第十三章 非正弦周期电流电路和信号的频谱

本章内容

首页

● 重点

1. 周期函数分解为傅里叶级数

2. 非正弦周期函数的有效值和平均功率

3. 非正弦周期电流电路的计算

13-1　非正弦周期信号

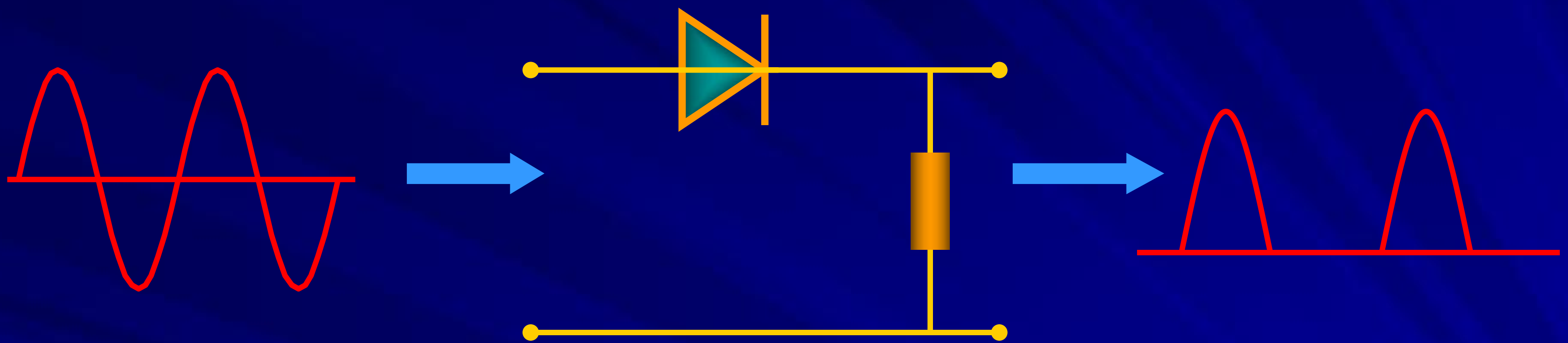
生产实际中，经常会遇到非正弦周期电流电路。在电子技术、自动控制、计算机和无线电技术等方面，电压和电流往往都是周期性的非正弦波形。

- 非正弦周期交流信号的特点

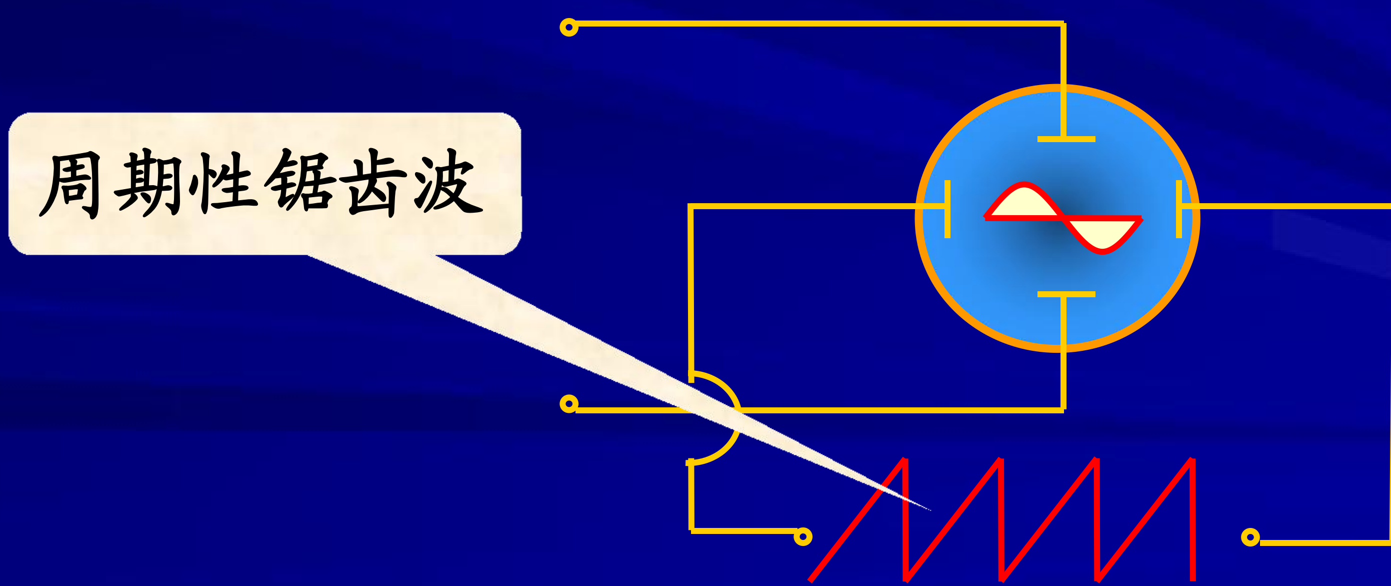
（1）不是正弦波

（2）按周期规律变化 → $f(t)=f(t+nT)$

例1-1 半波整流电路的输出信号。

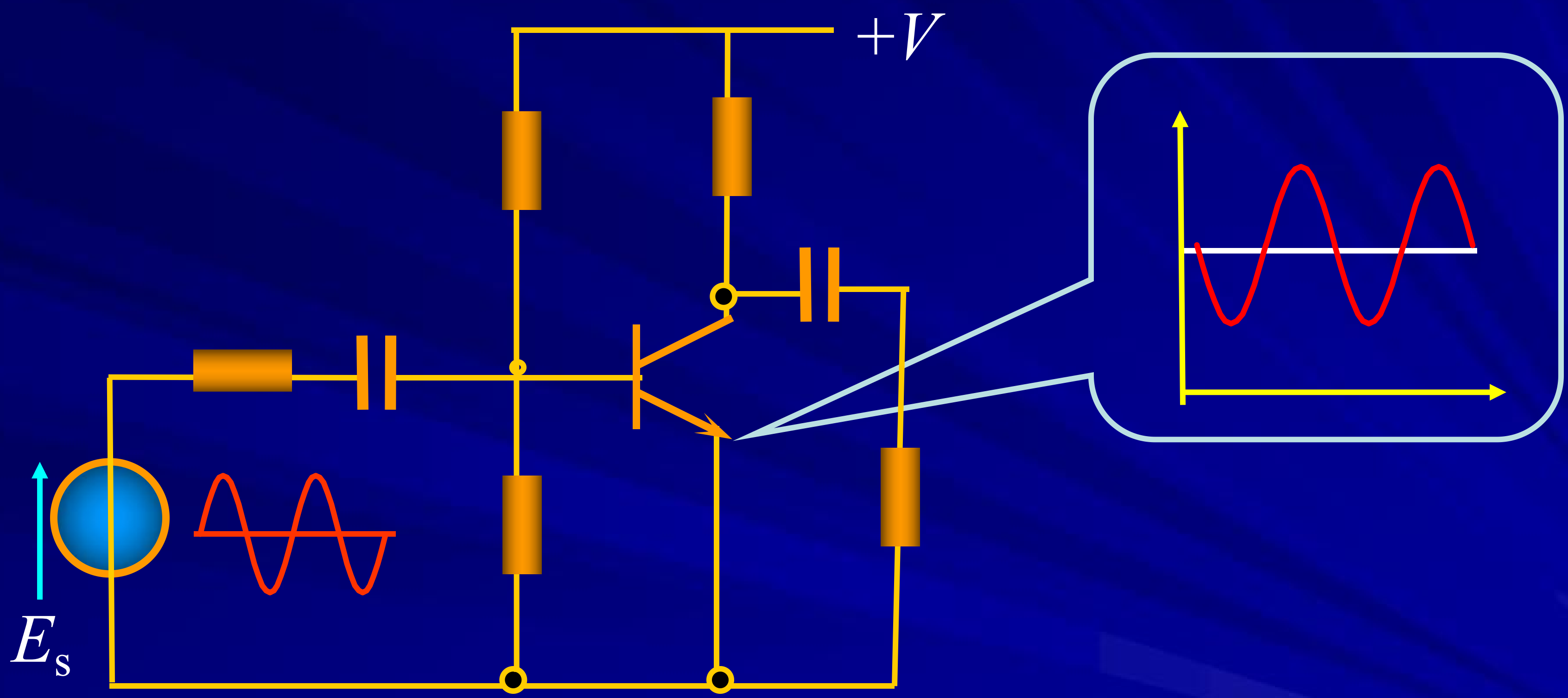


例1-2 示波器内的水平扫描电压。



例1-3 脉冲电路中的脉冲信号。

例1-4 交、直流共存电路。



13-2 非正弦周期函数分解为傅里叶级数

若周期函数满足狄里赫利条件:

①周期函数极值点的数目 为有限个。

②间断点的数目 为有限个。

③在一个周期内 绝对可积，即

$$\int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$$

可展开成收敛的傅里叶级数

注意 一般电工里遇到的周期函数都能满足狄里赫利条件。

周期函数展开成傅里叶级数:

$$f(t) = A_0 + A_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) +$$

$$A_{2m}\cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \cdots$$

$$A_{nm}\cos(n\omega_1 t + \varphi_n) +$$

直流分量

基波(和原函数同频)

二次谐波(2倍频)

高次谐波

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

也可表示成

$$A_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)=a_k\cos(k\omega_1 t)+b_k\sin(k\omega_1 t)$$

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_1 t)+b_k\sin(k\omega_1 t)]$$

系 数之间的关系 为

$$\begin{cases} A_0=a_0 \\ A_{km}=\sqrt{a_k^2+b_k^2} \\ a_k=A_{km}\cos\varphi_k \qquad b_k=-A_{km}\sin\varphi_k \\ \varphi_k=\arctan(\dfrac{-b_k}{a_k}) \end{cases}$$

系 数的计算:

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}\,t$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

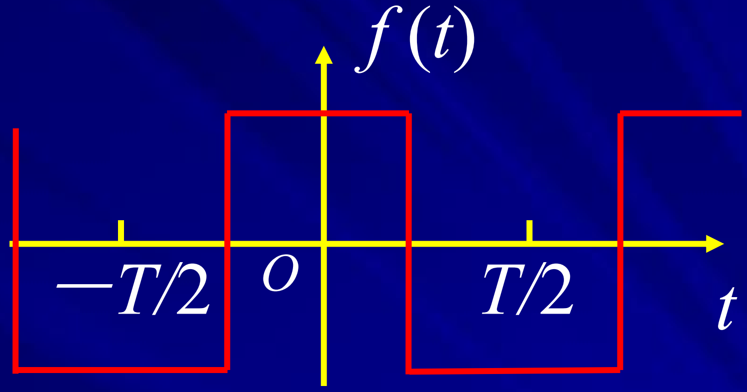
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

