第十三讲
信号与系统的时域和频域特性

杜清河

2025春

本章学习内容

- 讲授内容
  - 6.0, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4
  - 6.5.1
  - 6.6.1
- 自学内容
  - 6.5.2, 6.5.3
  - 6.6.2
  - 6.7

内容提要

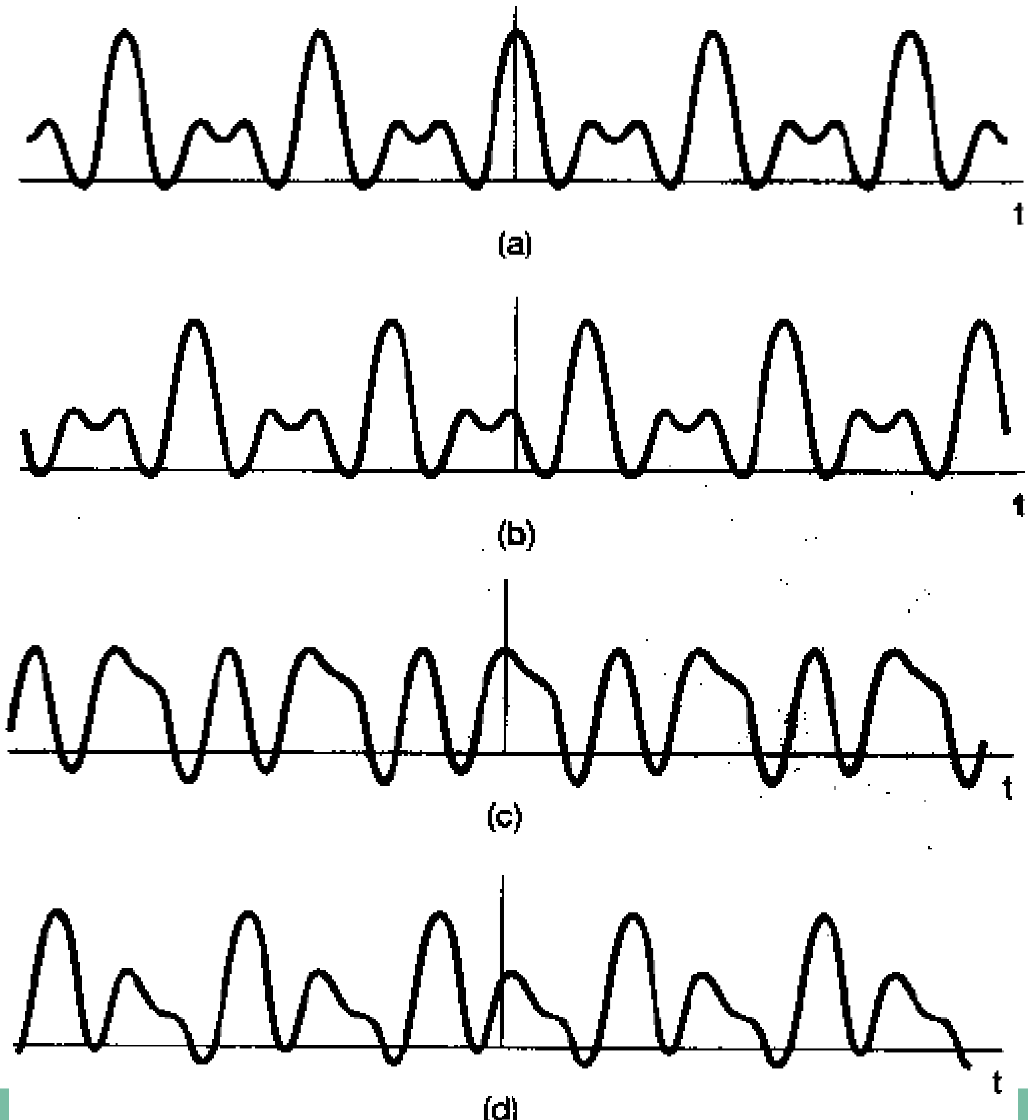
- 傅里叶变换的模和相位表示
- LTI系统频率响应的模和相位表示
- 对数模和波特图
- 滤波器
- 一阶连续时间系统的分析
- 一阶离散时间系统的分析

傅里叶变换的模和相位

连续时间傅里叶变换：$X(j\omega)=\left|X(j\omega)\right|e^{j\angle X(j\omega)}$

离散时间傅里叶变换：$X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\angle X\left(e^{j\omega}\right)}$

举例 $$x(t)=1+\frac{1}{2}\cos(2\pi t+\phi_1)+\cos(4\pi t+\phi_2)+\frac{2}{3}\cos(6\pi t+\phi_3)$$



(a) $\phi_1=\phi_2=\phi_3=0$

(b) $\phi_1=4,\ \ \phi_2=8,\ \ \phi_3=12$

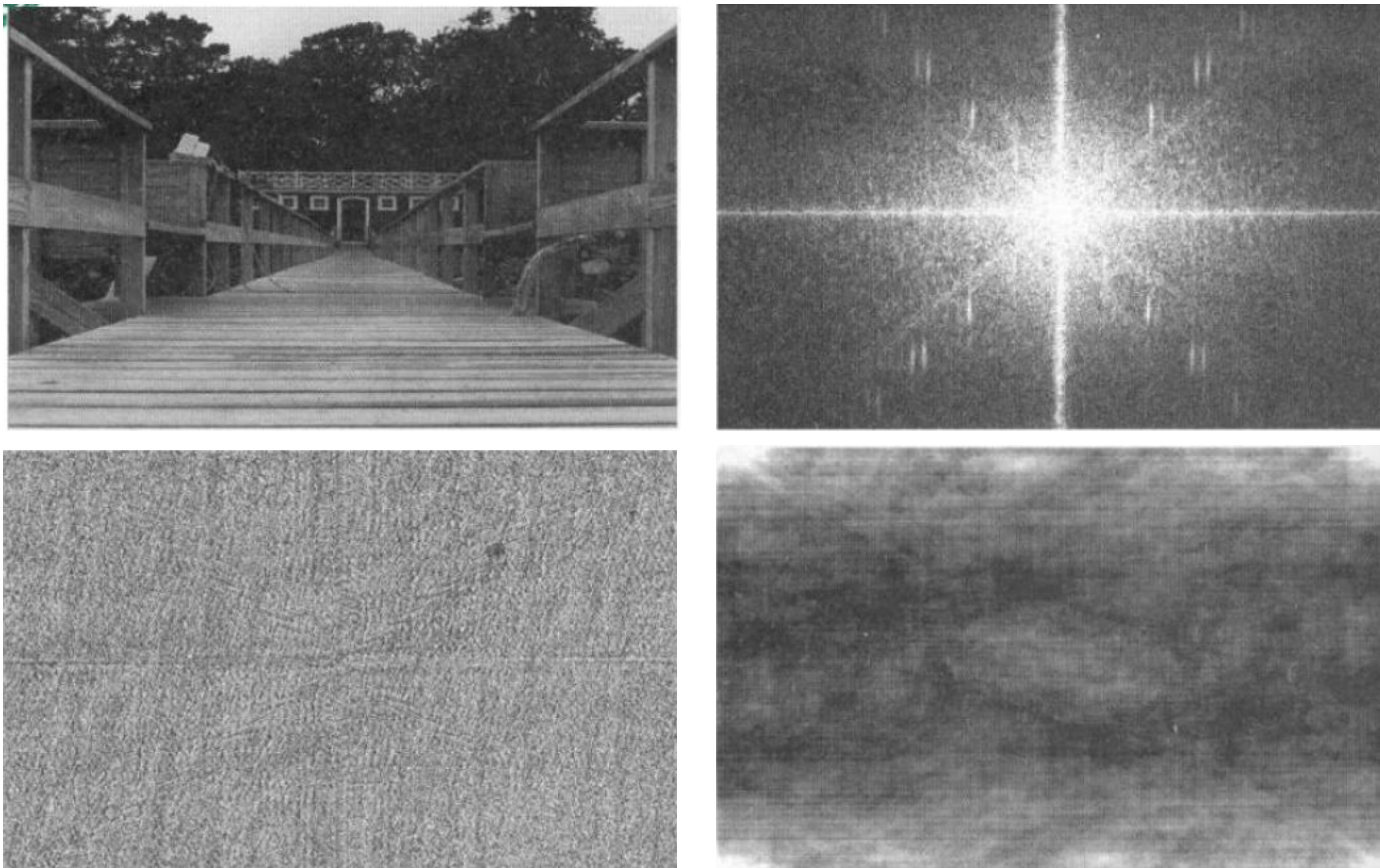
(c) $\phi_1=6,\ \ \phi_2=-2.7,\ \ \phi_3=0.93$

(d) $\phi_1=1.2,\ \ \phi_2=4.1,\ \ \phi_3=-7.02$

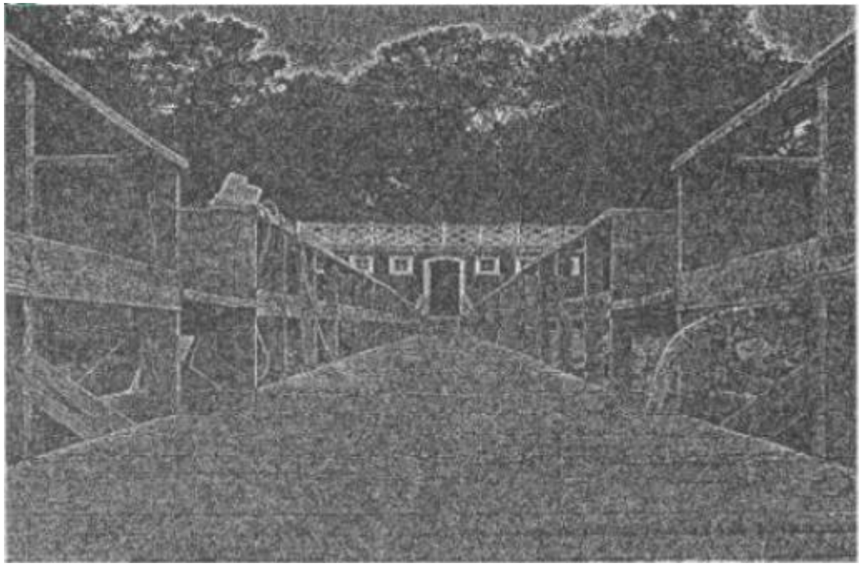
举例：语音信号

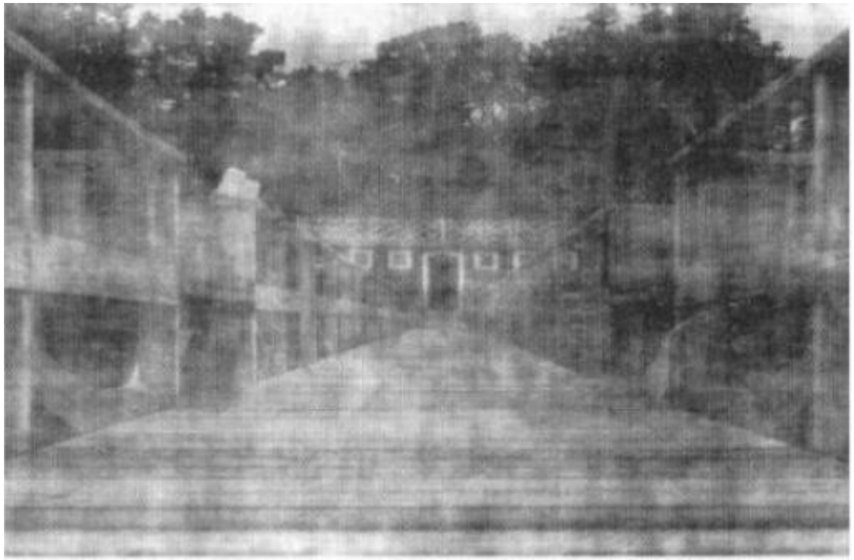
- 听觉系统对语音信号中的相位不敏感。较小的相位失真不会影响语音信号的可理解性。
- 语音信号的大部分信息包含在傅里叶变换的模特性中。
- 然而，严重的相位失真对语音信号的可理解性仍然会造成显著的影响。

举例：图像信号



举例：图像信号





内容提要

- 傅里叶变换的模和相位表示
- LTI系统频率响应的模和相位表示
- 对数模和波特图
- 滤波器
- 一阶连续时间系统的分析
- 一阶离散时间系统的分析

LTI系统的输入和输出

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$$
$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

