第九章 正弦稳态电路的分析

本章内容

首页

● 重点:

1. 阻抗和导纳
2. 正弦稳态电路的分析
3. 正弦稳态电路的功率分析

9-1　阻抗和导纳

1. 阻抗

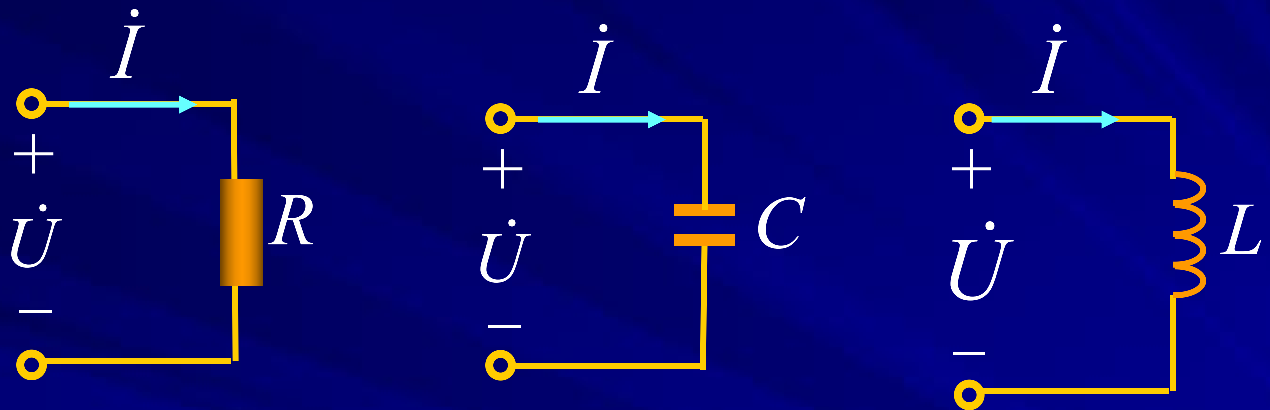
正弦稳态情况下

$$Z \overset{\text{def}}{=} \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = |Z| \angle \varphi_Z$$

欧姆定律的相量形式

$$\begin{cases} |Z| = \dfrac{U}{I} & \text{阻抗模} \\ \varphi_Z = \phi_u - \phi_i & \text{阻抗角} \end{cases}$$

当无源网络内为单个元件时有

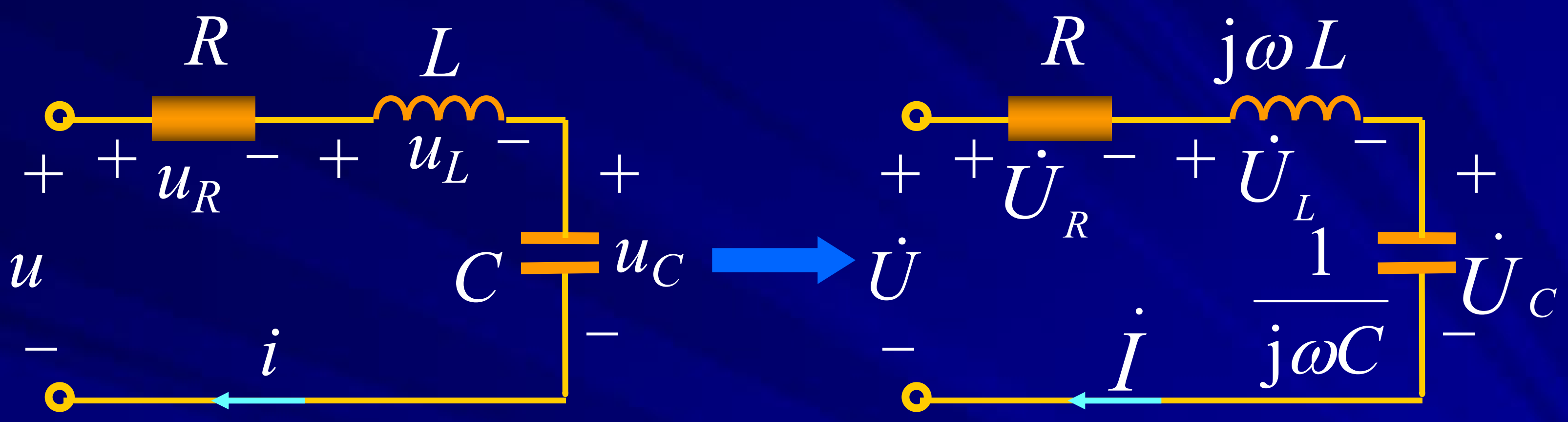


$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R \qquad Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}=\mathrm{j}X_C$$

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}X_L$$

表明 Z 可以是实数，也可以是虚数。

2. *RLC*串联电路



KVL： $$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

$$=[R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})]\dot{I}=[R+\mathrm{j}(X_L+X_C)]\dot{I}=(R+\mathrm{j}X)\dot{I}$$

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+\mathrm{j}\omega L-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\varphi_Z$$

Z— 复阻抗; $|Z|$—复阻抗的模; φ_Z—阻抗角; R—电阻(阻抗的实部); X—电抗(阻抗的虚部)。

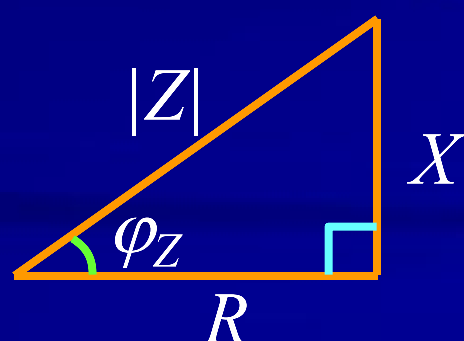
转换关系: $\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi_z = \arctan(\dfrac{X}{R}) \end{cases}$

或 $\begin{cases} R = |Z|\cos\varphi_Z \\ X = |Z|\sin\varphi_Z \end{cases}$

$$|Z| = \frac{U}{I}$$

$$\varphi_z = \phi_u - \phi_i$$

阻抗三角形



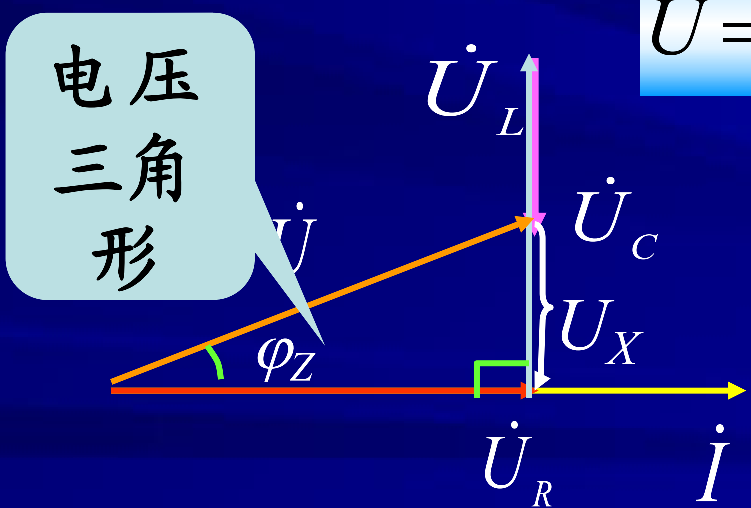
分析 R、L、C 串联电路得出

（1）$Z=R+\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)=|Z|\angle\varphi_Z$ 为复数，称复阻抗。

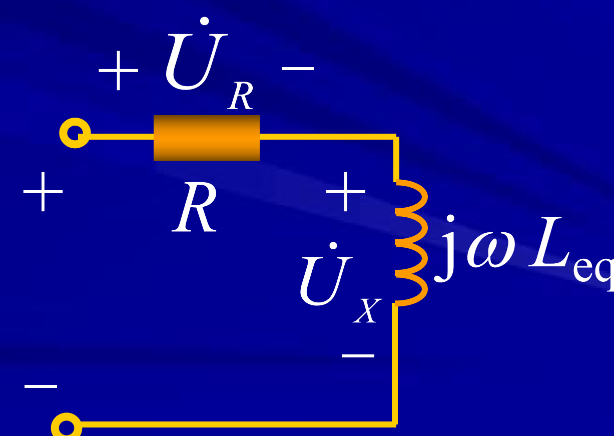
（2）$\omega L > 1/\omega C$，$X>0$，$\varphi_Z>0$，电路为感性，电压超前电流。

相量图：一般选电流为参考相量，$\phi_i=0$

$$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}=\sqrt{U_R^2+(U_\mathrm{L}-U_\mathrm{C})^2}$$

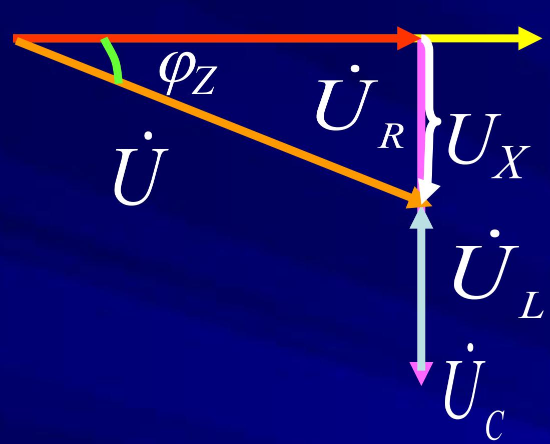


等效电路

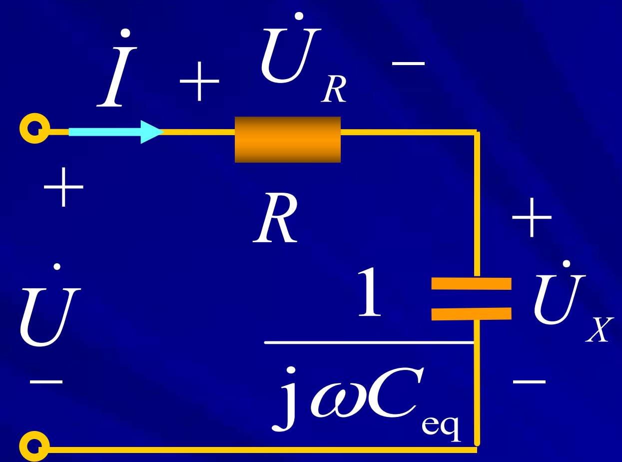


（3）$\omega L<1/\omega C$， $X<0$， $\varphi_Z<0$，电路为容性，电压落后电流。

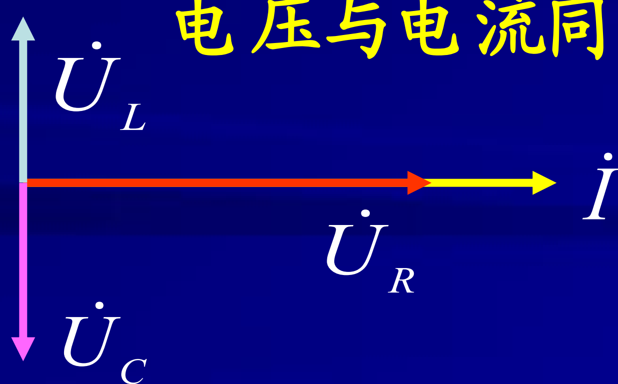
$$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}=\sqrt{U_R^2+(U_C-U_L)^2}$$



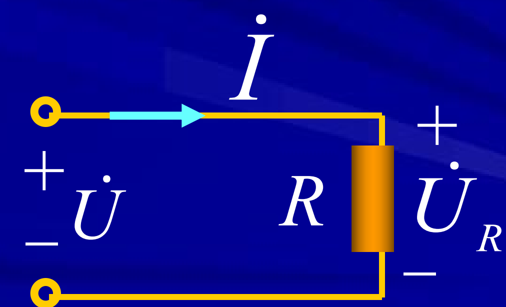
等效电路



（4）$\omega L=1/\omega C$ ，$X=0$， $\varphi_Z=0$，电路为电阻性，电压与电流同相。



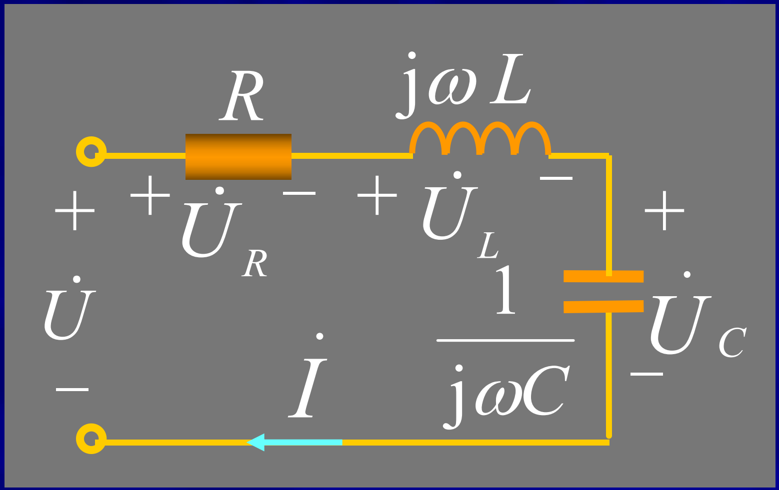
等效电路



例1-1 已知：R=15Ω, L=0.3mH, C=0.2μF,

$$u = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 60^\circ),\ f = 3\times 10^4\,\text{Hz}。$$

求 i, u_R, u_L, u_C。



解　画出相量模型

$$\dot{U} = 5\angle 60^\circ\ \text{V}$$

$$\mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}2\pi\times 3\times 10^4\times 0.3\times 10^{-3}\,\Omega$$

$$= \mathrm{j}56.5\Omega$$

$$-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{2\pi\times 3\times 10^4\times 0.2\times 10^{-6}}\Omega = -\mathrm{j}26.5\Omega$$

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = (15 + \mathrm{j}56.5 - \mathrm{j}26.5)\Omega$$

$$= 33.54\angle 63.4^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{5\angle 60^{\circ}}{33.54\angle 63.4^{\circ}}\text{ A}=0.149\angle -3.4^{\circ}\text{ A}$$

$$\dot{U}_R=R\dot{I}=15\times 0.149\angle -3.4^{\circ}\text{ V}=2.235\angle -3.4^{\circ}\text{ V}$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=56.5\angle 90^{\circ}\times 0.149\angle -3.4^{\circ}\text{ V}=8.42\angle 86.4^{\circ}\text{ V}$$

$$\dot{U}_C=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}=26.5\angle -90^{\circ}\times 0.149\angle -3.4^{\circ}\text{ V}=3.95\angle -93.4^{\circ}\text{ V}$$

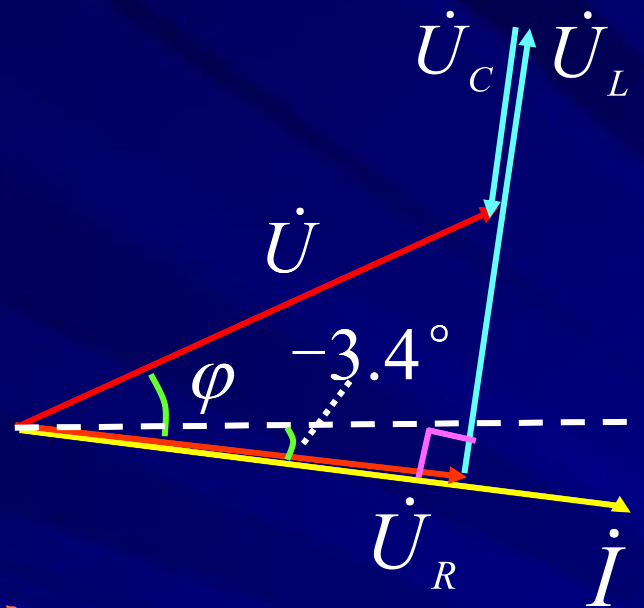
则 $i=0.149\sqrt{2}\cos(\omega t-3.4^{\circ})\text{ A}$

$$u_R=2.235\sqrt{2}\cos(\omega t-3.4^{\circ})\text{ V}$$

$$u_L=8.42\sqrt{2}\cos(\omega t+86.6^{\circ})\text{ V}$$

$$u_C=3.95\sqrt{2}\cos(\omega t-93.4^{\circ})\text{ V}$$

相量图



注意

$U_L=8.42>U=5$，分电压大于总电压。

3. 导纳　　正弦稳态情况下

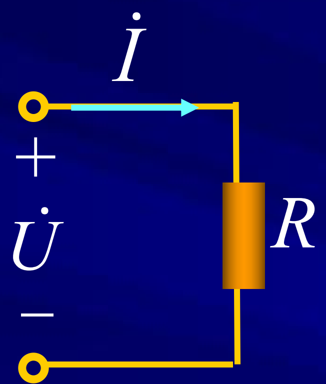
定义导纳　$Y = \dfrac{\dot{I}}{\dot{U}} = |Y| \underline{/\varphi_Y}$

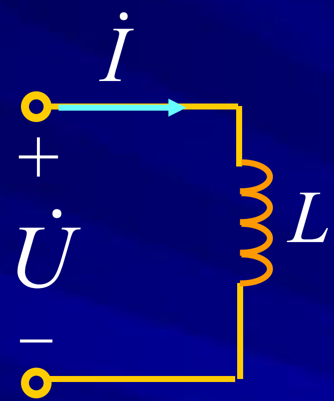
$$\begin{cases} |Y| = \dfrac{I}{U} & \text{导纳模} \\ \varphi_Y = \phi_i - \phi_u & \text{导纳角} \end{cases}$$

