第十一讲
离散时间傅里叶变换的性质

杜清河

2025春

对应书本章节

- 5.3、5.4、5.5
- 5.7

内容提要

- 离散时间傅里叶变换的性质
- 傅里叶分析中的对偶性

离散时间傅里叶级数变换对

综合公式 $$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

分析公式 $$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

非周期信号傅里叶变换的导出

综合公式（反变换） $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

分析公式（正变换） $$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

周期性

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$X\left(e^{j(\omega+2k\pi)}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$$

线性性质

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$ax_1[n]+bx_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)$$

时移性质

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

共轭对称性

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

- 若$x[n]$为实信号，则$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{Re}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\mathrm{Re}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{X\left(e^{-j\omega}\right)\right\} \\ &\mathrm{Im}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = -\mathrm{Im}\left\{X\left(e^{-j\omega}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\angle X\left(e^{j\omega}\right)} \Rightarrow \begin{aligned} &\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| \\ &\angle X\left(e^{j\omega}\right) = -\angle X\left(e^{-j\omega}\right) \end{aligned}$$

共轭及共轭对称性

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

- 若$x[n]$为实偶信号，则$X(e^{j\omega})$是实偶函数
- 若$x[n]$为实奇信号，则$X(e^{j\omega})$是虚奇函数

共轭及共轭对称性

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x^{*}[n] \xleftrightarrow{F} X^{*}\left(e^{-j\omega}\right)$$

若$x[n]=x_e[n]+x_o[n]$为实信号，则

$$x_e[n]=Ev\left\{x[n]\right\} \xleftrightarrow{F} \mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\}$$

$$x_o[n]=Odd\left\{x[n]\right\} \xleftrightarrow{F} j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\}$$

差分性质

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x[n]-x[n-1] \overset{F}{\longleftrightarrow} \left(1-e^{-j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

$e^{-jw}X(e^{jw})$

累加性质

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X\left(e^{j\omega}\right) + \pi X\left(e^{j0}\right) \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)}$$

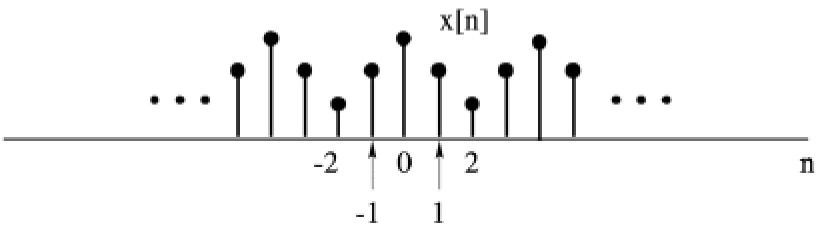
时间反转

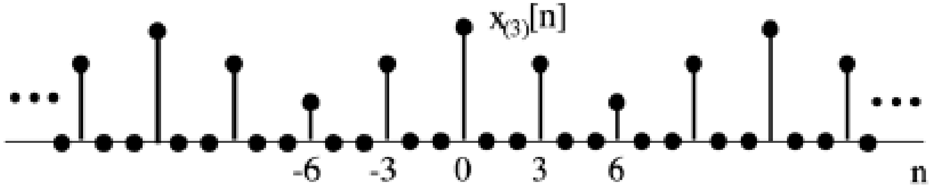
$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x[-n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X\left(e^{-j\omega}\right)$$

时域扩展

$$x[n] \to x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n = 0, \pm k, \pm 2k, \ldots \\ 0, & otherwise \end{cases}$$