系统增益

系统相移

$$\Downarrow$$

$$|Y(j\omega)|=|H(j\omega)||X(j\omega)| \quad \angle Y(j\omega)=\angle H(j\omega)+\angle X(j\omega)$$
$$|Y(e^{j\omega})|=|H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \quad \angle Y(e^{j\omega})=\angle H(e^{j\omega})+\angle X(e^{j\omega})$$

$|H(j\omega)|,|H(e^{j\omega})|$: 对输入信号傅里叶变换模的改变，称为**幅度失真**。

$\angle H(j\omega),\angle H(e^{j\omega})$: 对输入信号傅里叶变换相位的改变，称为**相位失真**。

相位特性与波形失真

$$y(t)=Kx(t-t_0) \Rightarrow H(j\omega)=Ke^{-j\omega t_0}$$

- 幅频特性：

$$|H(j\omega)|=|K|$$

- 相频特性：

$$K>0:\ \angle H(j\omega)=\pm 2m\pi-\omega t_0,\ m=0,1,\ldots$$

$$K<0:\ \angle H(j\omega)=\pm(2m+1)\pi-\omega t_0,\ m=0,1,\ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\angle H(j\omega)=\phi-\omega t_0 \quad \phi=\begin{cases}\pm 2m\pi, & K>0\\ \pm(2m+1)\pi, & K<0\end{cases}$$

相位特性与波形失真

➢ 无失真传输条件：

$$|H(j\omega)| = |K|$$

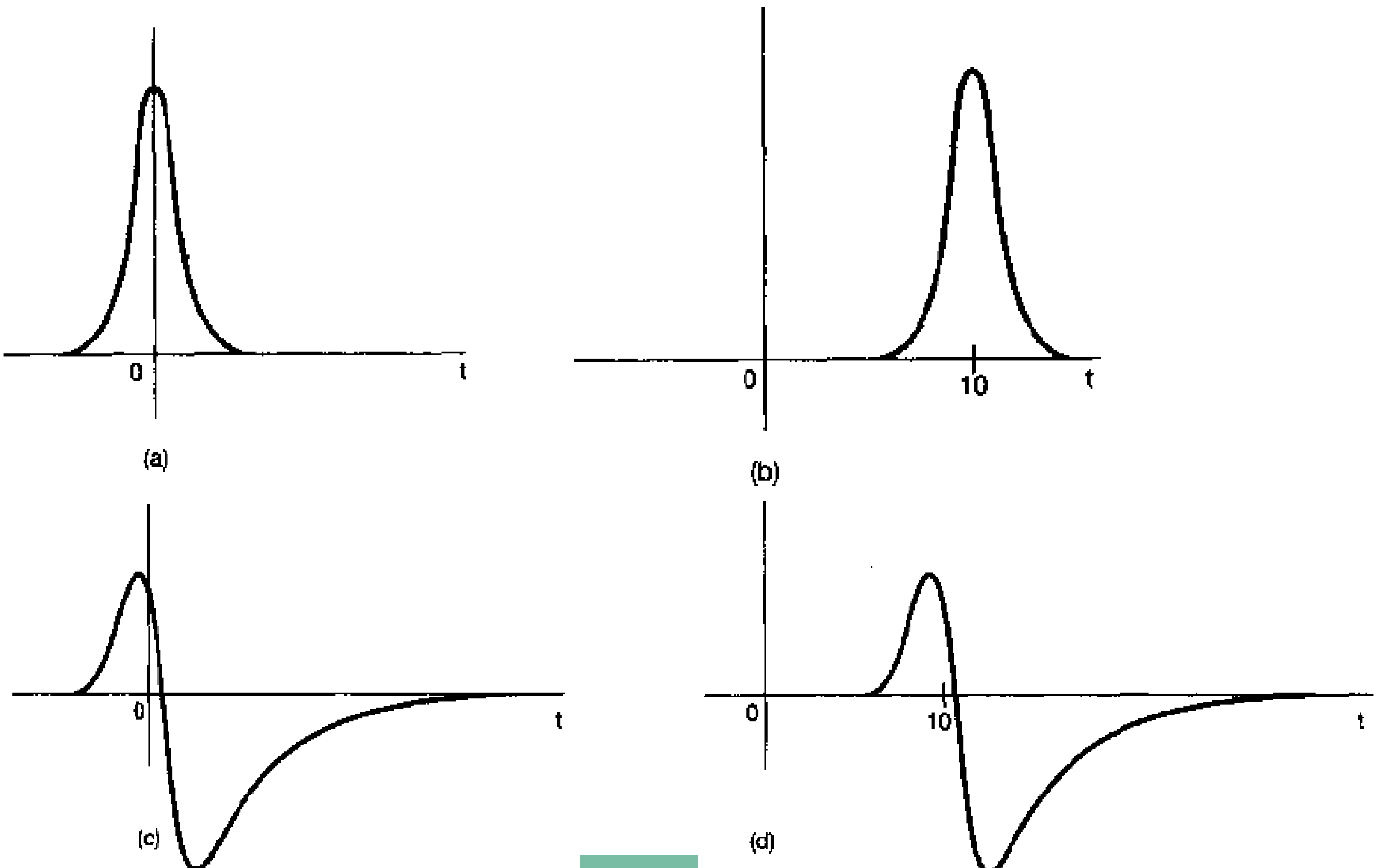
$$\angle H(j\omega) = -\omega t_0 + k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

1) 可以将无失真传输条件扩展叙述为：幅频特性为常数、相频特性为线性。

2) 实际工程中，很难严格满足上述条件。

相位特性与波形失真

➢ 非线性相位的效果：



全通系统

$$|H(j\omega)| = C \quad 或 \quad |H(e^{j\omega})| = C$$

- 系统对输入信号各频率分量幅度的改变是一致的，我们称这样的系统为**全通系统**。此时系统的特性几乎完全其相位特性决定。
- 全通系统一般用来对输入信号进行相位校正。
- 全通系统不一定是无失真传输系统。

群时延 (Group Delay)

- 相位时延：

$$\tau = -\frac{\angle H(j\omega)}{\omega}$$

- 窄带输入与群时延：

对应于延时
α秒的相移

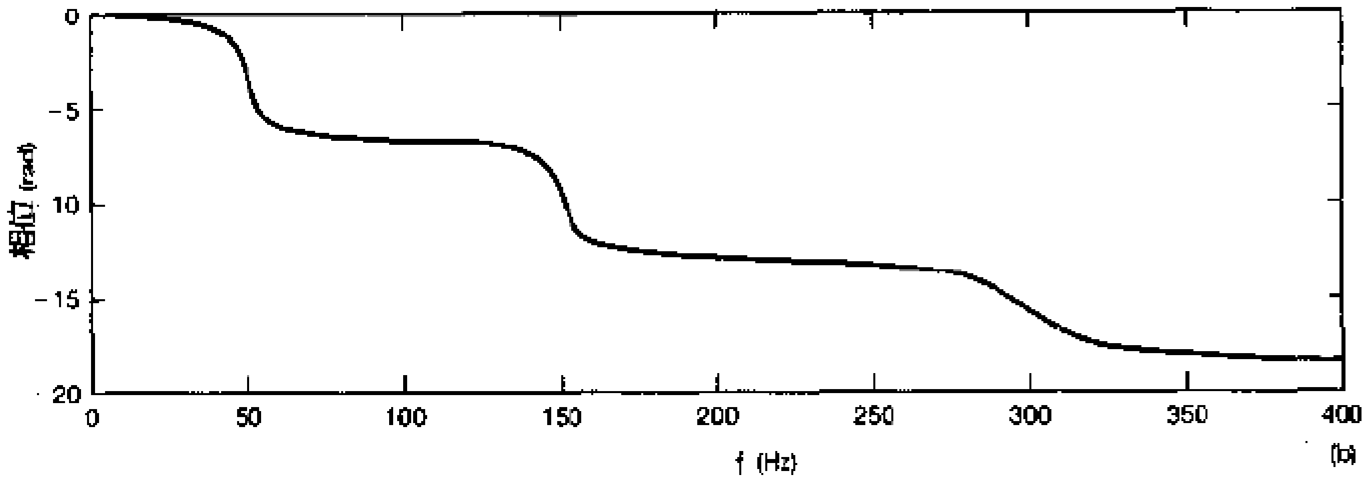
公共相移

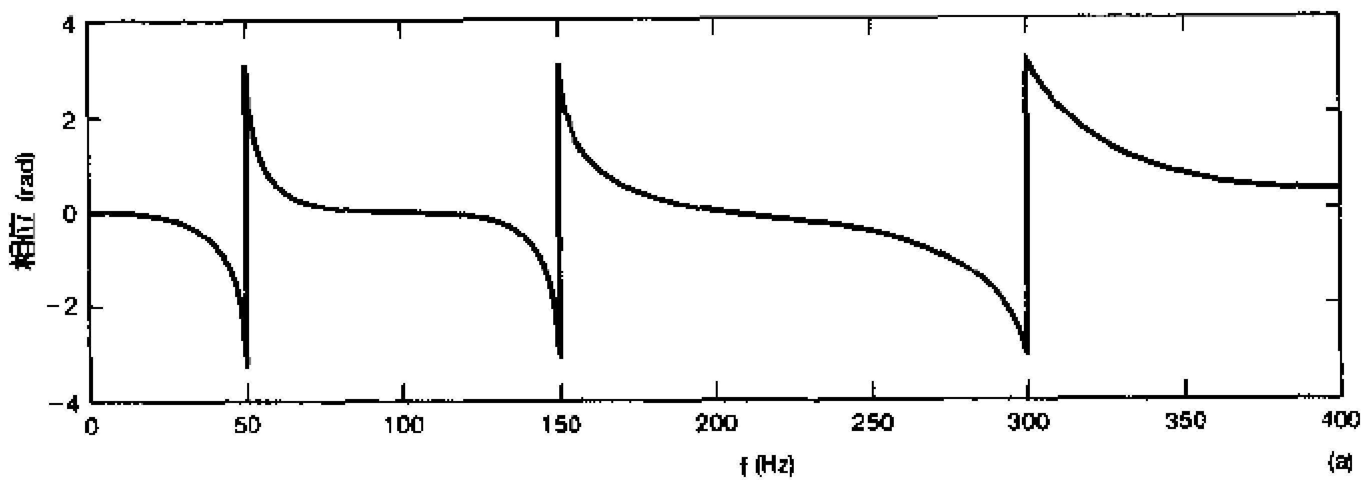
$$\angle H(j\omega) \approx -\phi - \omega\alpha \quad \Rightarrow \quad Y(j\omega) = X(j\omega)\left|H(j\omega)\right| e^{-j\phi} e^{-j\omega\alpha}$$