求出 A_0、a_k、b_k便可得到原函数 $f(t)$ 的展开式。

注意 利用函数的对称性可使系数的确定简化

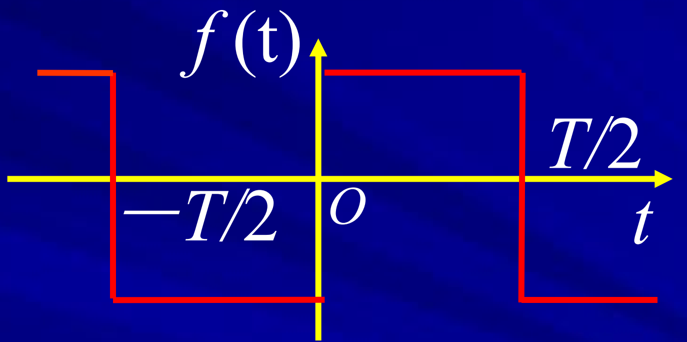
① 偶函数

$$f(t)=f(-t)\qquad b_k=0$$



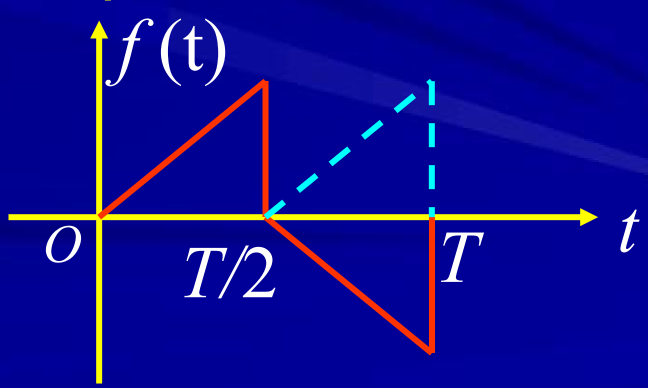
② 奇函数

$$f(t)=-f(t)\qquad a_k=0$$



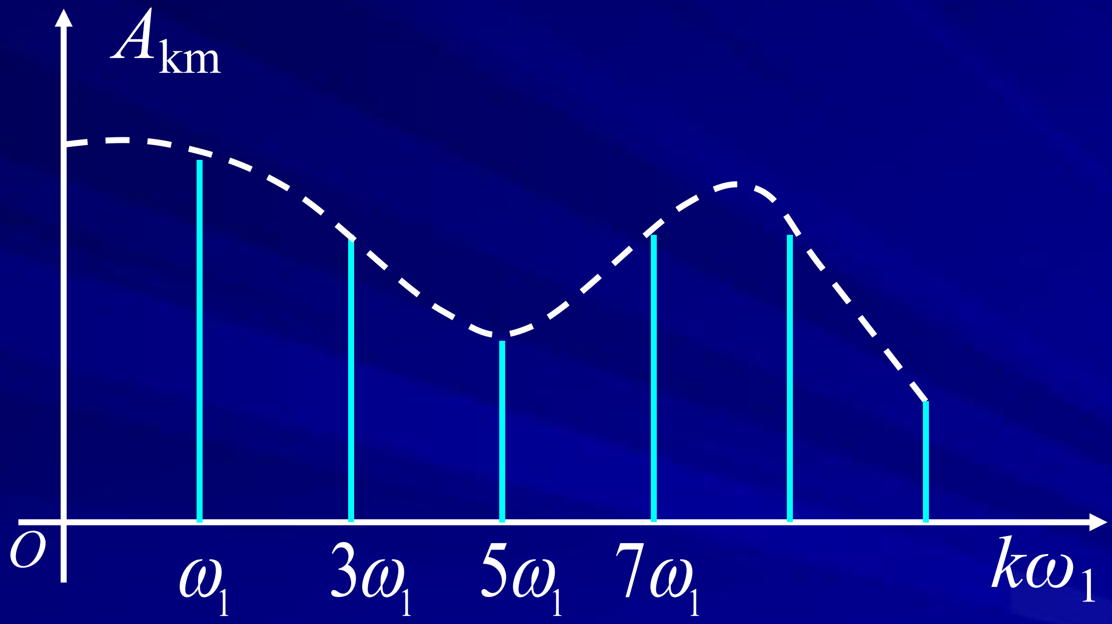
③ 奇谐波函数

$$f(t)=-f(t+\frac{T}{2})\qquad a_{2k}=b_{2k}=0$$



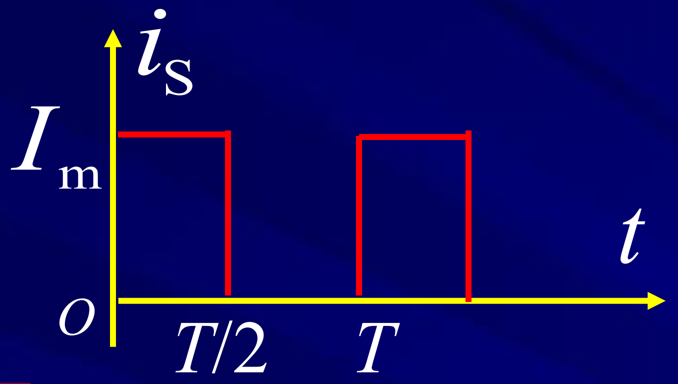
周期函数的频谱图：

幅度频谱 → $A_{km} - k\omega_1$ 的图形



相位频谱 → $\varphi_k - k\omega_1$ 的图形

例2-1 周期性方波信号的分解。



$$i_S(t)=\begin{cases} I_m & 0<t<\dfrac{T}{2} \\ 0 & \dfrac{T}{2}<t<T \end{cases}$$

解 图示矩形波电流在一个周期内的表达式为

直流分量：$$I_0=\frac{1}{T}\int_0^T i_S(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m\,\mathrm{d}t=\frac{I_m}{2}$$

谐波分量：$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t)$$

$$=\frac{I_m}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(k\omega t)\right]\Big|_0^{\pi}=\begin{cases} 0 & k\text{为偶数} \\ \dfrac{2I_m}{k\pi} & k\text{为奇数} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} i_S(\omega t)\cos(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

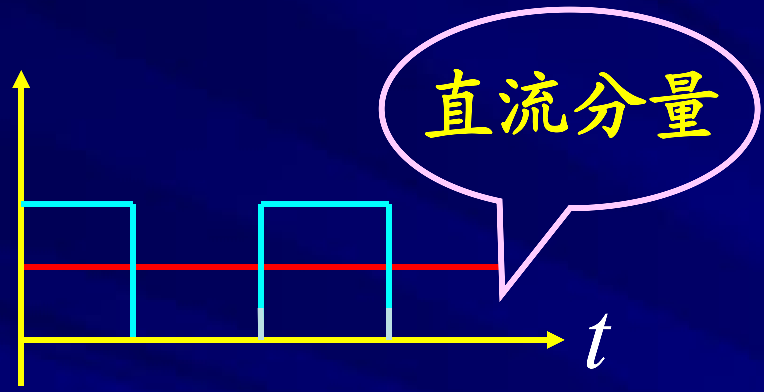
$$= \frac{2I_m}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\sin(k\omega t)\Big|_0^{\pi} = 0$$

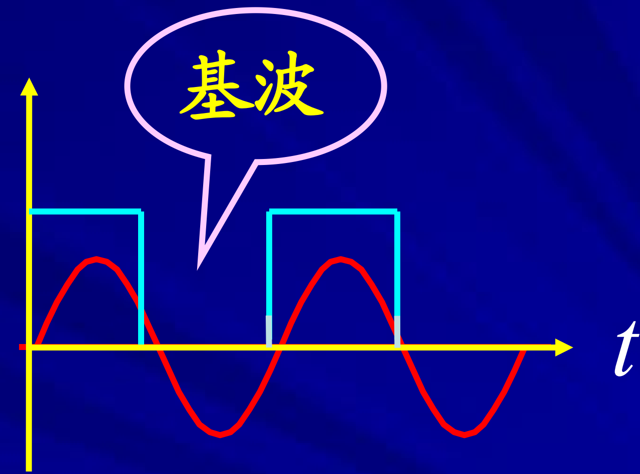
$$A_k = \sqrt{b_k^2 + a_k^2} = b_k = \frac{2I_m}{k\pi}$$ （k为奇数）

