第二十讲
应用拉普拉斯变换研究线性时不变系统

杜清河
西安交通大学
信息与通信工程学院
2025

本讲覆盖章节

- 9.4
- 9.7
- 9.8

内容提要

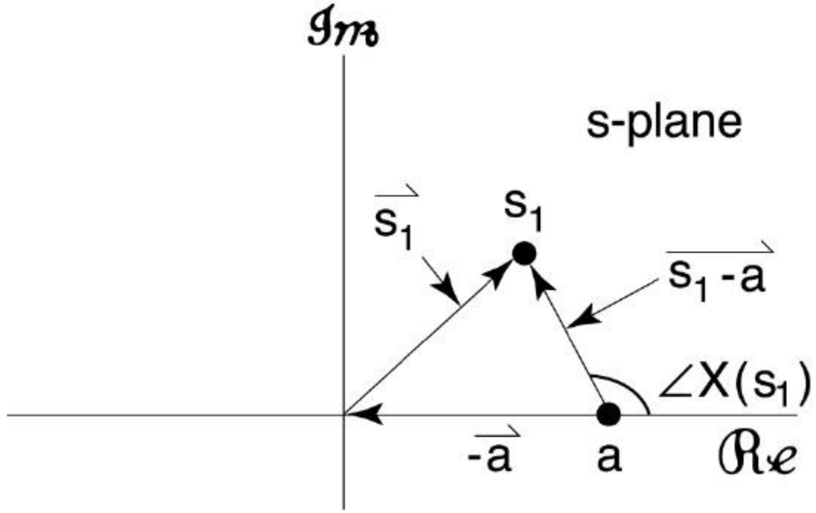
- 零极点图及其应用
- 系统函数与LTI系统的变换域分析
- LTI系统的方框图实现

内容提要

- 零极点图及其应用
- 系统函数与LTI系统的变换域分析
- LTI系统的方框图实现

有理拉普拉斯变换的几何求值法

- 单一零点的情况 $X_1(s)=s-a$

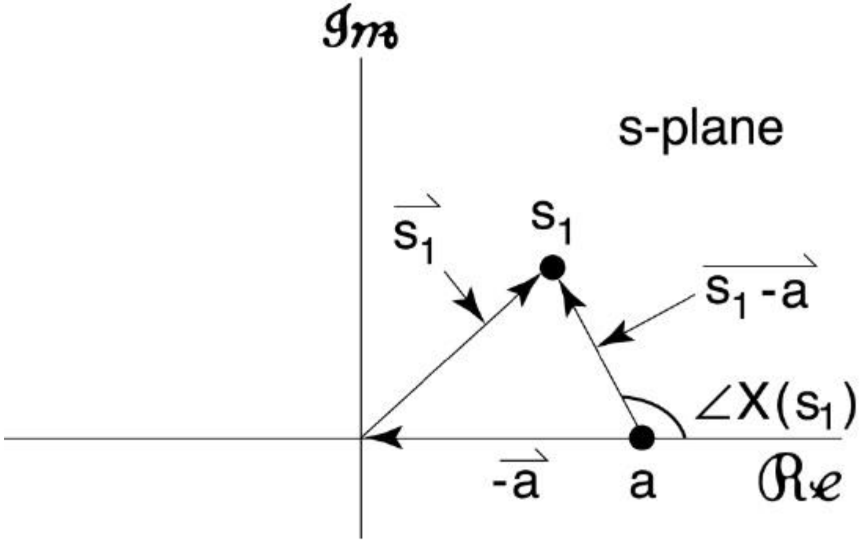


$|X_1(s)|$ ： 零点向量的长度

$\angle X_1(s)$ ： 零点向量与实轴的夹角

有理拉普拉斯变换的几何求值法

- **单一极点的情况** $X_2(s)=\dfrac{1}{s-a}=\dfrac{1}{X_1(s)}$



$|X_2(s)|$：极点向量长度的倒数

$\angle X_2(s)$：极点向量与实轴夹角的负值

有理拉普拉斯变换的几何求值法

- 一般情况

高阶的有理拉普拉斯变换：

$$X(s) = M\frac{\Pi_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\Pi_{j=1}^{P}(s-\alpha_j)}$$