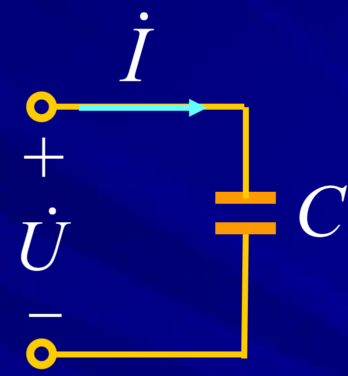
对同一二端网络:

$$Z=\frac{1}{Y}\,,\,Y=\frac{1}{Z}$$

当无源网络内为单个元件时有







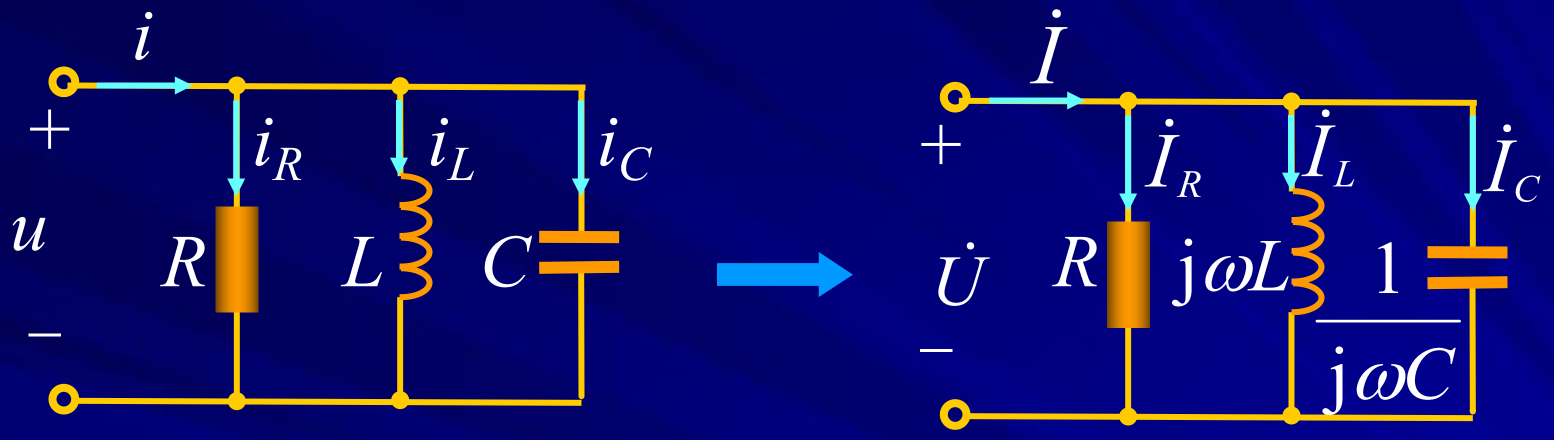
$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\mathrm{j}\omega C=\mathrm{j}B_C$$

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{1}{R}=G$$

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}=\mathrm{j}B_L$$

表明 Y 可以是实数，也可以是虚数。

4. RLC并联电路



由KCL：$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C=G\dot{U}-j\dfrac{1}{\omega L}\dot{U}+j\omega C\dot{U}$

$$=(G-j\frac{1}{\omega L}+j\omega C)\dot{U}=[G+j(B_L+B_C)]\dot{U}=(G+jB)\dot{U}$$

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+j\omega C-j\frac{1}{\omega L}=G+jB=|Y|\angle\varphi_Y$$

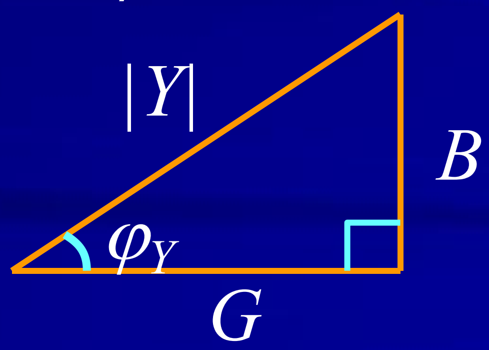
Y—复导纳； $|Y|$—复导纳的模； φ_Y— 导纳角；

G—电导(导纳的实部)； B—电纳(导纳的虚部)；

转换关系：
$$\begin{cases} |Y| = \sqrt{G^2 + B^2} \\ \varphi_Y = \arctan(\dfrac{B}{G}) \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} G = |Y|\cos\varphi_Y \\ B = |Y|\sin\varphi_Y \end{cases} \qquad \begin{cases} |Y| = \dfrac{I}{U} \\ \varphi_Y = \phi_i - \phi_u \end{cases}$$

导纳三角形



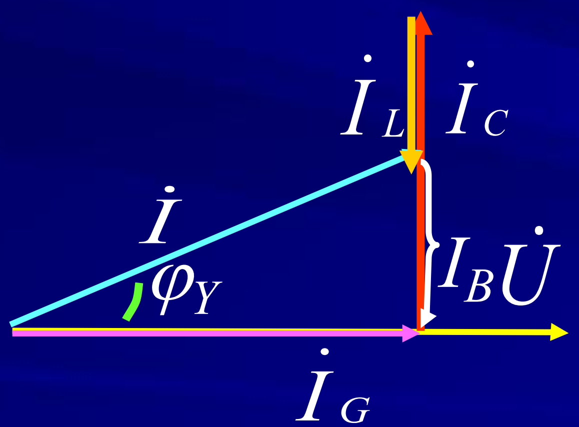
分析 R、L、C 并联电路得出：

（1）$Y=G+\mathrm{j}(\omega C-1/\omega L)=|Y|\angle\varphi_Y$ 为复数，称复导纳。

（2）$\omega C>1/\omega L$，$B>0$，$\varphi_Y>0$，电路为容性，

电流超前电压。

相量图：选电压为参考向量，$\phi_u=0$

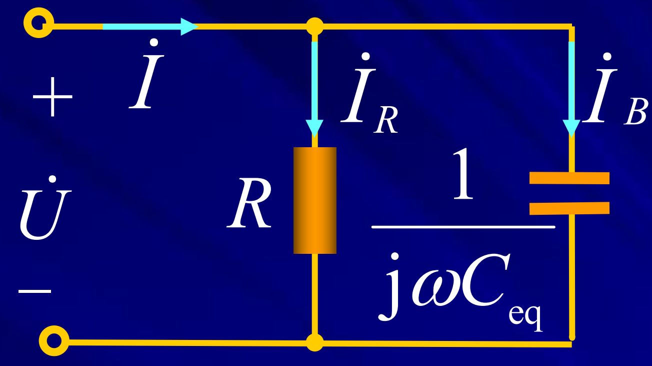


$$I=\sqrt{I_G^2+I_B^2}=\sqrt{I_G^2+(I_C-I_L)^2}$$

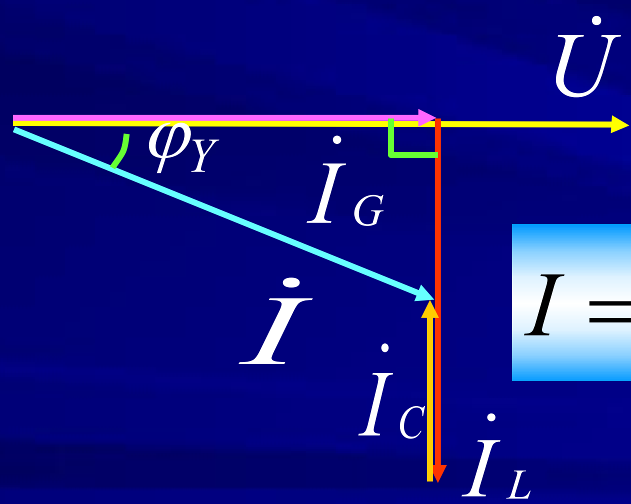
注意

RLC并联电路会出现分电流大于总电流的现象。

等效电路

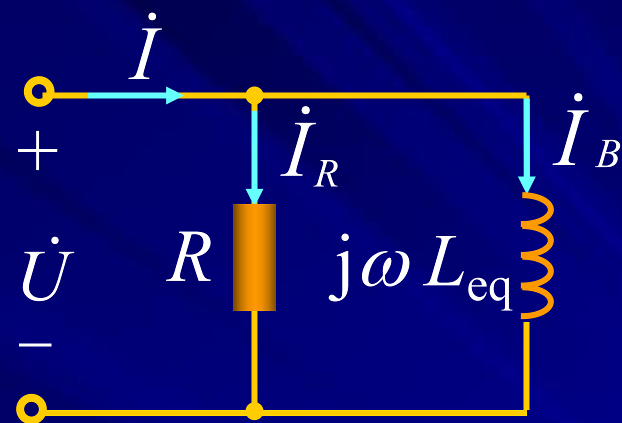


（3）$\omega C<1/\omega L$， $B<0$， $\varphi_Y<0$，电路为感性，电流落后电压。

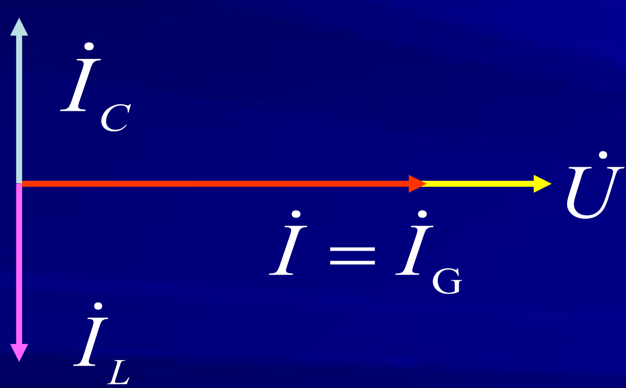


$$I=\sqrt{I_G^2+I_B^2}=\sqrt{I_G^2+(I_L-I_C)^2}$$

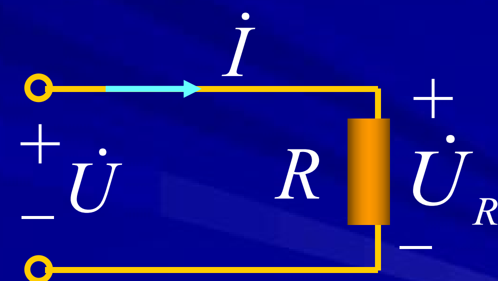
等效电路



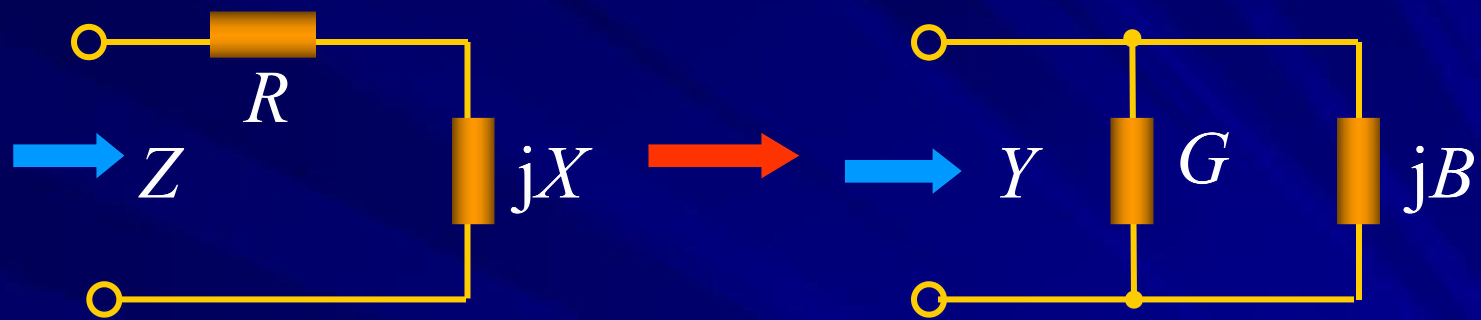
（4） $\omega C=1/\omega L$， $B=0$， $\varphi_Y=0$，电路为电阻性，电流与电压同相。



等效电路



5. 复阻抗和复导纳的等效互换



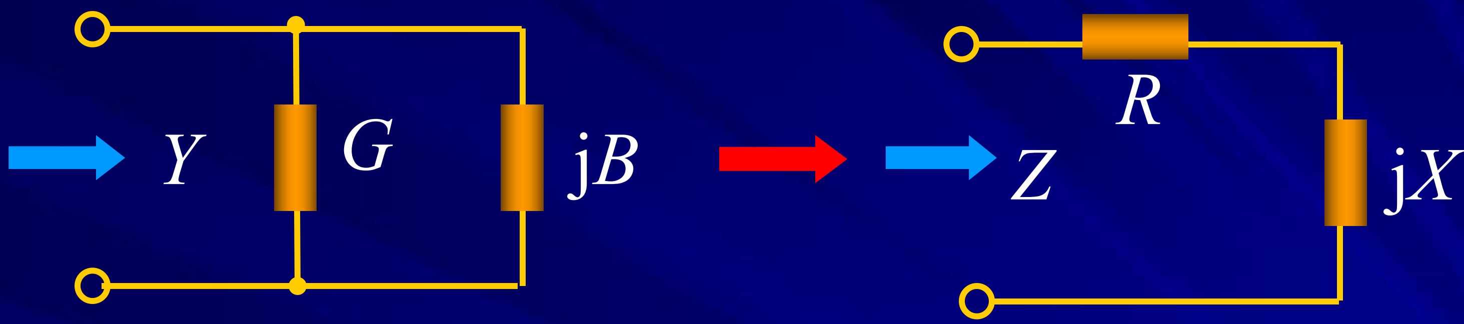
$$Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi_Z \quad \Leftrightarrow \quad Y = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi_Y$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+\mathrm{j}X} = \frac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2} = G + \mathrm{j}B$$

$$G = \frac{R}{R^2+X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2+X^2} \qquad |Y| = \frac{1}{|Z|}, \quad \varphi_Y = -\varphi_Z$$

注意 一般情况 $G \neq 1/R$，$B \neq 1/X$。若 Z 为感性，$X>0$，则 $B<0$，即仍为感性。

同样，若由Y变为Z，则有



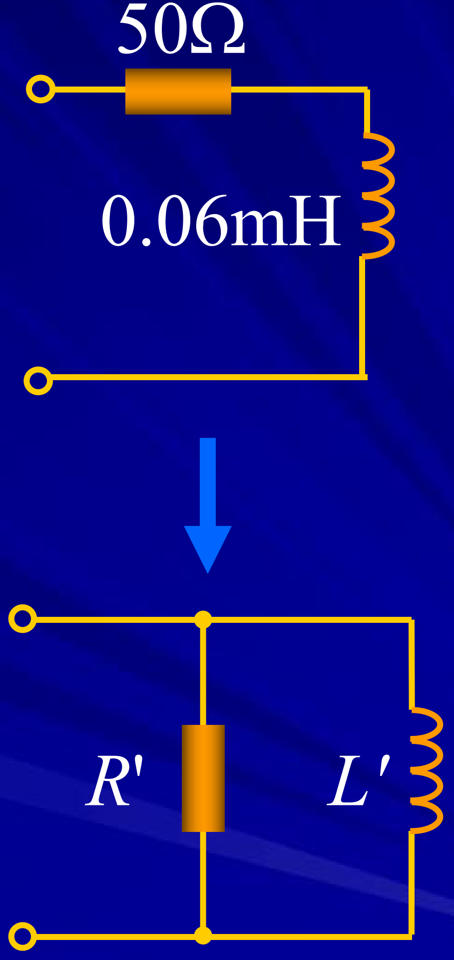
$$Y = G + \mathrm{j}B = |Y|\underline{/\varphi_Y}, \qquad Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\underline{/\varphi_Z}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G+\mathrm{j}B} = \frac{G-\mathrm{j}B}{G^2+B^2} = R + \mathrm{j}X$$

$$R = \frac{G}{G^2+B^2}, \qquad X = \frac{-B}{G^2+B^2}$$

$$|Y| = \frac{1}{|Z|}, \quad \varphi_Z = -\varphi_Y$$

例1-2 *RL*串联电路如图，求在ω= 10^6rad/s时的等效并联电路。



解 *RL*串联电路的阻抗为

$$X_L = \omega L = 10^6 \times 0.06 \times 10^{-3}\,\Omega = 60\Omega$$

$$Z = R + jX_L = (50 + j60)\Omega = 78.1\angle 50.2^\circ\,\Omega$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{78.1\angle 50.2^\circ}\,S = 0.0128\angle -50.2^\circ\,S$$

$$= (0.0082 - j0.0098)\ S$$

$$\begin{cases} R' = \dfrac{1}{G'} = \dfrac{1}{0.0082}\,\Omega = 122\Omega \\ L' = \dfrac{1}{0.0098\omega}\,H = 0.102\text{mH} \end{cases}$$

注意

①一端口 N_0的阻抗或导纳是由其内部的参数、结构和正弦电源的频率决定的，在一般情况下，其每一部分都是频率的函数，随频率而变。

②一端口 N_0中如不含受控源，则有

$$|\varphi_Z| \leqslant 90^\circ \quad \text{或} \quad |\varphi_Y| \leqslant 90^\circ$$

但有受控源时，可能会出现

$$|\varphi_Z| \geqslant 90^\circ \quad \text{或} \quad |\varphi_Y| \geqslant 90^\circ$$

其实部将为负值，其等效电路要设定受控源来表示实部。

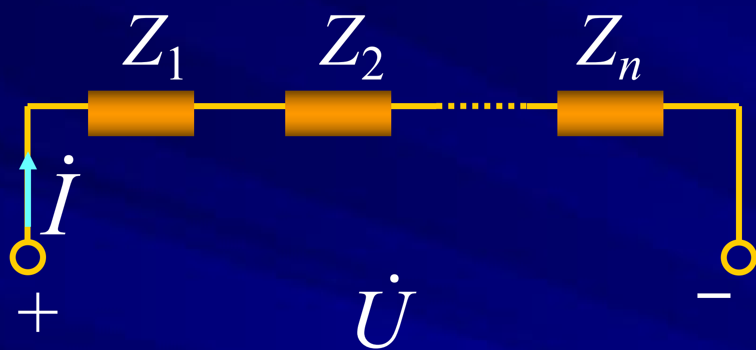
注意

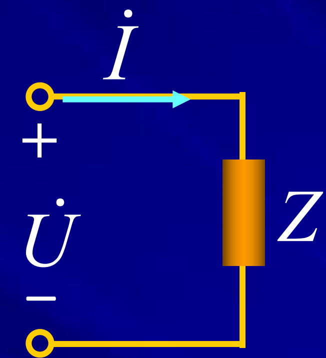
③一端口 N_0的两种参数Z和Y具有同等效用，彼此可以等效互换，其极坐标形式表示的互换条件为

$$|Z||Y|=1 \qquad \varphi_Z+\varphi_Y=0$$

6. 阻抗(导纳)的串联和并联

①阻抗的串联





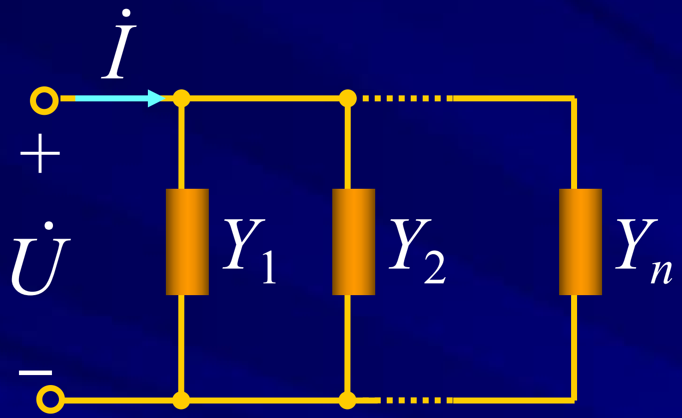
$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2+\cdots+\dot{U}_n=\dot{I}(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n)=\dot{I}Z$$

