

# 第二十一讲单边检普拉斯变换

杜倩河 西安交通大学 信息与通信工程学院 2025

## 布讲覆盖章节



**49.9** 

## 单边拉普拉斯变换的定义



$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^{-}}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{UL}\{x(t)\}\$$

- >几点说明:
- 1)积分区间包含集中于t=0的任何冲激或高阶奇异函数
- 2) 对于因果信号,其单边拉普拉斯变换和双边拉普拉斯变换相同
- 3) x(t)的单边变换等于x(t)u(t)的双边变换,因此其ROC必为某个右往平面

## 单边拉普拉斯变换举例



例1:

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^n} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

例2:

$$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$$

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-a} e^{-t(s+a)} dt = e^{-a} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

## 单边拉普拉斯变换的性质



#### > 卷积性质

必果当
$$t<0$$
时, $x_1(t)=0$ 且 $x_2(t)=0$ ,则:
$$\mathcal{UL}\{x_1(t)*x_2(t)\}=\mathcal{X}_1(x)\mathcal{X}_2(s)$$

#### > 时域微分性质

$$x(t) \longleftrightarrow \mathcal{X}(s) \qquad \qquad \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow s\mathcal{X}(s) - x(0^{-})$$

$$\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} \longleftrightarrow s^{2}\mathcal{X}(s) - sx(0^{-}) - x'(0^{-})$$

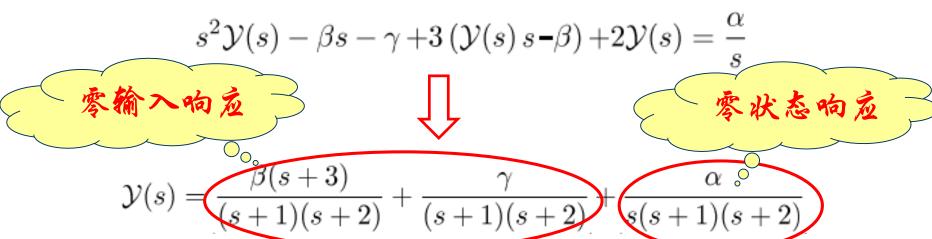
## 单边拉普拉斯变换的应用



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0^-) = \beta, y'(0^-) = \gamma, x(t) = \alpha u(t)$$

#### 把x(t)代入方程,且两边做单边拉普拉斯变换可得;



## 单边拉普拉斯变换的应用



$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} + \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

ぬ果 $\alpha$ =2,  $\beta$ =3,  $\gamma$ =5, 则上式可以变形为:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$
  $\Re e\{s\} > 0$ 

所吗:

$$y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t), \quad t > 0$$



## 谢谢大家!