信号与系统

第二讲 典型信号分析

杜清河
信息与通信工程学院
Email:
duqinghe@mail.xjtu.edu.cn
2025春

对应教材章节

- 第一章
  - 1.3、1.4节

内容提要

- 复指数信号与正弦信号
- 单位冲激信号与单位阶跃信号

内容提要

- 复指数信号与正弦信号
- 单位冲激信号与单位阶跃信号

连续时间复指数信号

❖ 数学描述

$$x(t) = ce^{at}$$

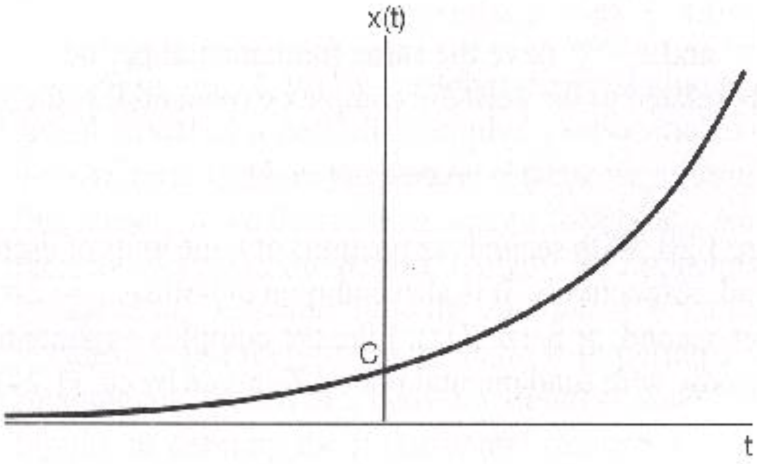
$$c = |c|e^{j\theta} \qquad a = r + j\omega_0$$

- 分类
  - 实指数信号
  - 周期复指数信号
  - 一般复指数信号

实指数信号

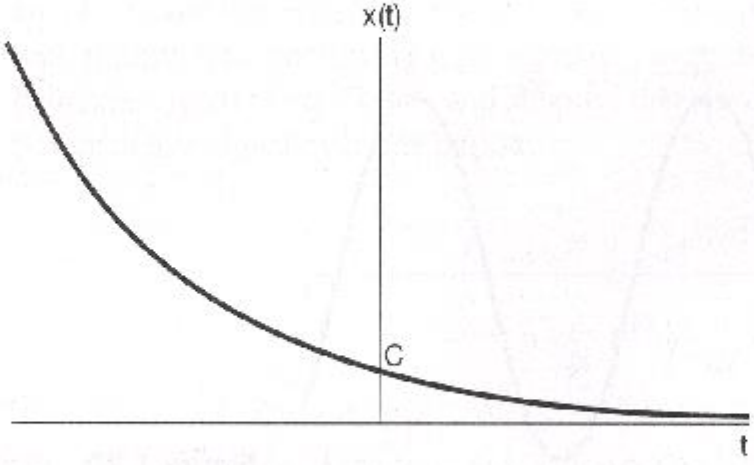
$c>0$、a是实数

$a>0$



(a)

$a<0$



(b)

周期复指数信号

$$x(t) = ce^{at}$$

$$c = |c|e^{j\theta} \qquad a = r + j\omega_0$$

$c = 1, r = 0 \Rightarrow x(t) = e^{j\omega_0 t}$

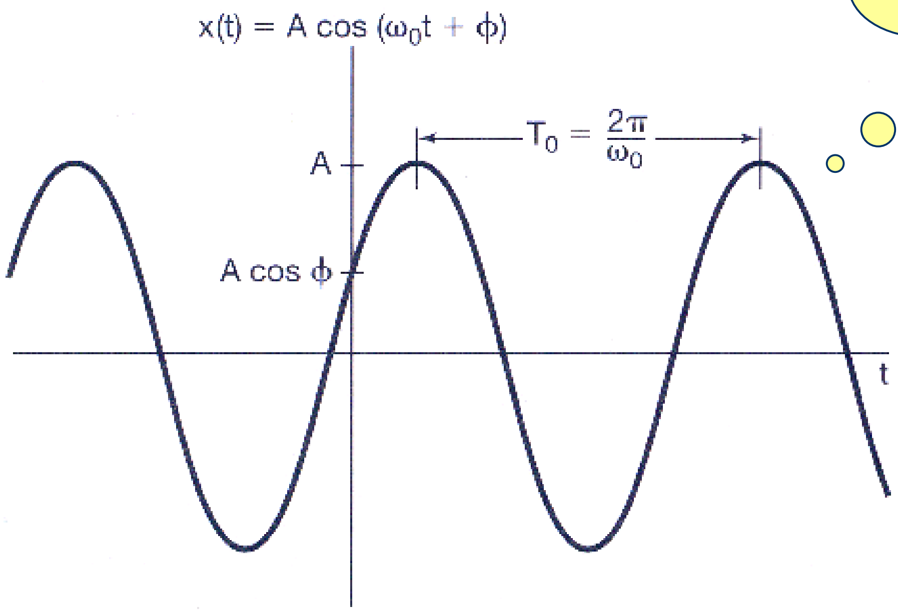
该信号总是周期的。

$\omega_0 = 0 \Rightarrow$ 直流信号，没有基波周期

$\omega_0 \neq 0 \Rightarrow$ 基波周期为：$T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$

该信号的总能量为无穷大，平均功率为1。

正弦信号



工程中不区分正弦和余弦

- 正弦信号三要素：幅度、频率、相位
- ω_0 越大，信号频率越高

成谐波关系的复指数信号集合

$$\left\{\phi_k(t)\right\}=\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\} \quad k=0,\pm1,\cdots$$

- 信号集中信号具有共同的周期$T_0=2\pi/\omega_0$，第k次谐波的基波频率和基波周期分别为$|k|\omega_0$和$T_k=2\pi/|k\omega_0|$
- 该信号集所包含的独立的信号个数为无穷多个，且任意两个信号在长度为T_0的任何区间上都是正交的。

一般复指数信号

$$x(t) = ce^{at}$$

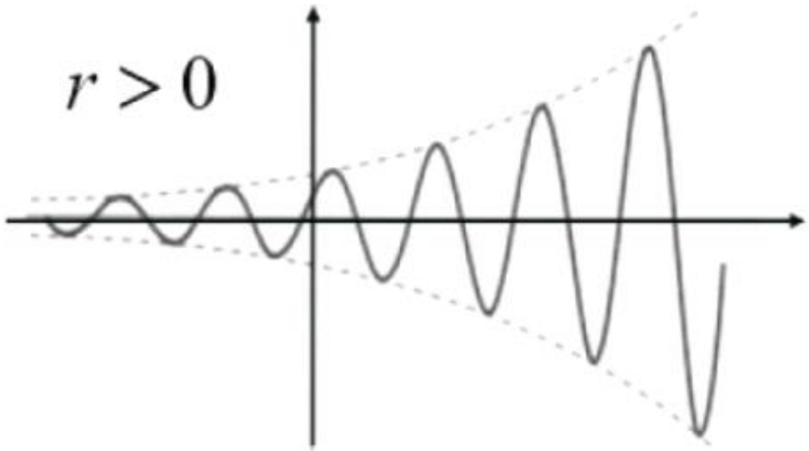
$$c = |c|e^{j\theta} \qquad a = r + j\omega_0$$