$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{jk\omega}\right)$$

时域扩展

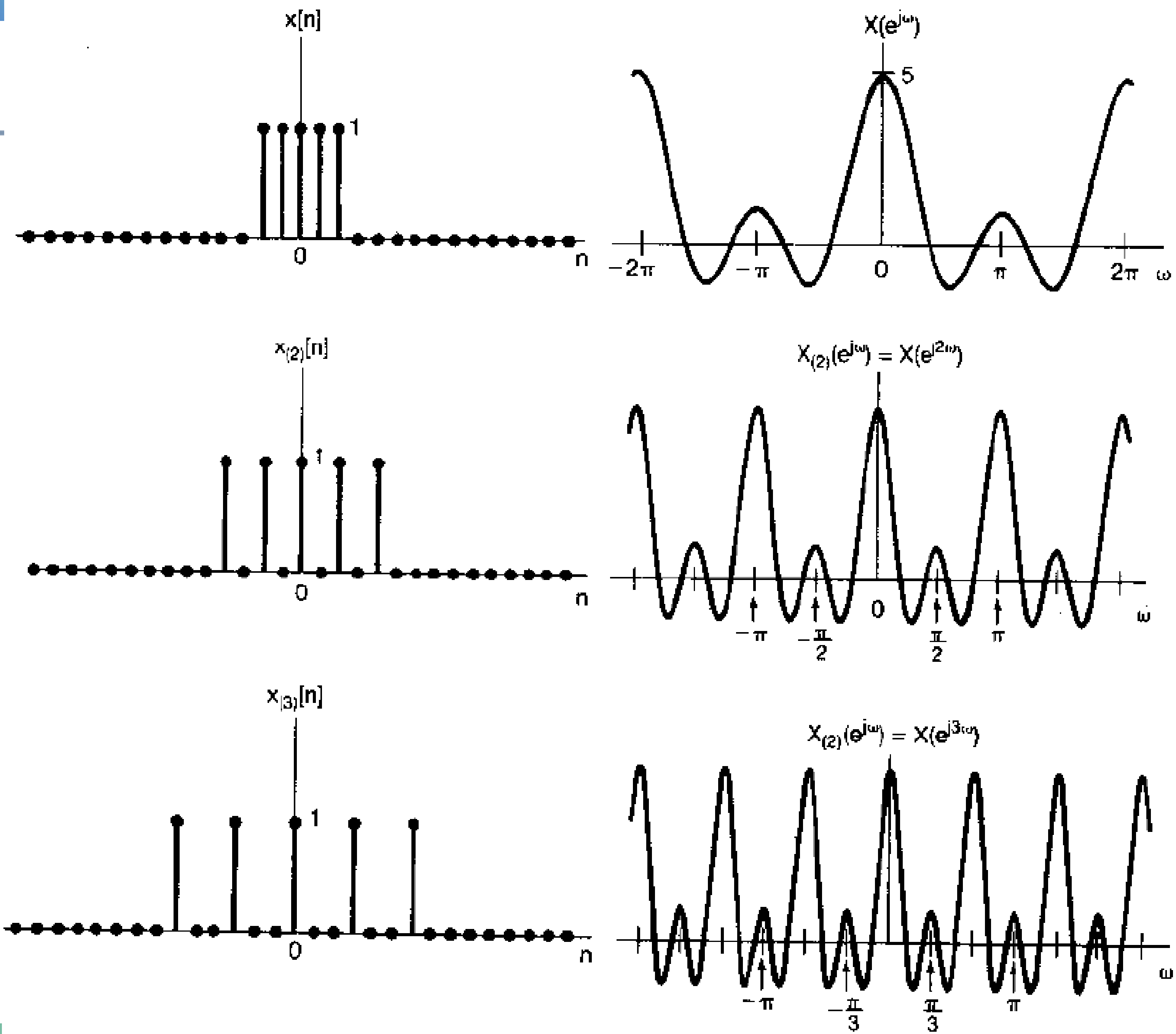
$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_{(k)}[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X\left(e^{jk\omega}\right)$$

证明：

$$X_{(k)}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} \overset{n=mk}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[mk]e^{-j\omega mk}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(k\omega)m} = X\left(e^{jk\omega}\right)$$



$x[n]$
1
0
n
$X(e^{j\omega})$
5
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω
$x_{(2)}[n]$
1
0
n
$X_{(2)}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
ω
$x_{(3)}[n]$
1
0
n
$X_{(2)}(e^{j\omega}) = X(e^{j3\omega})$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
π
ω

频域微分

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

帕斯瓦尔定理

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

卷积性质

$$x_1[n] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_2[n] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right) X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

