第十二讲
从线性常系数差分方程到离散时间系统的傅里叶分析

杜清河

2025春

内容提要

- LTI系统的线性常系数差分方程描述
- 应用傅里叶分析方法求解线性常系数差分方程

内容提要

- LTI系统的线性常系数差分方程描述
- 应用傅里叶分析方法求解线性常系数差分方程

线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- N阶线性常系数差分方程
- 对差分方程不必限制 $N \geq M$
- 差分方程的时域求解方法与微分方程类似：

特解+齐次解

假设没有重根

$$y_h[n] = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n + \ldots + A_N z_N^n$$

其中：z_i是方程$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0$的$N$个根。

线性常系数差分方程的时域求解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- $N=0$：

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k]$$

非递归方程

这表示的就是一个LTI系统，其脉冲响应为：

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

有限长脉冲响应(Finite Impulse Response, FIR)系统

线性常系数差分方程的时域求解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

递归方程

- $N \neq 0$：

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

为了计算$y[n]$，就需要知道$y[n-1]$, $y[n-2]$,…, $y[n-N]$，即：需要给定一组附加条件。

初始松弛条件

- 初始松弛：

  若$n<n_0$时，$x[n]=0$，那么$n<n_0$时，$y[n]=0$。

- 初始松弛的意义：

  在初始松弛条件下，线性常系数差分方程所描述的系统是因果线性时不变系统。

- 零初始条件：

$$y[n_0-1]=y[n_0-2]=\ldots=y[n_0-N]=0$$

线性常系数差分方程的时域求解

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

递归方程

- $N \neq 0$：

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

在 $N \neq 0$ 的情况下，如果满足初始松弛条件，则该差分方程描述的为LTI系统。注意该系统具有无限长的脉冲响应，称为无限长脉冲响应(Infinite Impulse Response, IIR)系统