对这一信号，有：

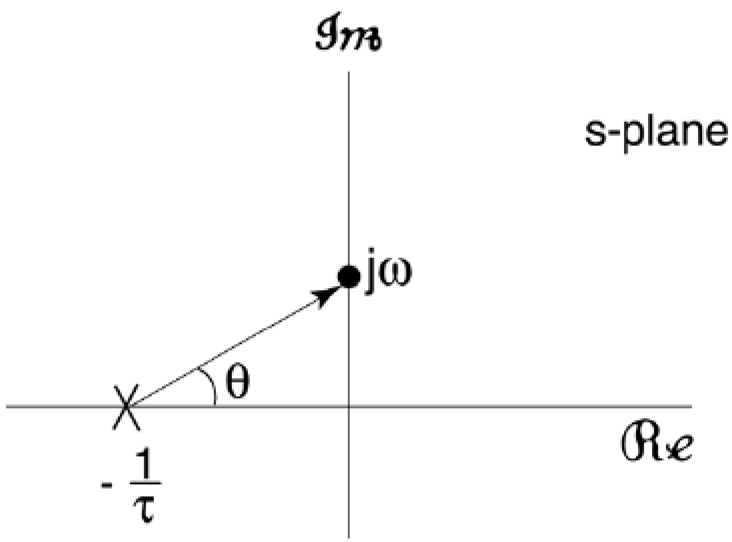
$$|X(s)| = |M|\frac{\Pi_{i=1}^{R}|s-\beta_i|}{\Pi_{j=1}^{P}|s-\alpha_j|}$$

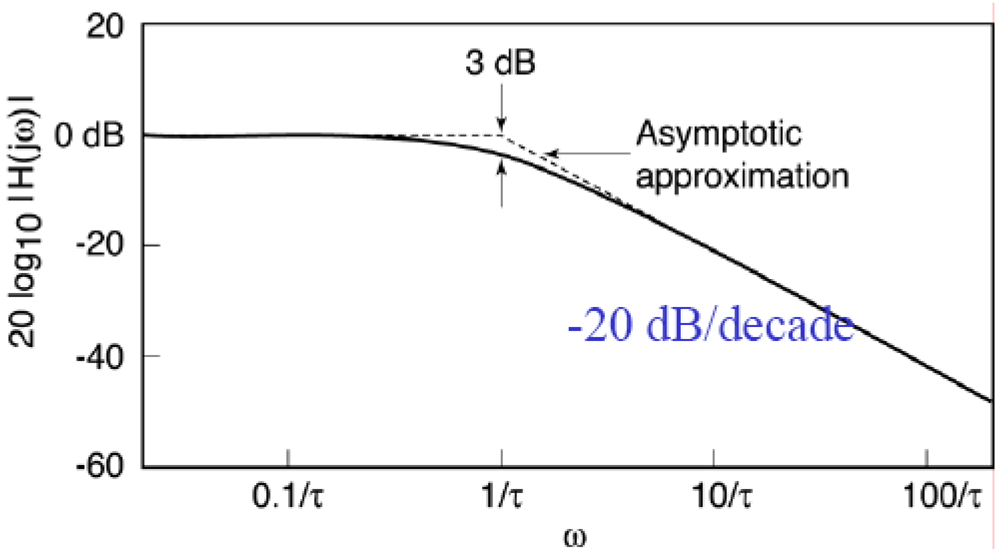
$$\angle X(s) = \angle M + \sum_{i=1}^{R}\angle(s-\beta_i) - \sum_{j=1}^{P}\angle(s-\alpha_j)$$

利用零极点图分析一阶系统

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s\tau + 1} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}, \Re e\{s\} > -\frac{1}{\tau}$$

$$H(j\omega) = \frac{1/\tau}{j\omega + 1/\tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{j\omega + 1/\tau} \qquad s(t) = [1 - e^{-t/\tau}]u(t)$$