群时延：

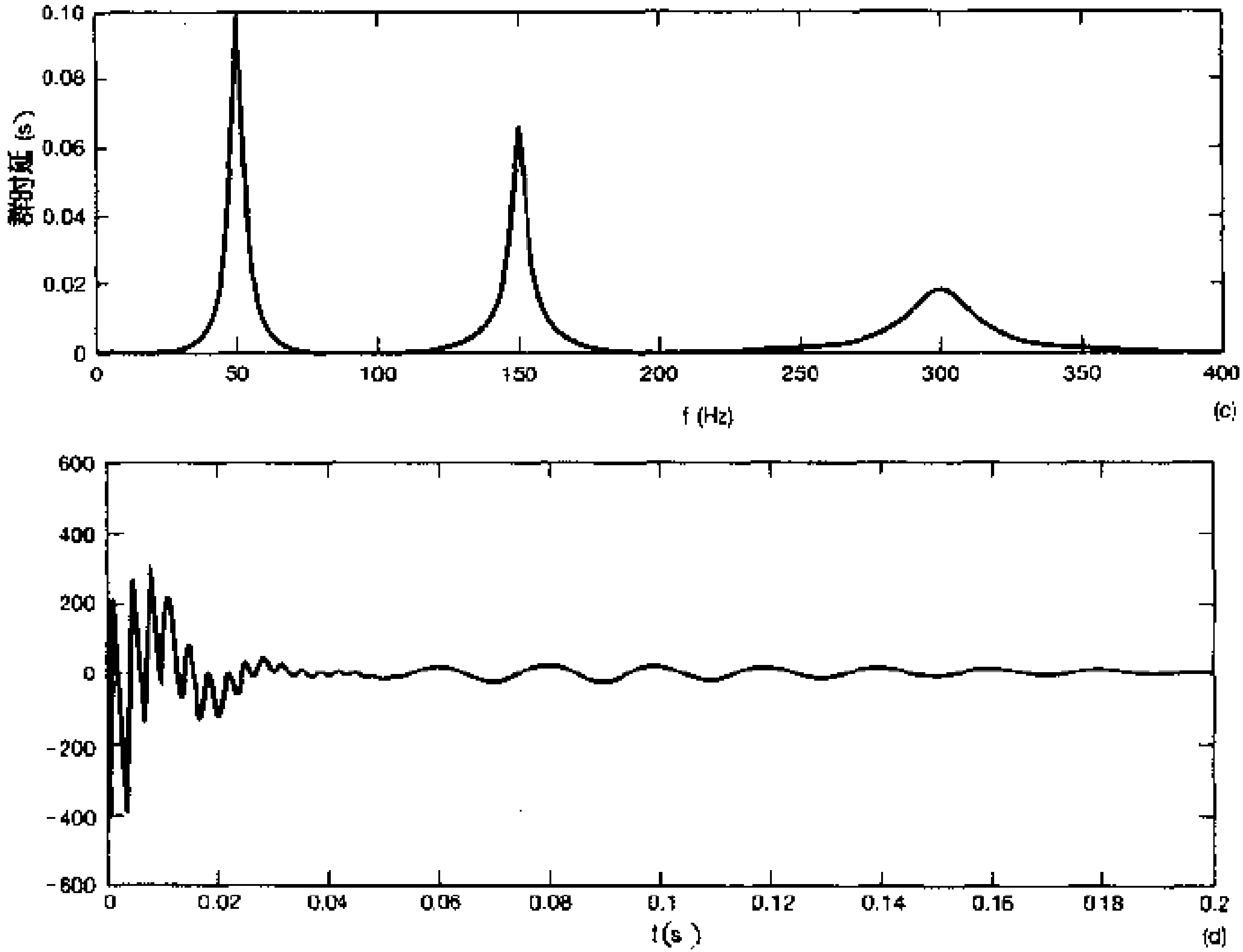
$$\boxed{\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\left[\angle H(j\omega)\right]}$$

举例


0
-5
-10
-15
-20
相位 (rad)
0
50
100
150
200
250
300
350
400
f (Hz)
(b)


4
2
0
-2
-4
相位 (rad)
0
50
100
150
200
250
300
350
400
f (Hz)
(a)

举例



群时延 (s)
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
f (Hz)
(c)
600
400
200
0
-200
-400
-600
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2
t(s)
(d)

内容提要

- 傅里叶变换的模和相位表示
- LTI系统频率响应的模和相位表示
- 对数模和波特图
- 滤波器
- 一阶连续时间系统的分析
- 一阶离散时间系统的分析

对数模

$$\log|Y(j\omega)| = \log|H(j\omega)| + \log|X(j\omega)|$$

$$\log|Y(e^{j\omega})| = \log|H(e^{j\omega})| + \log|X(e^{j\omega})|$$

- 输出对数模＝输入对数模＋频率响应对数模
- 级联系统总频率响应的对数模＝各部分系统的频率响应对数模之和
- 对数坐标能在一个较宽的动态范围上展现傅里叶变换的模的细节

波特(Bode)图

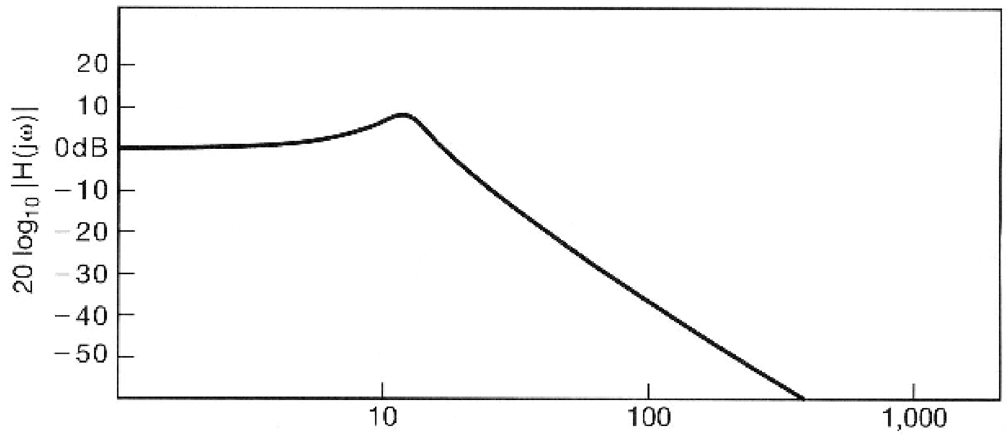
单位：分贝(dB)

$$20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| \sim \log_{10}\omega$$

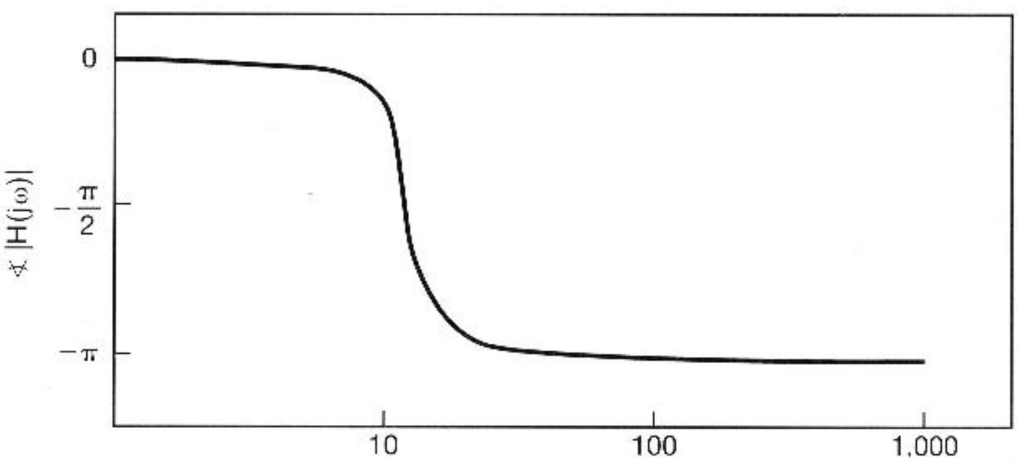
$$\angle H(j\omega) \sim \log_{10}\omega$$

- 对数频率坐标可以比线性频率坐标展示更宽的频率范围
- 对数频率坐标细致展示低频部分，粗略展示高频部分
- 对连续时间系统，可以方便地建立模特性和相位特性的直线型渐近线

波特(Bode)图

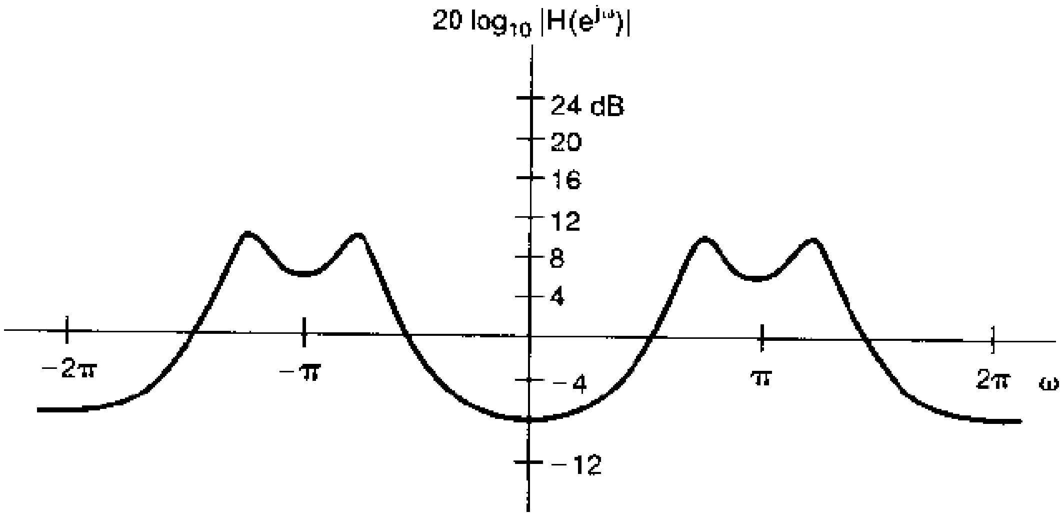


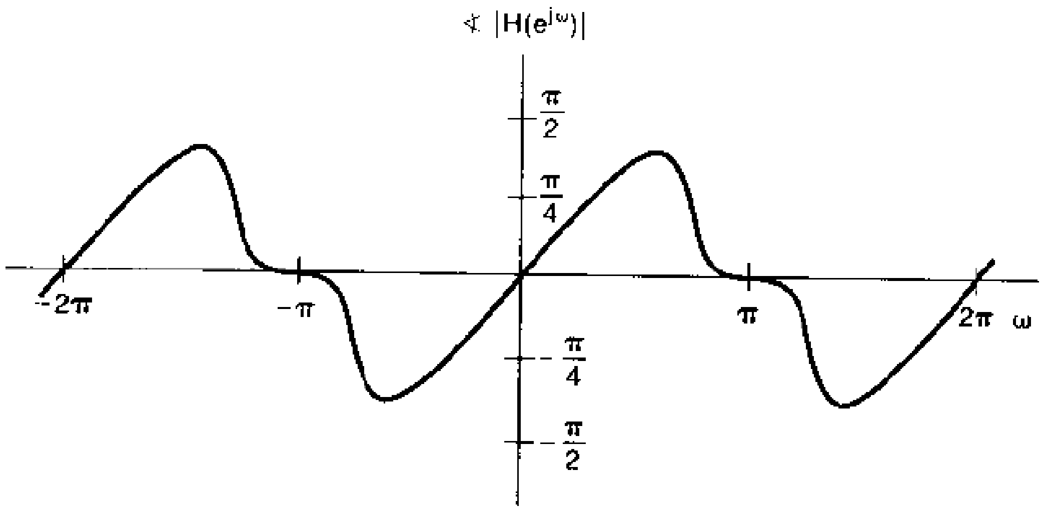
20
10
0dB
−10
−20
−30
−40
−50
20 log10 |H(jω)|
10
100
1,000



0
−π/2
−π
∢ |H(jω)|
10
100
1,000

离散时间系统频率响应的模和相位表示





内容提要

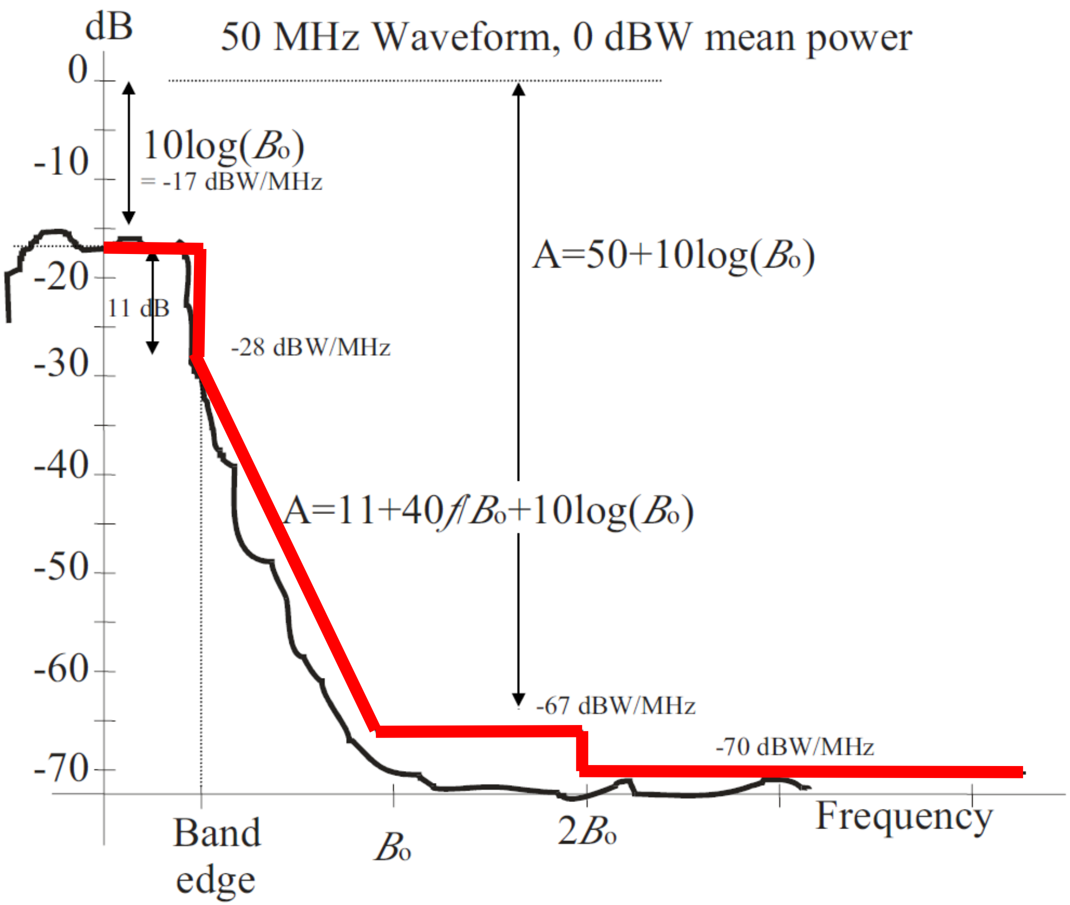
- 傅里叶变换的模和相位表示
- LTI系统频率响应的模和相位表示
- 对数模和波特图
- 滤波器
- 一阶连续时间系统的分析
- 一阶离散时间系统的分析