内容提要

- LTI系统的线性常系数差分方程描述
- 应用傅里叶分析方法求解线性常系数差分方程

利用傅里叶分析方法求解差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$\Downarrow$$

注意等号成立的条件

$$H(e^{j\omega}) \doteq \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

利用傅里叶分析方法求解差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}}$$

有理分式

离散时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

$$\Downarrow$$

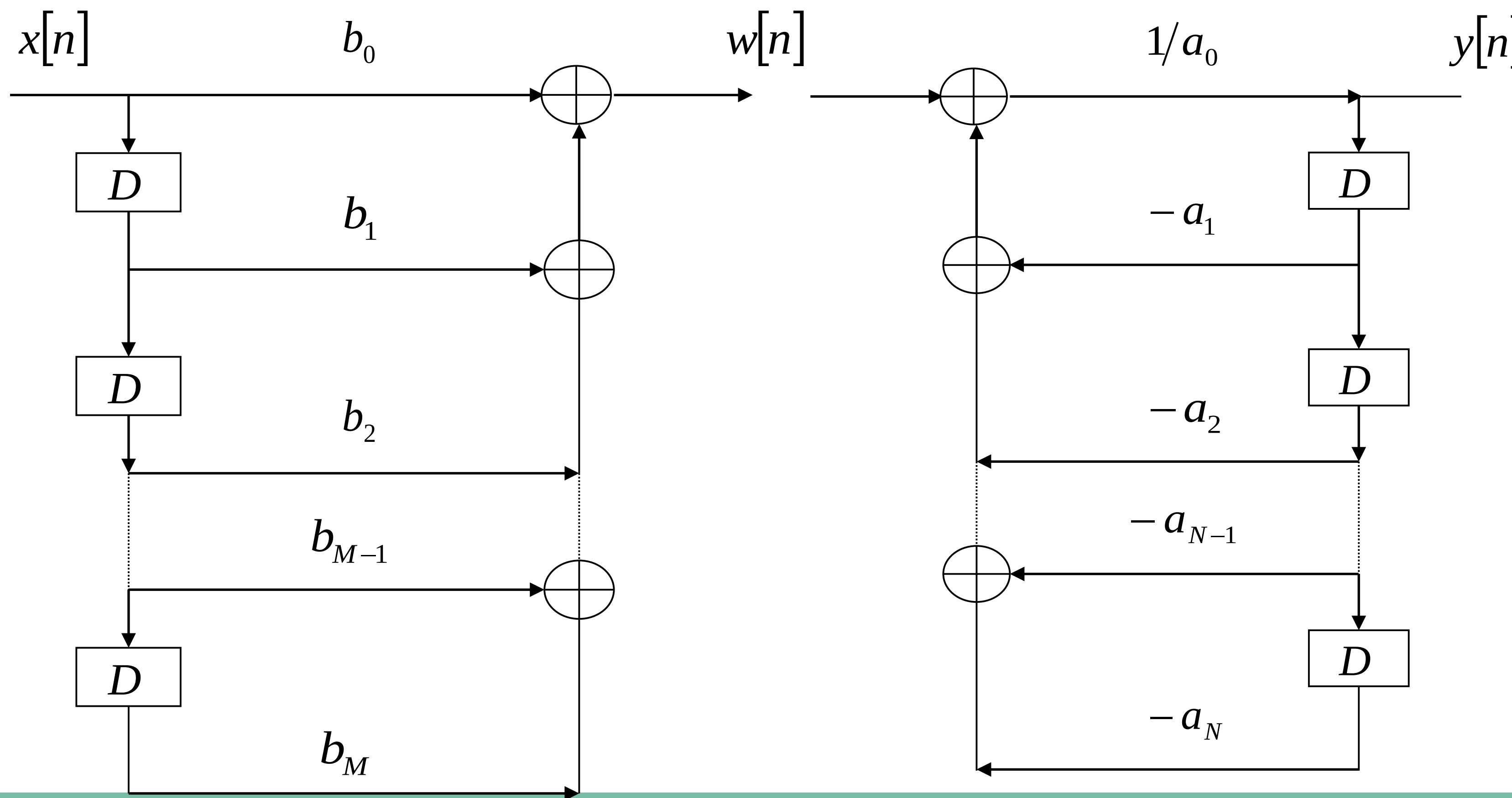
$$w[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(w[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

离散时间LTI系统的方框图实现

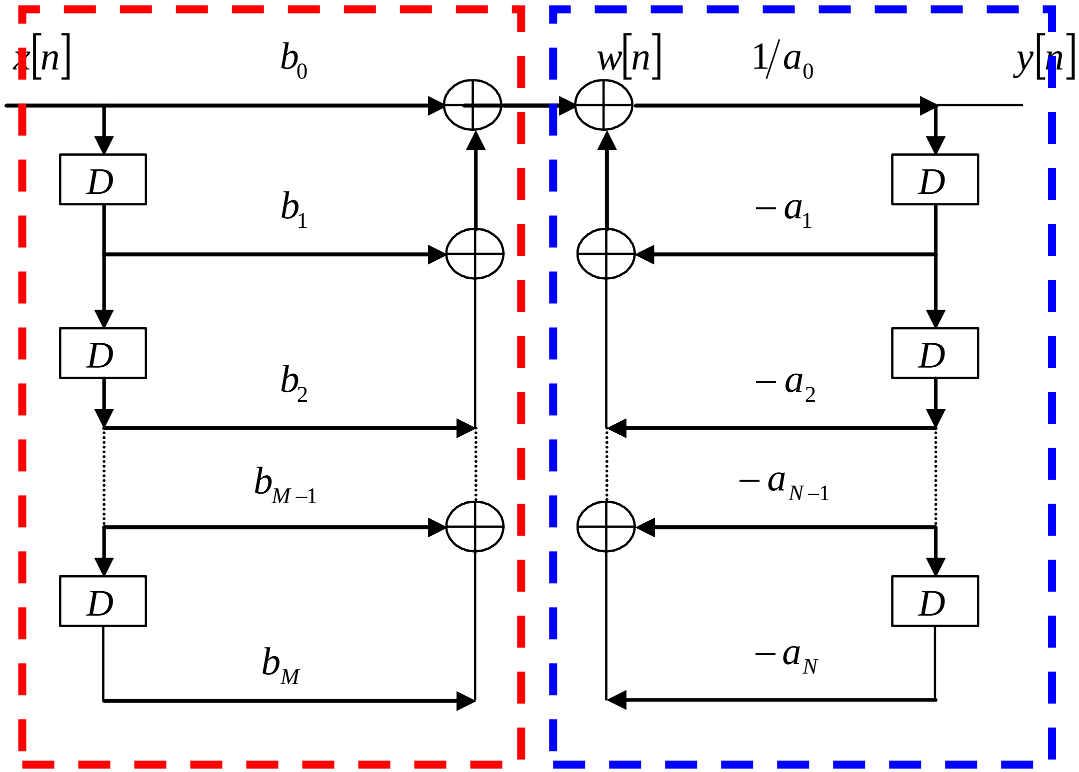
$$w[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left(w[n]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$



