第十四讲
采样定理

杜清河

2025春

福娃欢欢
Huanhuan

内容提要

- 采样定理
- 内插
- 欠采样及其应用

内容提要

- 采样定理
- 内插
- 欠采样及其应用

采样的概念

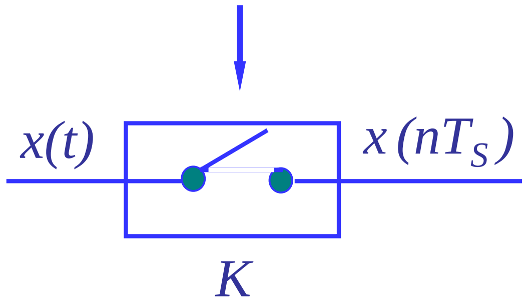
- 在某些离散的时间点上提取信号值的过程称为采样
- 被采样的信号既可以是单变量的，可以是多变量的
- 采样既可以针对连续时间信号进行，也可以针对离散时间信号进行

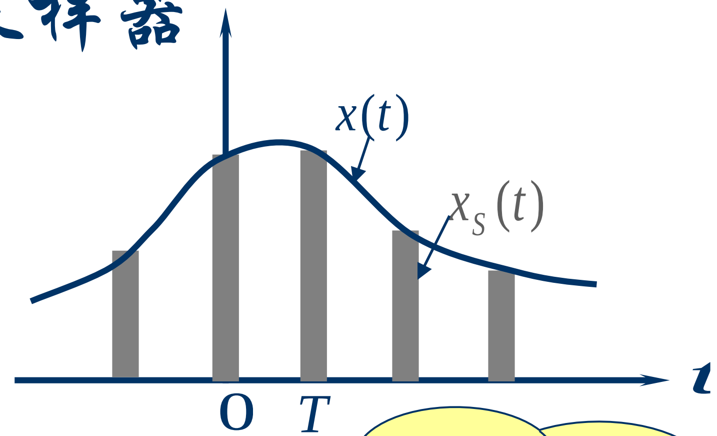
采样的意义

- 与连续时间信号相比，离散时间信号的处理更加灵活方便
- 通过对离散时间信号进行采样可以进一步减少数据量，实现数据压缩
- 采样的技术已经在日常生活和工程实践中得到了广泛的应用

采样的过程

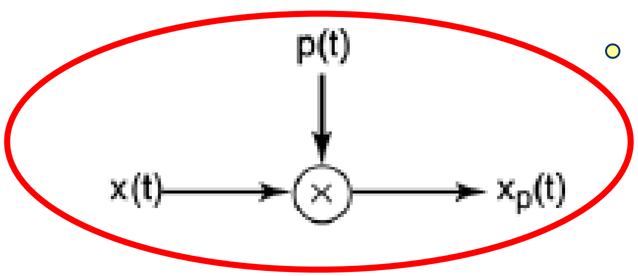
- 采样的实现设备：采样器





理想采样(冲激串采样)

- 采样的数学模型



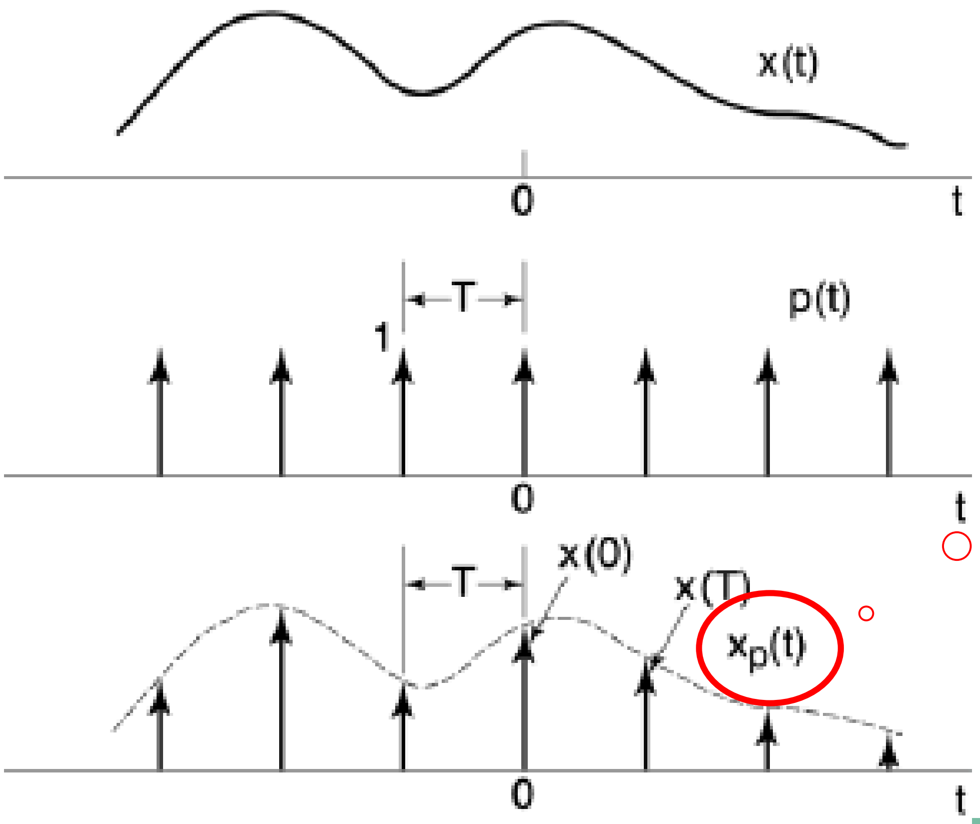
$$x_p(t) = x(t)\,p(t)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

