}{2a}\left(1-e^{-2at}\right)u(t)$ 纸老虎!

4-1-15 $f_1(t)=2u(t)-3u(t-1)+u(t-2)$

$h(t)=u(t-3)$

$F_1(s)=2\frac{1}{s}-3\cdot\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}$

$H(s)=\frac{e^{-3s}}{s}$

$F(s)=\frac{e^{-3s}}{s}\left(\frac{2}{s}-3\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}\right)$

$$= \frac{1}{s^2}\left(2e^{-3s} - 3e^{-4s} + e^{-5s}\right)$$

$$\therefore f(t) = 2(t-3)u(t-3) - 3(t-4)u(t-4) + (t-5)u(t-5)$$

4-2-1 $F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u(t-1) e^{-st}dt=\int_{1}^{+\infty} t^2 e^{-st}dt$

$$\begin{array}{cccc} t^2 & 2t & 2 & 0 \\ e^{-st} & \frac{e^{-st}}{-s} & \frac{e^{-st}}{s^2} & \frac{e^{-st}}{-s^3} \end{array} = \frac{te^{2-st}}{-s}\Big|_1^{+\infty} - \frac{2te^{-st}}{s^2}\Big|_1^{+\infty} + \frac{2e^{-st}}{-s^3}\Big|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{e^{-s}}{+s} - \frac{-2e^{-s}}{s^2} + \frac{-2e^{-s}}{-s^3}$$

$$= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^3} \qquad Re(s)>0$$

4-2-2. (1) $f(t)=\begin{cases} \sin wt & 0<t<\frac{T}{2} \quad T=\frac{2\pi}{w} \\ 0 & else \end{cases}$

$f(t)=\sin wt\,[u(t)-u(t-\frac{T}{2})]$

$\because \sin wt\; u(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{w}{s^2+w^2}.$

$= \sin wt\; U(t) * [\delta(t)-\delta(t-\frac{T}{2})]$

$\delta(t)-\delta(t-\frac{T}{2}) \overset{ST}{\longleftrightarrow} 1-e^{-\frac{T}{2}s}.$

$F(s)=\frac{w(1-e^{-\frac{T}{2}s})}{s^2+w^2}$ 收敛于全平面 (时限信号)

(2) $f(t)=\sin(wt+\varphi)\,u(t)$

$f(t)=\sin w(t+\frac{\varphi}{w})\;u(t)$

$\because \sin wt\; u(t) \overset{ST}{\longrightarrow} \frac{w}{s^2+w^2}.$

$\therefore \sin[w(t+\frac{\varphi}{w})]\,u(t) \overset{ST}{\longrightarrow} \frac{w\cdot e^{\frac{\varphi}{w}s}}{s^2+w^2}$

$\sin(wt+\varphi)=\underline{\sin wt\cos\varphi}+\underline{\cos wt\sin\varphi}$

$F(s)=\frac{w\cos\varphi}{s^2+w^2}+\frac{\sin\varphi}{s^2+w^2}$

4-2-3 积分性质

$$(1-e^{-2t})u(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \quad Re(s)>0$$

$$\frac{1}{s}x(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+2}\right)d\tau$$

$$= \boxed{\ln\frac{s+2}{s}.}$$

对Laplace来说，是最容易的

4-2-4

$$x(t) = t[u(t)-u(t-1)] + (2-t)[u(t-1)-u(t-2)]$$

$$= tu(t) - (2-2t)u(t-1) - (2-t)u(t-2)$$

$$= tu(t) + (2t-2)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

$$\because \quad tu(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s}$$

$$(2t-2)u(t-1) \overset{ST}{\longleftrightarrow} 2\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$(t-2)u(t-2) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

$-\infty < Re(s) < +\infty$

$$\therefore \quad X(s) = \frac{1}{s^2}(1+2e^{-s}+e^{-2s}) \quad Re(\cancel{s})>0$$

有限信号，$-\infty < \sigma < +\infty$

$$\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}e^{-\sigma}e^{-j\omega t}dt$$

4-2-5

$$f(t) = e^{-t}\sin\pi t\,[u(t)-u(t-2)]$$

$$e^{-t}x(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} X(s+1)$$

记不住 $X(s-1)$ or $X(s+1)$

记 $e^{-t}u(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}$.