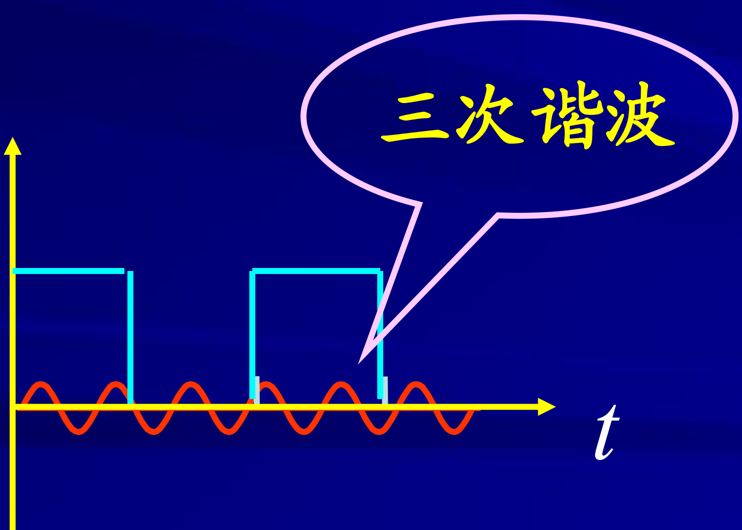
i_S的展开式为

$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots\right]$$

周期性方波波形分解

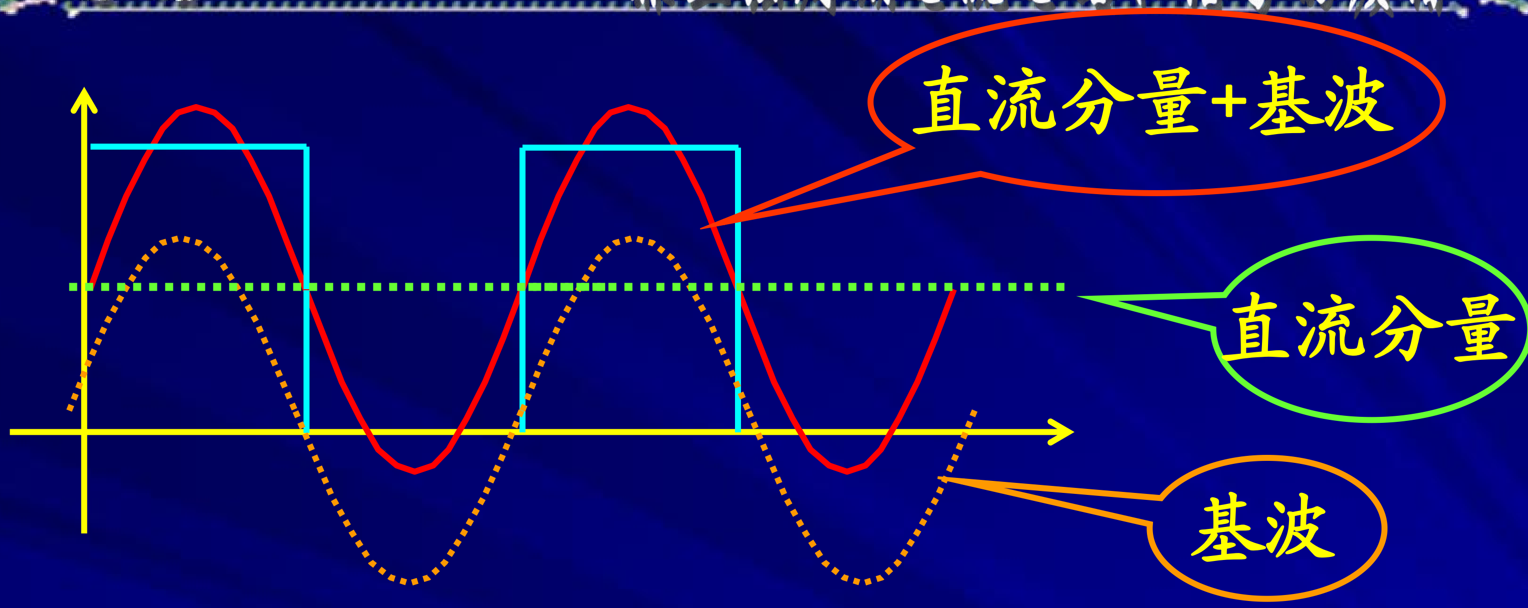


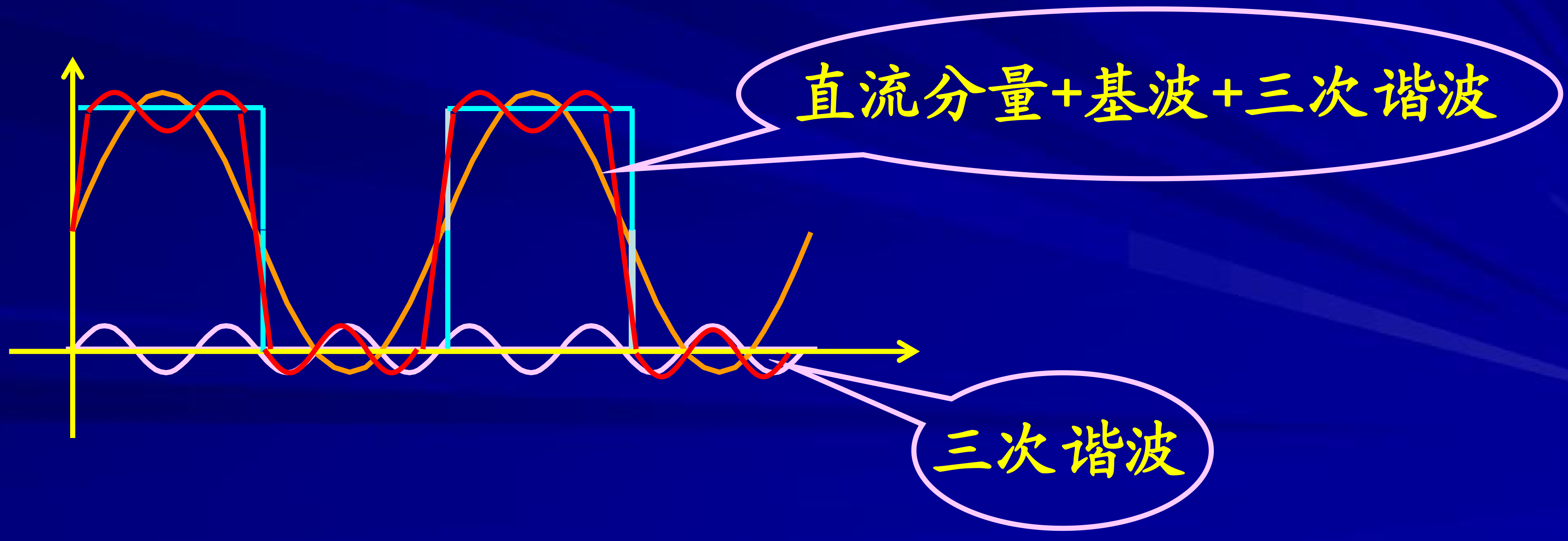


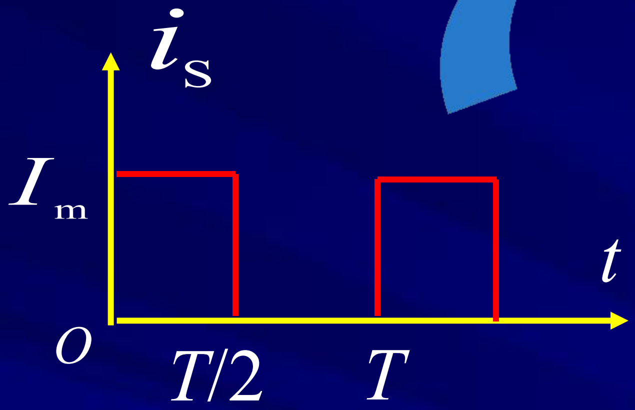


五次谐波

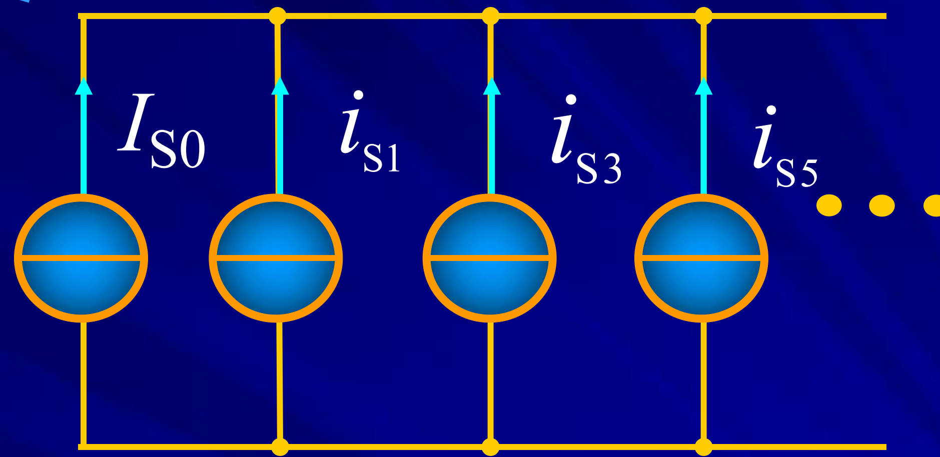
七次谐波


直流分量+基波
直流分量
基波


直流分量+基波+三次谐波
三次谐波

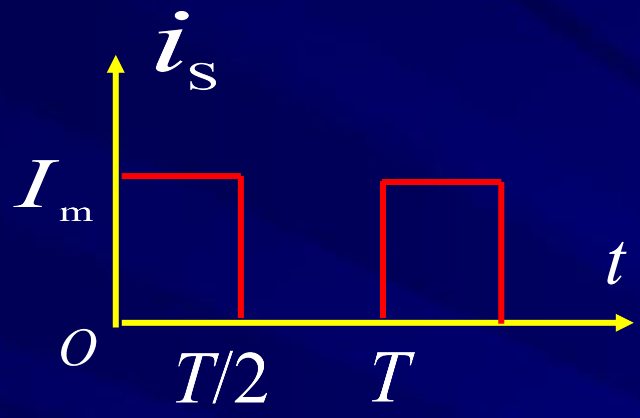


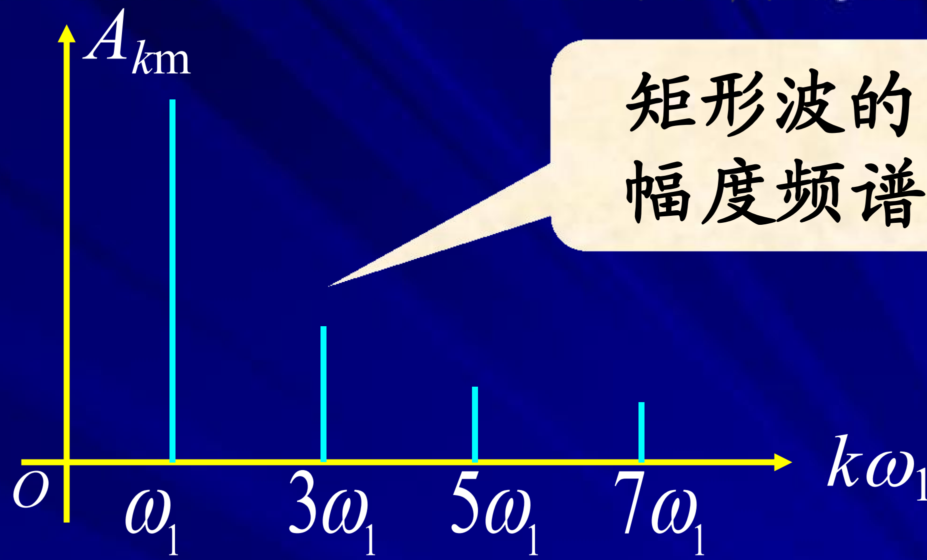
等效电源



$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots]$$

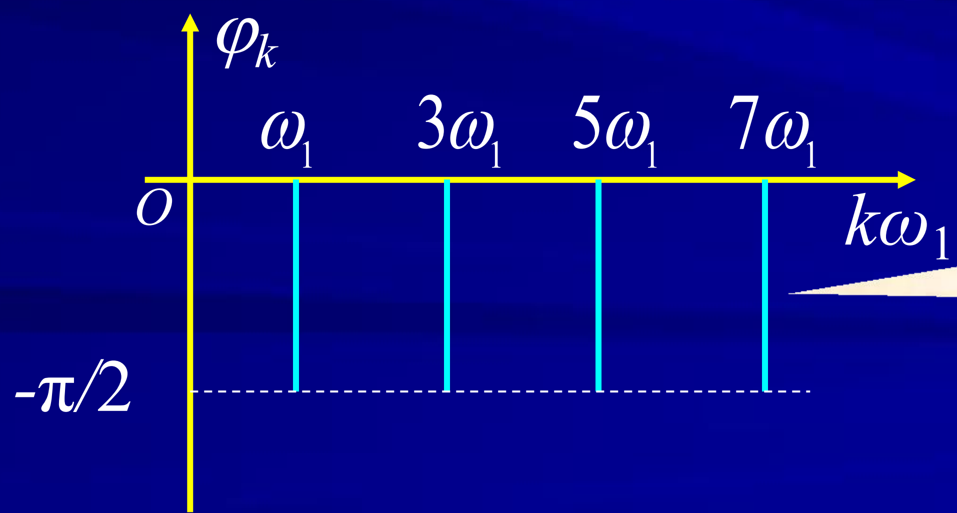
I_{S0}　　i_{S1}　　i_{S3}　　i_{S5}





矩形波的
幅度频谱

$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots\right]$$



矩形波的
相位频谱

13-3 有效值、平均值和平均功率

1. 三角函数的性质

①正弦、余弦信号一个周期内的积分为0。

$$\int_0^{2\pi}\sin(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=0 \quad \int_0^{2\pi}\cos(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=0$$

k整数

② $\sin^2$、$\cos^2$ 在一个周期内的积分为π。

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=\pi \quad \int_0^{2\pi}\cos^2(k\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=\pi$$

③三角函数的正交性。

$$\int_0^{2\pi}\cos(k\omega t)\cdot\sin(p\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(k\omega t)\cdot\cos(p\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=0$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(k\omega t)\cdot\sin(p\omega t)\mathrm{d}(\omega t)=0$$

$$(k\neq p)$$

2. 非正弦周期函数的有效值

若　$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega t + \varphi_k)$$

则有效值:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(\omega t)\mathrm{d}t}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos\left(k\omega t + \varphi_k\right)\right]^2 \mathrm{d}t}$$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}\cos\left(k\omega t+\varphi_k\right)\right]^2\mathrm{d}t}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2\mathrm{d}t=I_0^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{km}^2\cos^2(k\omega_1 t+\varphi_k)\mathrm{d}t=I_k^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0\cos(k\omega t+\varphi_k)\mathrm{d}t=0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km}\cos(k\omega t+\varphi_k)I_{qm}\cos(q\omega t+\varphi_q)\mathrm{d}t=0$$

$$\left(k\neq q\right)$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{km}^2}{2}}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots\cdots}$$