采样的效果——时域分析

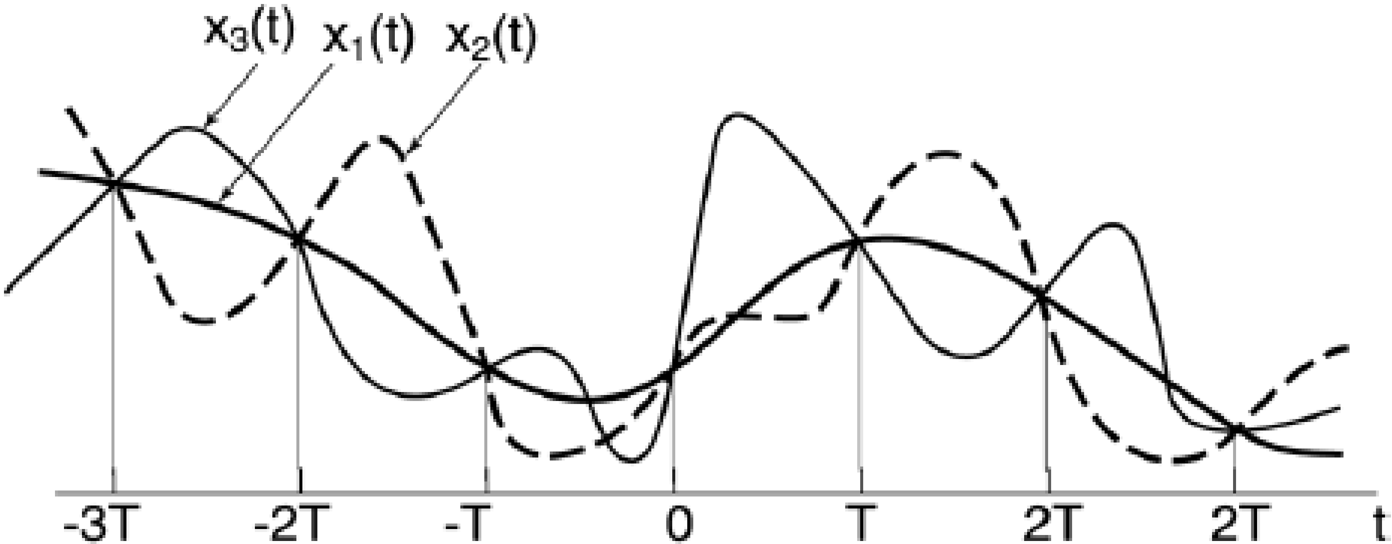
采样间隔

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \Rightarrow x_p(t)=x(t)p(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$



仍然是连续
时间信号

采样的效果——时域分析



采样的效果——频域分析

$$x_p(t)=x(t)p(t)$$

由于 $p(t)\leftrightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}k)$

所以 $X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*P(j\omega)$

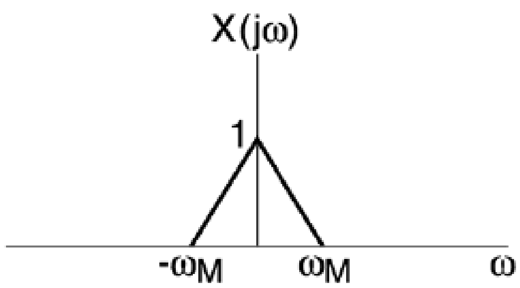
$$=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

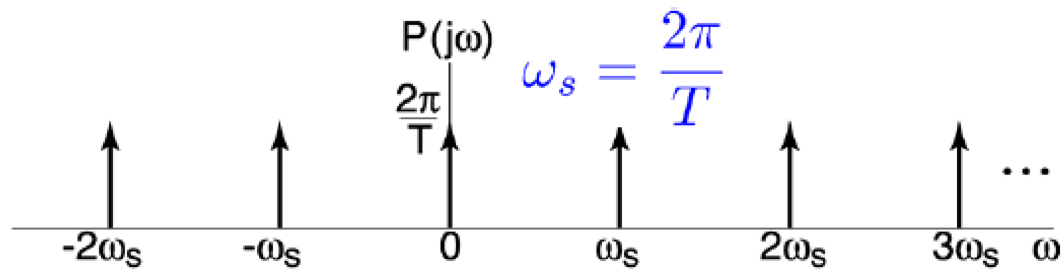
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

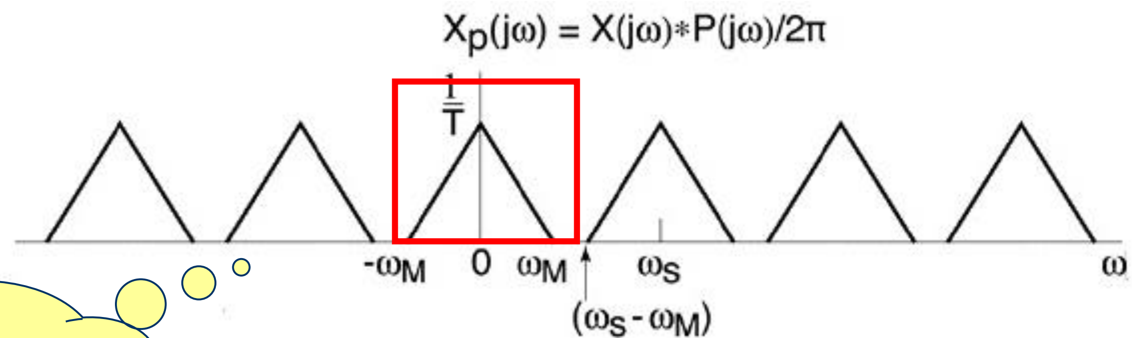
时域离散化，
频域周期化

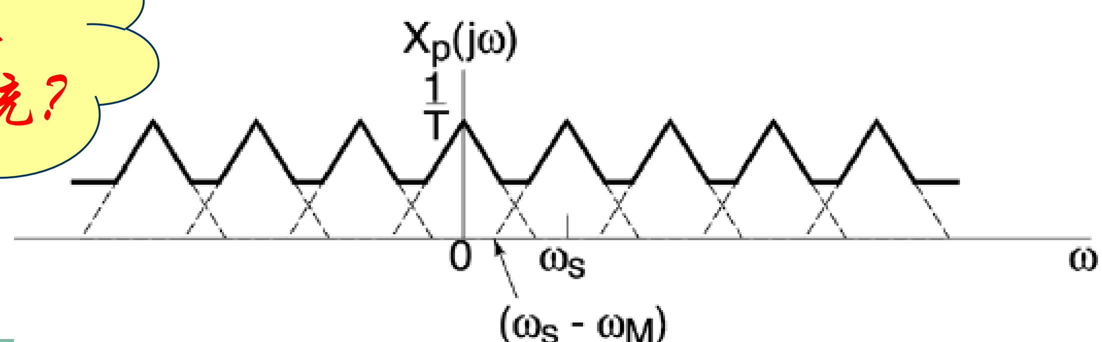
其中 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ 称为采样频率

