第十八讲
拉普拉斯变换

杜清河
西安交通大学
信息与通信工程学院

2025

本讲覆盖章节

- 9.0-9.3

内容提要

- 引言
- 拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的收敛域
- 拉普拉斯反变换

为什么要引入拉普拉斯变换

- 傅里叶变换成功用于LTI系统的分析
  - 傅里叶变换提供了将信号描述为复指数信号的线性组合的方法
  - 傅里叶变换提供了在频域表征系统和求解系统响应的工具
- 傅里叶变换的概念需要进行推广
- 对有些系统不能使用傅里叶变换进行分析

内容提要

- 引言
- 拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的收敛域
- 拉普拉斯反变换

拉普拉斯变换的定义

$$s = \sigma + j\omega$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

几点说明：

1) $X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$

2) 拉普拉斯变换仅对某些s的取值才是收敛的

$$\text{ROC} = \{s = \sigma + j\omega \text{ so that } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|\, dt < \infty\}$$

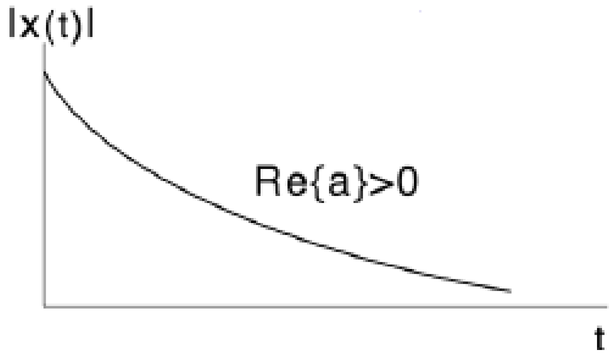
3) 如果$s=j\omega$在ROC内，则

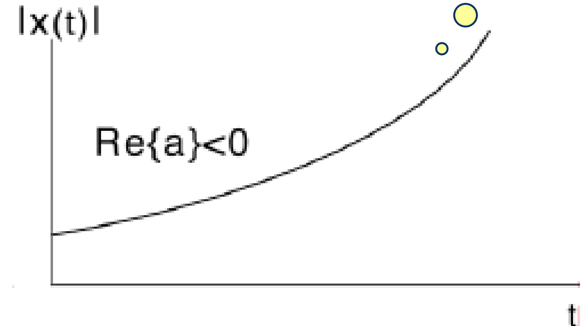
$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

拉普拉斯变换举例

傅里叶变换不存在

例1： $x(t)=e^{-at}u(t)$





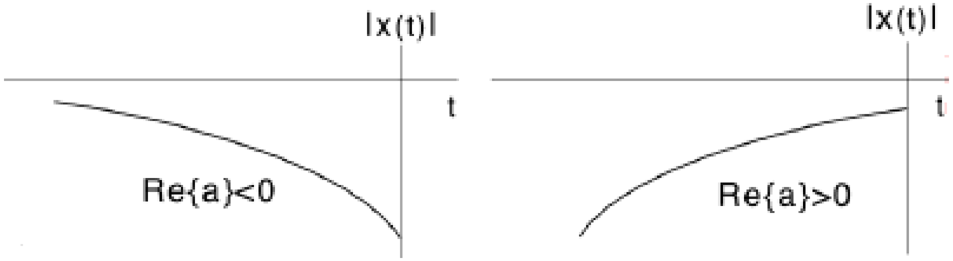
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{0}^{\infty} = -\frac{1}{s+a}[e^{-(s+a)\infty} - 1]$$

当 $Re(s+a)>0$ 时，上式收敛，且结果为：

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \underbrace{\Re e\{s\} > -\Re e\{a\}}_{\mathrm{ROC}}$$

拉普拉斯变换举例



例2： $x(t)=-e^{-at}u(-t)$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt \\
&= +\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}\left[1-e^{(s+a)\infty}\right]
\end{aligned}
$$