结论　周期函数的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的方根。

3. 非正弦周期函数的平均值

若 $$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

其直流值为 $$I = \frac{1}{T}\int_0^T i(\omega t)\mathrm{d}t = I_0$$

其平均值为 $$I_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left| i(\omega t) \right| \mathrm{d}t$$

正弦量的平均值为

$$I_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left| I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t) \right| \mathrm{d}t = 0.898I$$

4.非正弦周期交流电路的平均功率

$$\begin{cases} u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{uk}) \\ i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ik}) \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i\mathrm{d}t$$

利用三角函数的正交性，得

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k \qquad (\varphi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik})$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \cdots$$

结论

平均功率= 直流分量的功率+ 各次谐波的平均功率

13-4　非正弦周期电流电路的计算

1. 计算步骤

①利用傅里叶级数，将非正弦周期函数展开成若干种频率的谐波信号。

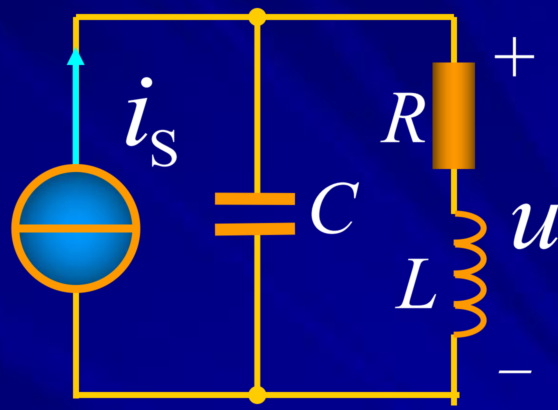
②对各次谐波分别应用相量法计算。（注意: 交流各谐波的 X_L、X_C不同，对直流 C 相当于开路、L 相于短路。）

③将以上计算结果转换为瞬时值叠加。

2. 计算举例

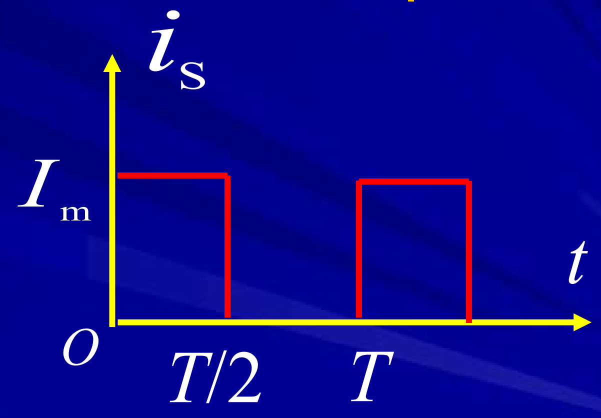
例4-1 方波信号激励的电路，求u，已知：

$$R = 20\Omega、\ L = 1\text{mH}、\ C = 1000\text{pF}$$
$$I_m = 157\mu\text{A}、\ T = 6.28\mu\text{s}$$



解　（1）方波信号的展开式为

$$i_S = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots]$$



代入已知数据：

$$\boxed{I_m = 157\mu\text{A},\quad T = 6.28\mu\text{s}}$$

直流分量: $$I_0 = \frac{I_m}{2} = \frac{157}{2}\mu\text{A} = 78.5\mu\text{A}$$

基波最大值: $$I_{1m} = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2\times 1.57}{3.14}\mu\text{A} = 100\,\mu\text{A}$$

三次谐波最大值: $$I_{3m} = \frac{1}{3}I_{1m} = 33.3\mu\text{A}$$

五次谐波最大值: $$I_{5m} = \frac{1}{5}I_{1m} = 20\mu\text{A}$$

角频率: $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.14}{6.28\times 10^{-6}}\text{rad/s} = 10^{6}\ \text{rad/s}$$

电流源各频率的谐波分量为

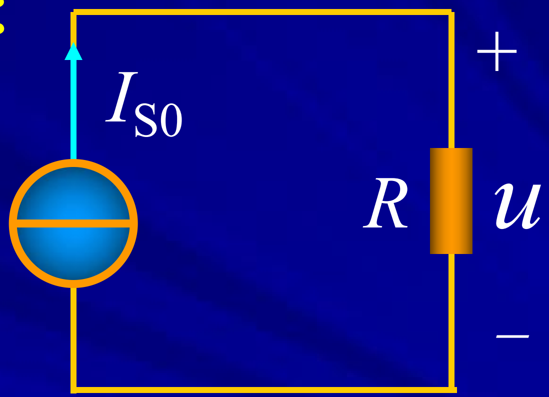
$$I_{S0}=78.5\mu A \qquad i_{S1}=100\sin 10^6 t\ \mu A$$

$$i_{S3}=\frac{100}{3}\sin 3\cdot 10^6 t\ \mu A \qquad i_{S5}=\frac{100}{5}\sin 5\cdot 10^6 t\ \mu A$$

（2） 对各次谐波分量单独计算:

（a） 直流分量 I_{S0} 作用

$$I_{S0}=78.5\mu A$$



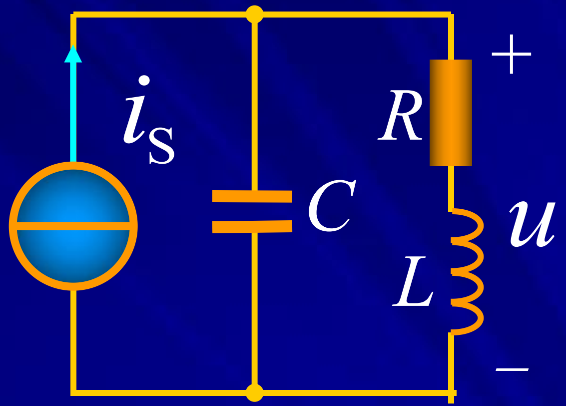
电容断路，电感短路

$$U_0=RI_{S0}=20\times 78.5\times 10^{-6}\,V=1.57mV$$

(b) 基波作用 $i_{S1} = 100\sin(10^6 t)\ \mu\text{A}$

$$-\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{-1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}}\Omega = -1\text{k}\Omega$$

$$\omega_1 L = 10^6 \times 10^{-3}\Omega = 1\text{k}\Omega$$



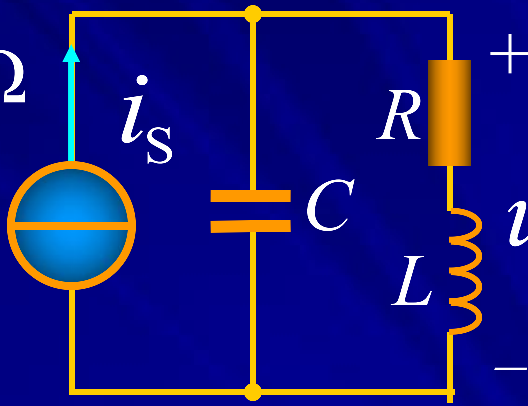
$X_L >> R$

$$Z(\omega_1) = \frac{(R + jX_L)\cdot(jX_C)}{R + j(X_L + X_C)} \approx -\frac{X_L X_C}{R} = \frac{L}{RC} = 50\text{k}\Omega$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{s1}\cdot Z(\omega_1) = \frac{100\times 10^{-6}}{\sqrt{2}}\cdot 50\times 10^3\angle 0^\circ\ \text{V} = \frac{5000}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{mV}$$

(c) 三次谐波作用 $i_{S3}=\dfrac{100}{3}\sin(3\cdot10^6 t)\ \ \mu\mathrm{A}$

$$\frac{1}{3\omega_1 C}=\frac{1}{3\times10^6\times1000\times10^{-12}}\Omega=0.33\mathrm{k}\Omega$$



$$3\omega_1 L=3\times10^6\times10^{-3}\Omega=3\mathrm{k}\Omega$$

$$Z(3\omega_1)=\frac{(R+\mathrm{j}X_{L3})(\mathrm{j}X_{C3})}{R+\mathrm{j}(X_{L3}+X_{C3})}=374.5\underline{/-89.19^\circ}\ \Omega$$

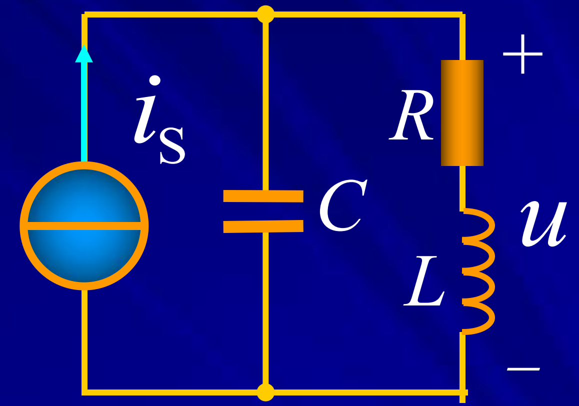
$$\dot{U}_3=\dot{I}_{s3}\cdot Z(3\omega_1)\quad=33.3\times\frac{10^{-6}}{\sqrt{2}}\times374.5\underline{/-89.19^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$=\frac{12.47}{\sqrt{2}}\underline{/-89.2^\circ}\ \mathrm{mV}$$

(d) 五次谐波作用　$i_{S5}=\dfrac{100}{5}\sin(5\cdot 10^{6}t)\ \mu A$

$$\frac{1}{5\omega_1 C}=\frac{1}{5\times 10^{6}\times 1000\times 10^{-12}}\Omega=0.2\text{k}\Omega$$

$$5\omega_1 L=5\times 10^{6}\times 10^{-3}\Omega=5\text{k}\Omega$$



$$Z(5\omega_1)=\frac{(R+\text{j}X_{L5})(\text{j}X_{C5})}{R+\text{j}(5X_{L5}+X_{C5})}=208.3\angle -89.53^{\circ}\ \Omega$$

$$\dot{U}_5=\dot{I}_{s5}\cdot Z(5\omega_1)=20\times 10^{-6}/\sqrt{2}\cdot 208.3\angle -89.53^{\circ}\ \text{V}$$

