第七章 一阶电路和二阶电路的时域分析

本章内容

首页

● 重点

1. 动态电路方程的建立及初始条件的确定

2. 一阶和二阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应的概念及求解

3. 一阶和二阶电路的阶跃响应概念及求解

7-1 动态电路的方程及其初始条件

1. 动态电路

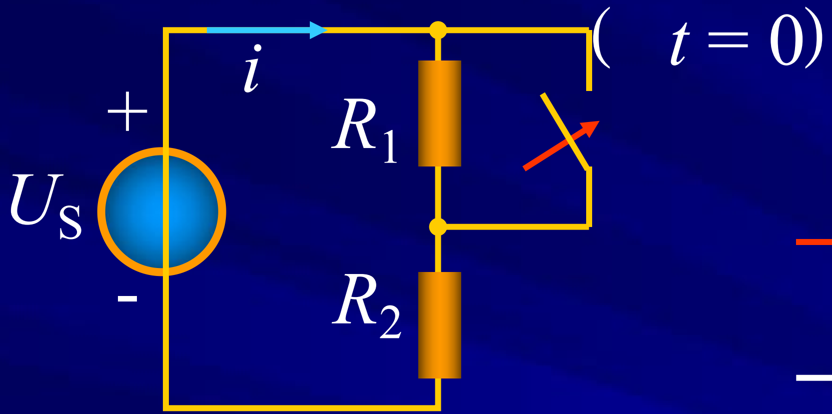
含有动态元件电容和电感的电路称为动态电路。

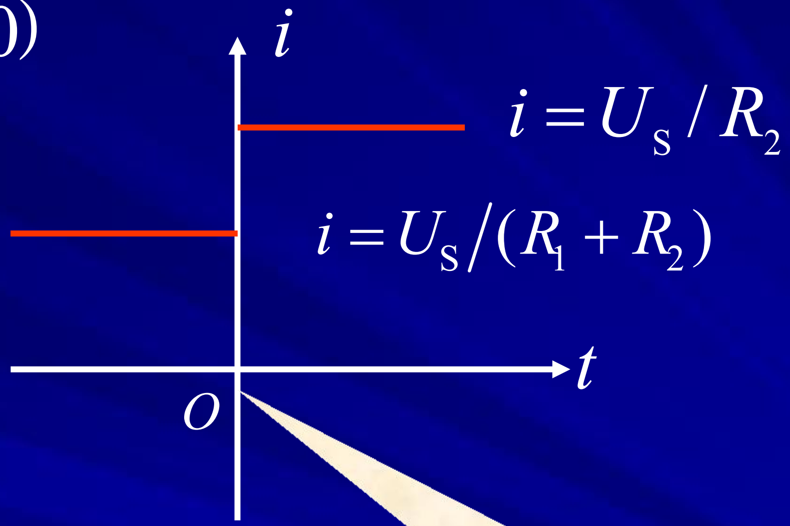
特点

当动态电路状态发生改变时(换路)，需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

500kV断路器

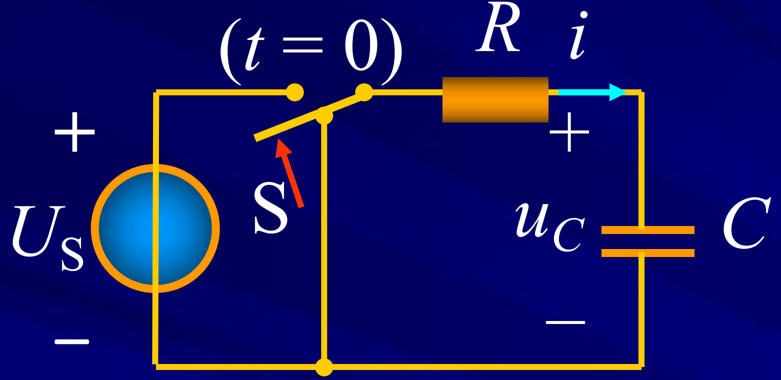
电阻电路



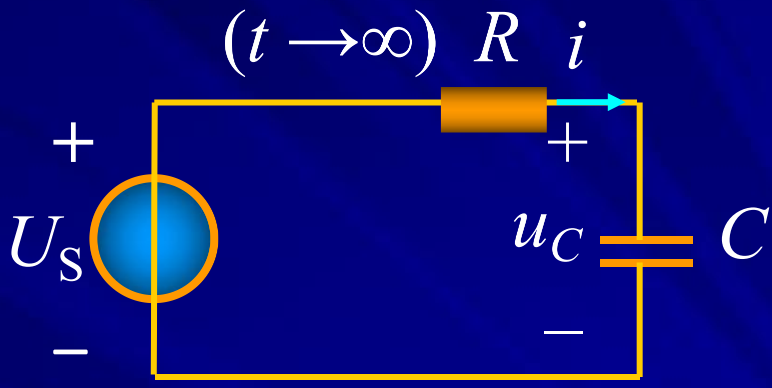


过渡期为零

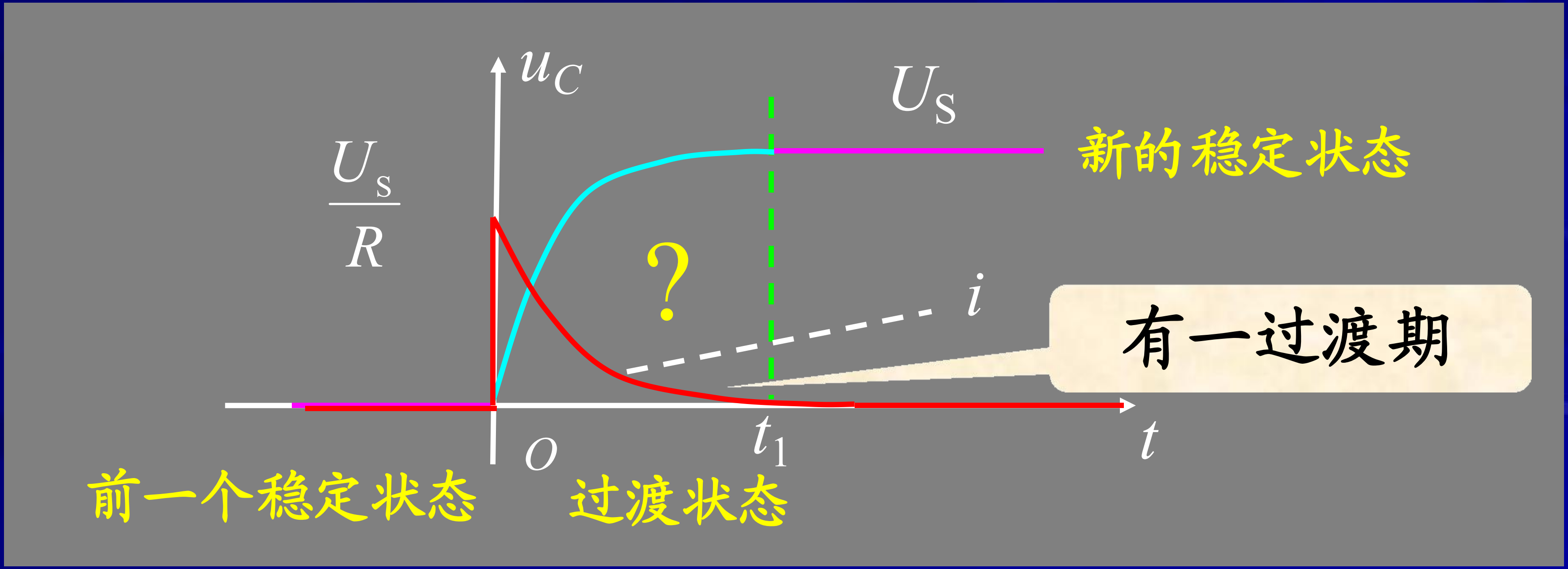
电容电路



(t = 0)
R
i
+
U_S
−
S
+
u_C
−
C

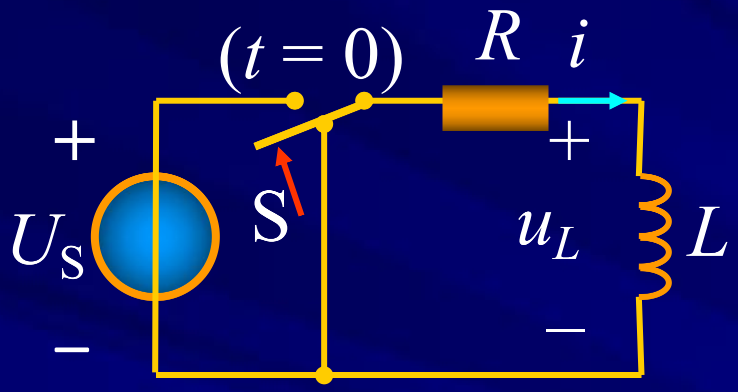


(t →∞)
R
i
+
U_S
−
+
u_C
−
C

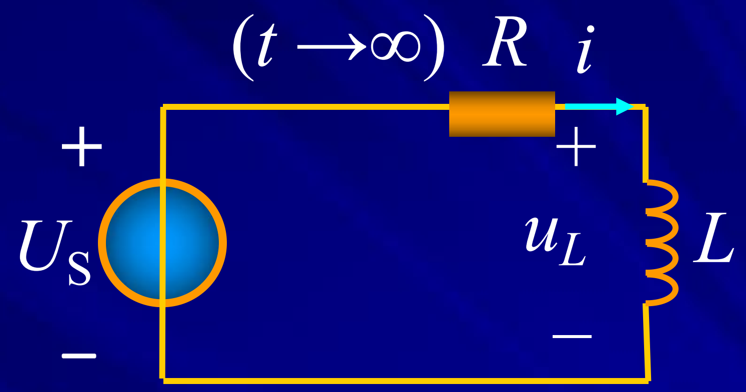


u_C
U_S
$\frac{U_S}{R}$
新的稳定状态
?
i
有一过渡期
O
t_1
t
前一个稳定状态
过渡状态

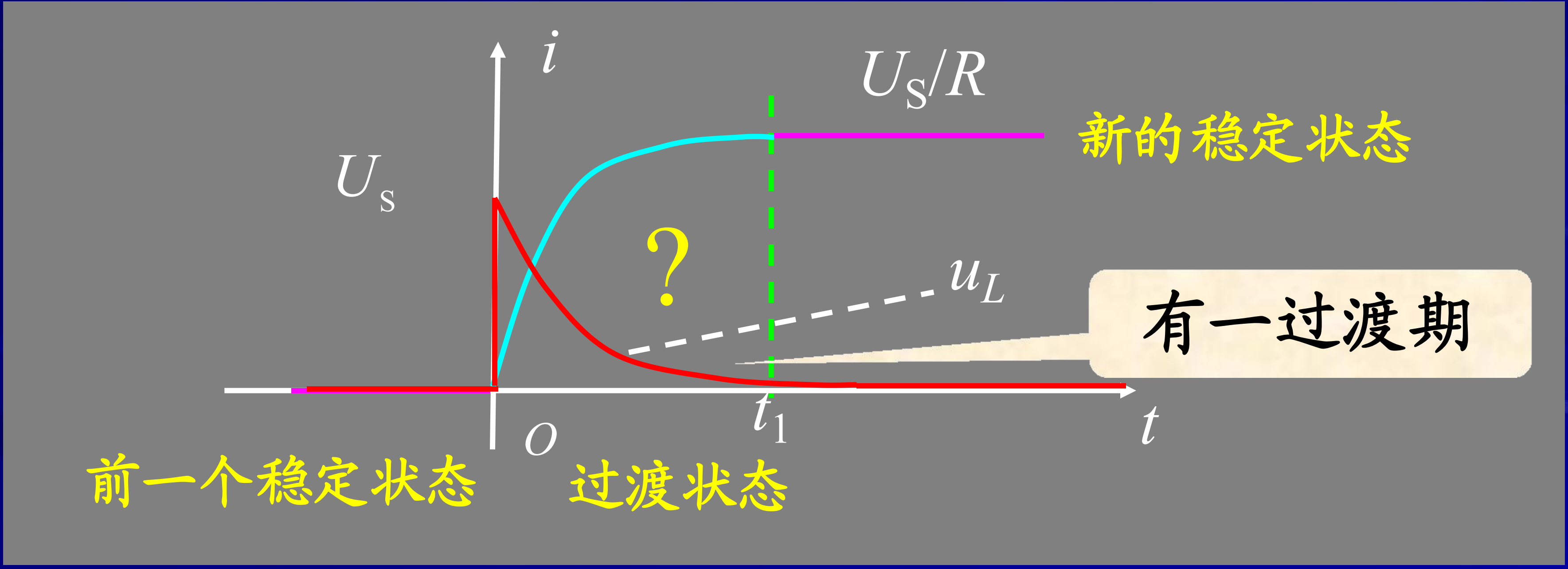
电感电路



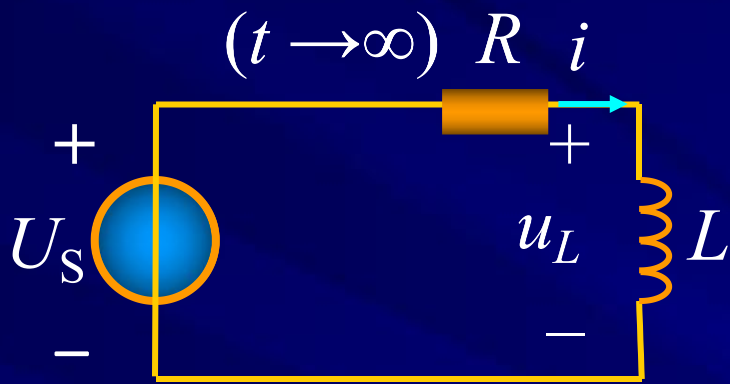
(t = 0)
R
i
+
U_S
–
S
+
u_L
L
–

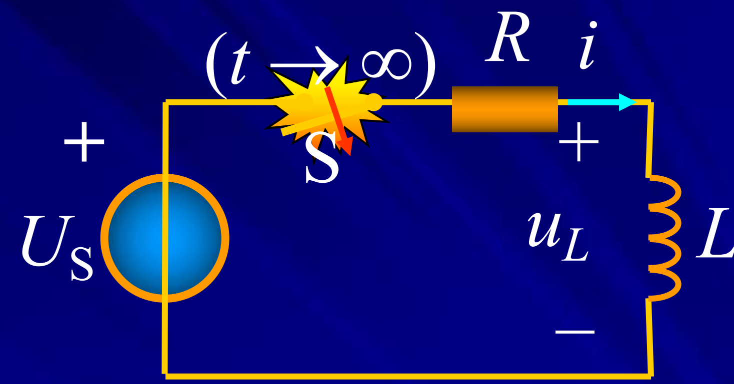


(t →∞)
R
i
+
U_S
–
+
u_L
L
–



i
U_S/R
新的稳定状态
U_s
?
u_L
有一过渡期
O
t_1
t
前一个稳定状态
过渡状态





S未动作前，电路处于稳定状态：　$u_L = 0$，　$i = U_S / R$

S断开瞬间　　$i = 0$，　$u_L = \infty$

注意　工程实际中在切断电容或电感电路时会出现过电压和过电流现象。

换路 → 电路结构、状态发生变化

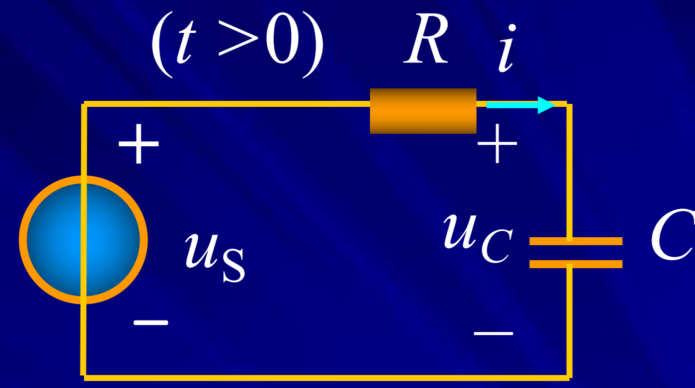
- 支路接入或断开
- 电路参数变化

过渡过程产生的原因 →

电路内部含有储能元件 L、C，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \Delta t \Rightarrow 0 \qquad p \Rightarrow \infty$$

2. 动态电路的方程



RC电路

应用KVL和电容的VCR得

$$\begin{cases} Ri + u_C(t) = u_S(t) \\ i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{cases} \longrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S(t)$$

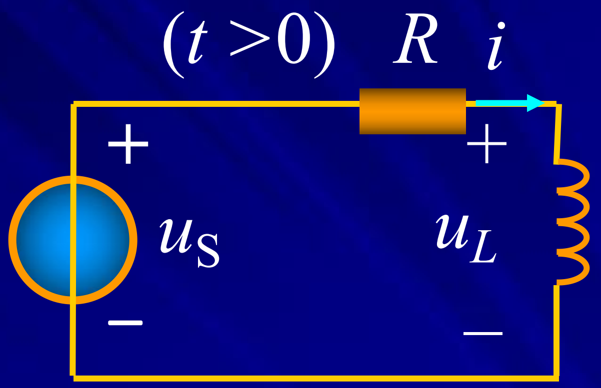
若以电流为变量

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = u_S(t)$$ 对t求导

求导

$$\longrightarrow R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = \frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}$$

RL电路



应用KVL和电感的VCR得

$$\begin{cases} Ri + u_L = u_S(t) \\ u_L = L\dfrac{di}{dt} \end{cases} \rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} = u_S(t)$$

若以电感电压为变量

$$\frac{R}{L}\int u_L dt + u_L = u_S(t)$$

$$\rightarrow \frac{R}{L}u_L + \frac{du_L}{dt} = \frac{du_S(t)}{dt}$$

结论

含源电阻电路

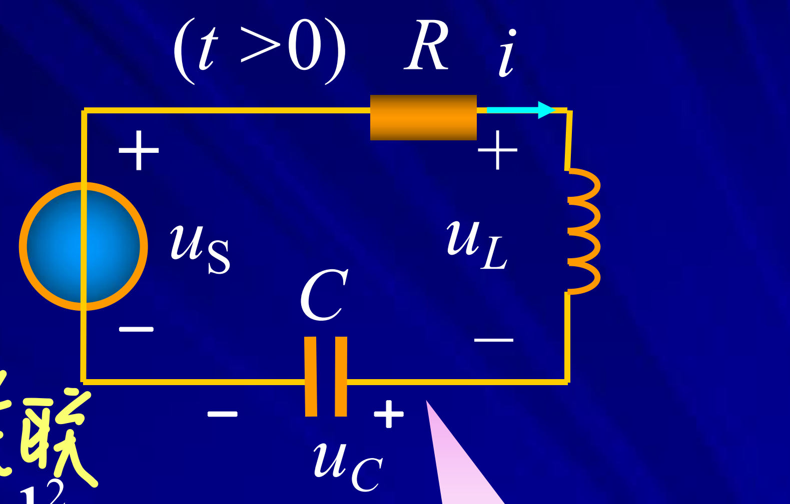
一个动态元件

一阶电路

含有一个动态元件电容或电感的线性电路，其电路方程为一阶线性常微分方程，称为一阶电路。

RLC电路

应用KVL和元件的VCR得



$$\begin{cases} Ri + u_L + u_C = u_S(t) \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \quad u_L = L\dfrac{di}{dt} = LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2} \end{cases}$$

存在关联

$$\rightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S(t)$$

含有两个动态元件的线性电路，其电路方程为二阶线性常微分方程，称为二阶电路。

结论 ①描述动态电路的电路方程为微分方程。

②动态电路方程的阶数通常等于电路中动态元件的个数。

一阶电路 → 一阶电路中只有一个动态元件，描述电路的方程是一阶线性微分方程。

$$a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = e(t) \quad t > 0$$

二阶电路 → 二阶电路中有两个动态元件，描述电路的方程是二阶线性微分方程。

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = e(t) \quad t > 0$$

高阶电路 → 电路中有多个动态元件，描述电路的方程是高阶微分方程。

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = e(t) \quad t > 0$$

动态电路的分析方法

①根据KVL、KCL和VCR建立微分方程。

②求解微分方程。

时域分析法

本章采用

- 经典法
- 状态变量法
- 卷积积分
- 数值法

复频域分析法

- 拉普拉斯变换法
- 状态变量法
- 傅氏变换

工程中高阶微分方程应用计算机辅助分析求解。

稳态分析和动态分析的区别

稳态	动态
恒定或周期性激励	任意激励
换路发生很长时间后状态	换路发生后的整个过程
微分方程的特解	微分方程的通解

直流时 $$a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=U_\mathrm{S}$$

$$t\Rightarrow\infty \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0 \qquad a_0x=U_\mathrm{S}$$

3. 电路的初始条件

① $t=0_+$ 与 $t=0_-$ 的概念　认为换路在 $t=0$ 时刻进行

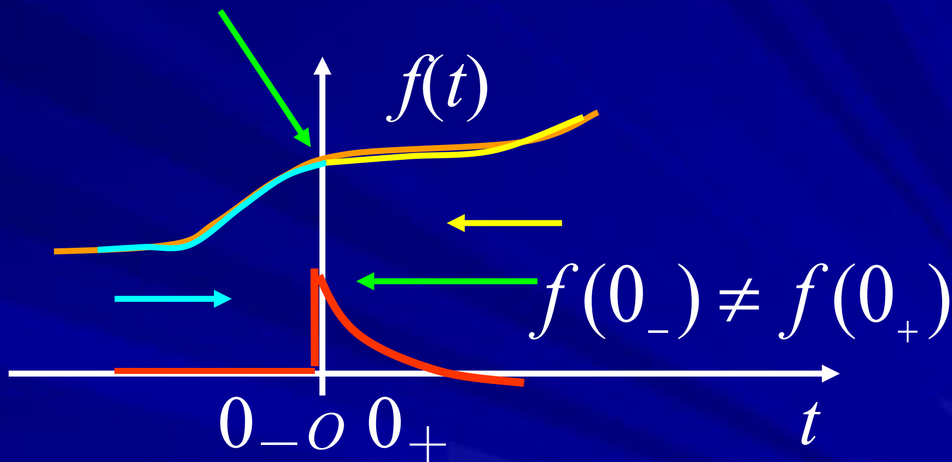
0_-　换路前一瞬间

$$f(0_-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t)$$

0_+　换路后一瞬间

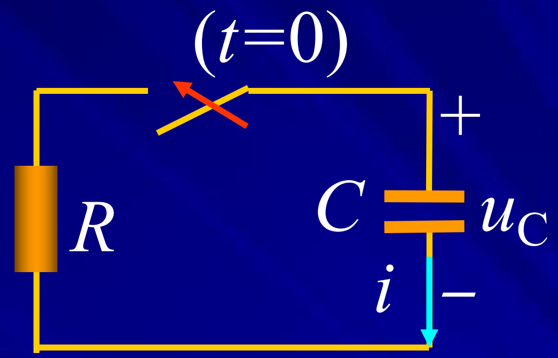
$$f(0_+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

$$f(0_-)=f(0_+)$$



注意　初始条件为 $t=0_+$ 时，u、i 及其各阶导数的值。

例1-1 图示为电容放电电路，电容原先带有电压U_o，求开关闭合后电容电压随时间的变化。



解

$$Ri + u_C = 0 \quad (t > 0)$$

$$\rightarrow \quad RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

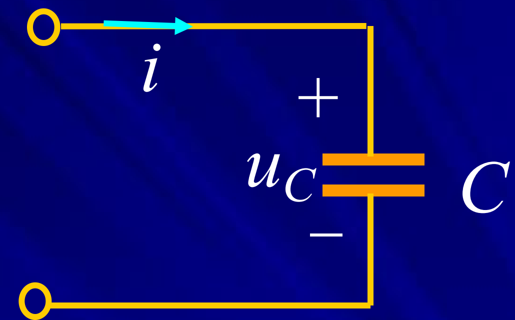
特征方程: $RCp + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad p = -1/RC$

通解: $u_C(t) = k\mathrm{e}^{pt} = k\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

代入初始条件得: $k = U_o \quad \rightarrow \quad u_C(t) = U_o\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

明确　在动态电路分析中，初始条件是得到确定解答的必需条件。

②电容的初始条件



$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$t = 0_+$时刻　$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \overset{0}{\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

当 $i(\xi)$为有限值时

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$q = C u_C$ →

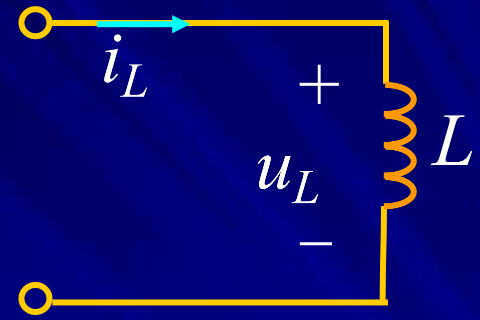
$$q(0_+) = q(0_-)$$

电荷守恒

结论

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前、后保持不变。

③电感的初始条件



$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0_-}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t}u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$t=0_+$时刻 $i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u(\xi)\mathrm{d}\xi$

0

当 u_L为有限值时

$$i_L(0_+)= i_L(0_-)$$

$$\Psi = Li_L$$

$$\Psi_L(0_+)= \Psi_L(0_-)$$

磁链守恒

结论

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前、后保持不变。

④换路定律

$$\begin{cases} q_C(0_+) = q_C(0_-) \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压(电荷)换路前、后保持不变。

$$\begin{cases} \Psi_L(0_+) = \Psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

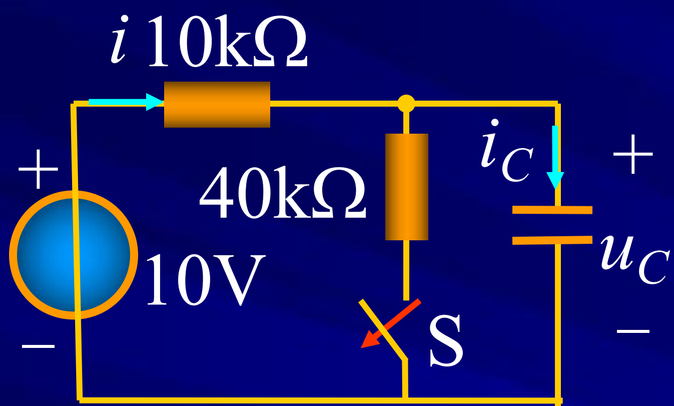
换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流(磁链)换路前、后保持不变。

注意 ①电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。

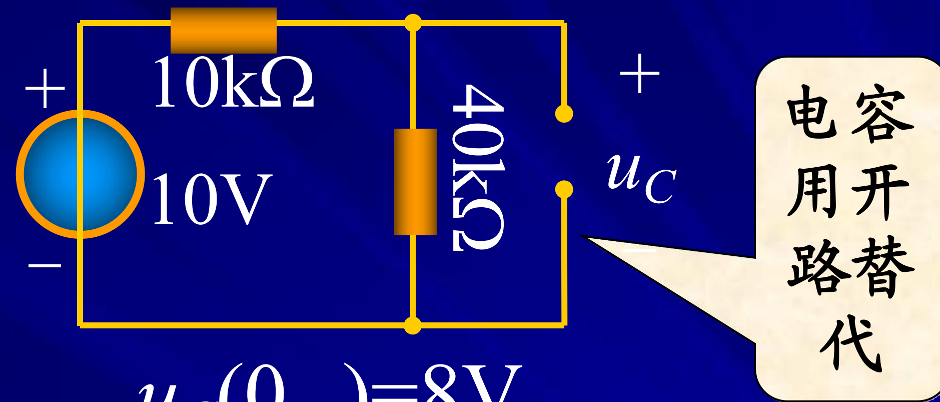
②换路定律反映了能量不能跃变。

⑤电路初始值的确定

例1-2　求 $i_C(0_+)$。



(1) 由 0_- 电路求 $u_C(0_-)$

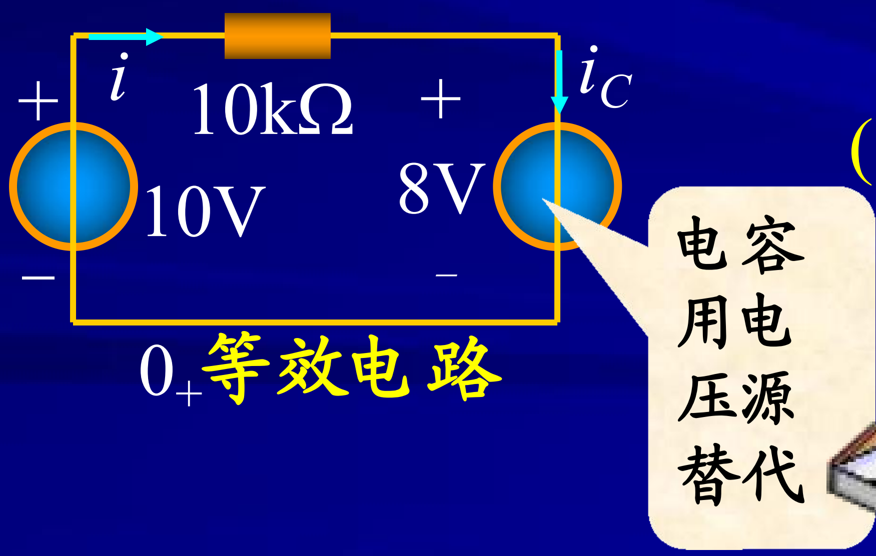


$$u_C(0_-)=8\text{V}$$

(2) 由换路定律

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)=8\text{V}$$

(3) 由 0_+ 等效电路求 $i_C(0_+)$

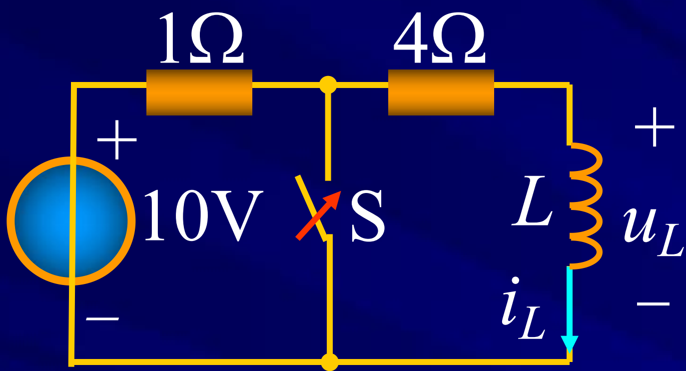


0_+ 等效电路

$$i_C(0_+) = \frac{10-8}{10}\text{mA} = 0.2\text{mA}$$

注意 $i_C(0_+) \neq i_C(0_-)$

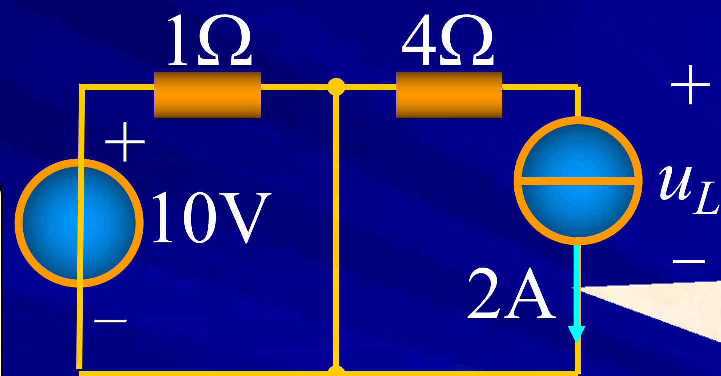
例1-3　$t=0$时闭合开关S，求 $u_L(0_+)$。



② 应用换路定律:

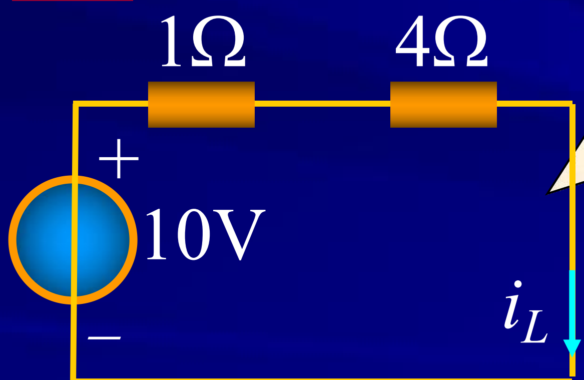
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2A$$

③ 由 0_+ 等效电路求 $u_L(0_+)$



$$u_L(0_+)=-2\times 4V=-8V$$

解　① 先求 $i_L(0_-)$



$$i_L(0_-)=\frac{10}{1+4}A=2A$$

注意　$u_L(0_+)\neq u_L(0_-)$

小结　求初始值的步骤:

1. 由换路前电路（稳定状态）求 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$。

2. 由换路定律得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$。

3. 画 0_+ 等效电路。

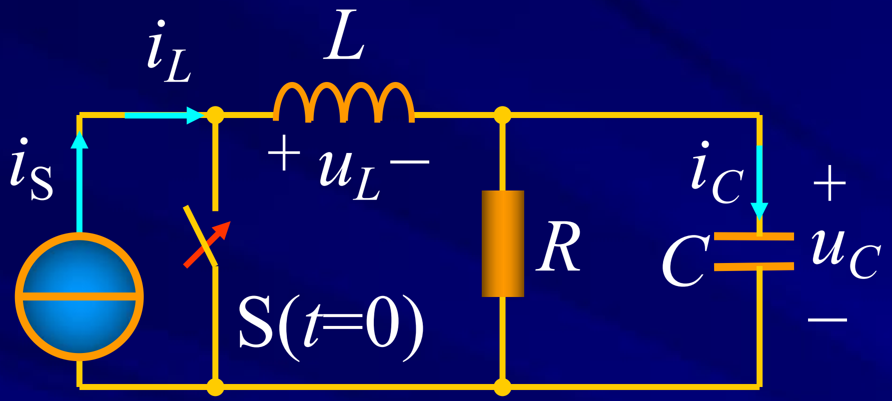
   (1) 换路后的电路;

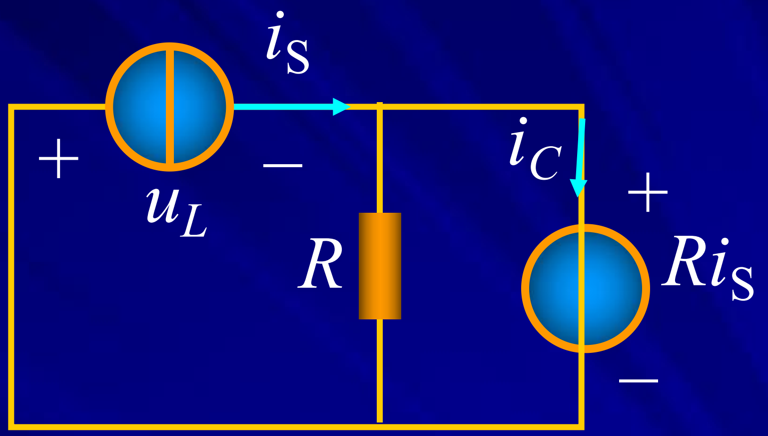
   (2) 电容（电感）用电压源（电流源）替代。

   （取 0_+ 时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）。

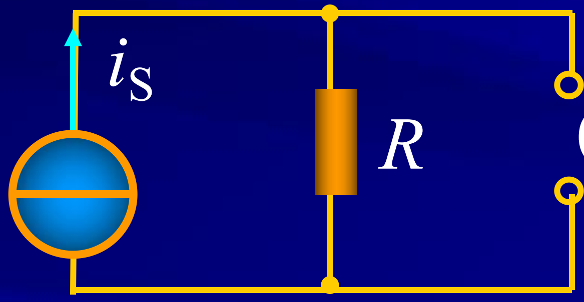
4. 由 0_+ 电路求所需各变量的 0_+ 值。

例1-4 求 $i_C(0_+)$，$u_L(0_+)$。





解 由 0_-电路得



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_S$$

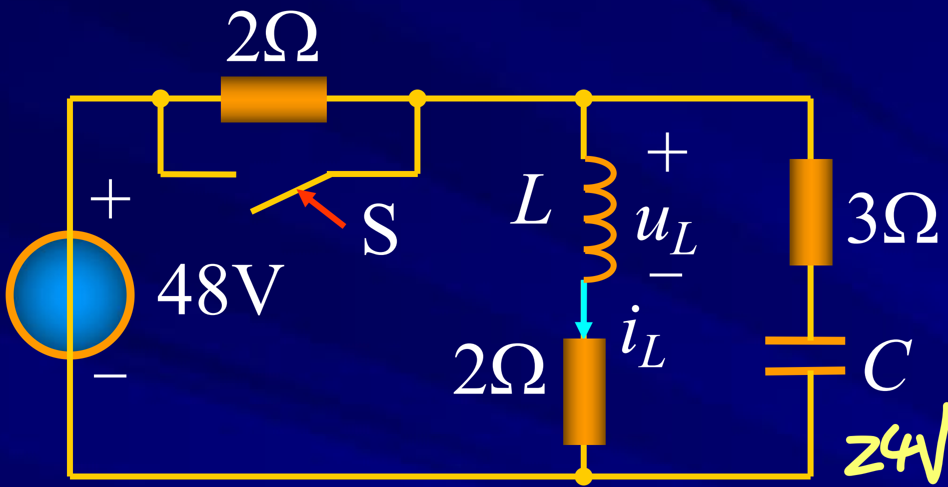
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = Ri_S$$

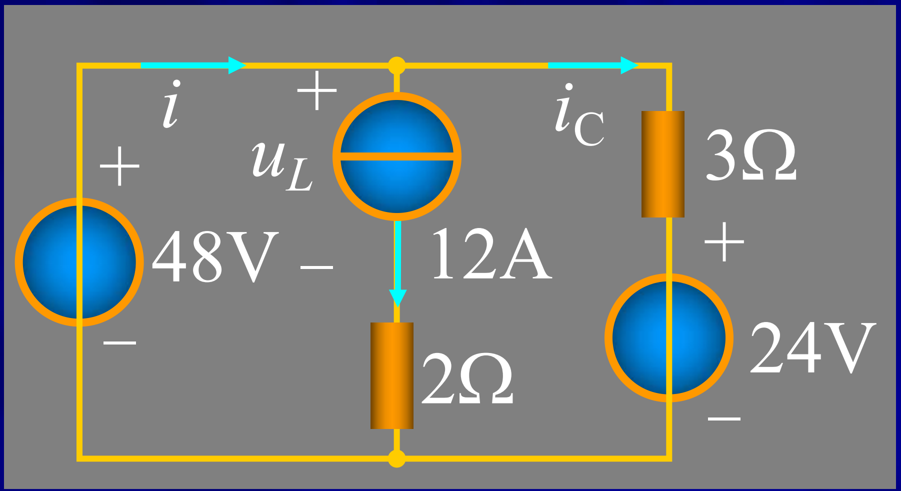
由 0_+电路得

$$i_C(0_+) = i_S - \frac{Ri_S}{R} = 0$$

$$u_L(0_+) = -Ri_S$$

例1-5 求S闭合瞬间各支路电流和电感电压。





解 由 0_-电路得

由 0_+电路得

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

$$=48/4\text{A}=12\text{A}$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)$$

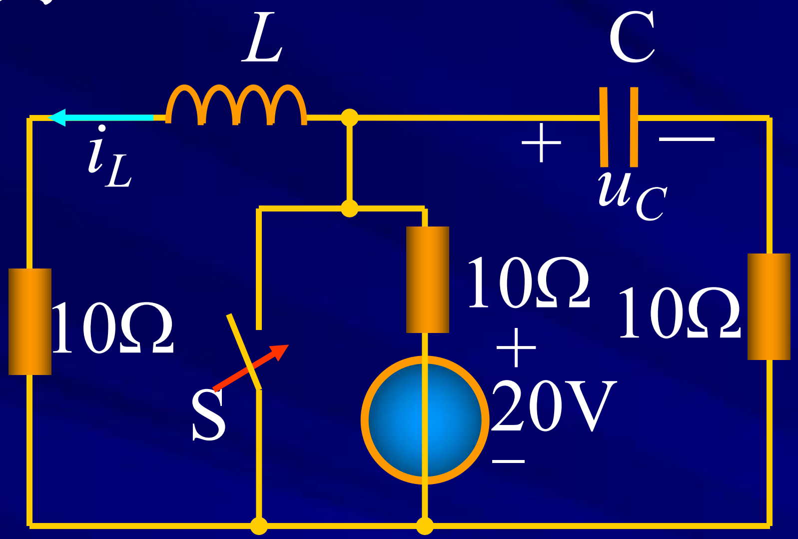
$$=2\times12\text{V}=24\text{V}$$

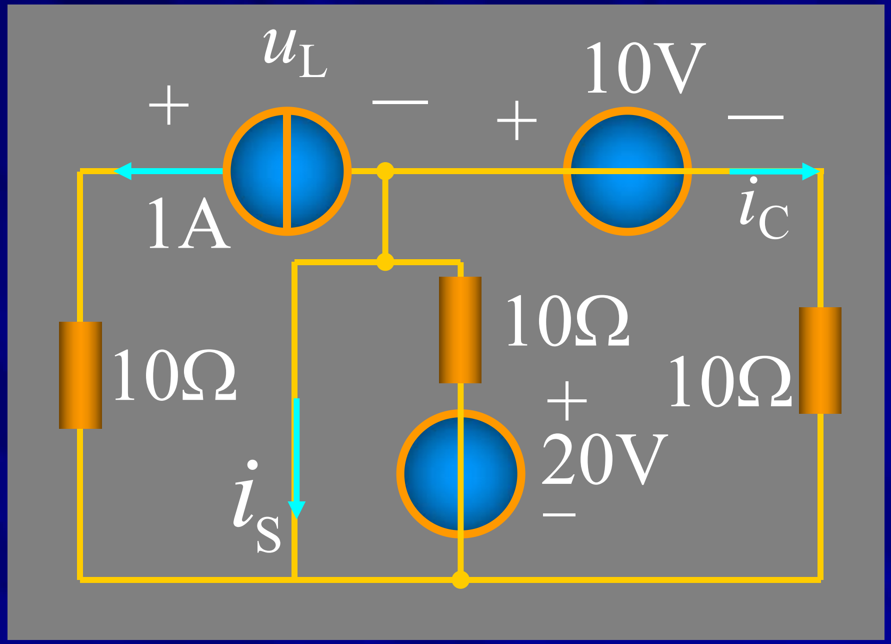
$$i_C(0_+)=(48-24)/3\text{A}=8\text{A}$$

$$i(0_+)=(12+8)\text{A}=20\text{A}$$

$$u_L(0_+)=(48-2\times12)\text{V}=24\text{V}$$

例1-6 求S闭合瞬间流过它的电流值。





解 ①确定0_-值

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{20}{20}\text{A}=1\text{A}$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\text{V}$$

②给出0_+等效电路

$$i_S(0_+)=(\frac{20}{10}+\frac{10}{10}-1)\text{A}=2\text{A}$$

$$u_L(0_+)=i_L(0_+)\times 10=10\text{V}$$

$$i_C(0_+)=-u_C(0_+)/10=-1\text{A}$$

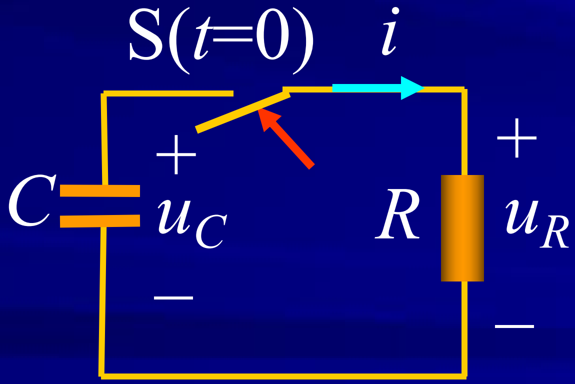
控制顺定的

7-2 一阶电路的零输入响应

零输入响应 → 换路后外加激励为零，仅有动态元件初始储能产生的电压和电流。

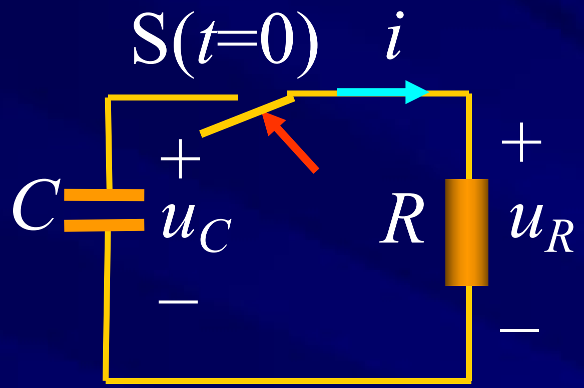
1. *RC*电路的零输入响应

已知 $u_C(0_-)=U_0$



$$-u_R+u_C=0$$

$$\begin{cases} i=-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ u_R=Ri \end{cases}$$



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

特征方程　　$RCp+1=0$

特征根　　$p=-\dfrac{1}{RC}$

则　　$u_C=A\mathrm{e}^{pt}=A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

代入初始值　　$u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

$\Rightarrow$ $A=U_0$

$$u_C = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

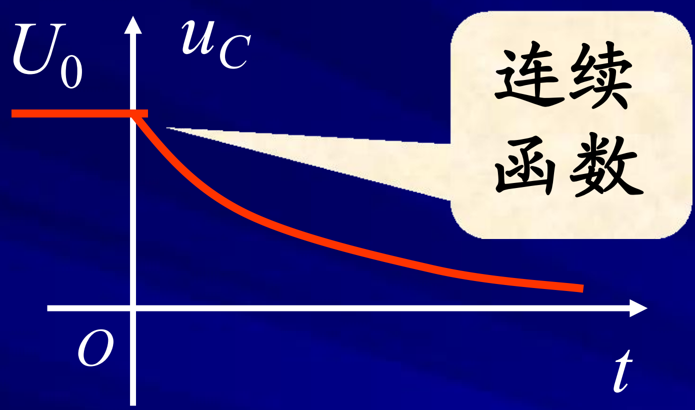
$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

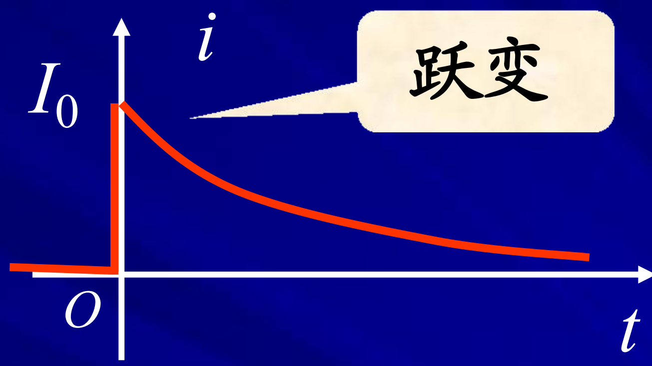
或

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CU_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{U_0}{R} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数。





②响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与RC有关。

令 $\tau=RC$ ，称τ为一阶电路的时间常数。

$$[\tau]=[RC]=[欧][法]=[欧]\left[\frac{库}{伏}\right]=[欧]\left[\frac{安秒}{伏}\right]=[秒]$$

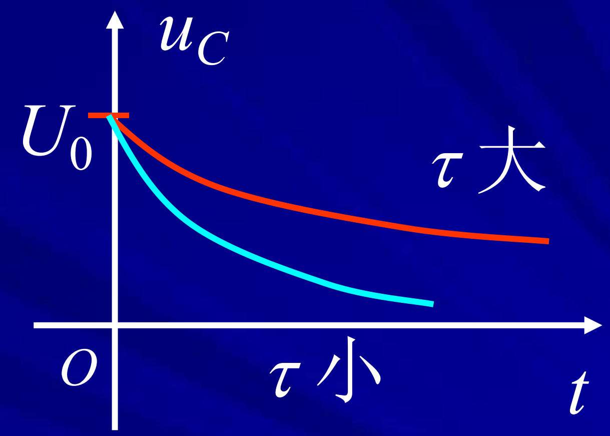
$$\tau = RC$$

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ 大——过渡过程时间长

τ 小——过渡过程时间短



物理含义 → 电压初值一定：

C大（R一定）　$W=Cu^2/2$　储能大

R大（C一定）　$i=u/R$　放电电流小

放电时间长

t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.007U_0$

注意

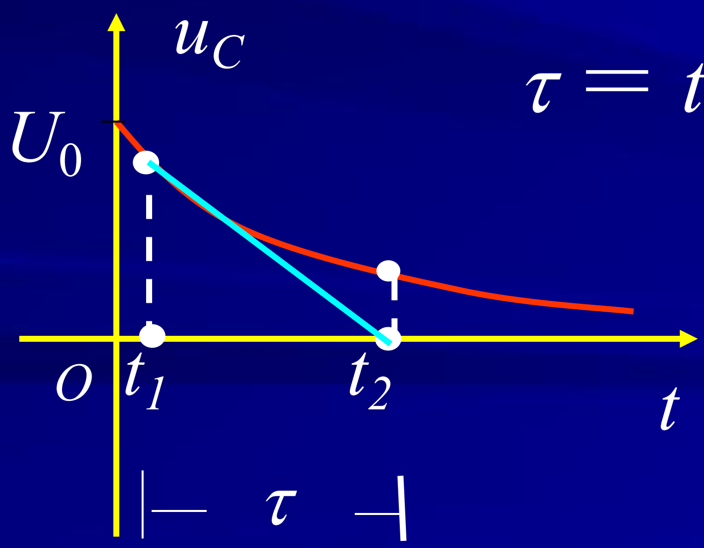
① τ:电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。工程上认为，经过 $3\tau \sim 5\tau$，过渡过程结束。

②时间常数τ的几何意义:

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

t_1时刻曲线的斜率等于

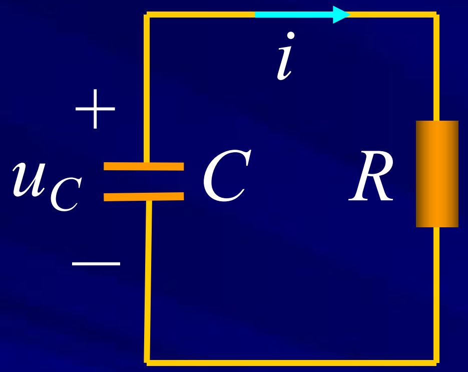
$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} = -\frac{U_0}{\tau}\left. e^{-\frac{t}{\tau}}\right|_{t_1} = -\frac{1}{\tau}u_C(t_1) = \frac{u_C(t_1)-0}{t_1-t_2}$$



$\tau = t_2 - t_1$ → 次切距的长度

$$u_C(t_2) = 0.368u_C(t_1)$$

③能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



设 $u_C(0_+)=U_0$

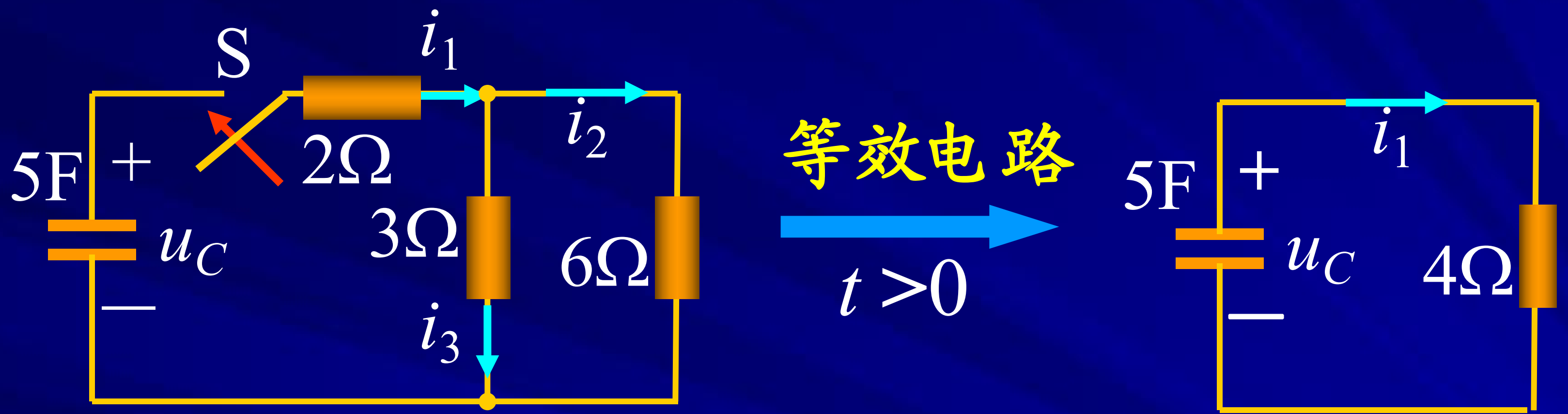
电容放出能量： → $\frac{1}{2}CU_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^\infty i^2R\mathrm{d}t=\int_0^\infty\left(\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2R\mathrm{d}t=\frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{2}CU_0^2$$

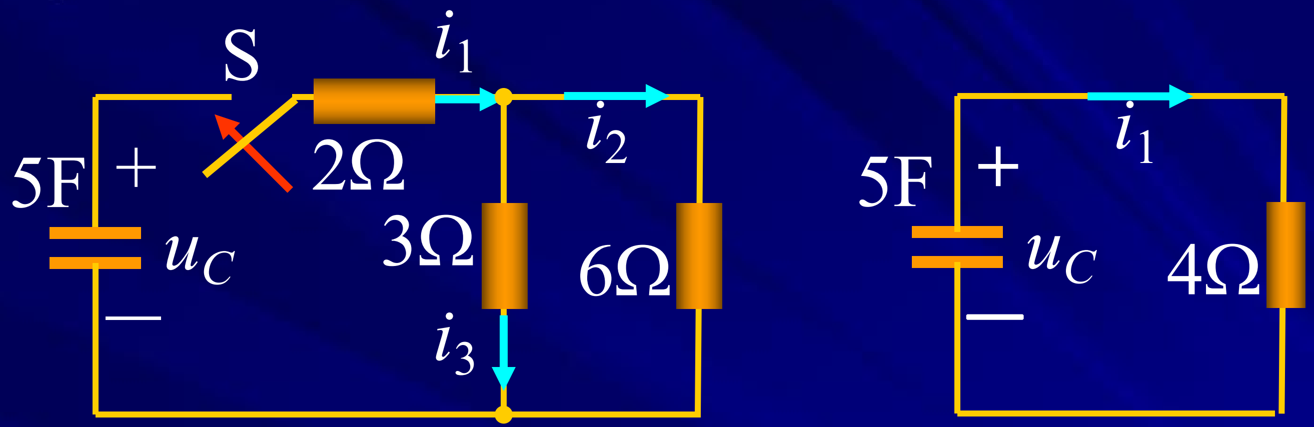
例2-1图示电路中的电容原充有24V电压，求S闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。



解 这是一个求一阶 RC 零输入响应问题，有

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t > 0$$

$$U_0 = 24\,\text{V} \qquad \tau = RC = 5\times 4\text{s} = 20\,\text{s}$$

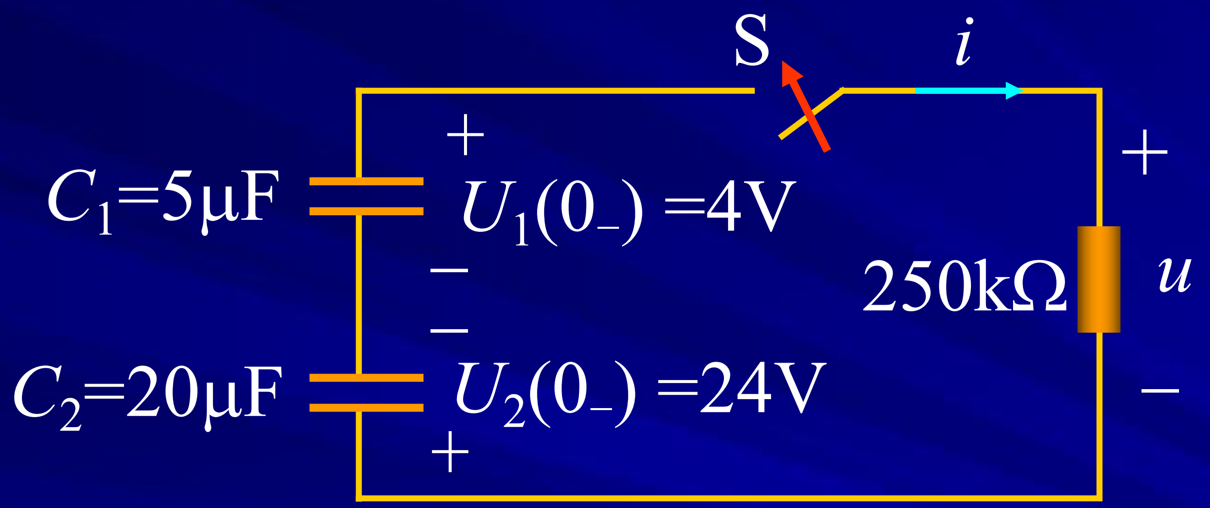


$$u_C = 24\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}}\mathrm{V} \qquad t > 0$$

$$i_1 = u_C/4 = 6\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A}$$

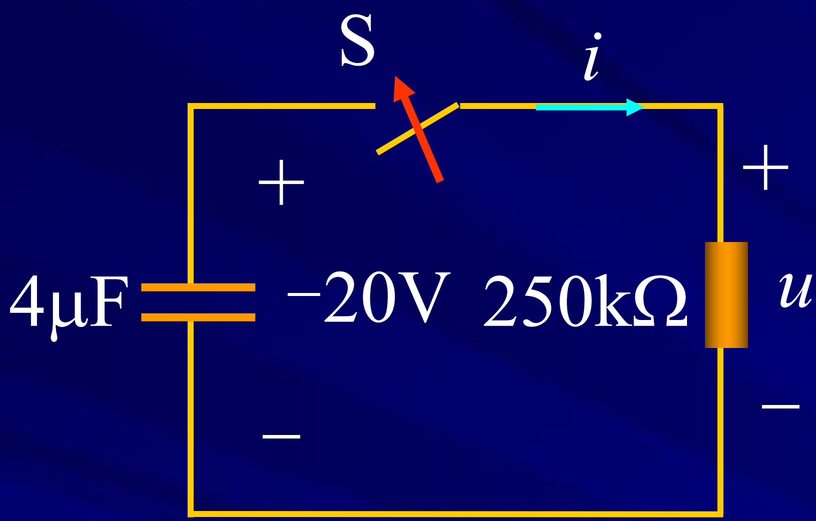
分流得 $i_2 = \frac{1}{3}i_1 = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A}$ $\quad i_3 = \frac{2}{3}i_1 = 2\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A}$

例2-2 求:(1)图示电路S闭合后各元件的电压和电流随时间变化的规律;(2) 电容的初始储能和最终时刻的储能及电阻的耗能。



解 这是一个求一阶*RC*零输入响应问题，有

$$C=\frac{C_2C_1}{C_1+C_2}=4\mu\text{F}\qquad u(0_+)=u(0_-)=-20\text{V}$$



$$\tau = RC = 250 \times 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{s}$$

$$u = -20\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{V} \qquad t > 0$$

$$i = \frac{u}{250 \times 10^{3}} = -80\mathrm{e}^{-t}\,\mu\mathrm{A}$$

$$u_1 = u_1(0) - \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi = 4 - \frac{1}{5}\int_0^t -80\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= (-16\mathrm{e}^{-t} + 20)\,\mathrm{V}$$

$$u_2 = u_2(0) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi = 24 + \frac{1}{20}\int_0^t -80\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= (4\mathrm{e}^{-t} + 20)\,\mathrm{V}$$

初始储能

$$W_1 = \frac{1}{2}(5\times 10^{-6}\times 16)\mathrm{J} = 40\mu\mathrm{J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2}(20\times 10^{-6}\times 24^2)\mathrm{J} = 5760\ \ \mu\mathrm{J}$$

最终储能

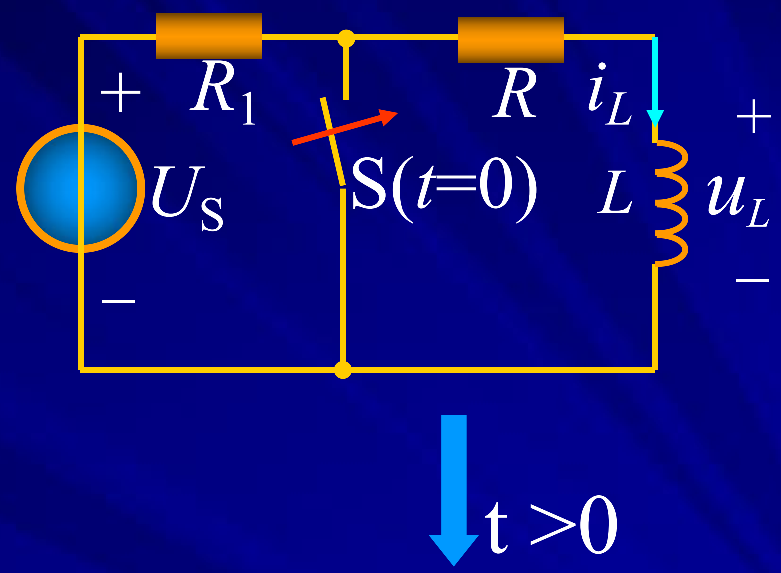
$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}(5+20)10^{-6}\times 20^2\mathrm{J} = 5000\mu\mathrm{J}$$

电阻耗能

$$W_{\mathrm{R}} = \int_0^{\infty} Ri^2\mathrm{d}t = \int_0^{t} 250\times 10^3\times(80\mathrm{e}^{-t})^2\mathrm{d}t = 800\mu\mathrm{J}$$

$$= (5800 - 5000)\ \ \mu\mathrm{J}$$

2. *RL*电路的零输入响应

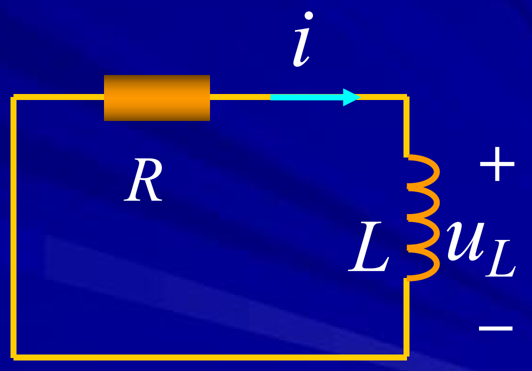


$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = 0 \qquad t > 0$$

特征方程　$Lp+R=0$

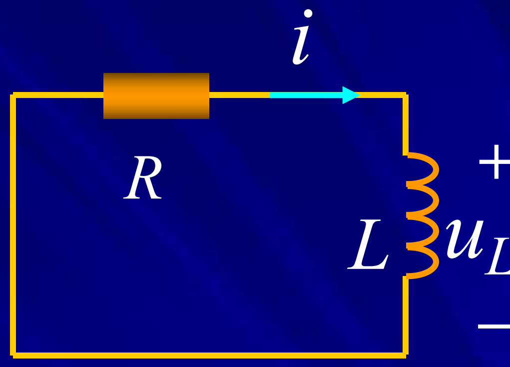
特征根　$p = -\dfrac{R}{L}$　　$i_L(t) = A\mathrm{e}^{pt}$



代入初始值　→　$A= i_L(0_+)= I_0$

→　$i_L(t) = I_0\mathrm{e}^{pt} = I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \qquad t > 0$

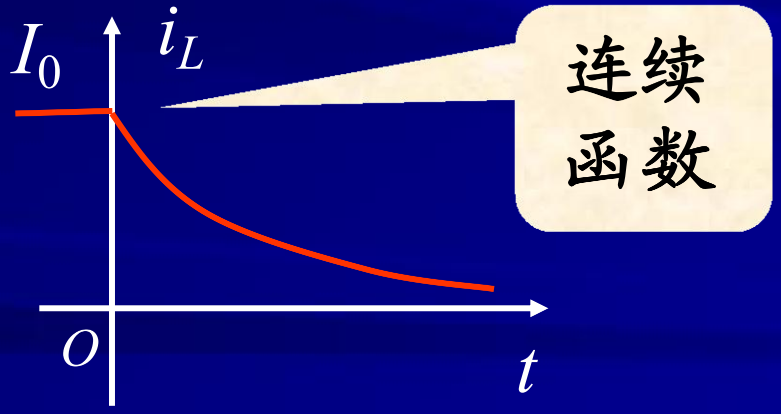
$$i_L(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}} \qquad t > 0$$