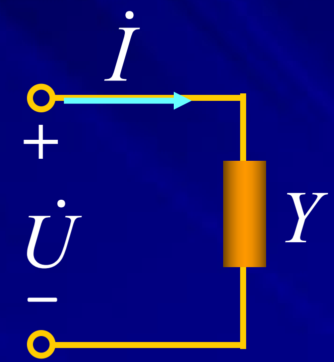
$$Z=\sum_{k=1}^{n}Z_k=\sum_{k=1}^{n}(R_k+jX_k)$$

分压公式

$$\dot{U}_i=\frac{Z_i}{Z}\dot{U}$$

②导纳的并联





$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n = \dot{U}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = \dot{U}Y$$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} (G_k + \mathrm{j}B_k)$$

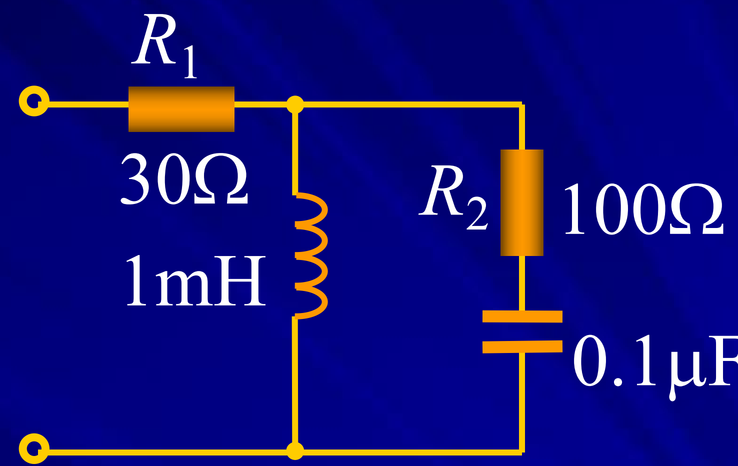
分流公式

$$\dot{I}_i = \frac{Y_i}{Y}\dot{I}$$

两个阻抗Z_1、Z_2的并联等效阻抗为

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

例1-3 求图示电路的等效阻抗， $\omega=10^5\ \text{rad/s}$ 。



解　感抗和容抗为

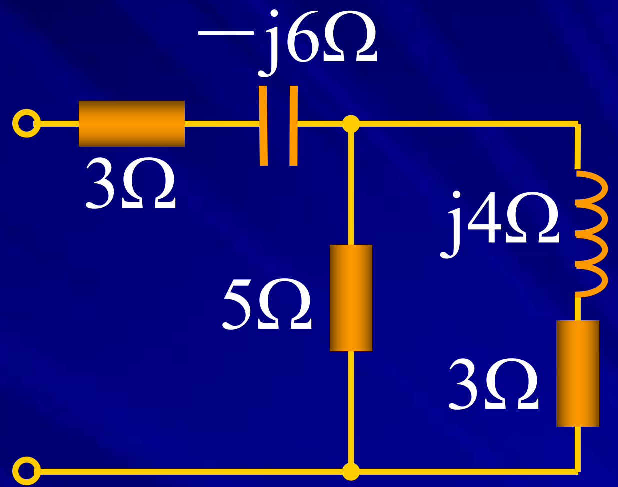
$$X_L=\omega L=10^5\times1\times10^{-3}\Omega=100\Omega$$

$$X_C=-\frac{1}{\omega C}=-\frac{1}{10^5\times0.1\times10^{-6}}\Omega=-100\Omega$$

$$Z=R_1+\frac{\mathrm{j}X_L(R_2+\mathrm{j}X_C)}{\mathrm{j}X_L+R_2+\mathrm{j}X_C}=[30+\frac{\mathrm{j}100\times(100-\mathrm{j}100)}{100}]\Omega$$

$$=(130+\mathrm{j}100)\Omega$$

例1-4 图示电路对外呈现感性还是容性?



解　等效阻抗为

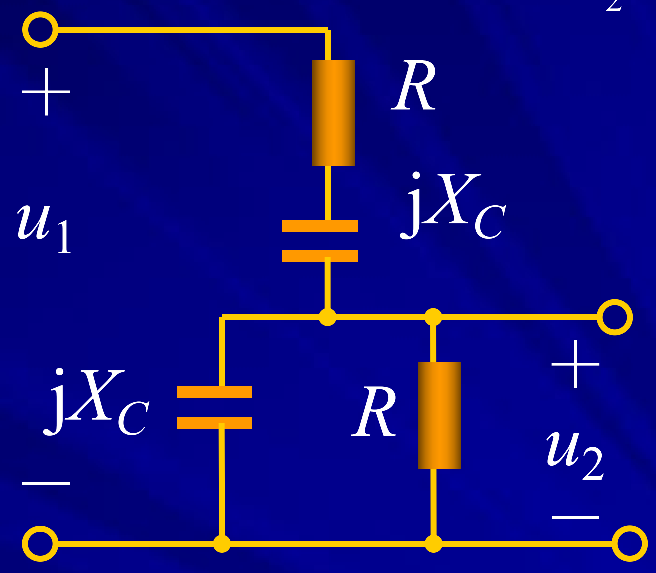
$$Z=[3-j6+\frac{5(3+j4)}{5+(3+j4)}]\Omega$$

$$=(3-j6+\frac{25\angle 53.1^\circ}{8+j4})\Omega=(5.5-j4.75)\Omega$$

电路对外呈现容性。

例1-5 图为RC选频网络，求u_1和u_2同相位的条件及 $\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=?$

解 设：$Z_1=R+\mathrm{j}X_C,\ Z_2=R//\mathrm{j}X_C$



$$\dot{U}_2=\frac{\dot{U}_1 Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$\rightarrow\ \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=\frac{Z_1+Z_2}{Z_2}=1+\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{R+\mathrm{j}X_C}{\mathrm{j}RX_C/(R+\mathrm{j}X_C)}=\frac{(R+\mathrm{j}X_C)^2}{\mathrm{j}RX_C}$$

$$=\frac{R^2-X_C^2+\mathrm{j}2RX_C}{\mathrm{j}RX_C}=2-\mathrm{j}\frac{R^2-X_C^2}{RX_C}=\text{实数}$$

$$\rightarrow\ R=|X_C|$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=1+2=3$$

9-2 电路的相量图

分析阻抗(导纳)串、并联电路时，可以利用相关的电压和电流相量在复平面上组成的电路的相量图。

1. 并联电路相量图的画法

①参考电路并联部分的电压相量。

②根据支路的VCR确定各并联支路的电流相量与电压相量之间的夹角。

③根据节点上的KCL方程，用相量平移求和法则，画出节点上各支路电流相量组成的多边形。

2. 串联电路相量图的画法

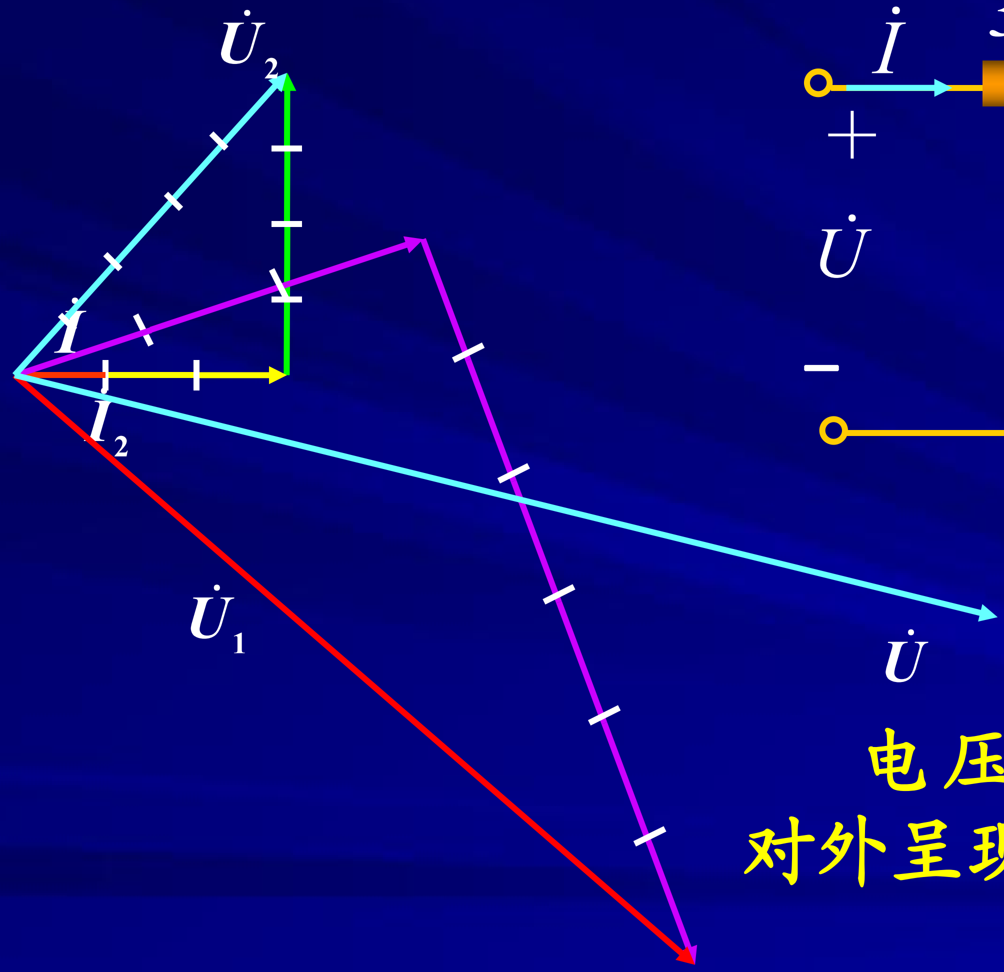
①参考电路串联部分的电流相量。

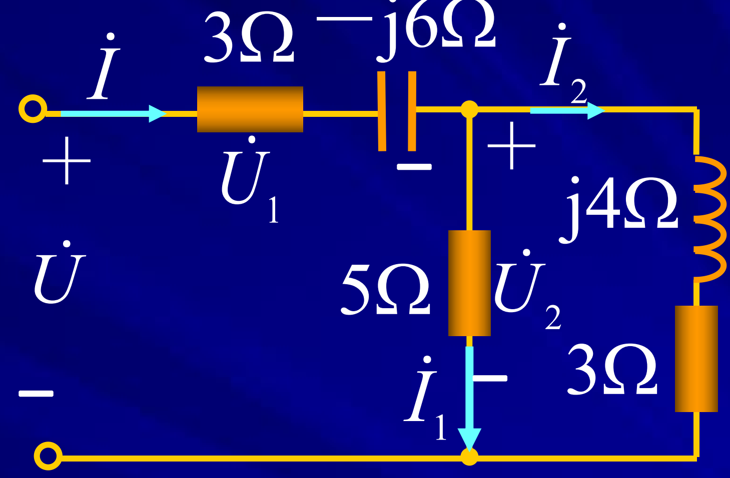
②根据支路的VCR确定各串联支路的电压相量与电流相量之间的夹角。

③根据回路上的KVL方程，用相量平移求和法则，画出回路上各支路电压相量组成的多边形。

例2-1 用相量图确定图示电路对外呈现感性还是容性？

解　取电感电流为参考相量





电压滞后于电流，电路对外呈现容性。

9-3　正弦稳态电路的分析

电阻电路与正弦稳态电路的分析比较

电阻电路:

$$\begin{cases} \text{KCL}: \quad \sum i = 0 \\ \text{KVL}: \quad \sum u = 0 \\ \text{元件约束关系:} \\ u = Ri \quad \text{或} \quad i = Gu \end{cases}$$

正弦电路相量分析:

$$\begin{cases} \text{KCL}: \quad \sum \dot{I} = 0 \\ \text{KVL}: \quad \sum \dot{U} = 0 \\ \text{元件约束关系:} \\ \dot{U} = Z\dot{I} \quad \text{或} \quad \dot{I} = Y\dot{U} \end{cases}$$

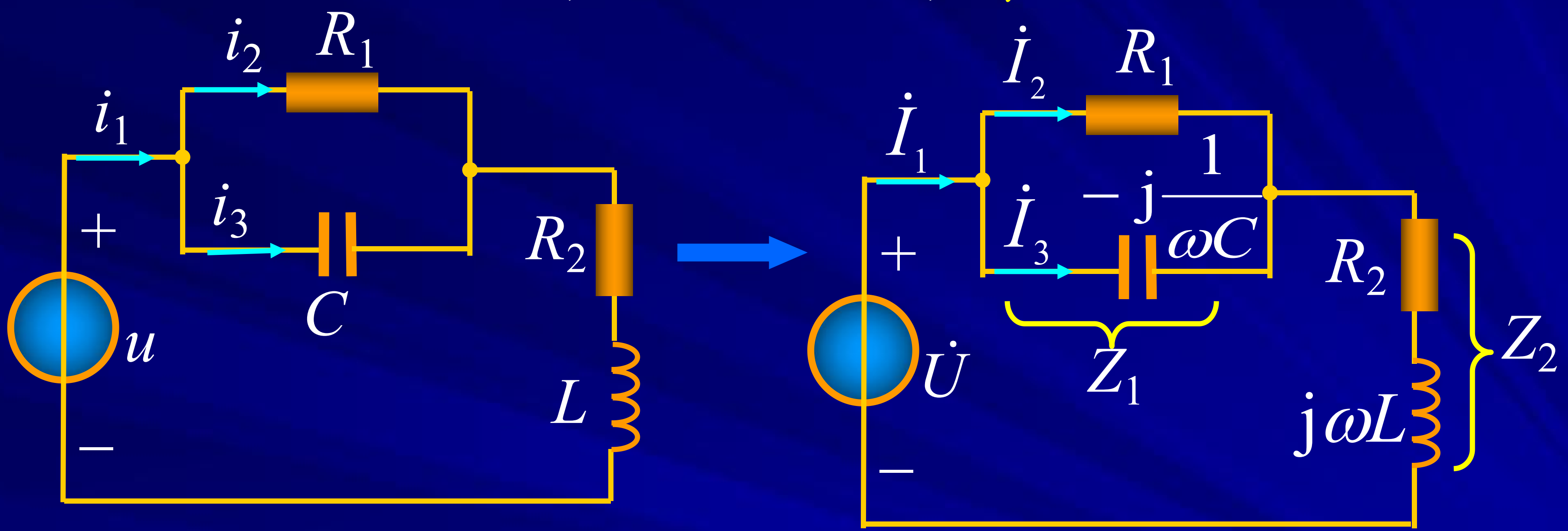
结论

1. 引入相量法，电阻电路和正弦稳态电路依据的电路定律是相似的。

2. 引入电路的相量模型，把列写时域微分方程转为直接列写相量形式的代数方程。

3. 引入阻抗以后，可将电阻电路中讨论的所有网络定理和分析方法都推广应用于正弦稳态的相量分析中。直流($f=0$)是一个特例。

例3-1已知：$R_1=1000\Omega$, $R_2=10\Omega$, $L=500\text{mH}$, $C=10\mu\text{F}$, $U=100\text{V}$, $\omega=314\text{rad/s}$ ， 求各支路电流。



解　画出电路的相量模型

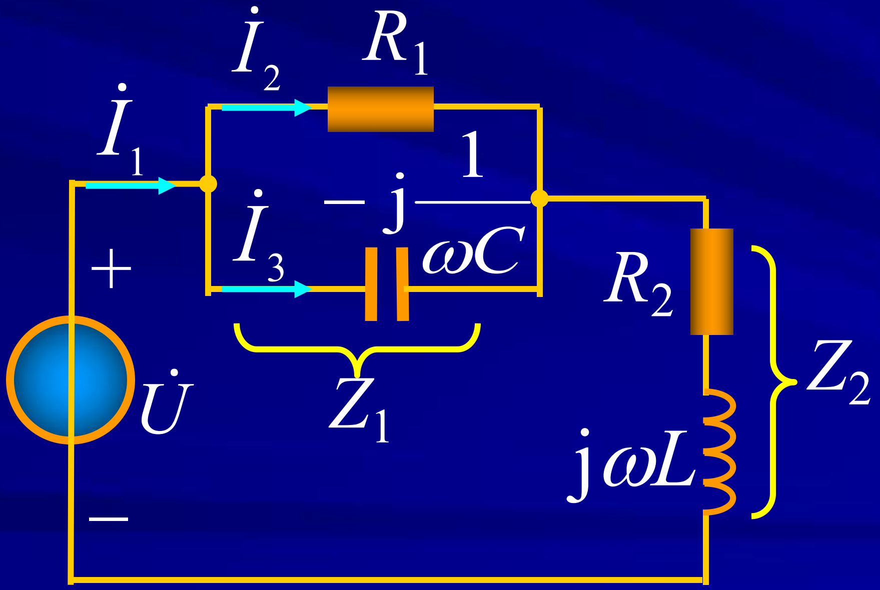
$$Z_1=\frac{R_1(-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C})}{R_1-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{1000\times(-\mathrm{j}318.47)}{1000-\mathrm{j}318.47}\Omega=\frac{318.47\times10^3\angle-90^\circ}{1049.5\angle-17.7^\circ}\Omega$$

$$Z_1 = 303.45\angle -72.3^\circ\ \Omega = (92.11 - \mathrm{j}289.13)\ \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega L = (10 + \mathrm{j}157)\ \Omega$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = (92.11 - \mathrm{j}289.13 + 10 + \mathrm{j}157)\Omega$$

$$= (102.11 - \mathrm{j}132.13)\Omega = 166.99\angle -52.3^\circ\ \Omega$$



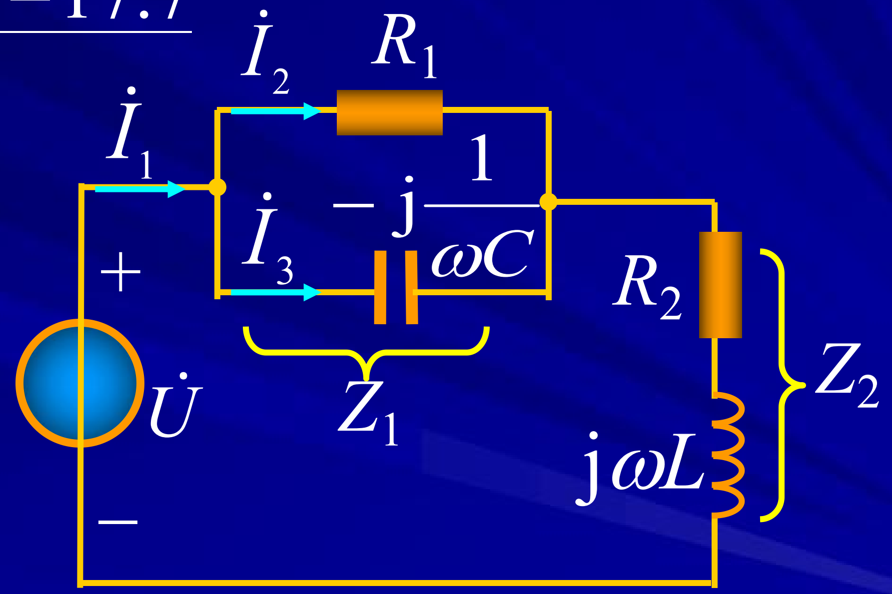
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{100\angle 0^\circ}{166.99\angle -52.3^\circ}\ \text{A}=0.6\angle 52.3^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_2=\frac{-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}{R_1-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1=\frac{-\mathrm{j}318.47}{1049.5\angle -17.7^\circ}\times 0.6\angle 52.3^\circ\ \text{A}$$