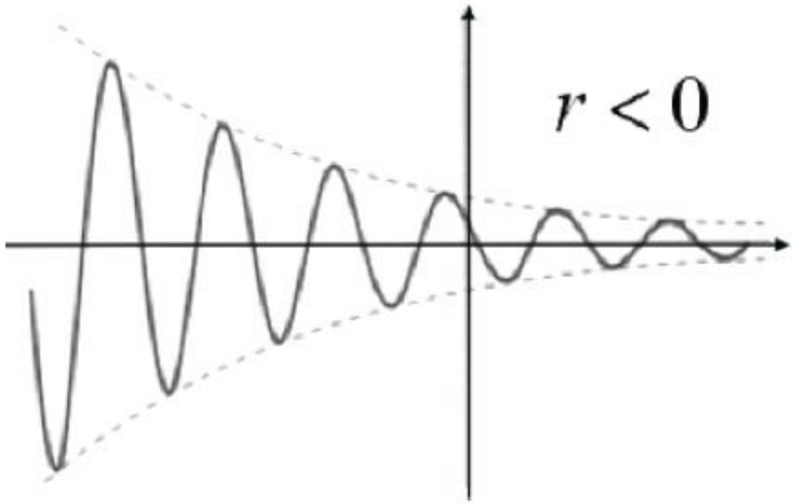
$$\Rightarrow \quad x(t) = |c|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

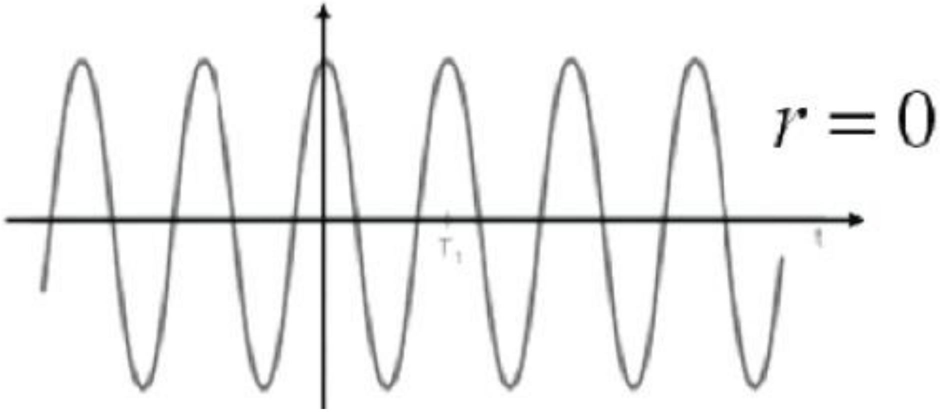
该信号可以看成是振幅按照实指数规律变化的复指数信号，它的实部和虚部都是振幅呈实指数规律变化的正弦振荡。

- $r>0$: 指数增长的正弦振荡
- $r<0$: 指数衰减的正弦振荡
- $r=0$: 等幅正弦振荡

一般复指数信号







离散时间复指数信号

❖ 数学描述

$$x(t) = ce^{at}$$

$$c = |c|e^{j\theta} \qquad a = r + j\omega_0$$

$$x[n] = ce^{\beta n} \xrightarrow{e^{\beta} = \alpha} c\alpha^{n}$$

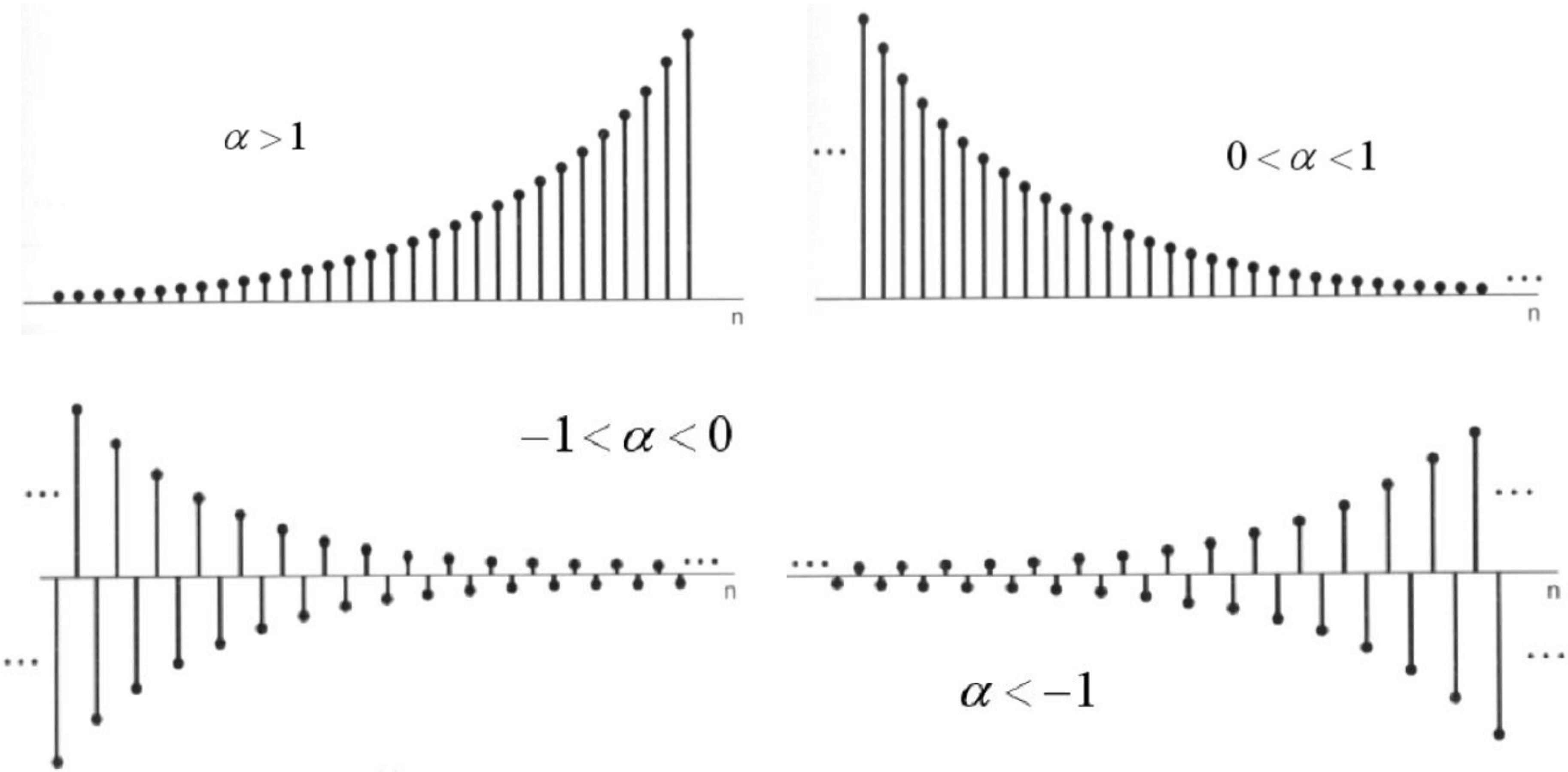
$$c = |c|e^{j\theta} \qquad \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