$$\sin\pi t\, u(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$

$\because$ sin 其(为-2) $= \sin(\pi t - 2\pi) = \sin\pi t$

$$\therefore \sin\pi(t-2)\,u(t-2) \overset{ST}{\longleftrightarrow} e^{-2s}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$

$$\sin\omega_0 t\, u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\omega_0 t\, u(t)\, e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} \sin\omega_0 t\, e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{\boxed{j\omega_0 t}} - e^{-\boxed{j\omega_0 t}}}{2j} e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} \left(e^{-(s-j\omega_0)t} - e^{-(s+j\omega_0)t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2j}\cdot \frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{-(s-j\omega_0)}\Bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{2j}\ \frac{e^{-(s+j\omega_0)t}}{-(s+j\omega_0)}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2j}\ \frac{-1}{-s+j\omega_0} + \frac{1}{2j}\ \frac{-1}{s+j\omega_0}$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{1}{2j}\ \frac{s+j\omega_0 - s + j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}$$

$$= \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$f(t) = e^{-t}\sin\pi t\,[u(t) - u(t-2)]$$

$$= \frac{\pi}{(s+1)^2+\pi^2} - e^{-2s}\frac{\pi}{(s+1)^2+\pi^2}$$

$$= (1-e^{-2(s+1)})\frac{\pi}{(s+1)^2+\pi^2}$$ 选 B.

4-2-6 $x(t) = 2te^{-4t}u(t)$

这不是卷积or相乘性质，而是套娃

$\boxed{2tu(t)} \overset{ST}{\longleftrightarrow} 2\cdot\frac{1}{s^2}$

$e^{-4t}\boxed{x(t)} \overset{ST}{\longleftrightarrow} X(s+4)$

$x(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} 2\cdot\frac{1}{(s+4)^2}$

右边信号 $Re(s) > -4$

4-2-7 $\sin w_0 t\, u(t) \leftrightarrow \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}$

4-2-12 BOSS套娃题

$$x(t) = \frac{e^t}{n!}[\underbrace{\boxed{t^n}}_{S域微分}\underbrace{e^{-2t}u(t)}_{基础}]^{(n)}$$

时域微分

$n!$ 系数

e^t 留后

① $t^n u(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{(n-1)!}{s^{n+1}}$ S域微分

$t^n e^{-2t}u(t) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{(n-1)!}{(s+2)^{n+1}}$ S移

$[t^n e^{-2t}u(t)]^{(n)} \overset{ST}{\longleftrightarrow} s^n \frac{(n-1)!}{(s+2)^{n+1}}$ 时域微分

$\frac{e^t}{n!}(t^n e^{-2t}u(t))^{(n)} \overset{ST}{\longleftrightarrow} (s-1)^n \frac{1}{n(s+1)^{n+1}}$ S移

$$= \frac{(s-1)^n}{n(s+1)^{n+1}} \quad Re(s) > -1$$

4-2-15 $f(t)=e^{-2t}[u(t)-u(t-1)]$

$=e^{-2t}u(t)-e^{-2(t-1)}e^{-2}u(t-1)$

$=e^{-2t}u(t)-\dfrac{e^{-2(t-1)}u(t-1)}{e^{2}}$

$=e^{-2t}u(t)*\left[\delta(t)-\dfrac{\delta(t-1)}{e^{2}}\right]$.

$F(s)=\dfrac{1}{s+2}\left(1-\dfrac{e^{-s}}{e^{2}}\right)$.

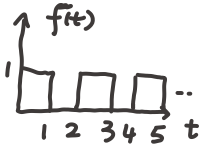
$Re(s)>-2$

4.3 有始周期信号的 ST

方法：对一个有开端的周期信号，找出一个周期的形态及其表达，当做其为无限周期来做拉氏变换，后对其作时域周期延拓

时域延拓即卷一个冲激移位串，在s域是比较方便表示的

如
4-3-1



找到一个周期重复信号片段（最好是0附近）

$f_0(t) = u(t) - u(t-1)$

其中 $f_0(t)$ 当作非周期，开端为0.

$$F_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s}(1-e^{-s})$$

$T=2$ 延拓可表示为 $f(t) = f_0(t) * \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-2n)$

其中 $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-2n) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-2s}}$ $Re(s)>0$

$$\therefore F(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-s}) \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s} \frac{e^{2s}-e^{s}}{e^{2s}-1} = \frac{e^{s}(e^{s}-1)}{s(e^{s}-1)(e^{s}+1)}$$
$$= \frac{e^{s}}{s(e^{s}+1)}$$

4-3-2 然后，我们可以借此研究Laplace逆变换.

