# 第三章 集合

$A \subseteq B \Rightarrow A' \cup B = X$

循环证法：只讲怎么前后证.

① 使用等式条件，其中夹用前条件式

$$
\begin{aligned}
A' \cup B &= A' \cup (A \cup B) && (\overset{\text{使用条件}}{A \cup B = B}) \\
&= X \cup B && (\text{结合律}) \\
&= X
\end{aligned}
$$

② 包含法：$A' \subseteq X \quad B \subseteq X$.

则 $A' \cup B \subseteq X$ 下证 $X \subseteq A' \cup B$.

$\because \boxed{A \subseteq B} \quad \therefore A' \supseteq B'$.

$\therefore A' \cup B \supseteq B' \cup B$.

$\therefore A' \cup B \supseteq X$

$\therefore A' \cup B = X$

(2). 证. $A' \cup B = X \Rightarrow A \cap B' = \phi$.

法1. 互补

法1这种有技巧靠观察

$A' \cup B = X$

$\overline{A' \cup B} = X'$ (De Morgan

$A \cap B' = X' = \phi$ (0-1律)

法2 正面论证(行不通)

(3) $A\cap B'=\phi \Rightarrow A\subseteq B$.

① 正面证. $A = A\cap X$

$= A\cap(B\cup B')$ (互补律)

$= A\cap B \cup \underbrace{A\cap B'}_{\phi}$

$\therefore A = A\cap B \Rightarrow A\subseteq B$

证: 也可以开局一个B、 $B = B\cup\phi$

$= B\cup(A\cap A')$ (互补)

$= (B\cup A)\cap(B\cup A')$

$= B\cup A$

② 配凑法

$B = B\cup\phi = B\cup(A\cap B')$

$= (B\cup A)\cap(B\cup B')$

$= B\cup A\cap X$

$= B\cup A$ 同①

一般和X φ 拼凑有潜在规则的.

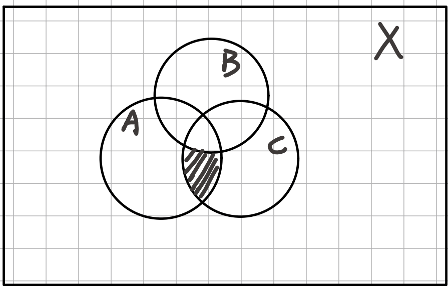
证大集一般证 $A\cap B=A$ (小) 或 $\underline{B\cup A=B}$ (大)

所以开局一把刀时 $B\cup\phi$ 不要并X

---

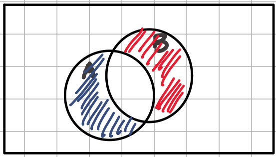
不用易产生歧义的表达!!!

$A\cap C\setminus B$ 是最优解 or $A\cap C\setminus(A\cap B\cap C)$? 有点复杂了



复习 环和环积+成员表

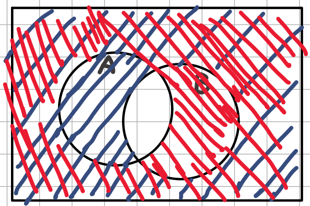
$A \oplus B = \{x \mid$ 是A却B' 或 是B却A'的 $\}$ (对称差)



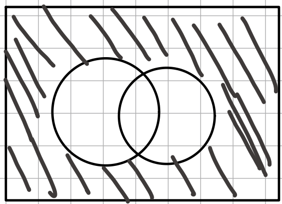
$A\oplus B=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$

$A\otimes B=(A\cup B')\cap(B\cup A')$

$A \otimes B = \{x \mid$ 是A或B' 同时是B或A'



红蓝交叉处



$A\otimes B$

成员表. 元素x 0 不属 1 属于

---

证 $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C)$ (环和结合律)

| A | B | C | $A\oplus B$ | $(A\oplus B)\oplus C$ | $B\oplus C$ | $A\oplus(B\oplus C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

左边是一些组合运算 以便层序操作

从中发现一些规律吧!

$\begin{cases} 1+1=0 \\ 0+1=1 \end{cases}$ 环和规律

证明相等. 则是 你我全有

证明包含: 则是 你有我也有, 你没我也有

证：$(A\cup B)\cap(B\cup C)' \subseteq A\cap B'$

| A | B | C | $A\cup B$ | $B\cup C$ | $(B\cup C)'$ | (右) $A\cap B'$ | (左) $(A\cup B)\cap(B\cup C)'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$A\otimes(B\otimes C) = (A\otimes B)\otimes C$

| A | B | C | $B\otimes C$ | $A\otimes B$ | 左 $A\otimes(B\otimes C)$ | 右 $(A\otimes B)\otimes C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$A\otimes B = (A\cup B)\wedge(B\cup A')$

$$\begin{cases} 1+1=1 \\ 0+1=0 \\ 0+0=1 \end{cases}$$

环积规律

# 第四章：部分定理手搓

$R_1, R_2 \subseteq A \times B$.