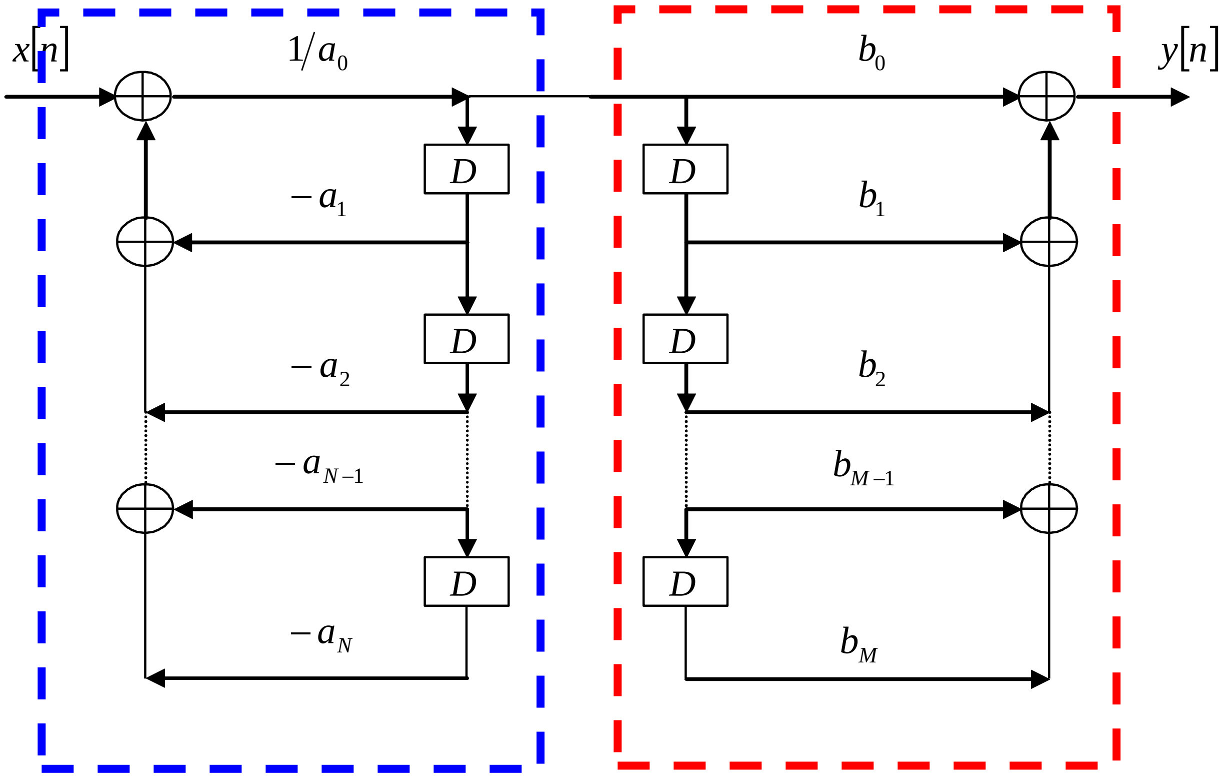
离散时间LTI系统的直接I型实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