关于卷积性质的讨论

- 卷积性质的物理解释
- 卷积性质表明：**信号通过LTI系统不会产生新的频率分量**
- LTI系统的频率响应：

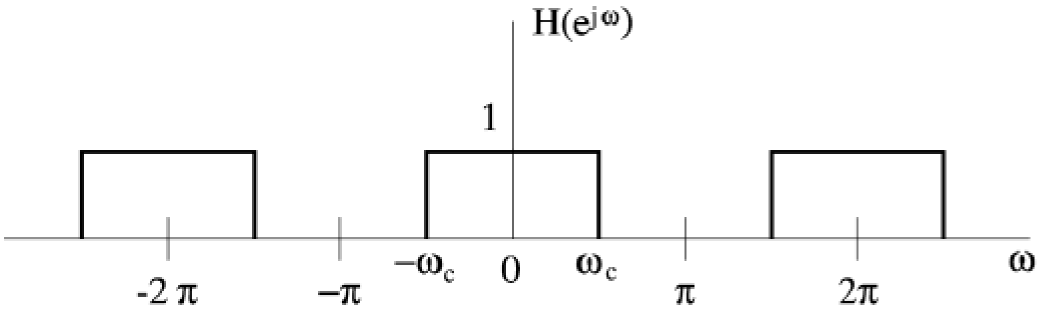
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$

滤波器

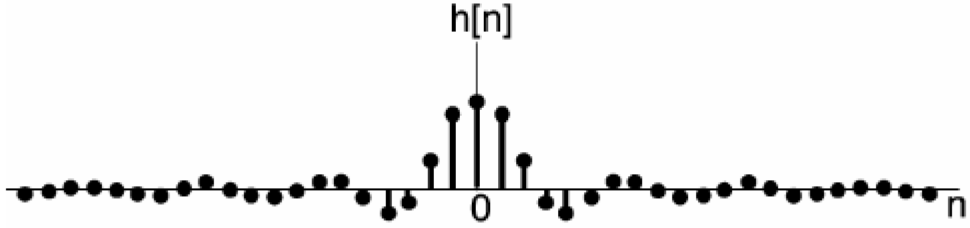
完全表征了一个LTI系统

- LTI系统输出响应的频域求解

理想低通滤波器的频率响应



$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$



时域和频域之间的折衷与权衡

利用卷积性质求解系统响应

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$
$$x[n] = \beta^n u[n]$$

$|\alpha|, |\beta| < 1$ $\Rightarrow$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}\right)$$

$$\beta \neq \alpha : Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}} \Rightarrow y[n] = A\alpha^n u[n] + B\beta^n u[n]$$

$$\beta = \alpha : Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2 \Rightarrow y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

$$nx[n] \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

相乘性质(调制性质)

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

周期卷积的计算

$$y[n]=x_1[n]\cdot x_2[n]\longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

假设积分区间选为-π到π，则：

$$Y(e^{j\omega}) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

引入记号：

$$\hat{X}_1(e^{j\theta})=\begin{cases} X_1(e^{j\theta}), & |\theta|\le\pi \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

则有：

$$Y(e^{j\omega}) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

频移性质

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{F} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