证 $\mathcal{D}(R_1 \cup R_2) = \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2)$

基本方向. $\begin{cases} \mathcal{D}(R_1 \cup R_2) \subseteq \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2) \\ \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2) \subseteq \mathcal{D}(R_1 \cup R_2) \end{cases}$

符号也要练
$\mathcal{D}(\ )$
$\mathcal{R}$

①

$\forall a \in \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$, $\exists b$ s t $(a,b) \in (R_1 \cup R_2)$ (前域定义)

$(a,b) \in R_1$ 或 $(a.b) \in R_2$ 核心处. b一样. 那么 a 在 R. $R_2$ 的前域并集上

$\Rightarrow a \in \mathcal{D}(R_1)$ 或 $a \in \mathcal{D}(R_2)$

$\Rightarrow a \in \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2)$. $b \in R_1$ 且 $b \in R_2$ 是不重要的.

由 a 任意性 $\mathcal{D}(R_1 \cup R_2) \subseteq \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2)$.

② 想证 $\forall a \in \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2)$, 有 $a \in \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$

与①不同. ①是 $(a,b) \in R_1 \cup R_2$ 故 b 可以只取一个.
但目前. $a \in \mathcal{D}(R_1)$ 或 $a \in \mathcal{D}(R_2)$ 则 b 也应分开讨论.

$\exists b_1 \in \mathcal{R}(R_1)$ $(a, b_1) \in R_1$ (或) 则 $(a, b_1) \in R_1$ 或 $(a, b_2) \in R_2$,

$\exists b_2 \in \mathcal{R}(R_2)$ $(a, b_2) \in R_2$

设 $(a, b_1) \in R_1$ 由并集定义 $(a, b_1) \in R_1 \cup R_2$ (很简单. 越并越大)

$a \in \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$.

设. $(a, b_2) \in R_2$ 又有 $(a, b_2) \in R_1 \cup R_2$.

$\therefore a \in \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$

再细心点.. 现在可知 $\mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2) \subseteq \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$

然后才有最终结论.

"或"很重要. 有时根据或要分类讨论情况可能得到类似的结论. 从判断命题成立.

# 复合关系证明思路

$R, R_1, R_2 \subseteq A\times B$　$S, S_1, S_2 \subseteq B\times C$.　$T \subseteq C\times D$

证 $\mathcal{D}(R\circ S) \subseteq \mathcal{D}(R)$.

$\forall a \in \mathcal{D}(R\circ S)$　从后域总集 $C$ 中 $\exists\, c \in C$.

$(a,c) \in R\circ S$　从中介域 $B$ 中 $\exists\, b$ 使 $(a,b)\in R$, $(b,c)\in S$

复合关系定义 有中介.

$(a,b) \in R$, $a \in \mathcal{D}(R)$

$a$ 任性 $\Rightarrow$. $\mathcal{D}(R\circ S) \subseteq \mathcal{D}(R)$.

## 注意位置!

证. $\widehat{R\circ S} = \hat{S}\circ\hat{R}$　($\hat{S}, \hat{R}$ 位置不应互换)

$\forall (c,a) \in \widehat{R\circ S}$　$\because (a,c) \in R\circ S$

$\therefore \exists\, b\in B$　$(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in S$.

$\therefore (b,a) \in \hat{R}$ 且 $(c,b) \in \hat{S}$

只有 $\hat{S}\circ\hat{R}$ 才有 $(c,a)$ 否则是 $(b,b)$.

## 证一些等价类

$R$ 为 $A$ 上等价　$\forall a,b$ 证

(1) $a \in [a]_R$.　(2). $(a,b)\in R$ 当且仅当 $[a]_R = [b]_R$

(3) $[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$. $\therefore [a]_R = [b]_R$

(4) $\bigcup_{a\in A} [a]_R = A$ (划分)

实际上. (3) 的证明可以 (2) 展开 能证 $(a,b)\in R$ 即可.

证. 等价关系 $\Rightarrow$ 自反 $\Rightarrow \forall a \in A$　$(a,a)\in R$　$\therefore a \in [a]_R$.

思路. 想找等价类中的一个元素 就应找 $\{b \mid (b,a)\in R\}$ 中的 $b$

实际上. $R$ 是个抽象的等价. 只有 $(a,a)$ 是已知元素.