当 $Re(s+a)<0$ 时，上式收敛，且结果为：

$$
X(s)=\frac{1}{s+a},\quad \underbrace{\Re e\{s\} < -\Re e\{a\}}_{\text{ROC}}
$$

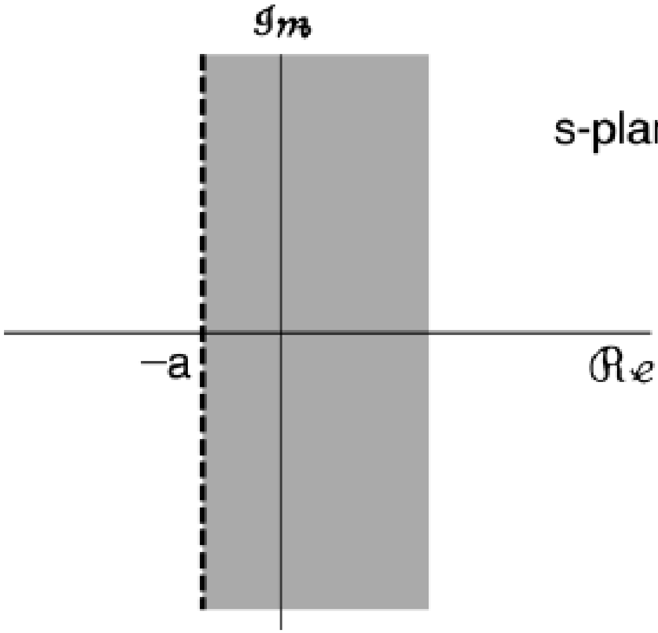
ROC的几何表示

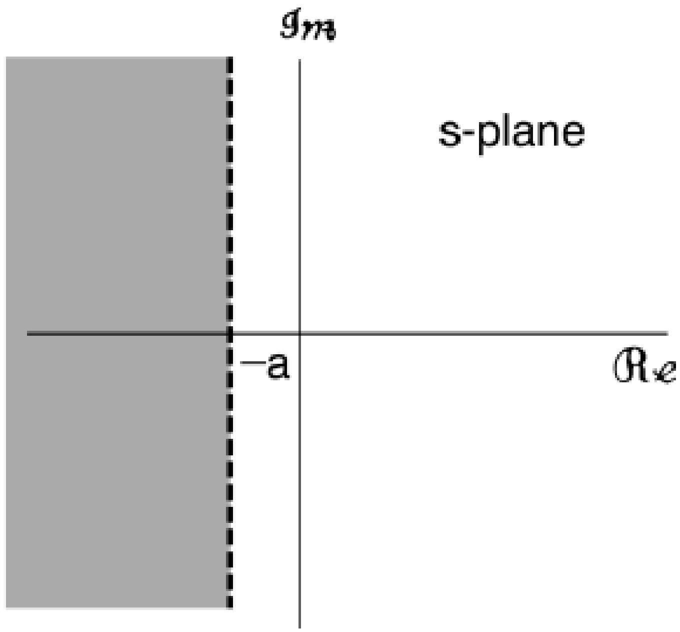
$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x_1(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$$