滤波的概念

- 改变一个信号中各频率分量的相对大小和相位，或者全部消除某些频率分量的过程称为滤波。
- 频率成形滤波器：用于改变频谱形状的线性时不变系统。
- 频率选择性滤波器：基本无失真地通过某些频率，而显著地衰减掉或消除掉另一些频率的系统。

频率成形滤波器示例

无线通信系统频谱形状要求

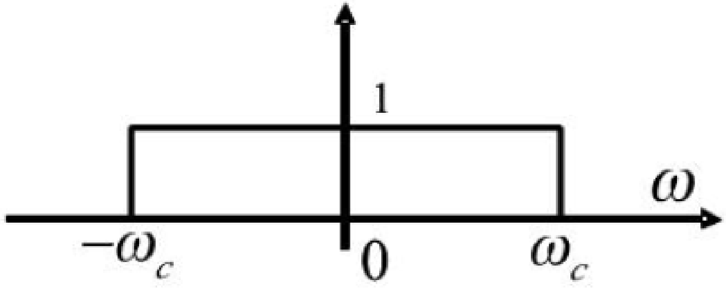


频率选择性滤波器的分类

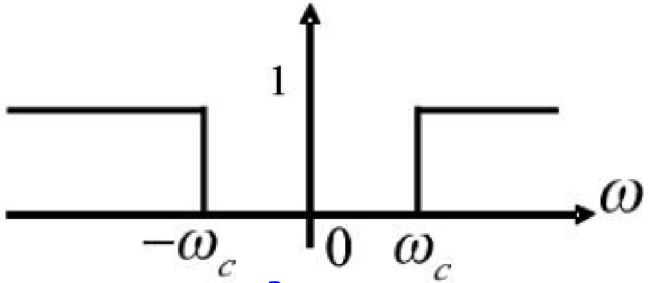
- 低通滤波器：通过低频，而衰减或阻止较高频率的滤波器。
- 高通滤波器：通过高频，而衰减或阻止较低频率的滤波器。
- 带通滤波器：通过某一频带范围，而衰减掉既高于又低于这段频带的滤波器。
- 带阻滤波器：衰减掉某一频带范围，而通过既高于又低于这段频带的滤波器。