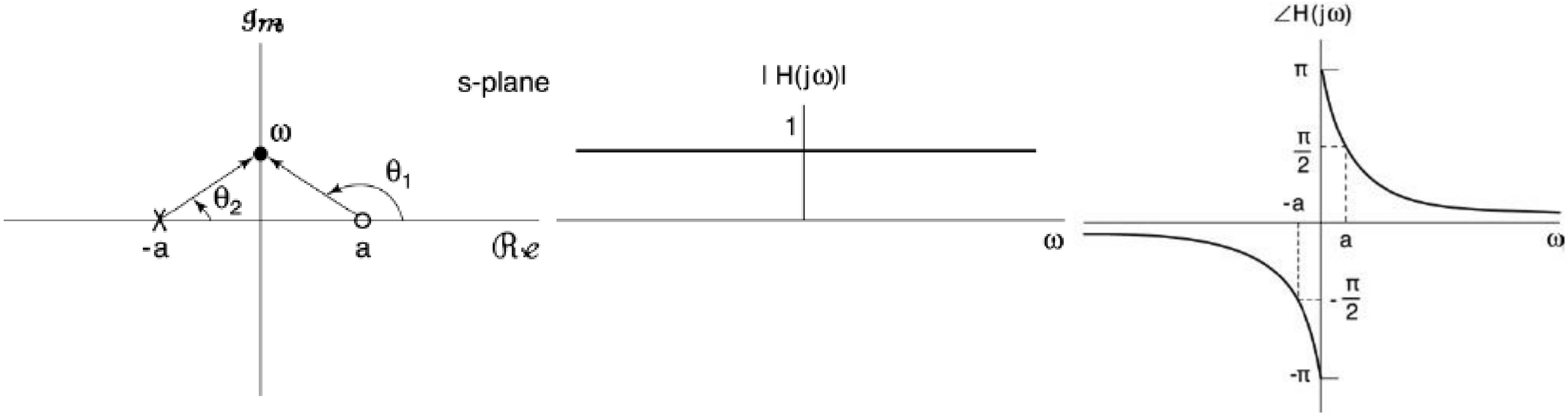




利用零极点图分析全通系统

一阶全通系统：

$$H(s)=\frac{s-a}{s+a}$$

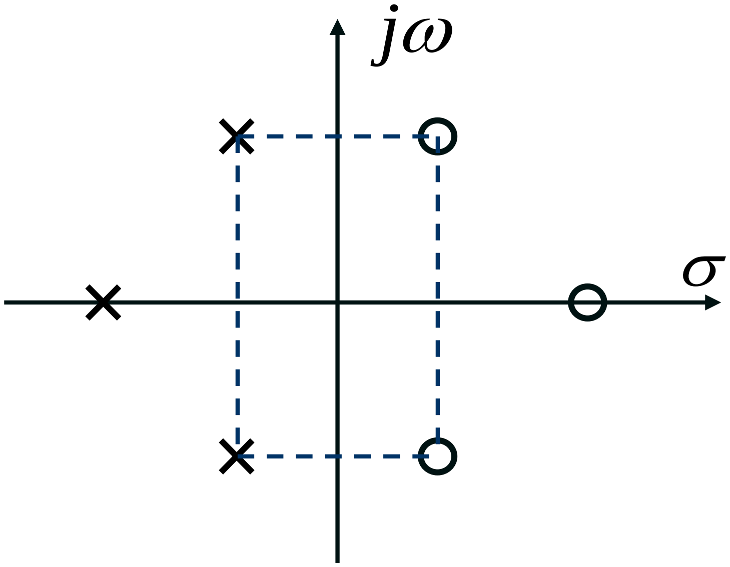


极点向量和零点向量长度相等，故$|H(j\omega)|=1$.

$$\angle H(j\omega)=\theta_1-\theta_2=\pi-2\theta_2=\begin{cases}\pi, & \omega=0\\ \pi/2, & \omega=a\\ \approx 0, & \omega>>a\end{cases}$$

利用零极点图分析全通系统

高阶全通系统的例子：



三阶全通系统

内容提要

- 零极点图及其应用
- 系统函数与LTI系统的变换域分析
- LTI系统的方框图实现

系统函数

- 拉普拉斯变换的重要应用之一是对于LTI系统的分析与表征
- 对于LTI系统，输入和输出的拉普拉斯变换之间具有如下关系：$Y(s)=H(s)X(s)$
- $H(s)$称为系统函数或转移函数
- LTI系统的很多性质都与系统函数在s平面内的特性密切相关

因果性

一个因果LTI系统的系统函数的ROC是某个右半平面

对于一个具有有理系统函数的LTI系统来说，系统的因果性就等价于系统函数的ROC位于最右边极点的右边的右半平面

为什么？

稳定性

当且仅当系统函数的ROC包括**整个**$j\omega$轴，一个LTI系统就是稳定的

当且仅当$H(s)$的全部极点都位于s平面的左半平面时，一个具有有理系统函数的因果系统才是稳定的

LTI系统的变换域分析举例

例1：假定关于某个LTI系统已知下列信息：

1. 系统是因果的。

2. 系统函数是有理的，且仅有两个极点在$s=-2$和$s=4$。

3. 若$x(t)=1$，则$y(t)=0$。

4. 单位冲激响应在$t=0^+$时的值是4。

根据以上信息确定系统的系统函数。

LTI系统的变换域分析举例

根据第2条，系统函数应具有如下形式：

$$H(s)=\frac{p(s)}{(s+2)(s-4)}=\frac{p(s)}{s^2-2s-8}$$

根据第3条应有$H(0)=0$，即：

$$p(s)=sq(s)$$

根据第4条并结合初值定理，可得：

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sH(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2q(s)}{s^2-2s-8}=4$$