有理变换

- 很多信号的拉普拉斯变换都具有有理分式的形式：

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

其中：

$N(s)$的根——$X(s)$的零点

$D(s)$的根——$X(s)$的极点

- 只要$x(t)$是实指数或复指数信号的线性组合，那么$X(s)$就一定是有理的。

有理变换

$$x(t) = 3e^{2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

$$X(s) = \int_0^\infty [3e^{2t} - 2e^{-t}]e^{-st}dt$$

$$= 3\int_0^\infty e^{-(s-2)t}dt - 2\int_0^\infty e^{-(s+1)t}dt$$

Re{s}>2

Re{s}>-1

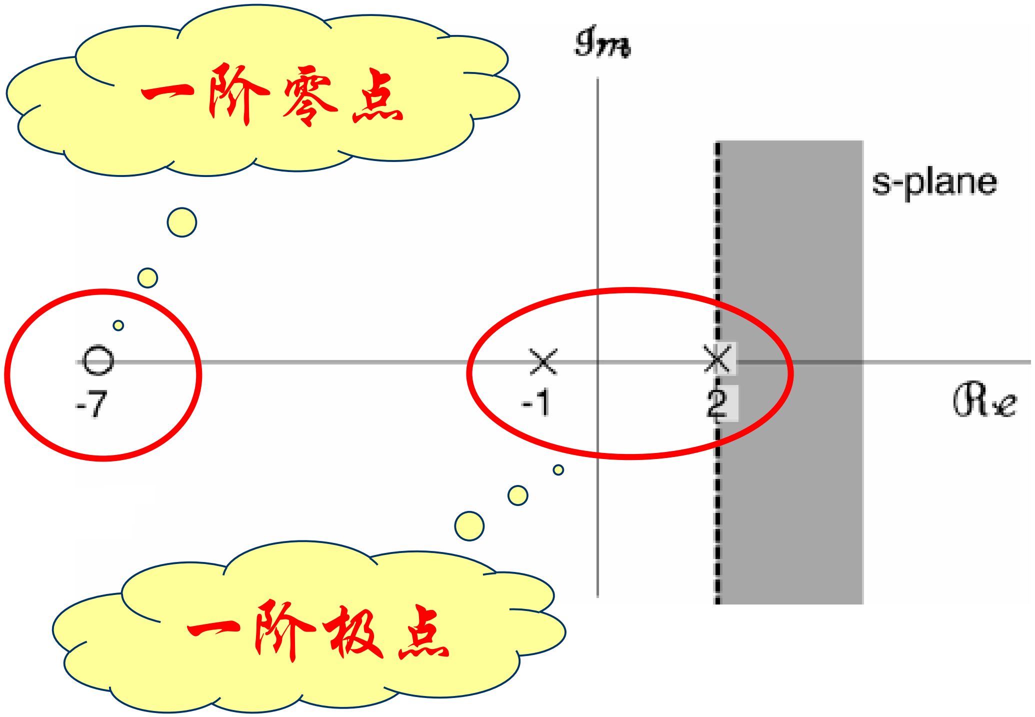
$$X(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s+7}{(s-2)(s+1)} = \frac{s+7}{s^2-s-2} \quad \boxed{\Re e\{s\} > 2}$$

该信号不存在傅里叶变换

有理变换

$$x(t) = 3e^{2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

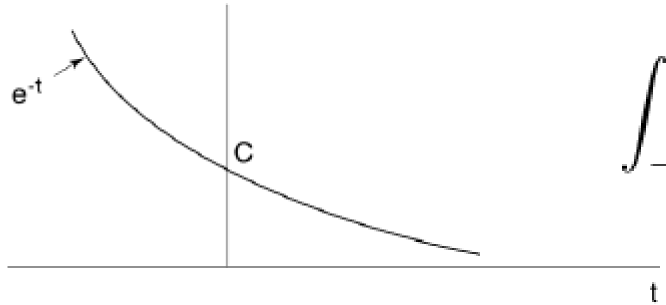
$$X(s) = \frac{s+7}{s^2 - s - 2} \qquad \Re e\{s\} > 2$$



除了一个常数因子之外，一个有理拉普拉斯变换可以完全由其**零极点图**和**收敛域**决定

不存在拉普拉斯变换的例子

- 例1： $x(t) = Ce^{-t}$



$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt = \infty$$

- 例2： $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t}dt = \infty$$

$X(s)$只能定义在ROC内，不允许在其表达式中存在冲激

内容提要

- 引言
- 拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的收敛域
- 拉普拉斯反变换

拉普拉斯变换收敛域的性质

性质1：$X(s)$的ROC由s平面内平行于$j\omega$轴的带状区域所组成。

使得拉普拉斯变换收敛的s应满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)e^{-\sigma t}\right| dt < \infty$$