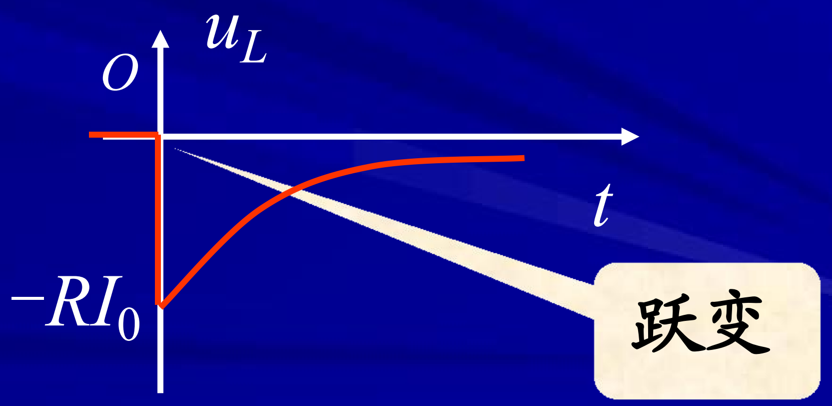


$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}}$$

表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数。





②响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与L/R有关。

令 $\boxed{\tau = L/R}$ 称为一阶RL电路时间常数

$$[\tau]=[\frac{L}{R}]=[\frac{\text{亨}}{\text{欧}}]=[\frac{\text{韦}}{\text{安欧}}]=[\frac{\text{伏秒}}{\text{安欧}}]=[\text{秒}]$$

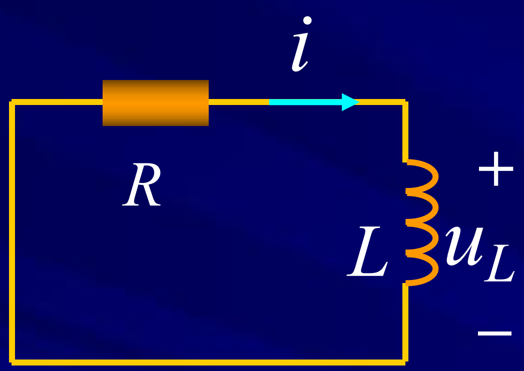
时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短。

τ大——过渡过程时间长　　τ小——过渡过程时间短

物理含义 → 电流初始值$i_L(0)$一定：

$$\left.\begin{array}{lll} L\text{大} & W=Li_L^2/2 & \text{初始能量大} \\ R\text{小} & p=Ri^2 & \text{放电过程消耗能量小} \end{array}\right\} \text{放电慢，}\tau\text{大}$$

③能量关系 → 电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



设 $i_L(0_+)=I_0$

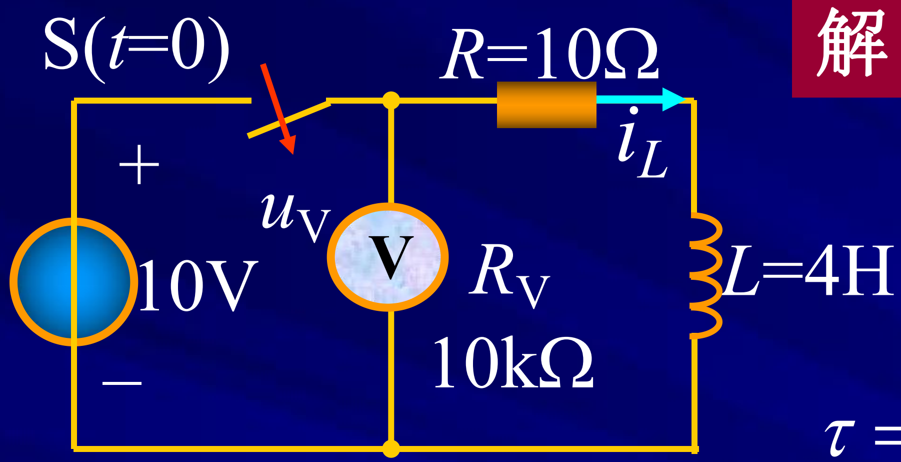
电感放出能量: → $\frac{1}{2}LI_0^2$

电阻吸收（消耗）能量: →

$$W_R=\int_0^{\infty} i^2 R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}(I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}})^2 R\mathrm{d}t$$

$$=I_0^2 R\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{L/R}}\mathrm{d}t=I_0^2 R(-\frac{L/R}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}LI_0^{\ 2}$$

例2-3　t=0时，打开开关S，求u_V。电压表量程：50V。



解

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\ \text{A}$$

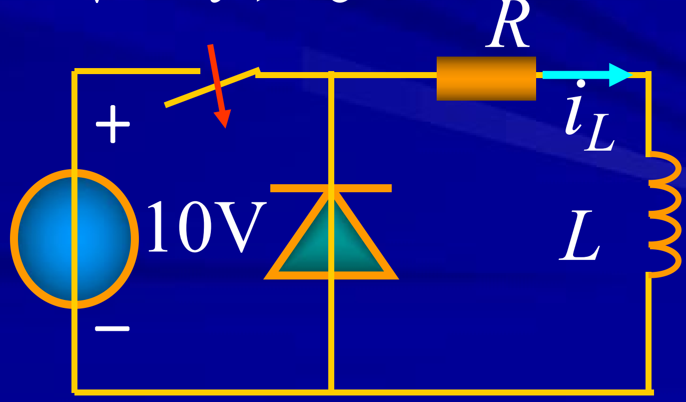
$$i_L = e^{-t/\tau} \qquad t > 0$$

$$\tau = \frac{L}{R+R_V} \approx \frac{4}{10000}\text{s} = 4\times10^{-4}\text{s}$$

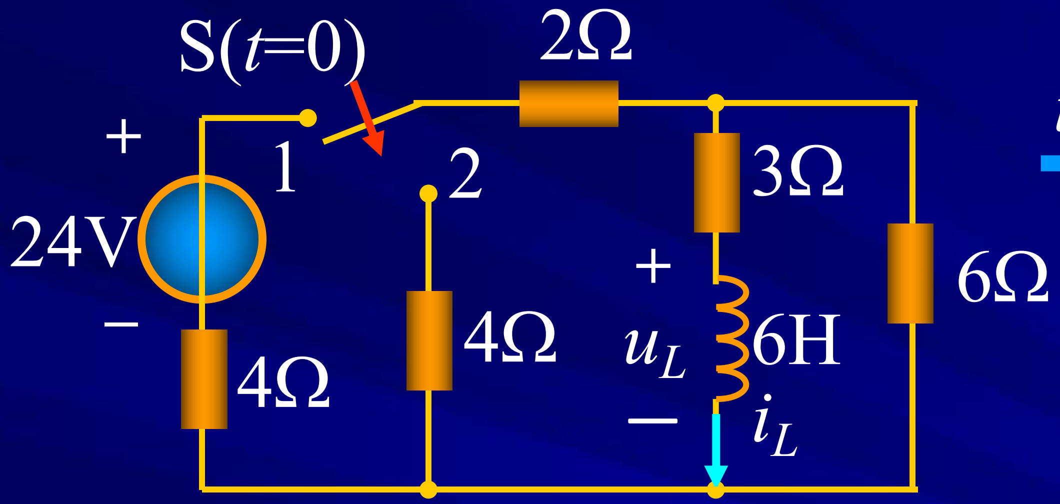
$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t}\ \text{V} \qquad t > 0$$

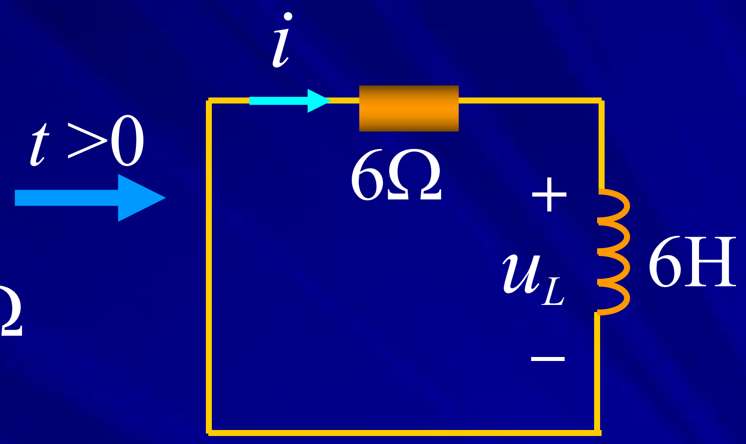
$$u_V(0_+) = -\ 10000\text{V}$$

造成 V 损坏。



例2-4　t=0时，开关S由 1→2，求电感电压和电流及开关两端电压u_{12}。

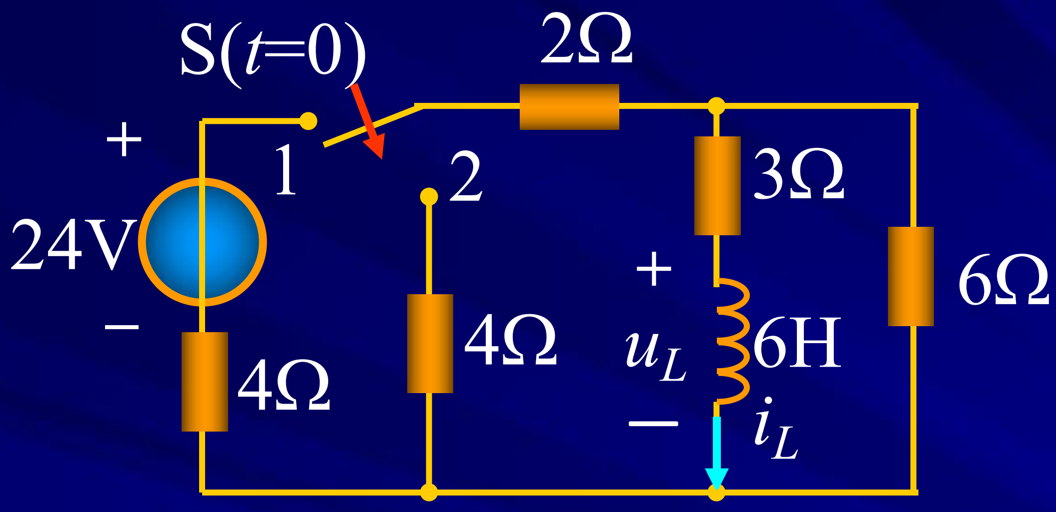


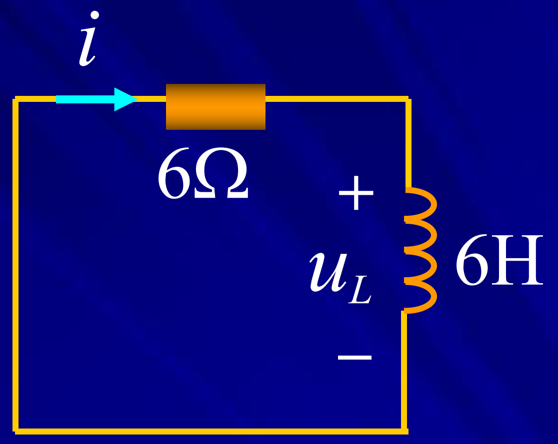


解

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{24}{4+2+\dfrac{3\times6}{3+6}}\times\frac{6}{3+6}\text{A}=2\text{A}$$

$$R=[3+\frac{(2+4)\times6}{(2+4)+6}]\Omega=6\Omega\qquad \tau=\frac{L}{R}=\frac{6}{6}\text{s}=1\text{s}$$





$$i_L = 2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{A} \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -12\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{V} \qquad t > 0$$

$$u_{12} = 24 + 4\times\frac{i_L}{2} = 24 + 4\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{V}$$

小结

①一阶电路的零输入响应是由储能元件的初始值引起的响应，都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t)=y(0_{+})\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

*RC*电路: $u_C(0_+)=u_C(0_-)$

*RL*电路: $i_L(0_+)=i_L(0_-)$

小结

②衰减快慢取决于时间常数τ。

RC 电路　$\tau = RC$　　$\tau = L/R$　RL 电路

R为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

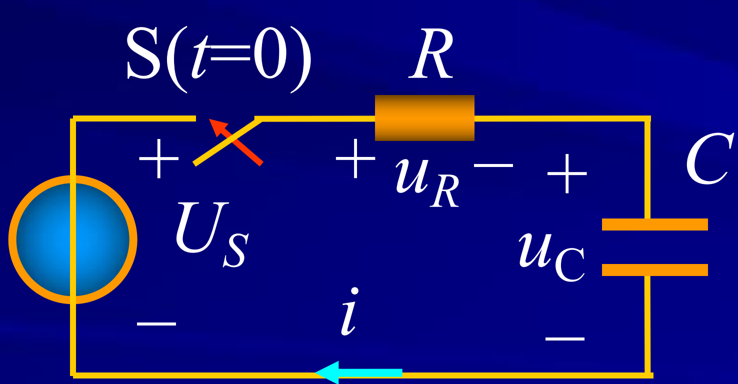
③同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

④一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

7-3 一阶电路的零状态响应

零状态响应 → 动态元件初始能量为零，由 $t>0$ 时刻电路中外加激励作用所产生的响应。

1. RC 电路的零状态响应



$u_C(0_-)=0$

非齐次线性常微分方程

方程: $$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

解答形式为:

$$u_C=u_C'+u_C''$$

齐次方程通解

非齐次方程特解

u'_C → 特解（强制分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_\mathrm{s}$$ 的特解 → $u'_C=U_\mathrm{s}$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解。

u''_C → 通解（自由分量，瞬态分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$ 的通解 → $u''_C=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

变化规律由电路参数和结构决定。

全解 $$u_C(t)=u_C'+u_C''=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件 $u_C(0_+)=0$ 定积分常数 A

$$u_C(0_+)=A+U_S=0 \rightarrow A=-U_S$$

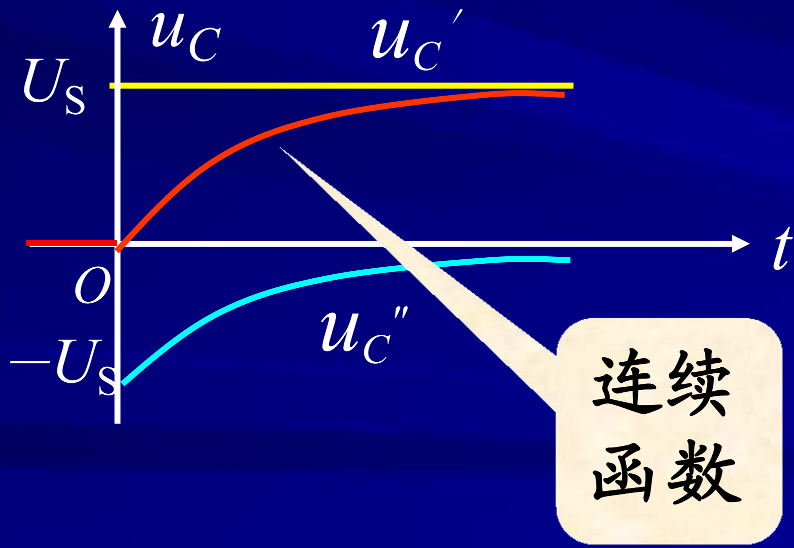
$$u_C=U_S-U_Se^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t>0)$$

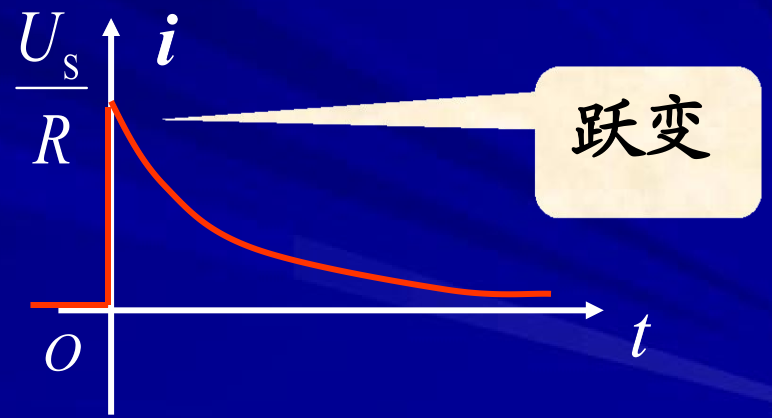
从以上式子可以得出 $$i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

表明

①电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；电容电压由两部分构成：

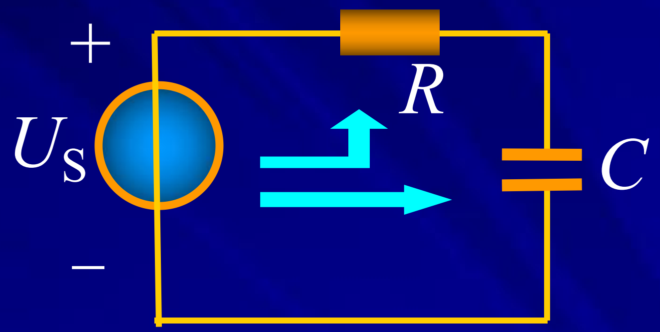
稳态分量（强制分量） + 瞬态分量（自由分量）





②响应变化的快慢，由时间常数$\tau = RC$决定；τ 大，充电慢，τ 小充电就快。

③响应与外加激励成线性关系。



④能量关系：

电源提供能量　$\int_0^\infty U_S i \mathrm{d}t = U_S q = CU_S^2$

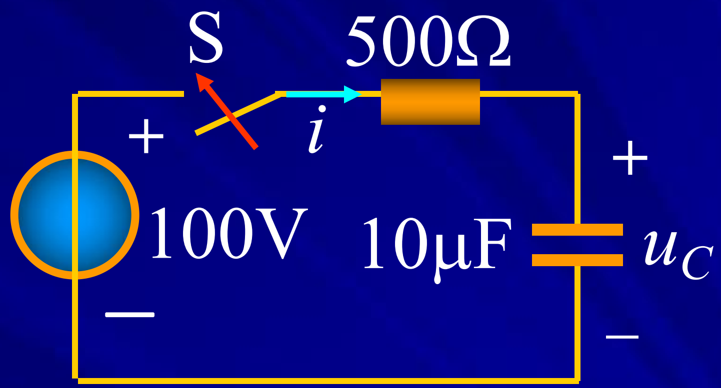
电阻消耗能量　$\int_0^\infty i^2 R \mathrm{d}t = \int_0^\infty (\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}})^2 R \mathrm{d}t = \frac{1}{2} CU_S^2$

电容储存能量　$\frac{1}{2} CU_S^2$

表明　电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

例3-1 t=0时，开关S闭合，已知 $u_C(0_-)=0$，求(1)电容电压和电流；(2) $u_C=80$V时的充电时间 t。

解 (1)这是一个RC电路零状态响应问题，有：



$$\tau = RC = 500\times10^{-5}\text{s} = 5\times10^{-3}\text{s}$$

$$u_C = U_s(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1-e^{-200t})\text{V} \quad (t>0)$$

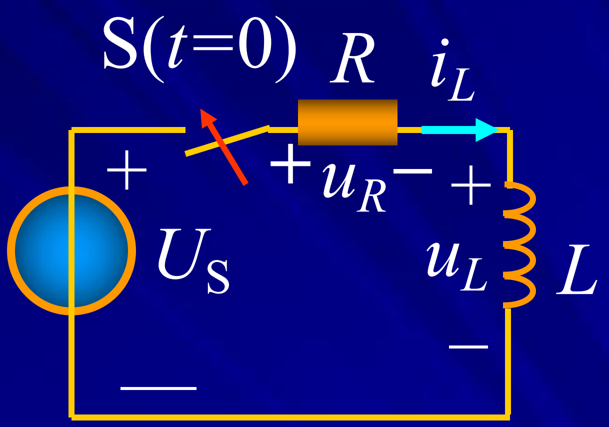
$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t}\text{A}$$

(2)设经过t_1秒，$u_C=80$V

$$80 = 100(1-e^{-200t_1}) \to t_1 = 8.045\text{ms}$$

2. RL电路的零状态响应

已知$i_L(0_-)=0$，电路方程为

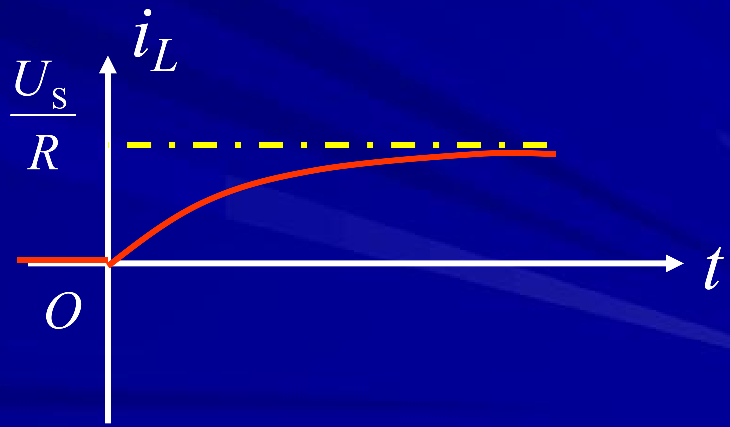


$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=U_S$$

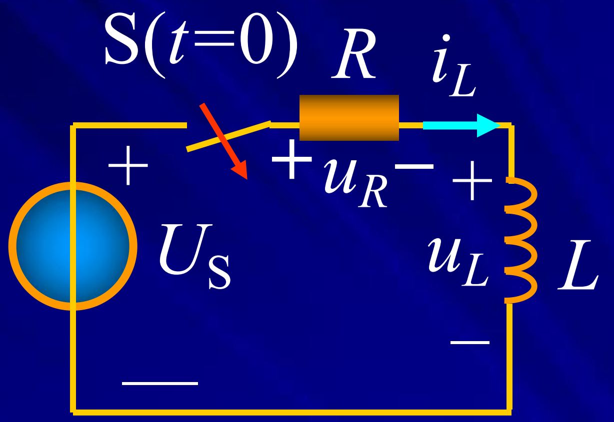
$$i_L=i_L'+i_L''=\frac{U_S}{R}+A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(0_+)=0\rightarrow A=-\frac{U_S}{R}$$

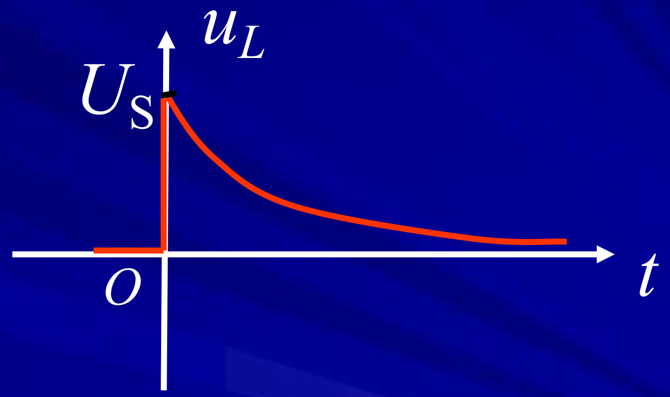
$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$$



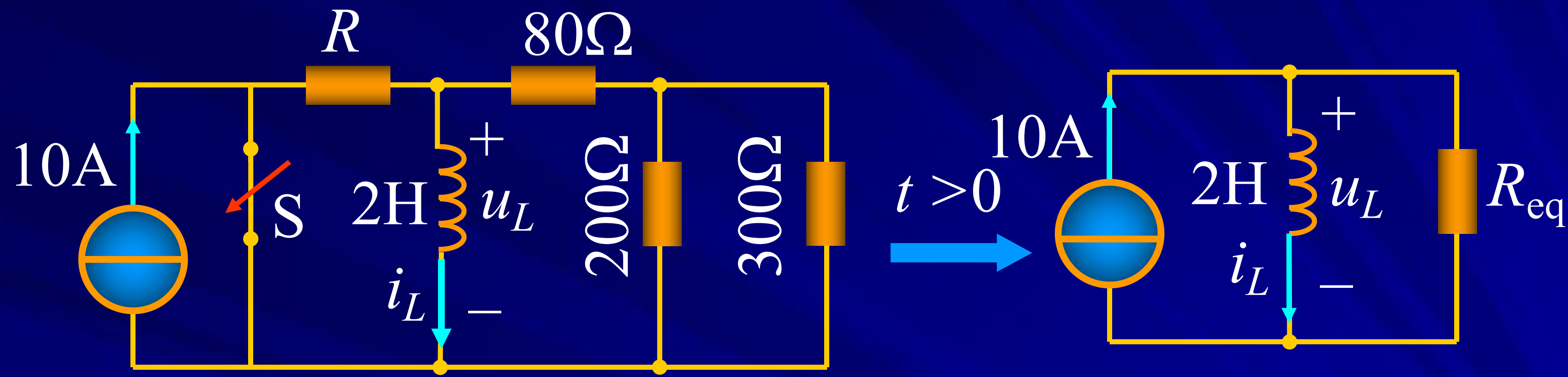
$$i_L = \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$



$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = U_S e^{-\frac{R}{L}t}$$



例3-2 t=0时，开关S打开，求t >0后i_L、u_L的变化规律。



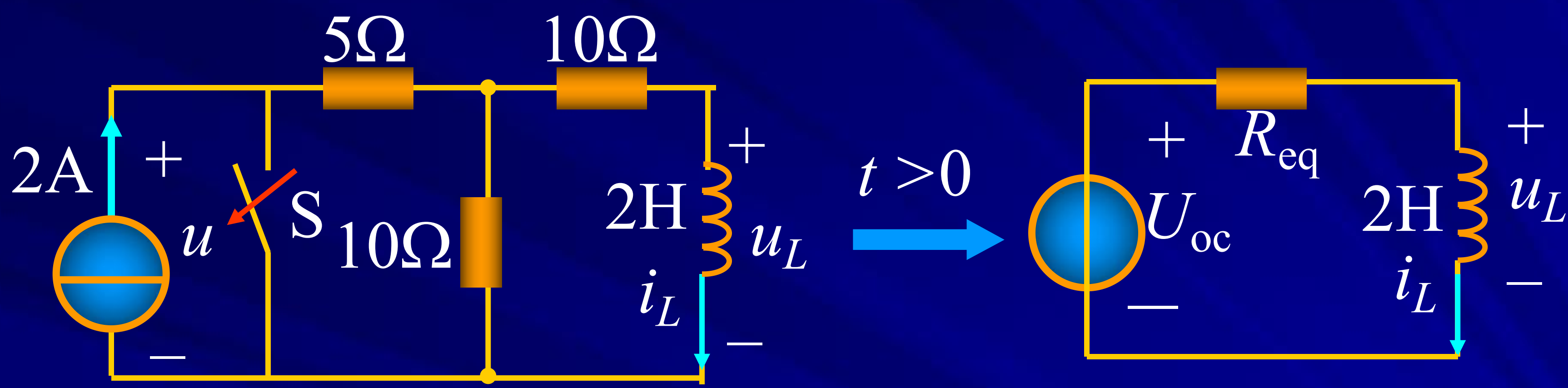
解 这是RL电路零状态响应问题，先化简电路，有

$$R_{eq}=80+\frac{200\times300}{200+300}\Omega=200\Omega \qquad \tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{2}{200}\text{s}=0.01\text{s}$$

$$i_L'=10\text{A} \qquad i_L(t)=10(1-e^{-100t})\text{A}$$

$$u_L(t)=10\times R_{eq}e^{-100t}=2000e^{-100t}\text{V}$$

例3-3 t=0开关S打开，求t >0后i_L、u_L及电流源的电压。



解 这是RL电路零状态响应问题，先化简电路，有

$$R_{eq} = 10 + 10\Omega = 20\Omega \qquad U_{oc} = 2\times 10\text{V} = 20\text{V}$$

$$\tau = L / R_{eq} = 0.1\text{s} \qquad i_L' = U_{oc} / R_{eq} = 1\text{A}$$

$$i_L(t) = (1 - \mathrm{e}^{-10t})\text{A} \qquad u_L(t) = U_{oc}\mathrm{e}^{-10t} = 20\mathrm{e}^{-10t}\text{V}$$

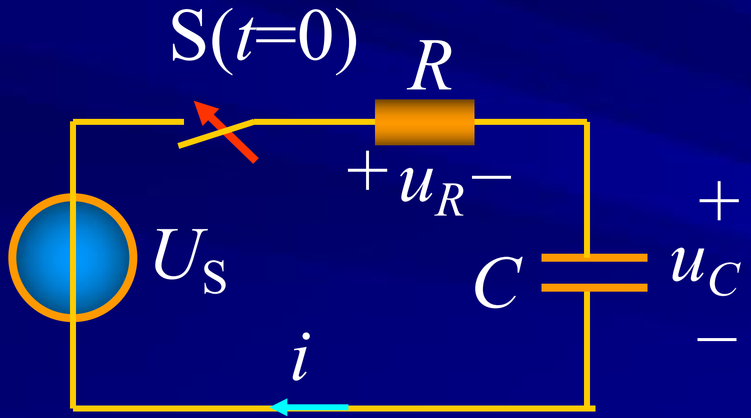
$$u = 5I_S + 10i_L + u_L = (20 + 10\mathrm{e}^{-10t})\text{V}$$

7-4 一阶电路的全响应

全响应 → 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

1. 全响应

以 RC 电路为例，电路微分方程：



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$\tau = RC$

解答为 $u_C(t) = u_C' + u_C''$

$$\begin{cases} \text{特解} \quad u_C' = U_S \\ \text{通解} \quad u_C'' = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

由初始值定A　　$u_C(0_-)=U_0$

$u_C(0_+)=A+U_S=U_0 \longrightarrow A=U_0-U_S$

$$u_C=U_S+A\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}=U_S+(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\quad t>0$$

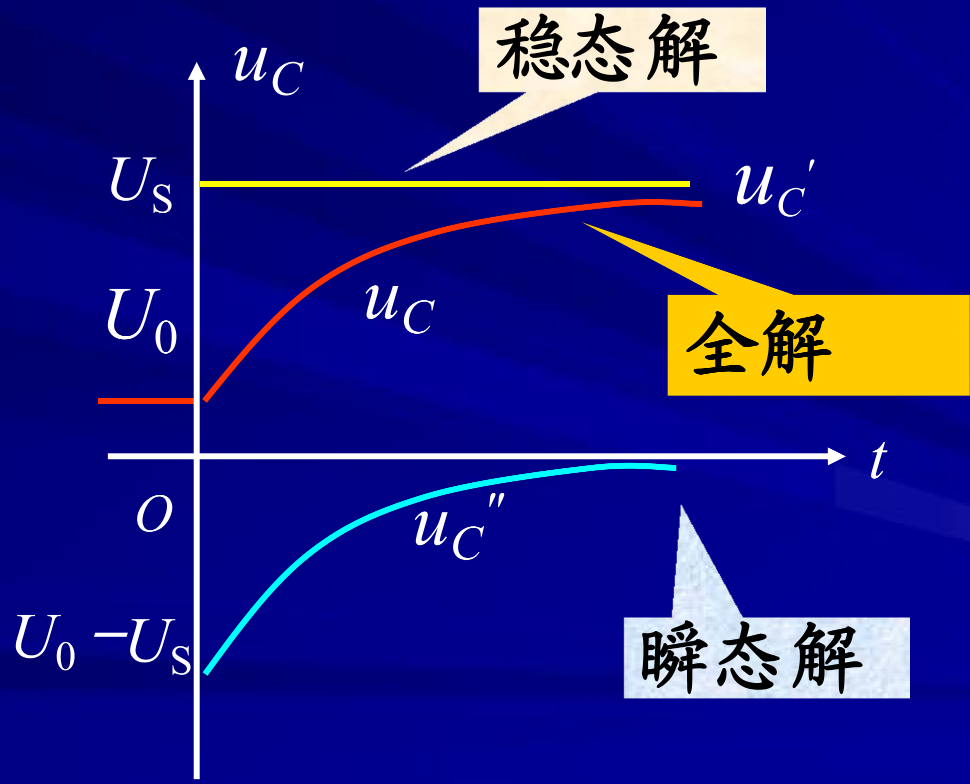
强制分量(稳态解)

自由分量(瞬态解)

2. 全响应的两种分解方式

①着眼于电路的两种工作状态 → 物理概念清晰

全响应 = 强制分量(稳态解)+自由分量(瞬态解)



