第十五讲
连续时间信号的离散处理

杜清河
西安交通大学
信息与通信工程学院
2025春

内容提要

- 连续时间信号的离散时间处理
- 应用举例

内容提要

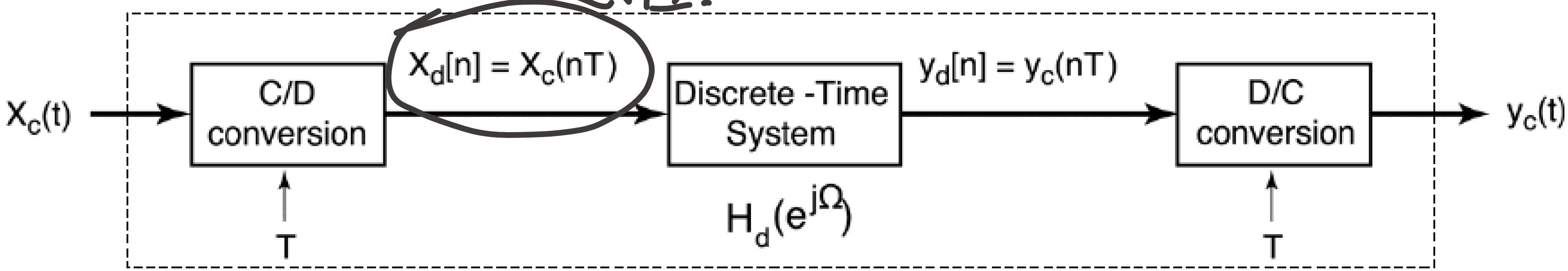
- 连续时间信号的离散时间处理
- 应用举例

引言

- 采样定理：连续时间信号的离散化表示
- 得益于数字技术的飞速发展，与连续时间信号相比，离散时间信号的处理更为灵活、方便和廉价
- 利用离散时间信号处理技术来实现连续时间系统并处理连续时间信号

系统模型

延拓.