也只可用 $(a,a)$

(2) 必要 $[a]_R = [b]_R \Rightarrow (a,b)\in R$. (有 $a \in [a]_R$)

若 $[a]_R = [b]_R$, 则含 $b$ 的二元组 eg $(a,b)\in R$ (等价类定义)

实际上 $(b,a)\in R$..

$(a,b)\in R$.

充分 $[a]_R \subseteq [b]_R$

$a$ 过于特殊. 则 $\forall x \in [a]_R$ 有 $(x,a)\in R$ (等价类)

又 $\because (a,b)\in R$. $\xrightarrow{传递}$ $(x,b)\in R \Rightarrow x \in [b]_R$.

$x$任性 $\Rightarrow$ $[a]_R \subseteq [b]_R$ （同理 $[a]_R \supseteq [b]_R$）.

(b) $[a]_R \subseteq [b]_R$ $\because$ $[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$

$x \in [a]_R \cap [b]_R$. 存 $x \in [a]_R$ 且 $x \in [b]_R$

有 $(x,a) \in R$ 且 $(x,b) \in R$.

由对称. $(a,x) \in R$ $\xRightarrow{传递}$ $(a,b) \in R$ $\xRightarrow{(2)}$ $[a]_R = [b]_R$.

(4) ① $\bigcup_{a\in A} [a]_R \subseteq A$

$x \in \bigcup_{a\in A} [a]_R$ $\exists$至少$[a]_R$ $x \in [a]_R$. $[a]_R \subseteq A$.

$\therefore$ $x \in A$. $\therefore$ $\bigcup_{a\in A} [a]_R \subseteq A$

② $A \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]_R$.

$x \in A$ $\because$ $x$必然存于某个等价类. 即 $x \in [x]_R$

$\exists a$，使 $x \in [a]_R$.（才并定义，存在 $a$. 让 $x \in [a]_R$）

$\therefore$ $A \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]_R$

才并原定义

$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$

$= \{x \mid (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)\}$

## 若环和出现在证明，怎么办？

P131 4(3) $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$

环和布尔原则 $\begin{cases} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+1=0 \end{cases}$ A无 B无则 $A\oplus B$无
即 A中有. B中没这个 则 $A\oplus B$有
A有 B有. 则 $A\oplus B$无

环积 $\begin{cases} 1+1=1 \\ 0+1=0 \\ 0+0=1 \end{cases}$

$(A' \cup B) \cap (A \cup B')$

课本反例 $A=\{a\}$ $B=\{b\}$ $C=\{a\}$ $D=\{b\}$

$A \oplus B = \{a,b\}$. $C \oplus D = \{a,b\}$. 这是对布尔法则的推理

$(A\oplus B) \times (C \oplus D) = \{(a,a)(a,b),(b,a)(b,b)\}$

$A \times C = \{(a,a)\}$ $B \times D = \{(b,b)\}$

显然. $(a,b) \notin (A\times C) \oplus (B \times D)$ 证毕

若举例发现成立. 才考虑去证明等式

4(5) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

实际是对 $\oplus$ 运算加深理解

$\forall (x,y) \in (A\oplus B) \times C$ 有 $x \in (A \oplus B)$ 且 $y \in C$（定义·叉积）

则 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 且 $y \in C$ 或 $x \in B$ 且 $x \notin A$ 且 $y \in C$

$\Leftrightarrow$ $(x,y) \in (A \times C)$ 且 $(x,y) \notin (B \times C)$

或

$(x,y) \in (B \times C)$ 且 $(x,y) \notin (A \times C)$ （还是定义）

$\Leftrightarrow$ $(A \oplus B) \times C \subseteq (A \times C) \oplus (B \times C)$

反过来一样

# 逻辑与元素法结合证明前后域关系

(1) $\mathcal{D}(R_1 \cup R_2) = \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2)$ 有时不应把话写死了

(2) $\mathcal{R}(R_1 \cap R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2)$

(1) $\mathcal{D}(R_1 \cup R_2) \subseteq \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2)$

这么写不好 $\forall (x,y) \in R_1 \cup R_2$ 即 $(x,y) \in R_1$ 或 $(x,y) \in R_2$

$\Leftrightarrow$ $x \in \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$ $\Leftrightarrow$ $x \in \mathcal{D}(R_1)$ 或 $x \in \mathcal{D}(R_2)$

$\Leftrightarrow$ $x \in \mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2)$ (虽然这样相当于直接拿下)
因为反过来证法一样

运用定理 $\begin{cases} A \subseteq C \text{ 且 } B \subseteq C \text{ 则 } A \cup B \subseteq C \\ C \subseteq A \text{ 且 } C \subseteq B. \text{ 则 } C \subseteq A \cap B \end{cases}$ 不要把前域看太特殊

$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$. $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$.