理想的频率选择性滤波器

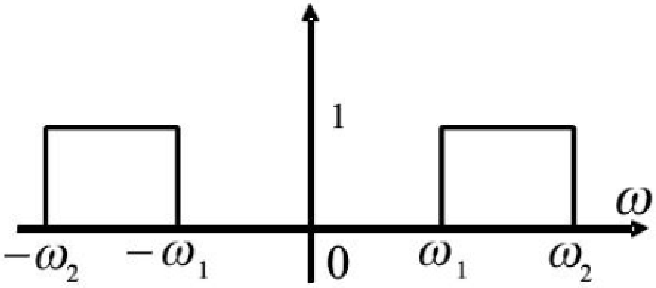
- 定义：无失真地通过一组频率上的复指数信号，并全部阻止掉所有其它频率的信号。



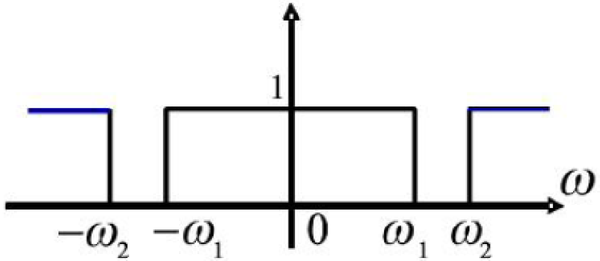
低通



高通

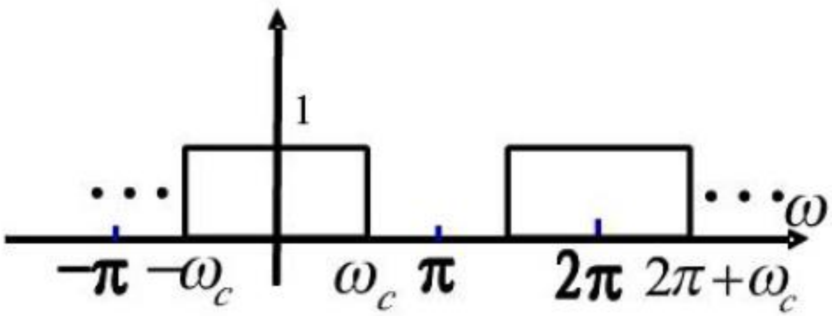


带通

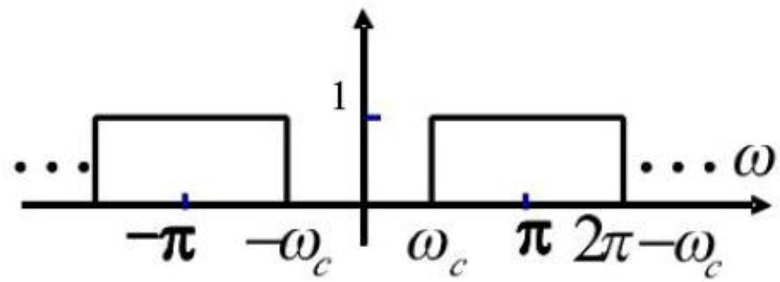


带阻

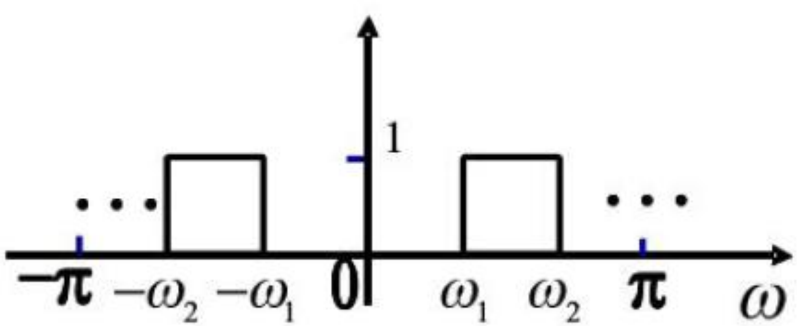
理想的频率选择性滤波器



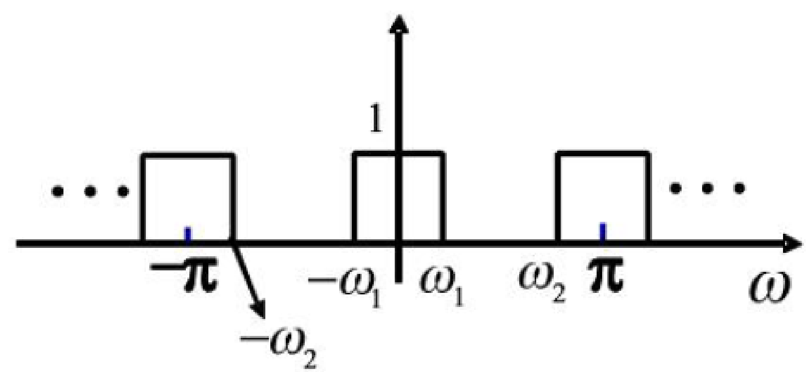
低通



高通

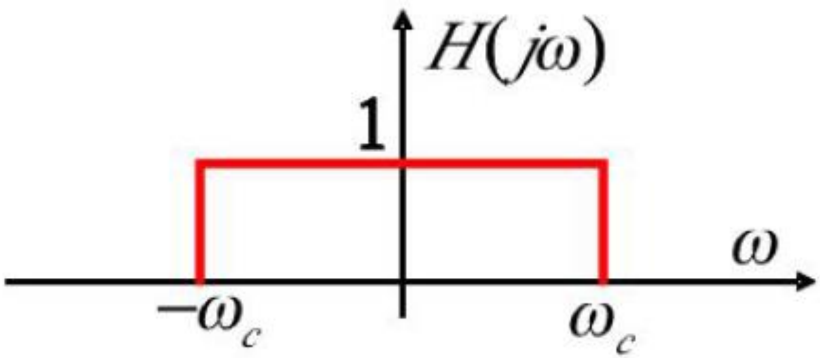


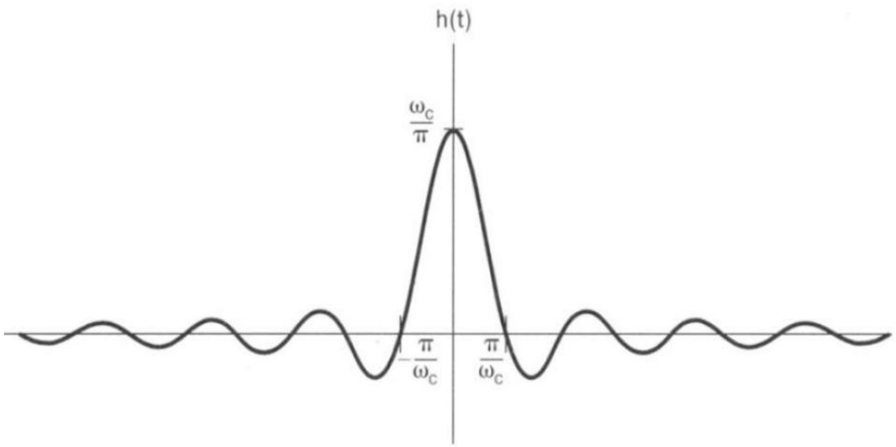
带通

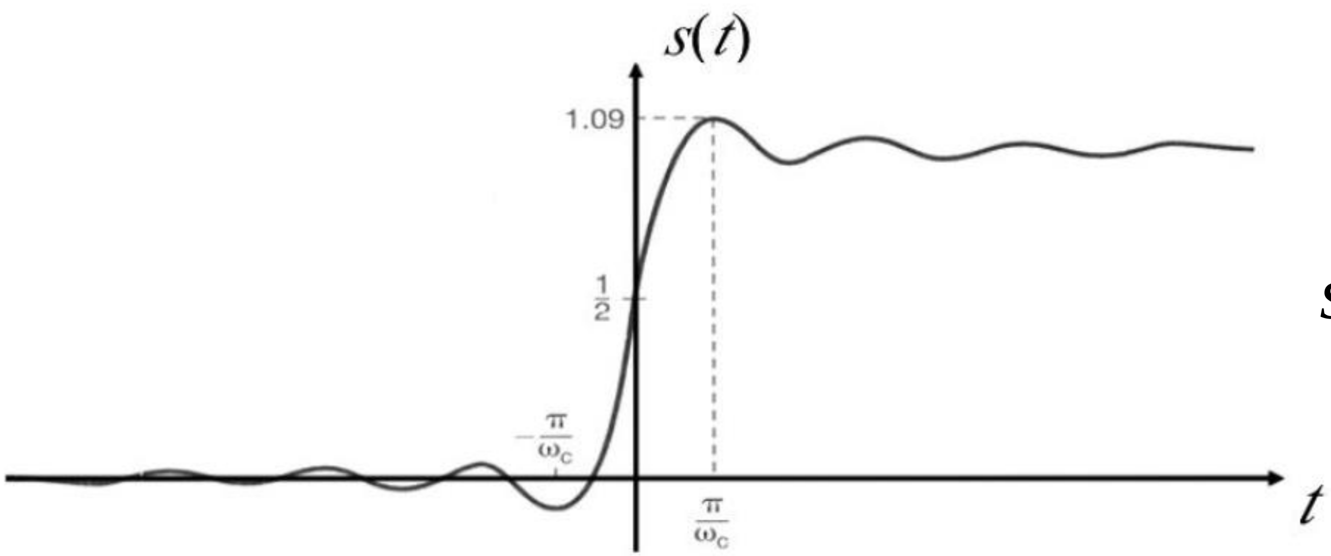


带阻

理想低通滤波器的特性







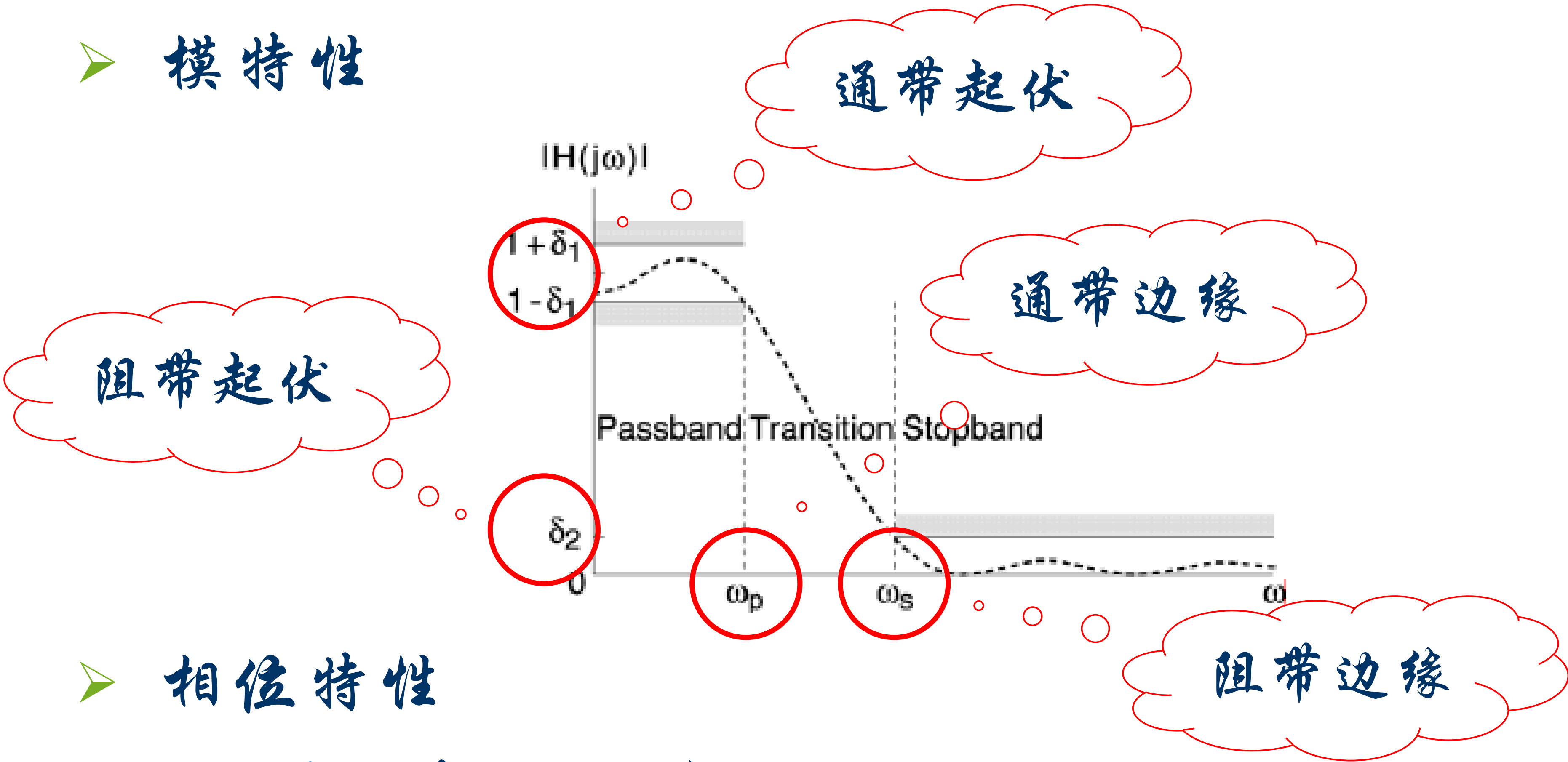
$$s(\infty)=1$$

非理想滤波器

- 为什么要使用非理想滤波器?
  - 理想滤波器难以实现
  - 理想滤波器虽然频域特性理想，但是其时域特性可能不是所希望的
  - 理想滤波器的特性在实际中并不一定总是所要求的

非理想滤波器的频域指标

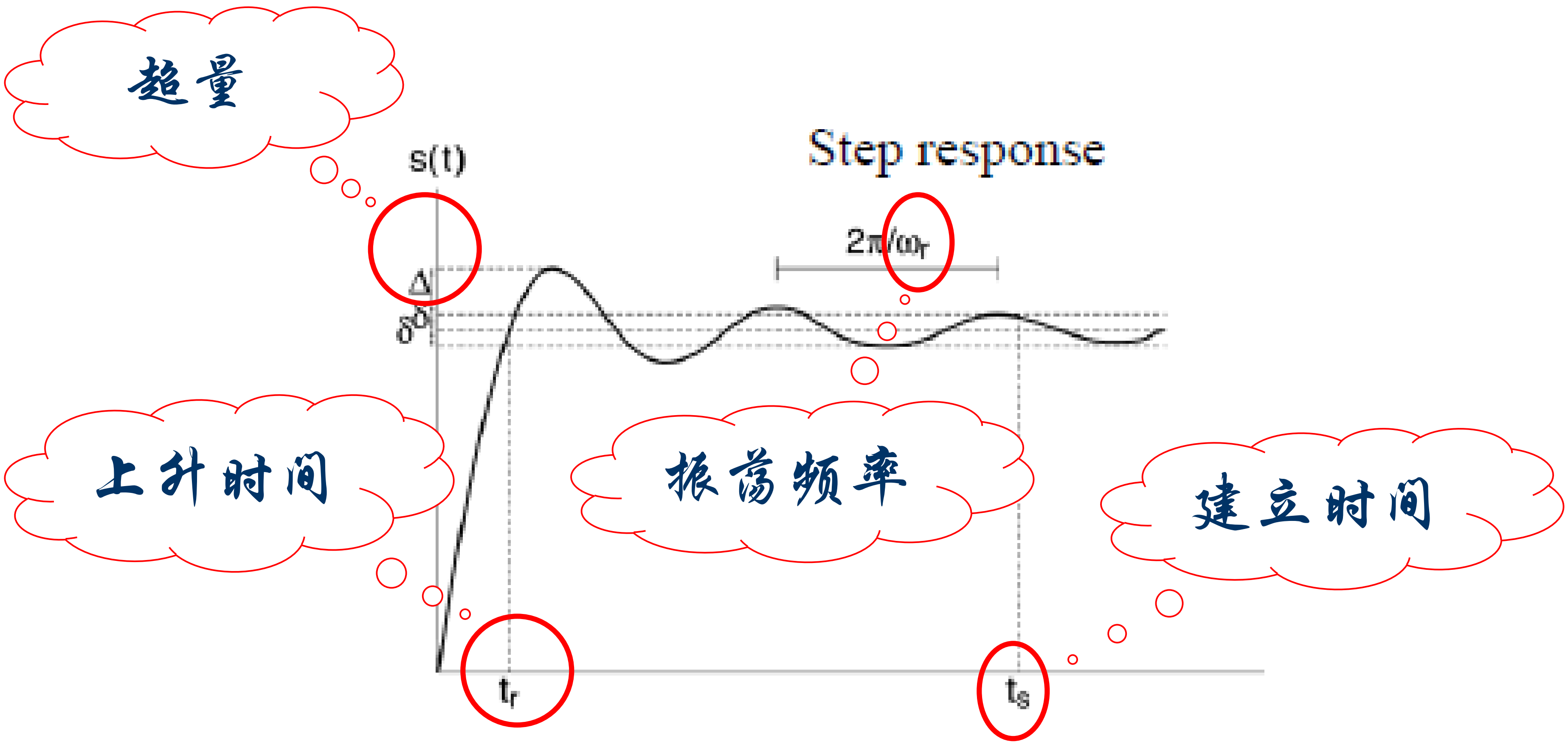
- 模特性



- 相位特性

在通带内相位为线性或近似线性

非理想滤波器的时域指标



内容提要

- 傅里叶变换的模和相位表示
- LTI系统频率响应的模和相位表示
- 对数模和波特图
- 滤波器
- 一阶二阶连续时间系统的分析
- 一阶离散时间系统的分析

背景与动机

- 由线性常系数微分方程和差分方程所描述的LTI系统在实际中具有重要意义
- 高阶系统往往是由一阶和二阶系统以级联或并联的方式构成
- 一阶和二阶系统的性质在分析、设计和理解高阶系统的时频域特性方面起着重要作用

背景与动机

$$H(j\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}=\frac{b_M \prod_{k=1}^{M}(\lambda_k + j\omega)}{a_N \prod_{k=1}^{N}(\gamma_k + j\omega)}$$

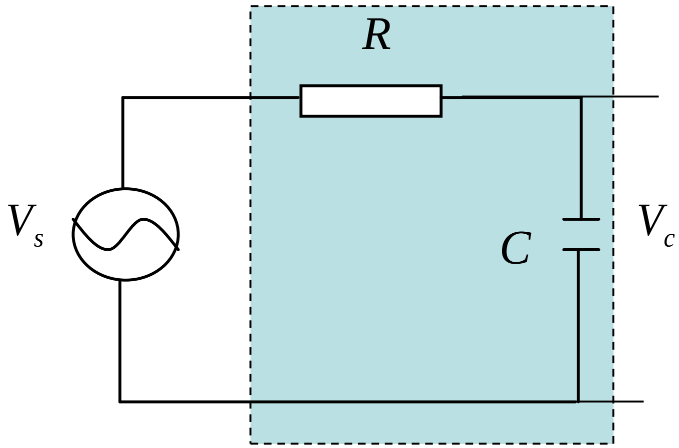
$$=\frac{b_M \prod_{k=1}^{P}\left(\beta_{0k}+\beta_{1k} j\omega+(j\omega)^2\right)\prod_{k=1}^{M-2P}(\lambda_k + j\omega)}{a_N \prod_{k=1}^{Q}\left(\alpha_{0k}+\alpha_{1k} j\omega+(j\omega)^2\right)\prod_{k=1}^{N-2Q}(\gamma_k + j\omega)}$$

一阶与二阶系统的级联

$$H(j\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}\overset{M=N}{=}\frac{b_N}{a_N}+\sum_{k=1}^{Q}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}(j\omega)}{\alpha_{0k}+\alpha_{1k}(j\omega)+(j\omega)^2}+\sum_{k=1}^{N-2Q}\frac{A_k}{\sigma_k + j\omega}$$

