T1 某LTI系统. $y''(t)+a_0y'(t)+y(t)=b_0x'(t)+b_1x(t)$

① 当输入激励 $x_1(t)=e^{-2t}u(t)$，全响应 $y_1(t)=(-e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$

② 当输入为 $x_2(t)=\delta(t)-2e^{-2t}u(t)$ 全响应为.

$y_2(t)=(3e^{-t}-2e^{-2t}-5e^{-3t})u(t)$.

求: a_0, a_1. $y_{zi}(t)$, $h(t)$, b_0, b_1 (时域角度)

(其中 $a_0=4$. $a_1=3$ 靠特征根知)

解. ① 先求冲激响应 $h(t)$

从全响应 = 零入 + 零状态 (拆成激励 * 响应)

可知 $y_1(t)=y_{zi}(t)+e^{-2t}u(t)*h(t)$
$=(-e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$ ①

$y_2(t)=y_{zi}(t)+[\delta(t)-2e^{-2t}u(t)]*h(t)$
$=(3e^{-t}-2e^{-2t}-5e^{-3t})u(t)$. ②

①-② 可消去 $y_{zi}(t)$ 虽然一会要求它.

$e^{-2t}u(t)*h(t)-[\delta(t)-2e^{-2t}u(t)]*h(t)=(-4e^{-t}+3e^{-2t}+4e^{-3t})u(t)$.

利用卷积分配律, 实际上得到了一个 $h(t)$ 与激励的方程

$[-\delta(t)+3e^{-2t}u(t)]*h(t)=[-4e^{-t}+3e^{-2t}+4e^{-3t}]u(t)$

由微分方程, 可知为2阶系统 $h(t)$ 中必包含 e^{-t}, e^{-3t}

法1. Laplace 求, 贼快

$$\left(-1+3\frac{1}{s+2}\right)H(s)=-4\frac{1}{s+1}+3\frac{1}{s+2}+4\frac{1}{s+3}$$

$$(1-s)H(s)=3-\frac{4}{s+1}-\frac{4}{s+3}$$

$$H(s)=\frac{-3}{s-1}-2\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)-\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+3}\right)$$

$$=-2\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

$$\Rightarrow h(t)=(-2e^{-t}-e^{-3t})u(t)$$

T1 是响应综合, 考了跳变、零输入/状态. 微分方程

一个系统中零输入响应是恒定的, 因为它靠齐次方程求出的. 不依赖于激励

法2. 设 $h(t)=Ae^{-t}+Be^{-3t}$.

需引入公式 $e^{-at}u(t)*e^{-bt}u(t)=\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}u(t)$

但证也得 Laplace (笑)

i 用时域证

$$e^{-at}u(t)*e^{-bt}u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\tau}u(\tau)\,e^{-b(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

由于阶跃特性 2函数都得非0.

则原式 $=\int_0^t e^{-a\tau}\cdot e^{-bt+b\tau}d\tau$ e^{-bt}视为常数

$$=e^{-bt}\frac{1}{b-a}\int_0^t e^{(b-a)\tau}d(b-a)\tau$$

$$=\frac{e^{-bt}}{b-a}\left(e^{(b-a)t}-1\right)=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$$ 证毕

非常精彩!

ii. Laplace

$\Rightarrow \dfrac{1}{S+a}\cdot\dfrac{1}{S+b}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{S+a}-\dfrac{1}{S+b}\right)$.

$\Rightarrow e^{-at}u(t)*e^{-bt}u(t)=\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$ 得证

走题了(笑), 回到求 $h(t)$ 上

由于 $h(t)=Ae^{-t}u(t)+Be^{-3t}u(t)$

$\because e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)=\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{2-1}u(t)$

$e^{-3t}u(t)*e^{-2t}u(t)=[e^{-2t}-e^{-3t}]u(t)$

$\therefore$ 代入原式. 解开 $h(t)$

$h(t)-3e^{-2t}u(t)*h(t)=h(t)-3e^{-2t}u(t)*[Ae^{-t}u(t)+Be^{-3t}u(t)]$

$\therefore (A-3A)e^{-t}+(-3B+3A)e^{-2t}+4Be^{-3t}=4e^{-t}+(-3)e^{-2t}+(-4)e^{-3t}$

$\therefore \begin{cases}-2A=4\\3A-3B=-3\\4B=-4\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}A=-2\\B=-1\end{cases}$

$\therefore h(t)=-2e^{-t}u(t)-e^{-3t}u(t)$

多麻烦啊()

② $y_{zi}(t)$. 使用刚求 $h(t)$ 所用的方程加减消元求解.