- **两点说明：**

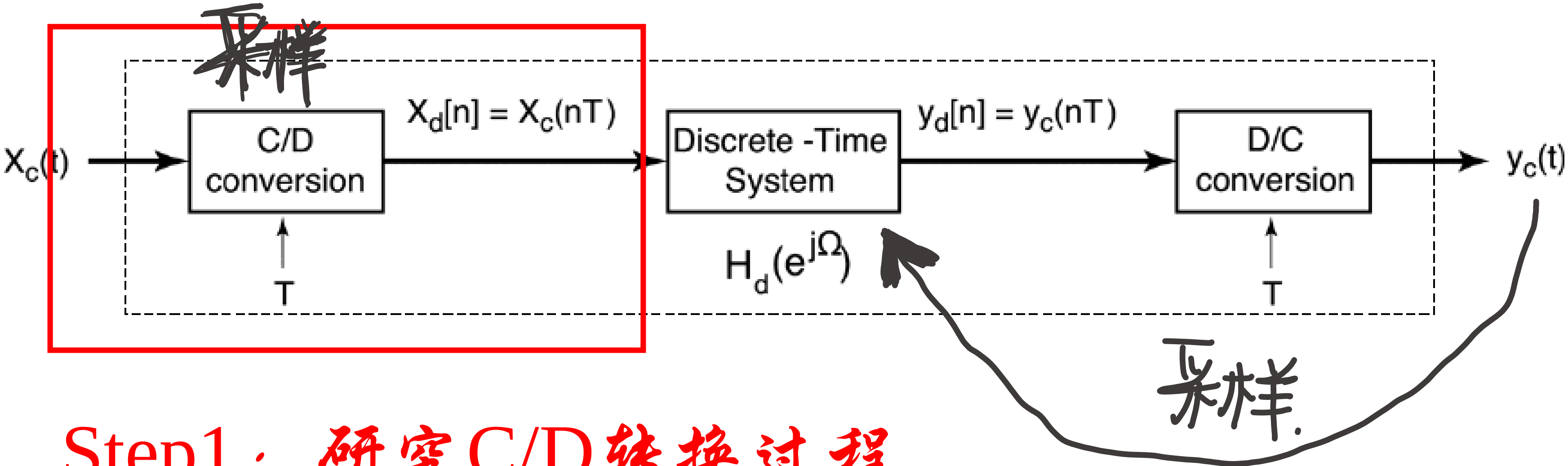
1. 为避免混淆，引入如下记号：

ω —— 连续时间的频率变量，模拟频率

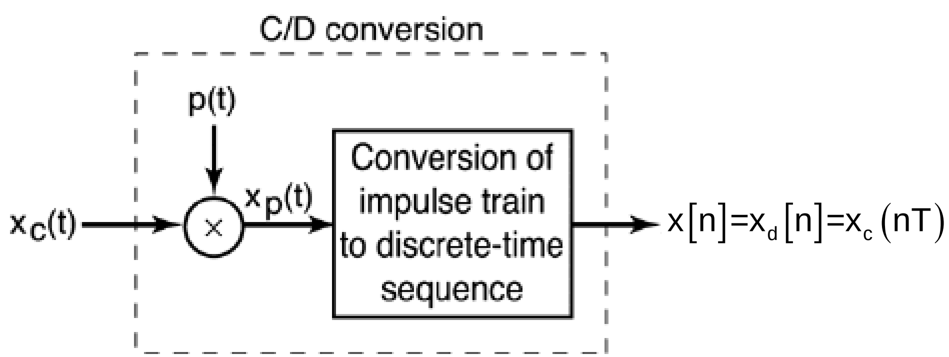
Ω —— 离散时间的频率变量，数字频率

2. C/D和D/C转换并不完全等同于A/D和D/A转换

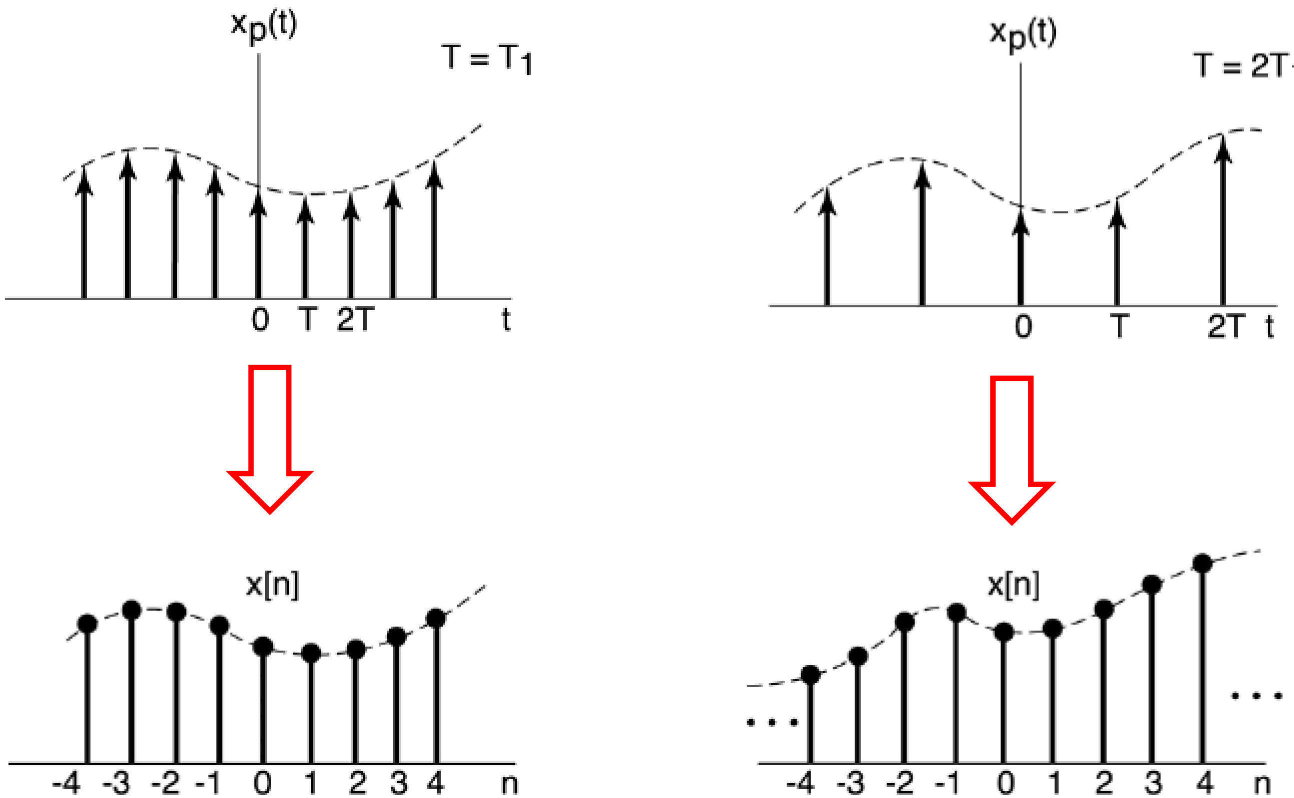
理论分析



Step1：研究C/D转换过程

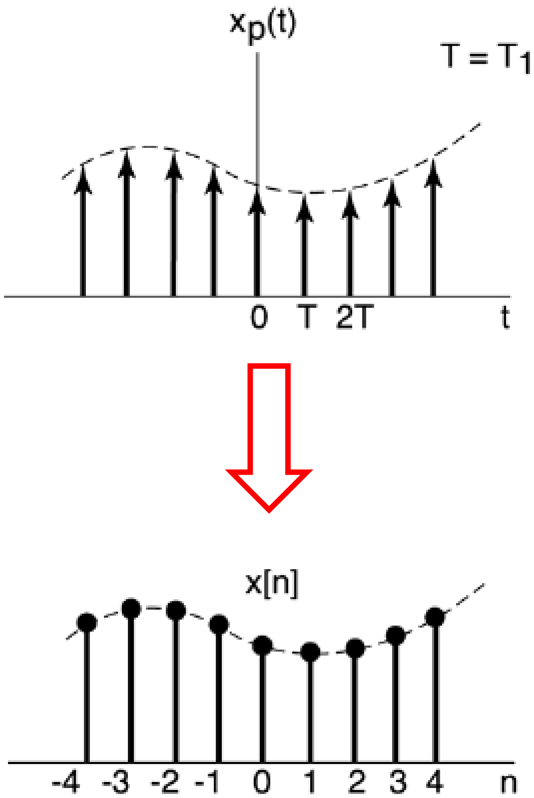


理论分析



欠点

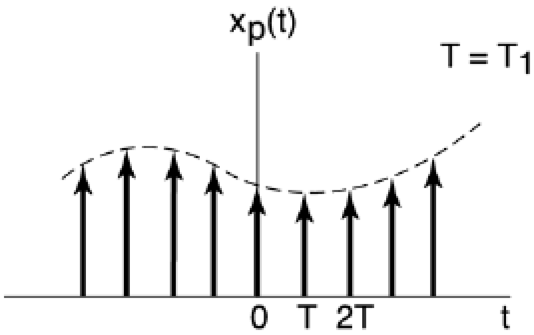
理论分析——时域

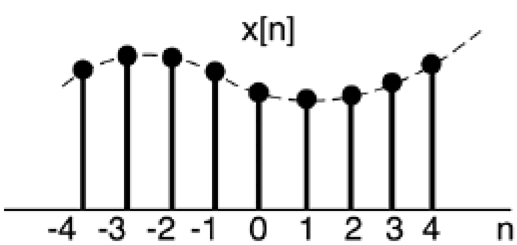


$$x_p(t) = x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{x_c(nT)}\,\delta(t-nT)$$

$$x[n] = \underline{x_c(nT)}$$

理论分析——频域





$$x_p(t)=x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$\underline{X_p(j\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)\right)e^{-j\omega t}dt$$

延拓

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)e^{-j\omega t}dt\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

用数步反

$$x_d[n]=x_c(nT)$$

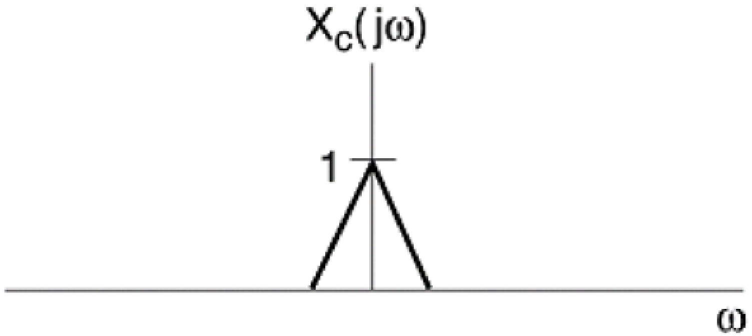
$$X_d\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_d[n]e^{-j\Omega n}$$

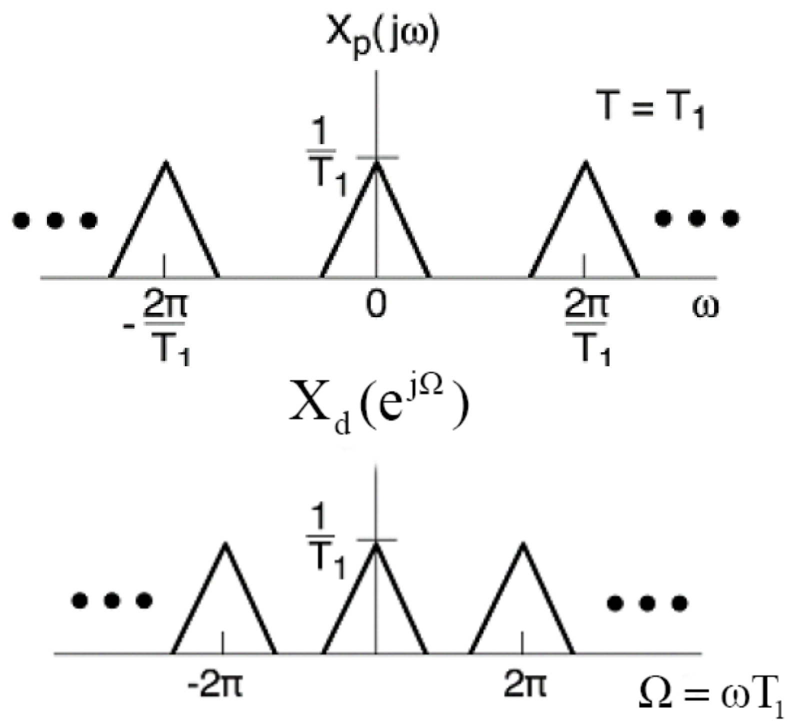
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