采样的效果——频域分析









理想采样是不是LTI系统？

采样的效果——频域分析

- 在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以ω_s为周期进行周期性延拓

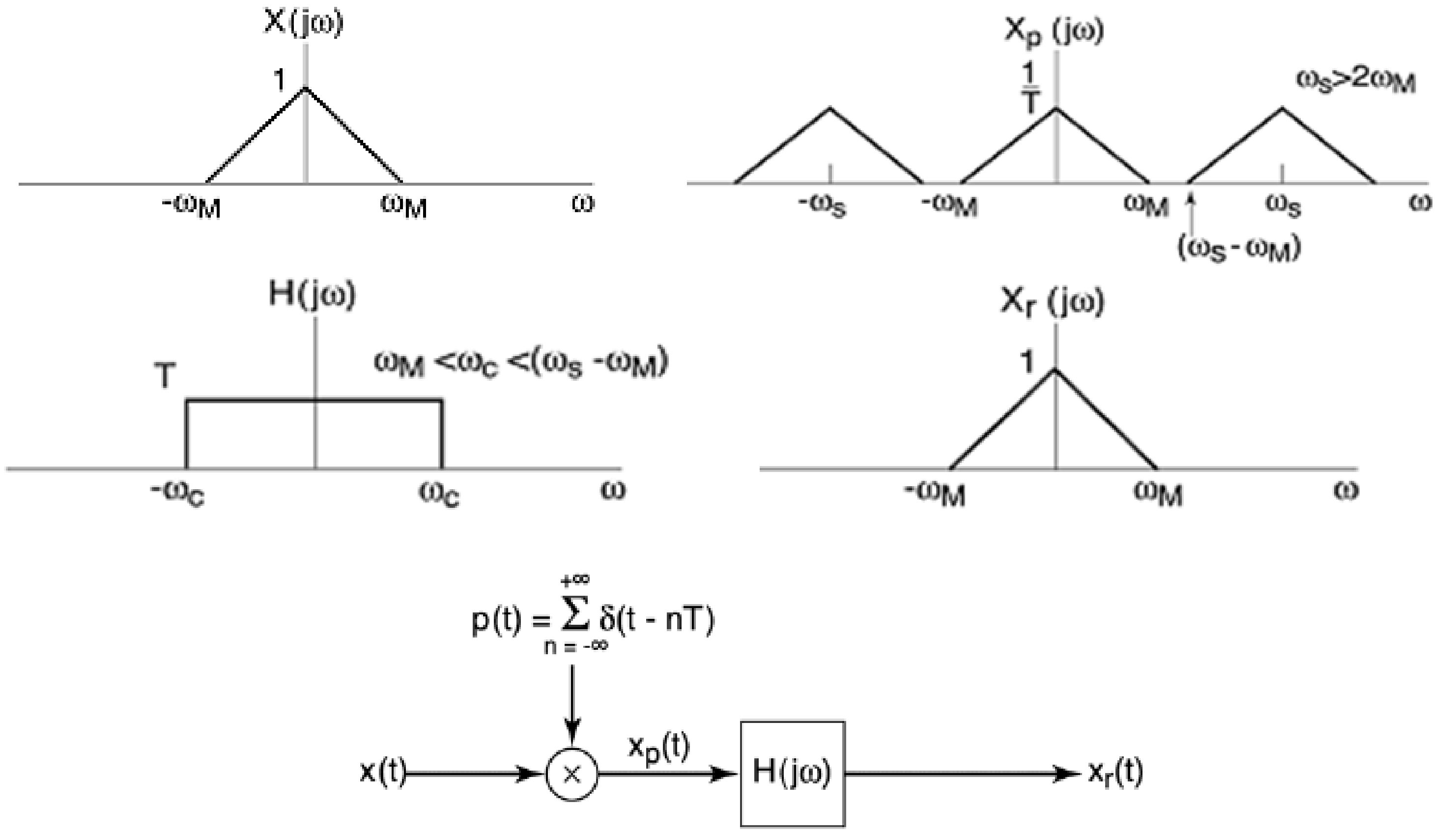
- 频谱不发生混叠的条件：

  A. $x(t)$ 必须是带限的，最高频率分量为ω_M

  B. 采样间隔(周期)不能是任意的，必须保证采样频率$\omega_S>2\,\omega_M$

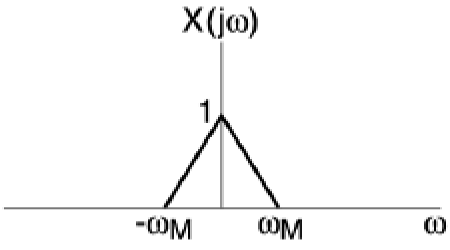
采样的效果——频域分析

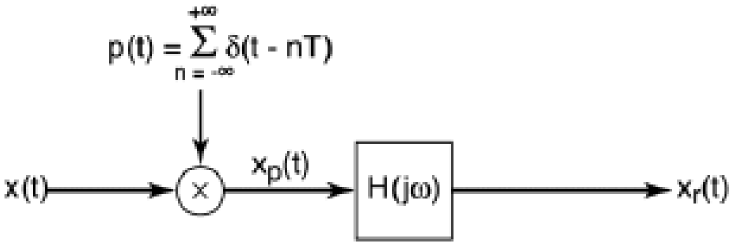
- 在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从$X_p(j\omega)$中不失真地分离出$X(j\omega)$