一阶与二阶系统的并联

一阶连续时间系统



$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)$$

$$\tau = RC$$

$$\tau\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)$$

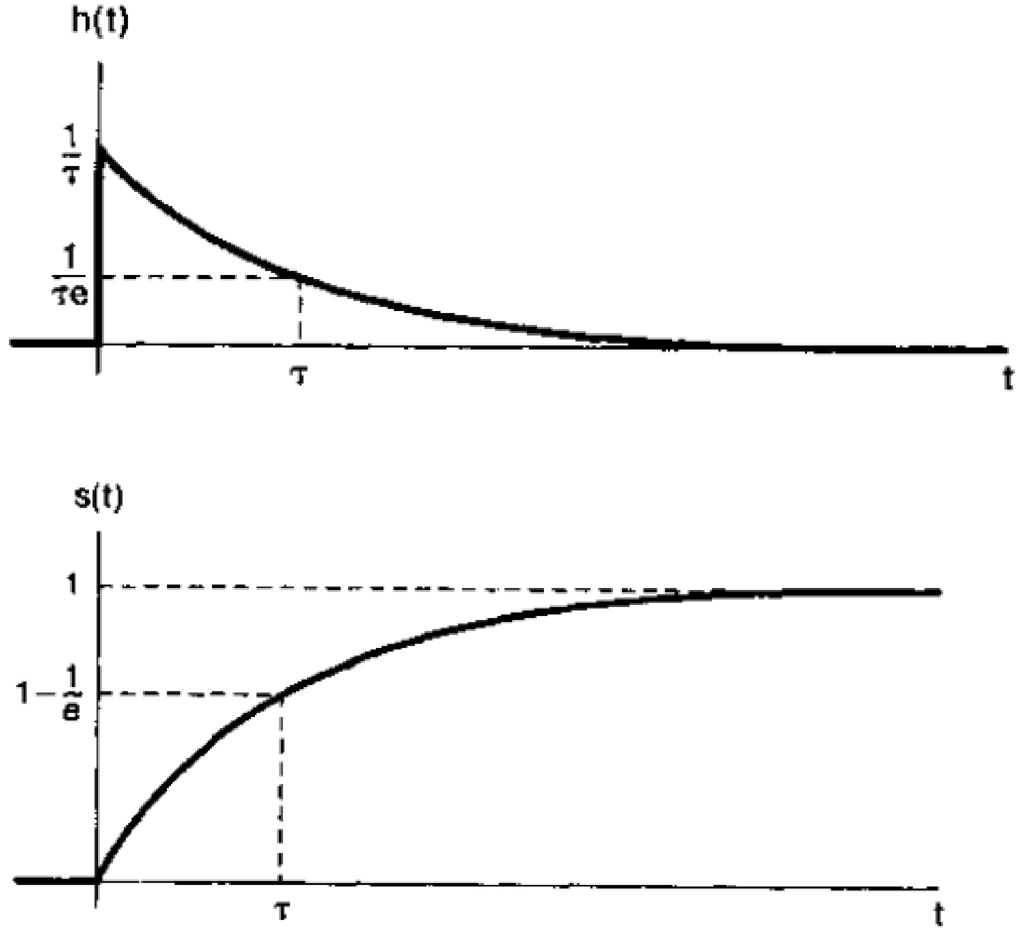
- 一阶系统的微分方程描述

τ：时间常数

$$\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

$$\Rightarrow \quad h(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) \qquad s(t)=h(t)*u(t)=\left[1-e^{-t/\tau}\right]u(t)$$

一阶连续时间系统的时域特性



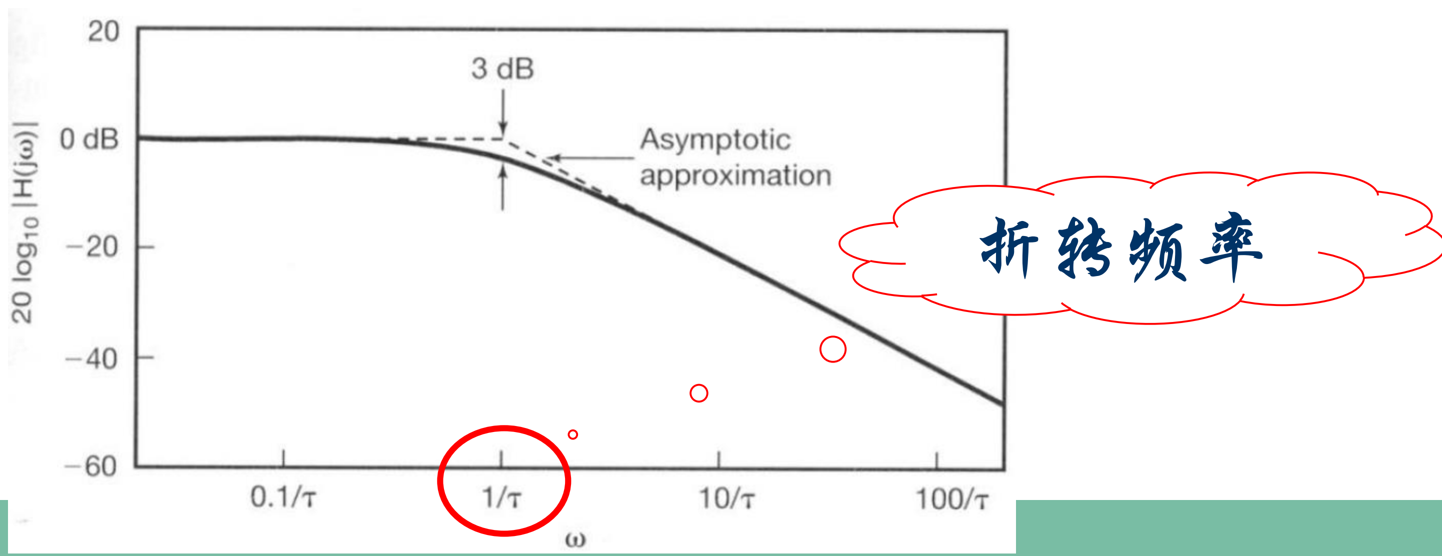
一阶连续时间系统的频域特性

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega\tau+1} \Rightarrow 20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|=-10\log_{10}\left[(\omega\tau)^2+1\right]$$

当 $\omega\tau<<1$ 时， $20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|\approx 0\text{dB}$

当 $\omega\tau>>1$ 时， $20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|\approx -20\log_{10}\omega\tau$

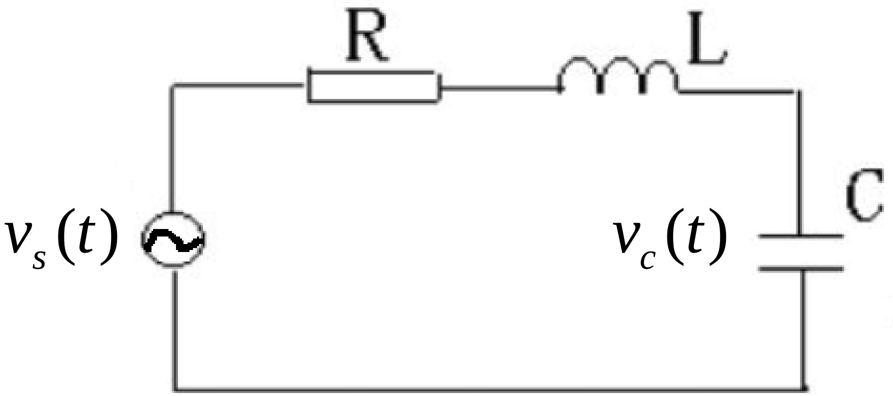
$$=-20\log_{10}\omega-20\log_{10}\tau\ \text{dB}$$



时间常数对一阶系统的影响

- τ 控制一阶系统响应的快慢
- 当τ减小时，冲激响应衰减得更快，而阶跃响应上升的时间更短
- 当τ减小时，系统频率响应的折转频率升高，系统具有更宽的带宽

二阶连续时间系统



$$LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)$$

$$\omega_n^2=1/(LC),\ \zeta=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- 二阶系统的微分方程描述

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2x(t)$$

ζ: 阻尼系数

ω_n: 无阻尼自然振荡频率

二阶连续时间系统

$$H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2} \Rightarrow H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega-c_1)(j\omega-c_2)}$$

分母多项式的两个根为：

$$c_1=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad c_2=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

case 1:

$\zeta=1 \Rightarrow c_1=c_2=-\omega_n<0$ 为两个相等的实数

case 2:

$\zeta>1 \Rightarrow 0>c_1>c_2$， c_1,c_2 为实数

case 3:

$0\le\zeta<1 \Rightarrow c_1=c_2^*$， c_1,c_2 为共轭复数

二阶连续时间系统

case 1:

$\zeta = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = -\omega_n < 0$ 为两个相等的实数

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

$$\Downarrow$$

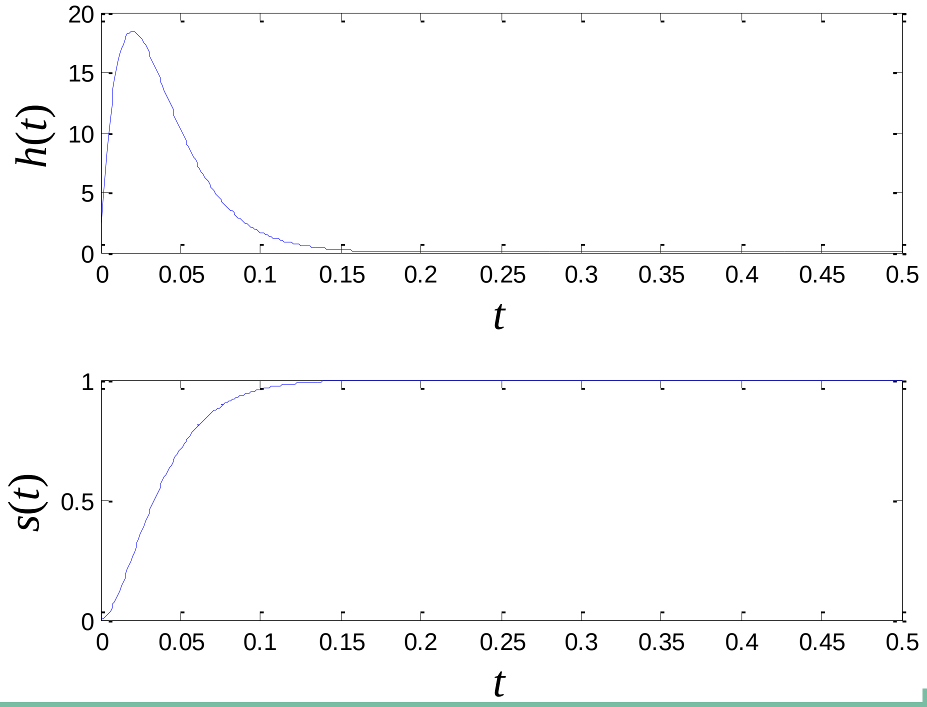
$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$s(t) = \left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right] u(t)$$



二阶连续时间系统

case 2:

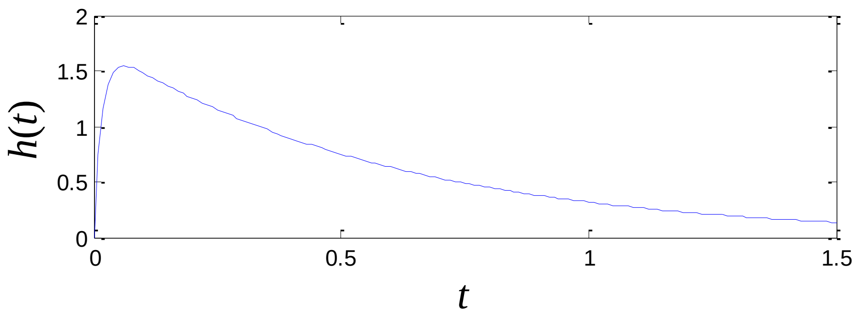
$$\boxed{\zeta > 1 \Rightarrow 0 > c_1 > c_2, \quad c_1, c_2 \text{ 为实数}}$$

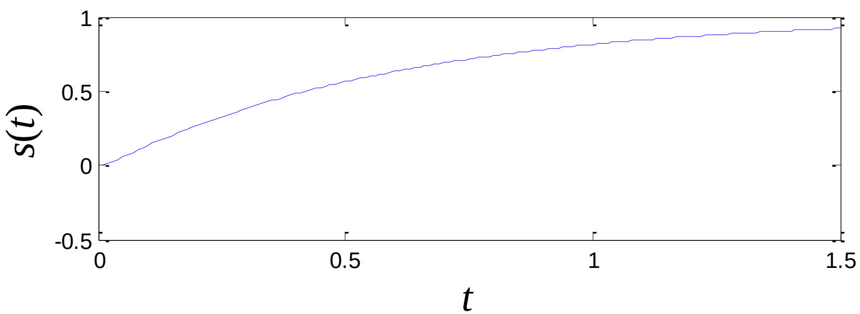
$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2}$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$h(t) = M\left[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}\right]u(t)$$

$$s(t) = h(t) * u(t) = \left\{1 + M\left[\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2}\right]\right\}u(t)$$