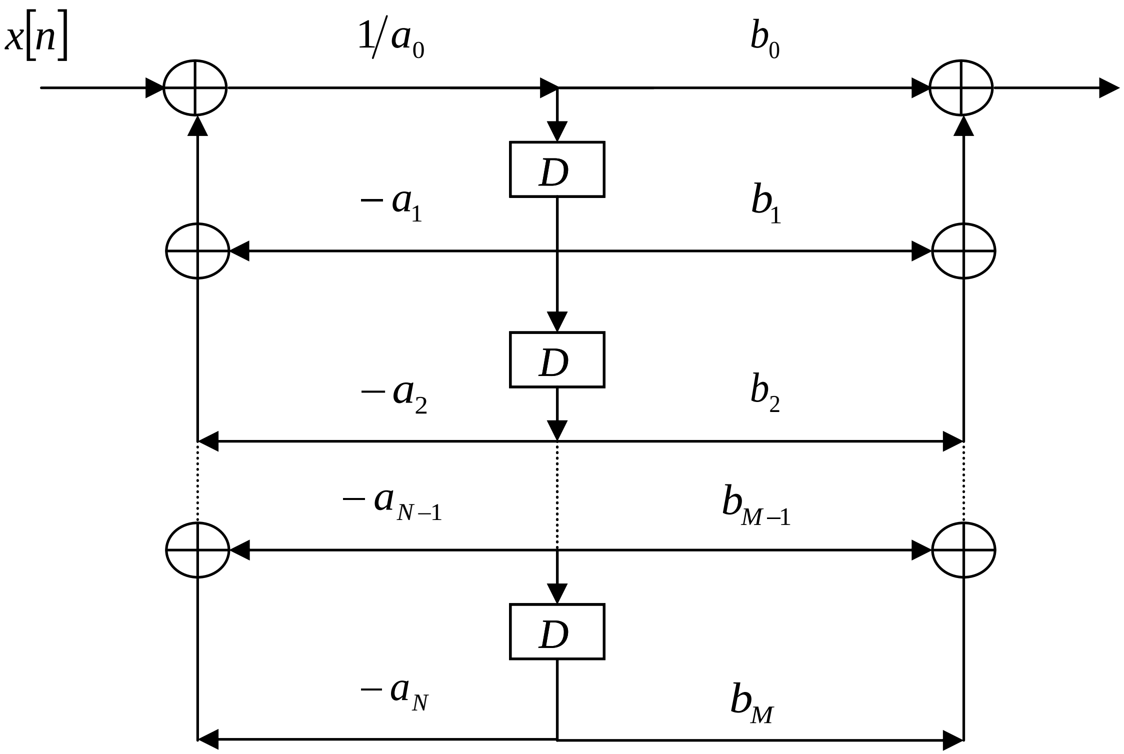
离散时间LTI系统的方框图实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