只与s的实部有关

拉普拉斯变换收敛域的性质

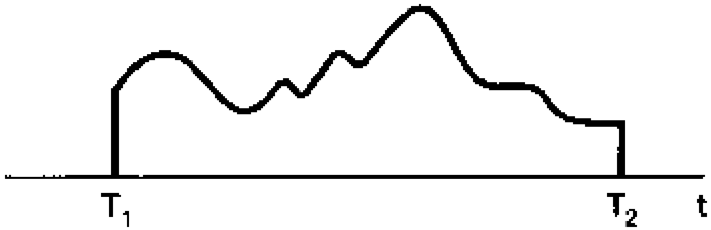
性质2：对有理拉普拉斯变换来说，ROC内不包含任何极点。

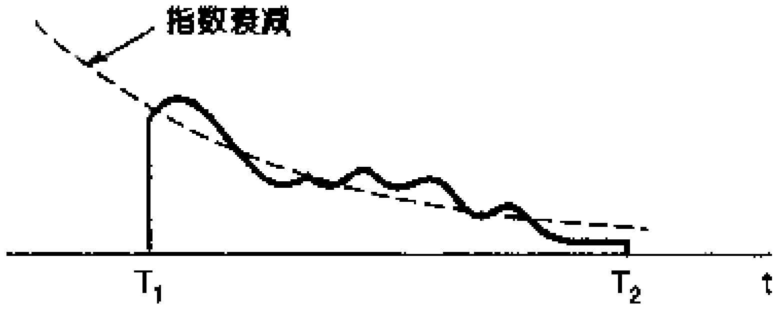
极点： ⇒ $D(s)=0$

⇒ $X(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\infty$

拉普拉斯变换收敛域的性质

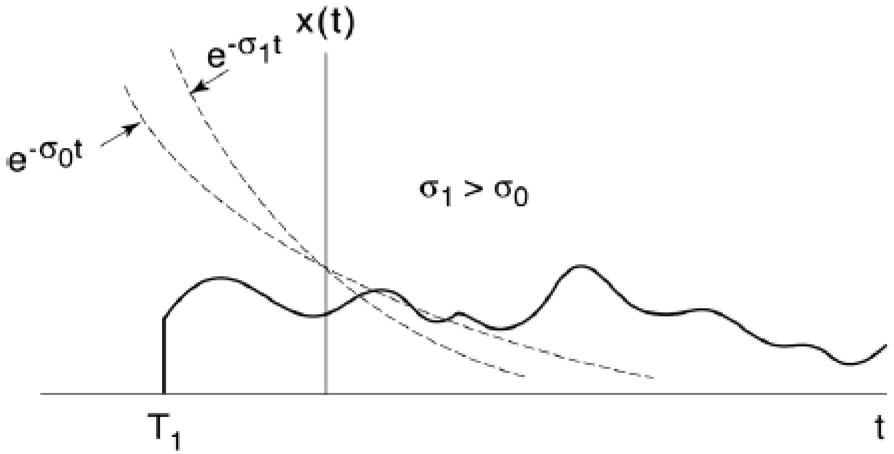
性质3：如果$x(t)$具有有限持续期，并且是绝对可积的，那么ROC就是整个s平面。