$$\Omega=\omega T$$

理论分析

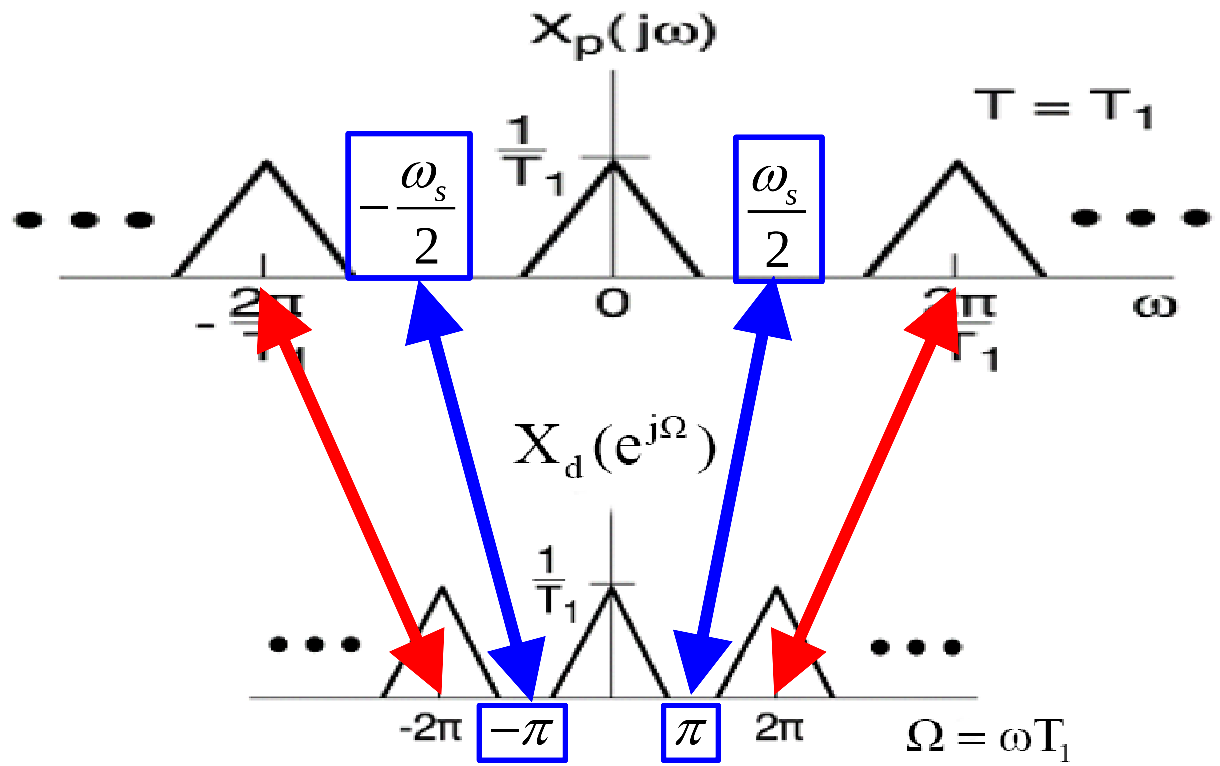
比较上述两式可知，$\boxed{X_d\left(e^{j\Omega}\right)=X_p\left(j\omega\right)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}}$





理论分析

比较上述两式可知，$X_d\left(e^{j\Omega}\right)=X_p\left(j\omega\right)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$



理论分析

这说明，数字频率和模拟频率之间的关系为：

$$\boxed{\Omega = \omega T}$$

几点讨论：

- 线性频率尺度变换可以看成是由冲激串到序列转换时所引入的时间归一化的结果
- 当 $\omega = \omega_s$ 时，$\Omega = \omega_s T = 2\pi$
- 当 $\omega = \pm\omega_s / 2$ 时，$\Omega = \pm\omega_s T / 2 = \pm\pi$ 数字相位，而非频率