$$=\frac{4.166}{\sqrt{2}}\angle -89.53^{\circ}\,\text{mV}$$

(3) 各谐波分量计算结果瞬时值叠加

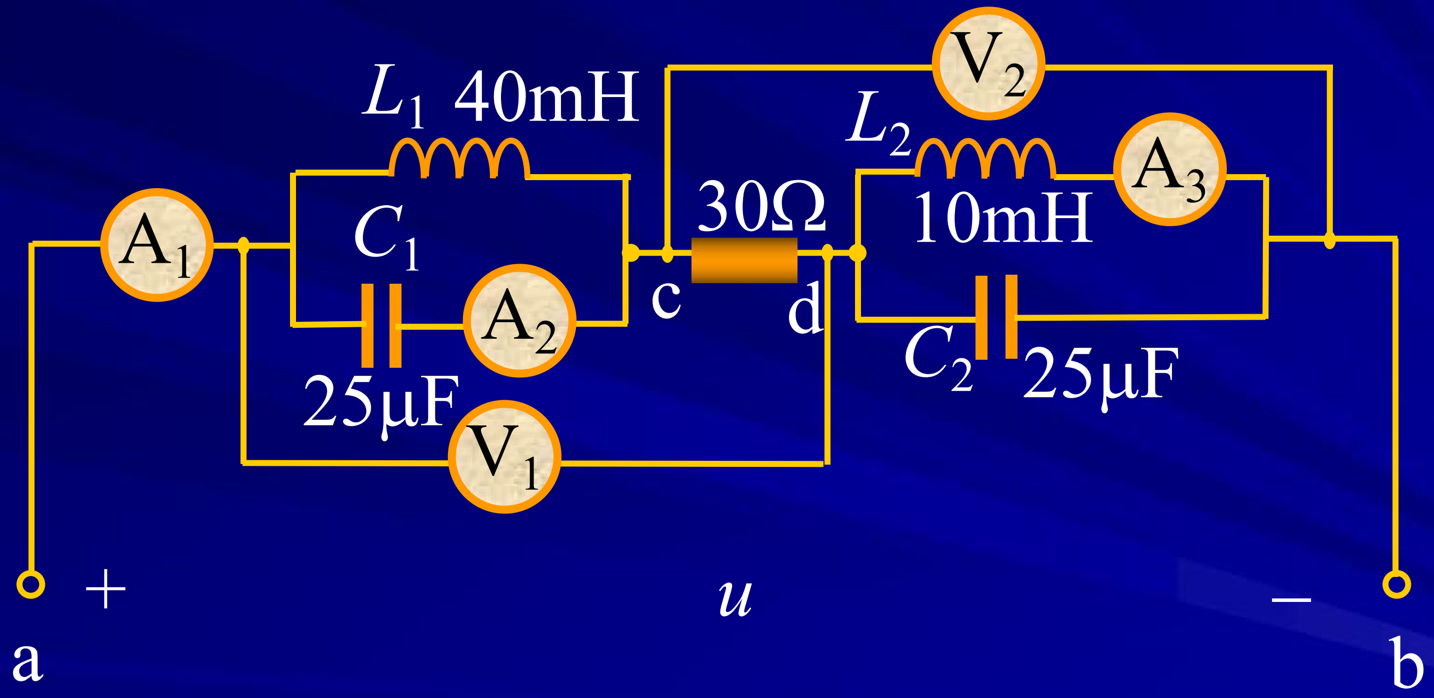
$$U_0 = 1.57\ \text{mV} \qquad \dot{U}_3 = \frac{12.47}{\sqrt{2}}\angle -89.2^\circ\ \text{mV}$$

$$\dot{U}_1 = \frac{5000}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ\ \text{mV} \qquad \dot{U}_5 = \frac{4.166}{\sqrt{2}}\angle -89.53^\circ\ \text{mV}$$

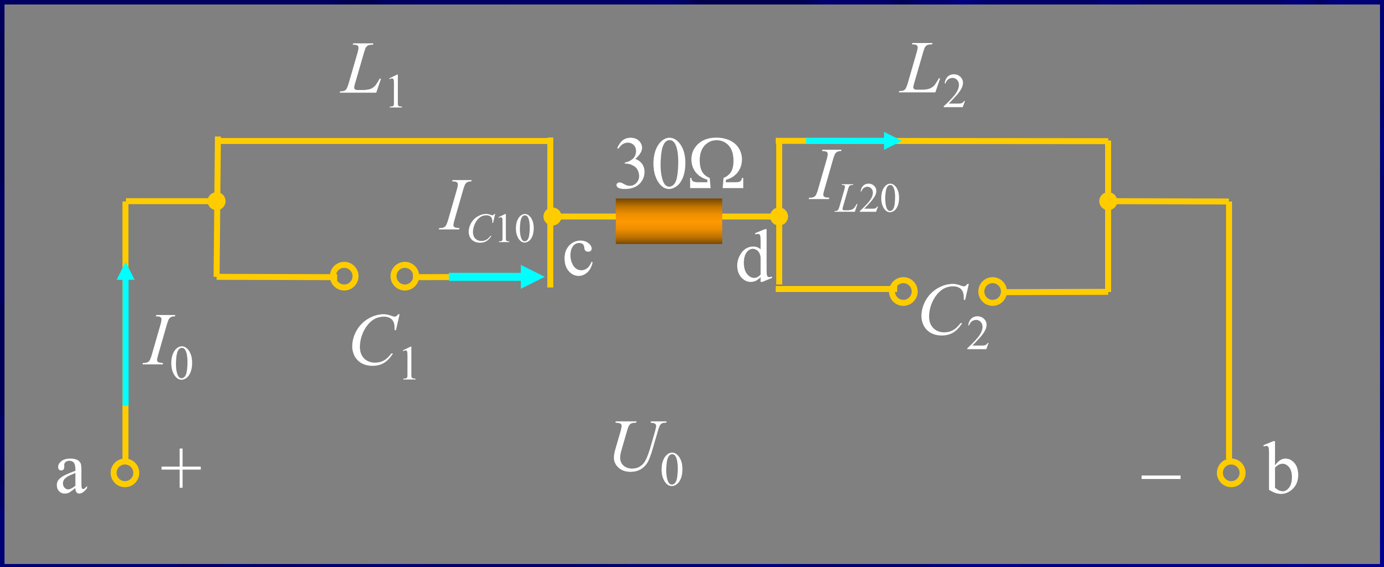
$$\begin{aligned} u &= U_0 + u_1 + u_3 + u_5 \\ &\approx [1.57 + 5000\sin(\omega t) + \\ &\quad 12.47\sin(3\omega t - 89.2^\circ) + \\ &\quad 4.166\sin(5\omega t - 89.53^\circ)]\ \text{mV} \end{aligned}$$

例4-2　求电路中各表读数(有效值)，

已知：$u=[30+120\cos(10^3 t)+60\cos(2\times10^3 t+\frac{\pi}{4})]\text{V}$。



解



(1) U_0=30V作用于电路，L_1、L_2短路，C_1、C_2开路。

$$I_0 = I_{L20} = U_0/R = 30/30\text{A} = 1\text{A},$$

$$I_{C10} = 0,$$

$$U_{ad0} = U_{cb0} = U_0 = 30\text{V}$$

(2) $u_1=120\cos(1\ 000t)$V作用

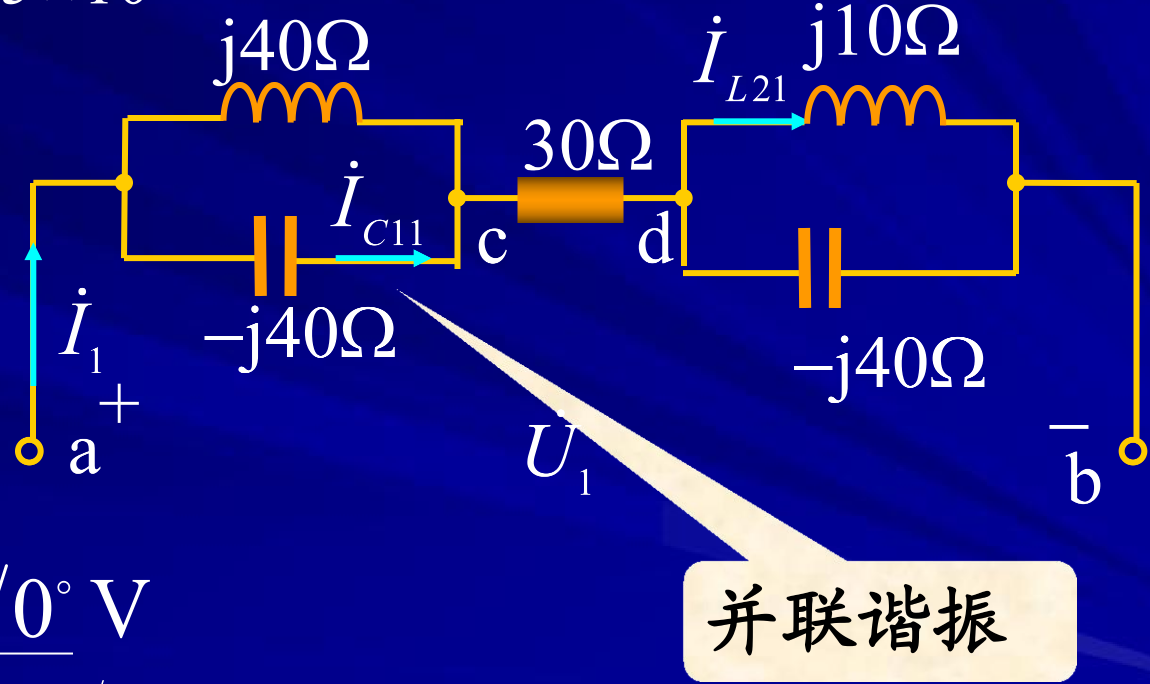
$$\omega L_1 = 10^3\times 40\times 10^{-3}\Omega = 40\Omega \qquad \omega L_2 = 10^3\times 10\times 10^{-3}\Omega = 10\Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{10^3\times 25\times 10^{-6}}\Omega = 40\Omega$$

$$\dot{U}_1 = 120\angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{L21} = 0$$

$$\dot{U}_{cb1} = 0$$



$$\dot{U}_{ad1} = \dot{U}_1 = 120\angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_{C11} = \text{j}\omega C_1\dot{U}_1 = \frac{120\angle 0^\circ}{-\text{j}40}\text{A} = 3\angle 90^\circ\ \text{A}$$

(3) $u_2=60\cos(2\,000t+\pi/4)$V作用

$$2\omega L_1=2000\times40\times10^{-3}\Omega=80\Omega,\quad 2\omega L_2=2000\times10\times10^{-3}\Omega=20\Omega$$

$$\frac{1}{2\omega C_1}=\frac{1}{2\omega C_2}=\frac{1}{2000\times25\times10^{-6}}\Omega=20\Omega$$

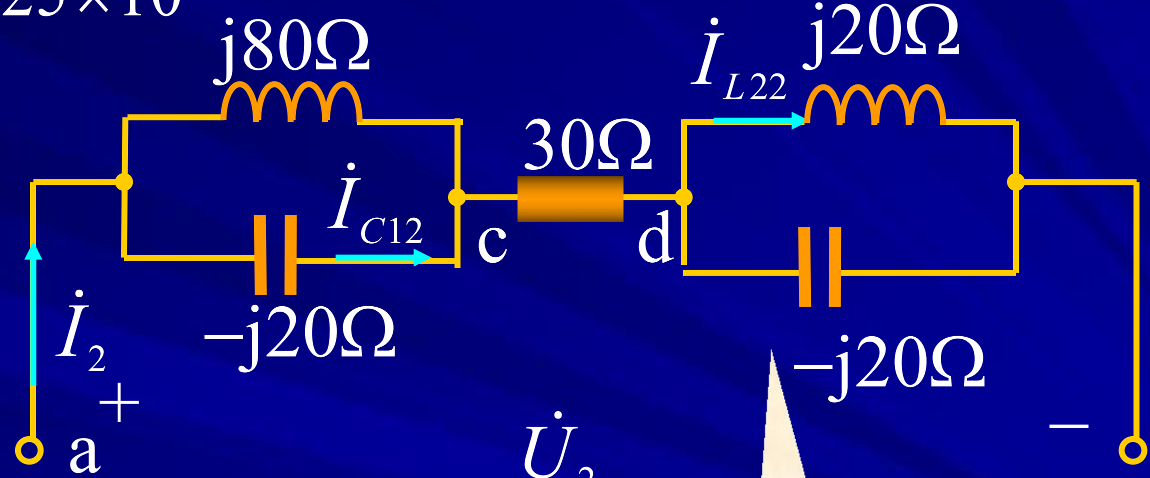
$$\dot{U}_2=60\angle45^\circ\text{ V}$$

$$\dot{I}_2=\dot{I}_{C12}=0$$

$$\dot{U}_{\text{ad2}}=0$$

$$\dot{U}_{\text{cb2}}=\dot{U}_2=60\angle45^\circ\text{ V}$$

$$\dot{I}_{L22}=\frac{\dot{U}_1}{\text{j}2\omega L_2}=\frac{60\angle45^\circ}{\text{j}20}\text{A}=3\angle-45^\circ\text{ A}$$