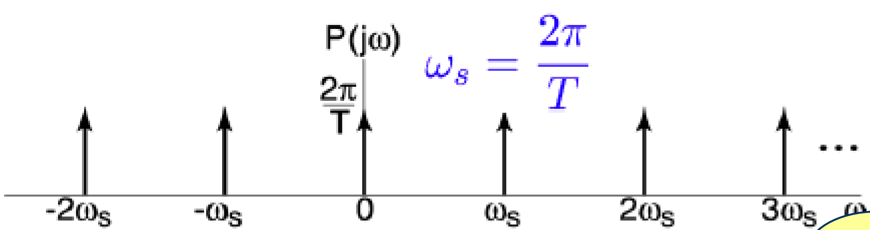


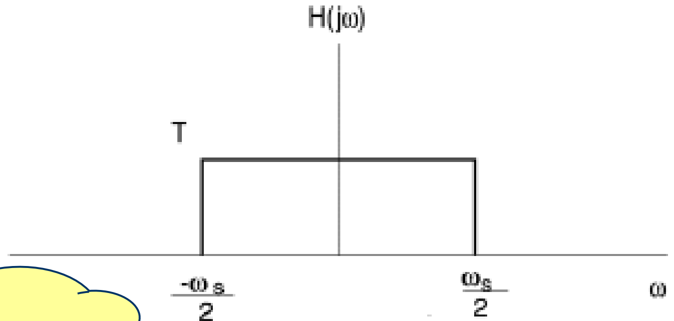
采样的效果——频域分析

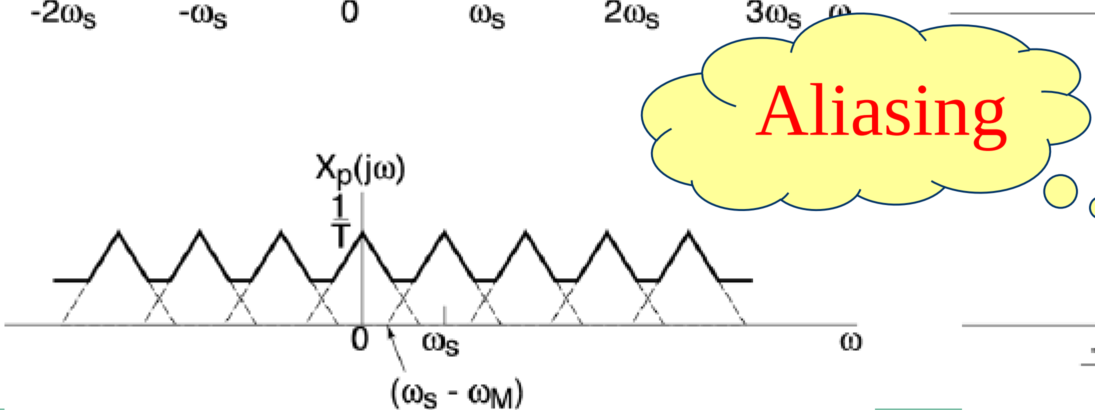
- 在不满足上述要求时，会发生频谱混叠现象

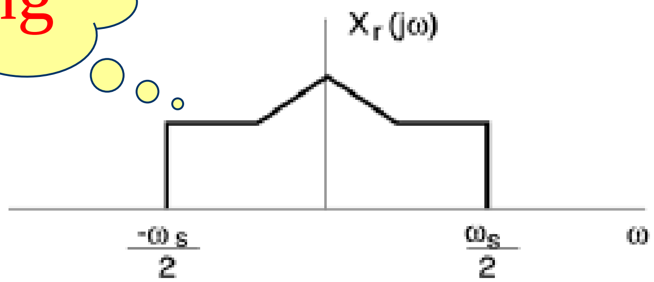












Nyquist采样定理

对带限于最高频率ω_M的连续时间信号$x(t)$，如果以$\omega_S>2\omega_M$的频率进行理想采样，则$x(t)$可以唯一地由其样本$x(nT)$来确定。

由样本值重建$x(t)$的方法是：产生一个周期性冲激串，其冲激幅度就是这些依次而来的样本值；然后将该冲激串通过一个增益为T，截止频率满足$\omega_M<\omega_c<\omega_S-\omega_M$的理想低通滤波器，该滤波器的输出就是$x(t)$。

采样定理三要素：ω_M，ω_S，ω_c

关于采样定理的几点说明

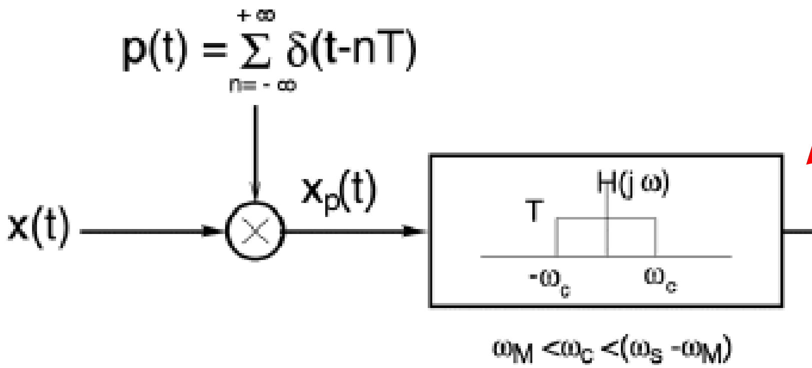
- 采样定理明确要求：采样频率大于信号最高频率的两倍，而不是大于或等于信号最高频率的两倍
- 从工程实际的角度说，滤波器的非理想特性也要求采样频率必须大于信号中最高频率的两倍
- 对一个时间有限长的信号进行采样，一定会发生频谱混叠现象，因此必须使用抗混叠滤波器
- 采样定理是由样本无失真表示信号的充分条件，而非充要条件

内容提要

- 采样定理
- 内插
- 欠采样及其应用

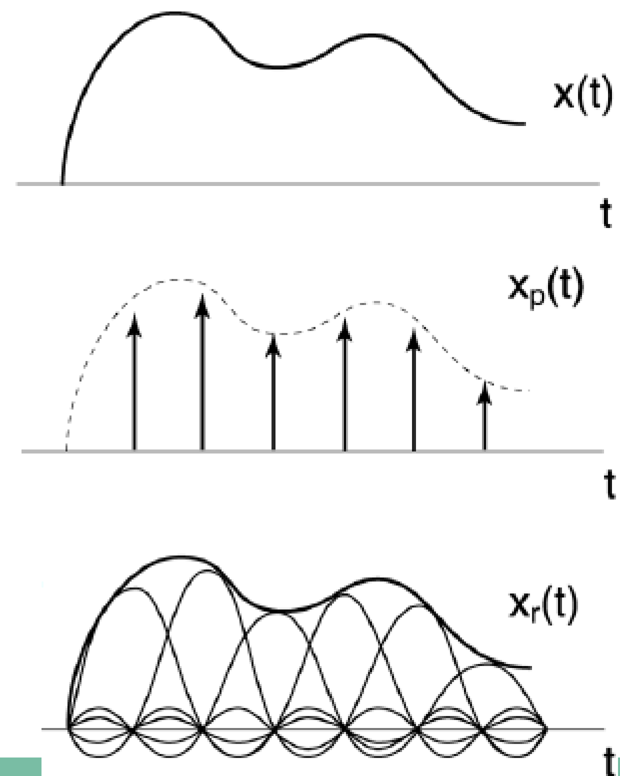
带限内插

$$h(t)=\frac{T\sin\omega_c t}{\pi t}$$



$$
\begin{aligned}
x_r(t) &= x_p(t) * h(t) \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right) * h(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT) \\
&= \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{T\sin[\omega_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)}}
\end{aligned}
$$