理论分析

$$\boxed{\Omega = \omega T}$$

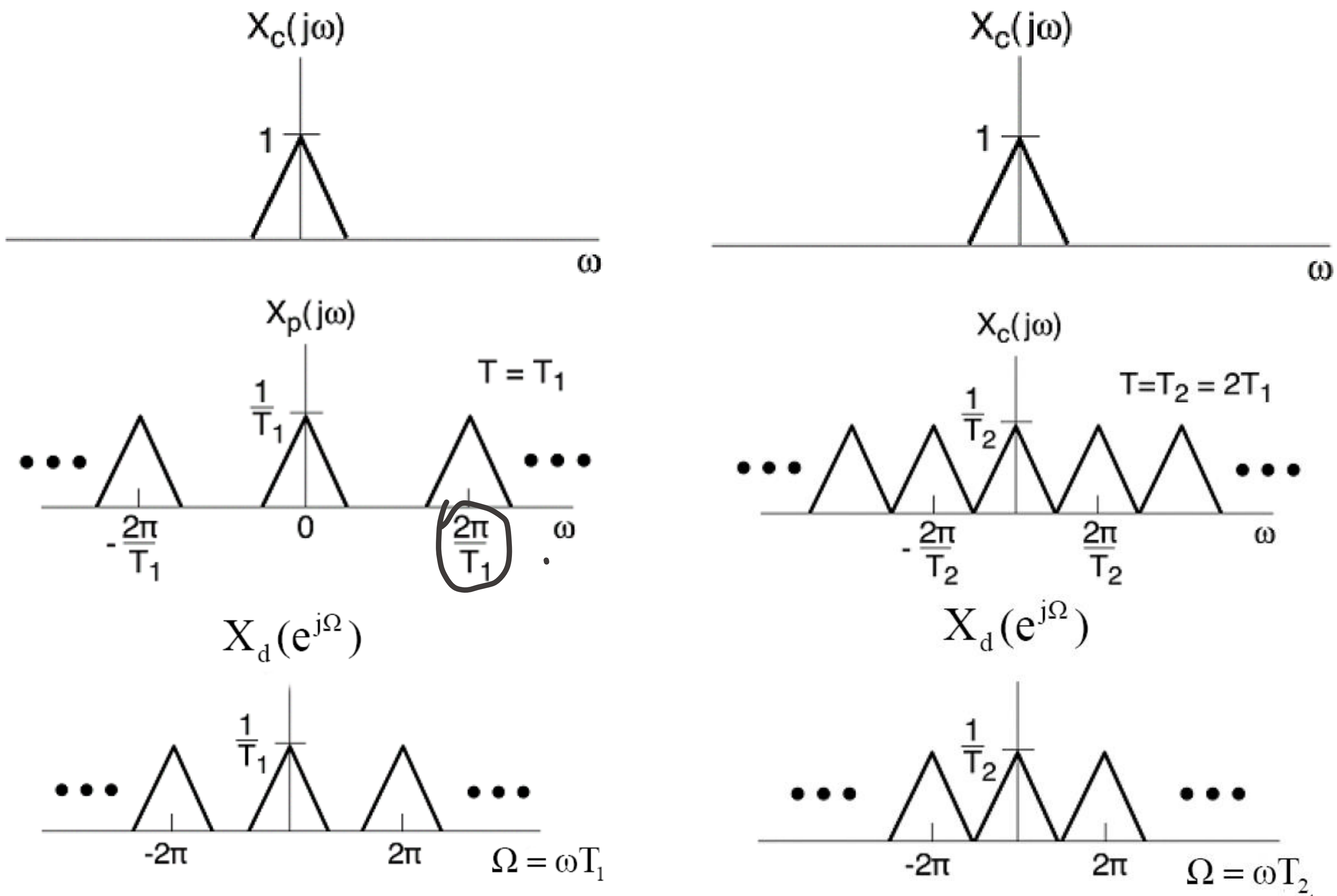
数字频率的量纲为弧度

- 数字频率是相对频率

$$\Omega = \omega T = \omega / f_s$$

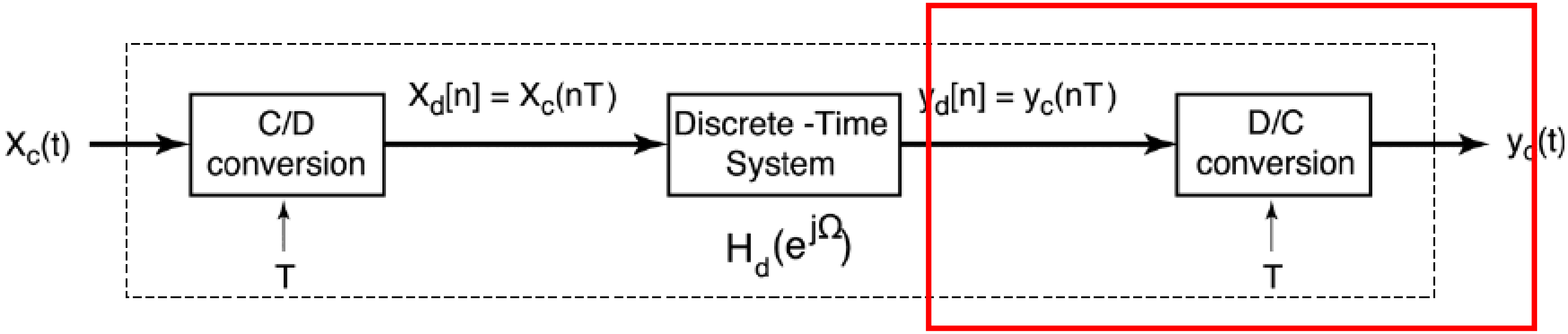
- 用不同的采样周期对同一个连续时间信号进行采样，得到的序列可能不同，但只要满足采样定理，则反映的是同一个信号，只是数字域所占的带宽不同

理论分析

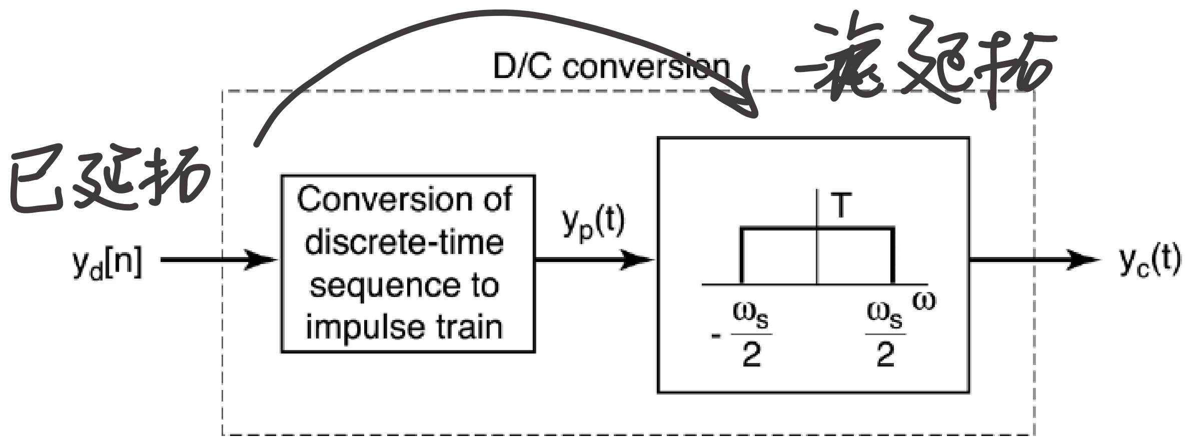


$X_c(j\omega)$
1
ω
$X_c(j\omega)$
1
ω
$X_p(j\omega)$
$T = T_1$
$\frac{1}{T_1}$
$-\frac{2\pi}{T_1}$
0
$\frac{2\pi}{T_1}$
ω
$X_c(j\omega)$
$T=T_2=2T_1$
$\frac{1}{T_2}$
$-\frac{2\pi}{T_2}$
$\frac{2\pi}{T_2}$
ω
$X_d(e^{j\Omega})$
$\frac{1}{T_1}$
-2π
2π
$\Omega = \omega T_1$
$X_d(e^{j\Omega})$
$\frac{1}{T_2}$
-2π
2π
$\Omega = \omega T_2$

理论分析



Step2：研究D/C转换过程



理论分析

$$y_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_d[n]\delta(t-nT) \Rightarrow Y_p(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_d[n]e^{-j\omega nT}$$

而：

$$Y_d\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_d[n]e^{-j\Omega n}$$

比较上述两式可得：

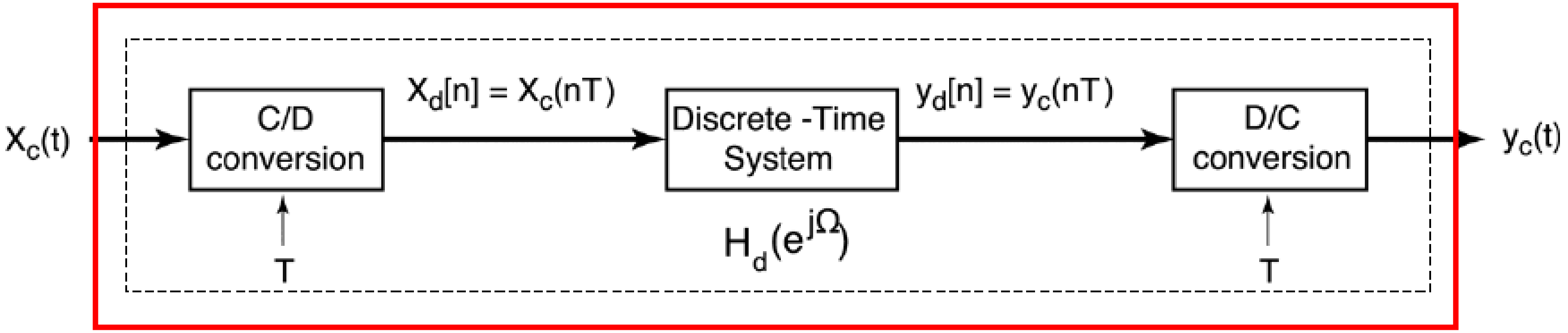
$$Y_d\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega=\omega T}=Y_p(j\omega) \quad \text{或} \quad Y_p(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}=Y_d(e^{j\Omega})$$

最终通过低通滤波器之后的输出为：

$$Y_c(j\omega)=H_r(j\omega)Y_d(e^{j\omega T})=\begin{cases} TY_d(e^{j\omega T}), & |\omega|<\omega_s/2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

理论分析

连续时间系统



Step3：研究整个系统

假设离散时间系统是LTI的，则有：

$$Y_d\left(e^{j\Omega}\right) = H_d\left(e^{j\Omega}\right) X_d\left(e^{j\Omega}\right)$$