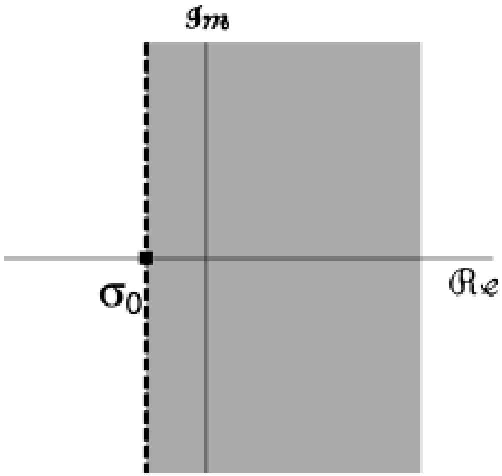




拉普拉斯变换收敛域的性质

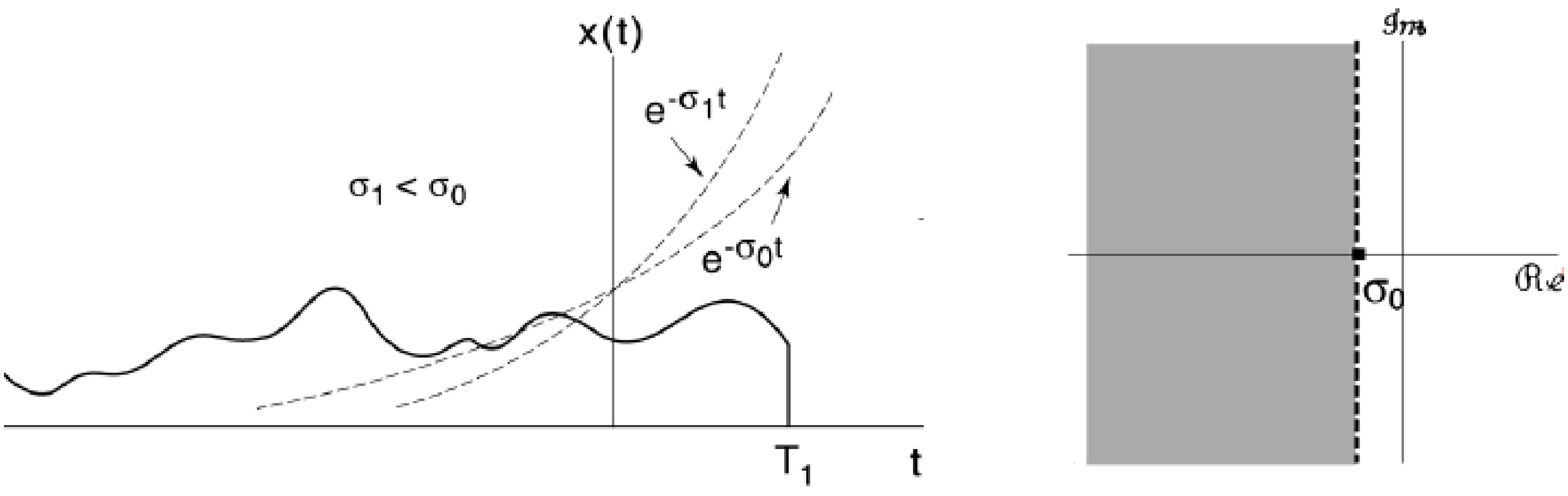
性质4：如果$x(t)$是右边信号，而且$\Re e\{s\}=\sigma_0$这条线在ROC内，那么$\Re e\{s\}>\sigma_0$的全部s值都一定在ROC内。





