第十九讲
拉普拉斯变换的性质

杜清河
西安交通大学
信息与通信工程学院
2025

本讲覆盖章节

- 9.5
- 9.6 (常用变换对表)

内容提要

- 拉普拉斯变换的性质
- 应用举例

内容提要

- 拉普拉斯变换的性质
- 应用举例

线性

$$x_1(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} X_1(s), \quad \text{ROC}=R_1$$

$$x_2(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} X_2(s), \quad \text{ROC}=R_2$$

还可以大

$$ax_1(t)+bx_2(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} aX_1(s)+bX_2(s), \quad \text{ROC包含}R_1 \cap R_2$$

线性

$$x(t)=e^{-b|t|}$$

$$x(t)=e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t)$$

$$X_1(s)=\frac{1}{s+b},\quad \Re\mathrm{e}\{s\}>-b \qquad X_2(s)=\frac{-1}{s-b},\quad \Re\mathrm{e}\{s\}<b$$

当$b\le 0$时，没有公共的收敛域，因此拉普拉斯变换不存在；当$b>0$时，

刚好对称交集

$$X(s)=\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s-b}=\frac{-2b}{s^2-b^2},\quad -b<\Re\mathrm{e}\{s\}<b$$

线性

$$x(t)=x_1(t)-x_2(t)$$

假设它们的拉普拉斯变换分别是

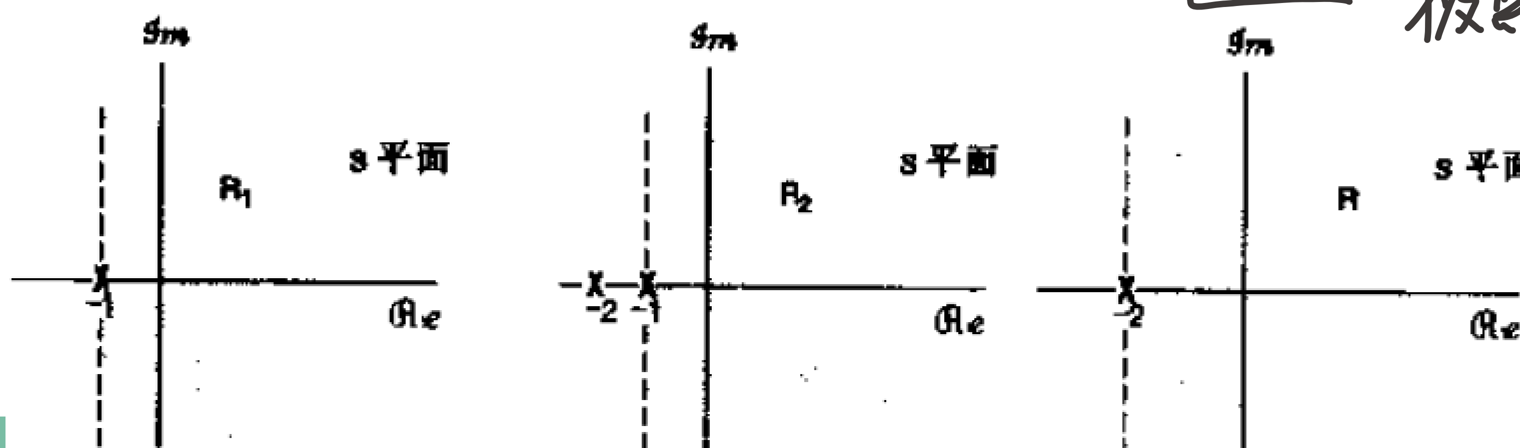
$$X_1(s)=\frac{1}{s+1},\quad \Re e\{s\}>-1 \qquad X_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \Re e\{s\}>-1$$

则$x(t)$的拉普拉斯变换是

抵消s+1　总域比较大　集大

$$X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\boxed{\frac{1}{s+2}}\qquad \Re e\{s\}>-2$$

极点抵消



时移性质

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC}=R$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0}X(s), \quad \text{ROC}=R$$

$\delta(t-T)$的拉普拉斯变换？ e^{-sT}， ROC: 全部s

任意给定$\boxed{s}$

如5

但不可以是∞.

时移性质举例

求如下矩形脉冲信号的拉普拉斯变换

u(t)的傅里叶变换？

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因为 $x(t)=u(t+T)-u(t-T)$，而 $u(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s},\quad \Re e\{s\}>0$$

所以

$$u(t+T)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{Ts},\quad \Re e\{s\}>0$$

$$u(t-T)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-Ts},\quad \Re e\{s\}>0$$