离散时间复指数信号

- 分类
  - 实指数序列
  - 复指数序列
  - 一般复指数序列

实指数序列

c、α是实数



复指数序列

❖ 数学描述

$$x(t) = ce^{at} \xrightarrow{c=1, a=j\omega_0} e^{j\omega_0 t}$$

周期 $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$x[n] = c\alpha^n \xrightarrow{c=1, \alpha=e^{j\omega_0}} e^{j\omega_0 n}$$

量纲为弧度

离散时间正弦序列： $x[n] = A\cos[\omega_0 n + \theta]$

复指数序列

❖ 复指数序列的周期性

$$x[n]=e^{j\underline{\omega_0} n}$$

$$\frac{\omega}{2\pi}=\frac{m}{N}$$

当且仅当下列关系成立时：

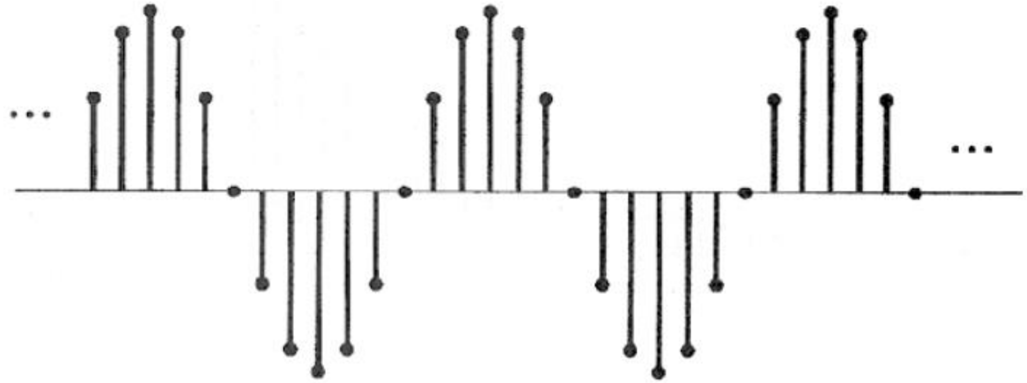
$$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N}$$