数字处理

而之前已经求出：

$$Y_c\left(j\omega\right) = H_r(j\omega)Y_d(e^{j\omega T})$$

被延拓

理论分析

因此：

$$Y_c(j\omega)=H_r(j\omega)H_d(e^{j\omega T})X_d(e^{j\omega T})$$

根据下述关系： $\cancel{X}$ $w=\frac{\Omega}{T}$

$$X_d\left(e^{j\Omega}\right)=X_p\left(j\left(\frac{\Omega}{T}\right)\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

并利用$\Omega=\omega T$，可得：

$$Y_c(j\omega)=H_r(j\omega)H_d(e^{j\omega T})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

如果输入信号$x_c(t)$带限于π/T，则：

$$Y_c(j\omega)=\begin{cases}H_d(e^{j\omega T})X_c(j\omega), & |\omega|<\pi/T\\ 0, & |\omega|\geq\pi/T\end{cases}$$

$H_r(jw)$会解决$\frac{\pi}{T}<|w|<\frac{\pi}{T}$

理论分析

因此，如果输入是带限的，并且采样频率高于奈奎斯特率，则整个系统的输入与输出通过下述关系联起来：

$$Y_c(j\omega)=H_c(j\omega)X_c(j\omega)$$

等效连续时间系统的频率响应

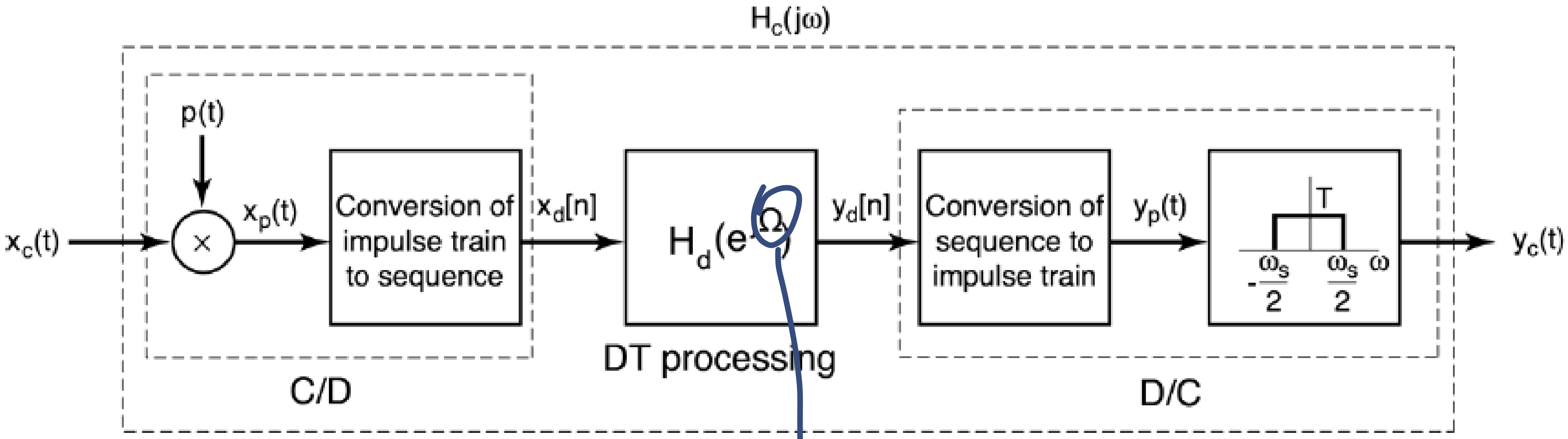
式中：

$$H_c(j\omega)=\begin{cases}H_d(e^{j\omega T}), & |\omega|<\omega_s/2\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

可看作LTI

这一结果表明：利用固定的离散时间滤波器和可变的采样率就可以实现截止频率可调节的连续时间滤波器。

连续时间信号的离散时间处理系统



$$H_c(j\omega)=\begin{cases}H_d(e^{j\omega T}), & |\omega|<\omega_s/2\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