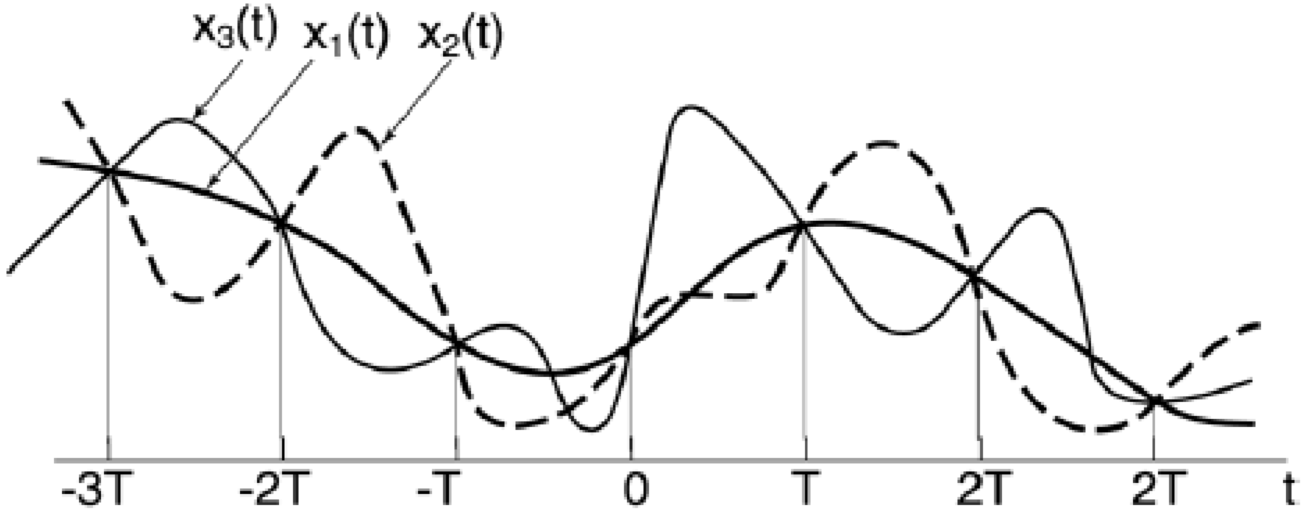
sinc 内插（理想内插）



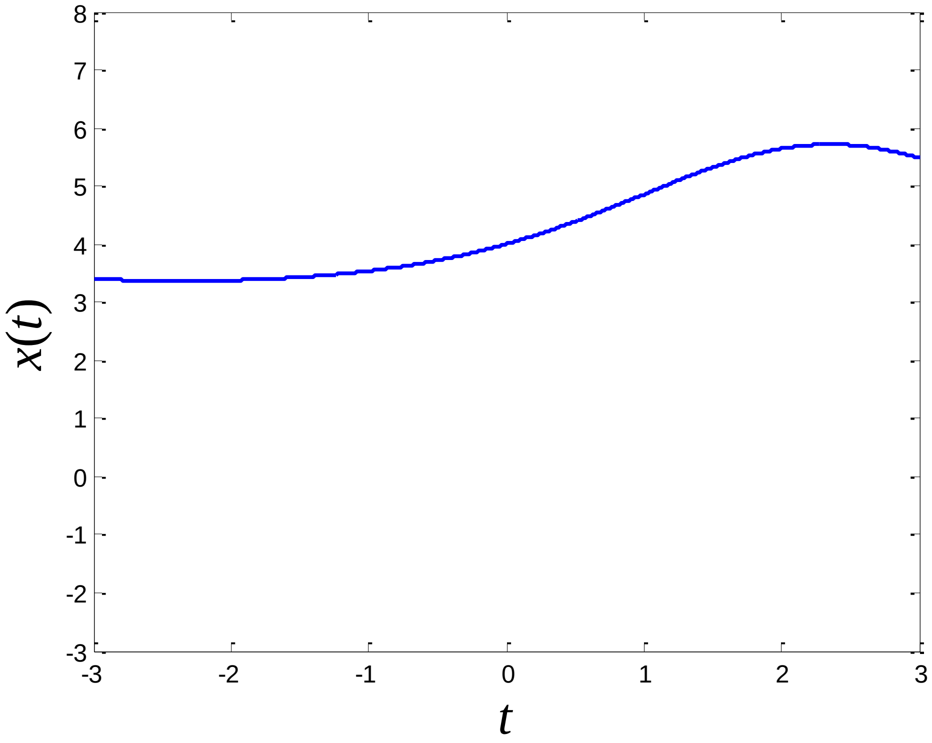
带限内插

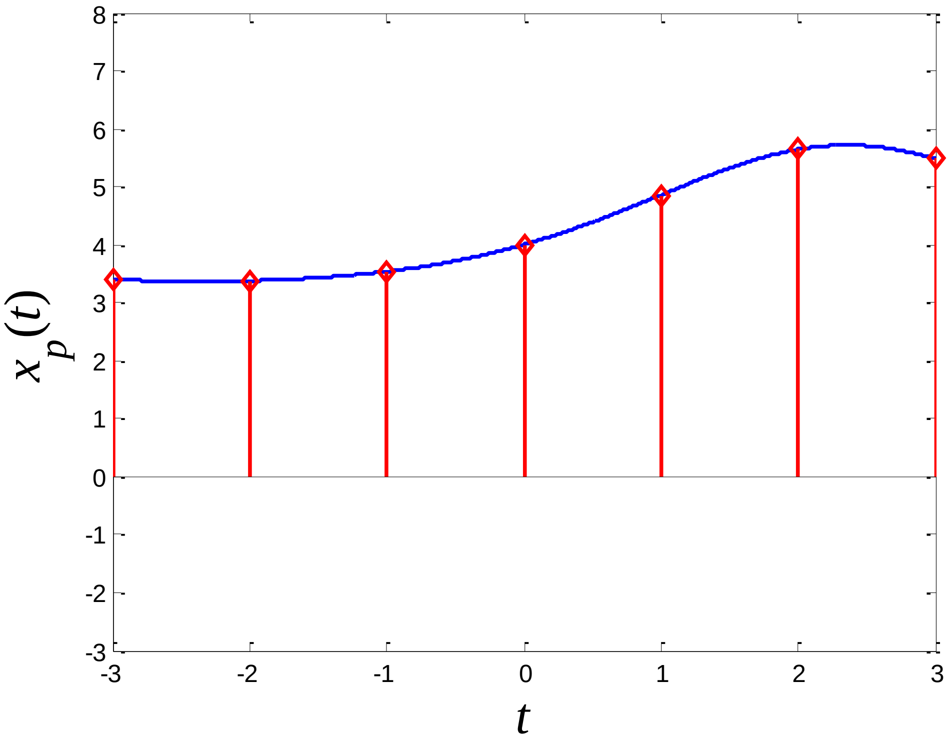
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{T \sin[\omega_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)}$$

注意：如果$\omega_c=\omega_S/2$，那么无论选择怎样的T，$x_r(t)$和$x(t)$在采样的瞬时都是相等的，即：$x_r(mT)=x(mT)$。