$$\frac{\omega}{2\pi}=\frac{m}{N}$$

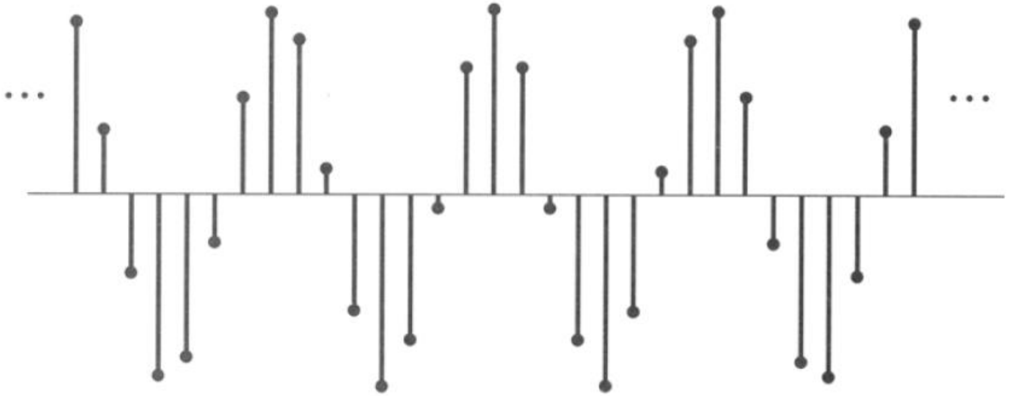
复指数序列才是周期的，且其最小正周期为：

$$\boxed{N_0=\frac{N}{\gcd(N,m)}}$$

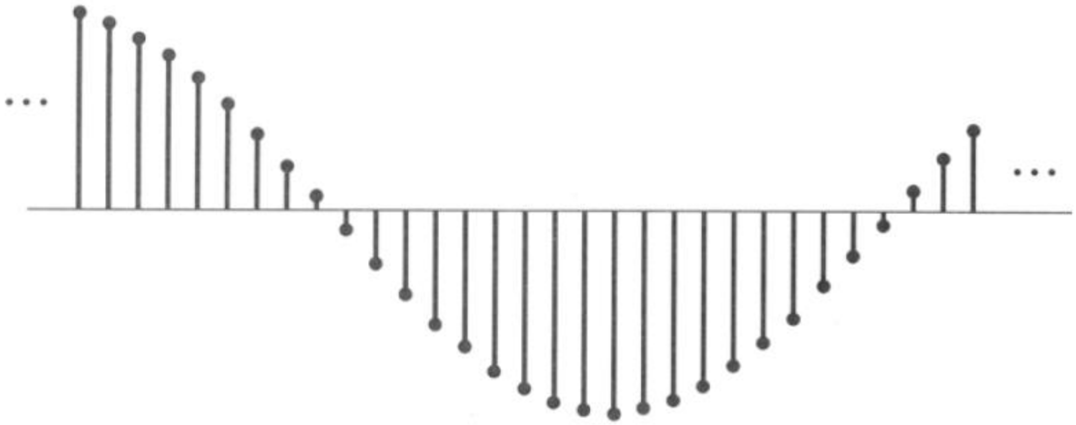
$$x[n] = \cos(2\pi n/12)$$



$$x[n] = \cos(8\pi n/31)$$



$$x[n] = \cos(n/6)$$



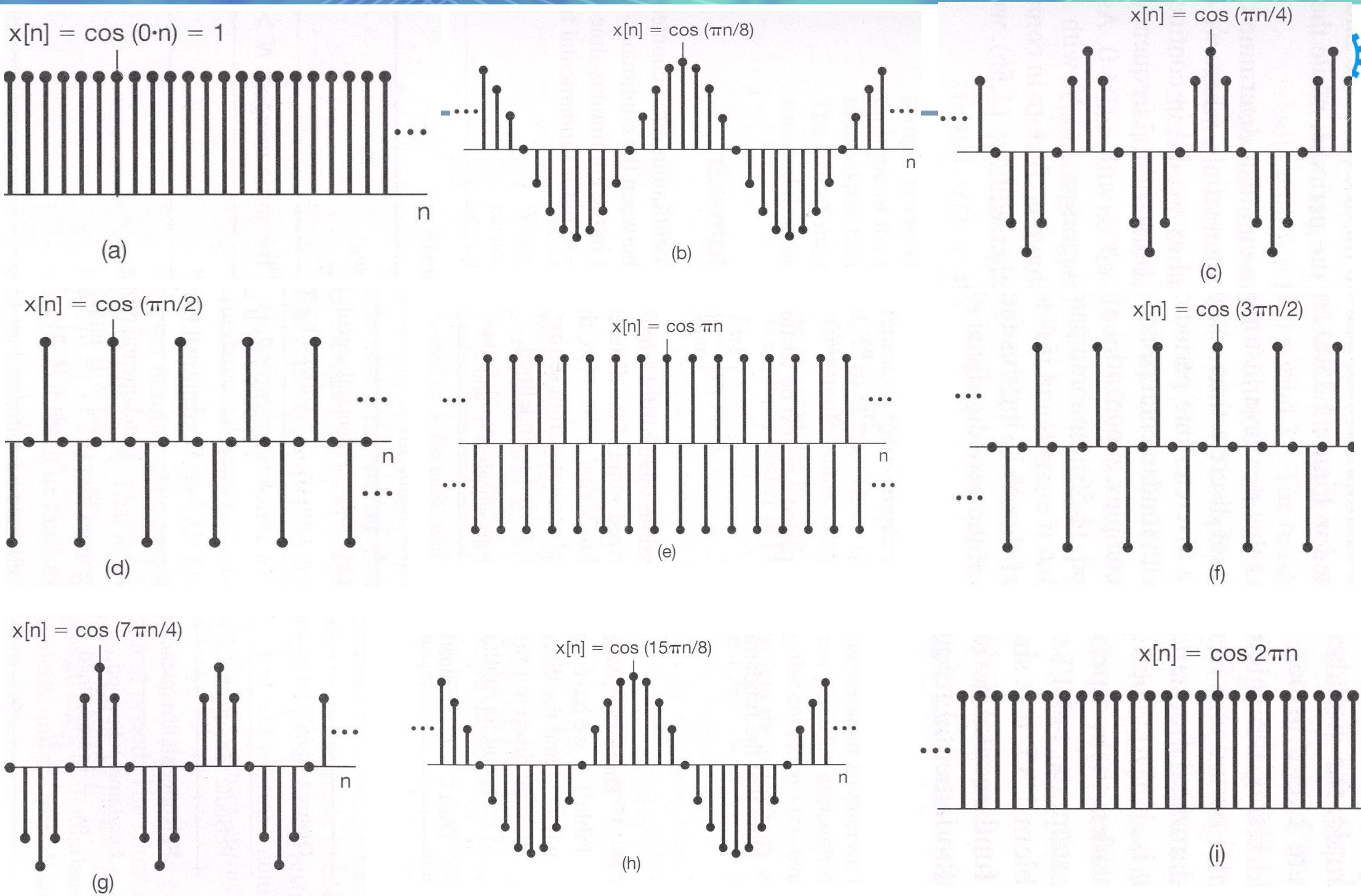
复指数序列

❖ 复指数序列的频率

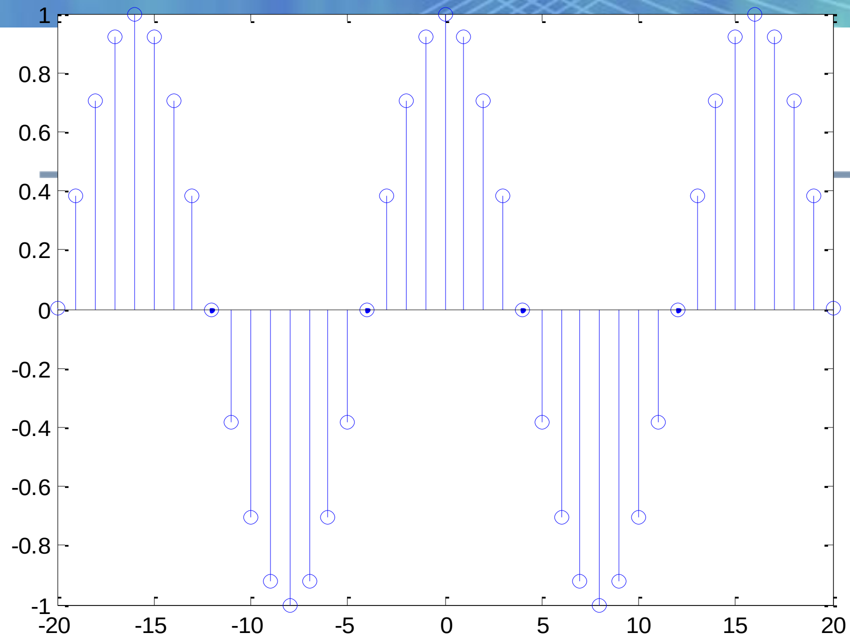
$x(t)=e^{j\omega_0 t}$：不同的 ω_0 对应不同的信号，ω_0 越大，信号的频率越高

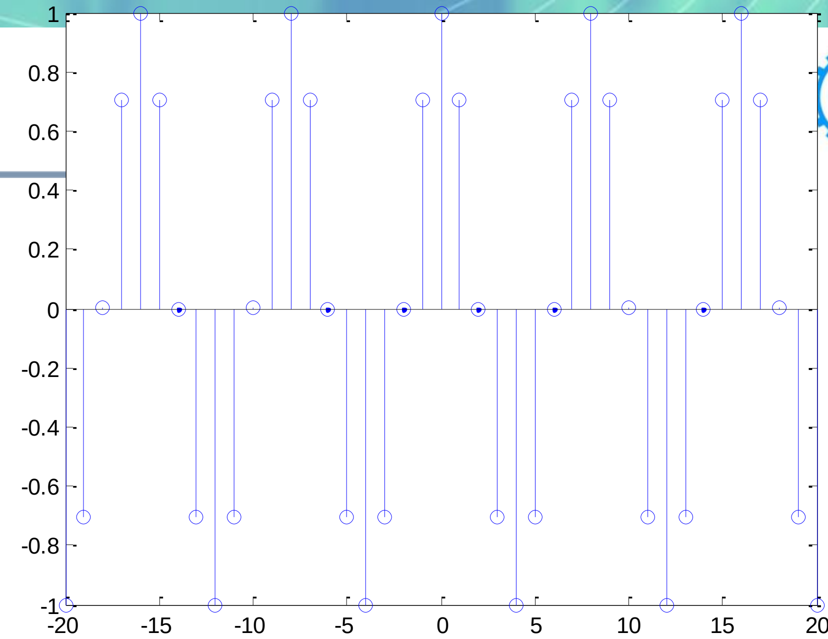
$x[n]=e^{j\omega_0 n}$：频率为 ω_0 的复指数信号与频率为 $\omega_0+2k\pi$ 的复指数信号是一样的，**离散时间复指数信号的有效频率范围只有 2π 区间**

