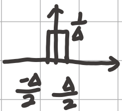
与卷积的不解之缘(可优化问题)

经历多次挫折，我打算开这一个栏目，专门手写我对概念的解释，争取使可读性能让新人读懂

① 面积的合成

$\delta(t)$



$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)=1$ $\qquad \delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\Delta}{2}<t<\frac{\Delta}{2}\right)\\ 0\quad 其他\end{cases}$

② $x(t)$的复原.

$x(t)$ 是一根线，看做无数“横线合成”

它不是 $\int x(t)dt$（否则是整个面积）

$x(t)=x(t)\Delta\,\delta(t)$

恒等式

$\delta(t)$筛选后乘个Δ，表示完全等效

那么远一点？ $\boxed{K\Delta=t}$ $\quad x(K\Delta)=x(K\Delta)\,\Delta\,\delta(t-K\Delta)$ → $X(t)$分割了

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(K\Delta)\,\Delta\,\delta(t-K\Delta)$$

视KΔ为一个变量，Δ→dΔ 但KΔ是显著的，变化的

$\Delta\to 0$, $\Delta\to d\Delta$. $\quad x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\Delta)\,\delta(t-\Delta)\,d\Delta$

就有了熟知的 $x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$

$\delta(t-\tau)$ 筛选，采样点

$x(\tau)\Delta\tau$ 权重

$x(t)$是单位冲激·$x(t)$权重移位后的全时域“综合”

③ $h(t)$单位冲激响应来由

主角 $x(t)\to h(t)$

$\delta(t-\tau)\to x(t)$

在 $x(t)=x(t)*\delta(t)$ 中，改写为. $\quad y(t)=h(t)*x(t)$

响应（输出） 输入 系统

④ what about $h(t)*x(t)$. $h(t)$不是冲激？

$h(t)$是一个“$y(t)$”当且仅当输入$x(t)=\delta(t)$。

$h(t)$具体到输入$x(K\Delta)$有个权重与之相乘

又 $h_{k\Delta}(t)\Delta$.（把 $h_{\Delta k}(t)$ 看作 $\delta(t-k\Delta)$ 和 $\delta(t-\Delta k)\Delta=1$ 一样）

$\therefore\ y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\cdot h_{k\Delta}(t)\Delta.$

$\Delta\to\infty$ $\quad y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\Delta)\cdot h_{\Delta}(t)d\Delta$

含义. 在 Δ 处 $x(t)\big|_{t=\Delta}$ 与权 $h_\Delta(t)\big|_{t=\Delta}$ 相乘为 $y(\Delta)$ 后"综合"

$x(\Delta)d\Delta$ 也成了 $h_\Delta(t)$ 的权

LTI. $h_\Delta(t)=h(t-\Delta)$

含义 系统对 $\delta(t-\Delta)$ 响应 = 对 $\delta(t)$ 响应后时移

"先时移后系统 = 先系统后时移"

⑤ 用于解题？ $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

$h(t)=u(t)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\Delta)\,h_\Delta(t)d\Delta$$

首先 $u(t)$ 特殊.

$$y(t)=\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha\Delta}\cdot 1\cdot h_\Delta(t)\,d\Delta$$

其中 $h_\Delta(t)=1$（目前为止）

$$y(t)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha\Delta}d\Delta=-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

⑥ 图解一个卷积 + 定义法

$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & else\end{cases}$ $\quad h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & else\end{cases}$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\Delta)\,h_\Delta(t)\,d\Delta$$

$$=\int_0^T x(\Delta)\,h_\Delta(t)d\Delta$$

$$=\int_0^T 1\,h(t-\Delta)d\Delta$$

$h(t-\Delta)$ 表对 $\delta(t)$ 响应后时移 Δ

在计算上 因为自变为Δ t作常数

$\int_0^T h(t-\Delta)d\Delta$ 的计算自然按翻转时移

$$h(\Delta)=\begin{cases}\Delta & 0<\Delta<2T \\ 0 & else\end{cases} \quad h(-\Delta)=\begin{cases}\boxed{-\Delta} & -2T<\Delta<0 \\ 0 & else\end{cases}$$

$$h(t-\Delta)=\begin{cases}-\Delta+t & -2T+t<\Delta<t \\ 0 & else\end{cases}$$

① $t<0$ $y(t)=0$ Δ在0以下不在积分区间

② $0<t<T$ $y(t)=\int_0^t(-\Delta+t)d\Delta=-\frac{1}{2}t^2+t^2=\frac{1}{2}t^2$

③ $T<t<2T$. 上限走, 下限未进入

$$\int_0^T(-\Delta+t)d\Delta=Tt-\frac{1}{2}T^2$$

④ $2T<t<3T$ 上限走 下限入

$$\int_{-2T+t}^{T}(-\Delta+t)d\Delta=-\frac{1}{2}t^2+Tt+\frac{3}{2}T^2$$

⑤ $t>3T$ 无交集 $y=0$

其他问题: 为什么一定是卷积?

因为卷积可以"复原"函数

LTI章节结构.

表征LTI系统

↓ 信号复原(脉冲移位再积分)、信号变化(移位加权积分)

积分意义是"组合"

卷积和/卷积积分

↓

卷积性质 & LTI性质

↓

用差分(D)、微分(F)方程.
描述LTI