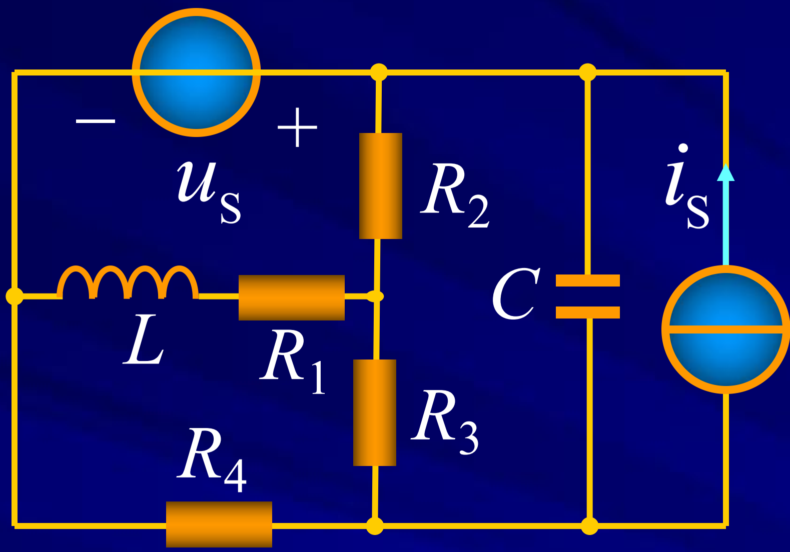
$$=0.181\angle -20^\circ\ \text{A}$$

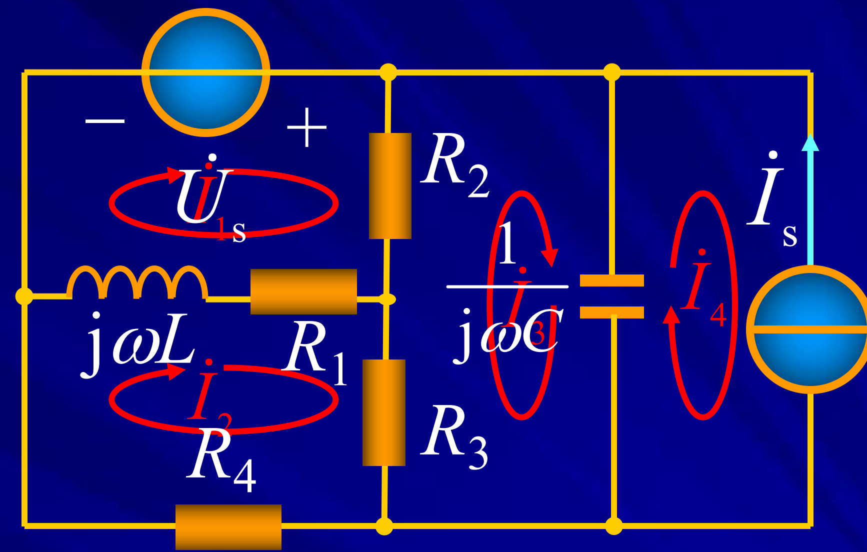
$$\dot{I}_3=\frac{R_1}{R_1-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1$$

$$=\frac{1000}{1049.5\angle -17.7^\circ}\times 0.6\angle 52.3^\circ\ \text{A}=0.57\angle 70^\circ\ \text{A}$$



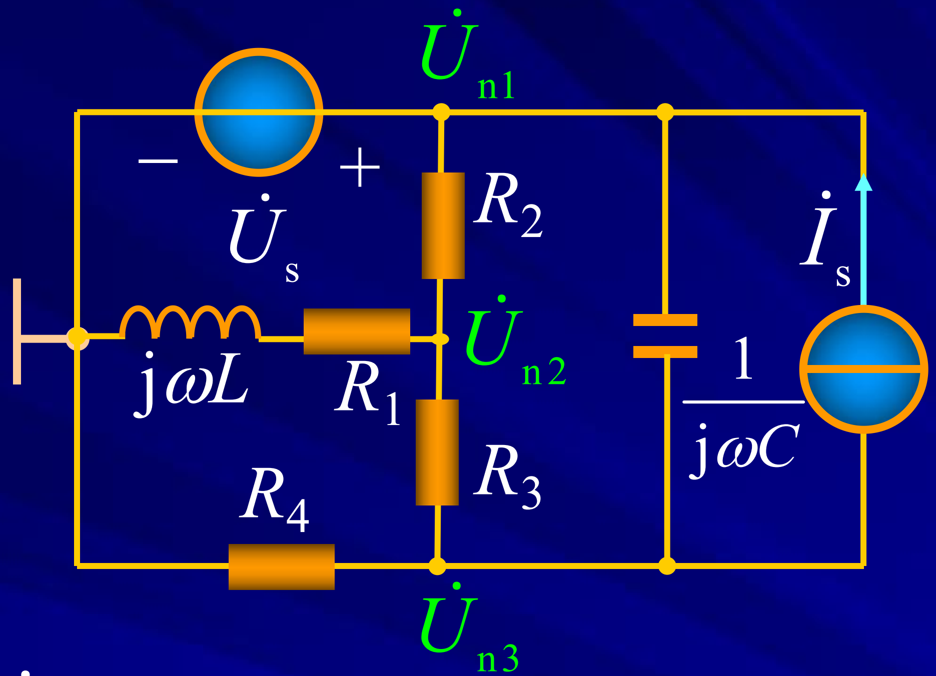
例3-2 列写电路的回路电流方程和节点电压方程。





解 回路方程

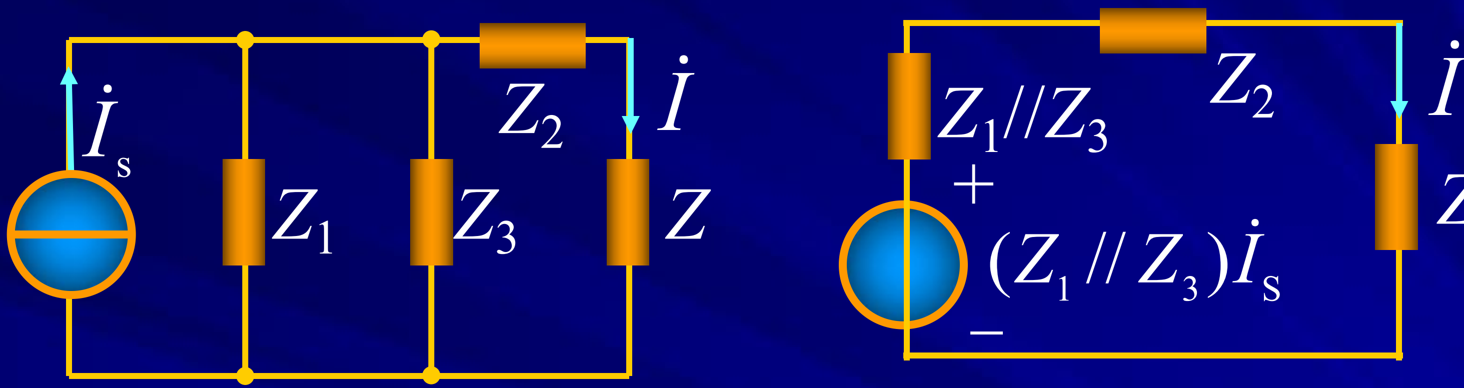
$$
\begin{cases}
(R_1+R_2+j\omega L)\dot{I}_1-(R_1+j\omega L)\dot{I}_2-R_2\dot{I}_3=\dot{U}_s \\
(R_1+R_3+R_4+j\omega L)\dot{I}_2-(R_1+j\omega L)\dot{I}_1-R_3\dot{I}_3=0 \\
(R_2+R_3+\dfrac{1}{j\omega C})\dot{I}_3-R_2\dot{I}_1-R_3\dot{I}_2-\dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}_4=0 \\
\dot{I}_4=-\dot{I}_s
\end{cases}
$$



节点方程

$$
\begin{cases}
\dot{U}_{n1} = \dot{U}_s \\
\left(\dfrac{1}{R_1 + j\omega L} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)\dot{U}_{n2} - \dfrac{1}{R_2}\dot{U}_{n1} - \dfrac{1}{R_3}\dot{U}_{n3} = 0 \\
\left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + j\omega C\right)\dot{U}_{n3} - \dfrac{1}{R_3}\dot{U}_{n2} - j\omega C\dot{U}_{n1} = -\dot{I}_s
\end{cases}
$$

例3-3　已知：$\dot{I}_s = 4\angle 90^\circ$ A，$Z_1 = Z_2 = -\mathrm{j}30\,\Omega$，$Z_3 = 30\,\Omega$，$Z = 45\,\Omega$，求电流 $\dot{I}$。

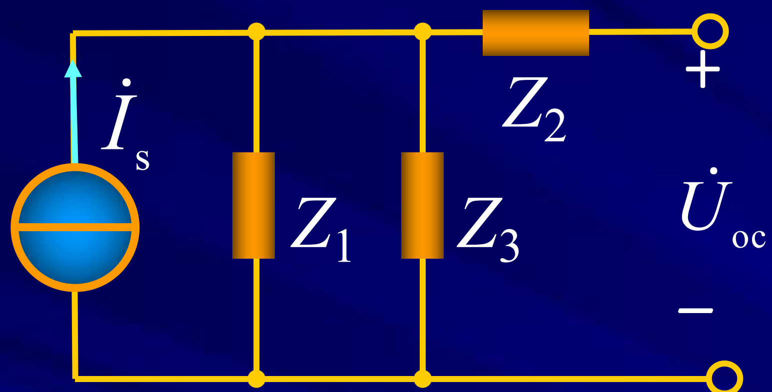


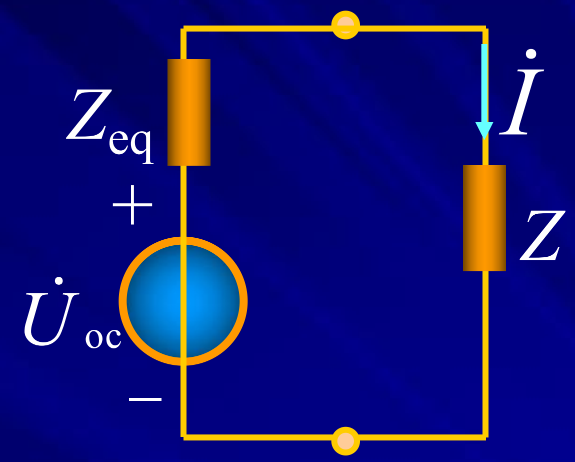
解　方法1：电源变换　$Z_1 // Z_3 = \dfrac{30(-\mathrm{j}30)}{30-\mathrm{j}30}\Omega = 15-\mathrm{j}15\Omega$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_s(Z_1//Z_3)}{Z_1//Z_3+Z_2+Z} = \frac{\mathrm{j}4(15-\mathrm{j}15)}{15-\mathrm{j}15-\mathrm{j}30+45}\,\mathrm{A}$$

$$= \frac{5.657\angle 45^\circ}{5\angle -36.9^\circ}\,\mathrm{A} = 1.13\angle 81.9^\circ\,\mathrm{A}$$

方法2: 戴维南等效变换



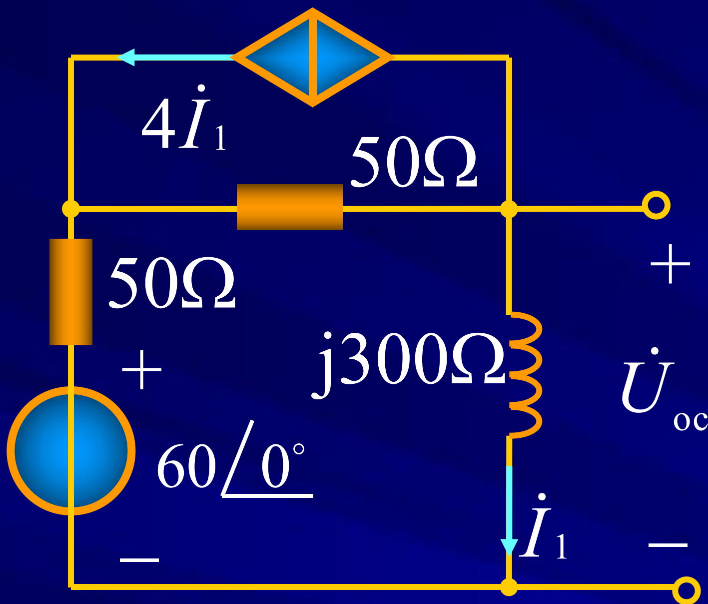


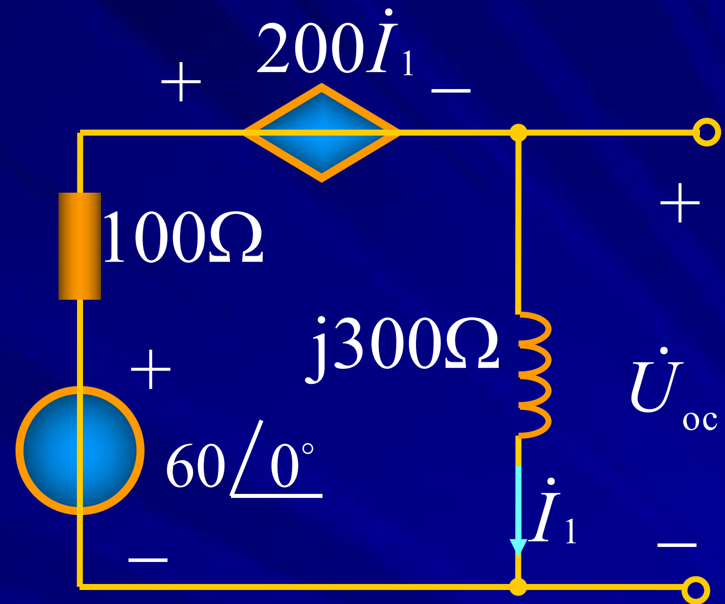
求开路电压: $\dot{U}_{oc} = \dot{I}_s(Z_1 // Z_3) = 84.86\angle 45^\circ\ \text{V}$

求等效阻抗: $Z_{eq} = Z_1 // Z_3 + Z_2 = (15 - \text{j}45)\Omega$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{eq} + Z} = \frac{84.86\angle 45^\circ}{15 - \text{j}45 + 45}\ \text{A} = 1.13\angle 81.9^\circ\ \text{A}$$

例3-4 求图示电路的戴维南等效电路。

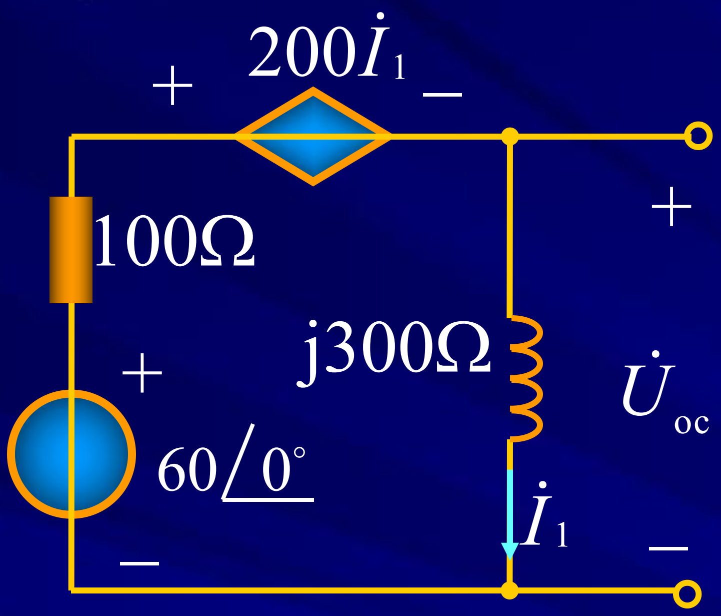


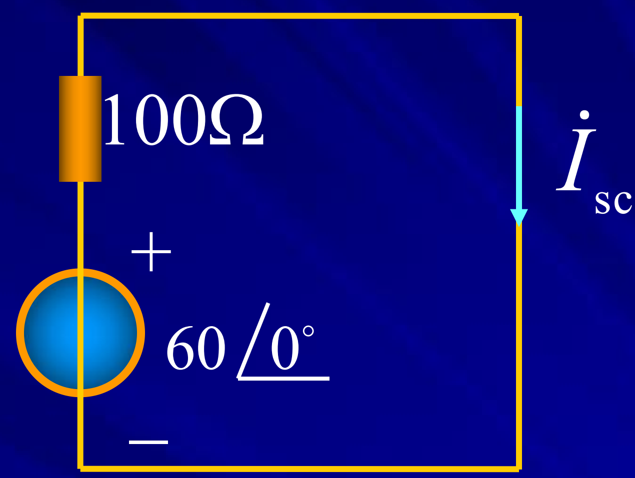


解　求开路电压:

$$\dot{U}_{oc} = -200\dot{I}_1 - 100\dot{I}_1 + 60 = -300\dot{I}_1 + 60 = -300\frac{\dot{U}_{oc}}{j300} + 60$$

$$\Rightarrow \dot{U}_{oc} = \frac{60}{1-j}\text{V} = 30\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{V}$$





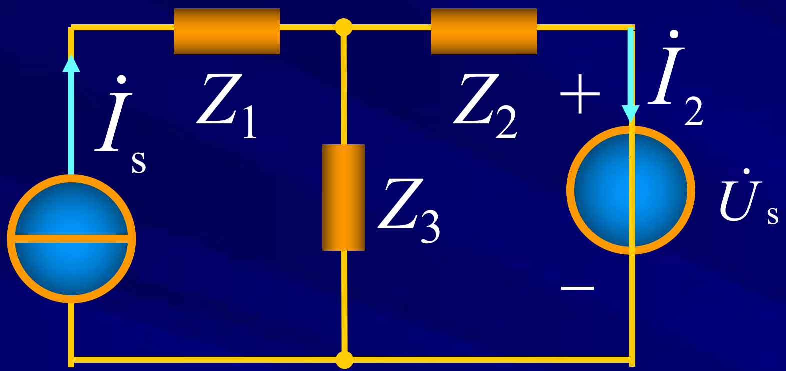
求短路电流:

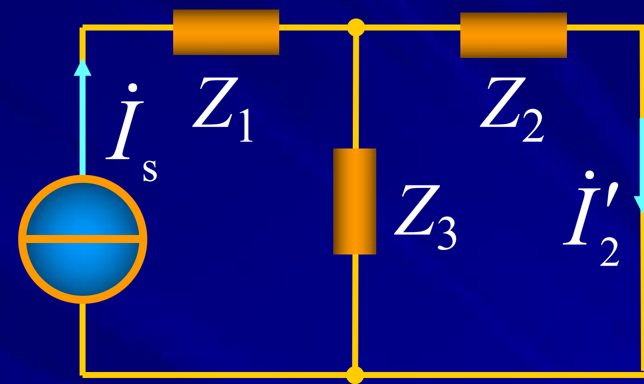
$$\dot{I}_{sc} = 60/100\text{A} = 0.6\,\text{A}$$

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}} = \frac{30\sqrt{2}\angle 45^\circ}{0.6}\Omega = 50\sqrt{2}\angle 45^\circ\,\Omega$$

例3-5用叠加定理计算电流 $\dot{I}_2$，已知：$\dot{U}_s = 100\angle 45^\circ\ \mathrm{V}$

$\dot{I}_s = 4\angle 0^\circ\ \mathrm{A},\ Z_1 = Z_3 = 50\angle 30^\circ\ \Omega,\ Z_2 = 50\angle -30^\circ\ \Omega$。

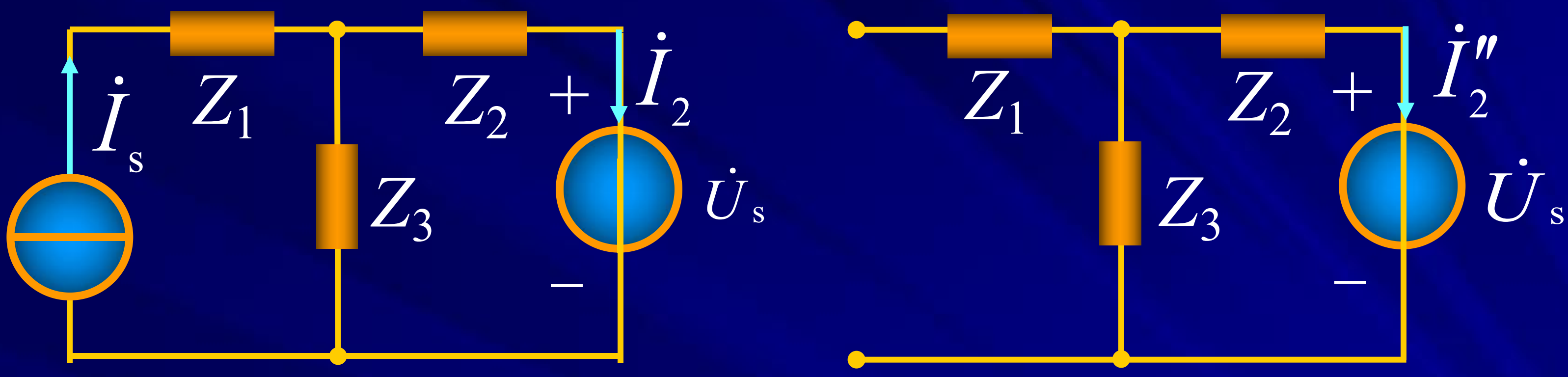




解 (1) $\dot{I}_s$单独作用($\dot{U}_s$处用短路替代)：

$$\dot{I}_2' = \dot{I}_s \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 4\angle 0^\circ \times \frac{50\angle 30^\circ}{50\angle -30^\circ + 50\angle 30^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$= \frac{200\angle 30^\circ}{50\sqrt{3}}\ \mathrm{A} = 2.31\angle 30^\circ\ \mathrm{A}$$



(2) $\dot{U}_s$单独作用($\dot{I}_s$开路):

$$\dot{I}''_2 = -\frac{\dot{U}_s}{Z_2+Z_3} = \frac{-100\angle 45^\circ}{50\sqrt{3}}\text{A} = 1.155\angle -135^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 = (2.31\angle 30^\circ + 1.155\angle -135^\circ)\text{A}$$

例3-6 已知平衡电桥 $Z_1=R_1$，$Z_2=R_2$，$Z_3=R_3+j\omega L_3$。

求：$Z_x=R_x+j\omega L_x$。

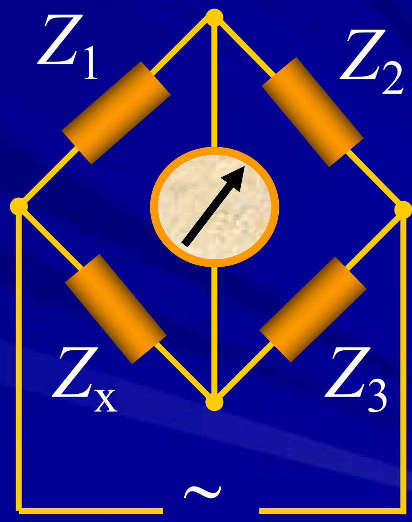
解 平衡条件：$Z_1 Z_3=Z_2 Z_x$ 得

$$|Z_1|\underline{/\varphi_1}\bullet|Z_3|\underline{/\varphi_3}=|Z_2|\underline{/\varphi_2}\bullet|Z_x|\underline{/\varphi_x}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|Z_1|\,|Z_3|=|Z_2|\,|Z_x|\\ \varphi_1+\varphi_3=\varphi_2+\varphi_x\end{cases}$$

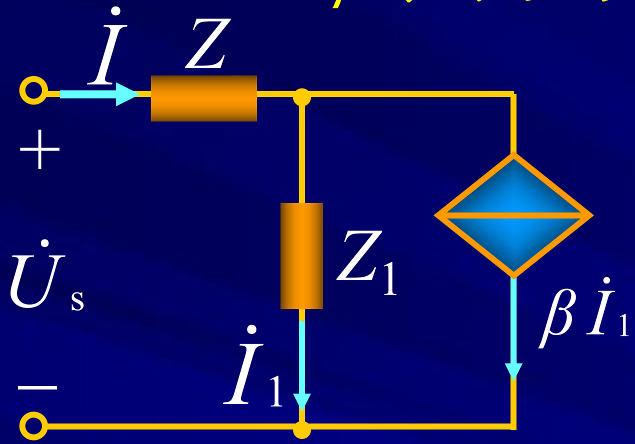
$$R_1(R_3+j\omega L_3)=R_2(R_x+j\omega L_x)$$

$$\Rightarrow R_x=R_1R_3/R_2\,,\quad L_x=L_3R_1/R_2$$



例3-7 已知：$Z=（10+j50）\Omega$, $Z_1=（400+j1000）\Omega$。

问：β等于多少时，$\dot{I}_1$和$\dot{U}_s$相位差90°？



解 分析:

找出$\dot{I}_1$和$\dot{U}_s$关系：$\dot{U}_s = Z_{转}\dot{I}_1$,

$Z_{转}$实部为零，相位差为90°。

$$\dot{U}_s = Z\dot{I} + Z_1\dot{I}_1 = Z(1+\beta)\dot{I}_1 + Z_1\dot{I}_1$$

$$\frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = (1+\beta)Z + Z_1 = 410 + 10\beta + j(50 + 50\beta + 1000)$$

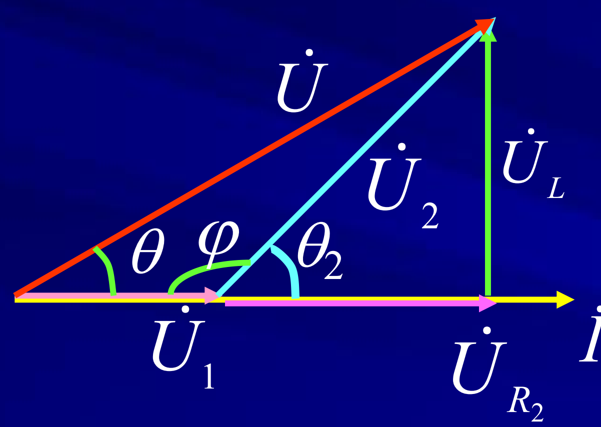
令 $410 + 10\beta = 0$ ，$\beta = -41$

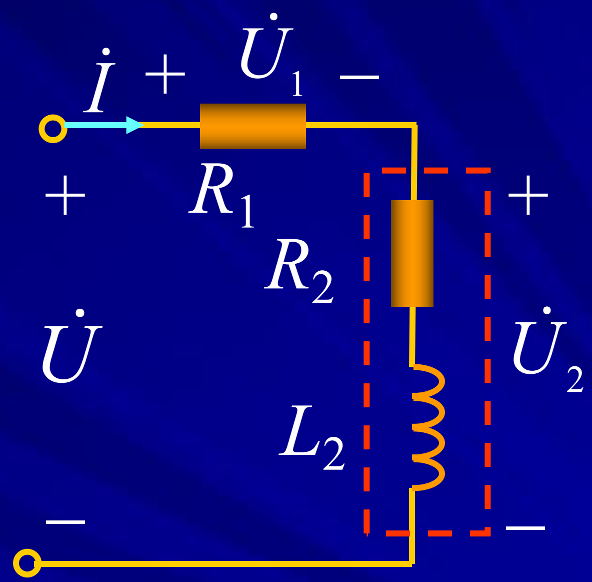
$$\frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = -j1000$$ 故电流领先电压 90°。

例3-8 已知：U=115V, U_1=55.4V , U_2=80V, R_1=32Ω , f=50Hz。 求：线圈的电阻R_2和电感L_2。

解法1 画相量图分析。

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=\dot{U}_1+\dot{U}_{R_2}+\dot{U}_L$$





$$U^2=U_1^2+U_2^2+2U_1U_2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi=-0.4237 \qquad \varphi=115.1^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \varphi = 64.9^\circ$$

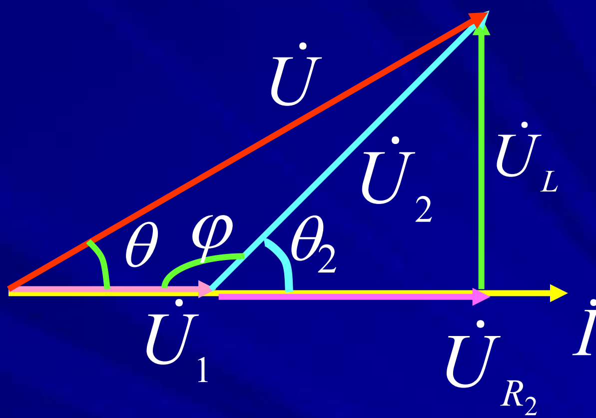
$$I = U_1 / R_1 = 55.4/32\text{A} = 1.73\text{A}$$

$$|Z_2| = U_2 / I = 80/1.73\Omega = 46.2\Omega$$

$$R_2 = |Z_2|\cos\theta_2 = 19.6\Omega$$

$$X_2 = |Z_2|\sin\theta_2 = 41.8\Omega$$

$$L = X_2/(2\pi f) = 0.133\text{H}$$



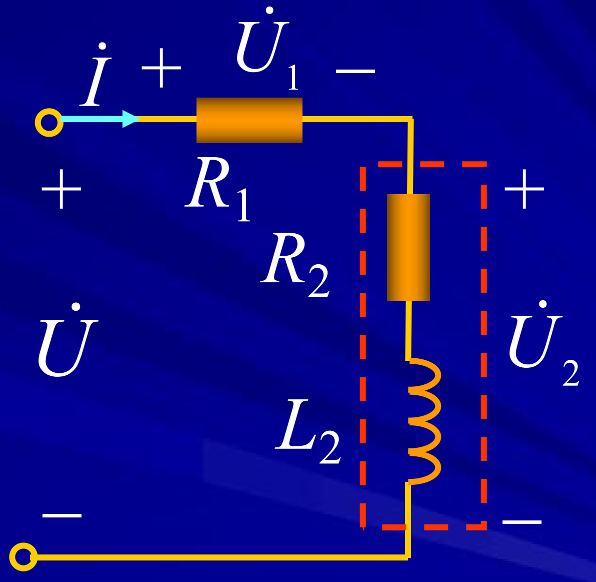
解法2

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=55.4\angle 0^\circ+80\angle\varphi=115\angle\theta$$

$$\begin{cases}55.4+80\cos\varphi=115\cos\theta\\80\sin\varphi=115\sin\theta\end{cases}$$

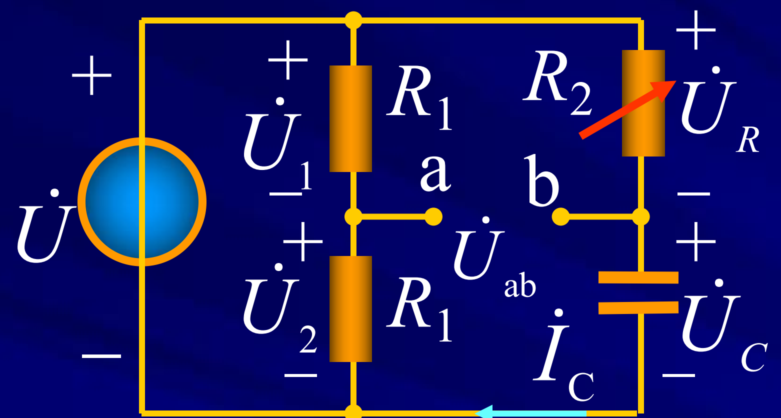
$$\Rightarrow\ \cos\varphi=0.424$$

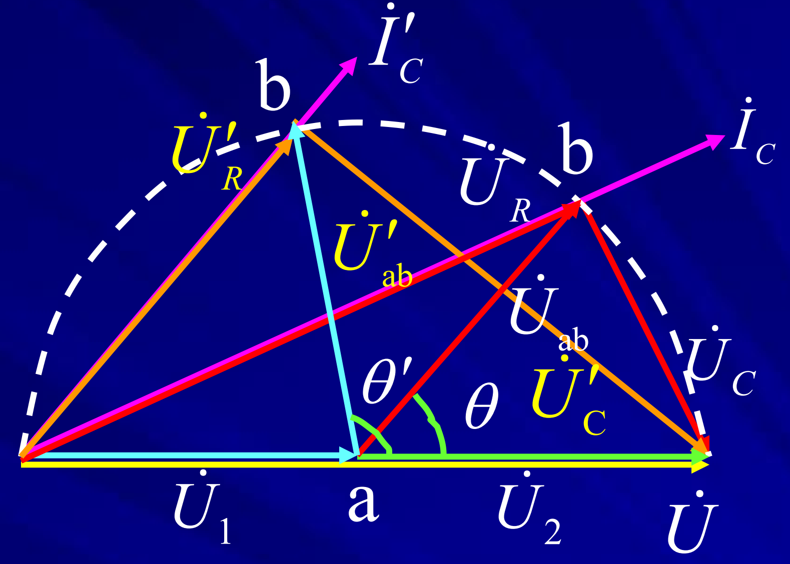
$$\varphi=64.93^0$$



其余步骤同解法1。

例3-9 移相桥电路。当 R_2由 $0\to\infty$时，$\dot{U}_{ab}$如何变化?





解 用相量图分析

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2,\quad \dot{U}_1=\dot{U}_2=\frac{\dot{U}}{2}$$

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_C\qquad \dot{U}_{ab}=\dot{U}_R-\dot{U}_1$$

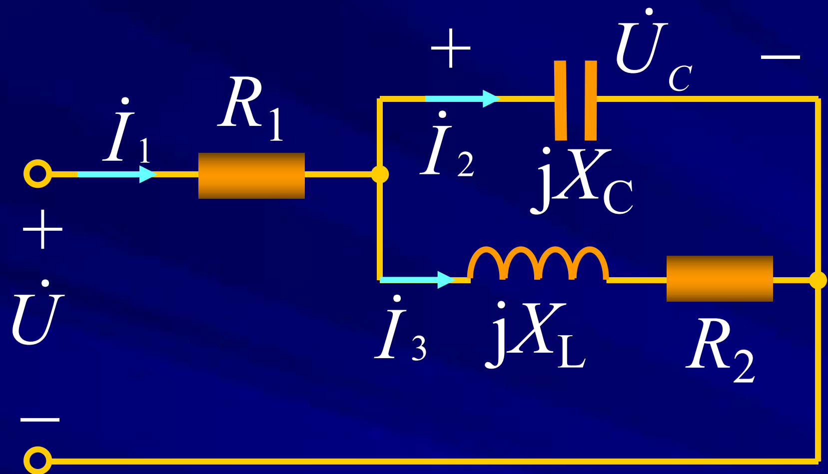
当 $R_2=0$，$\theta=180°$；

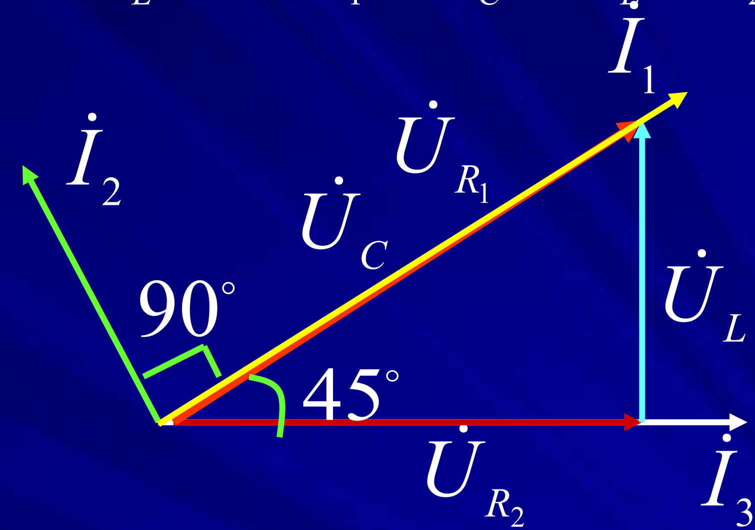
当 $R_2\to\infty$，$\theta=0°$。

由相量图可知当 R_2改变，$U_{ab}=\dfrac{1}{2}U$不变，相位改变。

θ为移相角，移相范围 $180°\sim0°$。

例3-10 图示电路，$I_2 = 10\text{A}$、$I_3 = 10\sqrt{2}\text{A}$、$U = 200\text{V}$、$R_1 = 5\Omega$、$R_2 = X_L$，求：I_1、X_C、X_L、R_2。





解

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (10\sqrt{2} + 10\angle 135^\circ)\text{A} = 10\angle 45^\circ\ \text{A} \Rightarrow I_1 = 10\text{A}$$