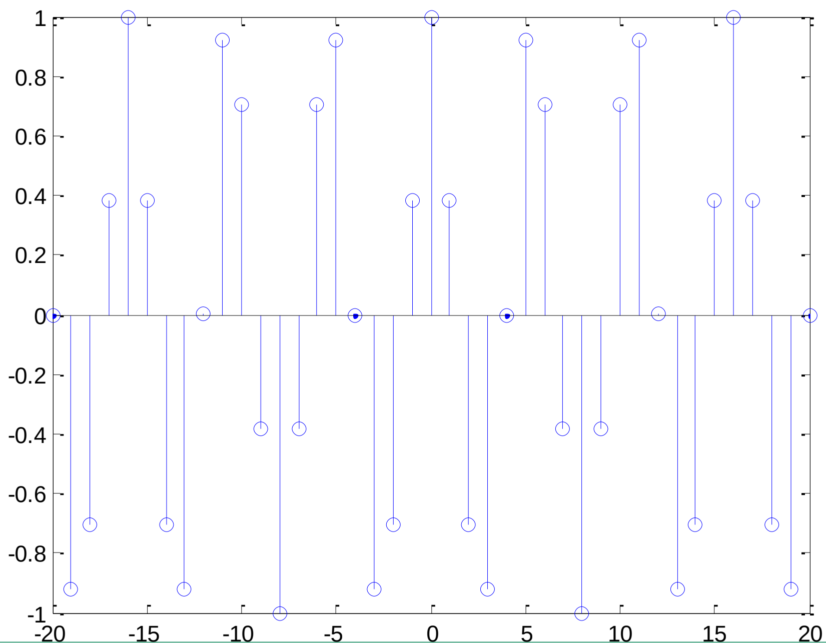
对于正弦序列，有同样的结论。

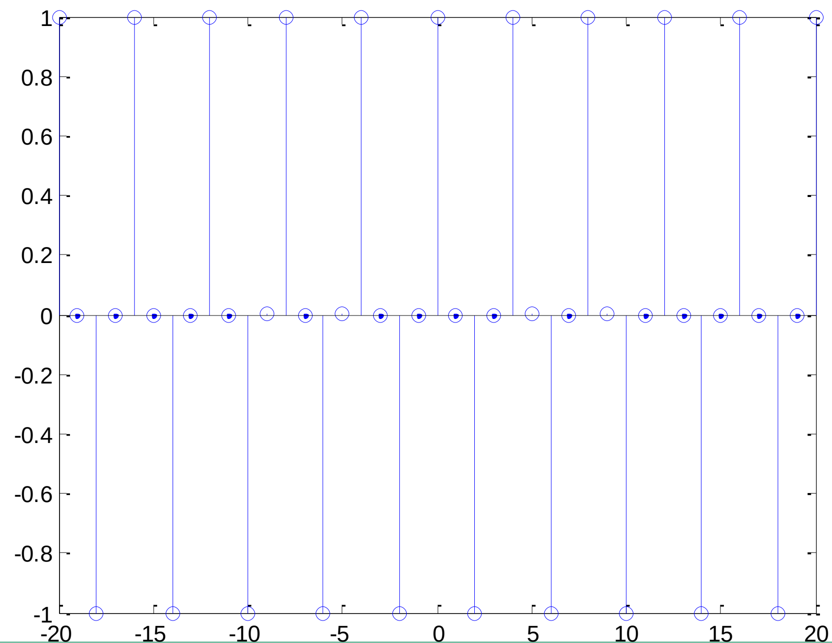


$x[n] = \cos(0 \cdot n) = 1$
n
(a)
$x[n] = \cos(\pi n/8)$
n
(b)
$x[n] = \cos(\pi n/4)$
(c)
$x[n] = \cos(\pi n/2)$
n
(d)
$x[n] = \cos \pi n$
n
(e)
$x[n] = \cos(3\pi n/2)$
(f)
$x[n] = \cos(7\pi n/4)$
n
(g)
$x[n] = \cos(15\pi n/8)$
n
(h)
$x[n] = \cos 2\pi n$
(i)


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20

复指数序列与正弦序列

- 对离散时间复指数序列，当其频率在 $2k\pi$ 附近时，信号具有较低的频率，即变化较慢。

周期长

周期短变小

- 对离散时间复指数序列，当其频率在 $(2k+1)\pi$ 附近时，信号具有较高的频率，即变化较快。

- 对连续时间复指数信号或正弦信号，其时移和相移是一一对应的；而对离散时间复指数信号或正弦信号，其时移和相移不是一一对应的。

成谐波关系的复指数序列集合

但N不是某一最小正周期

❖具有公共周期N的复指数序列

$$\{\phi_k[n]\} = \{e^{jk(2\pi/N)n}\} \qquad k = 0, \pm 1, \cdots$$

- 该信号集中每个信号都以N为周期，且每个信号的频率都是$2\pi/N$的整数倍。

- 该信号集中只有N个信号是独立的，即：

$$\phi_{k+N}[n] = \phi_k[n]$$

它们在任何长度为N的区间上都是正交的。

一般复指数信号

$$x[n] = c\alpha^n$$

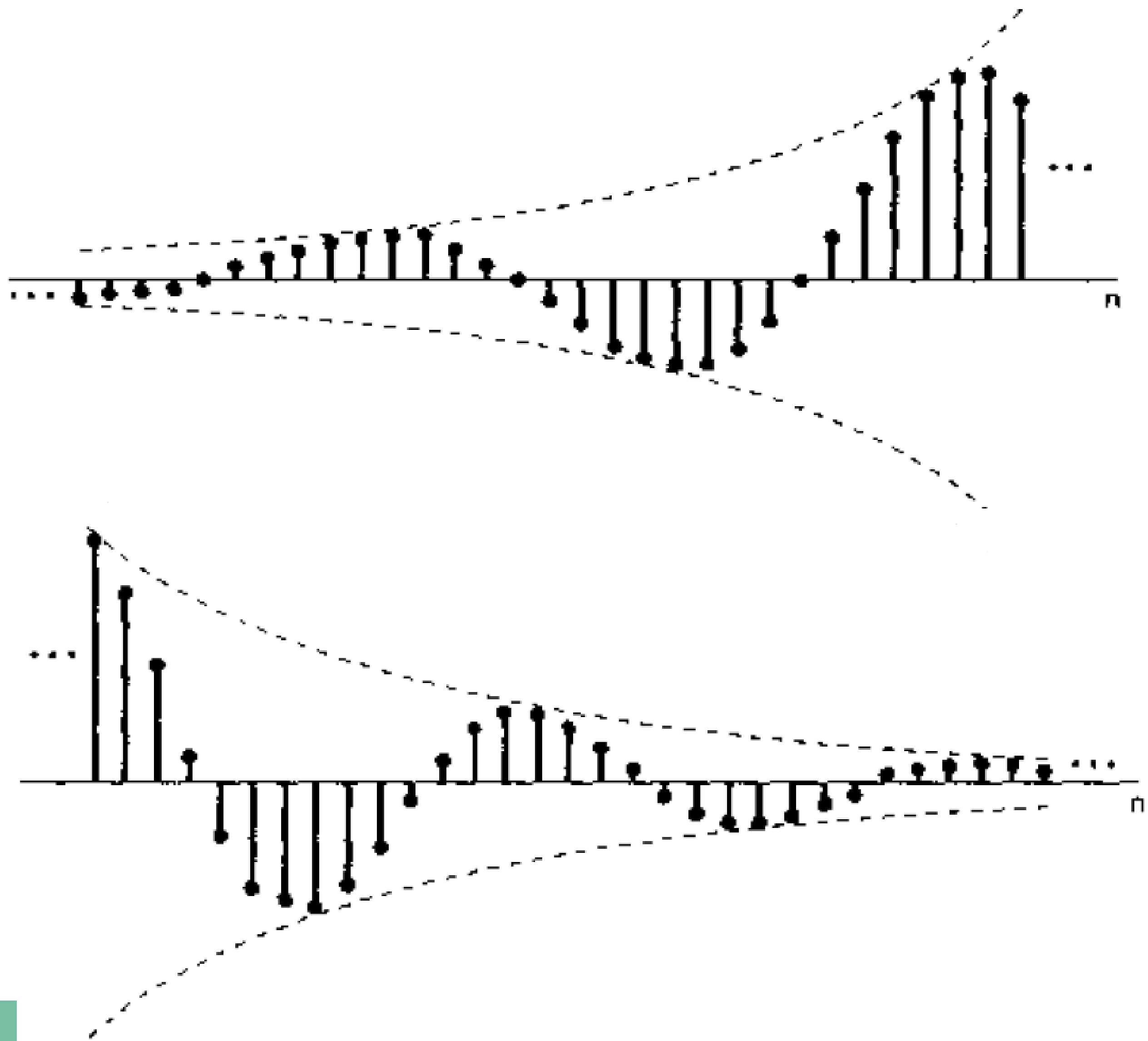
$$c = |c|e^{j\theta} \quad \alpha = |\alpha| e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = |c||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