可知 $y_1(t)=y_{zi}(t)+e^{-2t}u(t)*h(t)$

$$=(-e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t})u(t) \quad ①$$

$$y_2(t)=y_{zi}(t)+[\delta(t)-2e^{-2t}u(t)]*h(t)$$

$$=(3e^{-t}-2e^{-2t}-5e^{-3t})u(t). \quad ②$$

2×①+② $3y_{zi}(t)+\delta(t)*h(t)=(e^{-t}-7e^{-3t})u(t)$

代入 $h(t)=(-2e^{-t}-e^{-3t})u(t)$

得 $y_{zi}(t)=(e^{-t}-2e^{-3t})u(t)$

④ 求 b_0, b_1 使用冲激平衡法

$h(t)$ 含义是，激励为 $\delta(t)$ 时的"$y(t)$"

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=b_0x'(t)+b_1x(t)$$

改写成：$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=b_0\delta'(t)+b_1\delta(t)$

只需把已知的 $h(t)$ 代入即可

计算 $h''(t)$ $h'(t)$ $h(t)$ 解恒等方程

介绍冲激平衡 已知 $h(t)$ 则已知零输入响应

① $h(0_+)=-3$ $h'(0_+)=5$ （求导代0）

② 设 $h(t)$ 从最高阶导开始，匹配最高次冲激

$$h''(t)=A\delta'(t)+B\delta(t)+Cu(t) \quad \uparrow C$$

$$h'(t)=A\delta(t)+Bu(t) \quad \uparrow B$$

$$h(t)=Au(t) \quad \uparrow A$$

$$\begin{cases} A=b_0=h(0_+) \\ B+4A=b_1 \quad B=h'(0_+) \\ A+B+C=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0=-3 \\ b_1=-7 \end{cases}$$

$\delta(t)$ 是产生跃变的因素，而 $u(t)$ 才是真正产生跳变的因素

一道条件较少的 $r_{zi}(t)$

$e_1(t)=u(t)$ 的全响应 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$

$e_2(t)=\delta(t)$ 的全响应 $r_2(t)=\delta(t)$

(1) 求 $r_{zi}(t)$ (2) 起始状态(0状态)不变，求对

$e_3=e^{-t}u(t)$ 的全响应 $r_3(t)$

(1) $r_全(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$=r_{zi}(t)+e(t)*h_e(t)$

$\therefore\ r_1(t)=r_{zi}(t)+g(t)=2e^{-t}u(t)$ ①

同理 $r_2(t)=r_{zi}(t)+h(t)=\delta(t)$ ②.

①−② $g(t)-h(t)=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

进入s域 $G(s)-H(s)=2\frac{1}{s+1}-1$

$(\frac{1}{s}-1)H(s)=\frac{-s+1}{s+1}$

$H(s)=\frac{s}{s+1}=1-\frac{1}{s+1}$

$h(t)=\delta(t)-u(t)e^{-t}$

$\therefore\ r_{zi}(t)=\delta(t)-h(t)=u(t)e^{-t}$

(2). 起始不变，即 $r_{zi}(t)=u(t)e^{-t}$

$r_3(t)=u(t)e^{-t}+e^{-t}u(t)*h(t)$

$=u(t)e^{-t}+e^{-t}u(t)*[\delta(t)-u(t)e^{-t}]$

$=2u(t)e^{-t}-te^{-t}u(t)$

$e^{-t}u(t)*e^{-t}u(t)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

$=\int_0^t \boxed{e^{-t}}d\tau$ → 常数!

$=te^{-t}u(t)$

$(t>0)$.

也可以求零状态响应

$Y_{zs}(s)=E_3(s)\ H(s)$

$=\frac{1}{s+1}\ (1-\frac{1}{s+1})$

$\therefore\ y_{zs}(t)=e^{-t}u(t)-te^{-t}u(t)$

一般来说，因果LTI系统是初始松弛的，即初始为无状态的 不用求 $r(0-)$

$r(0-)$ 实际是 $r_{zi}(0-)$

这个 $h_e(t)$ 是系统关于 $e(t)$ 的响应，当 $e(t)=\delta(t)$

$h_e(t)$ 叫单位脉冲/阶跃响应，即 $h(t)$

$e(t)=u(t)$ 叫单位阶跃响应 $g(t)=u(t)*h_e(t)$

在时域上 $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$.

s域上响应 $H(s)=sG(s)$.

$\cdot\ G(s)=\frac{1}{s}H(s)$

虽 $h(t)$ 叫单位冲激，但属性是一样的

$g(t)=h(t)*u(t)$

$=h(t)*\delta(t)*\int$

只是与 $\delta(t)$ 卷积 $h(t)$ 露出真面目

拓展些卷积运算.