LTI系统的变换域分析举例

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4$$

上式表明，分子和分母应为同阶次，即：

$$q(s) = K$$

常数K可以通过如下的方法求得：

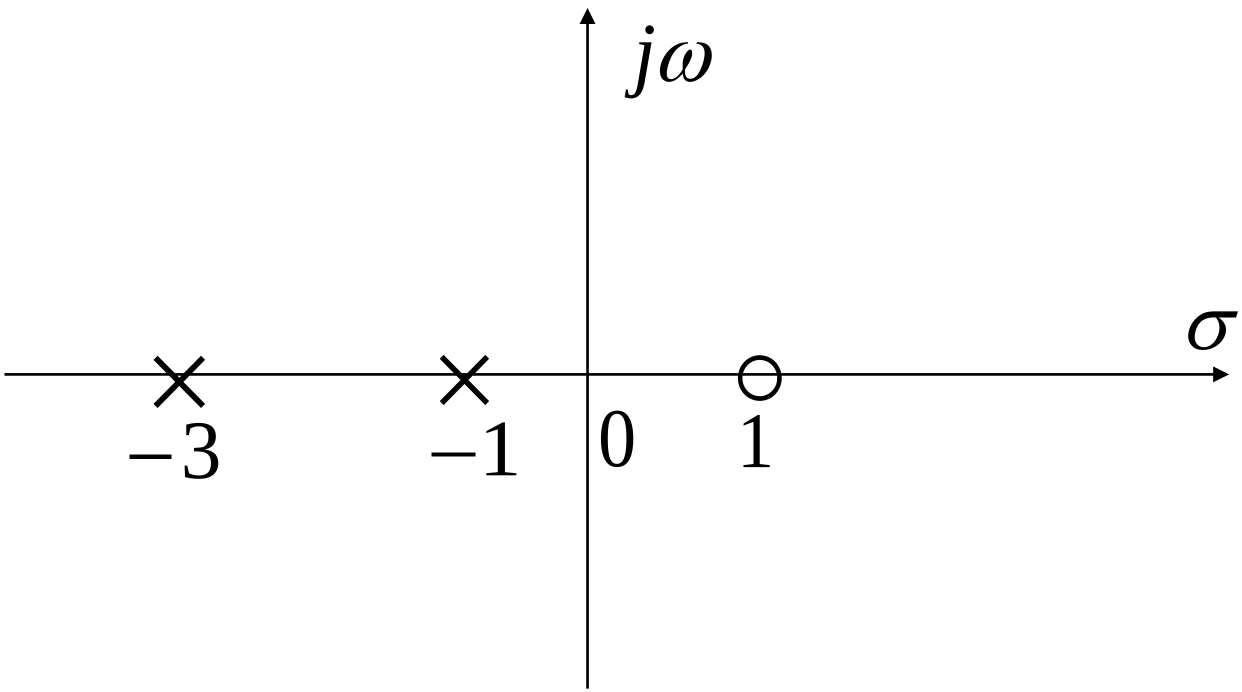
$$\lim_{s\to\infty} \frac{Ks^2}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s\to\infty} \frac{Ks^2}{s^2} = K \Rightarrow K = 4$$