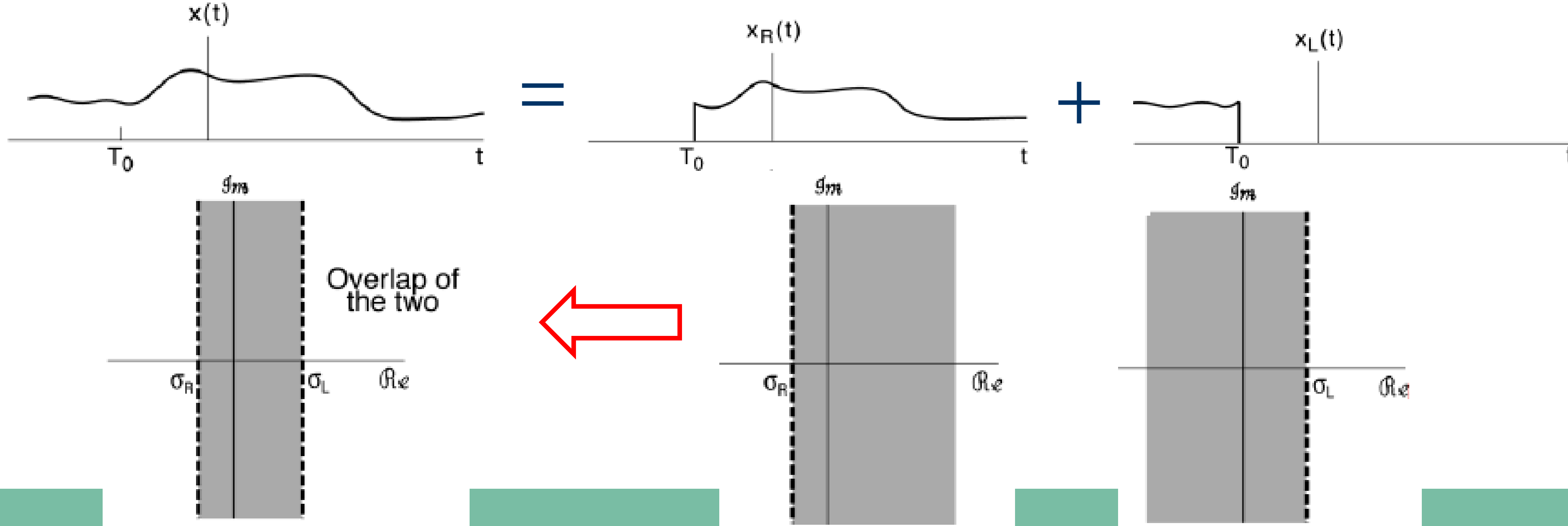
拉普拉斯变换收敛域的性质

性质5：如果$x(t)$是左边信号，而且$\Re e\{s\}=\sigma_0$这条线在ROC内，那么$\Re e\{s\}<\sigma_0$的全部s值都一定在ROC内。



拉普拉斯变换收敛域的性质

性质6：如果$x(t)$是双边信号，而且$\Re e\{s\}=\sigma_0$这条线在ROC内，那么ROC就一定是由s平面内的一个带状区域所组成，且直线$\Re e\{s\}=\sigma_0$位于带中。



性质6举例

$$x(t)=e^{-b|t|}$$

可以将该信号分解为右边信号与左边信号之和，即：

$$x(t)=e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t)$$

$$X_1(s)=\frac{1}{s+b},\quad \Re e\{s\}>-b \qquad X_2(s)=\frac{-1}{s-b},\quad \Re e\{s\}<b$$

当$b\le 0$时，没有公共的收敛域，因此拉普拉斯变换不存在；当$b>0$时，

$$X(s)=\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s-b}=\frac{-2b}{s^2-b^2},\quad -b<\Re e\{s\}<b$$

拉普拉斯变换收敛域的性质

性质7：如果$x(t)$的拉普拉斯变换$X(s)$是有理的，那么它的ROC是被极点所界定或者延伸到无穷远。另外，在ROC内不包含$X(s)$的任何极点。

拉普拉斯变换收敛域的性质

性质8：假设$x(t)$的拉普拉斯变换$X(s)$是有理的。若$x(t)$是右边信号，则其ROC在s平面上位于最右边极点的右边；若$x(t)$是左边信号，则其ROC在s平面上位于最左边极点的左边。