(1) $f_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, $f_2(t) = \sin t\, u(t)$

关于 $\sin t\, u(t)$ 不是单纯地 $\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{s}$ 这会出问题 这时还得回到拉氏定义去计算

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)u(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sin t e^{-st}dt = \frac{1}{s^2+1} \quad (s>0)$$

这叫"因果拉氏变换" Causal Laplace Transform

因为我们拉氏是含 $s<0$ 的频谱的

$$f_1(t)*f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\ \frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+1}(e^{-\alpha t}+a\sin t-\cos t)u(t)$$

计算是简单的. 裂项用留数

(2) 分类讨论型

$f_1(t) = (1+t)[u(t)-u(t-1)]$. $f_2(t) = u(t-1)-u(t-2)$

关键项是 $tu(t)$ $tu(t-1)$ 这些项.

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} tu(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

$\mathcal{L}[tu(t-1)] = \int_1^{+\infty} te^{-st}dt$ 这样过于割裂

不如凑 $\mathcal{L}[(t-1)u(t-1)]$ 补一个 $u(t-1)$ 即可.

$\mathcal{L}[u(t-1)] = \frac{e^{-s}}{s}$ $\quad$ $\mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] = \frac{e^{-s}}{s^2}$

这是 s 域, 但使用时域, 要展开讨论 $u(t)$, 会很麻烦, 但须知原理

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\tau)[\overset{A}{u(\tau)}-\overset{B}{u(\tau-1)}]\{\overset{C}{u(t-\tau-1)}-\overset{D}{u(t-\tau-2)}\}d\tau$$

把 t 换成 $\boxed{t-\tau}$ 不用管 2

$u(t-2)$

⇓

$u(\tau-2)$

⇓

$u(-\tau-2)$

⇓ 不用动 $\boxed{-2}$

$u(-(\tau-t)-2)$

这种 $u(t)$ 讨论关键在于 $u(\tau)$ 与 $u(t-\tau-1)$ 这些阶跃可否产生交集 若可以, 积分上下限是有意义的.

AC 项 下限必然为 0 上限可能是 t-1 看 t-1 与 0 的关系

以此类推.

已知卷积还原响应函数.

$$r_{zs}(t)=\int_{t-2}^{\infty}e^{t-\tau}e(\tau-1)d\tau.$$

因为输入激励是 $e(t)$ 故对于 $e(\tau-1)$ 要移位

令 $\tau'=\tau-1 \Rightarrow r_{zs}(t)=\int_{t-3}^{+\infty}e^{t-\tau'-1}e(\tau')d\tau'$ 记得变下限

由于变下限的积分，可以还原出是否存在阶跃

因为在下限，则无需 $-\tau'$ 表示 τ 大于 $(t-3)$ 时阶跃为1

$$r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u[\tau'-(t-3)]e^{t-\tau'-1}e(\tau')d\tau'$$

将 $u(\tau'-(t-3))e^{t-\tau'-1}$ 还原.

$u(3-t)$　e^{t-1}

$$h(t)=u(3-t)e^{t-1}$$

来道坑人结论 ⇒ 启示是一定要持怀疑态度!

LTI. $e(t)=2e^{-3t}u(t-1)$

$r(t)=H(e(t))$

又已知 $H\left(\frac{de(t)}{dt}\right)=-3r(t)+e^{-2t}u(t)$

求单位冲激响应 $h(t)$

做这种要思路整理：$H\left(\frac{de(t)}{dt}\right)$ 如何与 $e(t)*h(t)$ 扯上关系? $H(e(t))$ 的本质是 $r(t)$!!!

$\therefore\ r'(t)=-3r(t)+e^{-2t}u(t)$

这是个微分方程，但只用解 zs (因为在研究输入而与zi无关)

$\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} sR(s)=-3R(s)+\frac{1}{s+2}$

$R(s)=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+3}=E(s)\cdot H(s)$

又已知 $E(s)=\mathcal{L}[2e^{-3t}u(t-1)]$ 如套结论就寄了!!!

事实上咱算得 $E(s)=2\frac{e^{-3}}{s+3}e^{-s}$ 多个 e^{-3} (因为积分下限1不会让指数变0)

$\therefore\ H(s)=\frac{1}{s+2}\cdot\frac{e^{3}}{2}e^{s}=\frac{1}{2}e^{-2t+1}u(t+1)$

注 $u(t-t_0)e^{t-t_0}$ 要配合好时移!!!

$2e^{-3t}u(t-1)$

$\overset{\mathcal{L}?}{\Rightarrow} 2\frac{e^{-s}}{s+3}$

是否定的

组合会产生化学反应!

懂了.

$e^{-2t}u(t)\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}\frac{1}{s+2}$

$e^{-2(t+1)}u(t+1)\Rightarrow\frac{e^{s}}{s+2}$

有 e 区别

实话说.

$e^{-2t+1}u(t+1)$

也不知怎来的.