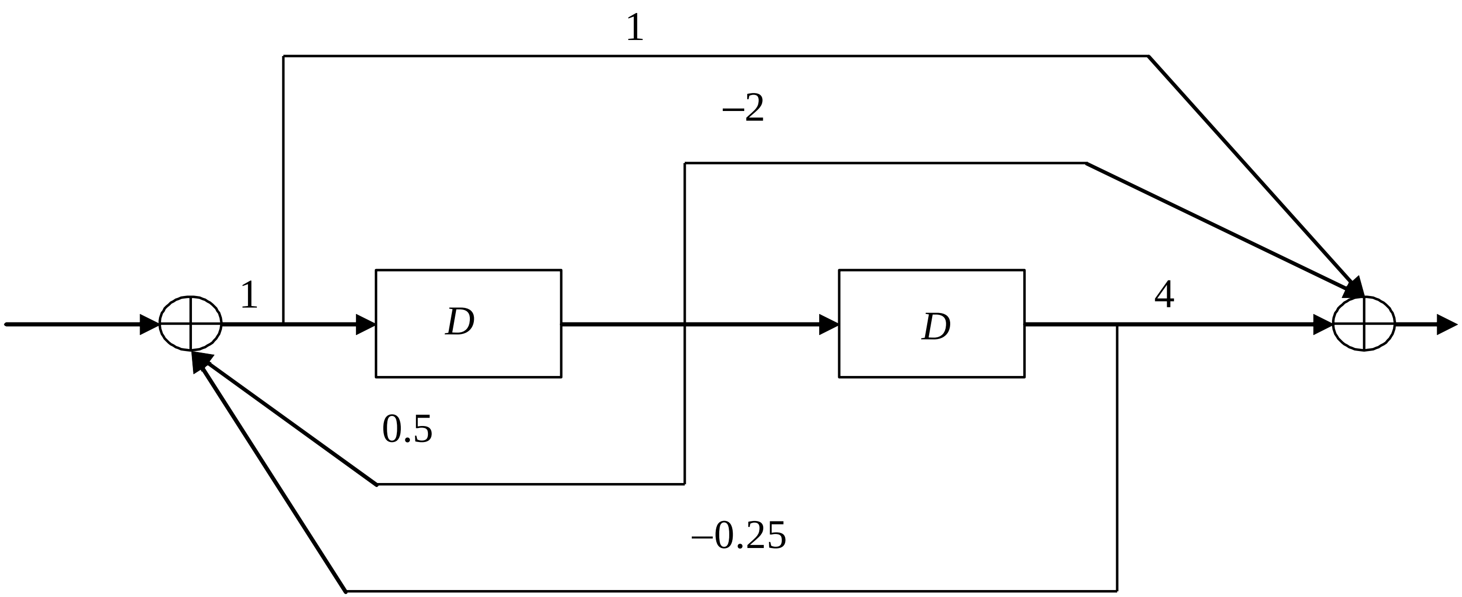
离散时间LTI系统的直接II型实现

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

利用傅里叶分析研究由方框图描述的系统



$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-2e^{-j\omega}+4e^{-2j\omega}}{1-0.5e^{-j\omega}+0.25e^{-2j\omega}}$$

关于M与N的关系问题

考察具有如下形式的函数：

$$H(v)=\frac{\beta_M v^M+\beta_{M-1}v^{M-1}+\ldots+\beta_1 v+\beta_0}{\alpha_N v^N+\alpha_{N-1}v^{N-1}+\ldots+\alpha_1 v+\alpha_0}$$

如果 $M \geq N$，则：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=c_{M-N}\left(e^{j\omega}\right)^{M-N}+c_{M-N-1}\left(e^{j\omega}\right)^{M-N-1}+\ldots+c_1\left(e^{j\omega}\right)+c_0$$

$$+\frac{b_{N-1}\left(e^{j\omega}\right)^{N-1}+b_{N-2}\left(e^{j\omega}\right)^{N-2}+\ldots+b_1\left(e^{j\omega}\right)+b_0}{\left(e^{j\omega}\right)^{N}+a_{N-1}\left(e^{j\omega}\right)^{N-1}+\ldots+a_1\left(e^{j\omega}\right)+a_0}$$

这说明系统中包含延时环节，这样的环节在实际中是可以模拟的。 ⇒ 不必限制 $N \geq M$

谢谢大家！