对 $F(s) = \frac{1-e^{-\frac{1}{2}s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1}{s}(1-e^{-\frac{1}{2}s}) \cdot \left(\frac{1}{1-e^{-2s}}\right)$

易知 $\frac{1}{1-e^{-2s}}$ 是周期延拓之结果.

$\frac{1}{1-e^{-2s}} \overset{ST}{\longleftrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-2n)$ 最好加个

$\frac{1}{s}(1-e^{-\frac{1}{2}s}) \overset{ST}{\longleftrightarrow} u(t) - u(t-\frac{1}{2})$ $Re\{s\}>0$

$\therefore f(t) = \sum_{0}^{+\infty} \delta(t-2n) * [u(t) - u(t-\frac{1}{2})]$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT) \overset{ST}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-Ts}}$

因为

$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT) e^{-st} dt$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-sT})^{n}$

$= \frac{1-0}{1-e^{-sT}}$

如果想写进去也可以

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{u(t-2n)-u(t-\tfrac{1}{2}-2n)\right\}$$

4-3-3. 画电路题，好解了

$$f(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$

$$\therefore F(s)=\frac{1}{s}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right)$$

$$F_1(s)=F(s)\,\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(t-2n)\right] \qquad Re(s)>0$$

$$=\frac{1}{s}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right)\frac{1}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{1}{s}\,\frac{(1-e^{-s})^2}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}=\frac{(1-e^{-s})}{s(1+e^{-s})}$$

4-4-1

- 全响应
  - $y_{zs}(t)$
    - 受迫响应
    - 自由响应一部分
  - $y_{zi}(t)$ → 自由响应一部分

也就是 $y_{zi}(t)$ 包含于自由响应
受迫响应包含于 $y_{zs}(t)$
只要看见谁是谁,就错

4-4-2

LTI系统
- 全响应 = $y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$
- 卷积能求 $y_{zs}(t)$
- 阶跃/~~冲~~激 是LTI对它们的零状态响应.

注意 $h(t)$ 冲激响应不用输入 它应该是 $y_{zi}(t)$ 这是系统本身属性.

首先,受迫响应只含新值

4-4-4 S域变换为 (求 $y_{zs}(t)$)

$$sY(s)+aY(s)=bsX(s)+X(s)$$

$X(s)=\frac{1}{s+1}$ 可知 $a=2$. $h_{zi}(t)\ Ae^{-\alpha t}$

$$Y(s)=\frac{1}{s+a}(bs+1)\frac{1}{s+1}$$ ✗ 不用算.

$$=\frac{bs+1}{(s+a)(s+1)}=$$

强迫 $\boxed{必须}$ 与输入一致

4-4-5

$$\delta(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}1$$

$$\delta'(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}j\omega$$

$$H(j\omega)=-2j\omega$$

$\therefore h(t) = -2\delta'(t)$.

$y(t) = f(t) * h(t) = e^{-2t}u(t) * (-2)\delta'(t)$

$\left(e^{-2t}u(t)\right)' = -2e^{-2t}u(t) + \delta(t)e^{-2t}$,

$= -2e^{-2t} + \delta(t)$

$\therefore y(t) = 4e^{-2t} - 2\delta(t)$

4-4-6

$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$

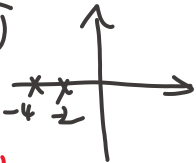
$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)$

$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \quad Re\{s\} > 0$

$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+4} \quad Re\{s\} > 0$

$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+4}}{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}} = \frac{\frac{6}{(s+1)(s+4)}}{\frac{2s+4}{(s+1)(s+3)}}$

$= \frac{6(s+3)}{2(s+2)(s+4)} = \frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)}$



要稳定 $Re(s) > -2$ 含 $j\omega$

$H(j\omega) = \frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$ (频响)

(2) $H(s)=\dfrac{+\frac{3}{2}}{s+2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{s+4}$

$\therefore h(t)=\frac{3}{2}\left(e^{-2t}+e^{-4t}\right)u(t)$

(3) X.