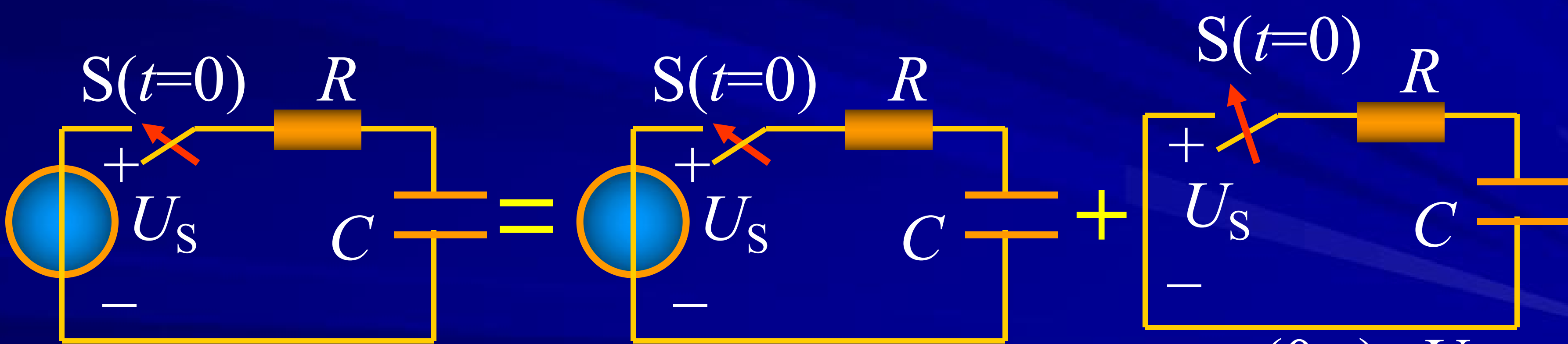
②着眼于因果关系 → 便于叠加计算

$$u_C = U_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0)$$

零状态响应

零输入响应

全响应 = 零状态响应 + 零输入响应

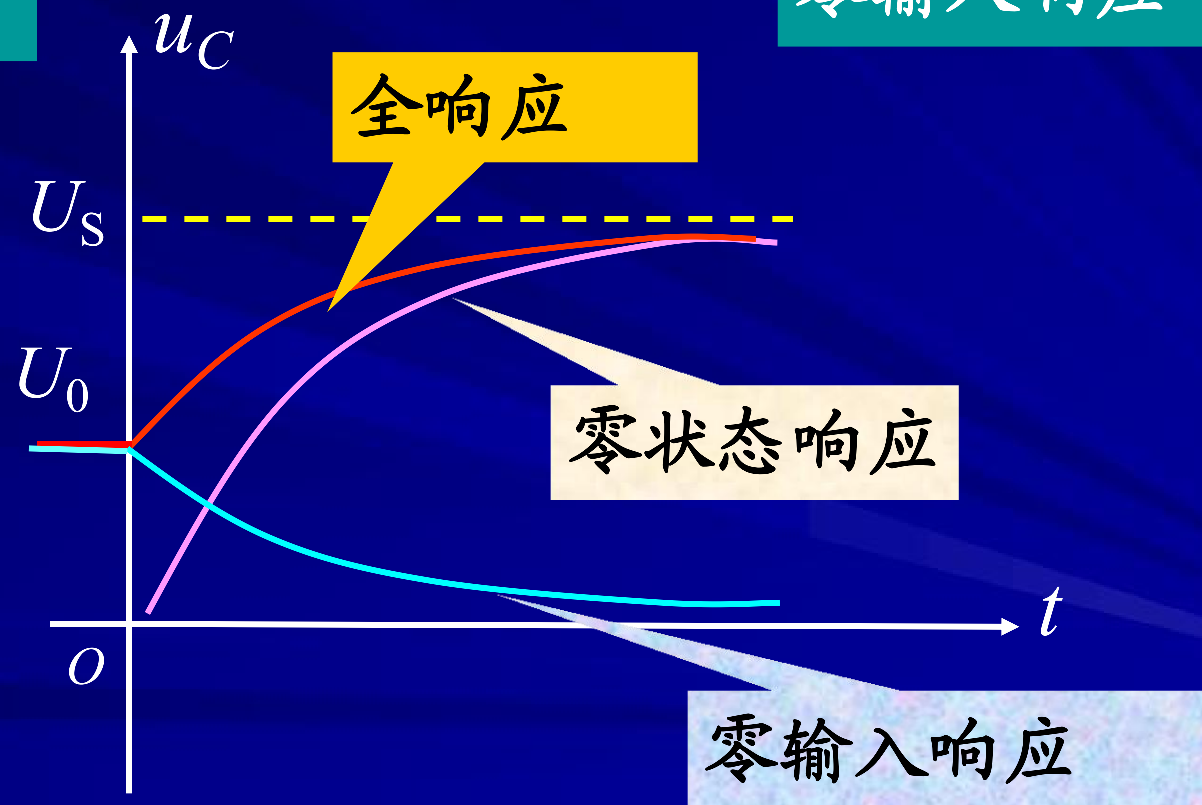


$u_C(0_-)=U_0$ $u_C(0_-)=0$ $u_C(0_-)=U_0$

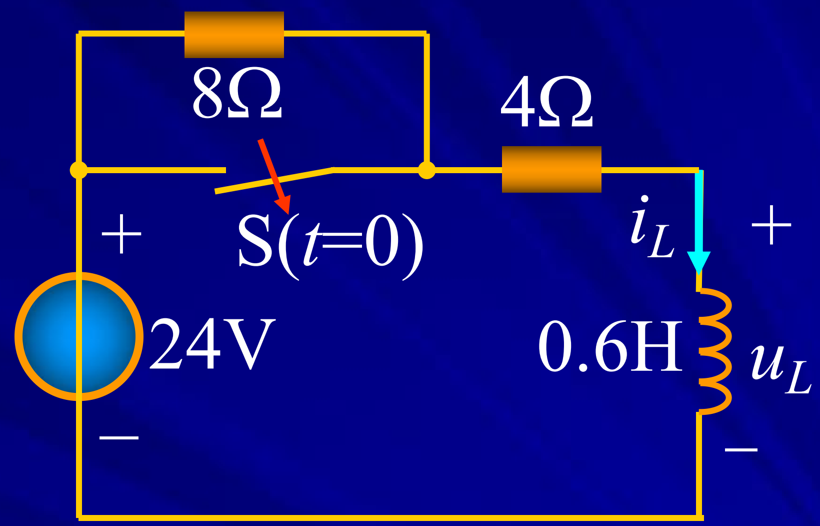
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0)$$

零状态响应

零输入响应



例4-1　t=0 时，开关S打开，求 t >0后的 i_L、u_L。



解　这是 RL 电路全响应问题，

有 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$
$= 24/4\text{A} = 6\text{A}$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.6}{12}\text{s} = \frac{1}{20}\text{s}$$

零输入响应：　$i_L^{(1)}(t) = 6\text{e}^{-20t}\text{A}$

零状态响应：　$i_L^{(2)}(t) = \dfrac{24}{12}(1-\text{e}^{-20t})\text{A}$

全响应：$i_L(t) = 6\text{e}^{-20t} + 2(1-\text{e}^{-20t}) = (2+4\text{e}^{-20t})\text{A}$

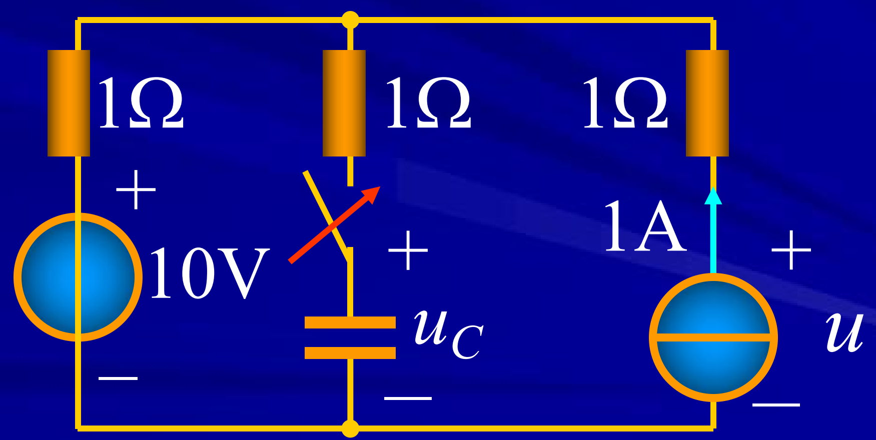
或求出稳态分量　$i_L(\infty) = 24/12\text{A} = 2\text{A}$

全响应　$i_L(t) = (2 + A\mathrm{e}^{-20t})\text{A}$

代入初值有　$6 = 2 + A \rightarrow A = 4$

例4-2　t=0时，开关S闭合，求t>0后的i_C、u_C及电流源两端的电压（$u_C(0_-)$=1V，C=1F）。

解　这是RC电路全响应问题，有

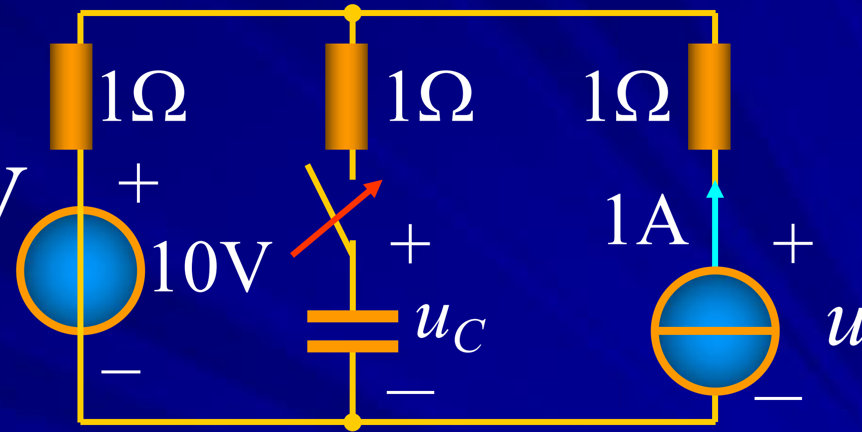


稳态分量：

$$u_C(\infty) = (10+1)\text{V} = 11\text{V}$$

$$\tau = RC = (1+1)\times 1\text{s} = 2\text{s}$$

全响应: $u_C(t) = (11 + Ae^{-0.5t})\text{V}$



$$u_C(t) = (11 - 10e^{-0.5t})\text{V}$$

$$i_C(t) = \frac{du_C}{dt} = 5e^{-0.5t}\text{A}$$

$$u(t) = 1\times 1 + 1\times i_C + u_C = (12 - 5e^{-0.5t})\text{V}$$

3. 三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学模型是一阶线性微分方程:

$$a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+bf=c$$

特解

其解答一般形式为: $f(t)=f'(t)+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

令 $t=0_+$　　$f(0_+)=f'(t)\big|_{0_+}+A$

$$\longrightarrow\quad A=f(0_+)-f'(t)\big|_{0_+}$$

$$f(t)=f'(t)+[f(0_+)-f'(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

直流激励时： $f'(t)=f'(0_+)=f(\infty)$

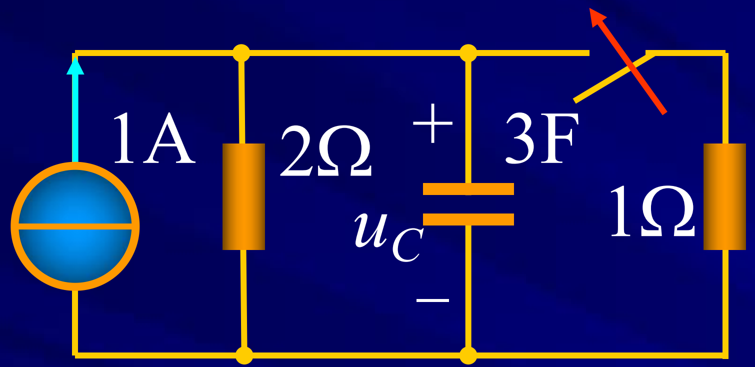
$$\rightarrow\quad f(t)=\mathrm{f}(\infty)+[\overbrace{f(0_+)-f(\infty)]\mathrm{e}}^{A}{}^{-\frac{t}{\tau}}$$

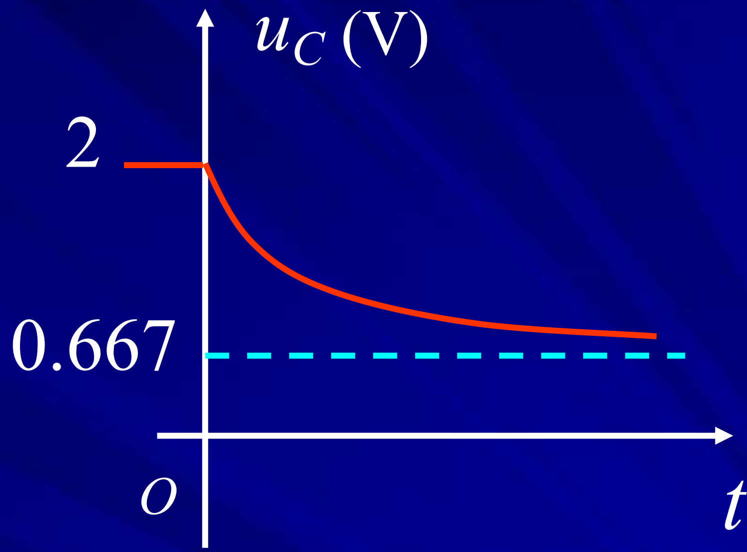
三要素

- $f(\infty)$ 稳态解 → 用 $t\rightarrow\infty$ 的稳态电路求解
- $f(0_+)$ 初始值 → 用 0_+ 等效电路求解
- τ 时间常数

注意 分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题。

例4-3 已知：t=0 时合开关，求换路后的 $u_C(t)$。





解

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$$

$$u_C(\infty) = \frac{2\times1}{2+1}\times1\text{V} = 0.667\text{V} \qquad \tau = R_{eq}C = \frac{2}{3}\times3\text{s} = 2\text{ s}$$

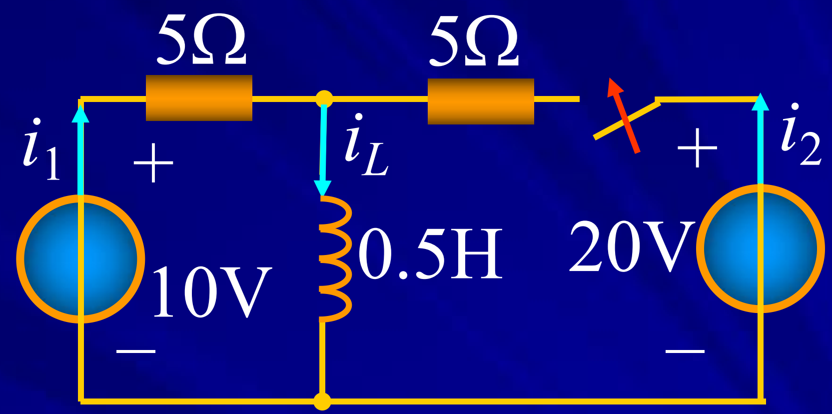
$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C = 0.667 + (2-0.667)\text{e}^{-0.5t}\text{V}$$

$$= (0.667 + 1.33\text{e}^{-0.5t}\ )\text{V} \quad t>0$$

例4-4 $t=0$时，开关闭合，求$t>0$后的i_L、i_1、i_2。

解法1　三要素为



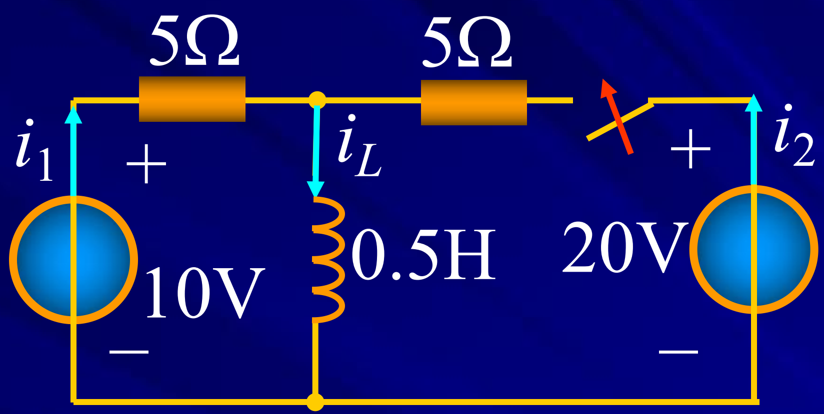
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{10}{5}\mathrm{A}=2\mathrm{A}$$

$$i_L(\infty)=(\frac{10}{5}+\frac{20}{5})\mathrm{A}=6\mathrm{A}$$

$$\tau=\frac{L}{R}=0.5/(\frac{5\times5}{5+5})\mathrm{s}=\frac{1}{5}\mathrm{s}$$

三要素公式　$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t)=[6+(2-6)\mathrm{e}^{-5t}]\mathrm{A}=(6-4\mathrm{e}^{-5t})\mathrm{A}\quad t>0$$



$$i_L(t)=[6+(2-6)\mathrm{e}^{-5t}]\mathrm{A}=(6-4\mathrm{e}^{-5t})\mathrm{A}\quad t>0$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=0.5\times(-4\mathrm{e}^{-5t})\times(-5)\mathrm{V}=10\mathrm{e}^{-5t}\mathrm{V}$$

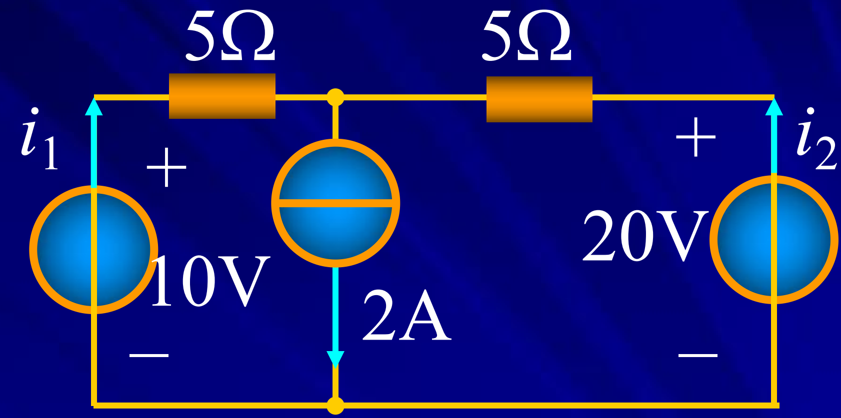
$$i_1(t)=(10-u_L)/5=(2-2\mathrm{e}^{-5t})\mathrm{A}$$

$$i_2(t)=(20-u_L)/5=(4-2\mathrm{e}^{-5t})\mathrm{A}$$

解法2　三要素为

$$i_L(0_+)=2\text{A} \qquad i_L(\infty)=6\text{A}$$

$$\tau = L/R = 1/5\text{s}$$



0_+ 等效电路

$$i_1(0_+)=[\frac{(10-20)}{10}+1]\text{A}=0\text{A}$$

$$i_1(\infty)=10/5\text{A}=2\text{A}$$

$$i_2(0_+)=[\frac{(20-10)}{10}+1]\text{A}=2\text{A}$$

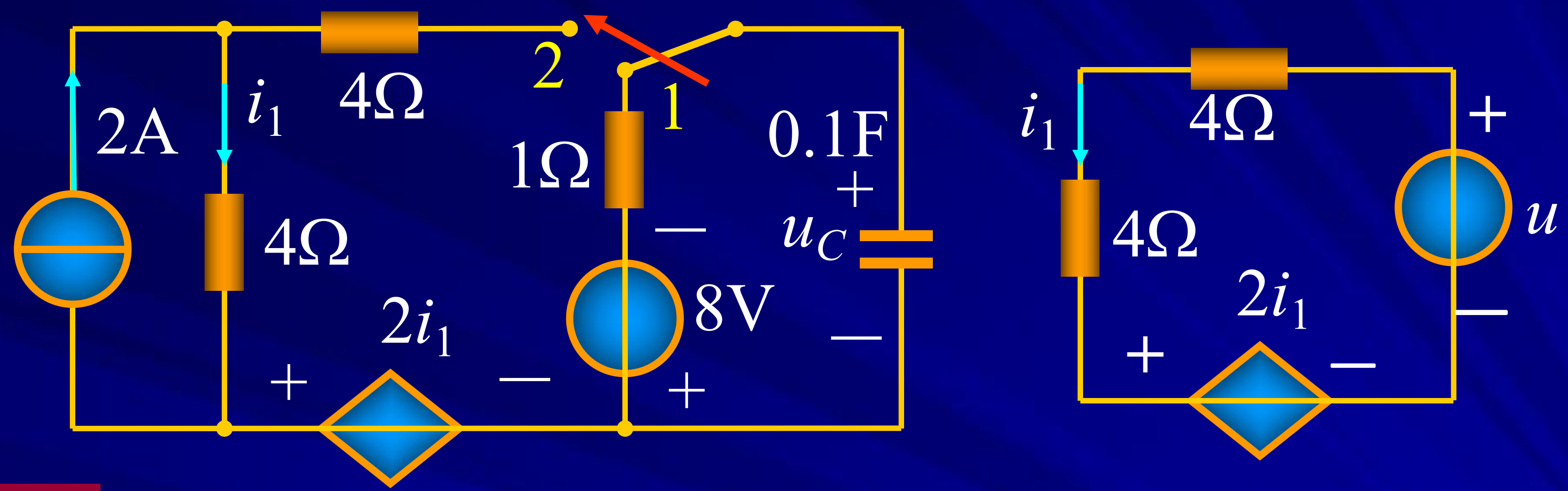
$$i_2(\infty)=20/5\text{A}=4\text{A}$$

$$i_L(t)=[6+(2-6)\text{e}^{-5t}]\text{A}=(6-4\text{e}^{-5t})\text{A} \quad t>0$$

$$i_1(t)=[2+(0-2)\text{e}^{-5t}]\text{A}=(2-2\text{e}^{-5t})\text{A}$$

$$i_2(t)=[4+(2-4)\text{e}^{-5t}]\text{A}=(4-2\text{e}^{-5t})\text{A}$$

例4-5已 知：t=0时开关由 1→2，求换路后的$u_C(t)$。



解 三要素为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = -8\text{V}$$

$$u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12\text{V}$$

$$u = 10i_1 \rightarrow R_{eq} = u / i_1 = 10\Omega$$

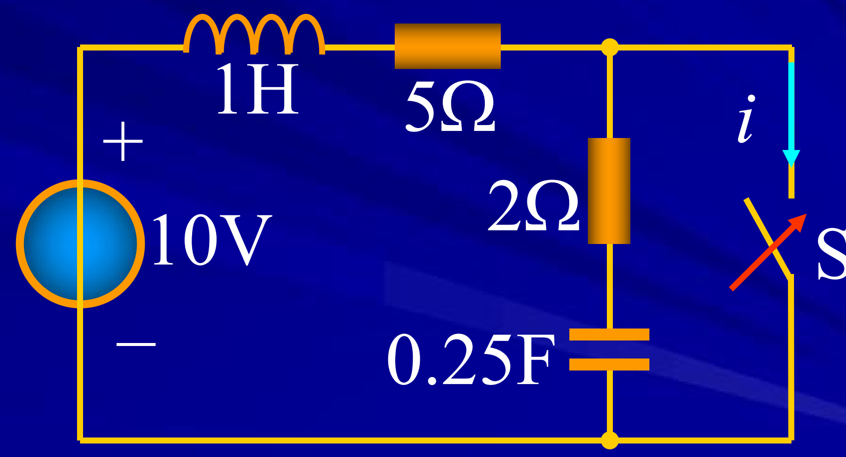
$$\tau = R_{eq}C = 10\times 0.1\text{s} = 1\text{s}$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = [12 + (-8-12)\text{e}^{-t}]\text{V} = (12 - 20\text{e}^{-t})\text{V}$$

例4-6已知：t=0时开关闭合，求换路后的电流$i(t)$。

解　三要素为



$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

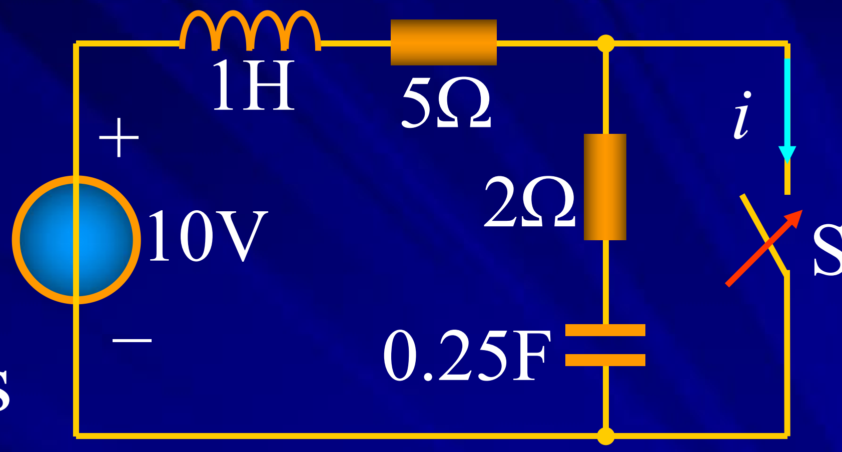
$$u_C(\infty) = 0$$

$$\tau_1 = R_{eq}C = 2\times 0.25\text{s} = 0.5\text{s}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

$$i_L(\infty)=10/5\text{A}=2\text{A}$$

$$\tau_2=L/R_{eq}=1/5\text{s}=0.2\text{s}$$

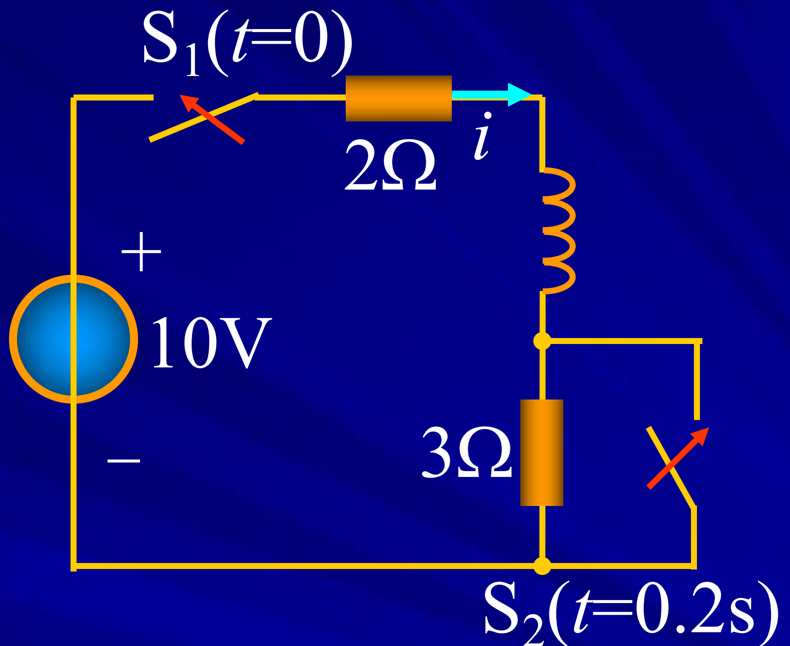


$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0^+)-u_C(\infty)]\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}=10\text{e}^{-2t}\text{V}$$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0^+)-i_L(\infty)]\text{e}^{-\frac{t}{\tau}}=2(1-\text{e}^{-5t})\text{A}$$

$$i(t)=i_L(t)+\frac{u_C(t)}{2}=[2(1-\text{e}^{-5t})+5\text{e}^{-2t}]\text{A}$$

例4-7　已知：电感无初始储能 $t=0$ 时合 S_1，$t=0.2s$ 时合 S_2，求两次换路后的电感电流 $i(t)$。



解　$0 < t < 0.2s$

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$\tau_1 = L/R = 1/5\text{s} = 0.2\ \text{s}$$

$$i(\infty) = 10/5\text{A} = 2\text{A}$$

$$i(t) = (2 - 2e^{-5t})\ \text{A}$$

$t > 0.2\text{s}$

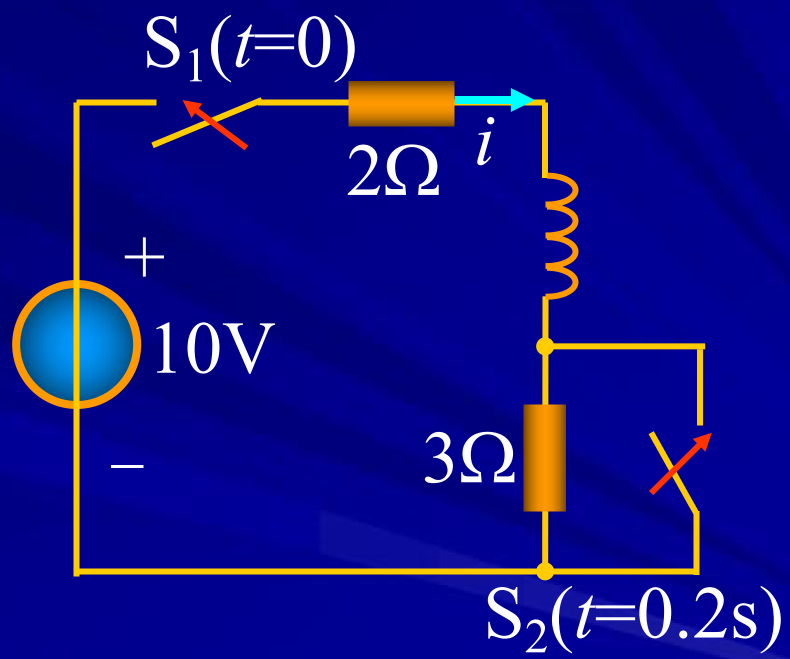
$$i(0.2_-) = (2 - 2e^{-5\times 0.2})\text{A} = 1.26\text{A}$$

$$i(0.2_+) = 1.26\text{A}$$

$$\tau_2 = L/R = 1/2\text{s} = 0.5\text{s}$$

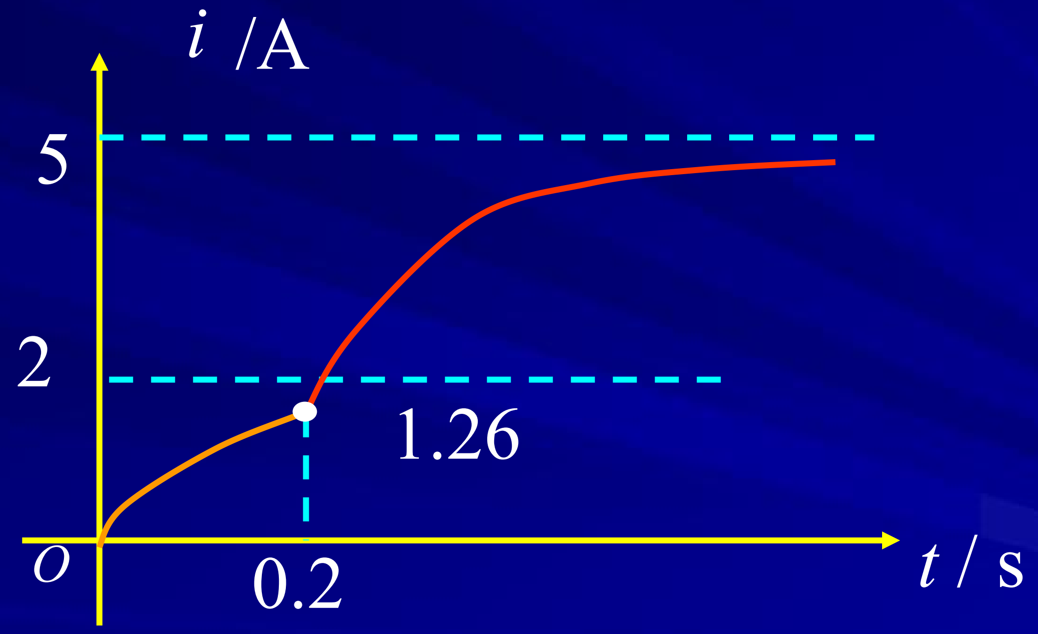
$$i(\infty) = 10/2\text{A} = 5\text{A}$$

$$i(t) = (5 - 3.74e^{-2(t-0.2)})\ \text{A}$$



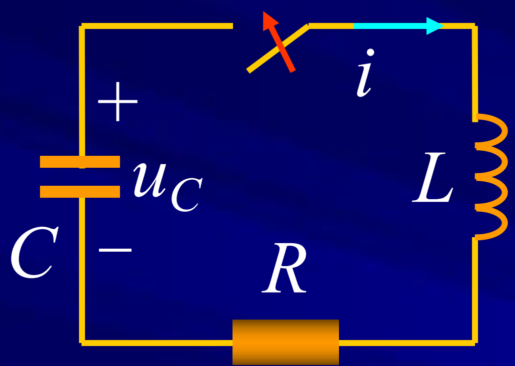
$$i = (2 - 2e^{-5t})\text{A} \qquad (0 < t < 0.2\text{s})$$

$$i = (5 - 3.74e^{-2(t-0.2)})\text{A} \qquad (t > 0.2\text{s})$$



7-5 二阶电路的零输入响应

1. 二阶电路的零输入响应



已 知: $u_C(0_+)=U_0 \quad i(0_+)=0$

电路方程: $Ri+u_L-u_C=0$

$$i=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

以电容电压为变量: $$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

以电感电流为变量: $$LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i=0$$

以电容电压为变量时的初始条件:

$$u_C(0_+)=U_0 \quad i(0_+)=0 \rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=0$$