$\because \mathcal{D}(R_1) \subseteq \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$ $\mathcal{D}(R_2) \subseteq \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$

$\mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_2) \subseteq \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$

反过来证时. $\mathcal{D}(R_1) \cup \mathcal{D}(R_1) \supseteq \mathcal{D}(R_1 \cup R_2)$ 与刚刚是不可逆的

则用元素法 $\forall (x,y) \in R_1 \cup R_2$

$\boxed{\text{用粉记号}}$

---

(1) 证明实例等价类 (自反, 对称, 传递)

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $A \times A$ 上 $R$

$R = \{((a,b),(c,d)) \mid a,b,c,d \in A \wedge a+d = b+c\}$

① 自反: 证明 $\forall (a,b) \in A \times A$ 有 $((a,b),(\underset{c}{a},\underset{d}{b}))$ 存在即可.

先从 $a+d=b+c$ 入手

$\because a+\underset{d}{b} = b+\underset{c}{a}$ (交换律)

$\therefore (a,b)\, R\, (a,b)$ $\therefore$ 自反成立.

② 对称 证 $\forall ((a,b),(c,d)) \in R$ 必有 $((c,d),(a,b)) \in R$

$\Downarrow$

$c+b = d+a$.

$\because a+d = b+c$

$b+c = a+d$ (交换等号)

$c+b = d+a$ (交换律) 越简单越应严谨

$\therefore (c,d)\, R\, (a,b)$

③ 传递 $\forall ((a,b),(c,d))$ ① $\forall ((c,d),(e,f))$ ② $\exists ((a,b),(e,f))$ ③

①+② $a+f = b+e \Rightarrow$ ③ 得证.

(2) 求 $[(2,5)]_R$ 则对于类内 $\forall (c,d)$

有 $2+d=5+c$ $\therefore$ $d-c=3$.

则 $\{(6,9)(5,8)(4,7)(3,6)(2,5)(1,4)\}$ 是.

(3) 不对. R是二元关系为元素的关系

R 为 $A\times A$ 上. $R\subseteq(A\times A)^2$

26 证 $R_1$ $R_2$ 均为等价关系. $R_1$ $R_2\subseteq A\times A$

(1) $R_1^2$ 是吗? (2) $R_1\circ R_2$ 呢? 采用传统证法

① $R_1^2$ 是自反的吗?

$R_1^2=R_1\circ R_1$ 则对 $\forall a\in A$ $R_1$ 首先自反. 传递

$(a,a)\in R_1$ $\Rightarrow$ $(a,a)\in R_1\circ R_1$

由 $a$ 任意, $R_1^2$ 自反

② $R_1^2$ 对称? $\forall a,b\in A$ $(a,b)\in R_1$

则自反. $(a,a)$, $(b,b)\in R_1$ 对称, $(b,a)\in R_1$

$(a,b)\in R_1^2=R_1\circ R_1$

$(b,a)\in R_1^2$

③ $R_1^2$ 传递? 首先 $R_1$ 传递

$(a,b)\in R_1$ $\exists$ $c\in A$ $(a,c)\in R_1$ 且 $(c,b)\in R_1$

$R_1$ 的自反. $(c,c)\in R_1$ $(a,c)\in R_1^2$

$(a,a)\in R_1$ 同理 $(a,b)\in R_1^2$

# 第六章：代数系统

凑代数式（群）幺元与位是关键

证明：已知$\langle G,*\rangle$为群，证：其为交换群的充要条件为：$(a*a)*(b*b)=(a*b)*(a*b)$。

这样的套路题应回归本原，证$*$满足交换则仍应从$a*b \stackrel{?}{=} b*a$起手。

必要性太简单
交换群太强大

但$a*b$拿到手时，发现东西太少了。

则应用幺元$e=a*a^{-1}=a^{-1}*a$拓展元素，让其凑出命题所述形式

这题显然得补2个$e$，看等式可知$a, b$均出现2次！

$\therefore a*b=e*a*b*e$ （思考为什么后面凑不出来）

$=a^{-1}*a*a*b*b*b^{-1}$

$=a^{-1}*(a*b)*(a*b)*b^{-1}=b*a$ （运用多次结合律）

因为$b*a$换一起，而$e$拆必有$b^{-1}/a^{-1}$出现，不可任意交换！