第二十一讲
单边拉普拉斯变换

杜清河
西安交通大学
信息与通信工程学院
2025

本讲覆盖章节

- 9.9

单边拉普拉斯变换的定义

$$\mathcal{X}(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\mathcal{UL}\{x(t)\}$$

- 几点说明：

1) 积分区间包含集中于t=0的任何冲激或高阶奇异函数

2) 对于因果信号，其单边拉普拉斯变换和双边拉普拉斯变换相同

3) $x(t)$的单边变换等于$x(t)u(t)$的双边变换，因此其ROC必为某个右半平面

单边拉普拉斯变换举例

例1：

$$x(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$$

$$X(s)=\frac{1}{(s+a)^n} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

例2：

$$x(t)=e^{-a(t+1)}u(t+1)$$

$$X(s)=\int_0^{\infty}e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-a}e^{-t(s+a)}dt=e^{-a}\frac{1}{s+a} \quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

单边拉普拉斯变换的性质

➢ 卷积性质

如果当$t<0$时，$x_1(t)=0$且$x_2(t)=0$，则：

$$\mathcal{UL}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{X}_1(x)\mathcal{X}_2(s)$$

➢ 时域微分性质

$$x(t) \longleftrightarrow \mathcal{X}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \quad \longleftrightarrow \quad s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

单边拉普拉斯变换的应用

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$y(0^-)=\beta\,,\,y'(0^-)=\gamma\,,\,x(t)=\alpha u(t)$$

把$x(t)$代入方程，且两边做单边拉普拉斯变换可得：

$$s^2\mathcal{Y}(s)-\beta s-\gamma+3\left(\mathcal{Y}(s)\,s-\beta\right)+2\mathcal{Y}(s)=\frac{\alpha}{s}$$

$$\Downarrow$$

零输入响应

零状态响应

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}+\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

单边拉普拉斯变换的应用

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}+\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

如果α=2，β=3，γ=5，则上式可以变形为：

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2}\qquad \boxed{\Re e\{s\}>0}$$

所以：

$$y(t)=\left[1-e^{-t}+3e^{-2t}\right]u(t),\quad t>0$$

谢谢大家！