以电感电流为变量时的初始条件:

$$i(0_+)=0 \qquad u_C(0_+)=U_0 \rightarrow$$

$$u_C(0_+)=u_L(0_+)=L\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=U_0 \rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\frac{U_0}{L}$$

电路方程:

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

特征方程:

$$LCp^2+RCp+1=0$$

特征根: $p=\dfrac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}=-\dfrac{R}{2L}\pm\sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2-\dfrac{1}{LC}}$

2. 零状态响应的三种情况

$R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$　二个不等负实根　过阻尼

$R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$　二个相等负实根　临界阻尼

$R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$　二个共轭复根　欠阻尼

$$(1)\ R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$u_C(0_+) = U_0 \rightarrow A_1 + A_2 = U_0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{(0_+)} \rightarrow p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0$$

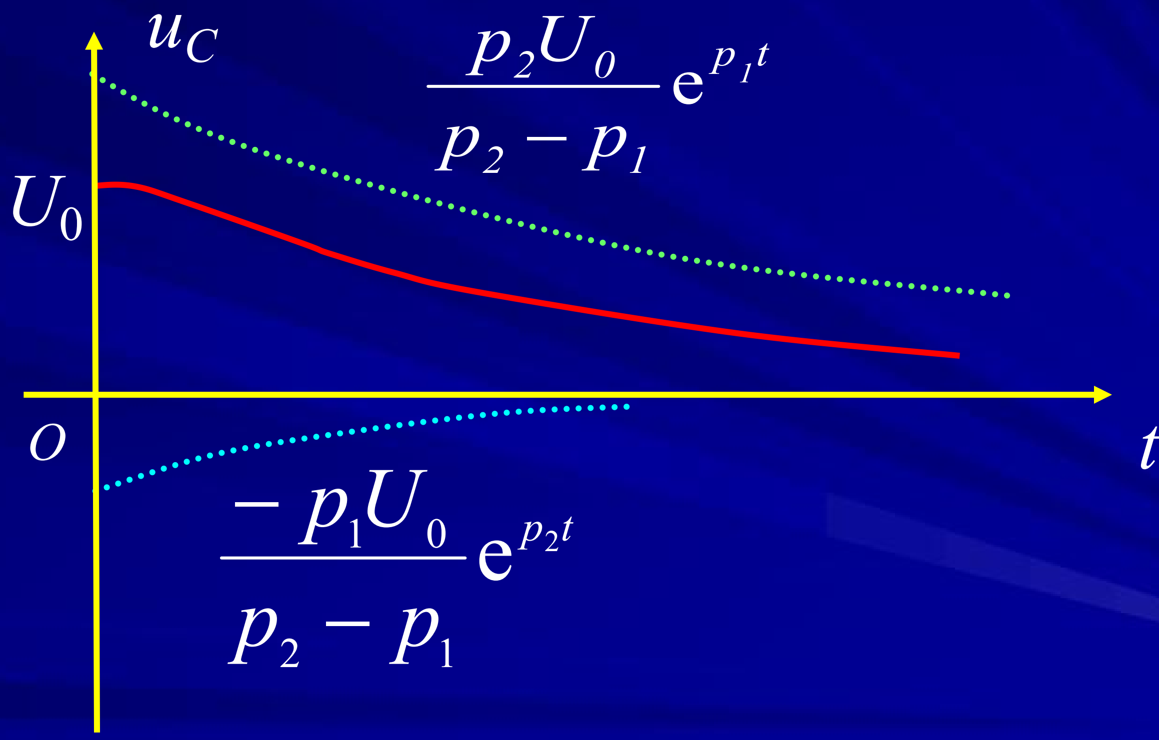
$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{p_2}{p_2 - p_1} U_0 \\ A_2 = \dfrac{-p_1}{p_2 - p_1} U_0 \end{cases}$$

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

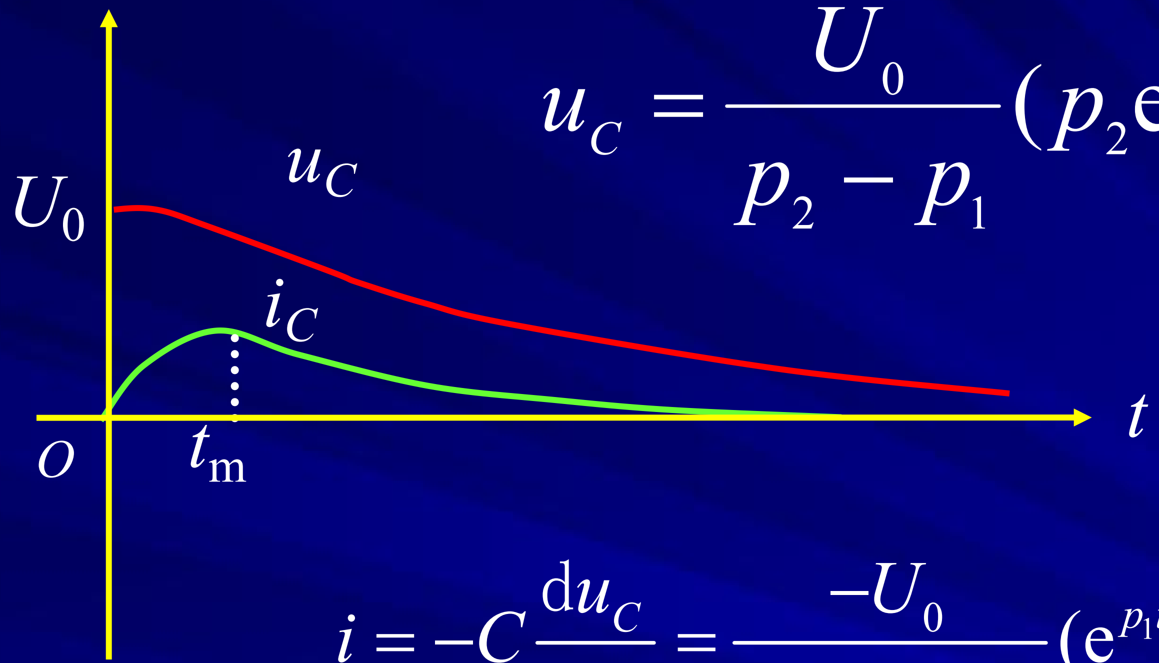
①电容电压

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right)$$

设 $|p_2|>|p_1|$



②电容和电感电流



$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

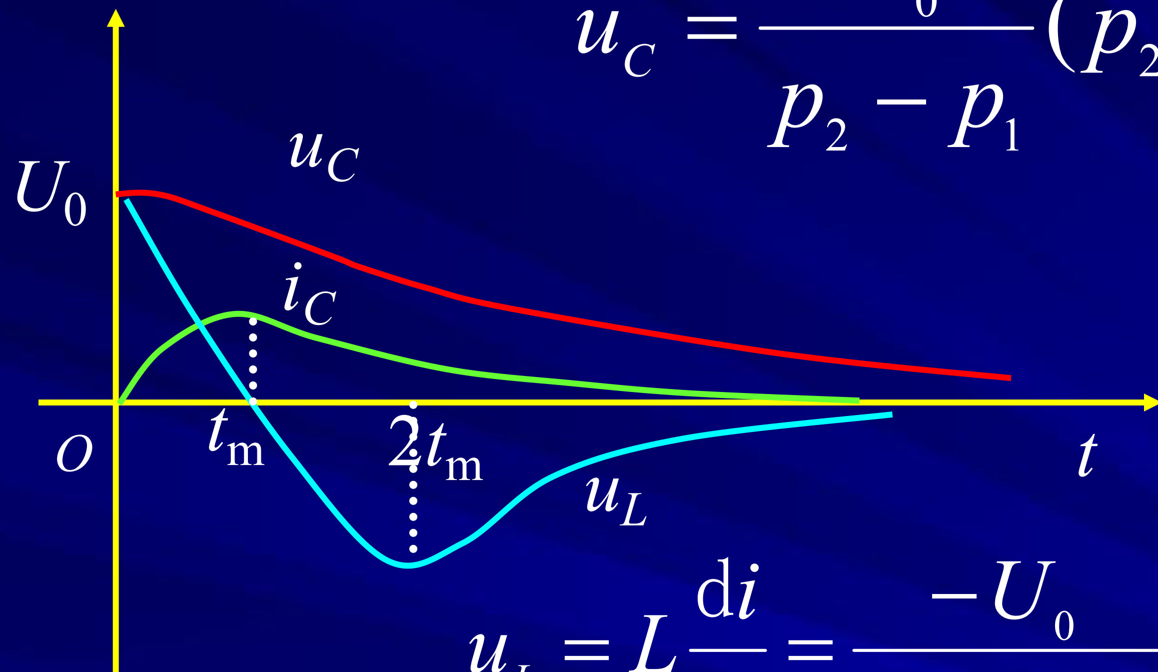
$$i = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{-U_0}{L(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

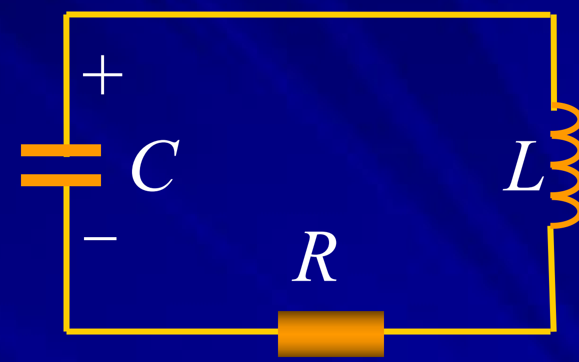
$t=0_+$　$i_C=0$，$t=\infty$　$i_C=0$

$i_C>0$　$t = t_m$时i_C最大

③电感电压

$$u_C=\frac{U_0}{p_2-p_1}(p_2\mathrm{e}^{p_1t}-p_1\mathrm{e}^{p_2t})$$





$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{-U_0}{(p_2-p_1)}(p_1\mathrm{e}^{p_1t}-p_2\mathrm{e}^{p_2t})$$

$t=0,\ u_L=U_0\quad t=\infty,\ u_L=0$

$0<t<t_\mathrm{m}$，i 增加，$u_L>0$，$t>t_\mathrm{m}$ i 减小，$u_L<0$

$t=2\,t_\mathrm{m}$时 $|u_L|$最大

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{-U_0}{(p_2 - p_1)}(p_1\mathrm{e}^{p_1 t} - p_2\mathrm{e}^{p_2 t})$$

$i_C=i$ 为极值时，即 $u_L=0$ 时的 t_m 计算如下：

$$(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) = 0 \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\mathrm{e}^{p_1 t_\mathrm{m}}}{\mathrm{e}^{p_2 t_\mathrm{m}}}$$

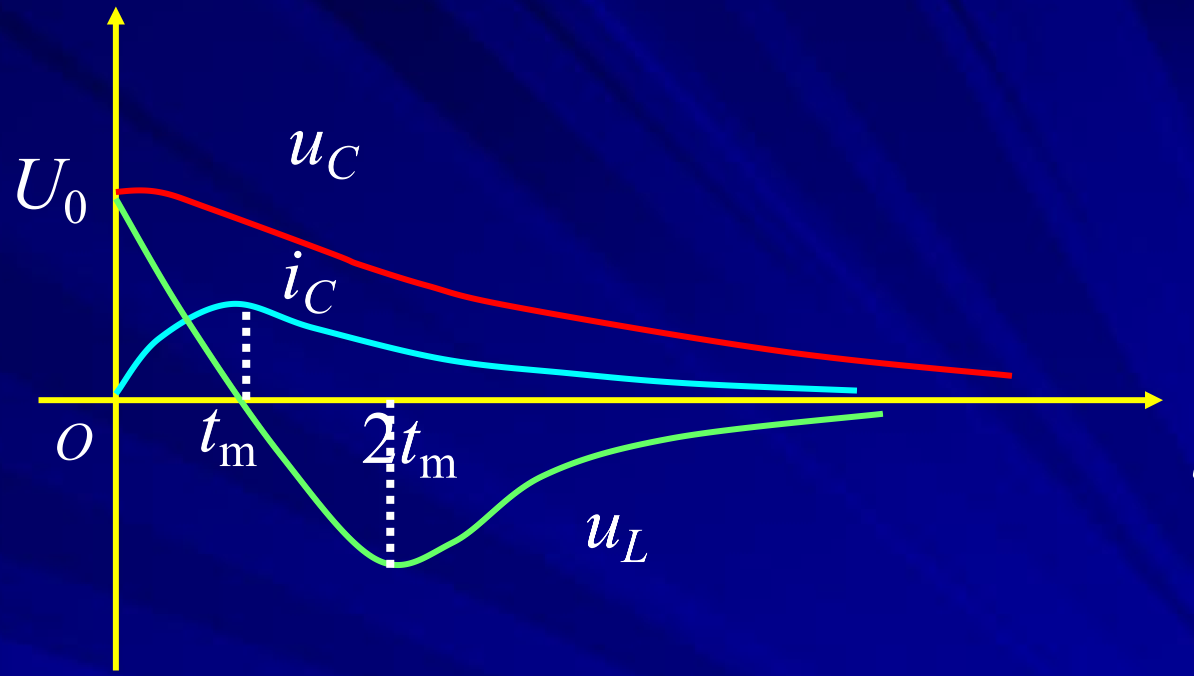
$$t_\mathrm{m} = \frac{\ln(\frac{p_2}{p_1})}{p_1 - p_2}$$

由 $\mathrm{d}u_L/\mathrm{d}t$ 可确定 u_L 为极小时的 t 。

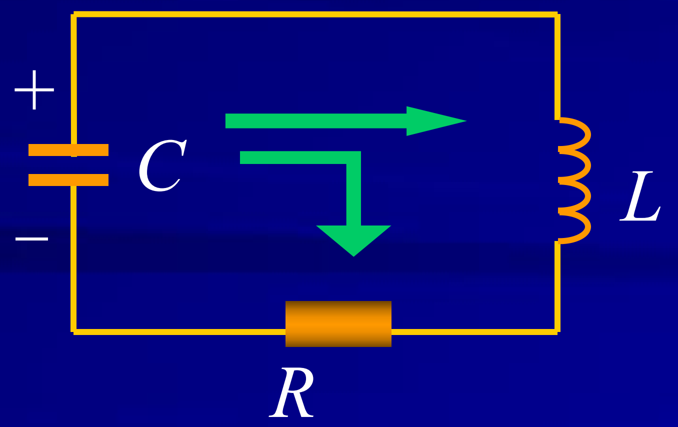
$$(p_1^{\ 2}\mathrm{e}^{p_1 t} - p_2^{\ 2}\mathrm{e}^{p_2 t}) = 0$$

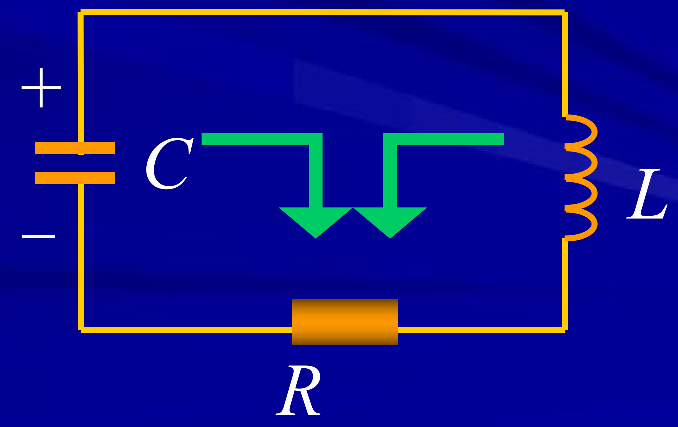
$$\rightarrow \quad t = 2t_\mathrm{m} \qquad t = \frac{2\ln(\frac{p_2}{p_1})}{p_1 - p_2}$$

④能量转换关系



$0 < t < t_m$　u_C减小，i增加。$t > t_m$　u_C减小，i减小。





(2) $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

共轭复根

令：$\delta = \dfrac{R}{2L}$（衰减系数），$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$（谐振角频率）

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$（固有振荡角频率）　$p = -\delta \pm \mathrm{j}\omega$

u_C 的解答形式:

$$u_C = A_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{p_2 t} = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + A_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

经常写为:

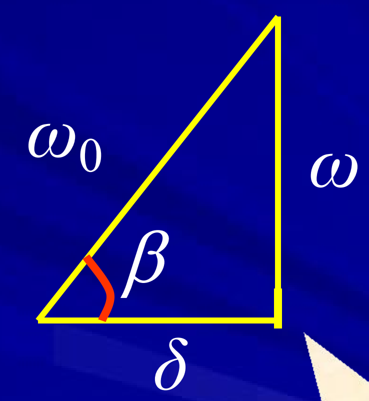
$$u_C = A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件

$$\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 \rightarrow A\sin\beta = U_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 \rightarrow A(-\delta)\sin\beta + A\omega\cos\beta = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{U_0}{\sin\beta} \quad , \quad \beta = \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right)$$



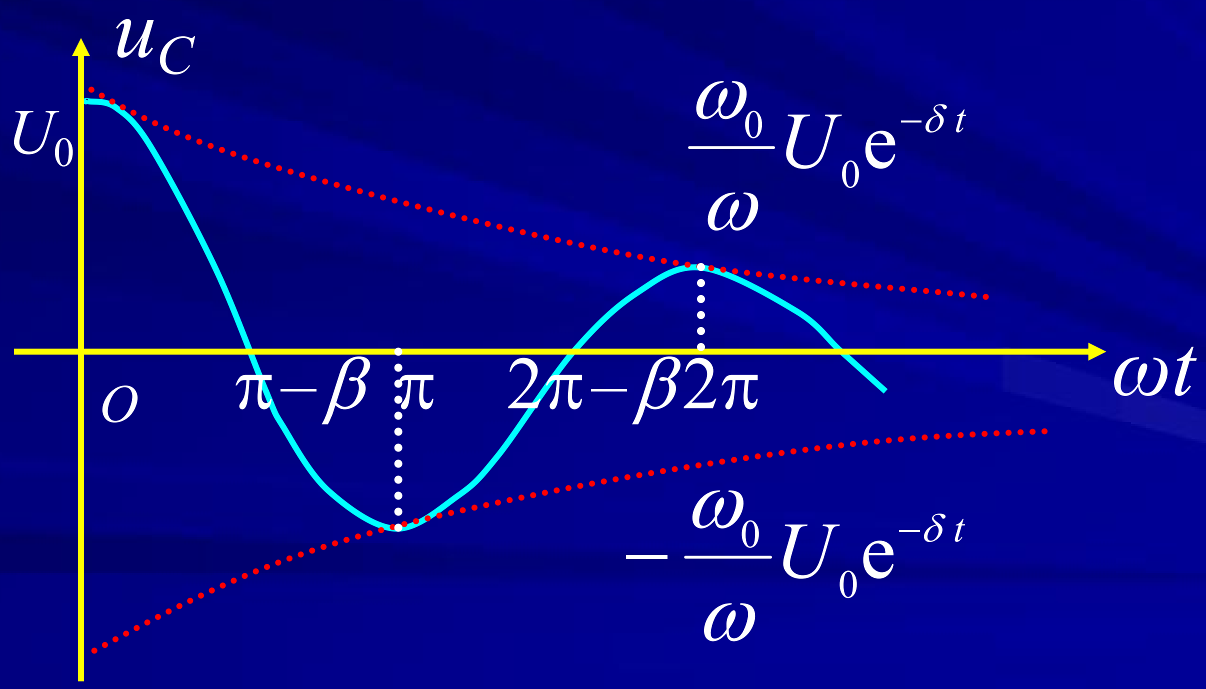
$$\sin\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad A = \frac{\omega_0}{\omega} U_0$$

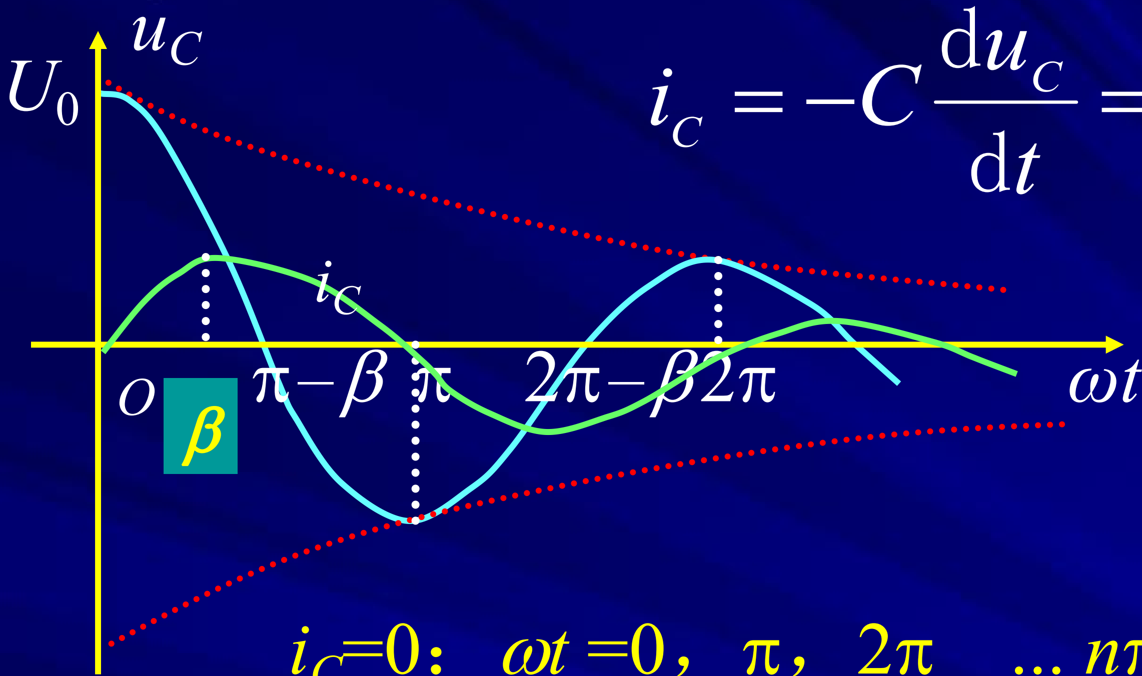
ω, ω_0 , δ的关系

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

u_C是振幅以$\pm\frac{\omega_0}{\omega}U_0$为包络线依指数衰减的正弦函数。

t=0 时 $u_C=U_0$　　u_C=0：$\omega t = \pi-\beta$，$2\pi-\beta$ ... $n\pi-\beta$





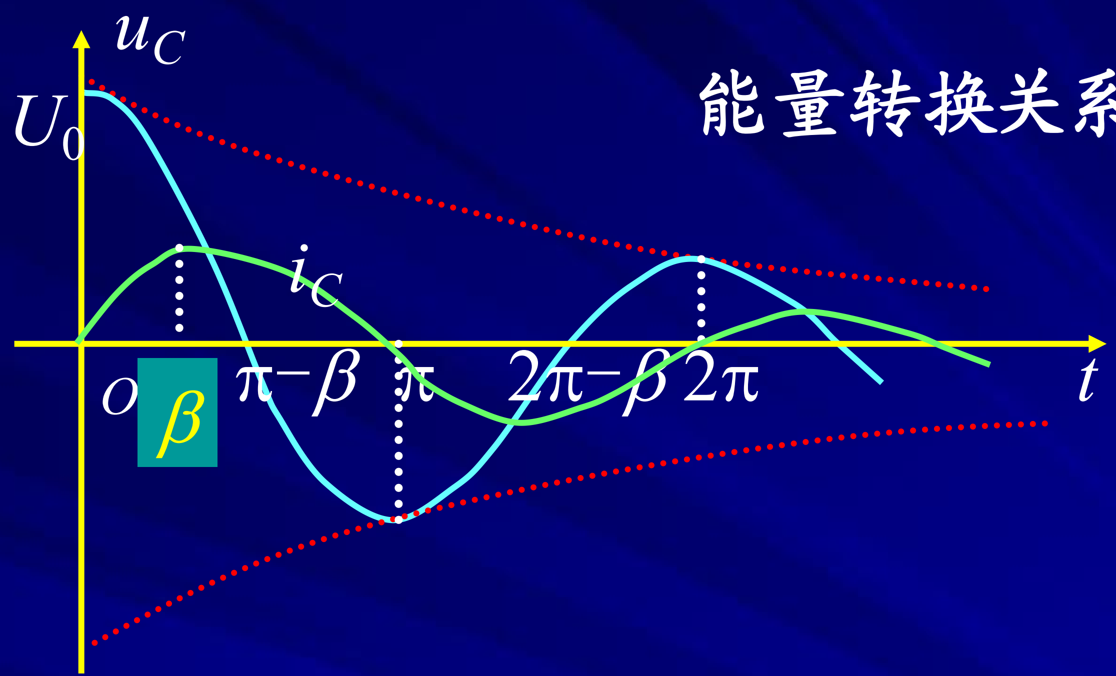
$$i_C = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t)$$

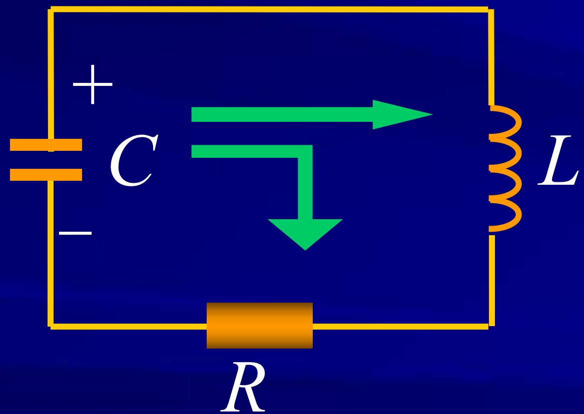
$i_C=0$： $\omega t=0$， π， 2π … $n\pi$ ，为 u_C极值点，
i_C的极值点为 u_L零点。

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{\omega}U_0\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t-\beta)$$

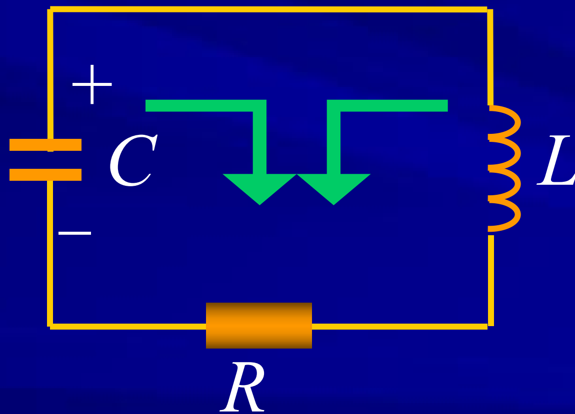
$u_L=0$： $\omega t=\beta$， $\pi+\beta$， $2\pi+\beta$ … $n\pi+\beta$

能量转换关系：

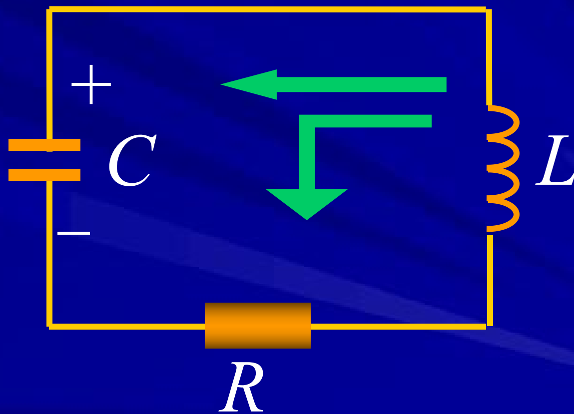




$0 < \omega t < \beta$



$\beta < \omega t < \pi-\beta$



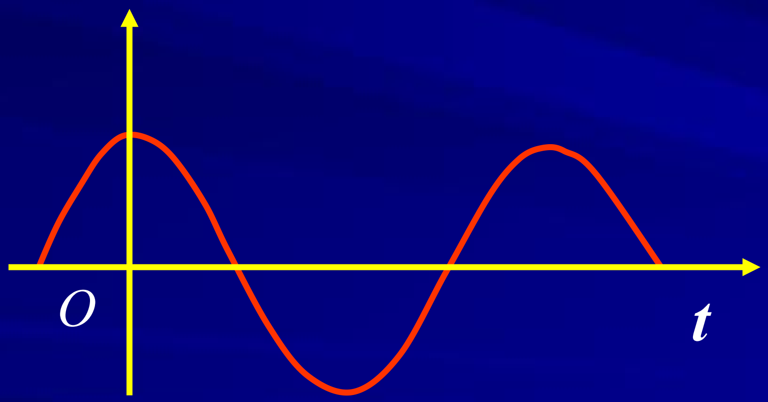
$\pi-\beta < \omega t < \pi$

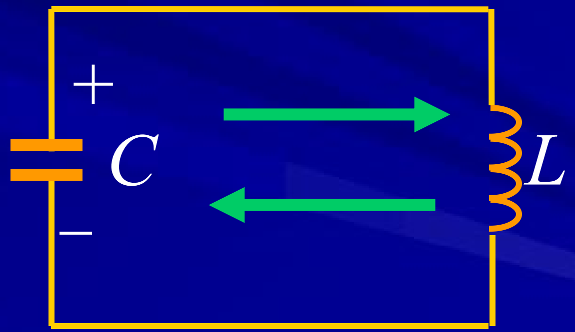
特例：R=0 时　$\delta=0$ ，$\omega=\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$

$$u_C=U_0\sin(\omega t+90^\circ)=u_L$$

$$i=\frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t)$$

→ 等幅振荡





$$\boxed{(3)\ R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

相等负实根

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

由初始条件 $\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 \rightarrow A_1 = U_0 \\ \dfrac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A_1(-\delta) + A_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = U_0 \delta \end{cases}$$

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

$$A_1 = U_0 \qquad A_2 = U_0 \delta$$

$$\left.\begin{aligned} u_C &= U_0 e^{-\delta t}(1+\delta t) \\ i_C &= -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \\ u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_0 e^{-\delta t}(1-\delta t) \end{aligned}\right\} \text{非振荡放电}$$

小结

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 过阻尼，非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 临界阻尼，非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

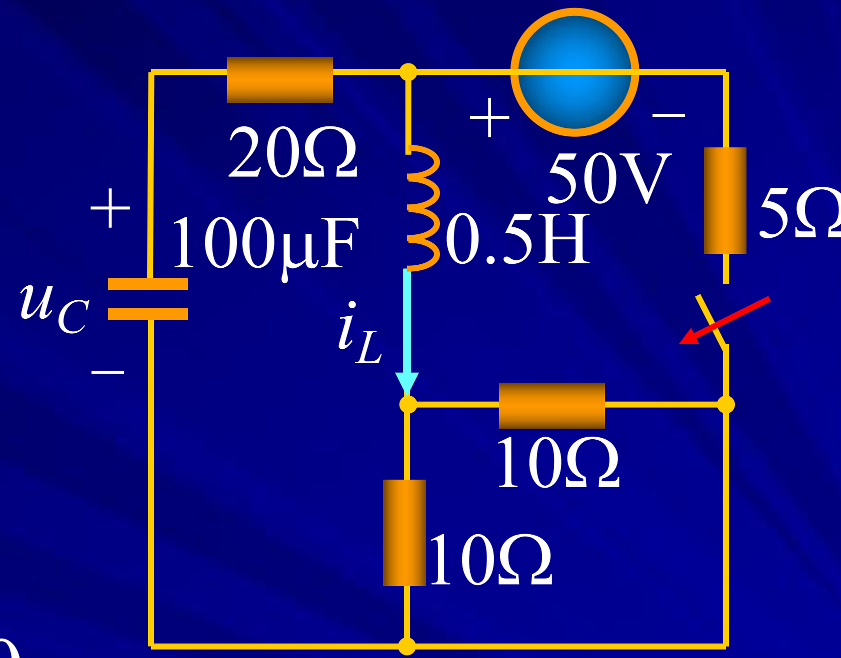
$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 欠阻尼，振荡放电

$$u_C = A e^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件 $\begin{cases} u_C(0_+) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+) \end{cases}$ 定常数