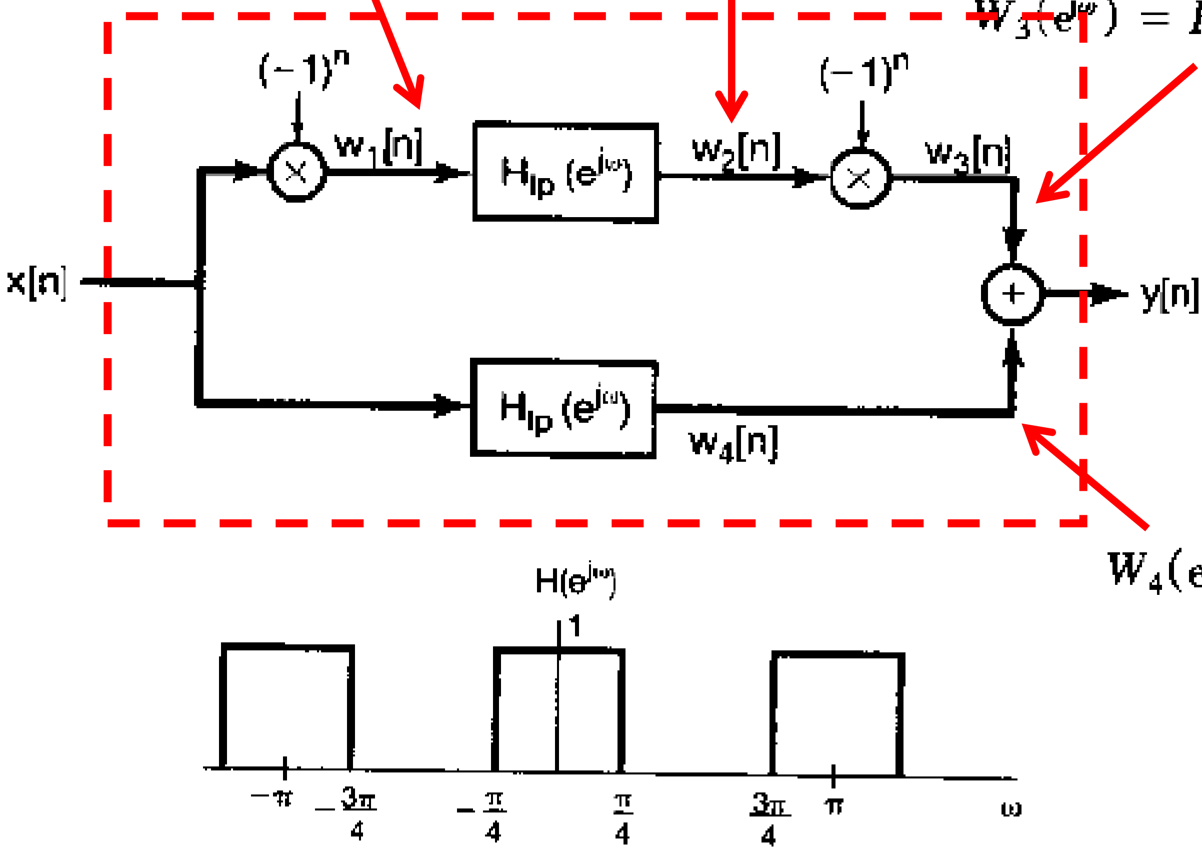
频移/相乘性质的应用：滤波器设计

$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$



内容提要

- 离散时间傅里叶变换的性质
- 傅里叶分析中的对偶性

一些注释

- CFS (The Continuous-Time Fourier Series):
  连续时间傅里叶级数
- DFS (The Discrete-Time Fourier Series):
  离散时间傅里叶级数
- CTFT (The Continuous-Time Fourier Transform):
  连续时间傅里叶变换
- DTFT (The Discrete-Time Fourier Transform):
  离散时间傅里叶变换

连续时间傅里叶变换的对偶性

综合公式 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

分析公式 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$$\Downarrow$$

$$x(t)\xleftrightarrow{CTFT}X(j\omega)$$

$$X(t)\xleftrightarrow{CTFT}2\pi x(-j\omega)$$

离散时间傅里叶级数的对偶性

综合公式 $$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

分析公式 $$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

⇩

$$x[n]\xleftrightarrow{DFS} a_k$$

$$a[n]\xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N}x[-k]$$

离散时间傅里叶级数的对偶性

例：求如下周期信号的傅里叶级数系数

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{9}\dfrac{\sin(5\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)}, & n\neq 9k\\ \dfrac{5}{9}, & n=9k\end{cases}$$

解：考虑如下周期性方波信号及其傅里叶系数：

$$g[n]=\begin{cases}1, & |n|\leq 2\\ 0, & 2<|n|\leq 4\end{cases}\xleftrightarrow{DFS} x_k$$

根据对偶性可得$x[n]$的傅里叶级数系数为：

$$a_k=\begin{cases}1/9, & |k|\leq 2\\ 0, & 2<|k|\leq 4\end{cases}$$

DTFT和CFS之间的对偶性

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n} \qquad a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$x[n]\xleftrightarrow{DTFT}X(e^{j\omega})$$

$$X(t)\xleftrightarrow{CFS}x[-k]$$

DTFT和CFS之间的对偶性

例：已知

$$a^{|n|} \xleftrightarrow{F} \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}, \quad |a|<1$$

利用对偶性求下面周期$T=1$的连续时间信号的傅里叶级数系数。

$$x(t)=\frac{1}{5-4\cos 2\pi t}$$

解：由已知条件可得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{F} \frac{3}{5-4\cos\omega}$$