并联谐振

所求电压、电流的瞬时值为

$$i=I_0+i_1+i_2=1\text{A}$$

$$i_{C1}=I_{C10}+i_{C11}+i_{C12}=3\cos(1000t+90^\circ)\ \text{A}$$

$$i_{L2}=I_{L20}+i_{L21}+i_{L22}=[1+3\cos(2000t-45^\circ)]\ \text{A}$$

$$u_{ad}=U_{ad0}+u_{ad1}+u_{ad2}=[30+120\cos(1000t)]\ \text{V}$$

$$u_{cb}=U_{cb0}+u_{cb1}+u_{cb2}=[30+60\cos(2000t+45^\circ)]\text{V}$$

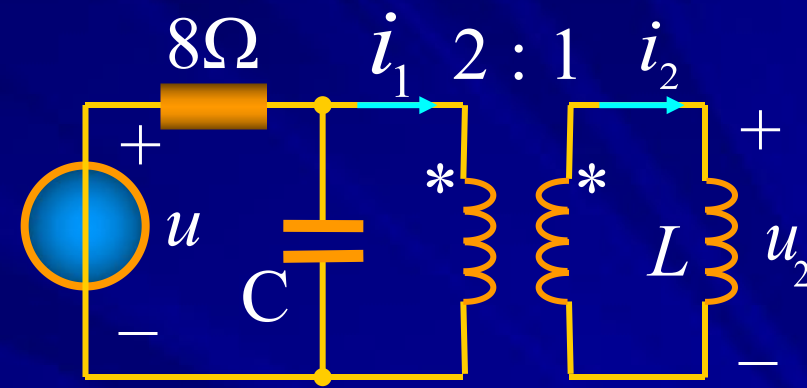
表A_1的读数: $I=1\text{ A}$　　表A_2的读数: $3/\sqrt{2}=2.12\text{A}$

表A_3的读数: $\sqrt{1^2+(3/\sqrt{2})^2}=2.35\text{A}$

表V_1的读数: $\sqrt{30^2+(120/\sqrt{2})^2}=90\text{V}$

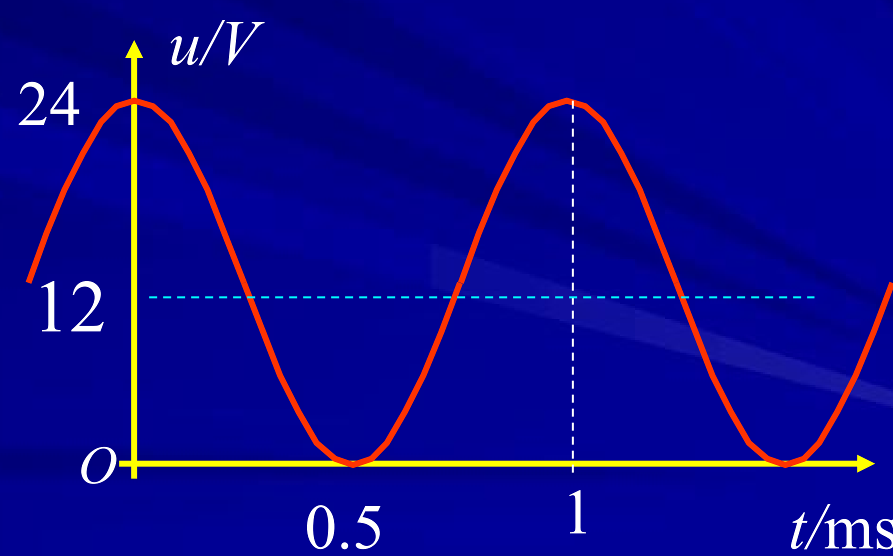
表V_2的读数: $\sqrt{30^2+(60/\sqrt{2})^2}=52.0\text{V}$

例4-3 已知$u(t)$是周期函数，波形如图，$L=1/2\pi$ H，$C=125/\pi$ μF，求理想变压器一次电流$i_1(t)$及输出电压u_2的有效值。



解 $\omega = 2\pi / T = 2\pi \times 10^3$ rad/s

$$u(t) = 12 + 12\cos(\omega t)$$



当u=12V作用时，电容开路、电感短路，有

$$i_1 = 12/8\text{A} = 1.5\text{A}$$

$$u_2 = 0$$

当 $u = 12\cos(\omega t)$ 作用时

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-\pi}{2\pi \times 10^3 \times 125 \times 10^{-6}} = -4\Omega$$

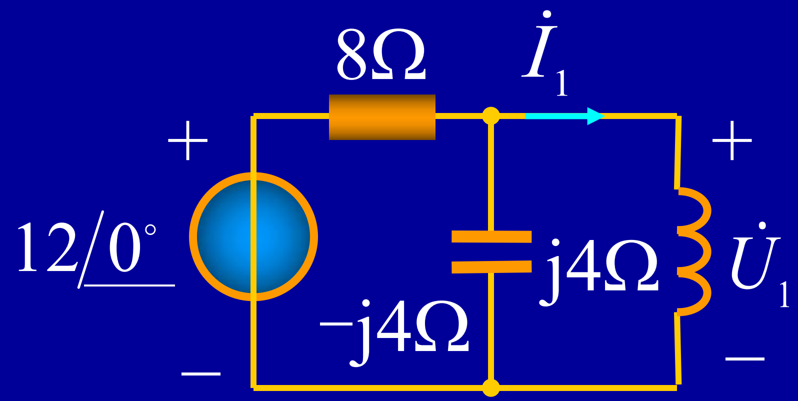
$$X_L = \omega L = 2\pi \times 10^3 \times \frac{1}{2\pi} \times 10^{-3} = 1\Omega$$

振幅相量

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\mathrm{j}4} = \frac{12}{\mathrm{j}4} = -\mathrm{j}3\mathrm{A}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U} = 12\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n}\dot{U}_1 = 6\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

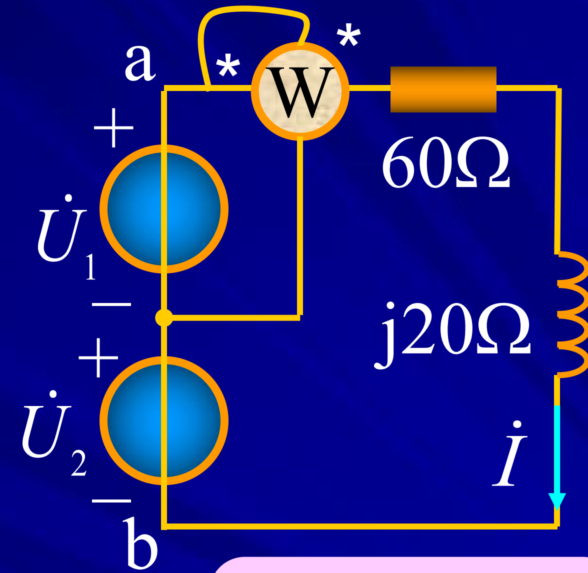


$$U_2 = \frac{6}{\sqrt{2}}\mathrm{V} = 4.243\mathrm{V} \qquad i_1 = [1.5 + 3\cos(\omega t - 90^\circ)]\mathrm{A}$$

例4-4　已知：$u_1 = 220\sqrt{2}\cos(\omega t)\text{V}$

$$u_2 = [220\sqrt{2}\cos\omega t + 100\sqrt{2}\cos(3\omega t + 30^\circ)]\text{V}$$

求U_{ab}、i、及功率表的读数。



解　$U_{ab} = \sqrt{440^2 + 100^2}\text{V} = 451.22\text{V}$

一次谐波作用：　$\dot{U}_{ab(1)} = 440\angle 0^\circ\ \text{V}$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{440}{60 + \text{j}20}\text{A} = 6.96\angle -18.4^\circ\ \text{A}$$

三次谐波作用：　$\dot{U}_{ab(3)} = 100\angle 30^\circ\ \text{V}$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100\angle 30^\circ}{60 + \text{j}60}\text{A} = 1.18\angle -15^\circ\ \text{A}$$

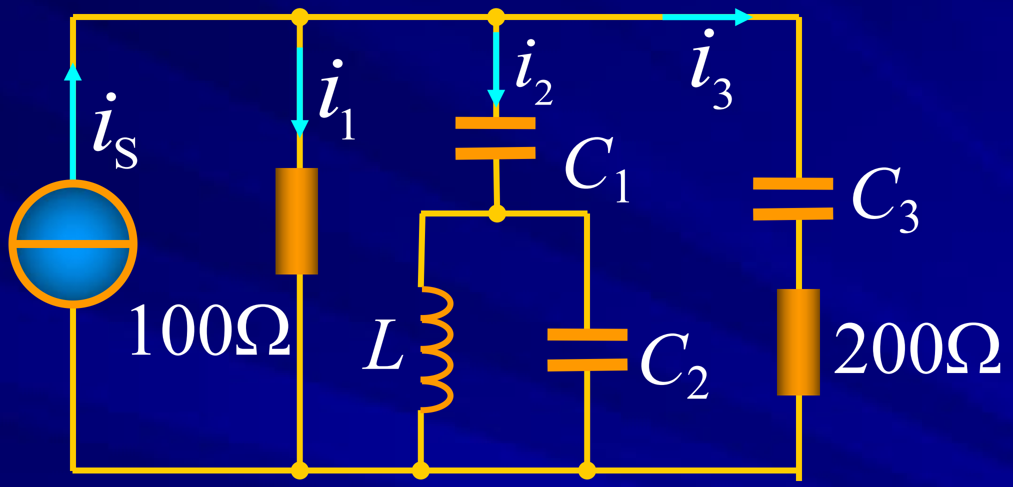
$$i = [6.96\sqrt{2}\cos(\omega t - 18.4^\circ) + 1.18\sqrt{2}\cos(3\omega t - 15^\circ)]\text{A}$$

$$P = 220 \times 6.96\cos 18.4\text{W} = 1452.92\text{W}$$

测的是u_1的功率

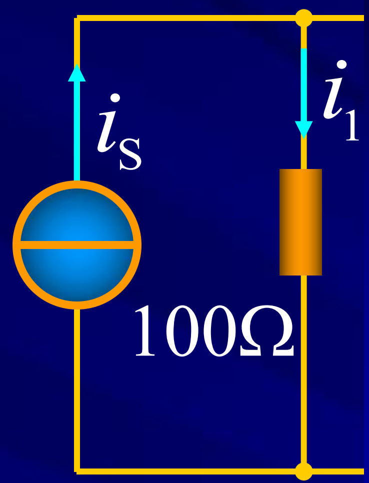
例4-5 已知：$i_S=[5+20\cos(10^3 t)+10\cos(3\times10^3 t)]\text{A}$

