3.11 $x[n]$ 有周期 $N=10$

$x[n] \xrightarrow{FS} a_k$

$x[n]$ 为实偶信号，则 $\boxed{a_k \text{ 为实偶函数}}$ 共轭

有 $a_k = a_{-k}$ $a_k^* = a_k$

$\because \underline{a_{11} = a_{1+10} = a_1 = 5 = a_{-1}}$ 周期

设 $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ 复指数模为1

$\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9} |x[n]|^2 = 50$ $|x[n]|$ 在 n 取任意值结果一致

$\therefore \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k^* = 50$ 只是0. 其他显然.

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = 50$ 因为 $|a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 50$

$a_{-1}^2 = a_1^2 = 5^2 = 25 = \frac{50}{2}$. 可得知 a_k 的情况为.

$\therefore a_k = \begin{cases} 5 & k = \pm 1. \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$\therefore x[n] = 5e^{j(1)\frac{\pi}{5}n} + 5e^{j(-1)\frac{\pi}{5}n}$

$= \boxed{10 \cos \frac{\pi}{5} n}$ 唯一确定.

故已确定 $A = 10$ $B = \frac{\pi}{5}$ $C = 0$ 若为奇还得分2个

28 (a)(b)(c)　30.　36.　48 (a)(b)(c)(d)

(a)(a) $x[n]$ 的周期 $N=7$ ✓　$\omega=\frac{2\pi}{7}$ 一次谐波

设 $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{7}n}$.

$\boxed{4}$ 次方

∴ 系数 $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{4} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{7}n}$

$$=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk\frac{2\pi}{7}n}=\frac{1}{7}\frac{\left(1-e^{-jk\frac{8\pi}{7}}\right.}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{7}}}$$

⇒ 等比求和.

(b). $N=6.$　$\omega=\frac{\pi}{3}$.

考查常规求法).

设 $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$

$$\boxed{a_k}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{3} e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\frac{1-e^{-jk\pi}}{1-e^{-jk\frac{\pi}{3}}}$$

∵ $e^{-jk\pi}=\cos(k\pi)+j\sin(-k\pi)=(-1)^k$

∴ $a_k=\frac{1-(-1)^k}{6(1-e^{-jk\frac{\pi}{3}})}$

(c). $N=6$　$\omega=\frac{\pi}{3}$

设 $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$

$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=-2}^{2} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$=\frac{1}{6}\left[(-1)\left(e^{-jk\frac{\pi}{3}(-2)}+e^{-jk\frac{\pi}{3}(+2)}\right)+2\left(e^{-jk\frac{\pi}{3}(-1)}+e^{-jk\frac{\pi}{3}(+1)}\right)\right.$$
$$\left.+1\right]$$

$= -\frac{1}{3}\cos(\frac{2\pi}{3}k) + \frac{2}{3}\cos(\frac{\pi}{3}k) + 1$

$\therefore a_k = -\frac{1}{3}\cos(\frac{2\pi}{3}k) + \frac{2}{3}\cos(\frac{\pi}{3}k) + 1$

(b) 对 $\sin(\frac{2\pi}{3}n)$ 周期 $T_1 = 3$

$\cos(\frac{\pi}{2}n)$ 周期 $T_2 = 4$

$\frac{2\pi}{12} : 6$

$x[n]$最小正周期为 12

$\because \sin(\frac{2\pi}{3}n) = \frac{1}{2j}(e^{j\frac{2\pi}{3}n} - e^{-j\frac{2\pi}{3}n})$

$\cos(\frac{\pi}{2}n) = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n})$

$x[n] = \frac{1}{4j}(e^{j\frac{7}{6}\pi n} + e^{j\frac{\pi}{6}n} - e^{-j\frac{\pi}{6}n} - e^{-j\frac{7}{6}\pi n})$

其中 $e^{j\frac{7}{6}\pi n}$是 7次谐波，$e^{j\frac{\pi}{6}n}$为 1次谐波

$\boxed{\frac{2}{12}\pi}$ 为一次谐波

$x[n]$的傅立叶系数为

$a_1 = \frac{1}{4j}$ $a_{-1} = -\frac{1}{4j} = a_{11}$

$a_7 = \frac{1}{4j}$ $a_{-7} = -\frac{1}{4j} = a_5$

(c) $\because x[0] = 1$ $x[1] = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x[2] = 0$ $x[3] = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

这是一个周期内的信号取值

可直接分开算
这种列出来也不复杂

记 $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$

$\therefore a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$

$= \frac{1}{4}\left(1 + (1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-jk\frac{\pi}{2}} + 0 + (1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right)$

$\because e^{-jk\frac{3\pi}{2}} = e^{jk(-\frac{3\pi}{2}+2\pi)} = e^{jk\frac{\pi}{2}}$

求FS系数 先确定T，否则无从谈起

$1.\ a_k = \frac{1}{4}\left(1+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} + e^{jk\frac{\pi}{2}}\right)\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos k\frac{\pi}{2}$.