所以系统函数为： $H(s) = \dfrac{4s}{(s+2)(s-4)}$

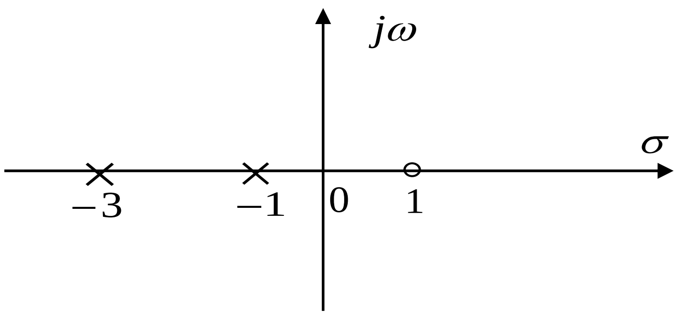
根据第1条可得收敛域为： $\Re e\{s\} > 4$

LTI系统的变换域分析举例

例2：下图所示的零极点图确定了一个具有有理系统函数的LTI系统，该系统在输入信号为e^{2t}时，系统的输出为e^{2t}。



LTI系统的变换域分析举例



(1) 确定系统的系统函数表达式$H(s)$

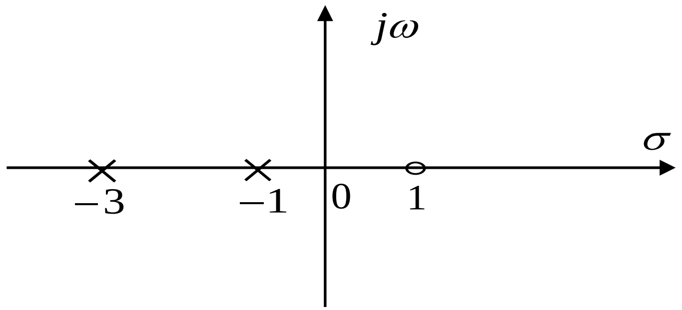
根据零极点图，假设系统函数具有如下形式：

$$H(s)=K\frac{s-1}{(s+3)(s+1)}$$

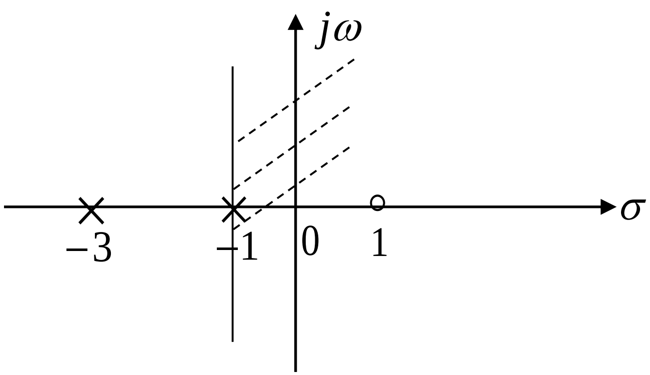
$$e^{2t}*h(t)=e^{2t} \Rightarrow H(2)=1 \Rightarrow K=15$$

$$H(s)=15\frac{s-1}{(s+3)(s+1)}$$

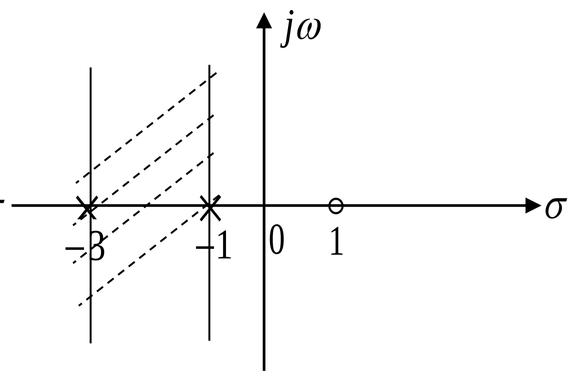
LTI系统的变换域分析举例



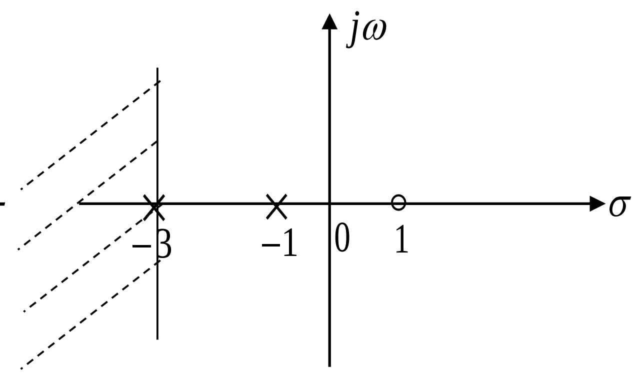
(2) 确定该零极点图所对应的可能的收敛域，并指出每种情况下系统的因果、稳定性。