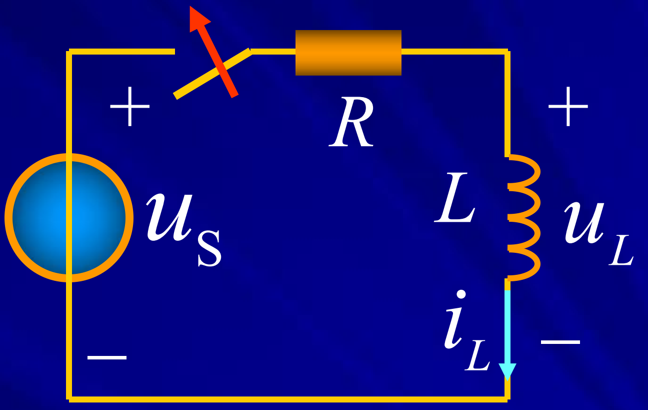
$$\dot{U} = \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_C \Rightarrow 200 = 5 \times 10 + U_C \Rightarrow U_C = 150\text{V}$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_L \Rightarrow U_C = \sqrt{2U_{R_2}^2} \Rightarrow U_{R_2} = U_L = 75\sqrt{2}\text{V}$$

$$X_C = -\frac{150}{10}\Omega = -15\Omega \qquad R_2 = X_L = \frac{75\sqrt{2}}{10\sqrt{2}}\Omega = 7.5\Omega$$

例3-11 求RL串联电路在正弦输入下的零状态响应。

已知：$u_S = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \phi_u)$



解 应用三要素法

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \qquad \tau = L/R$$

用相量法求正弦稳态解

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \angle \phi_u - \phi_Z = I\angle\phi_i$$

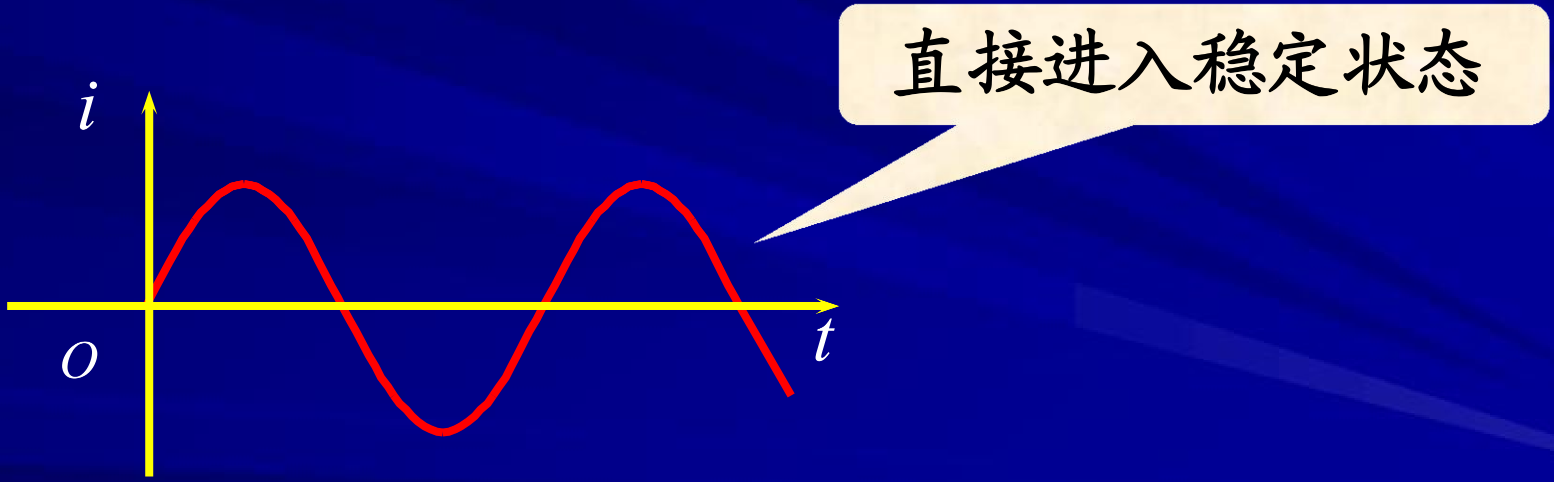
$$i_L(t) = i_L(\infty) + \left[i_L(0_+) - i_L(\infty)\big|_{0_+} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t) = I_m\cos(\omega t + \phi_i) - I_m\cos\phi_i e^{-\frac{t}{\tau}}$$

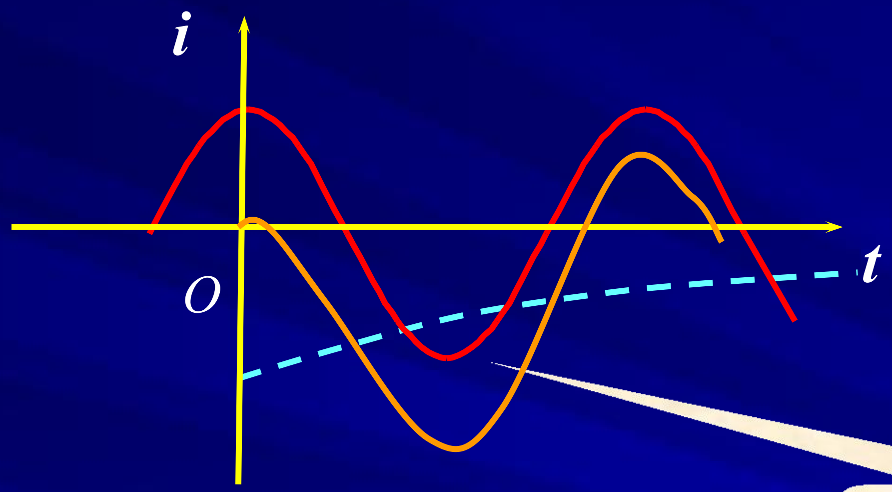
$$i_L(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)-I_m\cos\phi_i e^{-\frac{t}{\tau}}$$

注意　过渡过程与接入时刻有关。

当 $\phi_i=-\dfrac{\pi}{2}$，$i_L(t)=I_m\cos(\omega t+\phi_i)$



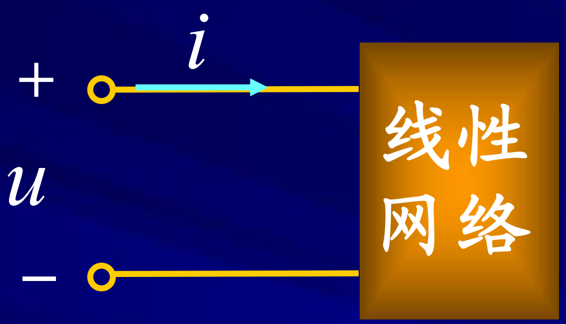
当 $\phi_i = 0$, $i_L(t) = I_m \cos(\omega t) - I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$



出现瞬时电流大于稳态电流现象

9-4 正弦稳态电路的功率

1. 瞬时功率



$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t)$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t-\varphi)$$

φ为 u和 i的相位差 $\varphi=\phi_u-\phi_i$

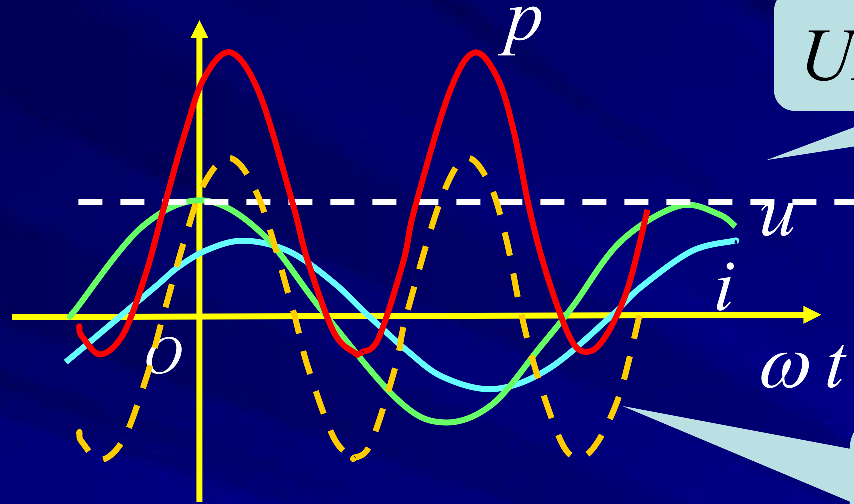
$$p(t)=ui=\sqrt{2}U\cos(\omega t)\cdot\sqrt{2}I\cos(\omega t-\varphi)$$

$$=UI[\cos\varphi+\cos(2\omega t-\varphi)]$$ 第一种分解方法

$$=UI\cos\varphi[1+\cos(2\omega t)]+UI\sin\varphi\sin(2\omega t)$$

第二种分解方法

第一种分解方法： $p(t)=UI[\cos\varphi+\cos(2\omega t-\varphi)]$



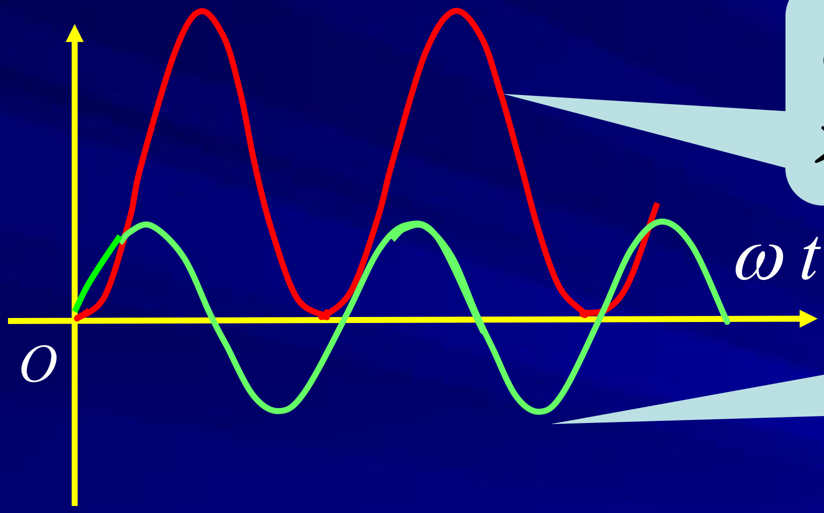
$UI\cos\varphi$ 恒定分量

$UI\cos(2\omega t-\varphi)$ 为正弦分量

- p 有时为正，有时为负。
- $p>0$，电路吸收功率。
- $p<0$，电路发出功率。

第二种分解方法:

$$p(t) = UI\cos\varphi[1+\cos(2\omega t)] + UI\sin\varphi\sin(2\omega t)$$



$UI\cos\varphi\,[1+\cos(2\omega t)]$ 为不可逆分量

$UI\sin\varphi\sin(2\omega t)$ 为可逆分量

- 部分能量在电源和一端口 之间来回交换。

2. 平均功率 P

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t-\varphi)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$

$$\boxed{P=UI\cos\varphi}$$

P 的单位：W（瓦）

$\varphi=\phi_u-\phi_i$：功率因数角。对不含独立源的线性网络，为其等效阻抗的阻抗角。

$\cos\varphi$：功率因数。

$$\cos\varphi\begin{cases}1, & \text{纯电阻}\\0, & \text{纯电抗}\end{cases}$$

一般地，有： $0\le|\cos\varphi|\leqslant 1$

$X>0,\ \varphi>0$，感性；　$X<0,\ \varphi<0$，容性。

结论

平均功率实际上是电阻消耗的功率，亦称为有功功率。表示电路实际消耗的功率，它不仅与电压、电流有效值有关，而且与$\cos\varphi$有关，这是交流和直流的很大区别，主要由于电压、电流存在相位差。

3. 无功功率 Q

$$Q \overset{\text{def}}{=} UI\sin\varphi$$

单位：var（乏）

- $Q>0$，表示网络吸收无功功率。
- $Q<0$，表示网络发出无功功率。
- Q 的大小反映网络与外电路交换功率的速率。是由储能元件L、C的性质决定的

4. 视在功率S

电气设备的容量

$$S \overset{\text{def}}{=} UI \qquad \text{单位}: \mathrm{V\cdot A}\,(\text{伏安})$$

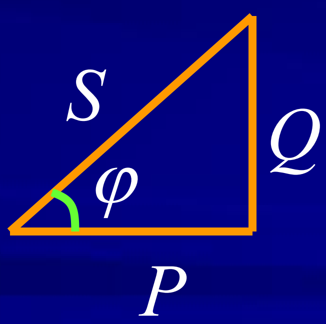
有功，无功，视在功率的关系：

有功功率：　$P=UI\cos\varphi$　　单位：W

无功功率：　$Q=UI\sin\varphi$　　单位：var

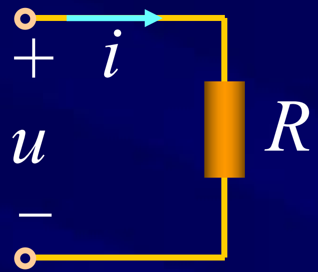
视在功率：　$S=UI$　　单位：V·A

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$



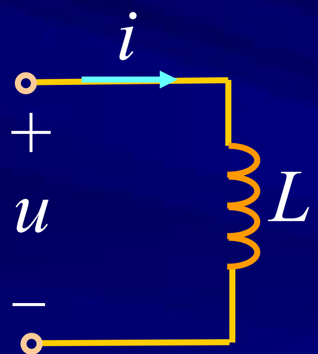
功率三角形

5．R、L、C元件的有功功率和无功功率



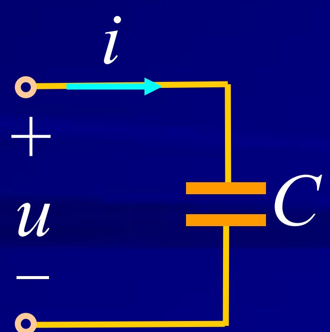
$$P_R = UI\cos\varphi = UI\cos 0^\circ = UI = I^2R = U^2/R$$

$$Q_R = UI\sin\varphi = UI\sin 0^\circ = 0$$



$$P_L = UI\cos\varphi = UI\cos 90^\circ = 0$$

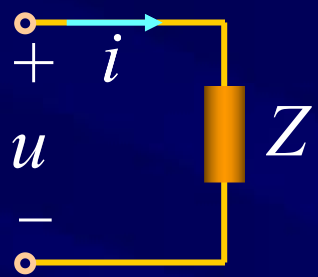
$$Q_L = UI\sin\varphi = UI\sin 90^\circ = UI = I^2X_L$$



$$P_C = UI\cos\varphi = UI\cos(-90^\circ) = 0$$

$$Q_C = UI\sin\varphi = UI\sin(-90^\circ) = -UI = I^2X_C$$

6. 任意阻抗的功率计算



$$P_Z = UI\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

$$Q_Z = UI\sin\varphi = I^2|Z|\sin\varphi = I^2X$$

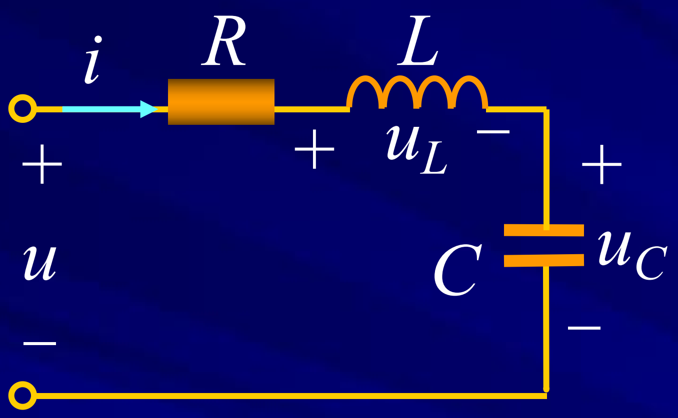
$$= I^2(X_L + X_C) = Q_L + Q_C$$

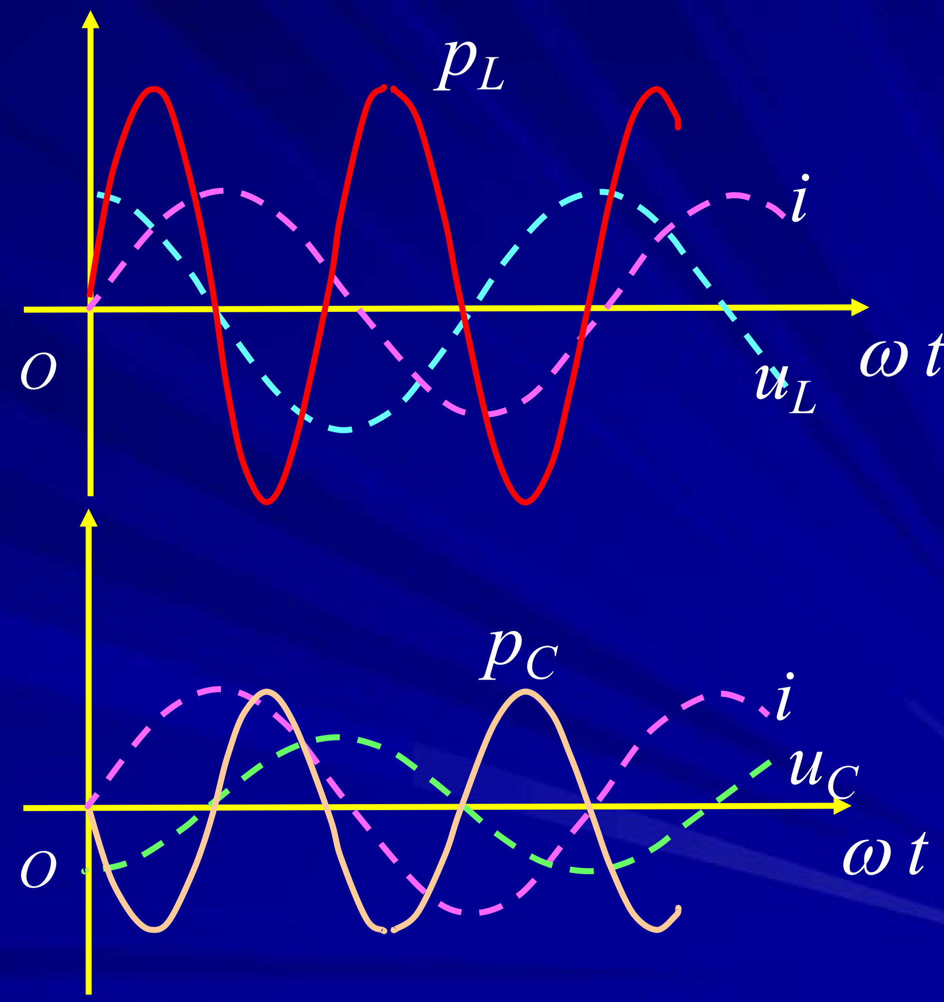
$Q_L = I^2X_L > 0$　吸收无功功率为正

$Q_C = I^2X_C < 0$　吸收无功功率为负（发出无功）

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2\sqrt{R^2 + X^2} = I^2|Z|$$