二阶连续时间系统

case 3:

$$0 \le \zeta < 1 \Rightarrow c_1 = c_2^*, \quad c_1, c_2 \text{ 为复数}$$

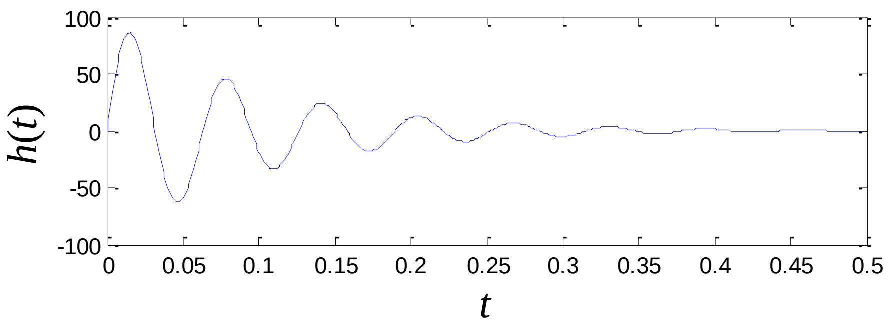
$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

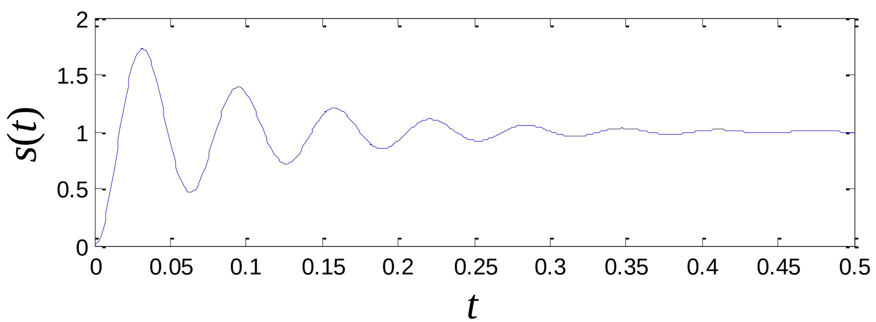
$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$H(j\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2}$$

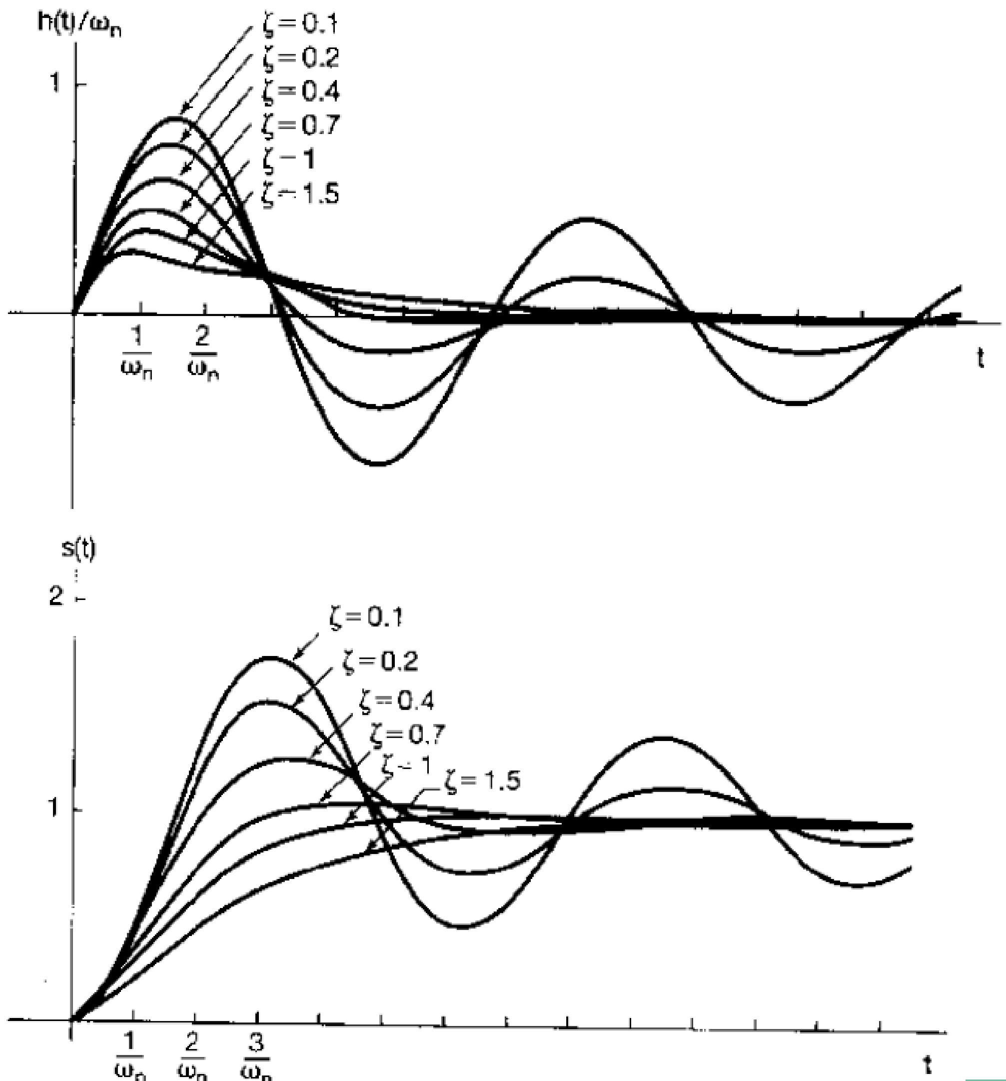
$$h(t) = M\left[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}\right]u(t)$$

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\right]u(t)$$





二阶连续时间系统的时域特性



二阶连续时间系统的时域特性

ζ和ω_n对系统的时域特性的影响

ζ的影响：

$\zeta=0$：无阻尼，冲激响应和阶跃响应振荡但无超量

$0<\zeta<1$：欠阻尼，阶跃响应既有超量，又出现振荡

$\zeta=1$：临界阻尼，无超量情况下的最快响应

$\zeta>1$：过阻尼，随着ζ的增加响应越来越慢

ω_n的影响：

和ζ一起共同控制振荡频率。ω_n越大振荡频率越高；

当$\zeta=0$时振荡频率即为ω_n，称为无阻尼自然振荡频率。

二阶连续时间系统的频域特性

$$H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}=\frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2+2\zeta(j\omega/\omega_n)+1}$$

所以：

$$\left|H(j\omega)\right|^2=\left\{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^{-1}=\left\{1-2(\frac{\omega}{\omega_n})^2+(\frac{\omega}{\omega_n})^4+4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2\right\}^{-1}$$

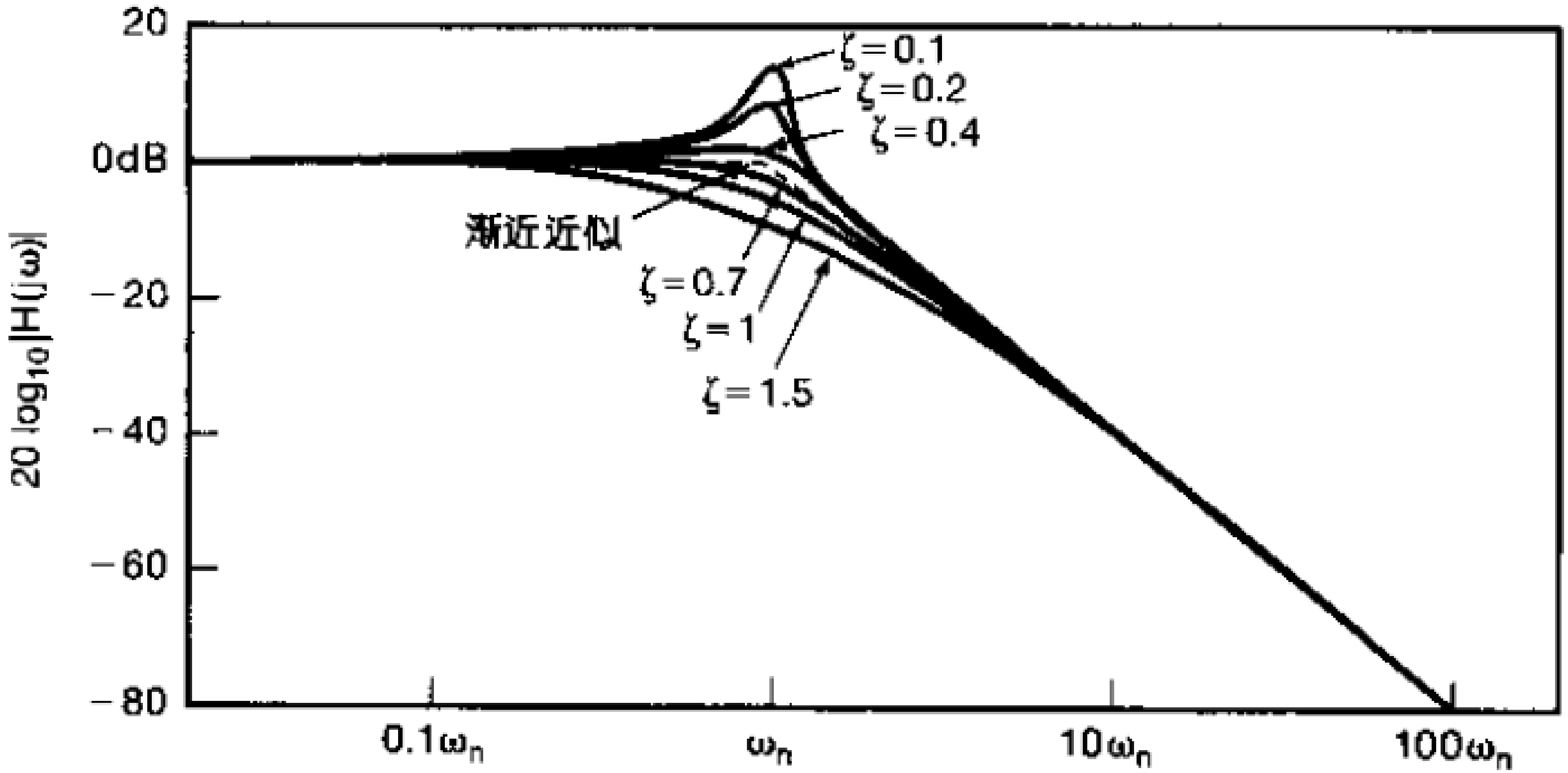
当 $\omega<<\omega_n$ 时， $20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|\approx 0\text{dB}$

当 $\omega>>\omega_n$ 时， $20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|\approx -10\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4$

$$=-40\log_{10}\omega+40\log_{10}\omega_n\ \text{dB}$$

在 $\omega=\omega_n$ 处， $20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|=-10\log_{10}\left(4\zeta^2\right)\text{dB}$

二阶连续时间系统的频域分析



二阶连续时间系统的频域分析

ζ和ω_n对系统频域特性的影响

$\zeta > 0.707$：系统的频率响应具有低通特性

$\zeta = 0.707$：低通滤波器的带宽最宽

$\zeta < 0.707$：系统的幅频特性在$\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$处出现峰值，其值为$1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$

有理型频率响应的波特图

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -20\log_{10}\frac{1}{|H(j\omega)|} \qquad \angle H(j\omega) = -\angle\left(\frac{1}{H(j\omega)}\right)$$

所以：

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau+1} \Rightarrow \hat{H}_1(j\omega) = j\omega\tau+1$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{(j\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n})+1} \Rightarrow \hat{H}_2(j\omega) = (j\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n})+1$$

$$H(j\omega) = \frac{b_M\prod_{k=1}^{P}\left(\beta_{0k}+\beta_{1k}j\omega+(j\omega)^2\right)\prod_{k=1}^{M-2P}(\lambda_k+j\omega)}{a_N\prod_{k=1}^{Q}\left(\alpha_{0k}+\alpha_{1k}j\omega+(j\omega)^2\right)\prod_{k=1}^{N-2Q}(\gamma_k+j\omega)}$$