DTFT和CFS之间的对偶性

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{F} \frac{3}{5-4\cos\omega}$$

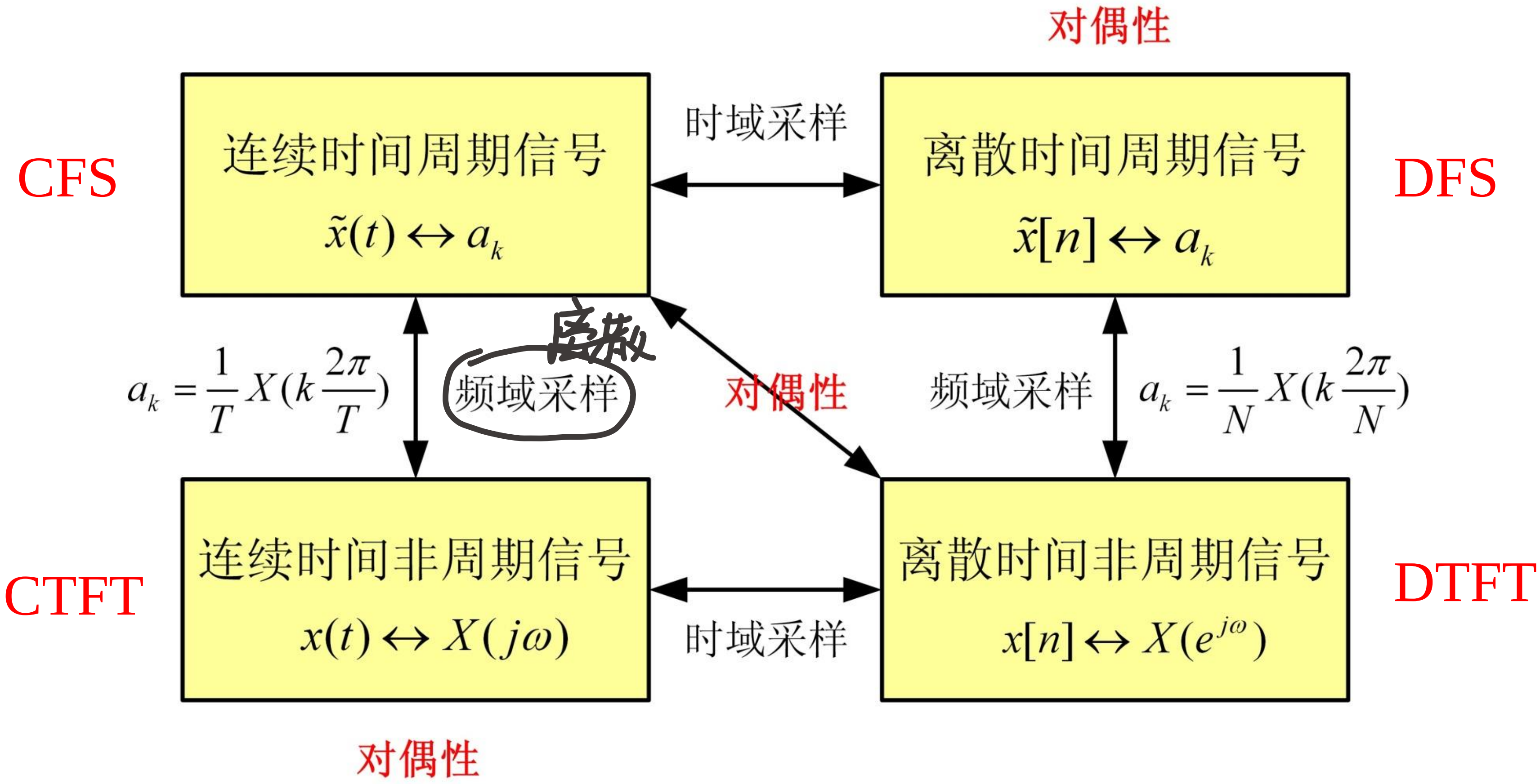
根据对偶性：

$$g(t)=\frac{1}{5-4\cos t} \xleftrightarrow{CFS} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

所以：

$$x(t)=\frac{1}{5-4\cos 2\pi t} \xleftrightarrow{CFS} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

傅里叶分析中的对偶性小结



谢谢大家！