该信号的实部和虚部都是振幅呈实指数规律变化的正弦序列。

- $|\alpha|>1$: 幅度呈指数增长
- $|\alpha|<1$: 幅度呈指数衰减
- $|\alpha|=1$: 等幅正弦振荡

一般复指数信号



连续时间 vs. 离散时间复指数信号

$x(t)=ce^{at}$ $\quad c=\lvert c\rvert e^{j\theta}$ $\quad a=r+j\omega_0$	$x[n]=ce^{\beta n}\xrightarrow{e^{\beta}=\alpha}c\alpha^{n}$ $\quad c=\lvert c\rvert e^{j\theta}$ $\quad \alpha=\lvert\alpha\rvert e^{j\omega_0}$
$x(t)=e^{j\omega_0 t}$ $\quad c=1$ $\quad r=0$ 周期 $\quad T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$	$x[n]=e^{j\omega_0 n}$ $\quad c=1$ $\quad \lvert\alpha\rvert=1$ 当且仅当 $\quad \dfrac{\omega_0}{2\pi}=\dfrac{m}{N}$ 周期 $\quad N_0=\dfrac{N}{\gcd(N,m)}$
$x(t)=\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}$ $k=0,\pm1,\cdots$ 无穷多个信号	$x[n]=\phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n}$ $\quad \omega_0=\dfrac{2\pi}{N}$ $\phi_{k+N}[n]=\phi_k[n]$ $\quad k=0,1,\cdots,N-1$ 只有N个独立信号
$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$ 考判断 ω_0 越大 频率越高 三要素 $\begin{cases}A & \\ \omega_0 & \omega_0=2\pi f_0,\ 弧度/秒 \\ \theta & 弧度\end{cases}$	$x[n]=A\cos[\omega_0 n+\theta]$ 0 低频 π 高频 三要素 $\begin{cases}A & \\ \omega_0 & \omega_0=2\pi f_0,\ 弧度 \\ \theta & 弧度\end{cases}$

内容提要

- 复指数信号与正弦信号
- 单位冲激信号与单位阶跃信号

连续时间单位阶跃

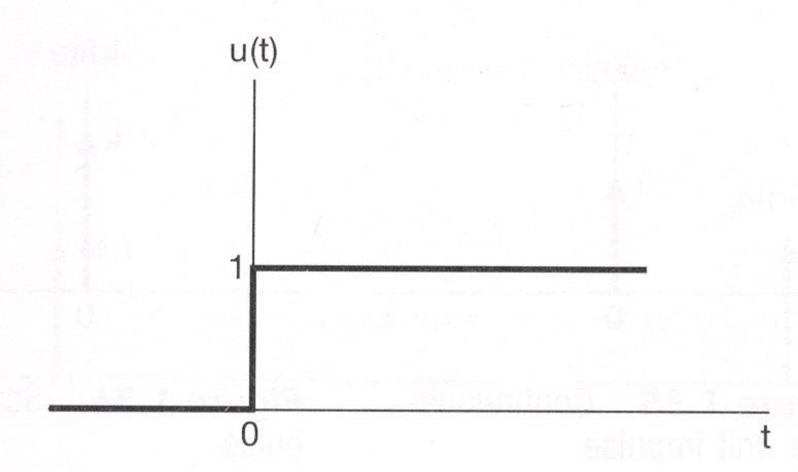
❖ 定义

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

t=0处无定义

工程上不在乎

从无到有



连续时间单位冲激

❖ 定义

- 定义1：

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

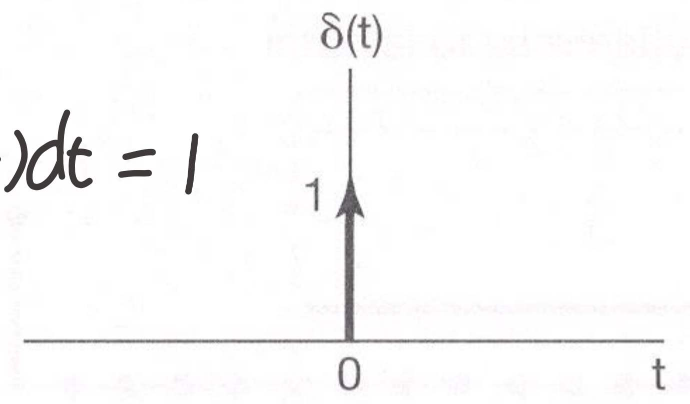
∞ ?

- 定义2：

实际上

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \\ \delta(t)=0 \qquad t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt=1$$