30 (a) ∵ $x[n] = 1 + 1\,\frac{e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n}}{2}$

$= e^{jk\cdot\frac{\pi}{3}0} + \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)$ 完整表达

把 $a_0 \to a_{N-1}$ 全写

那怕为0

$\Rightarrow a_k$ $\boxed{a_0=1}$ 直流分量.

$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ → 复指，直接看出来.

(b) $y[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{e^{+j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})} - e^{-j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}}{2j}$

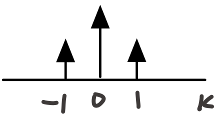
$= \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}n}$

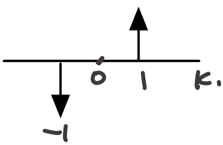
∴ y[n]的傅立叶级数系数

$a_1 = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}$ $a_{-1} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{-2j}$ 系数.

(c) 由相乘性质 z[n]系数为 $\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$ 频域卷积.

a_k图像. b_k图像.





移位算即可

写成冲激也行.

∴ $z[n] \xrightarrow{FS} c_k = \sum_{l=-2}^{2} a_l b_{k-l}$ 一个周期内去做

$c_0 = \sum_{l=-2}^{2} a_l b_{-l} = \frac{1}{2}\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j} + \frac{1}{2}\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{-2j}$

$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$C_1=\sum_{l=-2}^{3} a_l b_{1-l} = 1\cdot\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j} \qquad C_2=\sum_{l=-2}^{3} a_l b_{2-l} = \frac{1}{2}\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}$$

$$C_{-1}=\sum_{l=-2}^{3} a_l b_{-1-l} = 1\cdot\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{-2j} \qquad C_{-2}=\sum_{l=-2}^{2} a_l b_{-2-l} = \frac{1}{2}\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{-2j}$$

(d) $z[n] = x[n]y[n] = [1+\cos(\frac{\pi}{3}n)]\sin(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})$

欧拉展开

$$= \sin(\tfrac{\pi}{3}n+\tfrac{\pi}{4}) + (\cos\tfrac{\pi}{3}n)\sin(\tfrac{\pi}{3}n+\tfrac{\pi}{4})$$

$$= \frac{e^{j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}-e^{-j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}}{2j} + \frac{e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{-j\frac{\pi}{3}n}}{2}\cdot\frac{e^{j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}-e^{-j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}}{2j}$$

$$= \frac{e^{j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}-e^{-j(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}}{2j} + \frac{1}{4j}\left(e^{j(\frac{2}{3}\pi n+\frac{\pi}{4})}+(-1)e^{-j\frac{\pi}{4}}+e^{j\frac{\pi}{4}}+(-1)e^{-j(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{4})}\right)$$

$$= \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}n} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{4j}e^{j\frac{2}{3}\pi n} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{4j} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{4j} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{4j}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

$\therefore$ $z[n] \xrightarrow{FS} C_k$ 其中1次谐波 $C_1=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}$ $C_{-1}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{-2j}$

$$C_2=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{4j} \qquad C_{-2}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{-4j} \qquad C_0=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}-e^{-j\frac{\pi}{4}}}{4j}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

对比发现 (c)(d) 中的级数系数相等

36 差分方程 $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$

(a) 对复指数信号 记 $h[n]$ 为单位冲激响应

$$y[n]=e^{j\omega n}*h[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

$$y[n-1]= e^{j\omega n}*h[n]*\delta[n-1] = e^{-j\omega}y[n]$$

$\therefore$ 对复指数输入的微分方程. H 当Y看

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}=e^{j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$x[n]$ 周期为8， $e^{\pm j\frac{3}{4}\pi n}$ 为±3次谐波

$\because x[n]=\sin\frac{3\pi}{4}n=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{3\pi}{4}n}-e^{-j\frac{3\pi}{4}n}\right)$ $a_3=\frac{1}{2j}$ $a_{-3}=-\frac{1}{2j}$

$\therefore$ 令 $\omega_0=\frac{3}{4}\pi$ $x[n]$ 视为 $\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$

记 $y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} b_k e^{j\frac{3}{4}\pi n}=\sum_{k=\langle N\rangle}\boxed{a_k H(j\omega)\big|_{\omega=k\omega_0}}e^{jk\frac{3}{4}\pi n}$ 上下权重

$=\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{3}{4}\pi}}e^{j\frac{3}{4}\pi n}+\frac{1}{(-2j)}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{+j\frac{3}{4}\pi}}e^{-j\frac{3}{4}\pi n}$

$\therefore b_3=\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{3}{4}\pi}}$

$b_{-3}=\frac{1}{(-2j)}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{+j\frac{3}{4}\pi}}$

有时别眼高手低

特别是 FS FT

有精力时 要重新做一次.