$\Rightarrow$

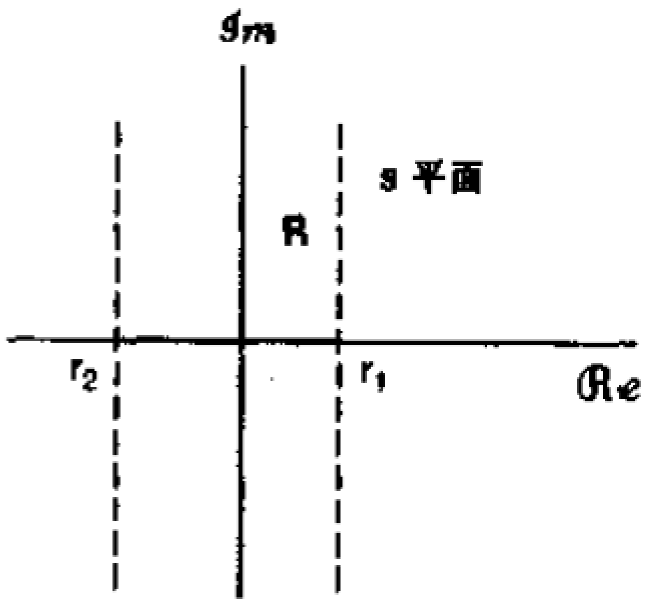
$$X(s)=\frac{1}{s}(e^{Ts}-e^{-Ts})$$

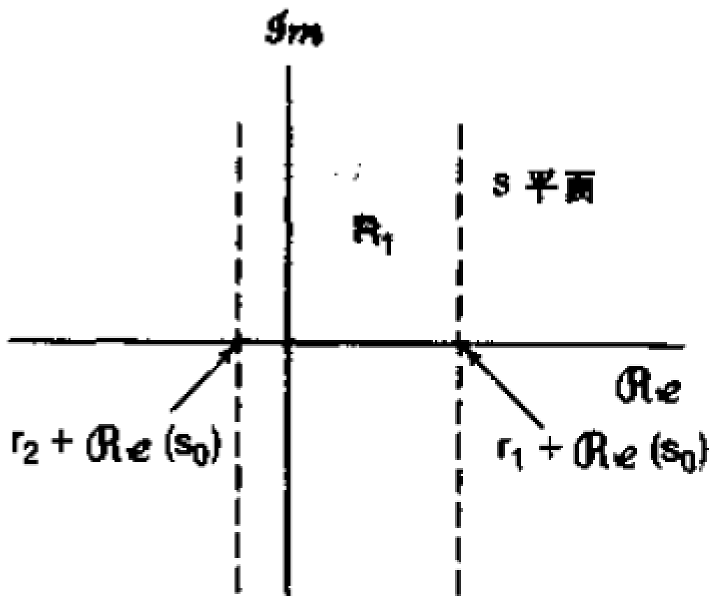
ROC: 整个s平面

S域平移

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \mathrm{ROC}=R$$

$$e^{s_0 t}x(t) \xleftrightarrow{L} X(s-s_0), \quad \mathrm{ROC}=R+\Re e\{s_0\}$$





S域平移性质举例

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \text{ROC}=R$$

$$e^{s_0 t}x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s-s_0), \quad \text{ROC}=R+\Re e\{s_0\}$$

求 $x(t)=[\cos\omega_0 t]u(t)$ 的拉普拉斯变换

$$[\cos\omega_0 t]u(t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t)$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{2}[U(s-j\omega_0)+U(s+j\omega_0)] \qquad \Re e\{s\}>0$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega_0}+\frac{1}{s+j\omega_0}\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad \Re e\{s\}>0$$

时域尺度变换

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \mathrm{ROC}=R$$

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \mathrm{ROC}=aR$$

共轭

实信号的零极点共轭成对

$$x(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s),\quad \mathrm{ROC}=R$$

$$x^*(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X^*(s^*),\quad \mathrm{ROC}=R$$

思考：实偶信号的零极点分布有何特点？

卷积性质

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), \quad \mathrm{ROC}=R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), \quad \mathrm{ROC}=R_2$$

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)X_2(s), \quad \mathrm{ROC}\text{包含}R_1 \cap R_2$$

时域微分

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC}=R$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s), \quad \text{ROC包含}R$$

时域积分

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC}=R$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}X(s), \quad \text{ROC包含}R \cap \{\Re e\{s\} > 0\}$$

S域微分

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC}=R$$

$$-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{ROC}=R$$

初值定理

若因果信号$x(t)$的拉普拉斯变换为$X(s)$，且在t=0时不包含冲激或高阶奇异函数，则：

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

终值定理

若因果信号$x(t)$的拉普拉斯变换为$X(s)$，且$X(s)$除了在$s=0$处可以有一阶极点外，其余极点均在s平面的左半平面，则：

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

内容提要

- 拉普拉斯变换的性质
- 应用举例

应用举例

关于一个拉普拉斯变换为有理分式$X(s)$的实信号$x(t)$给出如下5个条件：

1) $X(s)$只有两个极点；

2) $X(s)$在有限s平面内没有零点；

3) $X(s)$有一个极点在$s=-1+j$；

4) $e^{2t}x(t)$不是绝对可积的；

5) $X(0)=8$。

试确定$X(s)$并给出它的收敛域。

应用举例

由条件1)、2)可知：

无零点

$$X(s)=\frac{A}{(s+a)(s+b)}$$

实信号的零极点共轭成对

由条件3)可知：

$$a=1-j,\ b=1+j$$

$S=-1+j$

由条件5)可知：

$$A=16$$

由条件4)可知：

$$\text{ROC: } \Re e\{s\}>-1$$

所以：

$$X(s)=\frac{16}{s^2+2s+2} \quad \Re e\{s\}>-1$$

S域微分性质举例

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

因为

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > -a$$

所以

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \Re\{s\} > -a$$

更为一般地，有

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \Re\{s\} > -a$$

S域微分性质举例

$$X(s)=\frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)},\quad \Re e\{s\}>-1$$

根据部分分式展开，可得：

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2},\quad \Re e\{s\}>-1$$

根据$X(s)$极点的位置和收敛域的形式可知，每一项反变换都是右边信号，所以：

$$x(t)=\left[2te^{-t}-e^{-t}+3e^{-2t}\right]u(t)$$

谢谢大家！