电感、电容的无功补偿作用

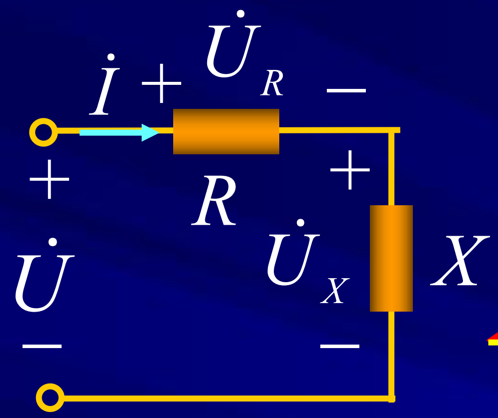


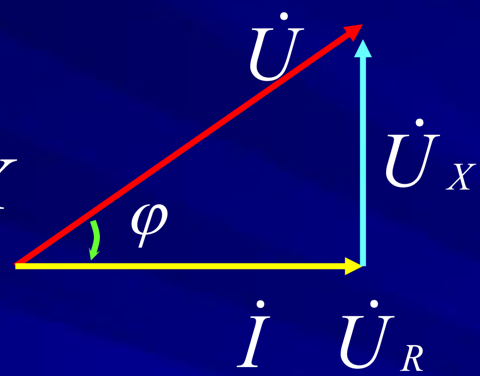


*L*发出功率时，*C*刚好吸收功率，与外电路交换功率为 p_L+p_C。*L*、*C*的无功功率具有互相补偿的作用。

电压、电流的有功分量和无功分量:

以感性负载为例



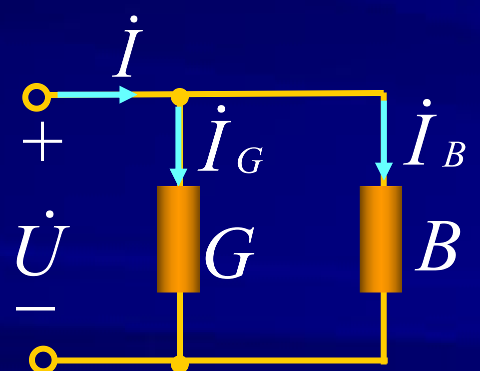


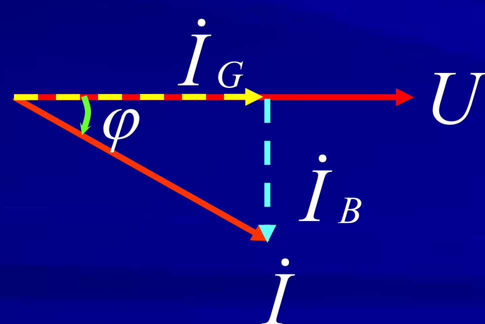
$$P = UI\cos\varphi = U_R I$$

$$Q = UI\sin\varphi = U_X I$$

称 $\dot{U}_R$ 为 $\dot{U}$ 的有功分量

称 $\dot{U}_X$ 为 $\dot{U}$ 的无功分量





$$P = UI\cos\varphi = UI_G$$

$$Q = UI\sin\varphi = UI_B$$

称 $\dot{I}_G$ 为 $\dot{I}$ 的有功分量

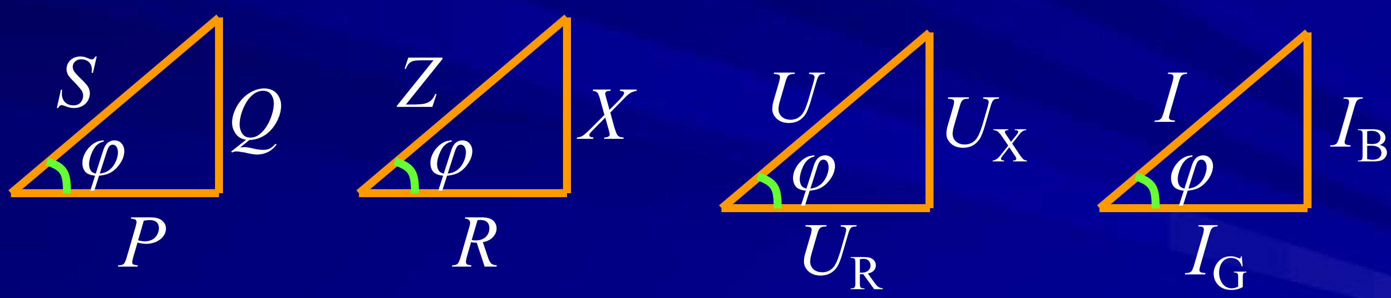
称 $\dot{I}_B$ 为 $\dot{I}$ 的无功分量

$$P = UI\cos\varphi = U_R I \qquad Q = UI\sin\varphi = U_X I$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = I\sqrt{U_R^2 + U_X^2} = IU$$

$$P = UI\cos\varphi = UI_G \qquad Q = UI\sin\varphi = UI_B$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U\sqrt{I_G^2 + I_B^2} = IU$$



相似三角形

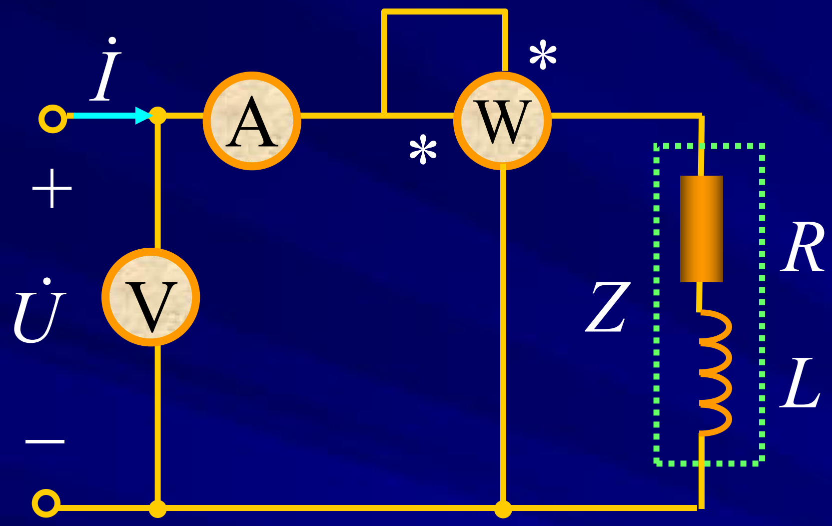
无功功率的物理意义:

反映电源和负载之间交换能量的速率。

$$Q_L = I^2 X_L = I^2 \omega L = \omega \cdot \frac{1}{2} L(\sqrt{2} I)^2$$

$$= \omega \cdot \frac{1}{2} L I_m^{\ 2} = 2\pi f W_{max} = \frac{2\pi}{T} \cdot W_{max}$$

例4-1 三表法测线圈参数。已知：f=50Hz，且测得 U=50V，I=1A，P=30W。



解法 1

$$S = UI = 50\times 1 = 50\text{V}\cdot\text{A}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\,\text{var}$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{30}{1} = 30\Omega$$

$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{40}{1} = 40\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{40}{100\pi} = 0.127\text{H}$$

解法2　$P = I^2 R \quad \Rightarrow R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{30}{1^2}\Omega = 30\Omega$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1}\Omega = 50\Omega$$ 又 $$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{|Z|^2 - R^2} = \frac{1}{314}\sqrt{50^2 - 30^2}\mathrm{H} = 0.127\mathrm{H}$$

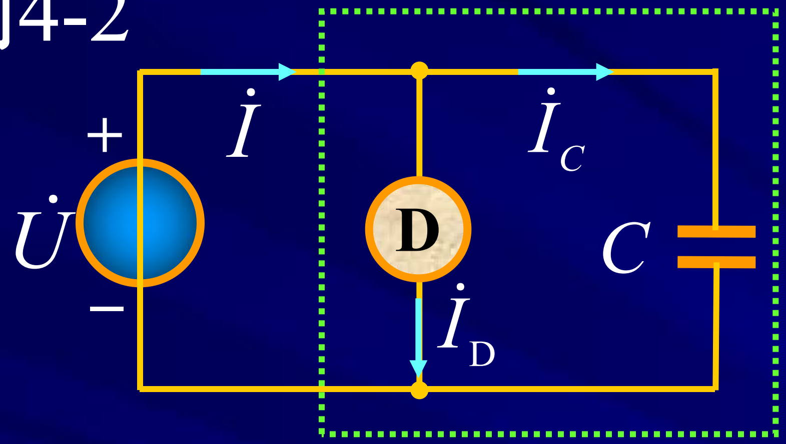
解法 3　$P = UI\cos\varphi \quad \cos\varphi = \dfrac{P}{UI} = \dfrac{30}{50\times 1} = 0.6$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{50}{1} = 50\Omega$$

$$R = |Z|\cos\varphi = 50\times 0.6\Omega = 30\Omega$$

$$X_L = |Z|\sin\varphi = 50\times 0.8\Omega = 40\Omega$$

例4-2



已知：电动机 P_D=1 000W，U=220V，f=50Hz，C=30μF，$\cos\varphi_D$=0.8，求：负载电路的功率因数。

解

$$I_D = \frac{P_D}{U\cos\varphi_D} = \frac{1000}{220\times0.8}\text{A} = 5.68\text{A}$$

$$\cos\varphi_D = 0.8(\text{感性}),\quad \varphi_D = 36.8^\circ$$

设 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ$

$$\dot{I}_D = 5.68\angle -36.8^\circ,\quad \dot{I}_C = 220\cdot \mathrm{j}\omega C = \mathrm{j}2.08\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_D + \dot{I}_C = (4.54 - \mathrm{j}1.33)\text{A} = 4.73\angle -16.3^\circ\ \text{A}$$

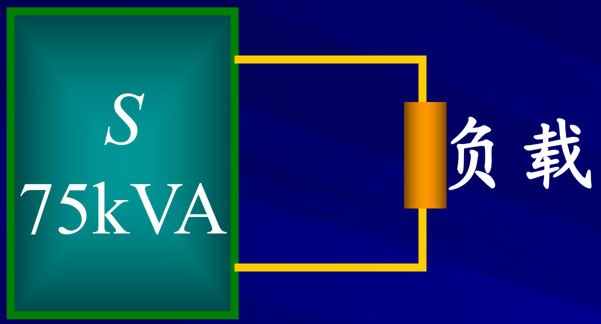
$$\cos\varphi = \cos[0^\circ - (-16.3^\circ)] = 0.96$$

7. 功率因数的提高

功率因数低带来的问题:

①设备不能充分利用，电流到了额定值，但功率容量还有。

$$P=UI\cos\varphi=S\cos\varphi$$



$\cos\varphi=1$，　$P=S=75\text{kW}$

$\cos\varphi=0.7$，$P=0.7S=52.5\text{kW}$

设备容量 S(额定)向负载送多少有功功率要由负载的阻抗角决定。

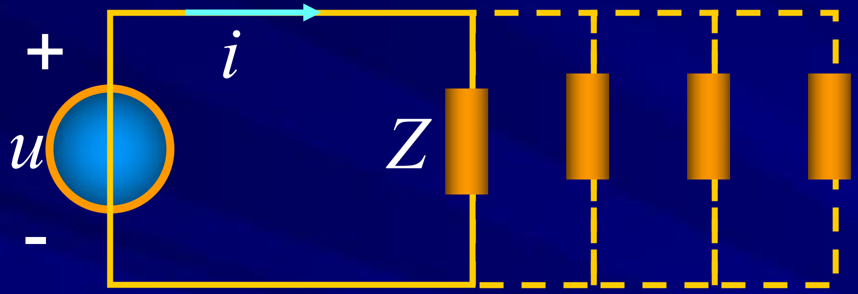
一般用户：　异步电机　空载　$\cos\varphi=0.2\sim0.3$

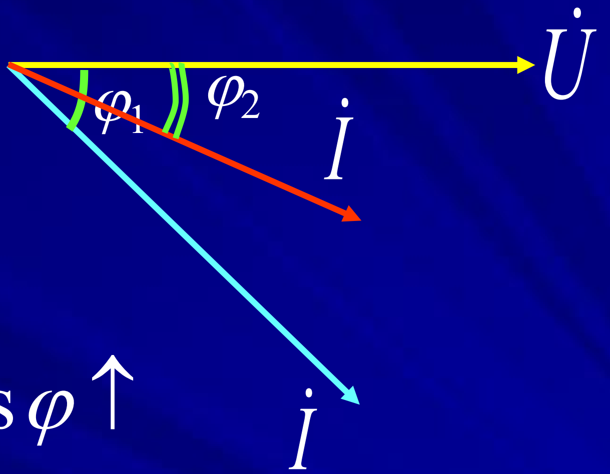
　　　　　　　　　　　满载　$\cos\varphi=0.7\sim0.85$

　　　　　　荧光灯　　　　　$\cos\varphi=0.45\sim0.6$

② 当输出相同的有功功率时，线路上电流大，

$I=P/(U\cos\varphi)$，线路压降损耗大。





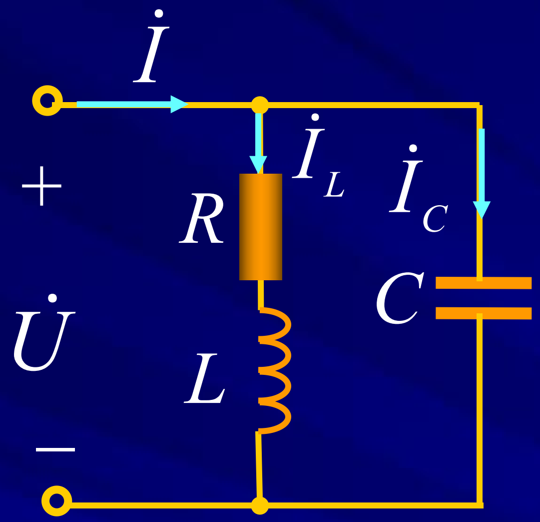
$P=UI\cos\varphi$ $I\downarrow$ $U\uparrow$ $\cos\varphi\uparrow$

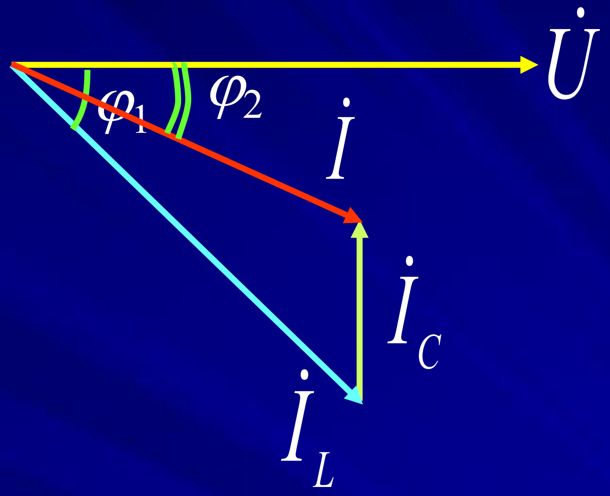
解决办法：（1）高压传输。

（2）改进自身设备。

（3）并联电容，提高功率因数。

分析





特点：

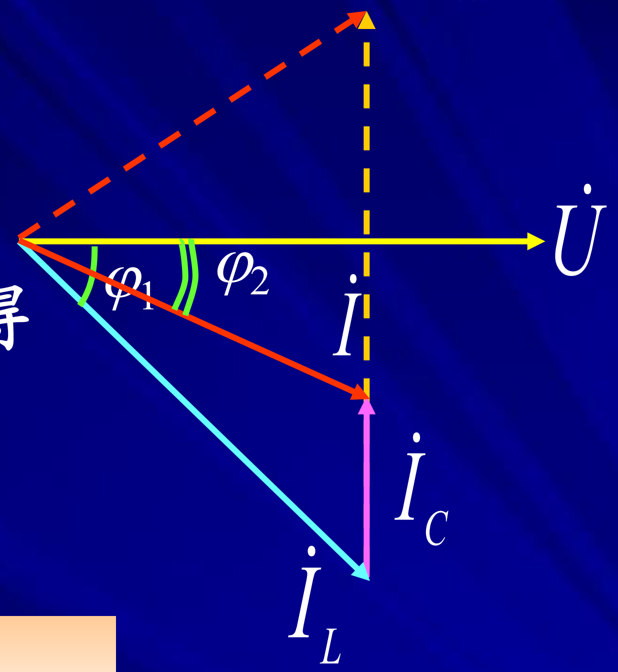
并联电容后，原负载的电压和电流不变，吸收的有功功率和无功功率不变，即：负载的工作状态不变。但电路的功率因数提高了。

并联电容的确定:

$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

将 $I = \dfrac{P}{U\cos\varphi_2}$ ， $I_L = \dfrac{P}{U\cos\varphi_1}$ 代入得

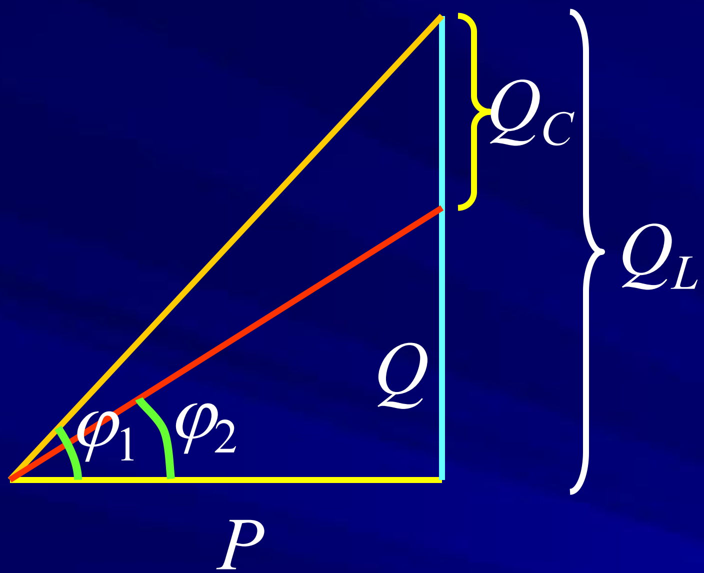
$$I_C = \omega CU = \frac{P}{U}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$



$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

补偿容量不同
- 欠
- 全——不要求(电容设备投资增加，经济效果不明显)
- 过——功率因数又由高变低(性质不同)