内容提要

- 傅里叶变换的模和相位表示
- LTI系统频率响应的模和相位表示
- 对数模和波特图
- 滤波器
- 一阶连续时间系统的分析
- 一阶离散时间系统的分析

一阶离散时间系统

- 时域差分方程描述

$$y[n]-ay[n-1]=x[n], \quad |a|<1$$

- 频率响应

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

这个参数起什么作用？

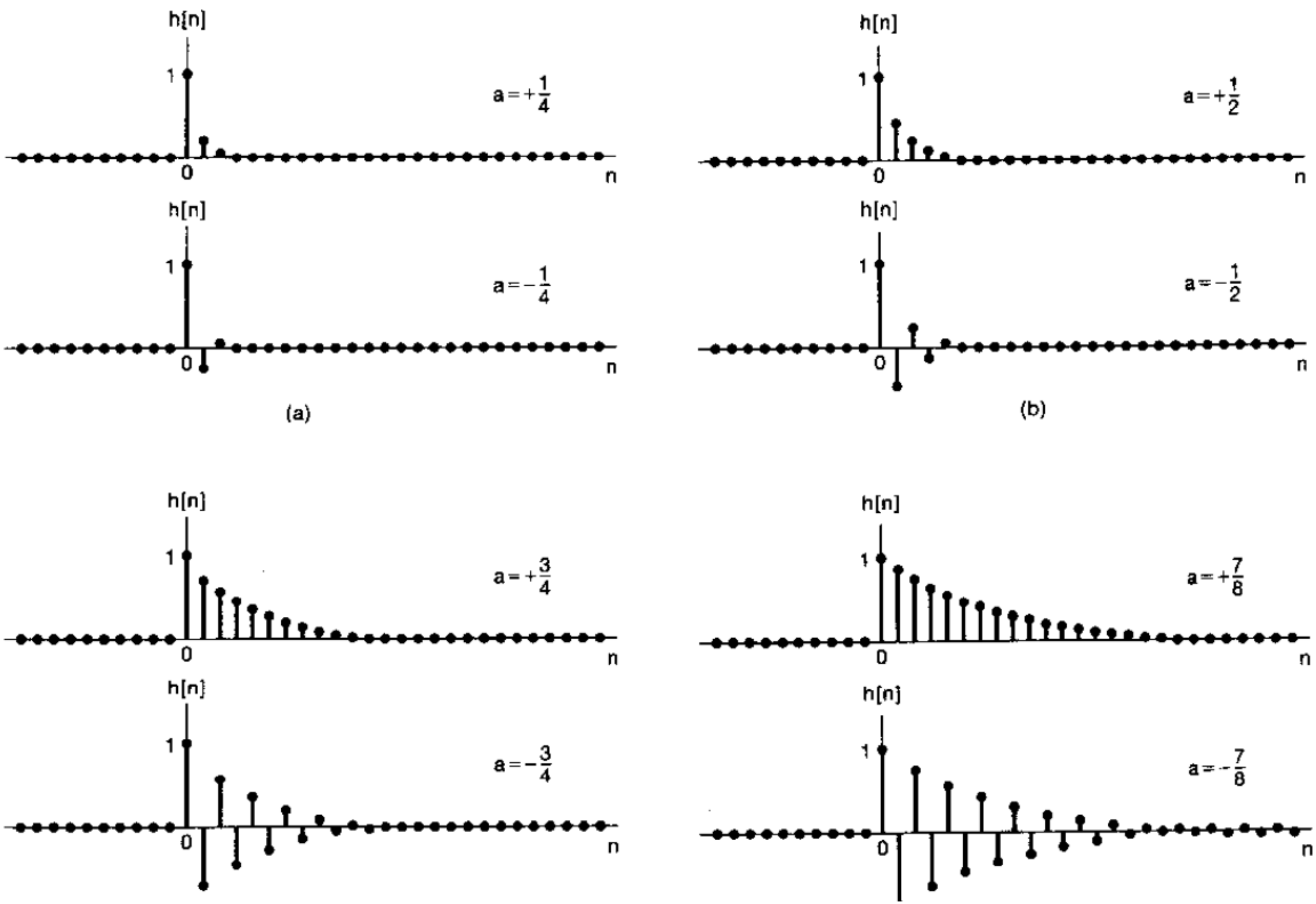
- 单位脉冲响应

$$h[n]=a^n u[n]$$

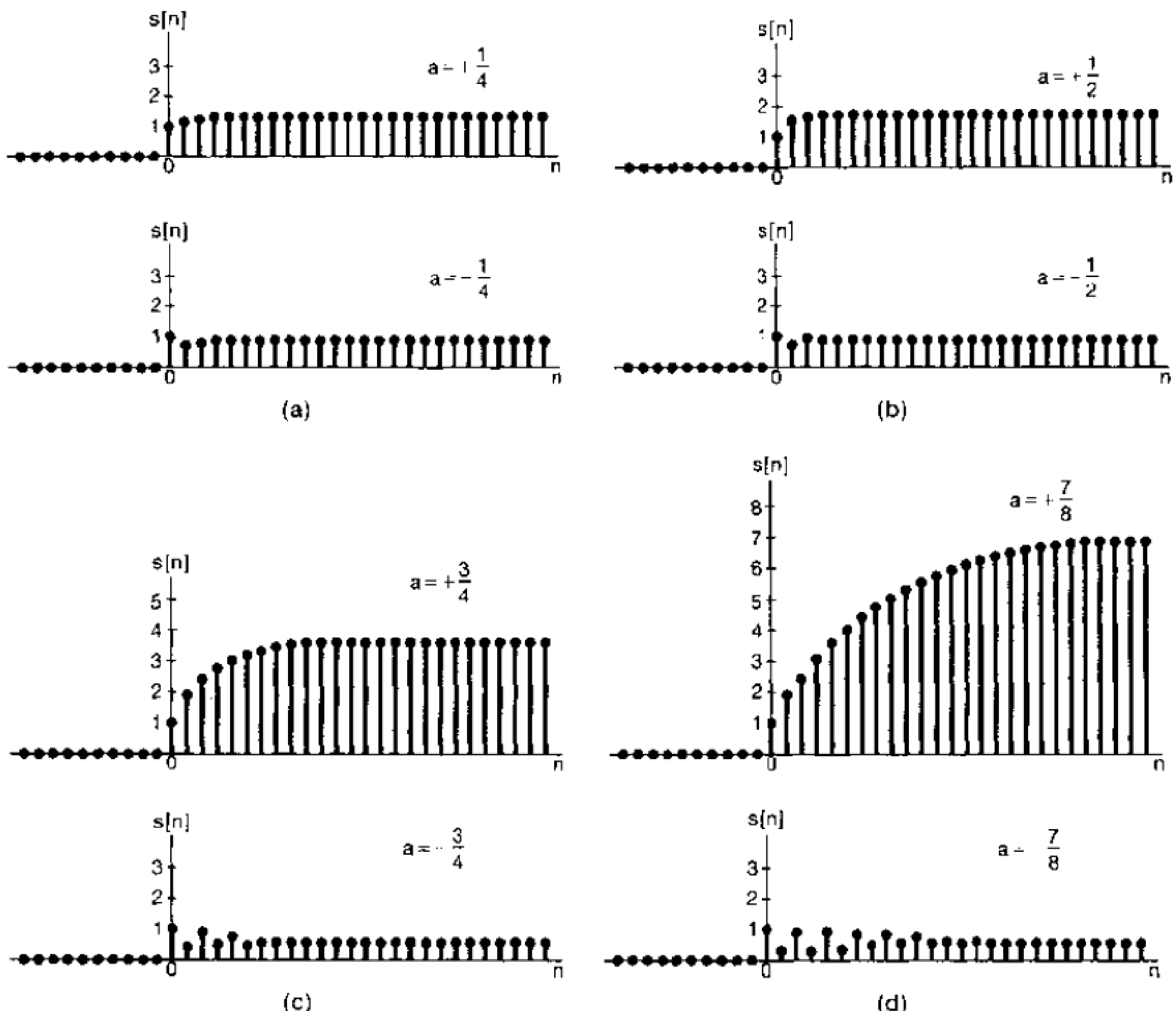
- 单位阶跃响应

$$s[n]=h[n]*u[n]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

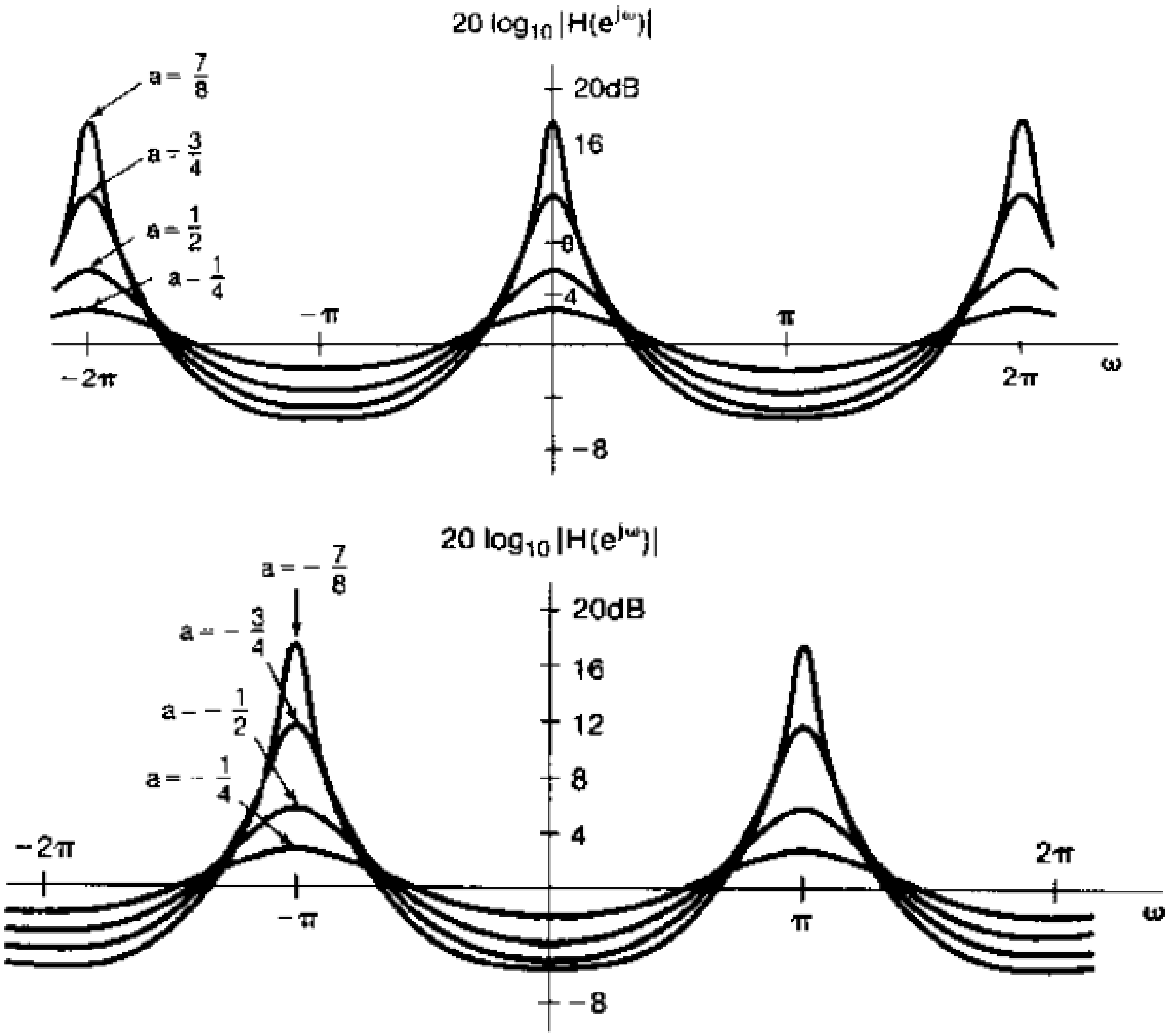
一阶离散时间系统



一阶离散时间系统



一阶离散时间系统



20 log10 |H(e^jω)|
a = 7/8
a = 3/4
a = 1/2
a = 1/4
20dB
16
8
4
−8
−2π
−π
π
2π
ω
20 log10 |H(e^jω)|
a = −7/8
a = −3/4
a = −1/2
a = −1/4
20dB
16
12
8
4
−8
−2π
−π
π
2π
ω

参数a对一阶离散时间系统的影响

- **时域特性**
  - $|a|$决定了系统响应的速度，类似于连续时间一阶系统中时间常数的作用
  - $|a|$越小，单位冲激响应衰减越快，单位阶跃响应的建立时间越短
  - $a<0$时，时域响应出现振荡特性
- **频域特性**
  - $a>0$时，低通滤波器
  - $a<0$时，高通滤波器

谢谢大家！