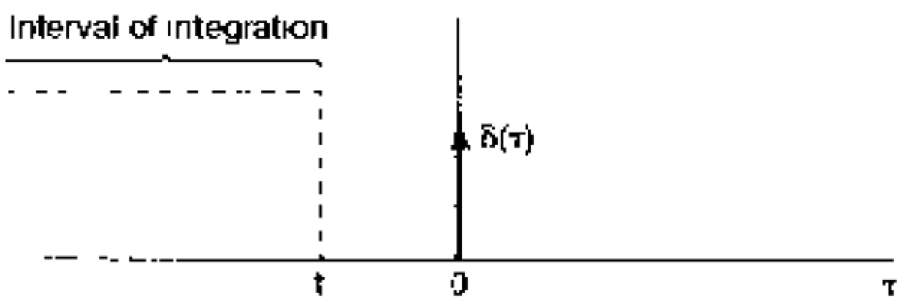


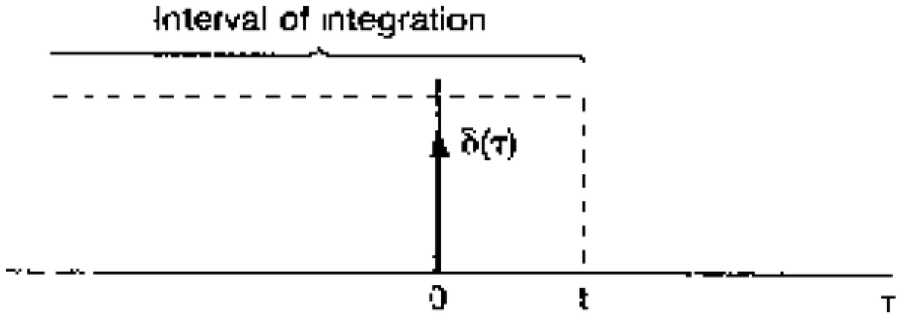
连续时间单位冲激

- 定义3：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

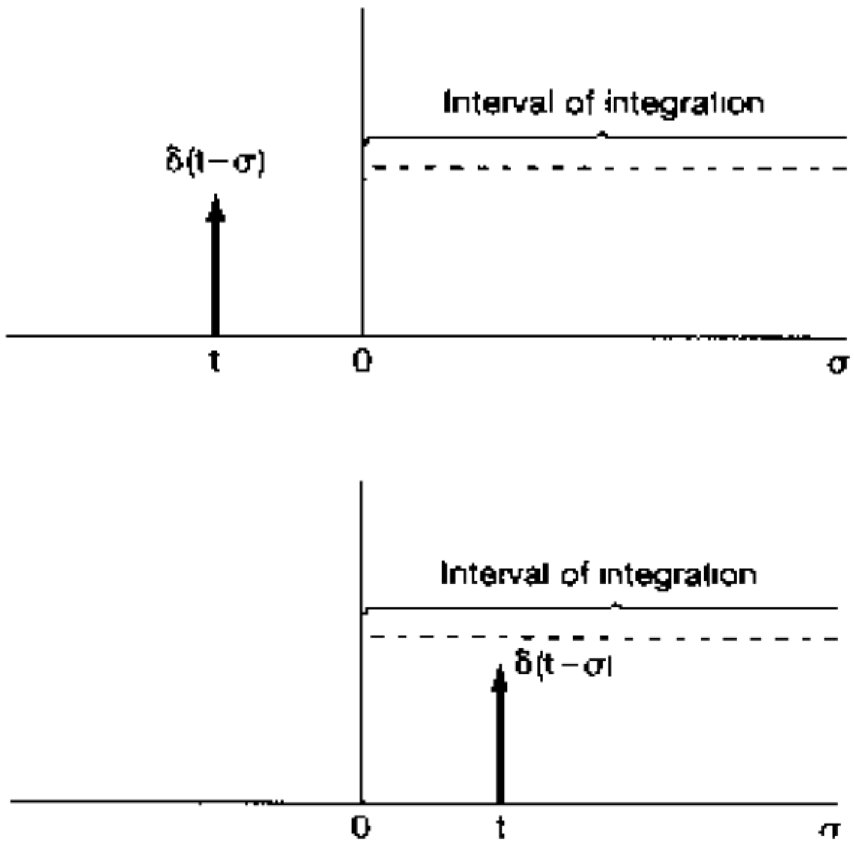
$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$





连续时间单位冲激

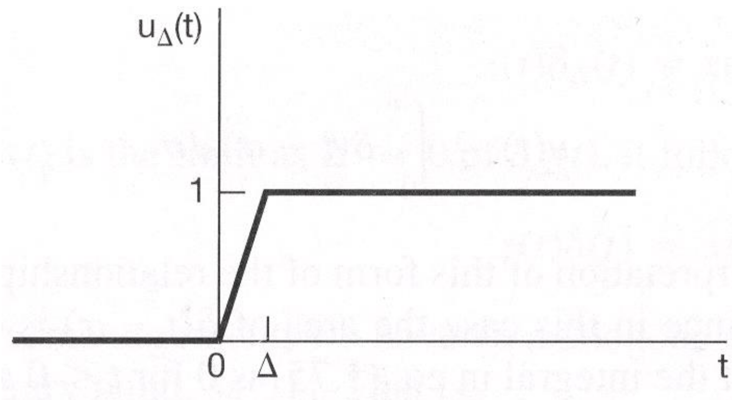
$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \quad \overset{\tau=t-\sigma}{\Longrightarrow} \quad u(t)=\int_{0}^{+\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$$



移动积分区间

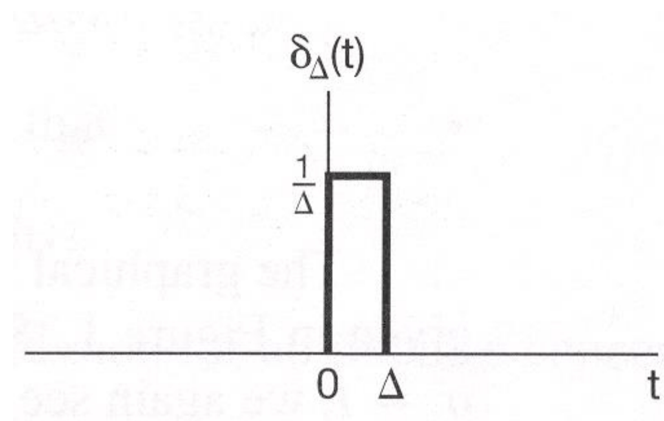
连续时间单位冲激

- 定义4：

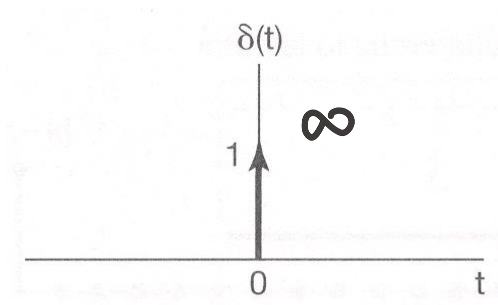


斜率极大

$$\delta_\Delta(t)=\frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

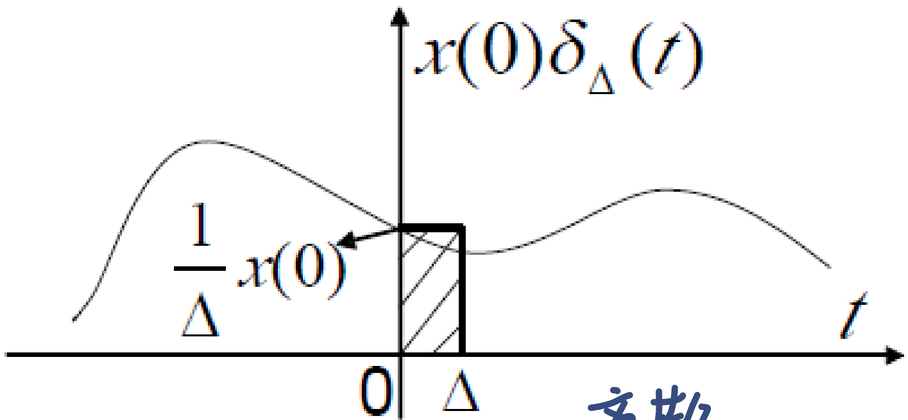


$$u(t)=\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t)$$



$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

冲激函数的筛选性质



磁带 模拟信号

2009 I touch 数字系统

$x(t_0)$

离散

20000 S 人耳已感受不到变化

(变形) 时间信号

那时间的冲激 ⊕ 那时间函数的 加和 ⇒ 连续

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = \underline{x(t_0)\delta(t-t_0)}$$

$$x(t)\delta(t_0-t) = \underline{x(t_0)\delta(t-t_0)}$$

反了无影响

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)\,dt$$

实际常数

上下限包 t_0 即可 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt = 1$

到一般化 $t=\tau, t_0=t$

冲击和

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

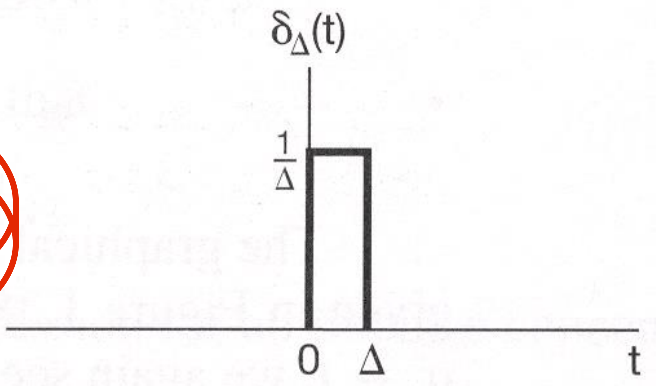
冲激函数的尺度变换性质

$$\boxed{\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)}$$

证明：

$$|a|\,\delta_\Delta(at)=\delta_{\Delta/a}(t)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(at)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{|a|}\delta_{\Delta/a}(t)$$