(a) 因果稳定系统

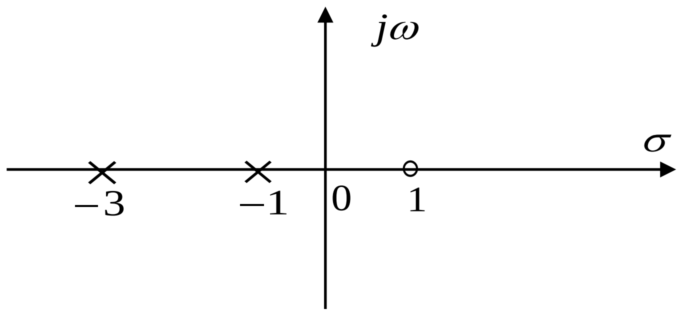


(b)非因果非稳定系统



(c)非因果非稳定系统

LTI系统的变换域分析举例



(3) 若由该图所确定的系统是因果稳定的，求出其逆系统的系统函数，该逆系统是因果稳定的吗？为什么？

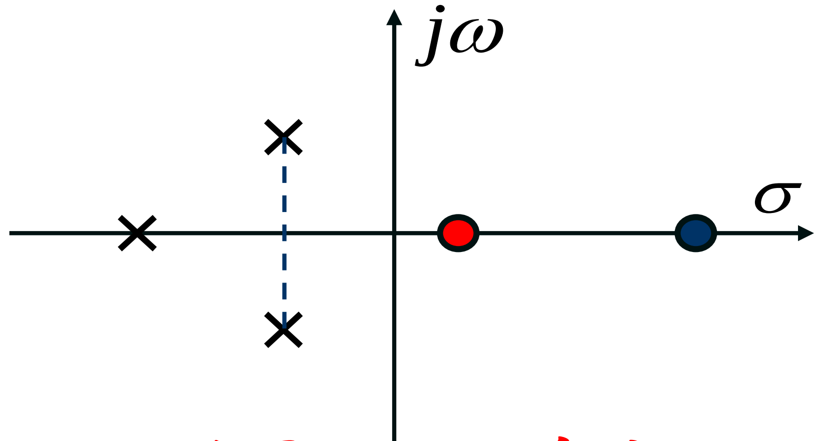
$$H_1(s)=\frac{(s+3)(s+1)}{15(s-1)}$$

该逆系统不可能为因果稳定的系统，原因是其有极点在右半平面。

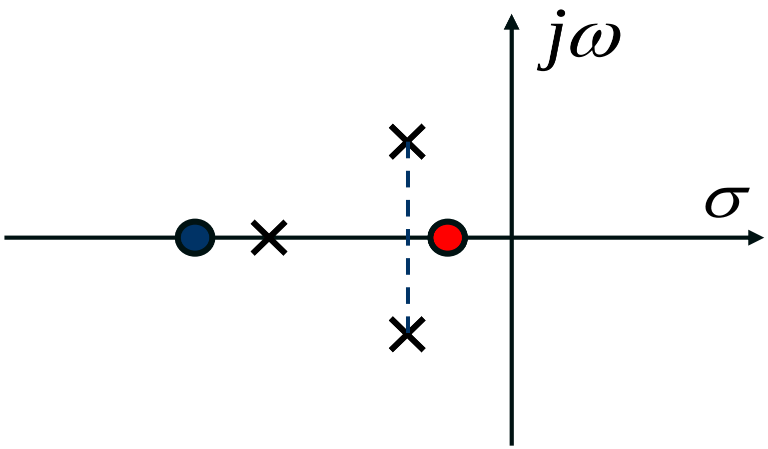
最小相位系统

- 最小相位系统可以通过这一说法来定义：这些系统是因果的且是稳定的，而它们的逆系统也是因果和稳定的。
- 最小相位系统的系统函数，其全部极点和零点都必须位于s平面的左半平面。
- 在所有幅频特性相同的因果稳定LTI系统中，最小相位系统所引入的附加相移最小。
- 任何一个因果稳定LTI系统都等价于一个最小相位系统和一个全通系统的级联。

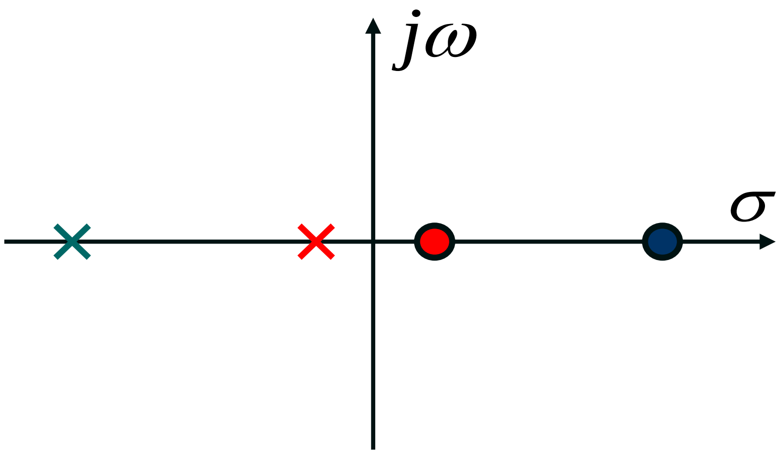
最小相位系统



非最小相位系统



最小相位系统



全通系统

内容提要

- 零极点图及其应用
- 系统函数与LTI系统的变换域分析
- LTI系统的方框图实现

LTI系统的线性常系数微分方程描述

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = H(s)X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

仅根据微分方程，无法确定收敛域！

LTI系统的的互联与系统函数

- 并联

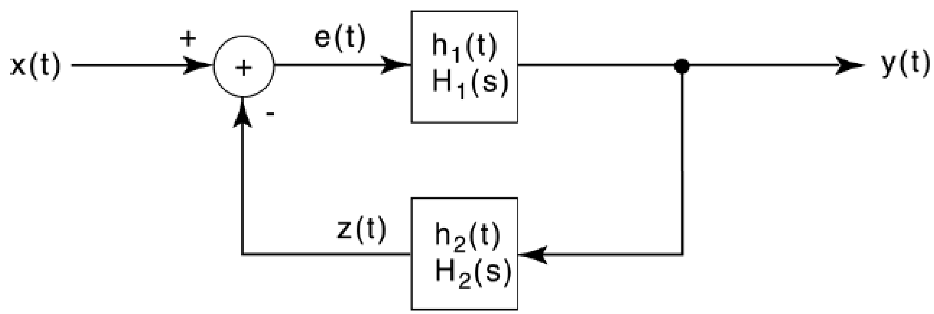
$$H(s)=H_1(s)+H_2(s)$$

- 级联

$$H(s)=H_1(s)H_2(s)$$

ROC?