可推广应用于一般二阶电路

例5-1 电路如图，t=0时打开开关。求u_C并画出其变化曲线。



解 （1） $u_C(0_-)=25\text{V}$

$i_L(0_-)=5\text{A}$

（2）开关打开为RLC串联电路，方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

特征方程为 $50p^2+2500p+10^6=0$

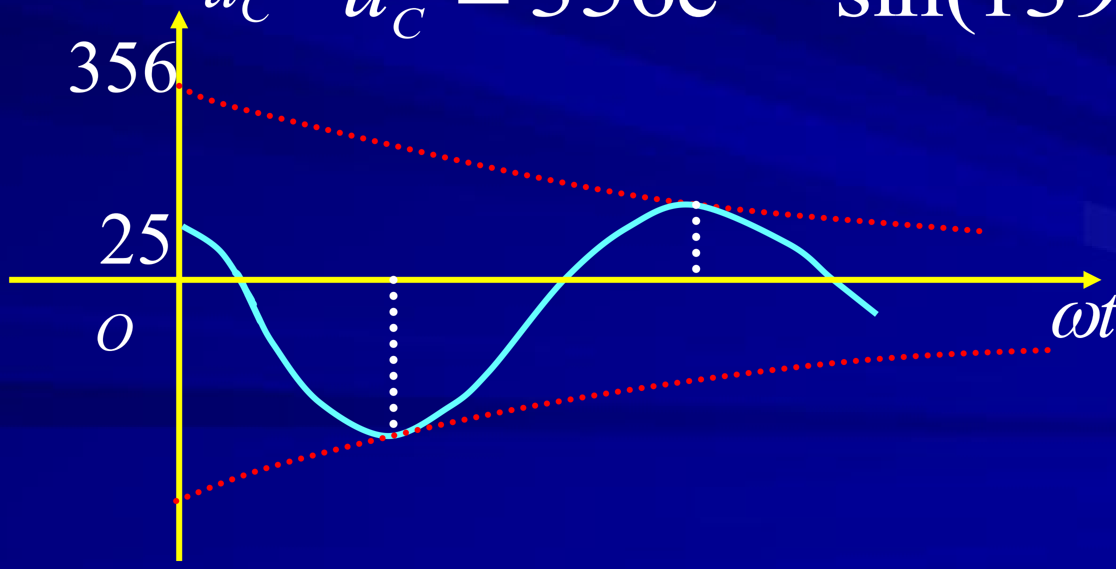
$$p=-25\pm \mathrm{j}139 \qquad u_C=A\mathrm{e}^{-25t}\sin(139t+\beta)$$

$$u_C = A\mathrm{e}^{-25t}\sin(139t+\beta)$$

(3) $\begin{cases} u_C(0_+) = 25 \\ C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{0_+} = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A\sin\beta = 25 \\ A(139\cos\beta - 25\sin\beta) = \dfrac{-5}{10^{-4}} \end{cases}$

$$A = 356,\quad \beta = 176^\circ$$

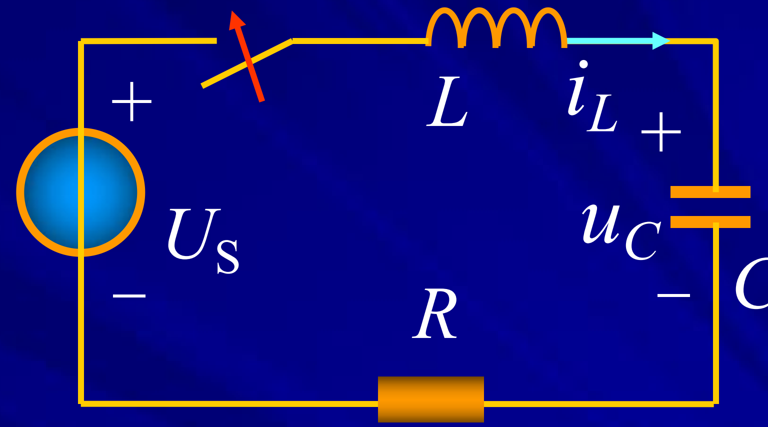
$$u_C = 356\mathrm{e}^{-25t}\sin(139t + 176^\circ)\mathrm{V}$$



7-6 二阶电路的零状态响应和全响应

1. 二阶电路的零状态响应

$u_C(0_-)=0$， $i_L(0_-)=0$



微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$$u_C=u_C'+u_C''$$

特解　　通解

特征方程为

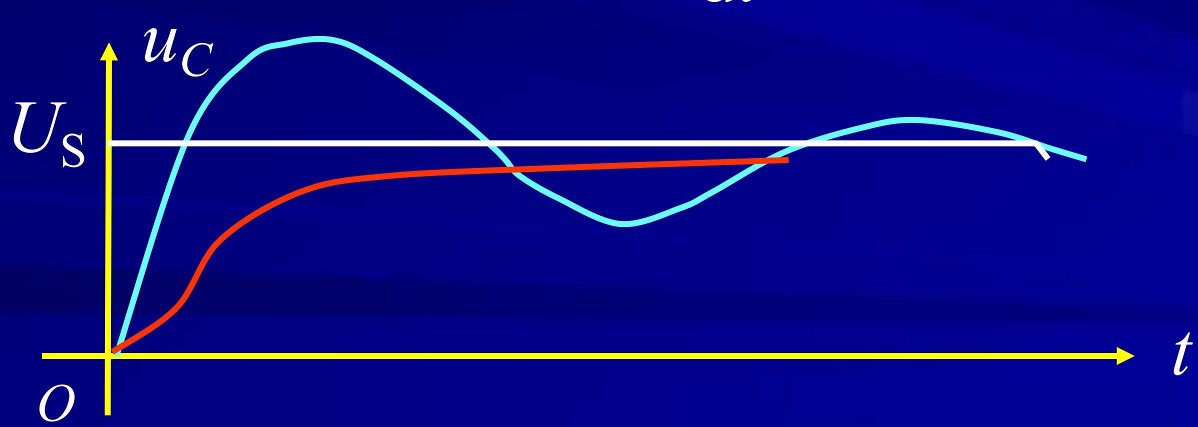
$$LCp^2+RCp+1=0$$

特解: $u_C'=U_S$

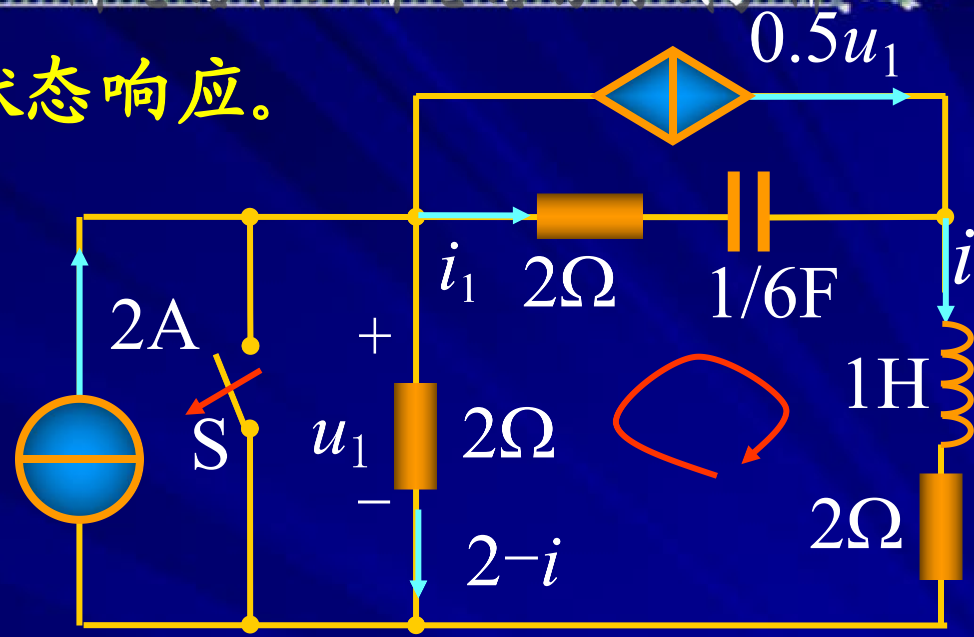
u_C解答形式为

$$\begin{cases} u_C = U_s + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} & (p_1 \neq p_2) \\ u_C = U_s + A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} & (p_1 = p_2 = -\delta) \\ u_C = U_s + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) & (p_{1、2} = -\delta \pm j\omega) \end{cases}$$

由初值 $u_C(0_+)$，$\dfrac{\mathrm{d}u(0_+)}{\mathrm{d}t}$ 确定两个常数



例6-1 求电流 i 的零状态响应。



解 首先写微分方程。

$$i_1 = i - 0.5\,u_1$$

$$= i - 0.5(2 - i)\times 2$$

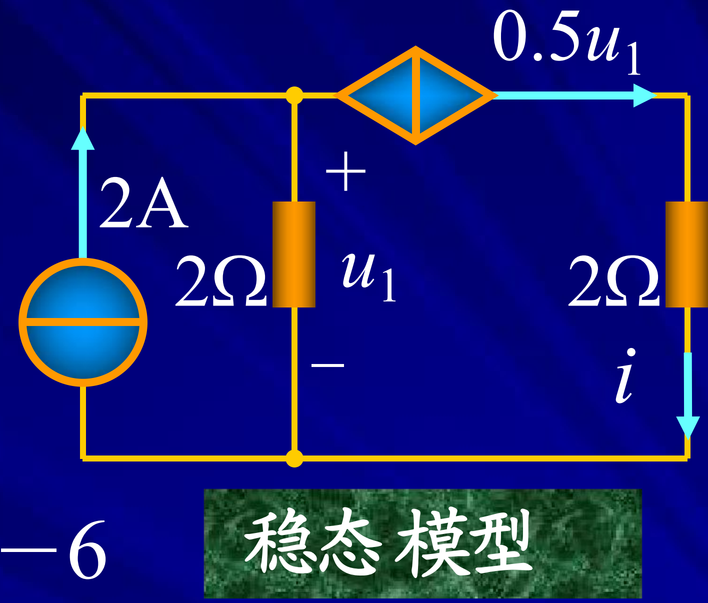
$$= 2i - 2$$

由KVL得 $2(2-i) = 2i_1 + 6\int i_1 \mathrm{d}t + \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2i$

整理得 $$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 12i = 12$$

二阶非齐次常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+8\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+12i=12$$



解答形式为 $i=i'+i''$

第二步求通解 i''。

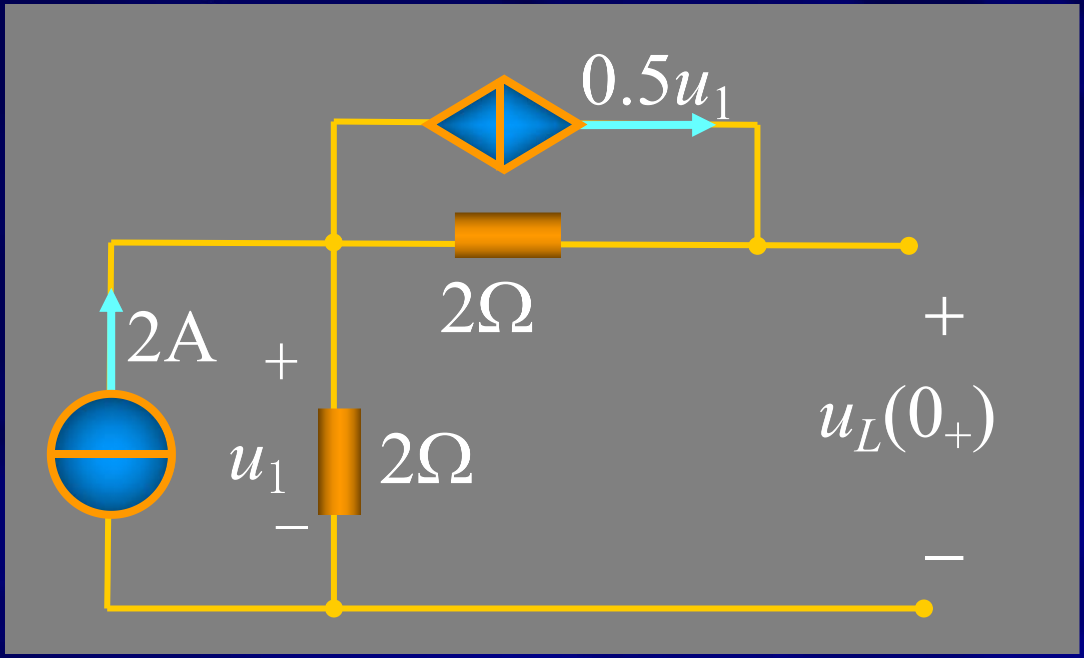
特征根为 $p_1=-2$ ，$p_2=-6$

$$i''=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-6t}$$

第三步求特解 i'。

由稳态模型有 $i'=0.5\,u_1$ $\qquad u_1=2(2-0.5u_1)$

$\longrightarrow$ $u_1=2\mathrm{V}$ $\qquad i'=1\mathrm{A}$



第四步定常数

$$i = 1 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

$$\begin{cases} i(0_+) = i(0_-) = 0 \\ L\dfrac{di}{dt}(0_+) = u_L(0_+) \end{cases}$$

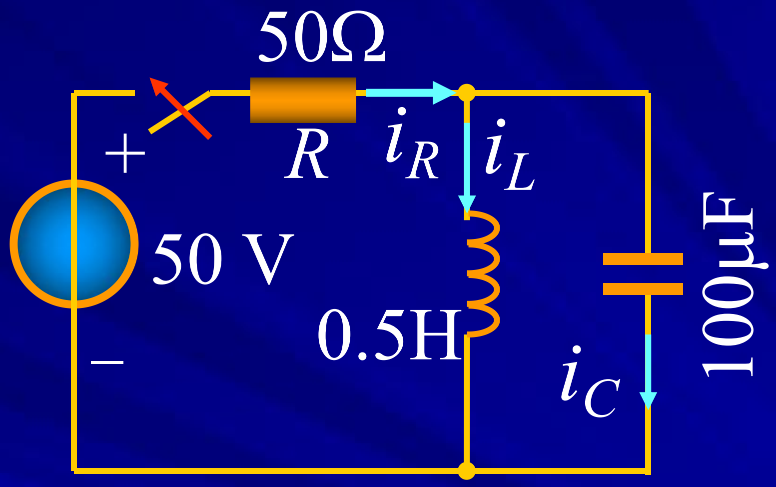
由 0_+电路模型得 $u_L(0_+) = 0.5u_1 \times 2 + u_1 = 2u_1 = 8\text{V}$

$$\begin{cases} 0 = 1 + A_1 + A_2 \\ 8 = -2A_1 - 6A_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 0.5 \\ A_2 = -1.5 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad i = (1 + 0.5e^{-2t} - 1.5e^{-6t}) \quad \text{A}$$

2. 二阶电路的全响应

例6-2 已知：$i_L(0_-)=2\text{A}$　$u_C(0_-)=0$　求：i_L，i_R。



解　(1) 列微分方程

应用节点法：

$$\frac{L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}-50}{R}+i_L+LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}=0$$

$$RLC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=50$$

(2) 求特解

$$i'_{\mathrm{L}}=1\text{A}$$

$$RLC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri_L=50$$

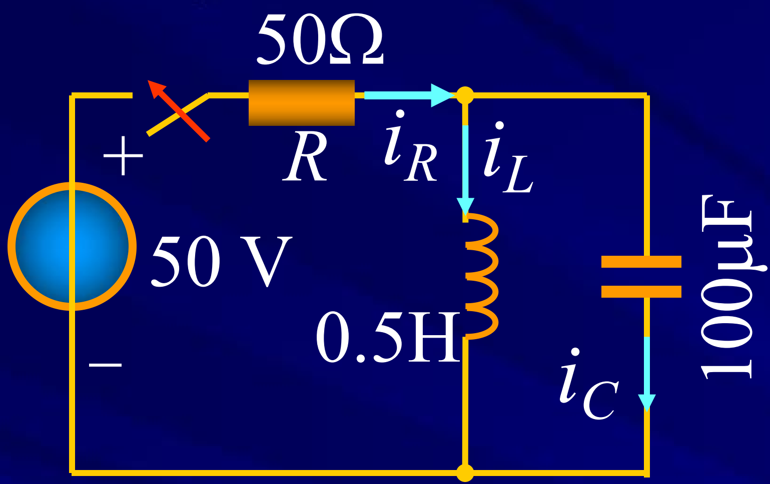
(3)求通解　特征方程为　$p^2+200p+20000=0$

特征根为　$p=-100\pm \mathrm{j}100$

$$\rightarrow\quad i=1+A\mathrm{e}^{-100t}\sin(100t+\varphi)$$

(4)定常数
$$\begin{cases}1+A\sin\varphi=2 & \leftarrow i_L(0_+)\\ 100A\cos\varphi-100A\sin\varphi=0 & \leftarrow u_L(0_+)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi=45^\circ\\ A=\sqrt{2}\end{cases}\quad\rightarrow\quad i_L=1+\sqrt{2}\mathrm{e}^{-100t}\sin(100t+45^\circ)$$



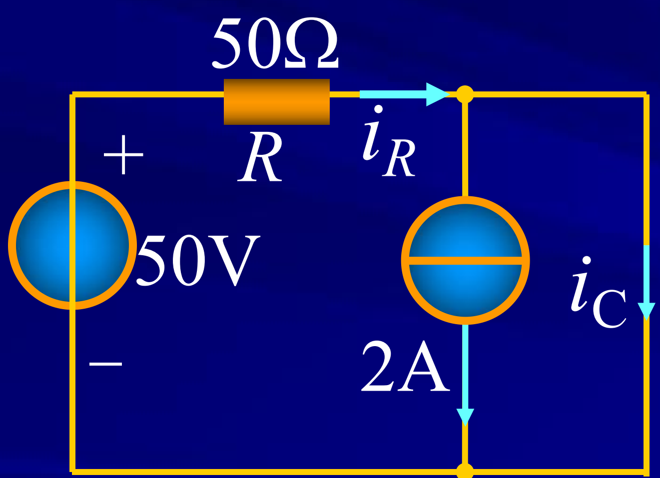
（5）求 i_R

$$i_R = i_L + i_C = i_L + LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$$

或设解答形式为

$$i_R = 1 + Ae^{-100t}\sin(100t + \varphi)$$

定常数



$$\begin{cases} i_R(0_+) = 1 \quad i_C(0_+) = -1 \\ \dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}(0_+) = ? \quad i_R = \dfrac{50 - u_C}{R} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}(0_+) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+) = -\frac{1}{RC}i_C(0_+) = 200$$

$$i_R = 1 + A\mathrm{e}^{-100t}\sin(100t + \varphi)$$

$$\begin{cases} 1 + A\sin\varphi = 1 \\ 100A\cos\varphi - 100A\sin\varphi = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 2 \end{cases}$$

小结

1. 二阶电路含二个独立储能元件，是用二阶常微分方程所描述的电路。

2. 二阶电路的性质取决于特征根，特征根取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

$$p = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$\delta > \omega_0$ 过阻尼，非振荡放电 $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

$\delta = \omega_0$ 临界阻尼，非振荡放电 $u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$

$\delta < \omega_0$ 欠阻尼，振荡放电 $u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$

3. 求二阶电路全响应的步骤

①列写 $t>0$电路的微分方程。

②求通解。

③求特解。

④全响应=强制分量+自由分量。

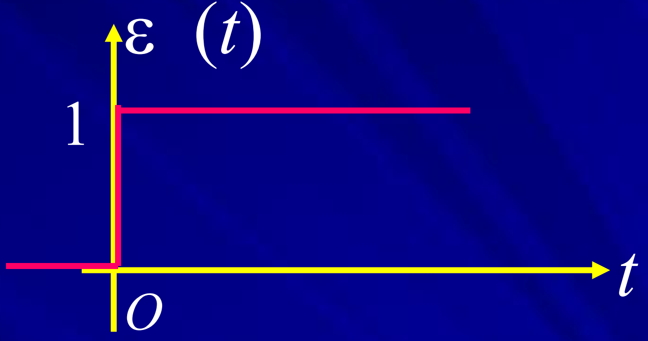
⑤由初始值 $\left.\begin{matrix} f(0_+) \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0_+) \end{matrix}\right\rangle$ 定常数。

7-7 一阶电路和二阶电路的阶跃响应

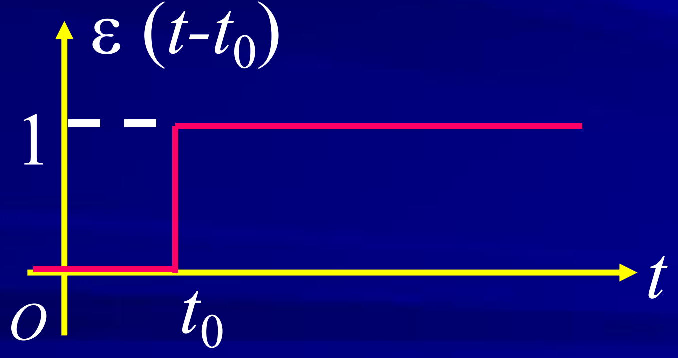
1. 单位阶跃函数

● 定义

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$



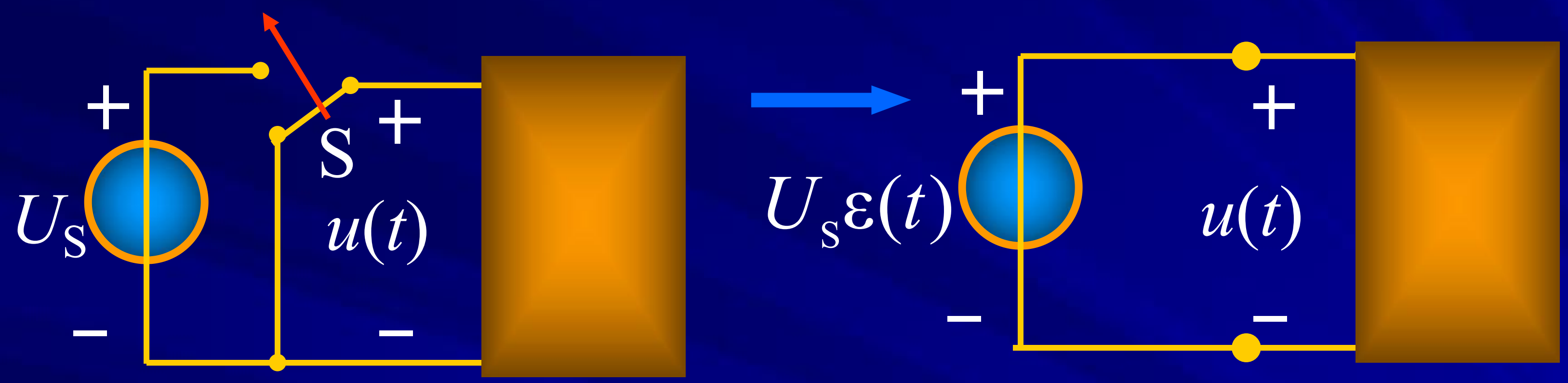
● 单位阶跃函数的延迟



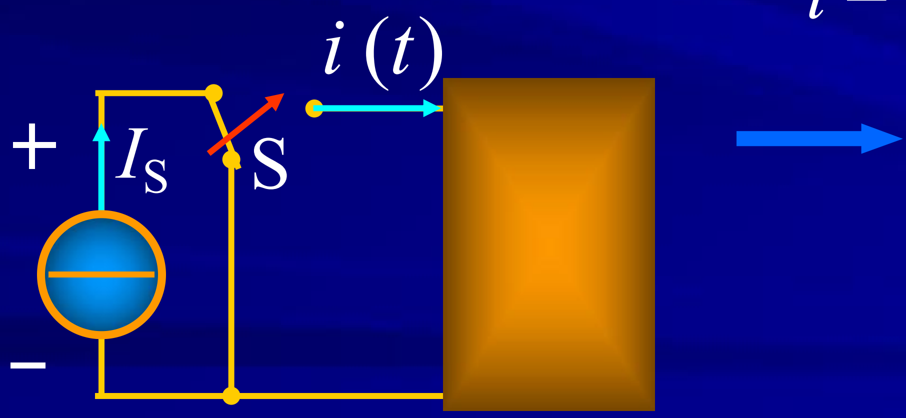
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