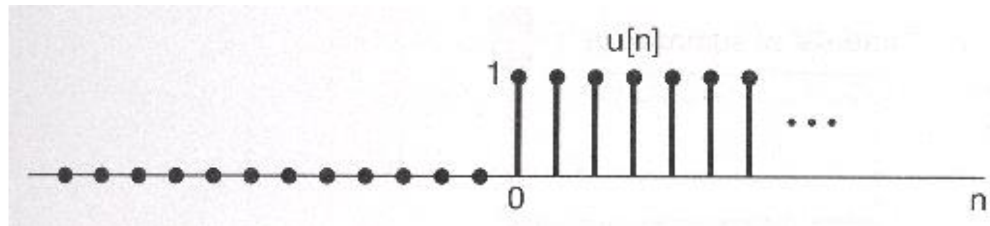
即：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

离散时间单位阶跃与单位脉冲

❖ 单位阶跃

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

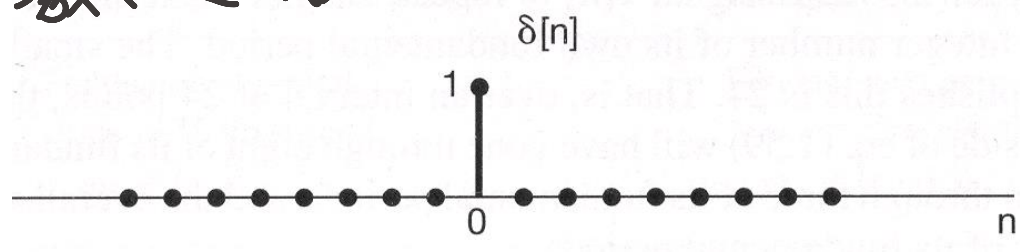


➢ 单位脉冲

离散

冲激(连续)

$$\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$



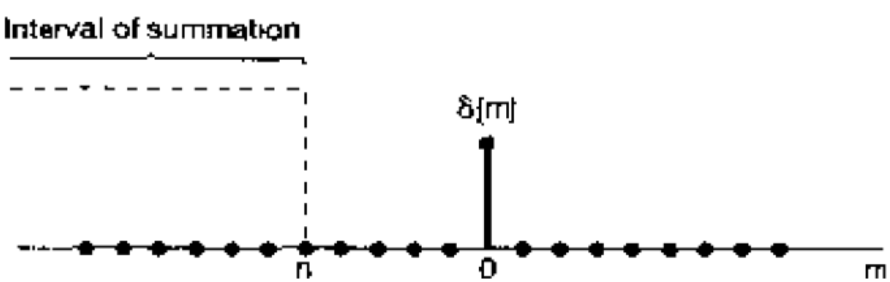
离散时间单位阶跃与单位脉冲

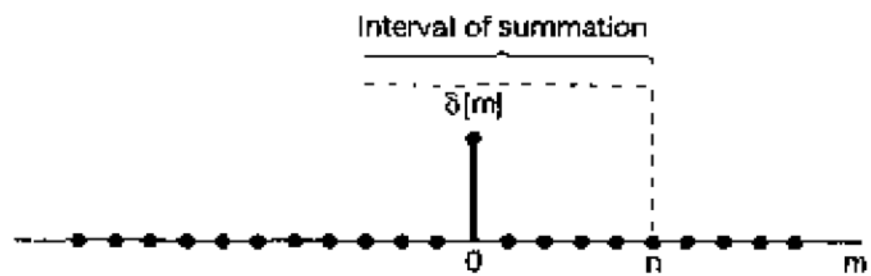
❖ 单位阶跃与单位脉冲的关系

一次差分

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m] \qquad u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$





离散时间单位阶跃与单位脉冲

❖ 单位脉冲的筛选性质

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

$$\Downarrow$$

$$x[n]\delta[n-k]=x[k]\delta[n-k]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]}$$

连续和离散时间阶跃与冲激的对比

定义： $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$	定义： $u[n]=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$
定义： $\delta(t)=\begin{cases}0 & t\ne 0\\ \infty & t=0\end{cases}$	定义： $\delta[n]=\begin{cases}0 & n\ne 0\\ 1 & n=0\end{cases}$
$\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$ $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$ $u(t)=\int_{0}^{+\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$	$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$ $u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$ $u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$
$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$	$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$

信号分解能力(卷积)
时域上最高分辨率

谢谢大家！

思考题（1）

已知连续时间信号 $x(t)$是一个周期函数，若对其采样得到一个离散时间序列 $x[n] = x(nT)$，问 $x[n]$是不是一个周期序列？当满足何种条件时 $x[n]$是一个周期序列，$x(t)$与 $x[n]$的周期具有何种关系？

思考题（1）

已知连续时间信号 $x(t)$是一个周期函数，若对其采样得到一个离散时间序列 $x[n]=x(nT)$，问 $x[n]$是不是一个周期序列？当满足何种条件时 $x[n]$是一个周期序列，$x(t)$与 $x[n]$的周期具有何种关系？

解答：假设 $x(t)$周期为 T_0。如果 $x[n]$为周期序列，并且周期为 N。那么，对于任意的 n，我们必然有

思考题（1）

已知连续时间信号 $x(t)$是一个周期函数，若对其采样得到一个离散时间序列 $x[n]=x(nT)$，问 $x[n]$是不是一个周期序列？当满足何种条件时 $x[n]$是一个周期序列，$x(t)$与 $x[n]$的周期具有何种关系？

解答：假设 $x(t)$周期为 T_0。如果 $x[n]$为周期序列，并且周期为 N。那么，对于任意的 n，我们必然有

$$x(nT+NT)=x[n+N]=x[n]=x(nT)$$

思考题（1）

已知连续时间信号 $x(t)$是一个周期函数，若对其采样得到一个离散时间序列 $x[n] = x(nT)$，问 $x[n]$是不是一个周期序列？当满足何种条件时 $x[n]$是一个周期序列，$x(t)$与 $x[n]$的周期具有何种关系？

解答：假设 $x(t)$周期为 T_0。如果 $x[n]$为周期序列，并且周期为 N。那么，对于任意的 n，我们必然有

$$x(nT + NT) = x[n + N] = x[n] = x(nT)$$

由此可得，存在某个整数 m 满足

$$nT + NT = nT + mT_0 \Rightarrow \quad NT = mT_0$$

思考题（1）

已知连续时间信号 $x(t)$是一个周期函数，若对其采样得到一个离散时间序列 $x[n]=x(nT)$，问 $x[n]$是不是一个周期序列？当满足何种条件时 $x[n]$是一个周期序列，$x(t)$与 $x[n]$的周期具有何种关系？

解答：假设 $x(t)$周期为 T_0。如果 $x[n]$为周期序列，并且周期为 N。那么，对于任意的 n，我们必然有

$$x(nT+NT)=x[n+N]=x[n]=x(nT)$$

由此可得，存在某个整数 m 满足

$$nT+NT=nT+mT_0 \Rightarrow \quad NT=mT_0$$

所以，如果 $x[n]$是一个周期序列，我们必然有T/T_0为有理数。

思考题（2）

为什么复指数函数和单位冲激是信号与系统中两类最为典型的函数?

思考题（2）

为什么复指数函数和单位冲激是信号与系统中两类最为典型的函数?

解答：分别代表时域与频域的最小筛选单位与最高分辨率。

谢谢