L=0.1H，C_3= 1μF，C_1中只有基波电流，C_3中只有三次谐波电流，求C_1、C_2和各支路电流。



解 C_1中只有基波电流，说明L和C_2对三次谐波发生并联谐振。即

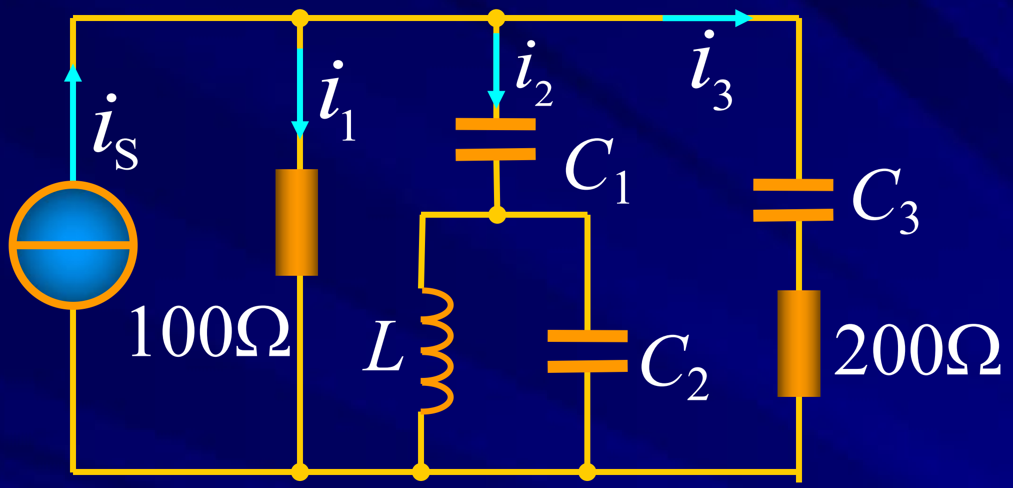
$$C_2=\frac{1}{\omega^2 L}=\frac{1}{9\times10^5}\text{F}$$

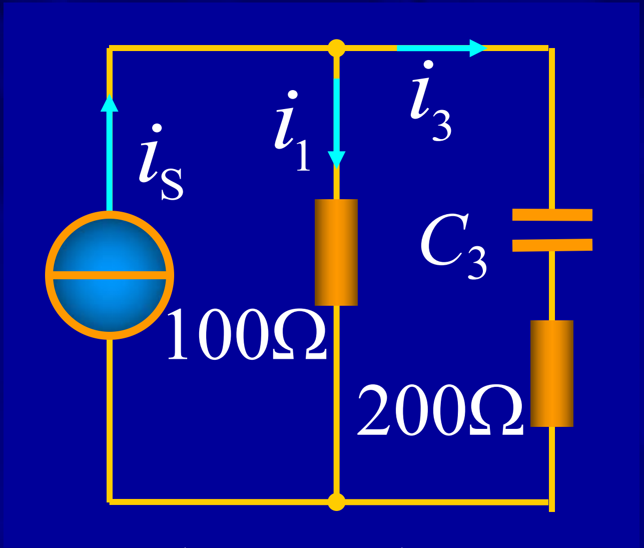


C_3中只有三次谐波电流，说明L、C_1、C_2对一次谐波发生串联谐振。即

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}+\frac{-L/C_2}{\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C_2)}=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{8}{9\times 10^5}\,\mathrm{F}$$

直流作用：$i_1 = i_S = 5\mathrm{A}$





一次谐波作用：$i_2(t) = i_S = 20\cos(1\,000t\ )\ \text{A}$

三次谐波作用：$\dot{I}_{3(3)} = \dfrac{100 \times 10}{100 + 200 - \text{j}10^3/3}\text{A} = 2.23\angle 48^\circ\ \text{A}$

$$\dot{I}_{1(3)} = \dot{I}_S - \dot{I}_{3(3)} = (10 - \frac{30}{9 - \text{j}10})\text{A} = 8.67\angle{-11^\circ}\ \text{A}$$

$$i_1(t) = [5 + 8.67\cos(3\,000t - 11^\circ)]\text{A}$$

$$i_3(t) = 2.23\cos(3\,000t + 48^\circ)\text{A}$$

*13-5 对称三相电路中的高次谐波

1. 对称三相电路中的高次谐波

设 $u_{\mathrm{A}} = u(t)$ $u_{\mathrm{B}} = u(t - \frac{T}{3})$ $u_{\mathrm{C}} = u(t - \frac{2T}{3})$

展开成傅里叶级数(k 为奇数)，则有

$$\begin{cases} u_{\mathrm{A}} = \sum U_{\mathrm{m}(k)} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \\ u_{\mathrm{B}} = \sum U_{\mathrm{m}(k)} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{2k\pi}{3}) \\ u_{\mathrm{C}} = \sum U_{\mathrm{m}(k)} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k + \frac{2k\pi}{3}) \end{cases}$$

A相

B相

C相

讨论

① 令 $k=6n+1$, $(n=0,1,2,\cdots)$, 即: $k=1,7,13,\cdots$

各相的初相分别为

A相
B相
C相

$$\begin{cases} \varphi_k \\ \varphi_k - 4n\pi - \dfrac{2}{3}\pi \\ \varphi_k + 4n\pi + \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

正序对称
三相电源

② 令 $k=6n+3$, 即: $k=3,9,15,\cdots$

各相的初相分别为

A相 φ_k

B相 $\varphi_k-(2n+1)2\pi$

C相 $\varphi_k+(2n+1)2\pi$

零序对称三相电源

③令 $k=6n+5$，即：$k=5,11,17,\cdots$

各相的初相分别为

A相 φ_k

B相 $\varphi_k-(2n+2)2\pi+\dfrac{2}{3}\pi$

C相 $\varphi_k+(2n+2)2\pi-\dfrac{2}{3}\pi$

负序对称三相电源

结论

①三相对称的非正弦周期量(奇谐波) 可分解为3类对称组，即正序对称组、负序对称组和零序对称组。

②在上述对称的非正弦周期电压源作用下的对称三相电路的分析计算，按3类对称组分别进行。对于正序和负序对称组，可直接引用第十二章的方法和有关结论。

2. 零序组分量的响应

①对称的三角形电源

零序组电压源是等幅同相的电源

$$\dot{U}_{\mathrm{A}(k)}=\dot{U}_{\mathrm{B}(k)}=\dot{U}_{\mathrm{C}(k)}=\dot{U}_{\mathrm{s}(k)}$$

在三角形电源的回路中将产生零序环流

$$\dot{I}_{0(k)}(\text{零序})=\frac{3\dot{U}_{\mathrm{s}(k)}}{3Z_0}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{s}(k)}}{Z_0}(\text{零序})$$

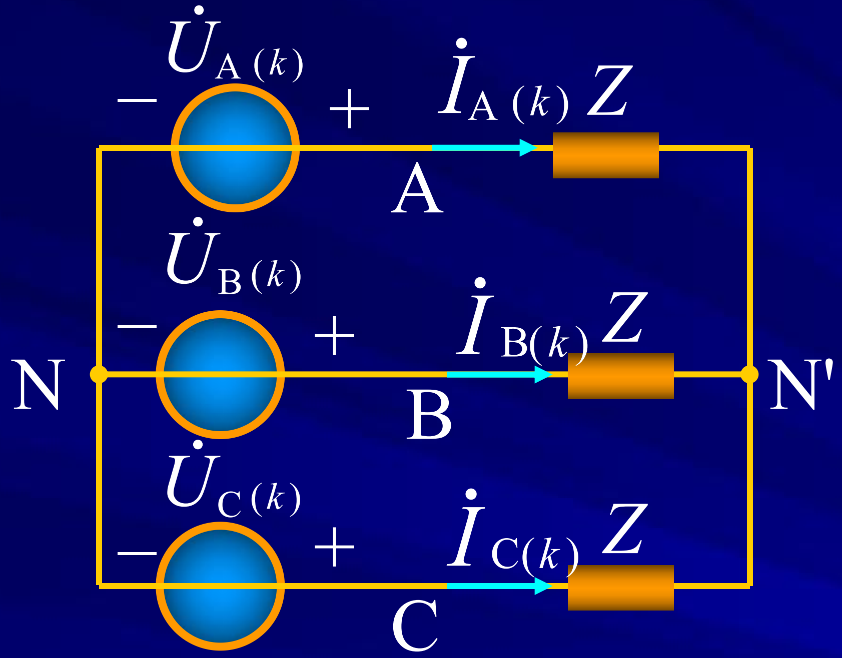
电源内阻

线电压 $\dot{U}_{\mathrm{AB}(k)}=\dot{U}_{\mathrm{BC}(k)}=\dot{U}_{\mathrm{CA}(k)}=\dot{U}_{\mathrm{s}(k)}-\dot{I}_{0(k)}Z_0=0$

结论 ①在环流的作用下零序线电压为零。

②整个系统中除电源中有零序组环流外，其余部分的电压、电流中将不含零序组分量。

②星形对称电源（无中性线对称系统）



$$\dot{U}_{N'N(k)}(\text{零序})=\dot{U}_{s(k)}(\text{零序})$$

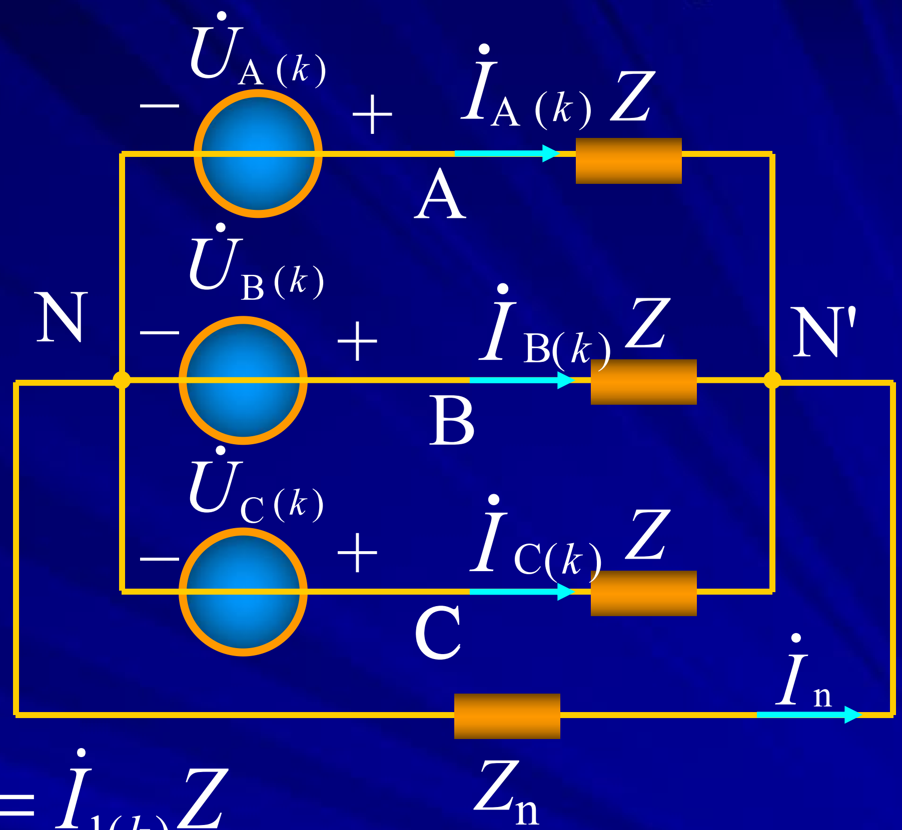
$$\dot{I}_{A(k)}=\dot{I}_{B(k)}=\dot{I}_{C(k)}=\frac{\dot{U}_{s(k)}-\dot{U}_{N'N}}{Z}=0$$

$$\dot{U}_{AB(k)}=\dot{U}_{A(k)}-\dot{U}_{B(k)}=0$$

$$\dot{U}_{BC(k)}=\dot{U}_{CA(k)}=0$$

结论　除了中点电压和电源相电压中含有零序组电压分量外，系统的其余部分的电压、电流都不含零序组分量。

③三相四线制对称系统



$$\dot{I}_{A(k)} = \dot{I}_{B(k)} = \dot{I}_{C(k)} = \frac{\dot{U}_{s(k)}}{Z+3Z_n}$$