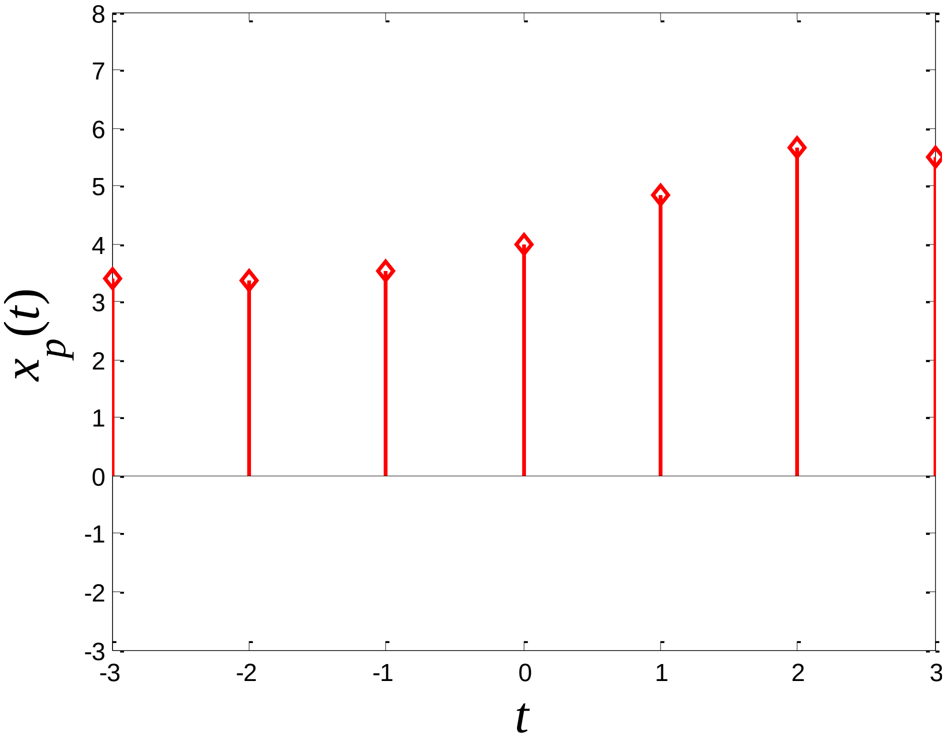


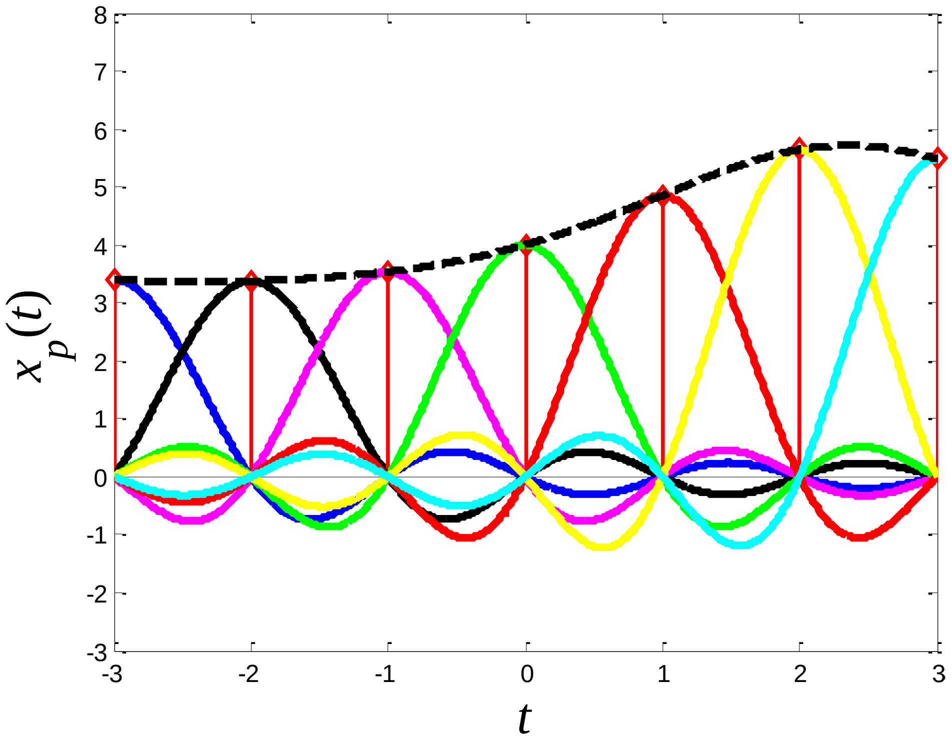
带限内插





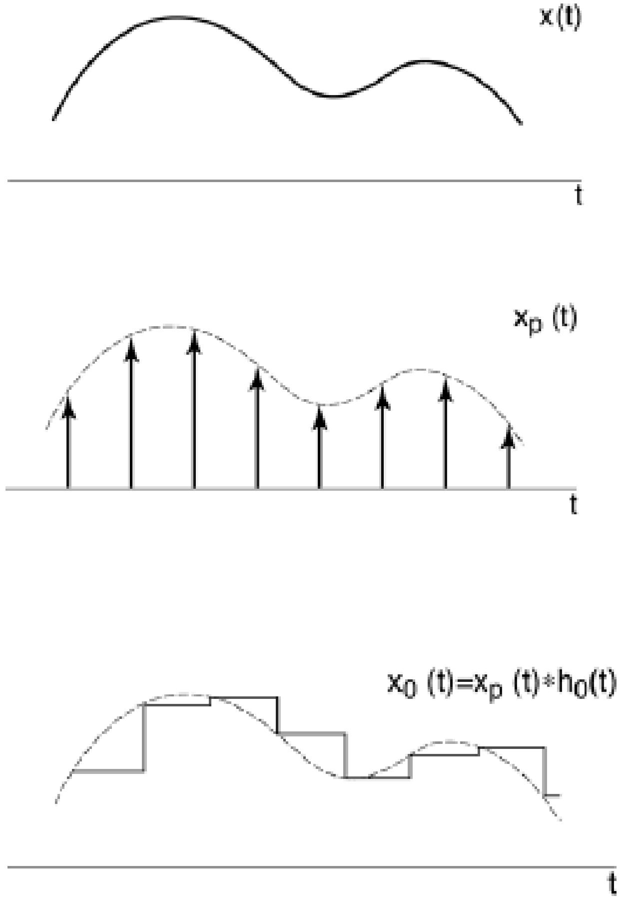
带限内插

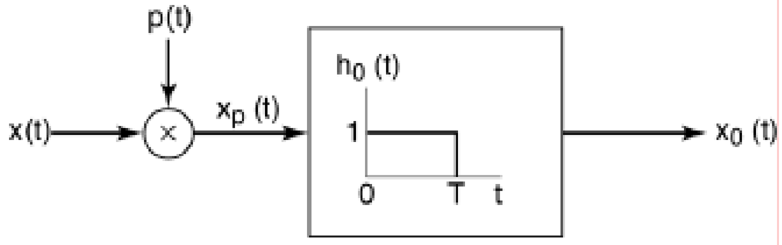




$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{T\sin(\omega_c(t-nT))}{\pi(t-nT)}$$