4-4-7 $x_1(t)=u(t)$ $y_1(t)=6e^{-2t}u(t)$

$x_2(t)=3t\,u(t)+2\delta(t)$ $y_2(t)=?$

$X_1(s)=\frac{1}{s}$ $\cancel{X_1}(s)=6\,\frac{1}{s+2}$

$H(s)=\dfrac{6\,\frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s}}=6\,\frac{s}{s+2}=6-\frac{2}{s+2}$

$h(t)=6\delta(t)-2e^{-t}u(t)$

$X_2(s)=3\,\frac{1}{s^2}+2$.

$Y_2(s)=X_2(s)\cdot H(s)=6\frac{s}{s+2}\left(\frac{3+2s^2}{s^2}\right)$

$=6\;\dfrac{3+2s^2}{s(s+2)}$

$\left(-\frac{11}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)=6\;\dfrac{2s^2+\cancel{4s}\cancel{-4s}+3}{s^2+2s}$

$y_2(t)=12\delta(t)+6=6\left(2+\dfrac{-4s+3}{s^2+2s}\right)$

$\leftarrow\;=6\left(2+\dfrac{-4s+3)}{s(s+2)}\right)$

$=6\left(2+\dfrac{-\frac{11}{2}}{s+2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{s}\right)$.

4-4-8 $H(s)=\dfrac{s^2+5}{s^2+2s+5}$

$=1-\dfrac{2s}{s^2+2s+5}$

$=1-\dfrac{2s}{(s+1)^2+4}$

$=1-\dfrac{2s}{(s+1+2i)(s+1-2i)}$

$=1-\left[\dfrac{\frac{-2-4i}{4i}}{(s+(1+2i))}+\dfrac{\frac{2i-4}{4i}}{s+1-2i}\right]$

那你有点憨憨木脑了

$H(s)=\dfrac{s^2+5}{s^2+2s+5}=1-\dfrac{2s}{(s+1)^2+4}$

$=1-\dfrac{2s+2-2}{(s+1)^2+4}=1-\dfrac{2(s+1)}{(s+1)^2+4}+\dfrac{2}{(s+1)^2+4}$

① $e^{-t}x(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}X(s+1)$. $Re(s)>0$

② $\cos t\,u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{s}{s^2+w^2}$ $Re(s)>0$

记忆 $\left(\frac{1}{jw+s}+\frac{1}{-jw-s}\right)\frac{1}{2}$ 消 jw 不会有 w

③ $\sin t\,u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\dfrac{w}{s^2+w^2}$ $Re(s)>0$

$\therefore h(t)=\delta(t)-2e^{-t}\cos t\,u(t)+2e^{-t}\sin t\,u(t)$

(2) $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

$= \quad y_{t'}(t) + \underline{e(t) * h(t)}$

$Y_{zs}(s) = H(s) \quad 1 = H(s)$

保留原状态即可

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+5}{s^2+2s+5}$$

$$\therefore \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 5x(t)$$

zi $\quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 0$

$s^2+2s+5=0 \quad s_1 = -1+2j$

$\qquad\qquad\qquad s_2 = -1-2j$

$\therefore \quad y(t) = A e^{(-1+2j)t} + Be^{(1-2j)t}$

写成 $\quad y(t) = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$

$\because r(0_-)=0 \quad y(0_-) = A = 0$

$$r'(t) = -e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + e^{-t}(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$

$r'(0_-) = -(A) + 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad y_{zi}(t) = e^{-t}(-\frac{1}{2})\sin 2t$

$\therefore \quad y(t) = \underline{-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \; u(t)} + h(t)$