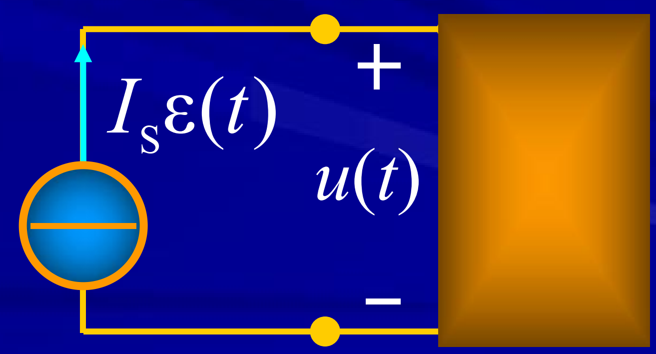
● 单位阶跃函数的作用

①在电路中模拟开关的动作。$t=0$ 合闸 $u(t)=U_S\varepsilon(t)$

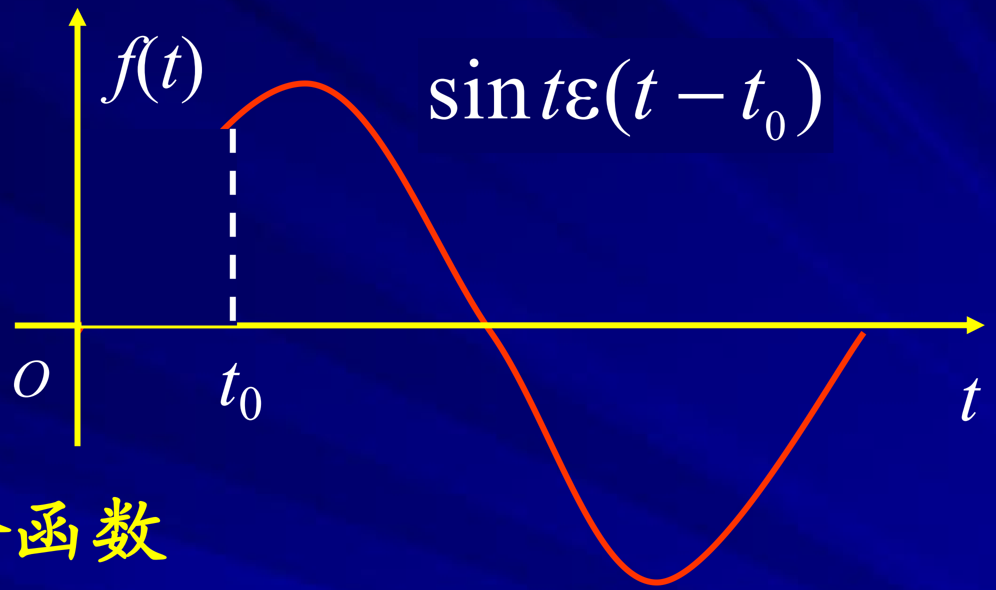


$t=0$ 合闸 $i(t)=I_S\varepsilon(t)$

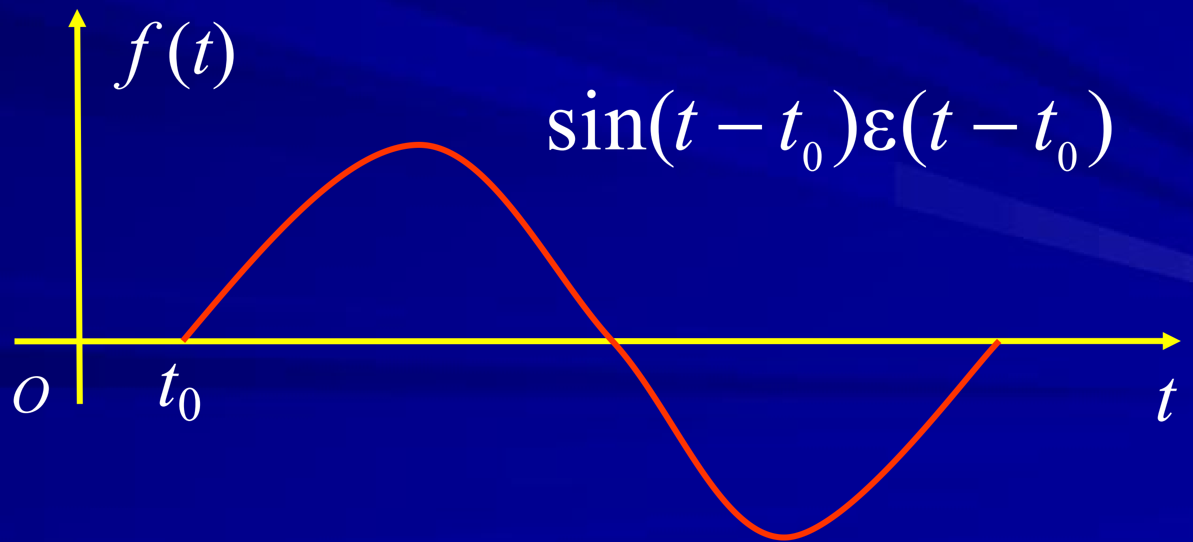




②起始一个函数

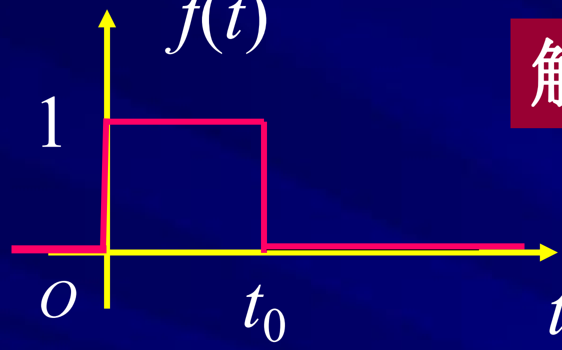


③延迟一个函数

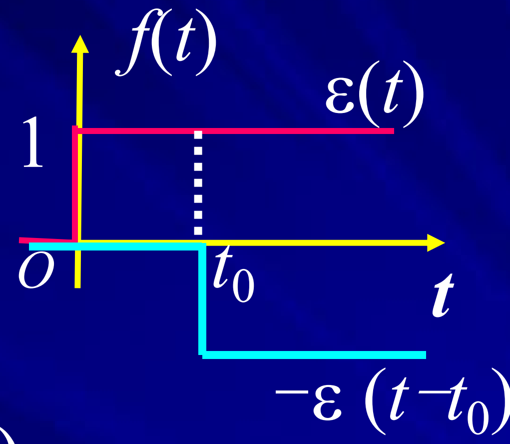


● 用单位阶跃函数表示复杂的信号

例7- 1



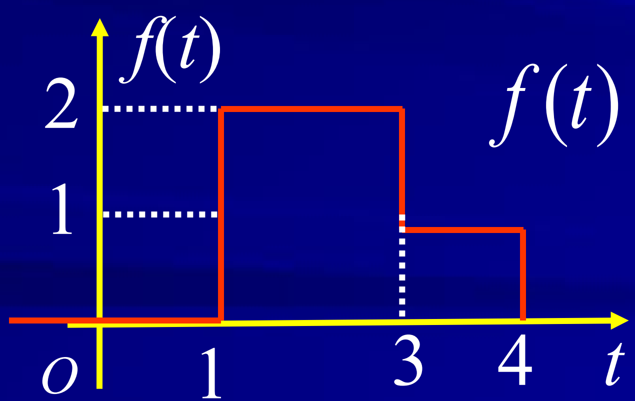
解



$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

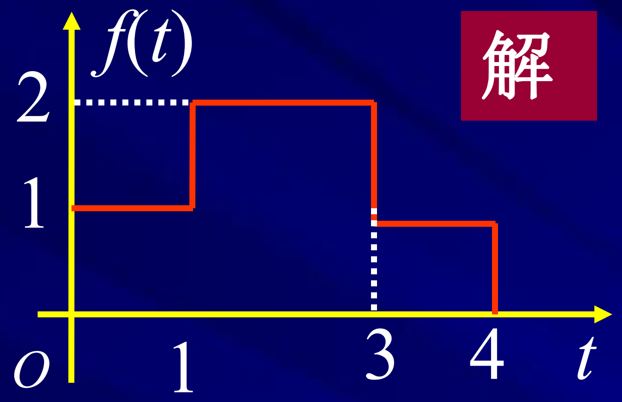
例7- 2

解



$$f(t)=2\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)$$

例7- 3

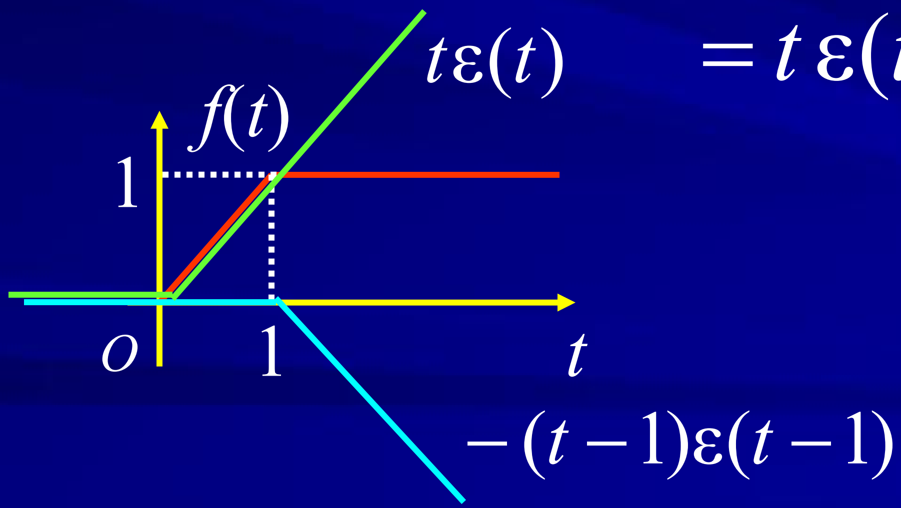


解 $f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)$

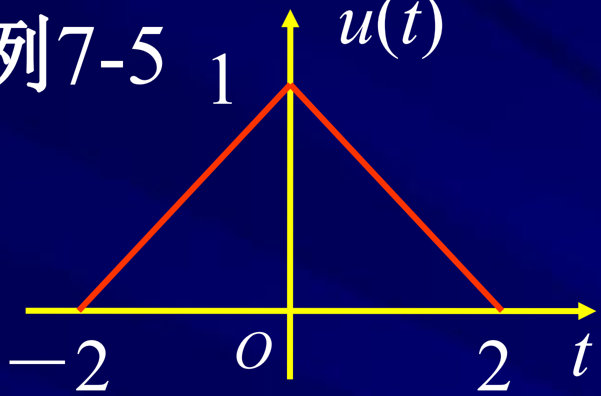
例7-4

解 $f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\varepsilon(t-1)$

$=t\,\varepsilon(t)-(t-1)\,\varepsilon(t-1)$



例7-5



已知电压$u(t)$的波形如图，试画出下列电压的波形。

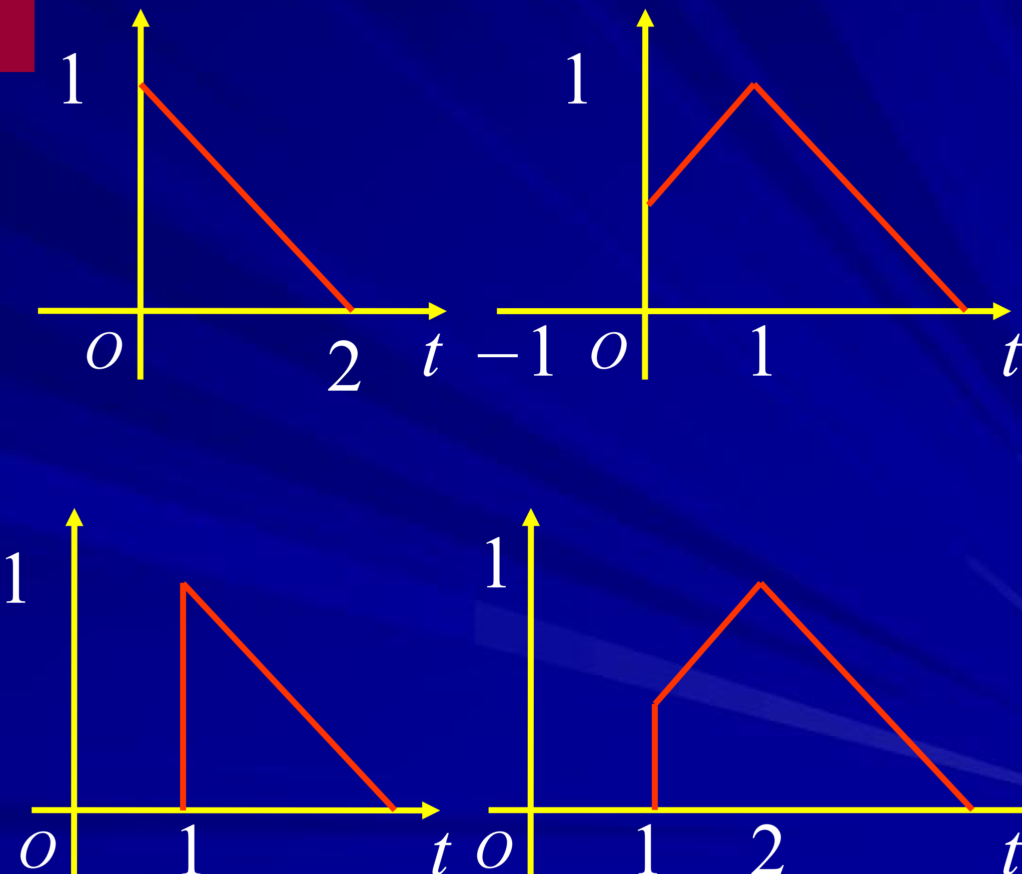
(1) $u(t)\varepsilon(t)$

(2) $u(t-1)\varepsilon(t)$

(3) $u(t-1)\varepsilon(t-1)$

(4) $u(t-2)\varepsilon(t-1)$

解

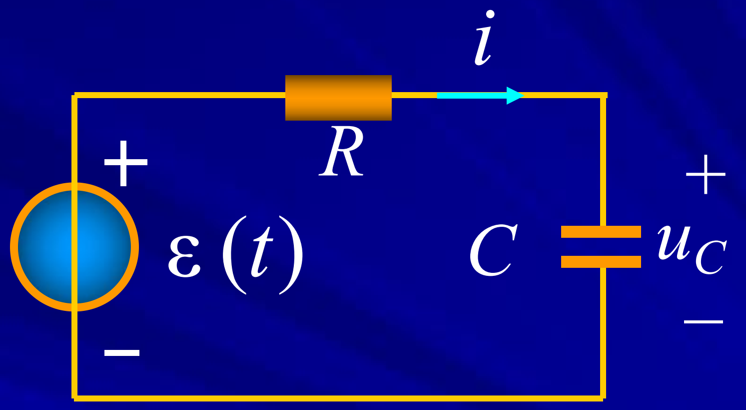


2. 一阶电路的阶跃响应

阶跃响应 → 激励为单位阶跃函数时，电路中产生的零状态响应。

$$u_C(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

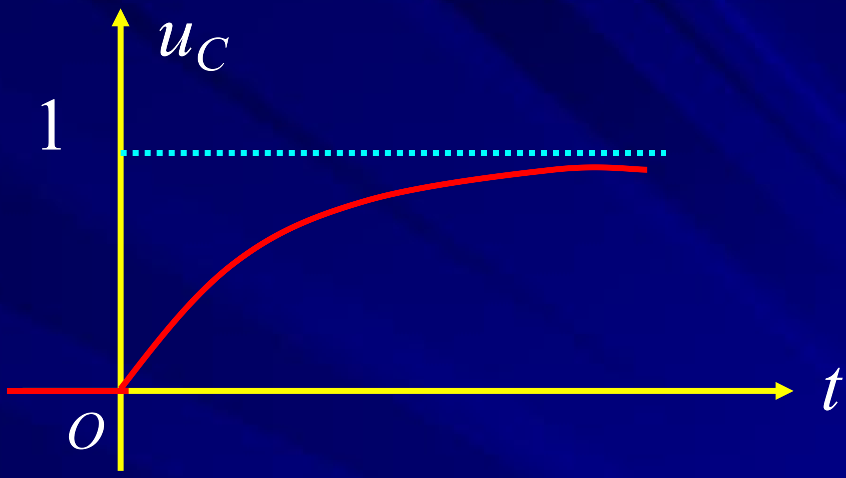
$$i(t)=\frac{1}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

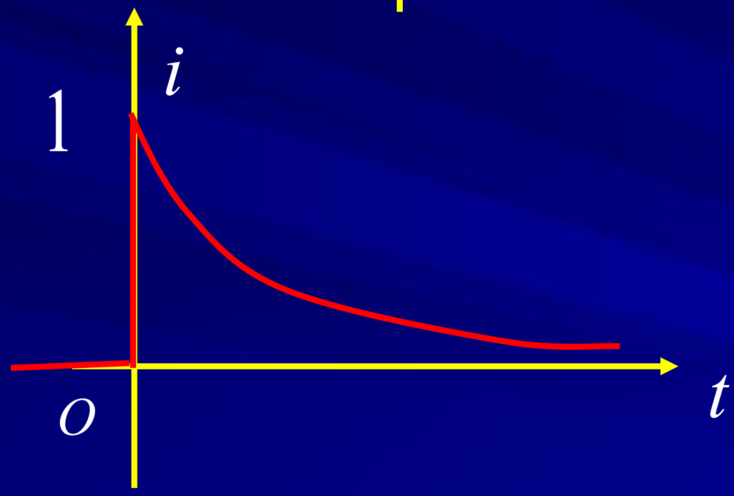


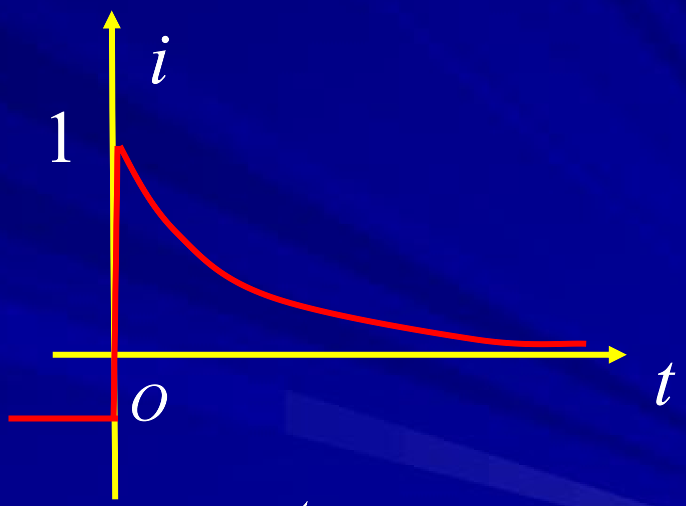
$u_C(0_-)=0$

注意

$i=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\underline{\varepsilon(t)}$ 和 $i=\underline{\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad t>0}$ 的区别。



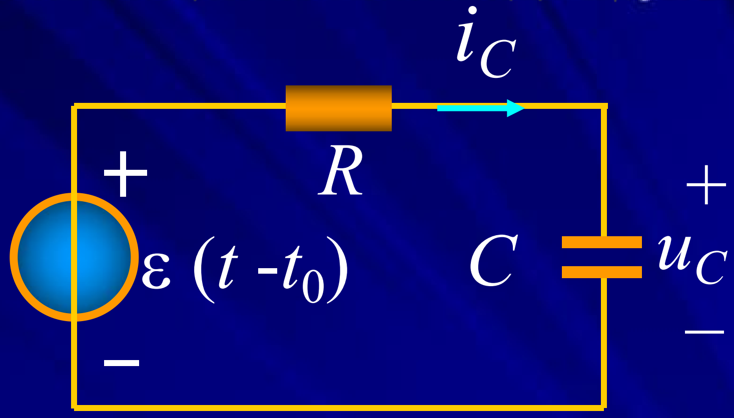




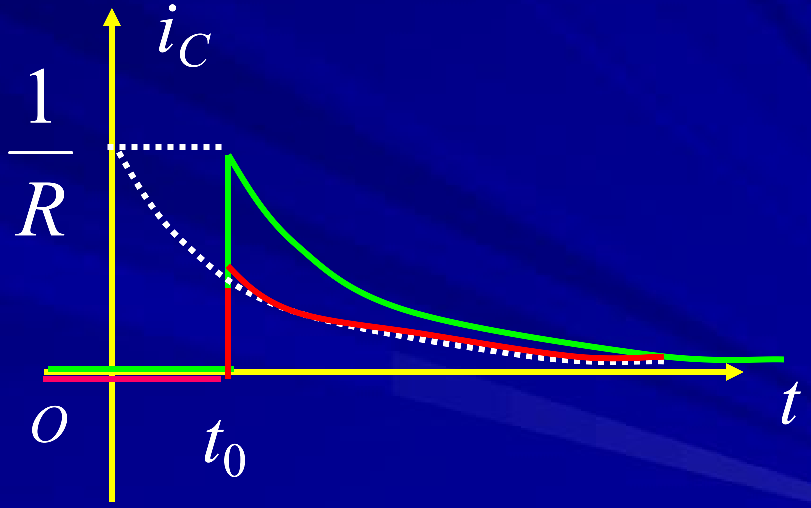
$$i = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad t > 0$$

激励在 $t=t_0$ 时加入，
则响应从 $t=t_0$ 开始。



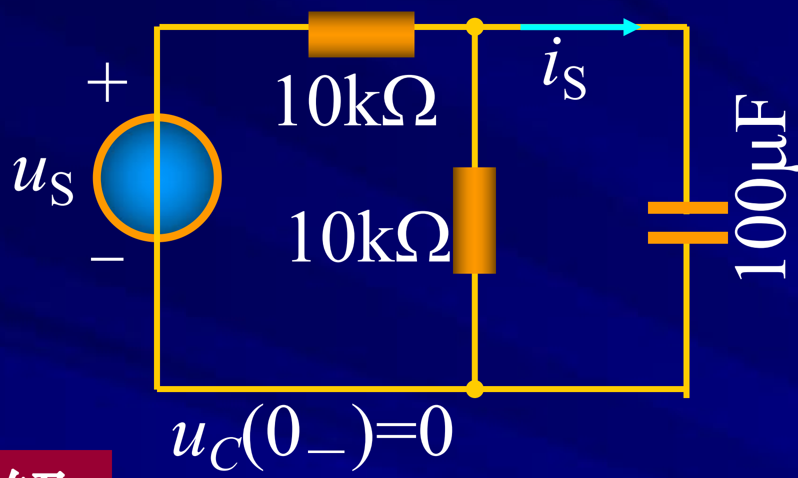
$$i_C=\frac{1}{R}e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\varepsilon(t-t_0)$$

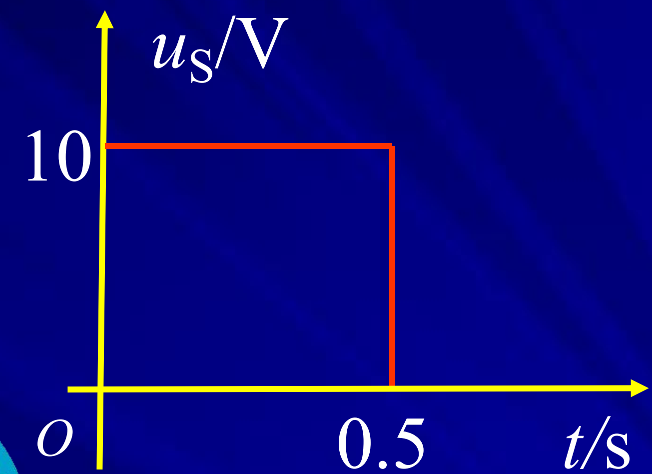


注意　不要写为

$$\frac{1}{R}e^{\frac{-t}{RC}}\varepsilon(t-t_0)$$

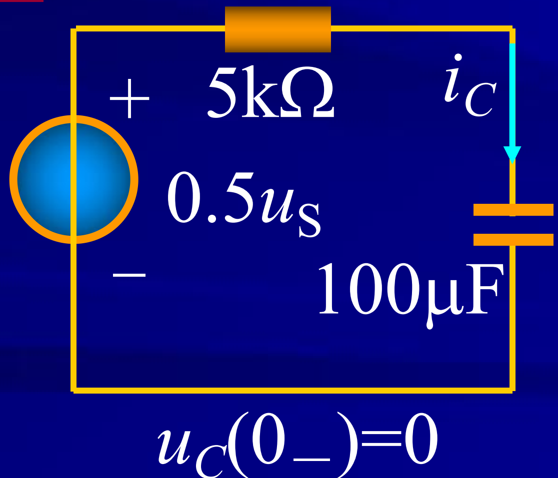
例7-6 求图示电路中电流 $i_C(t)$。





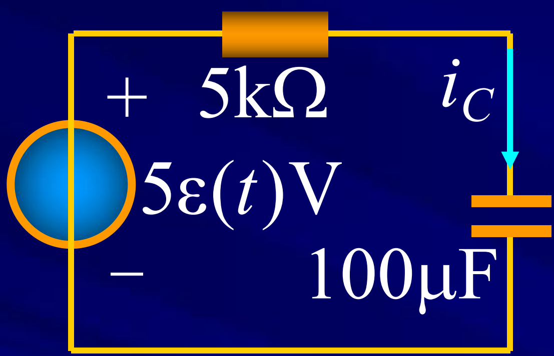
解

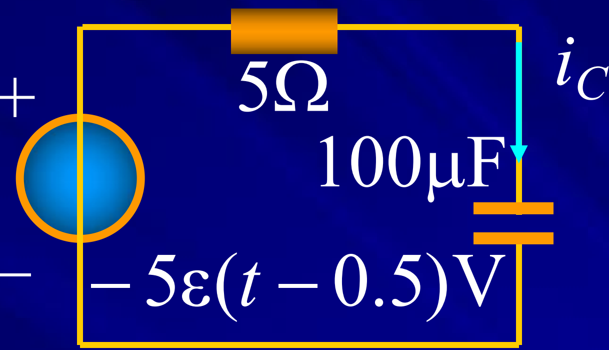
等效



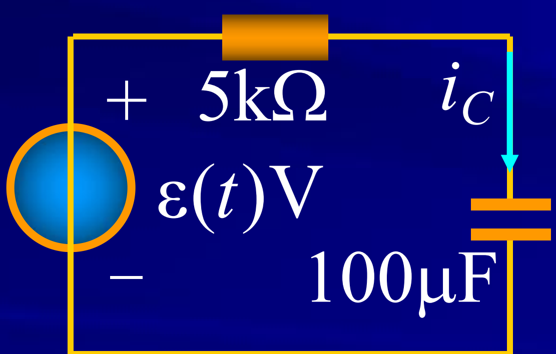
$$u_s = [10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)]\text{V}$$

应用叠加定理　$u_{\mathrm{s}} = [10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)]\mathrm{V}$





阶跃响应为



$$\tau = RC = 100\times10^{-6}\times5\times10^{-3}\mathrm{s} = 0.5\mathrm{s}$$

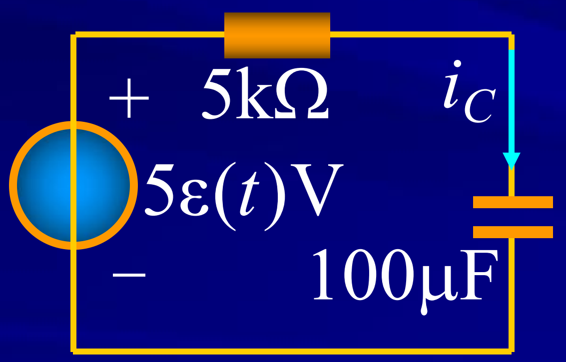
$$u_C(t) = (1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

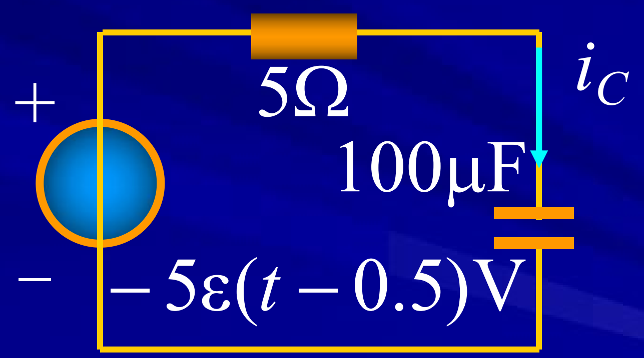
$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\,\mathrm{mA}$$

由齐次性和叠加性得实际响应为

$$i_C = 5[\frac{1}{5}e^{-2t}\varepsilon(t) - \frac{1}{5}e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)]\text{mA}$$

$$= [e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)]\text{mA}$$





分段表示为

$$i_C = [\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t) - \mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)]\mathrm{mA}$$

$$0 < t < 0.5\mathrm{s} \quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 0$$

$$i_C = \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{mA}$$

$$0.5\mathrm{s} < t \quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 1$$

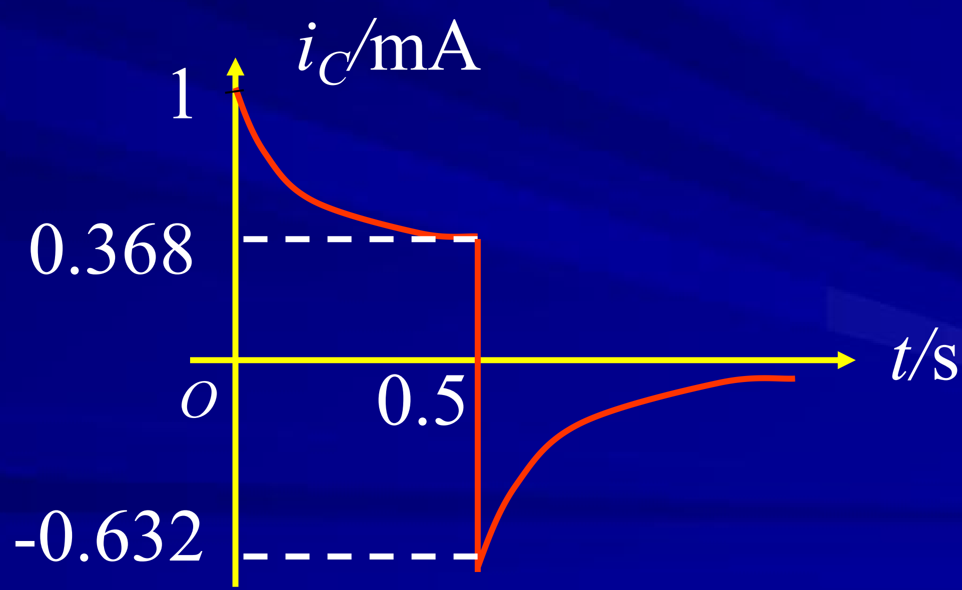
$$i_C = (\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-2(t-0.5)})\mathrm{mA} = \mathrm{e}^{-2(t-0.5)}(\mathrm{e}^{-1} - 1)\mathrm{mA}$$

$$= -0.632\mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\mathrm{mA}$$

$$i_C = [e^{-2t}[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-0.5)] - 0.632e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)]\text{mA}$$

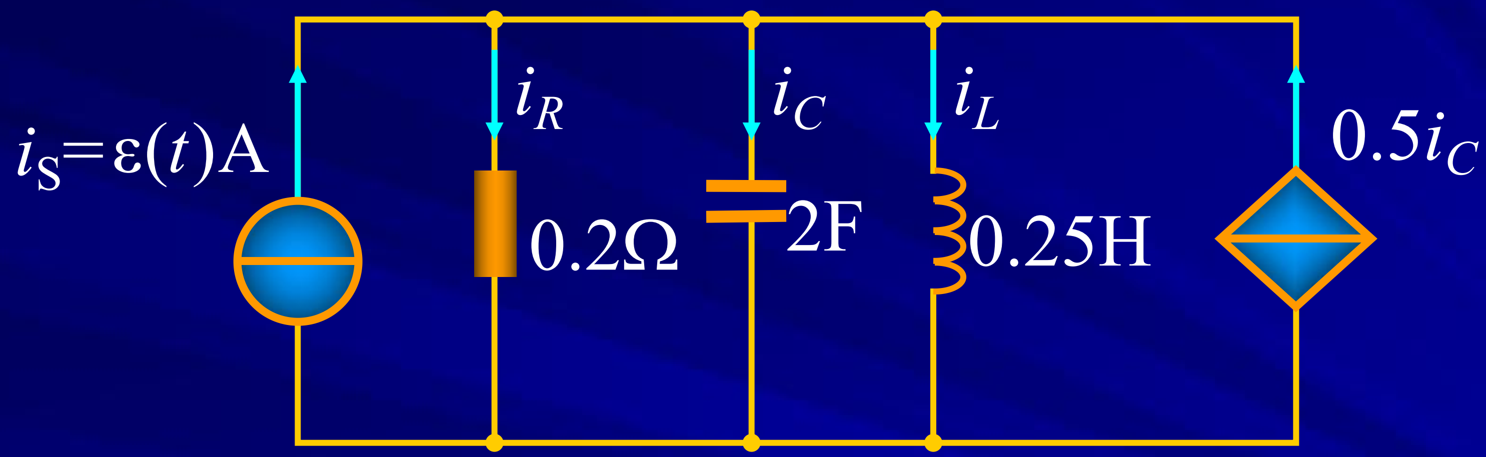
分段表示为 $$i_C(t) = \begin{cases} e^{-2t}\ \text{mA} & (0 < t < 0.5\text{s}) \\ -0.632e^{-2(t-0.5)}\ \text{mA} & (t > 0.5\ \text{s}) \end{cases}$$

波形



2. 二阶电路的阶跃响应

例7-7 已知图示电路中 $u_C(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$，求单位阶跃响应 $i_L(t)$。



解 对电路应用KCL列节点电流方程有

$$i_R+i_C+i_L-0.5i_C=i_S$$

$$i_R+0.5i_C+i_L=\varepsilon(t)$$

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$$

代入已知参数并整理得: $\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + 4i_L = 4\varepsilon(t)$

这是一个关于i的二阶线性非齐次方程，其解为

$$i_L = i' + i''$$

特解 $i' = 1$ 通解 $i'' = A_1\mathrm{e}^{p_1 t} + A_2\mathrm{e}^{p_2 t}$

特征方程 $p^2 + 5p + 4 = 0$

解得特征根 $p_1 = -1 \qquad p_2 = -4$

$$i_L = 1 + A_1 \mathrm{e}^{-t} + A_2 \mathrm{e}^{-4t}$$

代初始条件 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + A_1 + A_2 = 0 \\ -A_1 - 4A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{4}{3} \\ A_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

阶跃响应 $i_L(t) = s(t) = \left(1 - \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)\mathrm{A}$

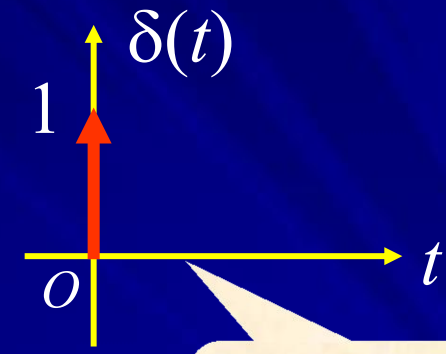
电路的动态过程是过阻尼性质的。

7-8 一阶电路和二阶电路的冲激响应

1. 单位冲激函数

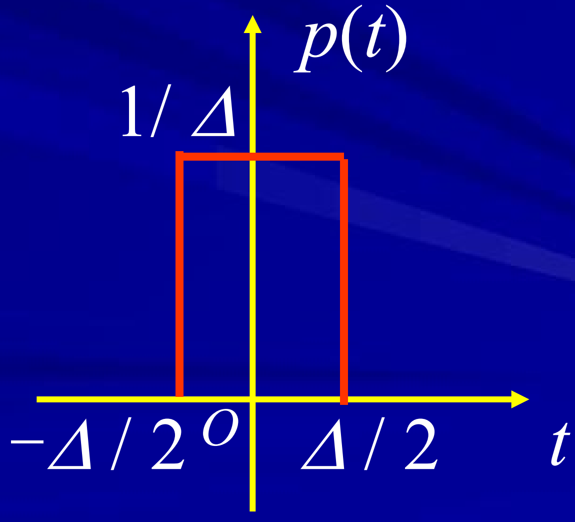
● 定义

$$\begin{cases} \delta(t)=0 \quad (t\neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$



单位脉冲函数的极限

$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t+\frac{\Delta}{2})-\varepsilon(t-\frac{\Delta}{2})]$$

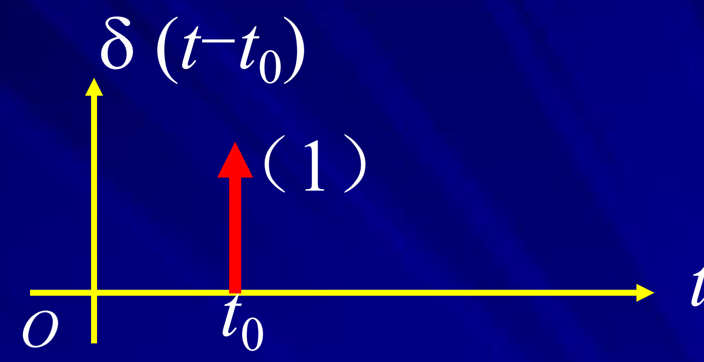


$$\Delta\to 0 \qquad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

$$\lim_{\Delta\to 0} p(t)=\delta(t)$$

● 单位冲激函数的延迟

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



● 单位冲激函数的性质

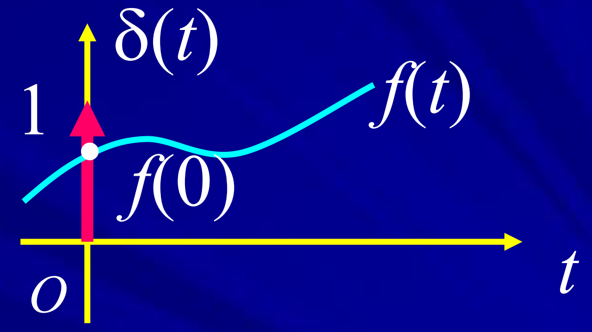
①冲激函数对时间的积分等于阶跃函数

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} = \varepsilon(t) \rightarrow \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

②冲激函数的“ 筛分性”

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\boxed{f(0)\delta(t)}$$



同理 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

例 $$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t$$

$$=\sin(\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=1.02$$

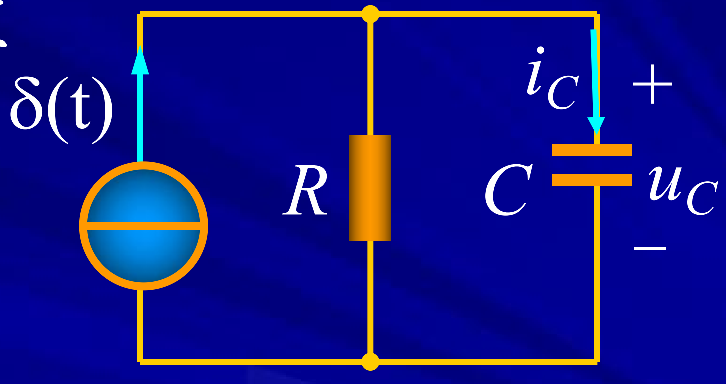
注意

$f(t)$在 t_0处连续

2. 一阶电路的冲激响应

冲激响应 → 激励为单位冲激函数时，电路中产生的零状态响应。

例8-1 求单位冲激电流激励下的RC电路的零状态响应。



$u_C(0_-)=0$

解 分两个时间段考虑冲激响应

(1) t 在 0_- — 0_+ 间

电容充电，方程为

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=\delta(t)$$

注意 u_C不是冲激函数，否则KCL不成立。

$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\cancelto{0}{\int_{0_-}^{0_+}\frac{u_C}{R}\mathrm{d}t}=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

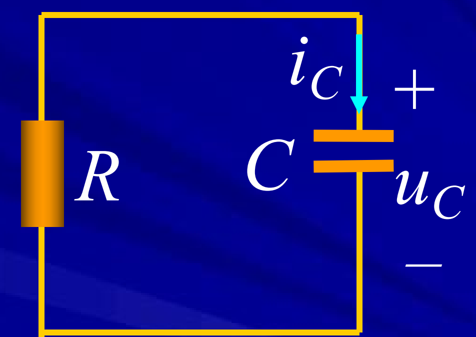
$$\rightarrow C[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=1 \rightarrow u_C(0_+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0_-)$$