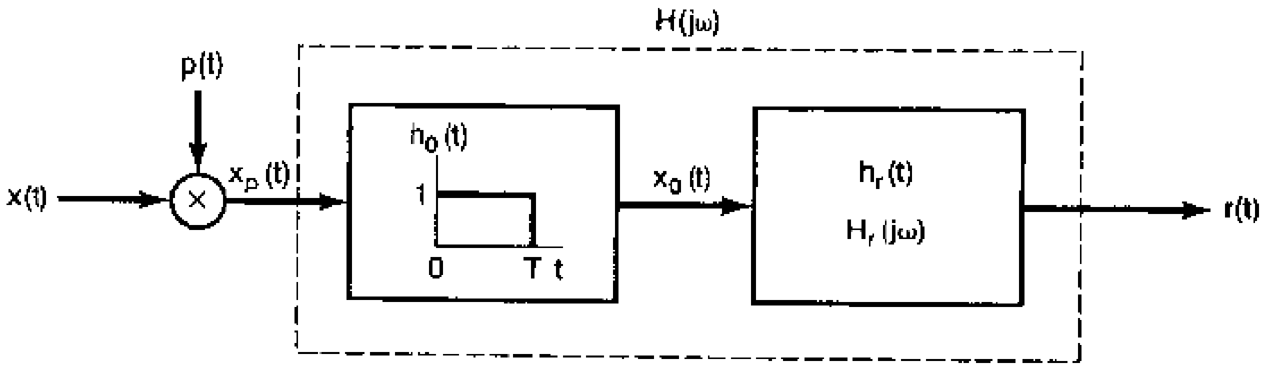
零阶保持内插





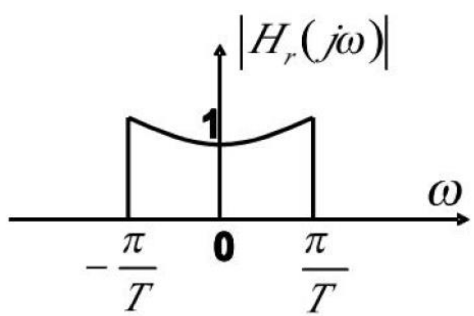
$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2}\left[\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}\right]$$

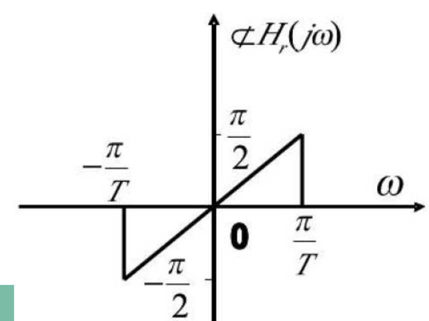
零阶保持内插



$$H_0(j\omega)H_r(j\omega)=\begin{cases}T, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}\qquad \omega_M<\omega_c<\omega_s-\omega_M$$

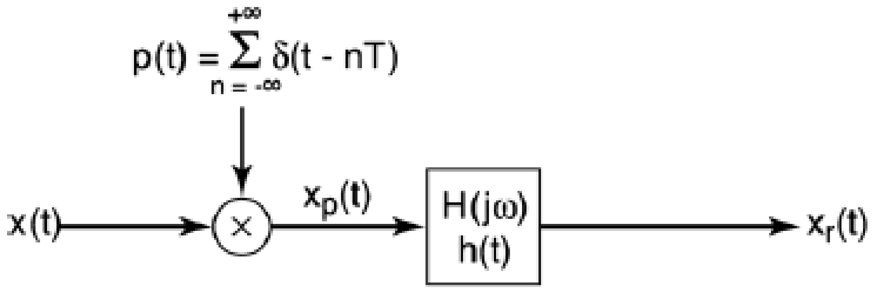
$$H_0(j\omega)=\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{\omega T}{2}}{\omega}e^{-j\frac{\omega T}{2}} \Rightarrow H_r(j\omega)=\frac{H(j\omega)}{\frac{2\,\mathrm{Sin}\,\omega T/2}{\omega}}\cdot e^{j\frac{\omega T}{2}}$$

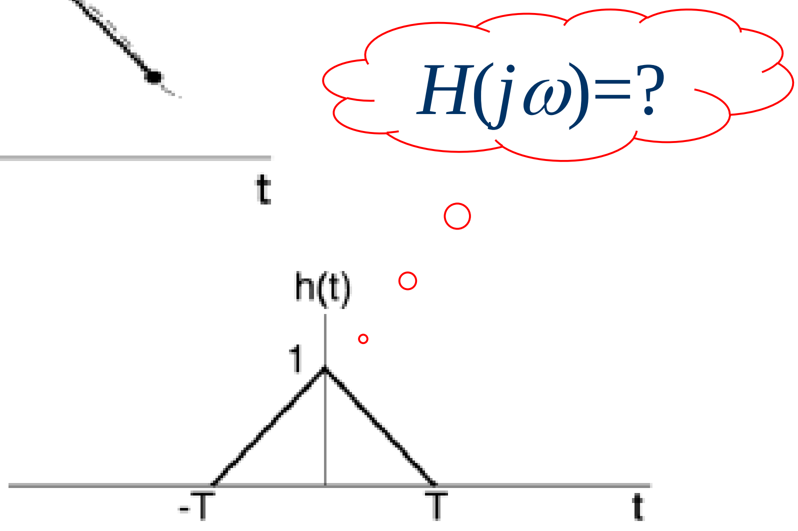


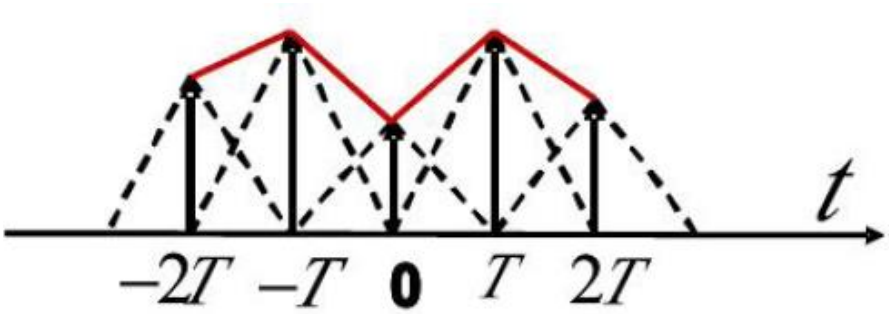


$$\omega_c=\frac{1}{2}\omega_s$$

线性内插(一阶保持内插)