并联电容也可以用功率三角形确定:



$$|Q_C| = |Q_L - Q| = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

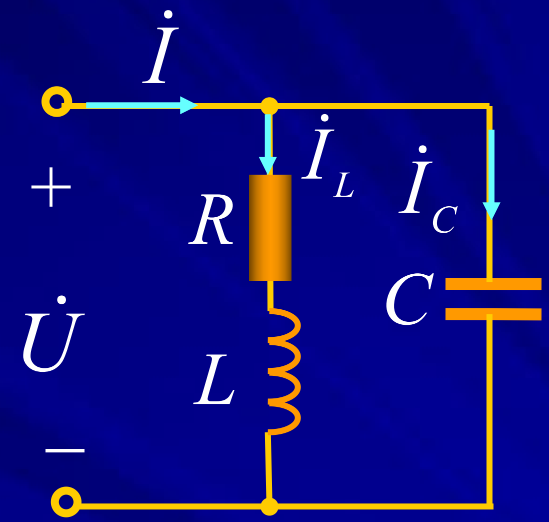
$$|Q_C| = \omega C U^2$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

从功率角度看 :

并联电容后，电源向负载输送的有功功率 $UI_L\cos\varphi_1 = UI\cos\varphi_2$ 不变，但是电源向负载输送的无功 $UI\sin\varphi_2 < UI_L\sin\varphi_1$ 减少了，减少的这部分无功功率由电容“产生”来补偿，使感性负载吸收的无功功率不变，而功率因数得到改善。

例4-3已知：f=50Hz, U=220V, P=10kW, $\cos\varphi_1$=0.6，要使功率因数提高到0.9，求并联电容C，并联前后电路的总电流各为多大？



解

$$\cos\varphi_1 = 0.6 \qquad \varphi_1 = 53.13^\circ$$

$$\cos\varphi_2 = 0.9 \qquad \varphi_2 = 25.84^\circ$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$$

$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\tan 53.13^\circ - \tan 25.84^\circ)\text{F} = 557\mu\text{ F}$$

未并电容时：$$I = I_L = \frac{P}{U\cos\varphi_1} = \frac{10\times10^3}{220\times0.6}\text{A} = 75.8\text{A}$$

并联电容后：$$I = \frac{P}{U\cos\varphi_2} = \frac{10\times10^3}{220\times0.9}\text{A} = 50.5\text{A}$$

若要使功率因数从0.9再提高到0.95，试问还应增加多少并联电容，此时电路的总电流是多大？

解

$$\cos\varphi_1 = 0.9 \qquad \varphi_1 = 25.84^\circ$$

$$\cos\varphi_2 = 0.95 \qquad \varphi_2 = 18.19^\circ$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2) \qquad I = \frac{10\times10^3}{220\times0.95}\mathrm{A} = 47.8\mathrm{A}$$

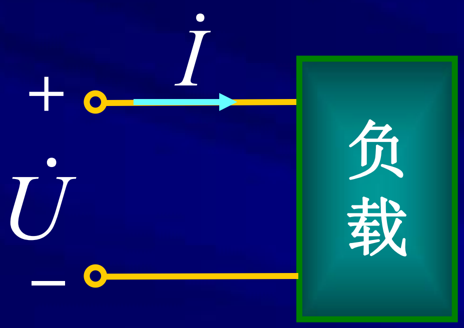
$$= \frac{10\times10^3}{314\times220^2}(\tan25.84^\circ - \tan18.19^\circ)\mathrm{F} = 103\mu\,\mathrm{F}$$

注意　$\cos\varphi$ 提高后，线路上总电流减少，但继续提高 $\cos\varphi$ 所需电容很大，增加成本，总电流减小却不明显。因此一般将 $\cos\varphi$ 提高到0.9即可。

9-5 复功率

1. 复功率

为了用相量$\dot{U}$和$\dot{I}$来计算功率，引入“复功率”



定义：$\overline{S}=\dot{U}\dot{I}^{*}$　单位 V·A

$$\overline{S}=UI\angle(\phi_u-\phi_i)=UI\angle\varphi=S\angle\varphi$$

$$=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi=P+\mathrm{j}Q$$

也可表示为

$$\overline{S}=\dot{U}\dot{I}^{*}=Z\dot{I}\cdot\dot{I}^{*}=ZI^{2}=(R+\mathrm{j}X)I^{2}=RI^{2}+\mathrm{j}XI^{2}$$

或 $\overline{S}=\dot{U}\dot{I}^{*}=\dot{U}(\dot{U}Y)^{*}=\dot{U}\cdot\dot{U}^{*}Y^{*}=U^{2}Y^{*}$

结论

① $\overline{S}$ 是复数，而不是相量，它不对应任意正弦量。

② $\overline{S}$ 把 P、Q、S 联系在一起，它的实部是平均功率，虚部是无功功率，模是视在功率。

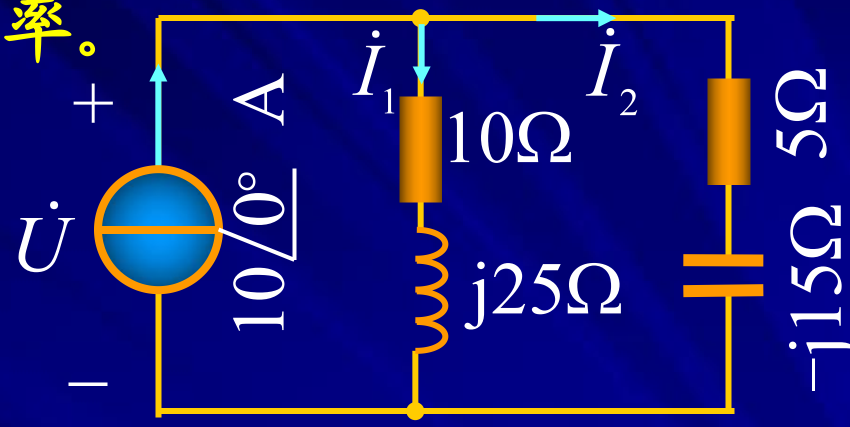
③ 复功率满足守恒定理：在正弦稳态下，任一电路的所有支路吸收的复功率之和为零。即

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} P_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} Q_k = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{b}(P_k + \mathrm{j}Q_k) = \sum_{k=1}^{b}\overline{S}_k = 0}$$

$$U \neq U_1 + U_2 \quad \Rightarrow S \neq S_1 + S_2$$

注意 复功率守恒，视在功率不守恒。

例5-1 求电路各支路的复功率。



解1

$$Z=\frac{(10+\mathrm{j}25)\times(5-\mathrm{j}15)}{(10+\mathrm{j}25)+(5-\mathrm{j}15)}\Omega$$

$$\dot{U}=10\times Z=236\angle -37.1^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\overline{S}_{发}=236\angle -37.1^\circ\times 10\mathrm{V\cdot A}=(1882-\mathrm{j}1424)\ \mathrm{V\cdot A}$$

$$\overline{S}_{1吸}=U^2Y_1^*=236^2\left(\frac{1}{10+\mathrm{j}25}\right)^*\mathrm{V\cdot A}=(768+\mathrm{j}1920)\mathrm{V\cdot A}$$

$$\overline{S}_{2吸}=U^2Y_2^*=(1113-\mathrm{j}3\,345)\ \mathrm{V\cdot A}$$

$$\overline{S}_{1吸}+\overline{S}_{2吸}=\overline{S}_{发}$$

解2

$$\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ \times \frac{5-\mathrm{j}15}{10+\mathrm{j}25+5-\mathrm{j}15}\,\mathrm{A} = 8.77\angle -105.3^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_s - \dot{I}_1 = 14.94\angle 34.5^\circ\ \mathrm{A}$$

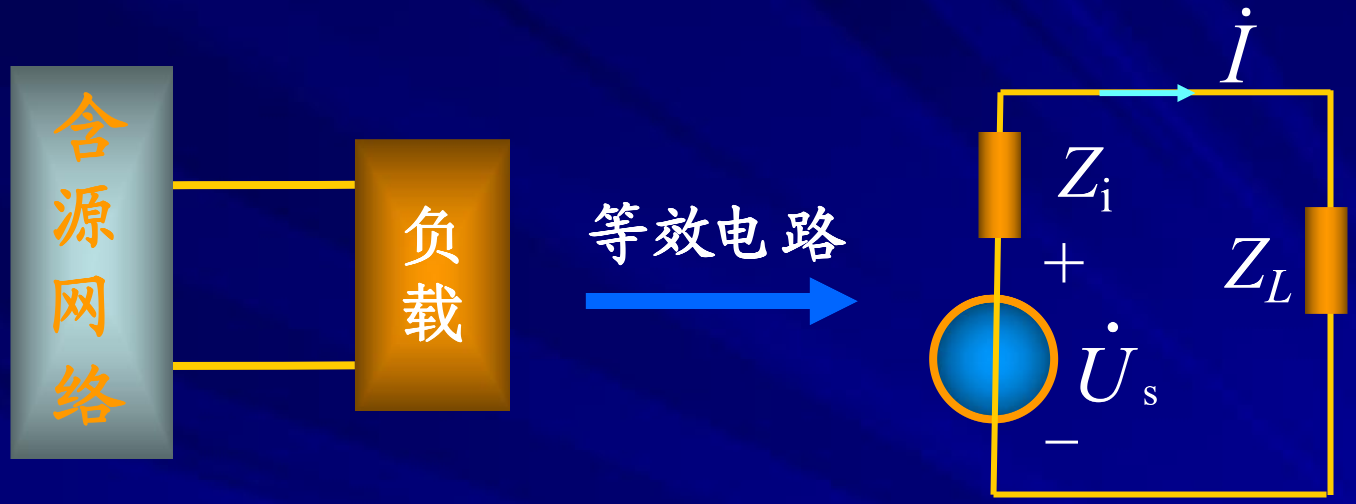
$$\overline{S}_{1吸} = I_1^{\ 2} Z_1 = 8.77^2 \times (10+\mathrm{j}25)\mathrm{V\cdot A} = (769+\mathrm{j}1\,923)\mathrm{V\cdot A}$$

$$\overline{S}_{2吸} = I_2^{\ 2} Z_2 = 14.94^2 \times (5-\mathrm{j}15)\mathrm{V\cdot A} = (1\ 116-\mathrm{j}3\,348\,)\mathrm{V\cdot A}$$

$$\overline{S}_{发} = \dot{I}_1 Z_1 \cdot \dot{I}_S^{\ *} = 10\times 8.77\angle -105.3^\circ (10+\mathrm{j}25)\mathrm{V\cdot A}$$

$$= (1\,885-\mathrm{j}1\,423)\ \mathrm{V\cdot A}$$

9-6 最大功率传输



$$Z_i = R_i + jX_i,\quad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z_i + Z_L},\quad I = \frac{U_s}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}}$$

有功功率　$P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_s^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$

讨论　正弦电路中负载获得最大功率P_{max}的条件。

$$P=\frac{R_L U_s^2}{(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2}$$

$$P_{max}=\frac{U_s^2}{4R_i}$$

①若$Z_L=R_L+jX_L$可任意改变

（a）先设 R_L不变，X_L改变

显然，当$X_i+X_L=0$，即$X_L=-X_i$时，P获得最大值。

（b）再讨论 R_L改变时，P的最大值。

当$R_L=R_i$时，P获得最大值

$R_L=R_i$　$X_L=-X_i$ $\rightarrow$ $Z_L=Z_i^*$

最佳匹配条件

②若$Z_L = R_L + jX_L$只允许X_L改变

获得最大功率的条件是：$X_i + X_L = 0$，即 $X_L = -X_i$

最大功率为 $$P_{max} = \frac{R_L U_s^2}{(R_i + R_L)^2}$$

③若$Z_L = R_L$为纯电阻

电路中的电流为 $$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z_i + R_L},\quad I = \frac{U_s}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}}$$

负载获得的功率为 $$P = \frac{R_L U_s^2}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}$$

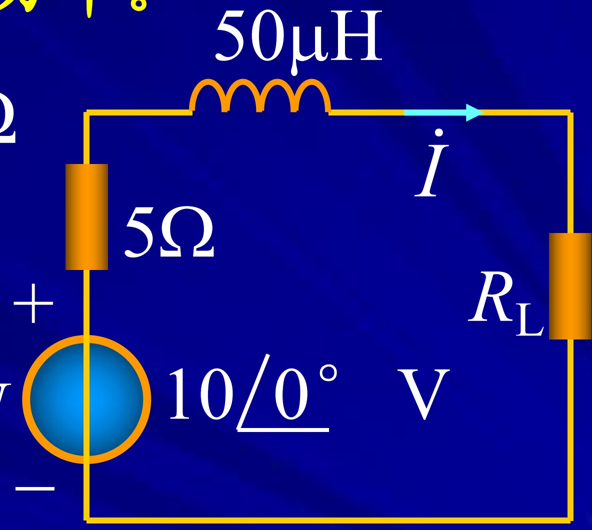
模匹配

令 $\dfrac{dP}{dR_L} = 0 \Rightarrow$ 获得最大功率条件为 $R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = |Z_i|$

例6-1电路如图。求：1. R_L=5Ω时其消耗的功率;

2. R_L=?能获得最大功率，并求最大功率;

3. 在R_L两端并联一电容，问R_L和C为多大时能与内阻抗最佳匹配，并求最大功率。



$\omega = 10^5$ rad/s

解

$$Z_i = R + jX_L = 5 + j10^5 \times 50 \times 10^{-6}\,\Omega$$

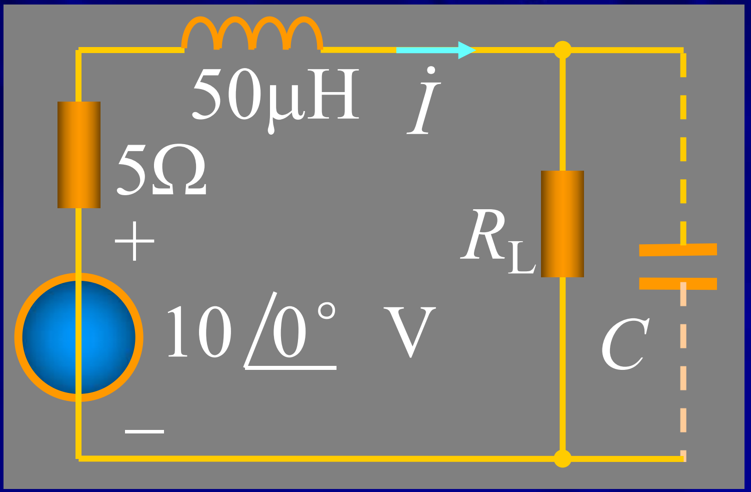
$$= (5 + j5)\,\Omega$$

1. $$\dot{I} = \frac{10\angle 0^\circ}{5 + j5 + 5}\,\text{A} = 0.89\angle -26.6^\circ\,\text{A}$$

$$P_L = I^2 R_L = 0.89^2 \times 5\,\text{W} = 4\,\text{W}$$

2. 当 $R_L = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}\,\Omega = 7.07\,\Omega$ 获最大功率

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^\circ}{5+\mathrm{j}5+7.07}\,\mathrm{A}=0.766\angle -22.5^\circ\ \mathrm{A}$$



$$P_L=I^2R_L=0.766^2\times 7.07\mathrm{W}=4.15\mathrm{W}$$

3. $$Y=\frac{1}{R_L}+\mathrm{j}\omega C$$

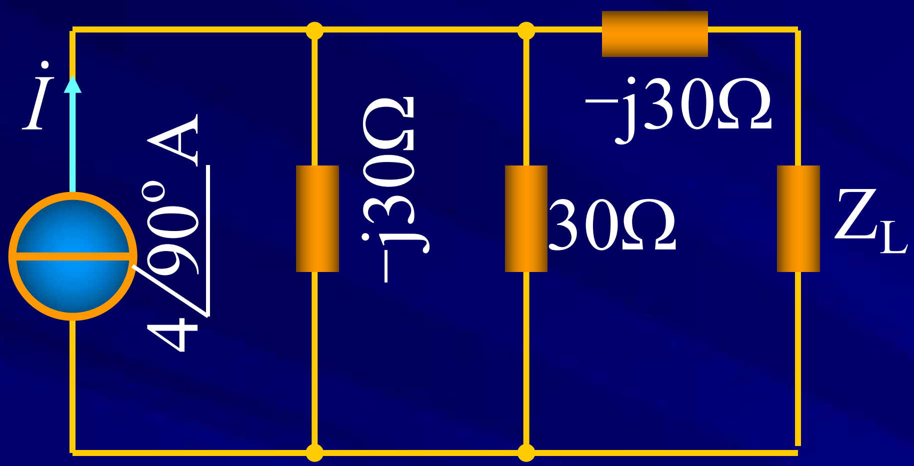
$$Z_L=\frac{1}{Y}=\frac{R_L}{1+\mathrm{j}\omega CR_L}=\frac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}-\mathrm{j}\frac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}$$

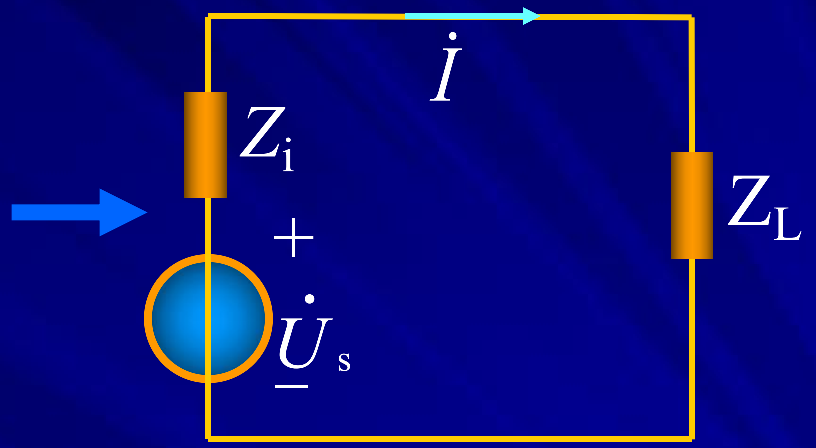
当 $$\begin{cases}\dfrac{R_L}{1+(\omega CR_L)^2}=5\\[2ex]\dfrac{\omega CR_L^2}{1+(\omega CR_L)^2}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R_L=10\Omega\\ C=1\,\mu\mathrm{F}\end{cases}$$ 获最大功率

$$\dot{I}=\frac{10\angle 0^\circ}{10}\mathrm{A}=1\mathrm{A}$$

$$P_{max}=I^2R_i=1\times 5\mathrm{W}=5\mathrm{W}$$

例6-2 求 Z_L=?时能获得最大功率，并求最大功率。





解

$$Z_i = -j30 + \frac{-j30 \times 30}{-j30 + 30}\Omega = (15 - j45)\Omega$$

$$\dot{U}_s = j4 \cdot \frac{-j30 \times 30}{30 - j30} = 60\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$

当 $Z_L = Z_i^* = (15 + j45)\Omega$

有 $P_{max} = \dfrac{(60\sqrt{2})^2}{4 \times 15}\text{W} = 120\text{W}$