结论 电容中的冲激电流使电容电压发生跃变。

（2） $t>0$ 为零输入响应（ RC放电）

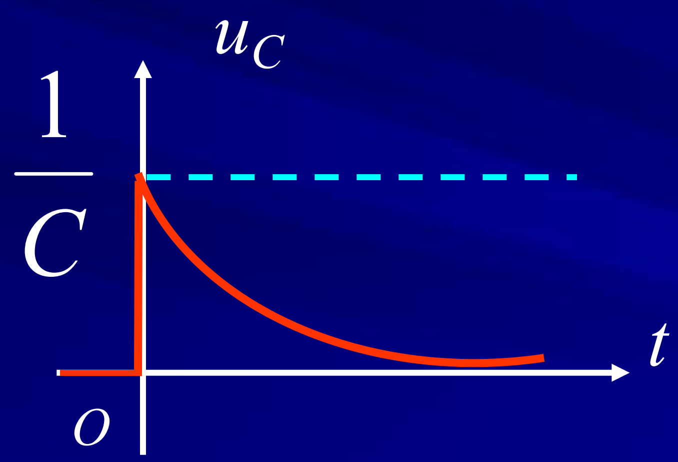
$$u_C=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad t>0$$

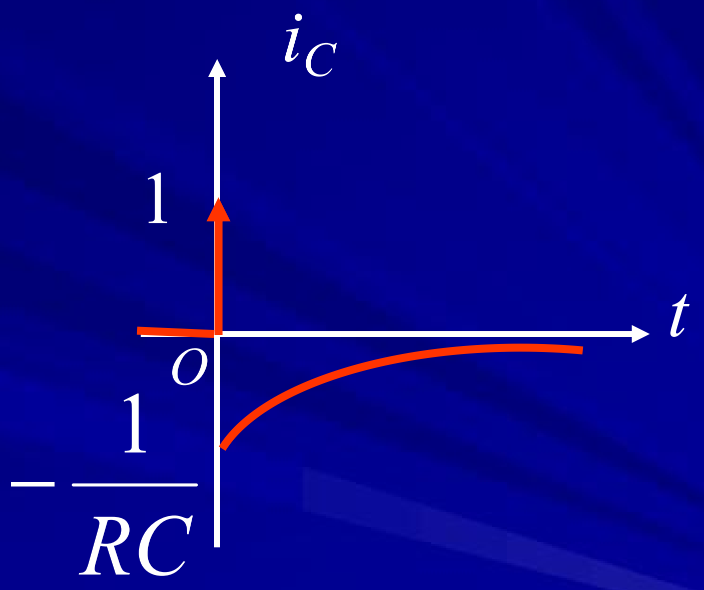
$$i_C=-\frac{u_C}{R}=-\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad t>0$$



$$u_C(0_+)=\frac{1}{C}$$

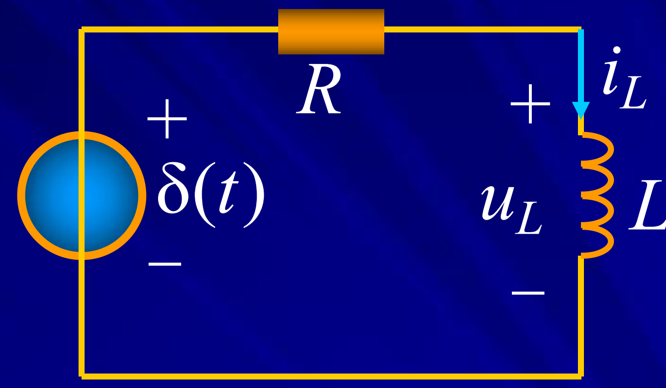
$$\begin{cases} u_C = \dfrac{1}{C} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \\ i_C = \delta(t) - \dfrac{1}{RC} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \end{cases}$$





例8-2 求单位冲激电压激励下的RL电路的零状态响应。

解　分两个时间段考虑冲激响应



$$i_L(0_-)=0$$

(1)　t 在 0_- — 0_+ 间方程为

$$Ri_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

$$\cancelto{0}{\int_{0_-}^{0_+} Ri_L\,\mathrm{d}t} + \int_{0_-}^{0_+} L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

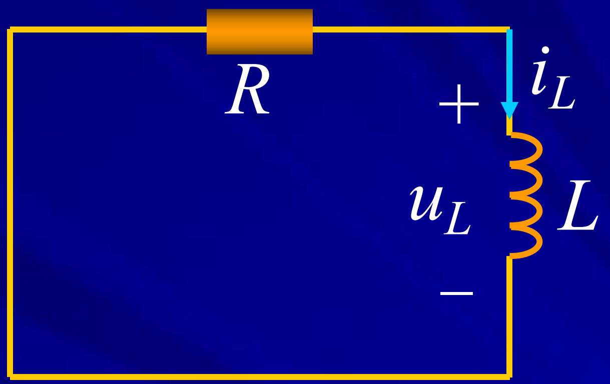
$$\rightarrow\quad L\left[i_L(0_+)-i_L(0_-)\right]=1 \quad\rightarrow\quad i_L(0_+)=\frac{1}{L}\neq i_L(0_-)$$

注意　i_L不是冲激函数，否则KVL不成立。

$$i_L(0_+) = \frac{1}{L} \neq i_L(0_-)$$

结论 电感上的冲激电压使电感电流发生跃变。

(2) $t > 0$ RL放电

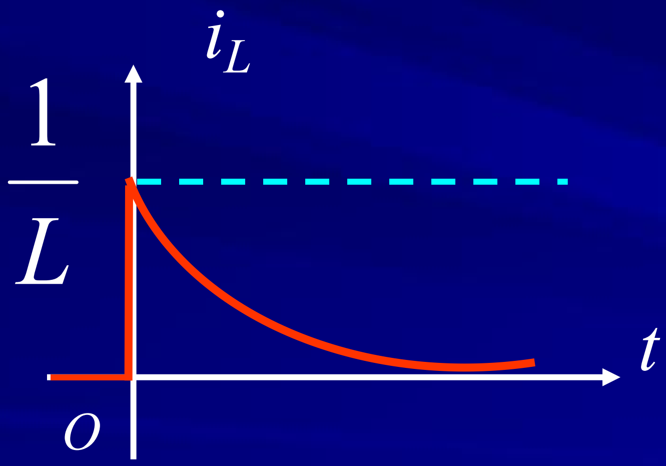


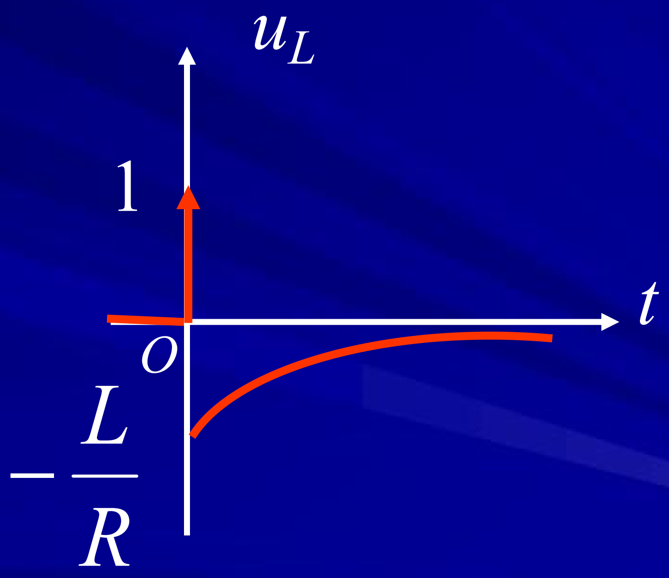
$$\tau = \frac{L}{R} \qquad i_L(0_+) = \frac{1}{L}$$

$$i_L = \frac{1}{L} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t > 0$$

$$u_L = -i_L R = -\frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t > 0$$

$$
\begin{cases}
i_L = \dfrac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \\
u_L = \delta(t) - \dfrac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t)
\end{cases}
$$





3. 单位阶跃响应和单位冲激响应关系

激励 $e(t)$ → 零状态 → $R(t)$ 响应

单位阶跃　　单位阶跃响应

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

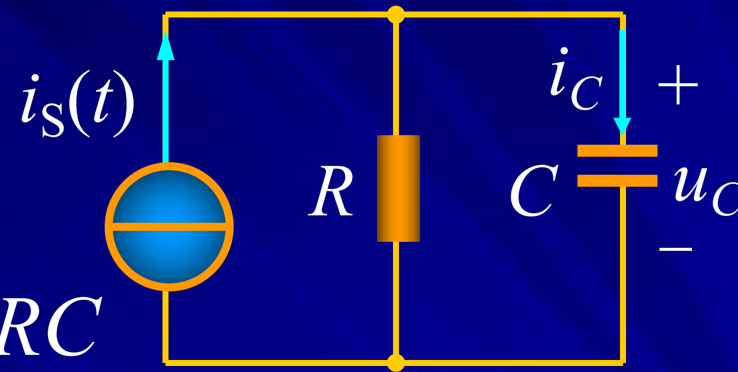
$\varepsilon(t)$　　$s(t)$

单位冲激　　单位冲激响应

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)$$

$\delta(t)$　　$h(t)$

例8-3 求：$i_S(t)$为单位冲激时电路响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。



$u_C(0_-)=0$

解　先求单位阶跃响应：

令 $i_s(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0_+)=0 \quad u_C(\infty)=R \quad \tau=RC$

$$\rightarrow \quad u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$i_C(0_+)=1 \quad i_C(\infty)=0 \quad \rightarrow \quad i_C=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$

再求单位冲激响应，令： $i_s(t)=\delta(t)$

$$u_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$= R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\delta(t) + \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) = \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

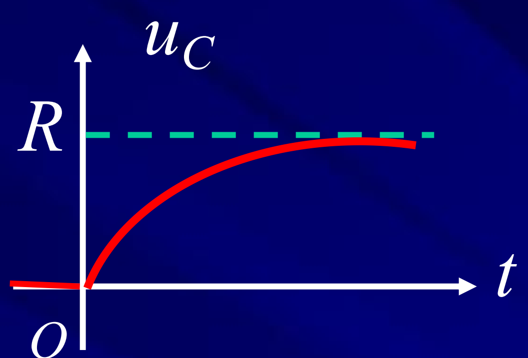
0

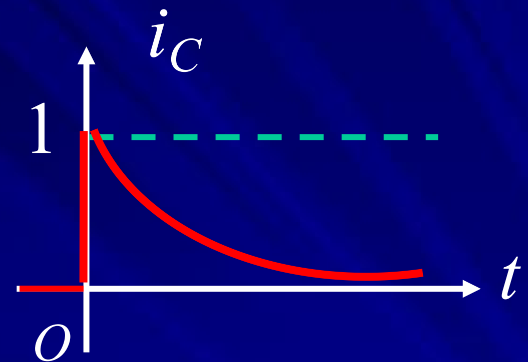
$$\boxed{f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)}$$

$$i_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)] = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

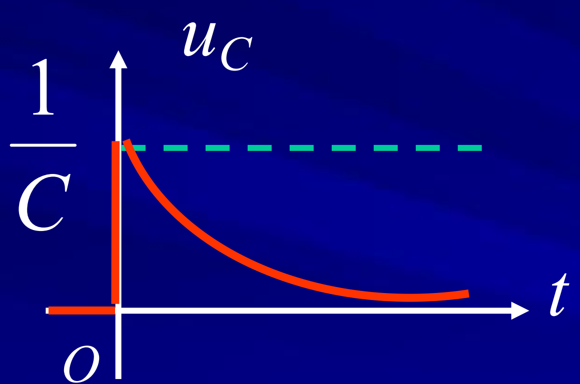
$$= \delta(t) - \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

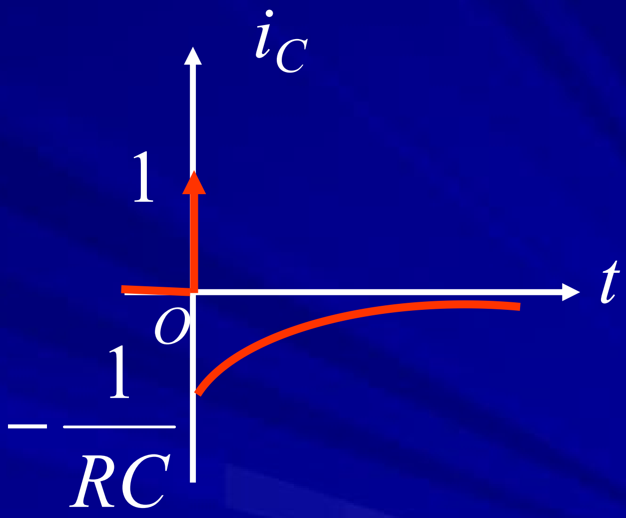
阶跃响应





冲激响应

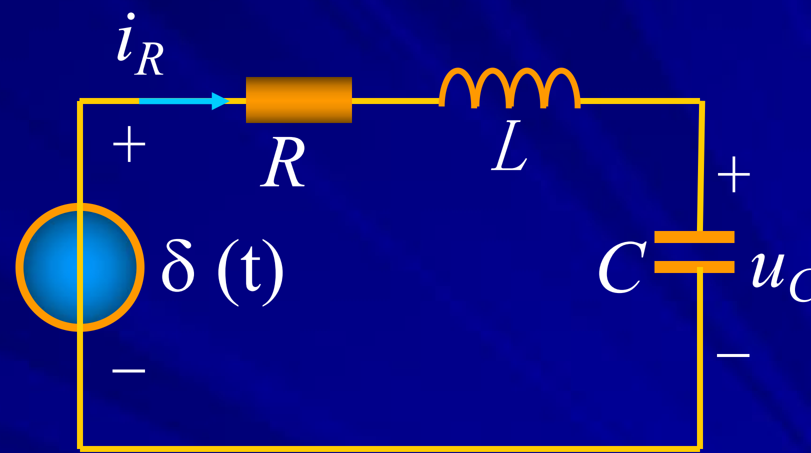




4. 二阶电路的冲激响应

例8-4 求单位冲激电压激励下的*RLC*电路的零状态响应。

解　KVL方程为



$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=\delta(t)$$

$$\int_{0_-}^{0_+}LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}u_C\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t$$

有限值　　　　有限值

t 在0_-至0_+间

$$\int_{0_-}^{0_+}LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t=1$$

$$\int_{0_-}^{0_+} LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t = 1 \rightarrow LC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+) - LC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_-) = 1$$

$$\rightarrow i_L(0_+) = i_C(0_+) = \frac{1}{L} \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

t>0为零输入响应

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow u_C = A_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{p_2 t}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases} \qquad A_2 = -A_1 = \frac{\frac{1}{LC}}{p_2 - p_1}$$

$$u_C = \frac{-1}{LC(p_2 - p_1)}(\mathrm{e}^{p_1 t} - \mathrm{e}^{p_2 t})\varepsilon(t)$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (p_{1、2} = -\delta \pm \mathrm{j}\omega)$$

$$u_C = A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

$$\rightarrow \quad u_C = \frac{1}{\omega LC}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t)\varepsilon(t)$$

*7-9　卷积积分

1. 卷积积分

●定义

设函数 $f_1(t)$ 、$f_2(t)$ $t<0$ 均为零

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi) \mathrm{d}\xi$$

●性质

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

证明 $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi) \mathrm{d}\xi$

$$= \int_t^0 f_1(\tau) f_2(t-\tau)(-\mathrm{d}\tau)$$

$$= \int_0^t f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau$$

$$= f_2(t) * f_1(t)$$

令 $\tau = t - \xi$

$\mathrm{d}\xi = -\mathrm{d}\tau$

ξ: 0　t

τ: t　0

2. 卷积积分的应用

激励 $e(t)$ → 线性网络 零状态 → 响应 $r(t)$

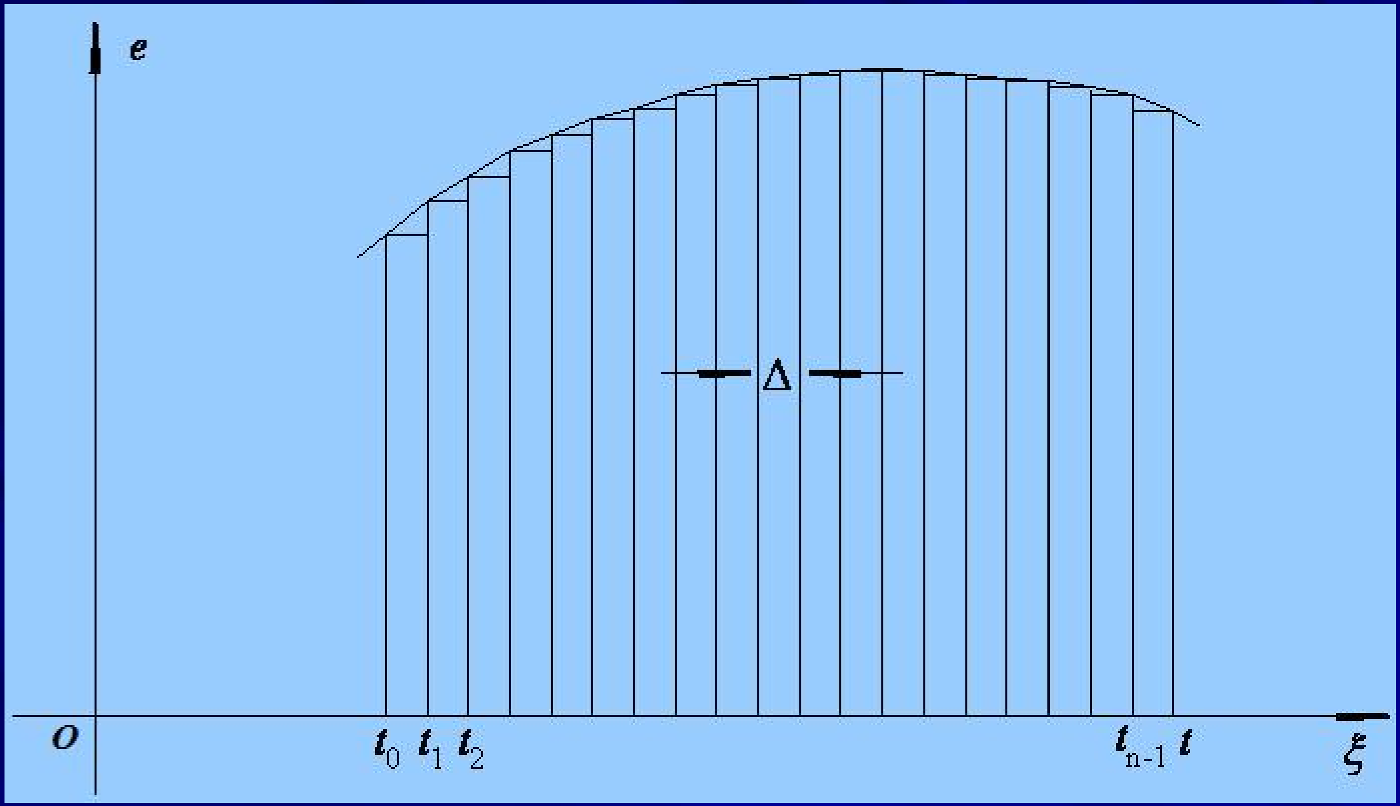
若　$f_1(t)=h(t)$ 冲激响应　　$f_2(t)=e(t)$

则　$$r(t)=f_1(t)*f_2(t)=h(t)*e(t)$$

$$\rightarrow\quad r(t)=\int_0^t h(t-\xi)e(\xi)\mathrm{d}\xi$$

物理解释

将激励 $e(t)$近似看成一系列具有相同宽度 Δ 的矩形脉冲的叠加，



$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_{k+1} - t_k = \varDelta$$

$$e_\Delta(\xi) = e(t_0)p_\Delta(\xi - t_0)\varDelta + e(t_1)p_\Delta(\xi - t_1)\varDelta +$$

$$e(t_2)p_\Delta(\xi - t_2)\varDelta + \cdots + e(t_k)p_\Delta(\xi - t_k)\varDelta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e(t_k)\ p_\Delta(\xi - t_k)\Delta$$

若单位脉冲函数 $p(t)$ 的零状态响应为 $h_\Delta(t)$

第1个矩形脉冲

$$e(t_1)p_\Delta(\xi - t_1)\Delta \xrightarrow{\text{响应}} e(t_1)h_\Delta(t - t_1)\Delta$$

⋮

第 k 个矩形脉冲

$$e(t_k)p_\Delta(\xi - t_k)\Delta \xrightarrow{\text{响应}} e(t_k)h_\Delta(t - t_k)\Delta$$

⋮

根据叠加定理，t 时刻观察到的响应应为 $0 \sim t$ 时间内所有激励产生的响应的和

$$r_{\Delta}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e(t_k) h_{\Delta}(\xi - t_k) \Delta$$

当 $n \to \infty$ 　 $\Delta \to 0$ ， $h_{\Delta} \to h$ ， $e_{\Delta} \to e(t)$ ， $r_{\Delta} \to r(t)$

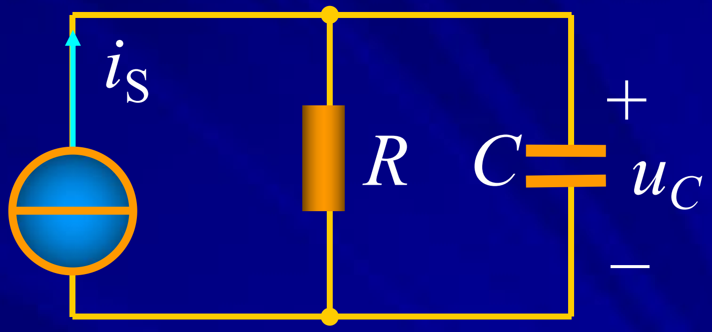
$\Delta \to \mathrm{d}\xi$ ， $t_k \to \xi$

$$\rightarrow \quad r(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\xi) e(\xi) \mathrm{d}\xi$$

若 $t_0 = 0$ 　 $r(t) = \int_{0}^{t} h(t-\xi) e(\xi) \mathrm{d}\xi$

例9-1 已知：R=500 kΩ , C=1 μF , $u_C(0)$=0

$i_S = 2e^{-t}\varepsilon(t)\mu A$，求 $u_C(t)$。



解 先求电路的冲激响应 $h(t)$。

$$i_S = \delta(t)\mu A$$

$$u_C(0_+) = \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_S \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{d}t = \frac{10^{-6}}{C} = 1\mathrm{V}$$

$u_C(\infty)$=0 $\quad \tau = RC = 500\times10^3\times10^{-6}\mathrm{s} = 0.5\ \mathrm{s}$

$$\longrightarrow \quad h(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

再计算 $i_S = 2e^{-t}\varepsilon(t)\mu A$ 时的响应 $u_C(t)$。

$$u_C(t) = i_S(t) * h(t) = \int_0^t i_S(\xi)h(t-\xi)d\xi$$

$$= \int_0^t 2\times 10^{-6}e^{-\xi}\times e^{-2(t-\xi)}d\xi \ \text{V}$$

$$= 2\times 10^{-6}e^{-2t}\int_0^t e^{\xi}d\xi \ \text{V} = 2\times 10^{-6}e^{-2t}(e^t - 1)\text{V}$$

$$= (2e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t)\mu\text{V}$$

例9-2 设例1中的 $i_S = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]\mu A$，求 $u_C(t)$。

解 设：$f_1(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$

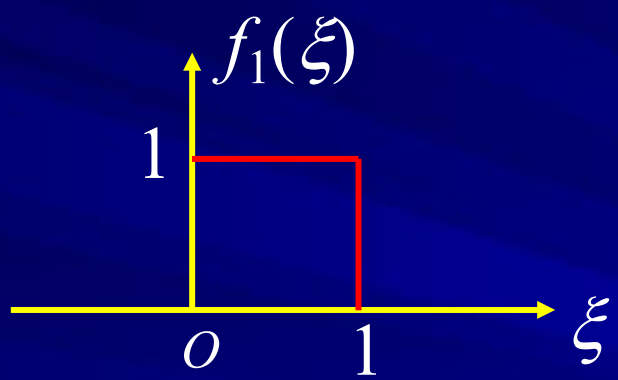
$$f_2(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$$

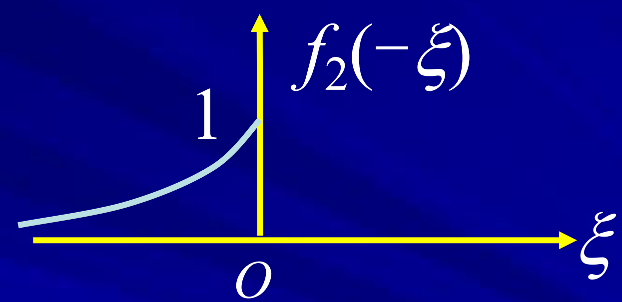
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \underbrace{f_1(\xi) f_2(t-\xi)}_{\text{被积函数}} \mathrm{d}\xi$$

积分变量

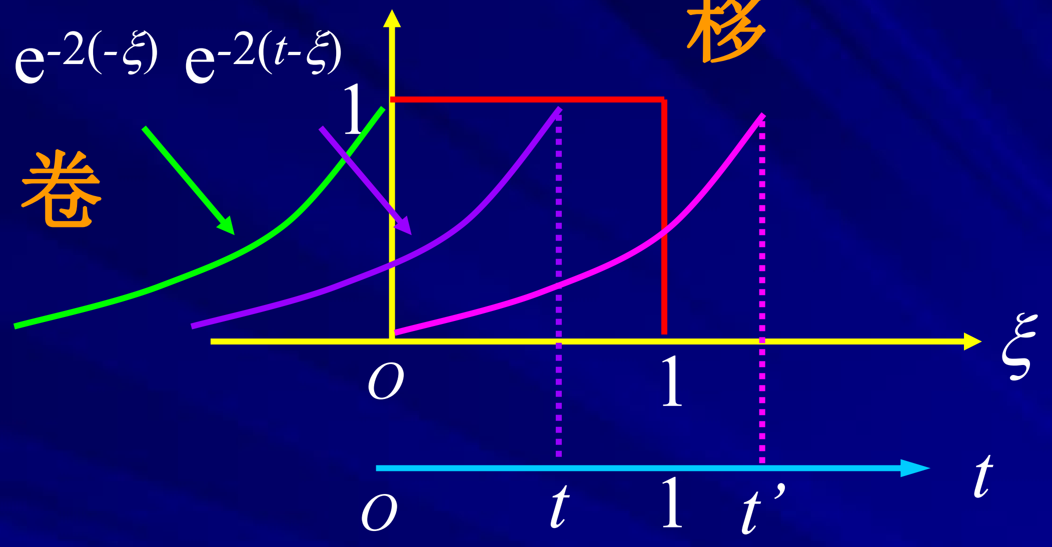
参变量

由图解过程确定积分上、下限:





$$u_C(t) = f_1(t) * f_2(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * \mathrm{e}^{-2t}$$



积

$$t<0 \qquad u_C(t)=0$$

$$0<t<1 \quad u_C(t)=\int_0^t 1\mathrm{e}^{-2(t-\xi)}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{V}$$

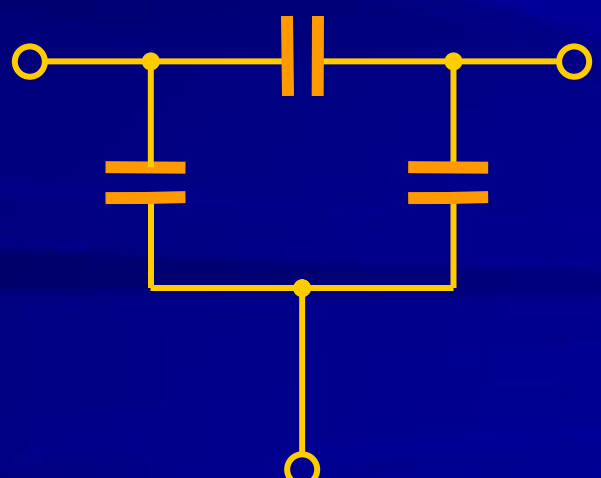
$$1<t \quad u_C(t)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-2(t-\xi)}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{V}$$

*7-10 动态电路时域分析中的几个问题

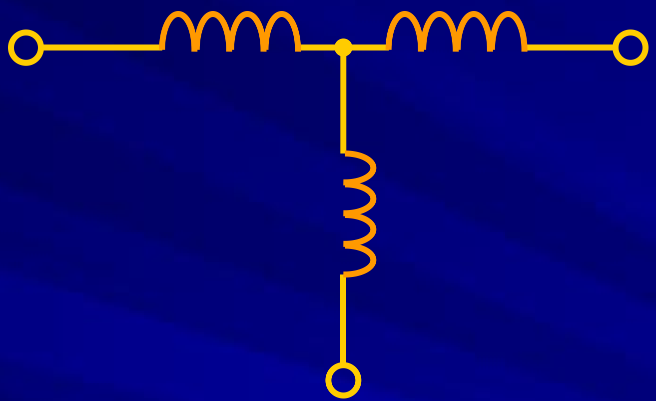
1. 动态电路微分方程的阶数与电路结构的关系

动态电路微分方程的阶数与电路中所含的独立动态元件的个数相等。

例 ①当一个网络中存在纯电容回路，由KVL可知其中必有一个电容电压可由回路中其他元件的电压求出，此电容电压为非独立的电容电压。

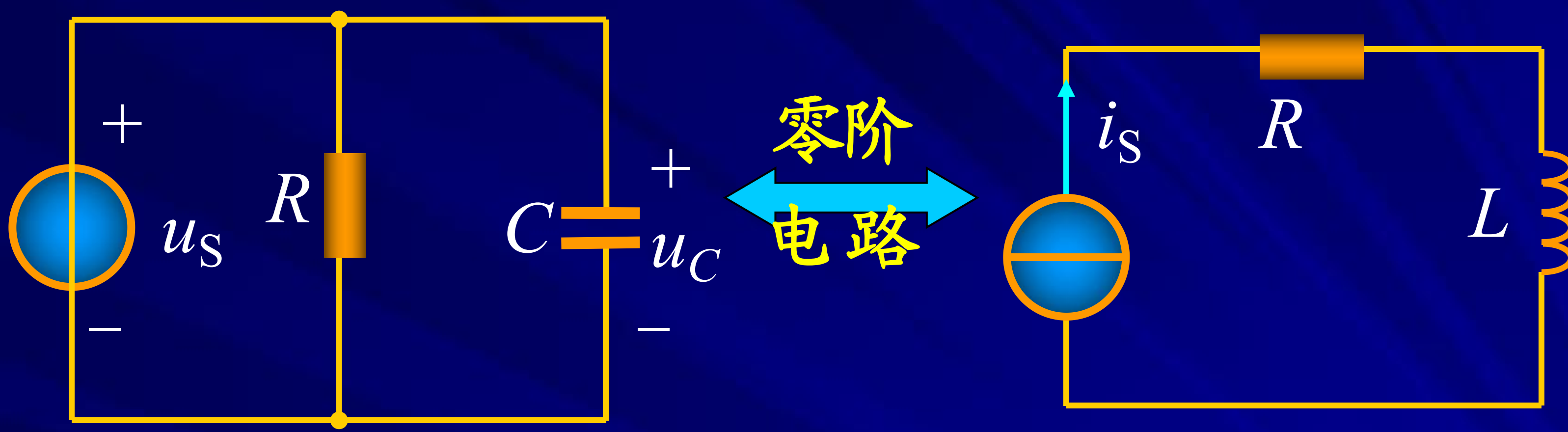


②当网络中存在纯电感结点，由KCL可知其中必有一个电感电流可由其他元件的电流求出，此电感电流是非独立的。



③网络中与独立电压源并联的电容元件，其电压u_C由u_S决定。

④网络中与独立电流源串联的电感元件，其i_L由i_S决定。



以上四种情况中非独立的u_C和i_L不能作为状态变量，不含以上四种情况的网络称为常态网络。状态变量数等于C、L元件总数。含有以上四种情况的网络称为非常态网络，网络的状态变量数小于网络中C、L元件总数，下面着重讨论常态网络。

2. 动态电路中初始值的计算

对于通常电路，初始值由下面关系确定

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \qquad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

在下面情况下 $u_C(0_+) \neq u_C(0_-)$

$$i_L(0_+) \neq i_L(0_-)$$

①换路后的电路有纯电容构成的回路，或有由电容和独立电压源构成的回路，且回路中各个电容上电压值$u_C(0_-)$的代数和不等于该回路中各个电压源初始值的代数和。

②换路后的电路有纯电感构成的节点（或割集）或有由电感和独立电流源构成的节点（或割集），且结点上各电感的电流值$i_L(0_-)$与电流源电流的初始值的代数和不等于零，

在上述两种情况下，求初始值，必须遵循换路前后电路中电荷守恒和磁通链守恒的约束关系，即

$$\Sigma q_k(0_+) = \Sigma q_k(0_-)$$

或

$$\Sigma C_k u_k(0_+) = \Sigma C_k u_k(0_-)$$

$$\sum \Psi_k(0_+) = \sum \Psi_k(0_-)$$

或

$$\Sigma L_k i_k(0_+) = \Sigma L_k i_k(0_-)$$