拉普拉斯变换收敛域的性质

性质9：如果$x(t)$的拉普拉斯变换$X(s)$的ROC包含$j\omega$轴，则$x(t)$的傅里叶变换存在。

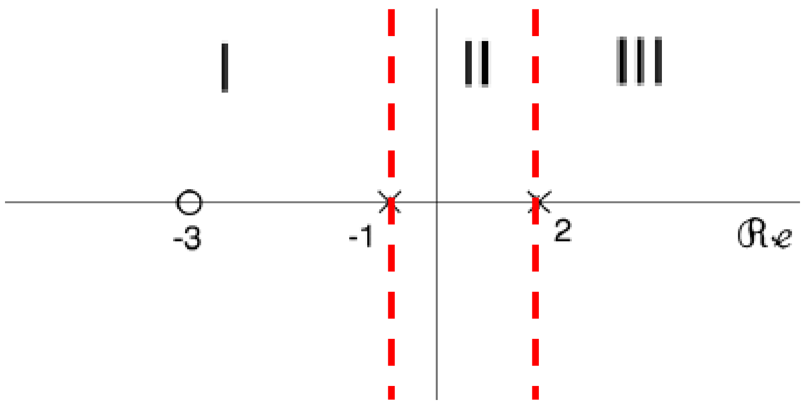
举例

已知$x(t)$的拉普拉斯变换$X(s)$为：

$$X(s)=\frac{(s+3)}{(s+1)(s-2)}$$

哪种情况傅里叶变换存在？

问有多少种可能的$x(t)$?



I: 左边信号

II: 双边信号

III: 右边信号

举例

已知一个绝对可积的信号$x(t)$，其拉普拉斯变换是有理的，且有一个极点在s=2。

a) $x(t)$可能是有限持续期的么？ ×

b) $x(t)$可能是左边信号么？ √

c) $x(t)$可能是右边信号么？ ×

d) $x(t)$可能是双边信号么？ √

内容提要

- 引言
- 拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的收敛域
- 拉普拉斯反变换

拉普拉斯反变换

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s=\sigma+j\omega \in \ \mathrm{ROC} \\ &= \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \end{aligned}$$

对于ROC内的任意$s=\sigma+j\omega$，根据傅里叶反变换公式，可得：

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

拉普拉斯反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

由于$s=\sigma+j\omega$，因此对于给定的σ，$ds=jd\omega$，故：

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds}$$

拉普拉斯反变换的公式表明，信号$x(t)$可以被分解为复振幅为$\frac{1}{2\pi j}X(s)ds$的复指数信号e^{st}的线性组合

拉普拉斯反变换的计算

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)}$$

一般可以展开
或常用变换对

解：

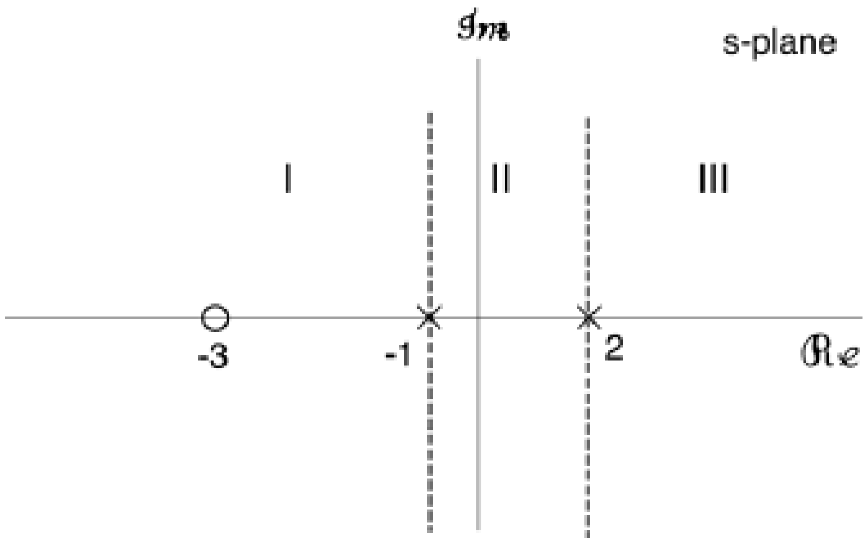
$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} \qquad A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{5}{3}$$

根据之前已经求出的结果，我们有：

$$\frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} < -a \longleftrightarrow -e^{-at}u(-t)$$

$$\frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -a \longleftrightarrow e^{-at}u(t)$$

拉普拉斯反变换的计算



区域I：

$$x(t) = -Ae^{-t}u(-t) - Be^{2t}u(-t)$$

区域II：

$$x(t) = Ae^{-t}u(t) - Be^{2t}u(-t)$$

区域III：

$$x(t) = Ae^{-t}u(t) + Be^{2t}u(t)$$

谢谢大家！