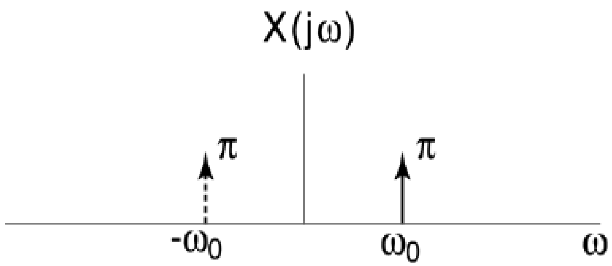


内容提要

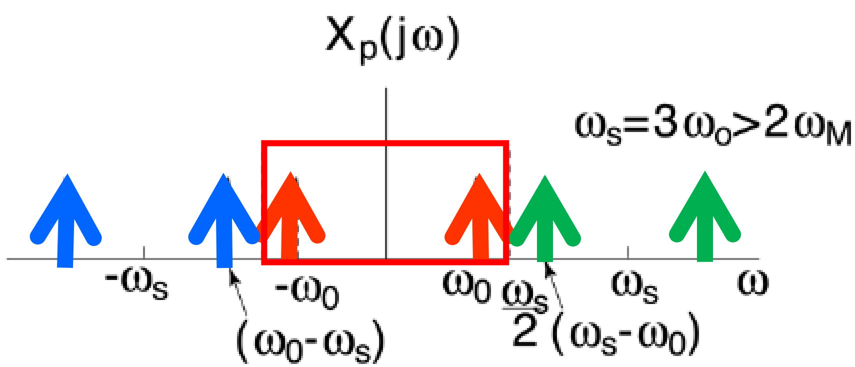
- 采样定理
- 内插
- 欠采样及其应用

欠采样的效果：频谱混叠

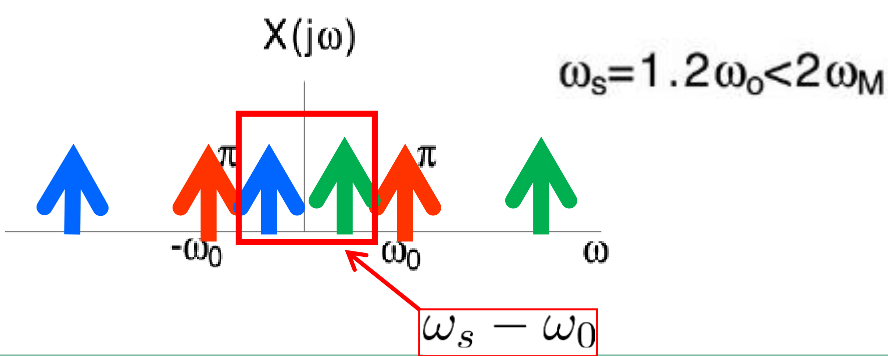
$$x(t)=\cos\omega_0 t$$



$$x(t)=\cos\omega_0 t$$

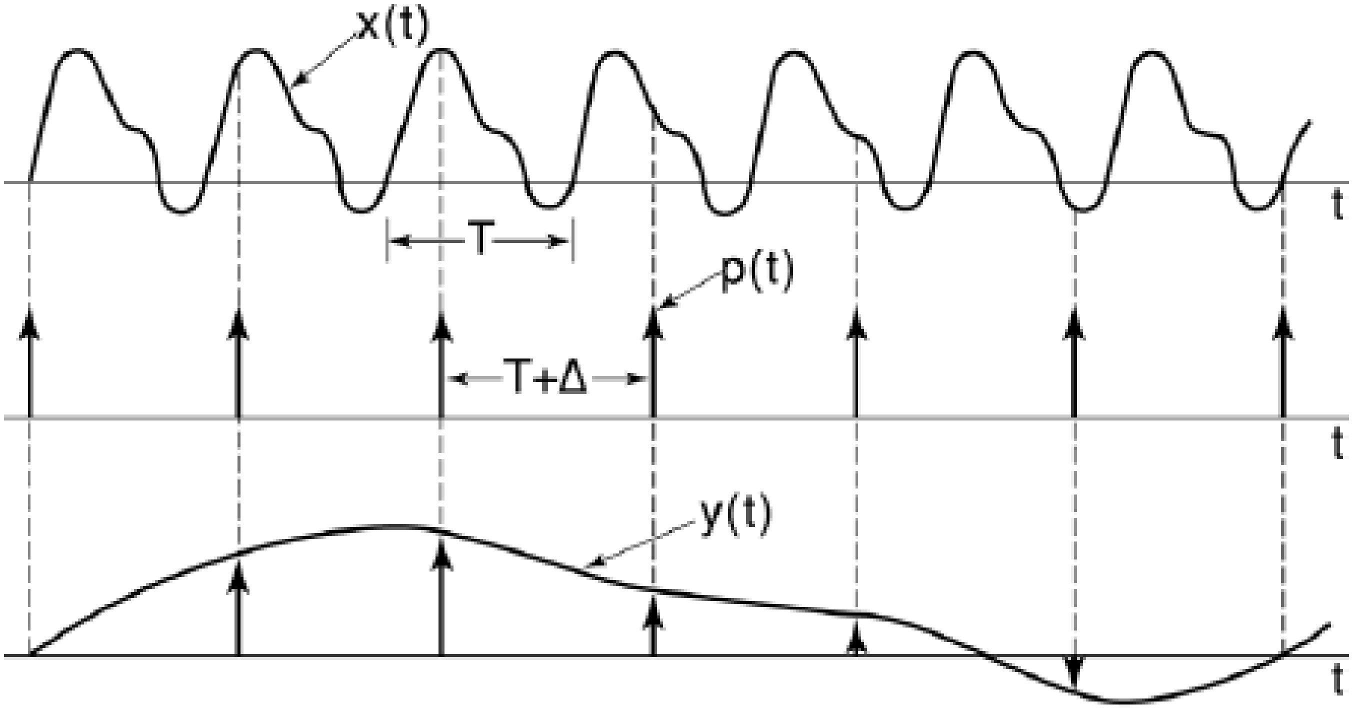


$$x(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t$$



欠采样在工程中的应用

- 取样示波器



谢谢大家！