连续时间信号的离散时间处理系统

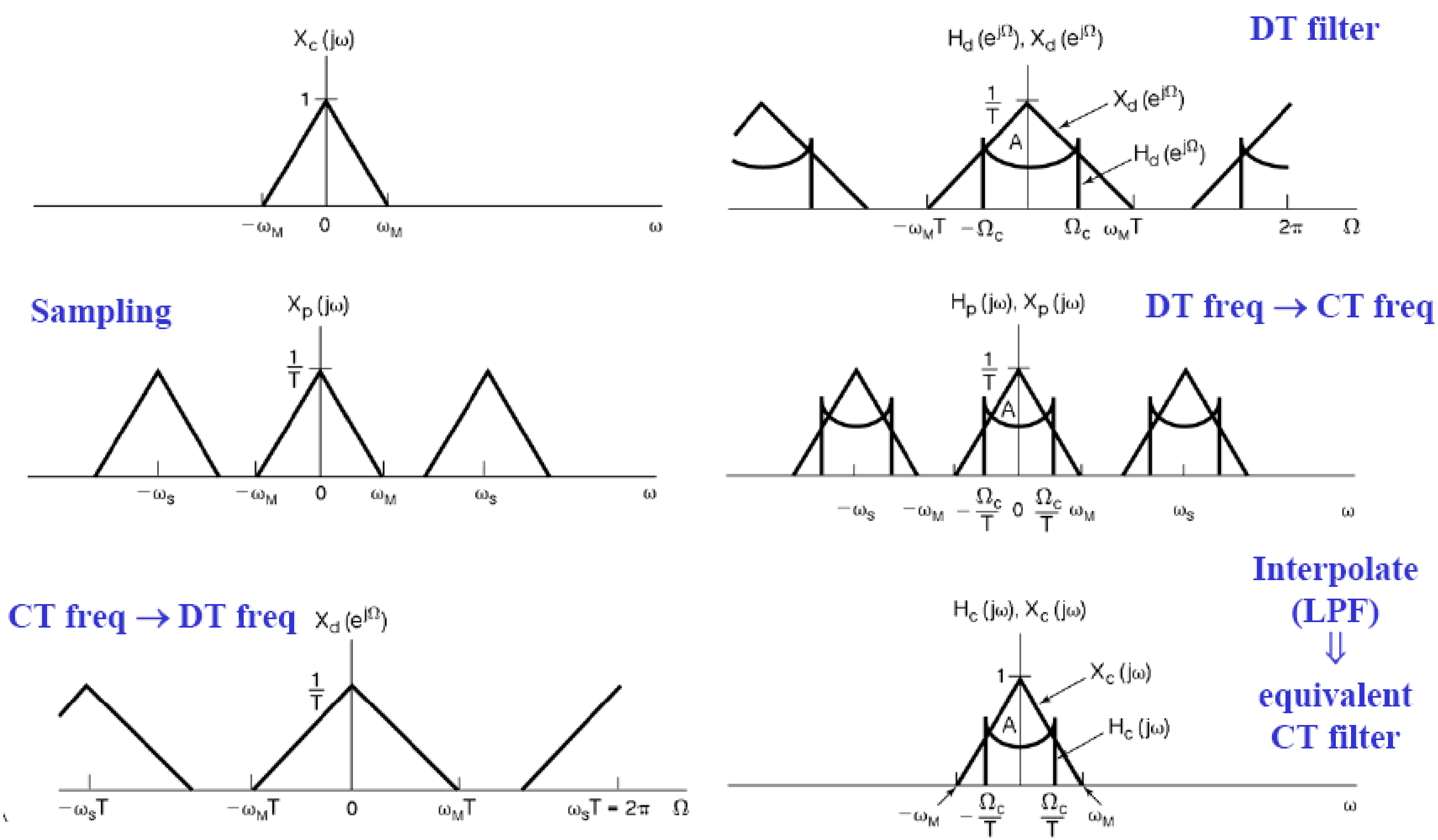
几点讨论：

- 在满足如下两个条件时，整个系统等效为一个连续时间LTI系统：

  1) 离散时间子系统是LTI的；内系统

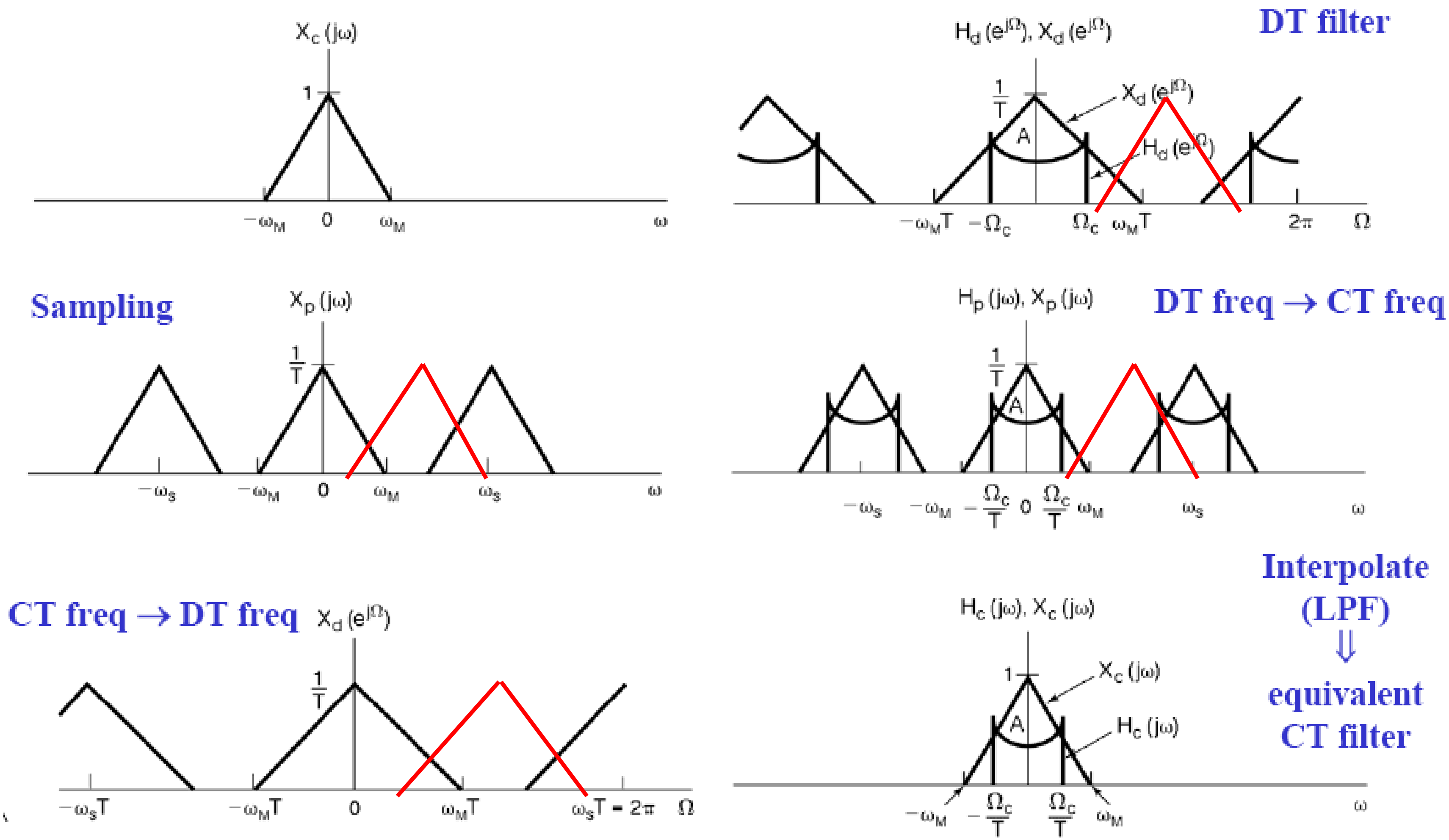
  2) 输入信号必须是带限的，并且采样频率足够高，以使得任何混叠的分量都被离散时间子系统所滤除。

理论分析



$X_c(j\omega)$
1
$-\omega_M$ 0 ω_M ω
DT filter
$H_d(e^{j\Omega}), X_d(e^{j\Omega})$
$\frac{1}{T}$
A
$X_d(e^{j\Omega})$
$H_d(e^{j\Omega})$
$-\omega_M T$ $-\Omega_c$ Ω_c $\omega_M T$ 2π Ω
Sampling
$X_p(j\omega)$
$\frac{1}{T}$
$-\omega_s$ $-\omega_M$ 0 ω_M ω_s ω
DT freq → CT freq
$H_p(j\omega), X_p(j\omega)$
$\frac{1}{T}$
A
$-\omega_s$ $-\omega_M$ $-\frac{\Omega_c}{T}$ 0 $\frac{\Omega_c}{T}$ ω_M ω_s ω
CT freq → DT freq
$X_d(e^{j\Omega})$
$\frac{1}{T}$
$-\omega_s T$ $-\omega_M T$ 0 $\omega_M T$ $\omega_s T = 2\pi$ Ω
Interpolate
(LPF)
⇓
equivalent
CT filter
$H_c(j\omega), X_c(j\omega)$
1
A
$X_c(j\omega)$
$H_c(j\omega)$
$-\omega_M$ $-\frac{\Omega_c}{T}$ $\frac{\Omega_c}{T}$ ω_M ω

连续时间信号的离散时间处理系统



连续时间信号的离散时间处理系统

- 等效的连续时间LTI系统一定是带限的，且其频率响应既和离散时间子系统的频率响应有关，也和采样频率有关。
- 为了实现一个带限的连续时间系统，可以等价地设计一个离散时间系统，该离散时间系统的频率响应按照如下方式确定：

$$H_d(e^{j\Omega}) = H_c(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} \quad |\Omega| < \pi$$