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{3Z_n\dot{U}_{s(k)}}{Z+3Z_n}$$

$$\dot{I}_{n(k)} = -3\dot{I}_{1(k)}$$

$$\dot{U}_{AN'(k)} = \dot{U}_{BN'(k)} = \dot{U}_{CN'(k)} = \dot{I}_{1(k)}Z$$

$$\dot{U}_{AB(k)} = \dot{U}_{BC(k)} = \dot{U}_{CA(k)} = 0$$

结论 除线电压外，电路中其余部分的电压、电流中都含零序组分量。

*13-6 傅里叶级数的指数形式

1. 傅里叶级数的指数形式

三角形式

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\cos(k\omega_1 t+\phi_k)$$

利用欧拉公式有

$$A_{km}\cos(k\omega_1 t+\phi_k)=\frac{1}{2}[A_{km}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k\omega_1 t+\phi_k)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k\omega_1 t+\phi_k)})]$$

$$=\frac{1}{2}A_{km}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}+\frac{1}{2}A_{km}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}$$

$$=c_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}+c_k^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}+\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}$$

指数形式

确定系数

因为 $a_k=A_{km}\cos\phi_k \qquad b_k=-A_{km}\sin\phi_k$

$$A_{km}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_k}=a_k-\mathrm{j}b_k$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

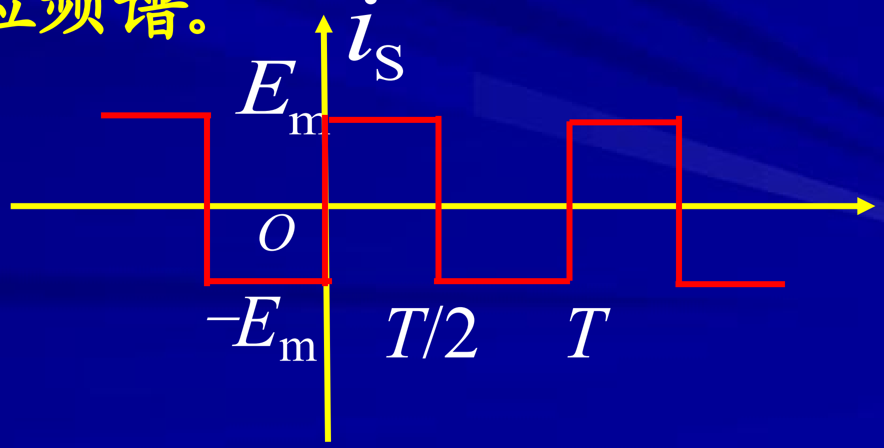
$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)[\cos(k\omega_1 t)-\mathrm{j}\sin(k\omega_1 t)]\mathrm{d}t$$

注意 画傅里叶级数指数形式的频谱时

① 画出 $|c_k|$ 对正、负 k 的关系，频谱图对于纵轴对称，只要研究“正半边”即可，其线谱“高度”是傅氏频谱的一半。

② 画出 c_k 的辐角与 k 的关系得相位频谱

例6-1 试将矩形波展开为指数形式的傅氏级数，并画出幅度频谱和相位频谱。



解

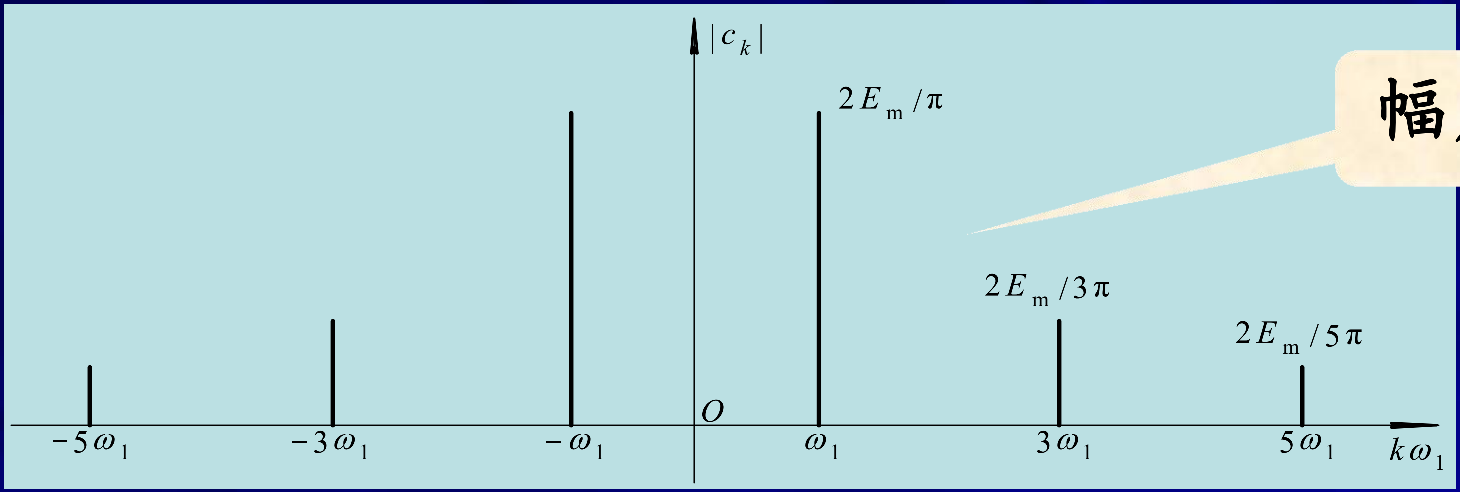
$$A_{k\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_k}=a_k-\mathrm{j}b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{E_\mathrm{m}}{\mathrm{j}k\pi}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi})^2$$

$$c_k=\frac{1}{2}A_{k\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\phi_k}=\frac{E_\mathrm{m}}{\mathrm{j}2k\pi}(1-2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k\pi})$$

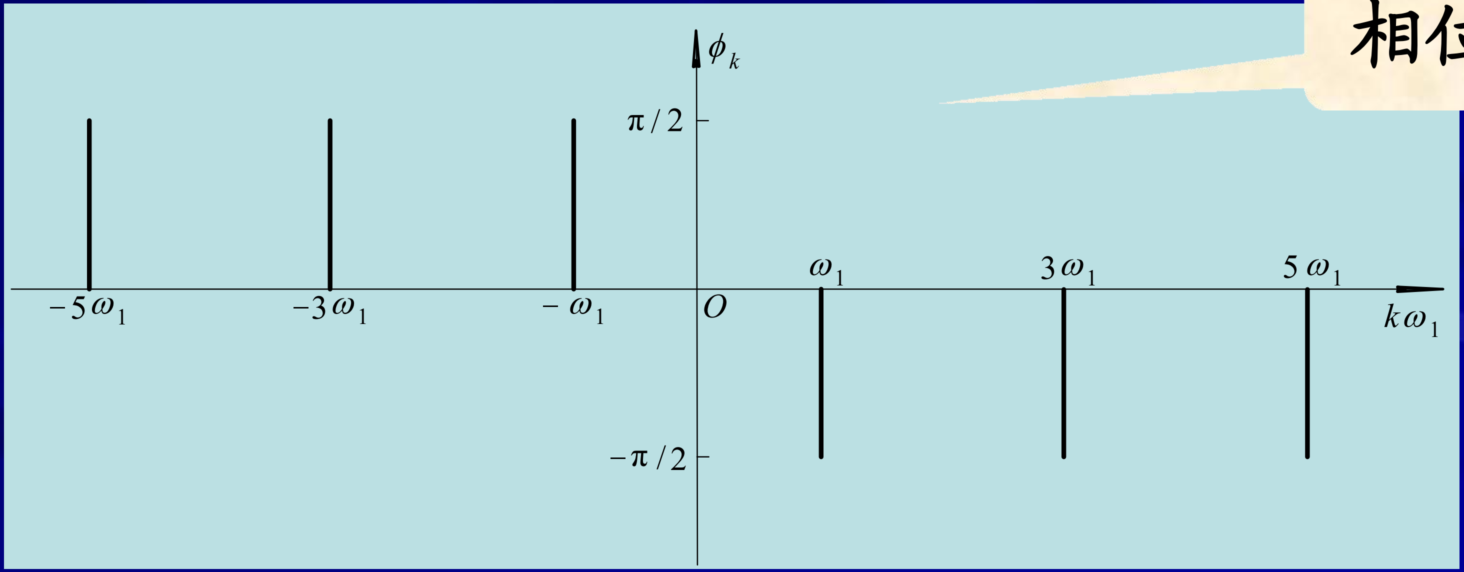
$$c_k=\begin{cases}\dfrac{E_\mathrm{m}}{\mathrm{j}2k\pi}\times 4=\dfrac{2E_\mathrm{m}}{\mathrm{j}k\pi} & \text{当}k\text{为奇数时}\\ 0 & \text{当}k\text{为偶数时}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{2E_\mathrm{m}}{\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t-\pi/2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_1 t-\pi/2)})+$$

$$\frac{2E_\mathrm{m}}{3\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(3\omega_1 t-\pi/2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(3\omega_1 t-\pi/2)})+\cdots$$


|c_k|
2E_m/π
2E_m/3π
2E_m/5π
O
−5ω_1
−3ω_1
−ω_1
ω_1
3ω_1
5ω_1
kω_1

幅度频谱


φ_k
π/2
−π/2
O
−5ω_1
−3ω_1
−ω_1
ω_1
3ω_1
5ω_1
kω_1

相位频谱

*13-7 傅里叶积分简介

1. 傅里叶级数积分(正变换)

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

注意

①上式表述的频谱函数是离 散的线状频谱，相邻谱线之间的频差

$$\Delta\omega=\omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

②当 $T\to\infty$时， $\Delta\omega\to 0$, 离散的线状频谱将变为连续的频谱，即 c_k变为 ω的连续函数。

③如$f(t)$在周期内的积分有界(满足狄里赫利条件) c_k在全频域内是一个无限小的连续函数。

定义

$$F(\mathrm{j}k\omega_1)=Tc_k=\frac{2\pi c_k}{\Delta\omega}=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \Delta\omega\to\mathrm{d}\omega\\ k\omega_1\to\omega}}F(\mathrm{j}k\omega_1)=F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

傅里叶正变换

2. 傅里叶逆变换

$$F(\mathrm{j}k\omega_1) = Tc_k = \frac{2\pi c_k}{\Delta\omega} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$\rightarrow\quad c_k = \frac{F(\mathrm{j}k\omega_1)}{T} = \frac{\Delta\omega F(\mathrm{j}k\omega_1)}{2\pi}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega F(\mathrm{j}k\omega_1)}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}$$

当$T \to \infty$，$\Delta\omega \to \mathrm{d}\omega$，$k\omega_1 \to \omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

傅里叶逆变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

傅里叶逆变换对

注意 任一非周期信号都可以看作周期为无限长的周期信号，所以傅里叶变换对为分析研究任意信号奠定了理论基础。在线性电路中，任一形式激励的零状态响应，都可以通过傅里叶变换对，用谐波分析法进行分析研究。