- 反馈



$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$$

LTI系统的的互联与系统函数

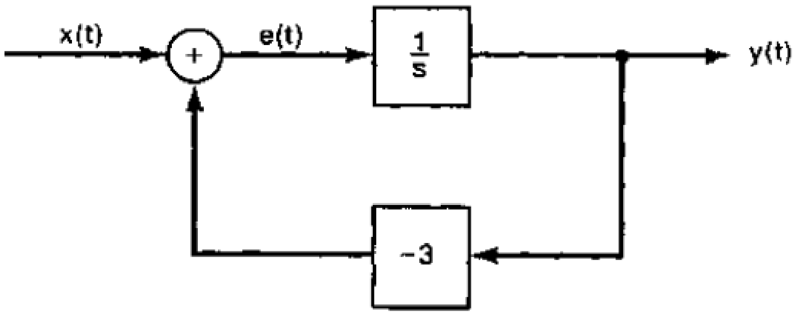
反馈系统举例：

$$H(s)=\frac{1}{s+3},\quad \text{ROC:}\ \ \mathrm{Re}\{s\}>-3$$

该系统可以用如下的微分方程来描述：

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$$

系统方框图为：



LTI系统的方框图实现形式

考虑如下系统函数：

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

本例将研究该系统的三种实现方式。

第一种，直接型

将系统函数变形为：

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\right)(2s^2 + 4s - 6)$$

定义：

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

LTI系统的方框图实现形式

$$W(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}X(s)$$

描述该系统的微分方程为：

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2}+3\frac{dw(t)}{dt}+2w(t)=x(t)$$

或者等效地：

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2}=x(t)-3\frac{dw(t)}{dt}-2w(t)$$

类似地可以定义：

$$Y(s)=(2s^2+4s-6)W(s)$$

LTI系统的方框图实现形式

描述该系统的微分方程为：

$$y(t) = 2\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 4\frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$