内容提要

- 连续时间信号的离散时间处理
- 应用举例

数字微分器

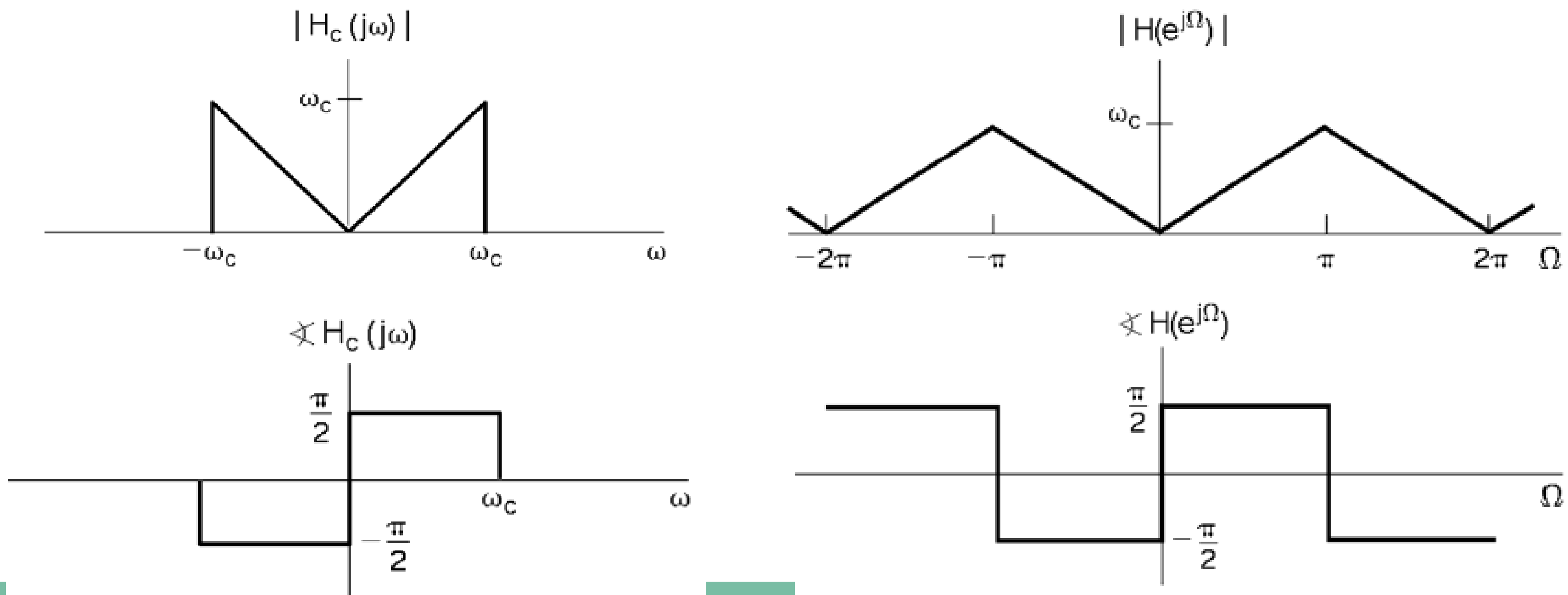
$$y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c(t) \qquad H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

数字微分器

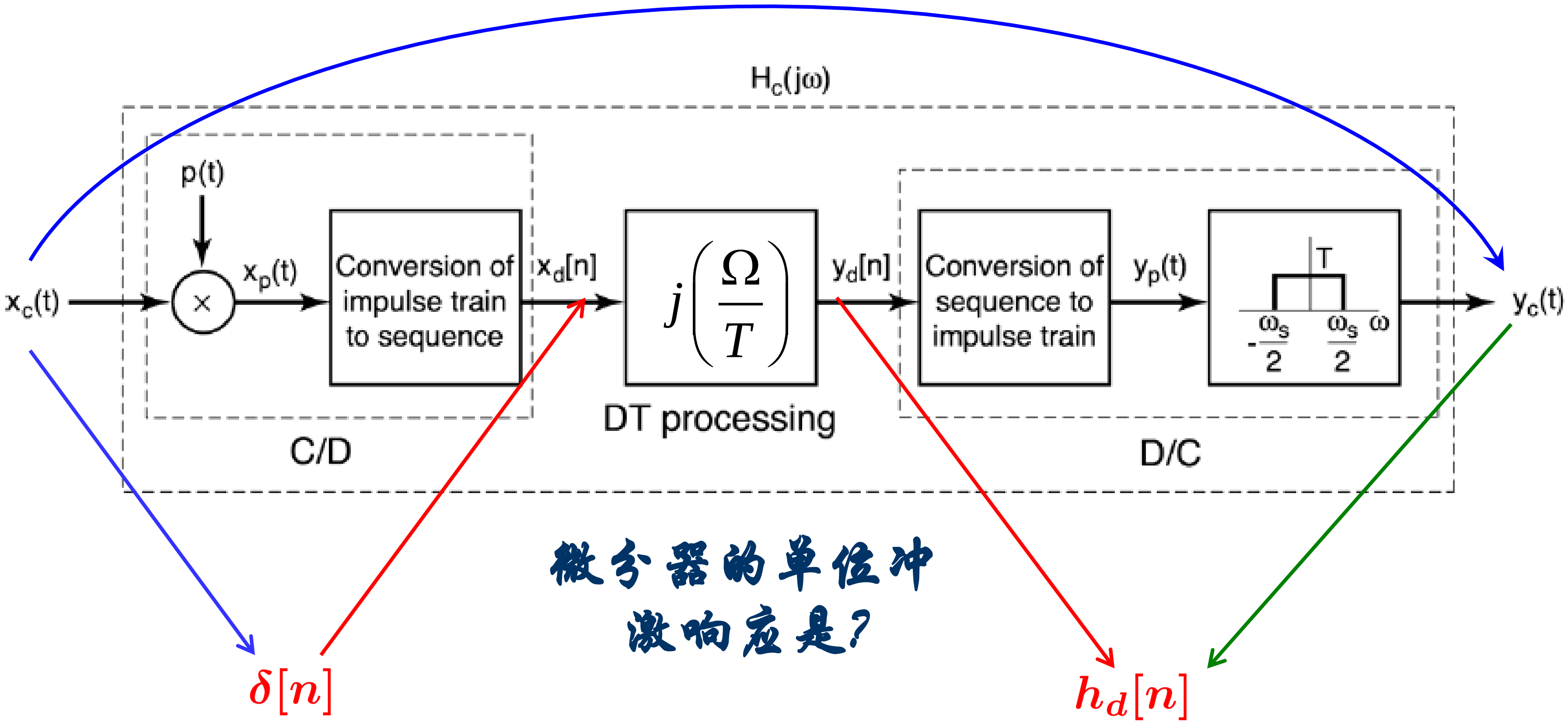
$$H_c(j\omega)=\begin{cases} j\omega, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

如果选择$\omega_s=2\omega_c$，则有：

$$H_d(e^{j\Omega})=H_c(j\Omega/T)=j\left(\frac{\Omega}{T}\right)=j\omega_c\left(\frac{\Omega}{\pi}\right),\qquad |\Omega|<\pi$$



数字微分器单位脉冲响应的确定



微分器的单位冲激响应是?