(b) $\because H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$ V

$x[n]=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n}+e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)+\left(e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right)$

$x[n]$是纯复指数输入 $x[n]$周期 $T=LCD(8,4)=8$

记 $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{+jk\frac{\pi}{4}n}$

其中 $a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$ $a_2=a_{-2}=1$ 可略 a_k

$\therefore y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\cdot H(e^{jk\frac{\pi}{4}})e^{jk\frac{\pi}{4}n}$

设 $y[n]\xrightarrow{FS} b_k$

则 $b_1=a_1H(e^{j\frac{\pi}{4}})=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}}$

$b_{-1}=a_{-1}H(e^{-j\frac{\pi}{4}})=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}}$

$b_2=a_2H(e^{j\frac{\pi}{2}})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}}$

$$b_{-2}=a_{-2}H(e^{-j\frac{\pi}{2}})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

3.48 (a) 代入 $n-n_0$ 这题(e)→(h)很难 孩子们

$$x[n-n_0]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})(n-n_0)}$$

$$=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$$

其傅利叶级数系数 $a_k'=a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$

(b). 由(a)结论

$x[n-1]$ 的系数 $b_k=a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$

$x[n]$ 的系数 a_k.

∴ 记 $x[n]-x[n-1]$ 傅利叶系数为 C_k.

由线性性质 $C_k=a_k-b_k=a_k(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}})$

(c) ∵ N 为偶数 Σ

又对 $x[n-N]$ 的傅立叶系数 $b_k=a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2})}$

$=(-1)^k a_k$

记 $x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$ 系数为 C_k

→ $x[n]*\delta[n-\frac{N}{2}]$

→ 系统.

$C_k=a_k(1-(-1)^k)$

$\therefore C_k=\begin{cases}2a_k & k为奇数\\ 0 & k为偶数\end{cases}$

$C_k=x[n]$の系数 $(1+e^{-j\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}})$

$x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$. 若 $N=2$

在一个周期

$x[0]$ $x[1]$.

$n=0$

$x[0]-x[0-1]$

$=x[0]-x[1]$

$n=1$

$x[1]-x[0]$

$n=-1$

$x[-1]-x[n-1]$

$=x[1]-x[0]$

什么时候 $g[n]=x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$

$g[n]=g[n+N_0]$?

(c) (D) 有值得注意的，会加深FS理解

$$x[n] \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{N}\sum_{k\cdot\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

形式上 a_k 与 $e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ 对应

本题. $C_k = a_k(1+e^{-j\frac{N}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}}) = a_k(1+(-1)^n)$

(d) 中为什么 $\hat{a}_k = 2a_{2k}$?

$$x[n] + x[n+\frac{N}{2}]$$

$$= x[n](1+\delta[n+\frac{N}{2}]) \xrightarrow{FS} \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n](1+e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}})e^{-jk\omega n}$$

$H(e^{j\omega})$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} + x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot(k-\frac{N}{2})}\right)$$

$$= a_k + a_{k-\frac{N}{2}} ?$$ 且N为偶数

因为 $N_? = \frac{N}{2}$

(d) $\because$ 信号周期为 $\frac{N}{2}$ 故 $\omega_0 = \frac{2\pi}{\frac{N}{2}} = \frac{4\pi}{N}$.

记 $y[n] = x[n] + x[n+\frac{N}{2}] \xrightarrow{FS} d_k$.

对于 $x[n] \xrightarrow{FS} a_k$ 　　它们的 k次谐波均成为

$x[n+\frac{N}{2}] \xrightarrow{FS} b_k$ 　　$y[n] \xrightarrow{FS} d_k$ 的 2k次谐波.

$\because \quad b_k = (-1)^k a_k$

$d_k = a_{2k} + b_{2k} = a_{2k}(1+(-1)^{2k}) = 2a_{2k}$

(e) $x[-n] = \sum a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}(-n)}$

$x^*[-n] = \sum \boxed{a_k^*} e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$. → 其实已做出了

$a_{k*} = \frac{1}{N}\sum x^*[-n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$.

(f) $\underbrace{x[2n] - x[2n-1]}$ 　$\to N=\frac{N_0}{2}$ 　$\to N=\frac{N_0}{2}$

$x[2n] \to \sum a_k e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2n} = \sum a_k e^{j\frac{2\pi}{\frac{1}{2}N}n}$

$x[2n-1] = \sum a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(2n-1)}$

其实 拆分 2n. 　　Q 　$a_{k*} = \sum x[n] e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}(k-\frac{N}{2})}$ 　偶 ↑ ω.

$\omega \Rightarrow (k-\frac{N}{2})\omega_0$.

$\Rightarrow a_{k*} \cdot a_{k-\frac{N}{2}}$

这样: $x[n](-1)^n = x[n]e^{jk\pi}$

$$a_{k*} = \sum x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-\frac{N}{2})}$$

加 $\frac{N}{2}$ 也可以

n 对上 $\frac{2\pi}{N}$ 对上

k 的部分即对应 a_k

N -