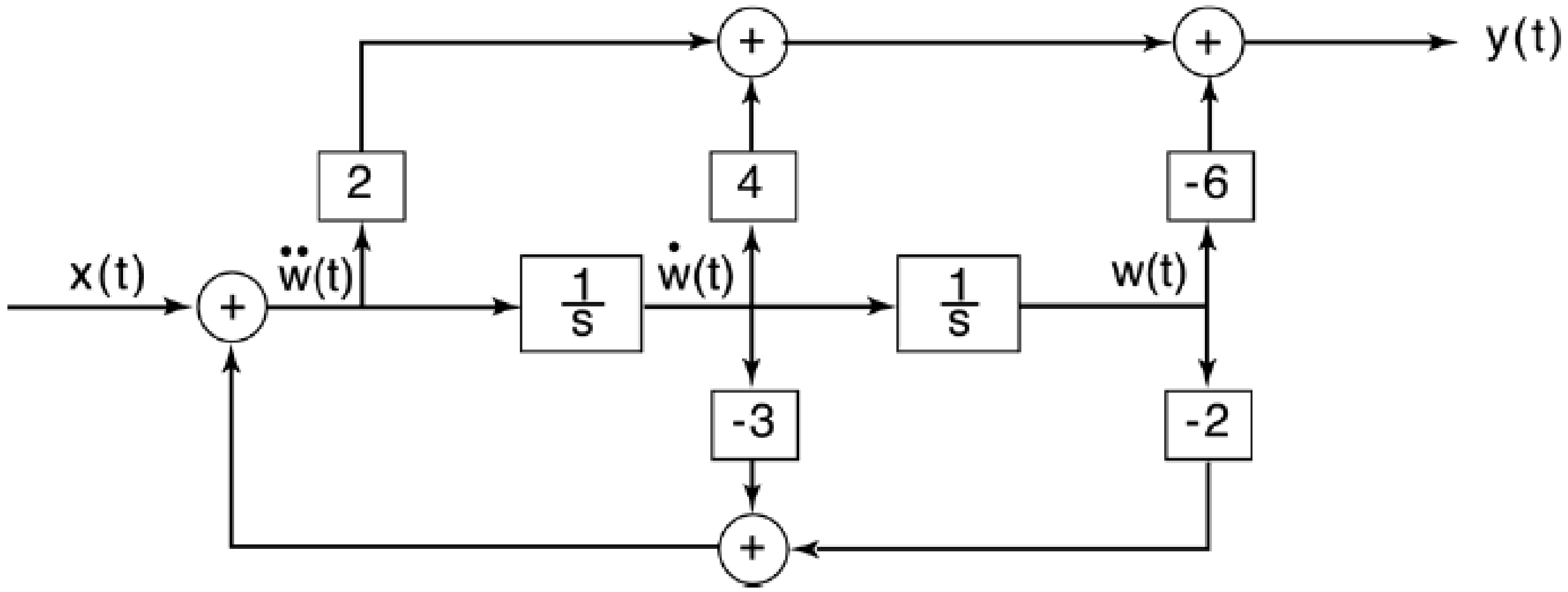
总结之前得到的结果，我们有：

$$\begin{aligned}\frac{d^2w(t)}{dt^2} &= x(t) - 3\frac{dw(t)}{dt} - 2w(t) \\ y(t) &= 2\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 4\frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)\end{aligned}$$

因此，系统的直接型方框图实现为：

LTI系统的方框图实现形式

$$y(t) = 2\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 4\frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$



$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} = x(t) - 3\frac{dw(t)}{dt} - 2w(t)$$

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

LTI系统的方框图实现形式

级联型如何实现？

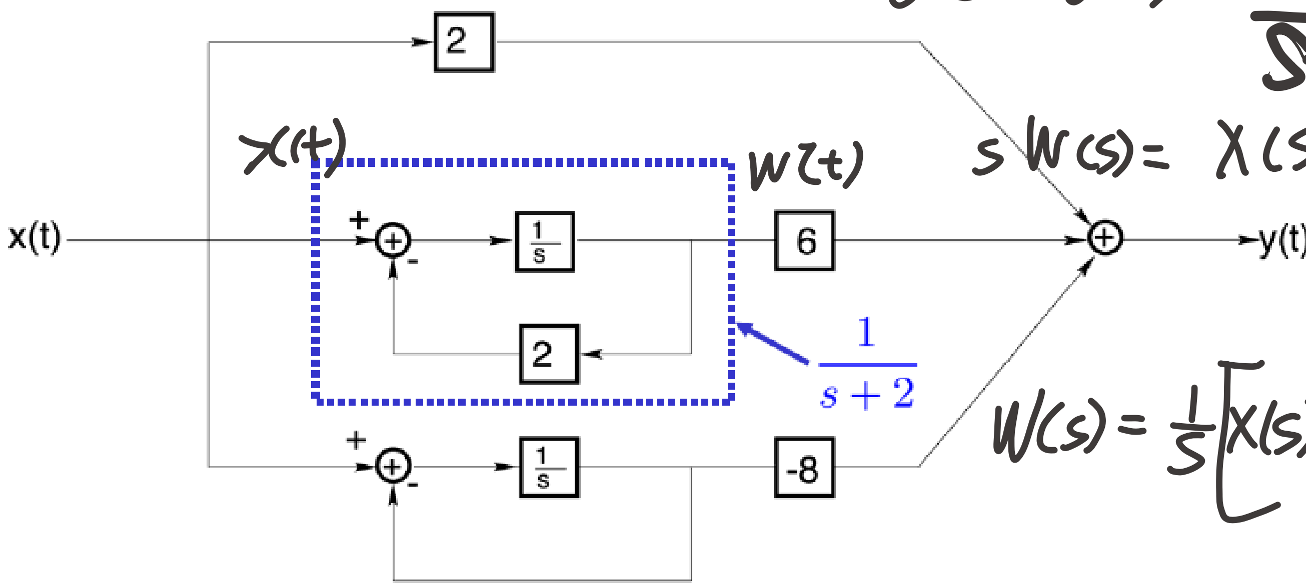
第二种，并联型

将系统函数变形为：

$$H(s) = \left[\frac{2(s-1)}{s+2}\right]\left[\frac{s+3}{s+1}\right] \overset{PFE}{=} 2+\underset{\Downarrow}{\frac{6}{s+2}}-\frac{8}{s+1}$$

所以，系统的并联型实现为：$6e^{-2t}u(t)$

$\frac{1}{s+2}$



$sW(s) = X(s) - 2W(s)$

$W(s) = \frac{1}{s}\left[X(s) - 2W(s)\right]$

LTI系统的方框图实现形式

- 对任何给定的有理系统函数，可以有多种不同的系统实现方案
- 具体选择何种方案需要考虑多个因素，例如：

  常数乘法器的个数和积分器的个数

  系统结构对有限精度运算的敏感度

  设计的模块化、算法的可分割性、调试的便捷性

  VLSI实现中芯片尺寸的要求

谢谢大家！