数字微分器单位脉冲响应的确定

$\Rightarrow$ 门 (试探函数

令 $x_c(t)=\dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$，则

$$X_c(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/T\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

而连续时间系统的输出为：

$$y_c(t)=\frac{d}{dt}x_c(t)=\frac{\cos(\pi t/T)}{Tt}-\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t^2}$$

此时：

$$x_d[n]=x_c(nT)=\frac{1}{T}\delta[n]$$

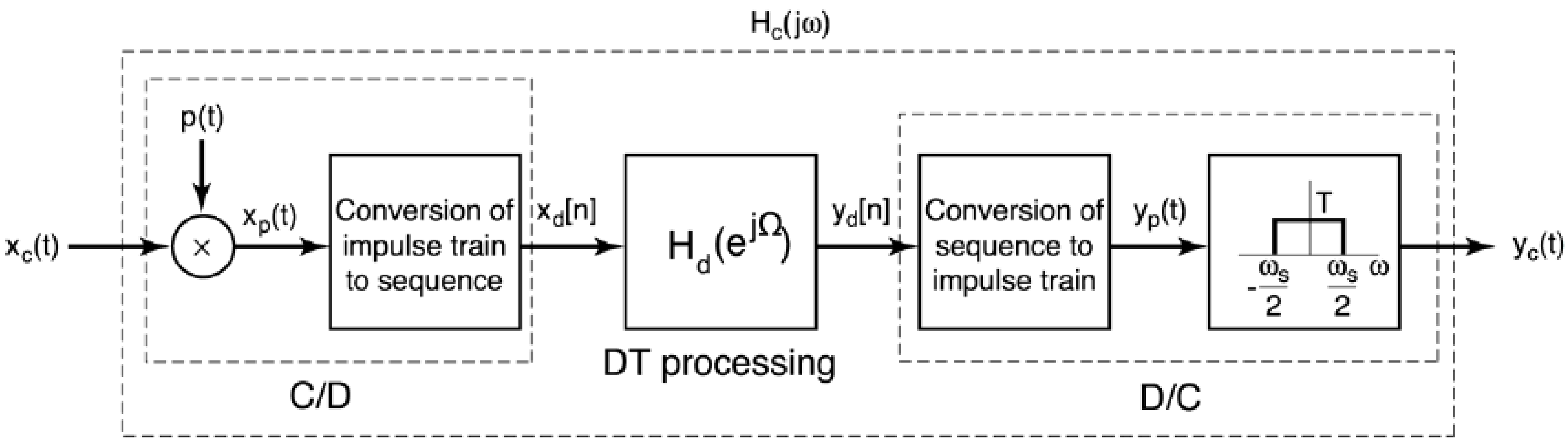
而：

$$y_d[n]=y_c[nT]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{nT^2} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

知道里面东西

$$\Rightarrow\quad h_d[n]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{nT} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

非整数延时



$$y_c(t) = x_c(t-\Delta)$$

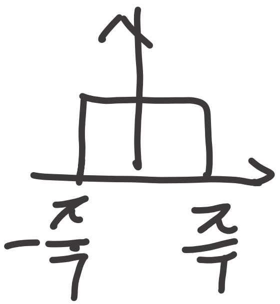
$$Y_c(j\omega) = \boxed{e^{-j\omega\Delta}} X_c(j\omega)$$

$$e^{-j\omega\Delta} = H_c(j\omega) = H_d\left(j\frac{\Omega}{T}\right) = e^{-j\Omega\frac{\Delta}{T}}$$

非整数延时

令 $x_c(t)=\dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$ ， 则

$$X_c(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/T\\ 0, & otherwise\end{cases}$$



而连续时间系统的输出为：

$$y_c(t)=x_c(t-\Delta)=\frac{\sin(\pi(t-\Delta)/T)}{\pi(t-\Delta)}$$

只知出了什么

此时： $$x_d[n]=x_c(nT)=\boxed{\frac{1}{T}\delta[n]}$$

控入 使

$y_d[n]=x_d[n]*h_d[n]$

而： $$y_d[n]=y_c[nT]=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(nT-\Delta)\right)}{\pi(nT-\Delta)}=\boxed{\frac{\sin\left(\pi\left(n-\frac{\Delta}{T}\right)\right)}{T\pi\left(n-\frac{\Delta}{T}\right)}}$$

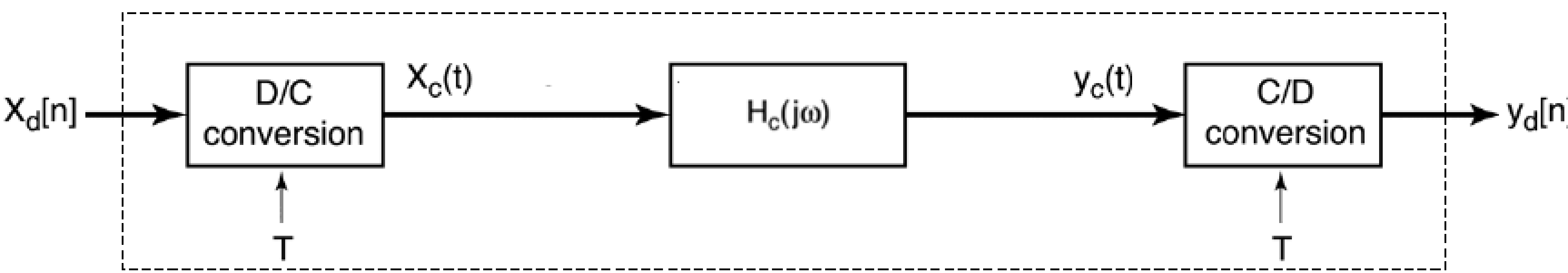
$$\Rightarrow h_d[n]=\frac{\sin\left(\pi\left(n-\frac{\Delta}{T}\right)\right)}{\pi\left(n-\frac{\Delta}{T}\right)}$$

非整数延时

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\Omega n_0} X\left(e^{j\Omega}\right)$$

n_0不是整数时如何解释？

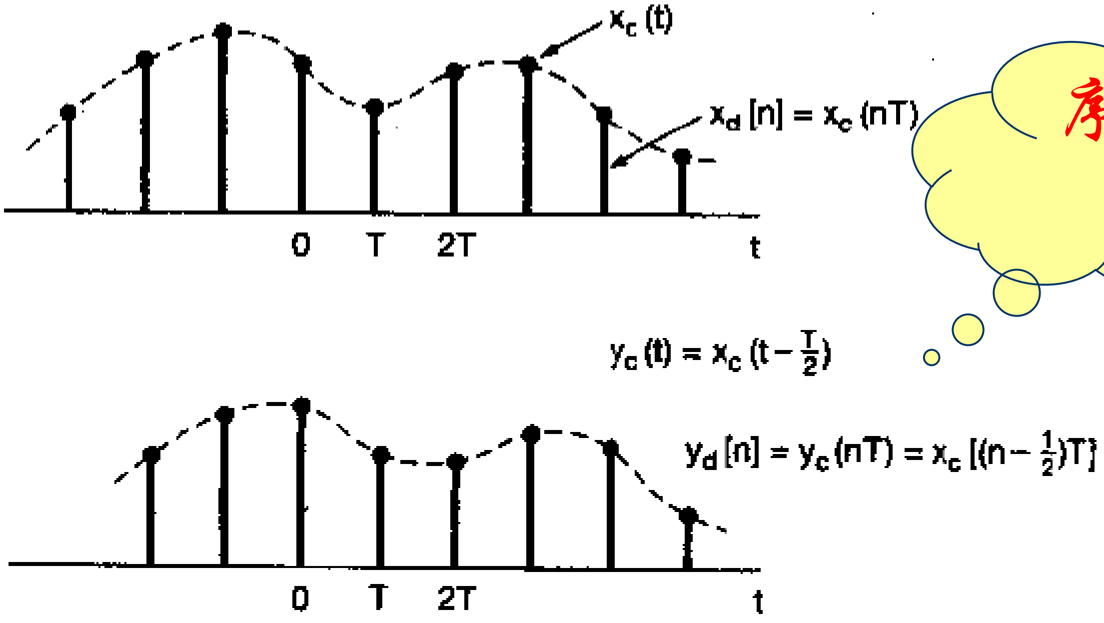


$H_d(e^{j\Omega})$

离散滤波器本质上可以视为离散时间信号的连续时间处理

非整数延时

$$\Delta = \frac{T}{2}:$$



序列包络的时延

谢谢大家！