4-2-35 $F(s) = X(\cancel{s+2})$ ROC: $Re(s) > -2$

$X(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} u(t-2)$

$\boxed{e^{-2t} u(t-2)}$ ROC: $Re(s) > -2$

$-e^{-2t}u(2-t)$ $Re(s) < -2.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(-t) e^{-st} dt$$

$$-\int_{+\infty}^{-\infty} u(-t) e^{-(s)(-t)} d(-t)$$

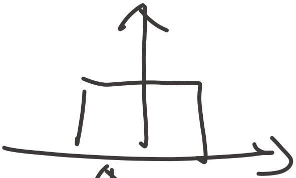
换元后-
这要一下

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} u(t') e^{-(-s)t'} dt'$$

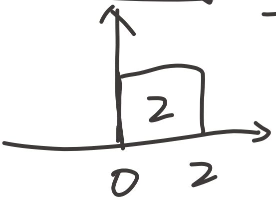
$$+\frac{1}{(-s)} = -\frac{1}{s}$$

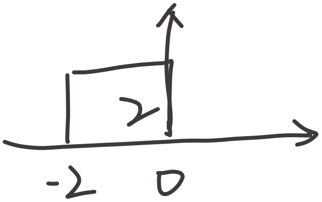
$$\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

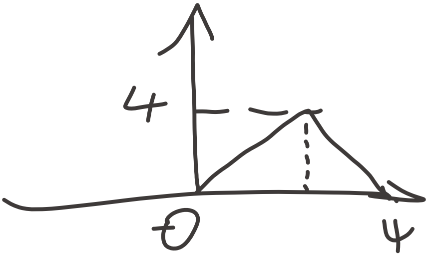
$$[u(t) - u(t-2)] * [u(t) - u(t-2)]$$

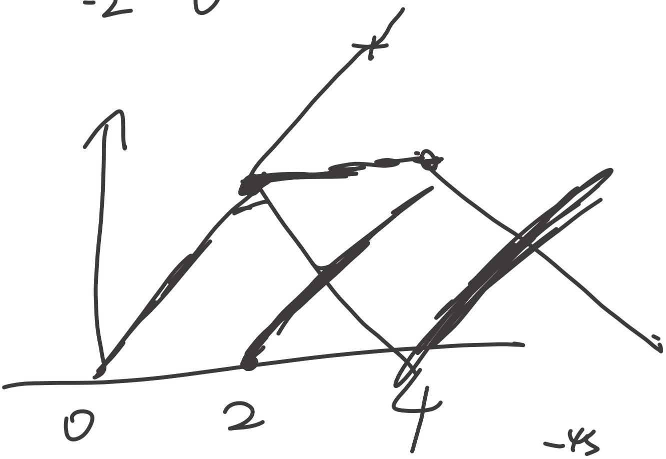


1









$$\frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

t.u(t)

$$\frac{d\,x(t-2)}{dt}$$

$$x(t) * \delta'(t) * \boxed{\delta(t-2)}$$

$$X \qquad s\,X(s)\,e^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$F(s-1)$$

$$e^{t} f(3t) * \delta\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3} F\left(\frac{s-1}{3}\right) e^{-\frac{2}{3}(s-1)}$$

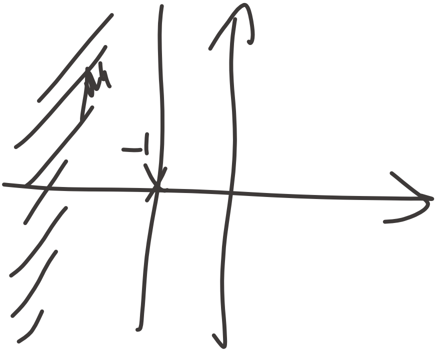
$$e^{t} e^{-st}$$

$$(s-1)$$

$$\frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}(s-1)} \frac{\frac{s-1}{3}}{\left(\frac{s-1}{3}\right)^2+1}$$

$$e^{-2t} f(3t) \leftrightarrow \frac{1}{3} F\left(\frac{s+2}{3}\right)$$

$$\frac{s^2 - s + 1}{(s+1)^2}$$



$$1 + \frac{-3s}{(s+1)^2}.$$

$$1 + \frac{-3s + 3 - 3}{(s+1)^2}$$

$$1 - \frac{3}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2}.$$

$$\delta(t) + 3e^{-t}u(t) - 3 \cdot e^{-t}\, t\, u(t)$$

$$u(-t) \qquad (-t)u(-t)$$

$$F(s) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} + \frac{\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(t)u(t) + \sin(t-1)u(t-1)$$