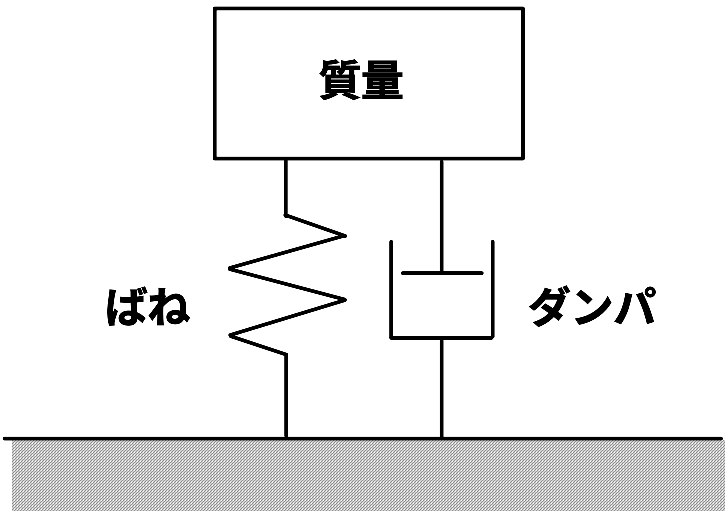
第０章　何故に振動工学？

順調に進級してきた人は，機械工学科に入学してから２年が過ぎました．専門科目もかなり勉強してきたはずです．機械工学科の基礎科目として，材料力学，流体力学，熱力学，機械工作などを習ってきました．それ以外にも，製図とかプログラミングとかいろいろ習ってきたと思いますが，数学とか力学も勉強を続けてきました．物理学における力学から機械分野での応用のために２年生でも「機械力学」の授業がありましたが，純粋に目新しいことはあまりなかったかもしれません．機械工学科に入学したときに皆さんの持っていた希望は何だったでしょうか？　自動車やオートバイ，ロボットを作りたいとか．環境とかにも興味があったかもしれません．入学してからの授業がほんとに将来役立つのかなどと思っている人もいるでしょう．将来のことは誰もわかりません．でも，今習っていることは，機械技術者として生きて行くためには間違いなく必要なことです．

さて，前置きの前置きがながくなりましたが，上で言った，自動車やロボットを設計するといった場合，イラストを描くのとは違い，現実に可能な機構および強度等を考慮しなければいけません．そのために，材力とか機構学などを習ってきました．また，電子回路とかプログラミングなども必要になるでしょう．しかし，もう一つ大事なことは，「機械は動くもの」であるということです．動かなければ，ただの道具，器具といえるかもしれません．動くことが機械の設計問題を複雑にしてきますし，振動工学を勉強する理由です．広くは，動力学（どうりきがく）と呼ばれています．これは，かなり範囲が広いものです，これから勉強する振動工学もこの中の１分野です．また今は，意外に思うかもしれませんが，制御とも深く関連してきます．日本機械学会では，機械力学・計測制御部門というように，材料力学部門，流体力学部門などと同様に分けられています．機械が動いている解きに，その動きを解析し，希望の動きになるように制御してやろうということです．つまりロボットが歩くためにはこれらのことが必要になります．

振動工学とか振動解析とか言うと難しいように思いますが，これから，授業で勉強することがらは，ニュートンの運動法則とほんの少しの微分方程式の知識があると理解できます．また，計算機を使った計算には行列操作の知識も必要になります．ともあれ，皆さんのこれからの健闘を期待します．



１自由度振動モデル

第１章　機械振動の基礎

キーワード；振動現象，調和振動，ベクトル表示，調和分析，フーリエ変換

１．１　振動問題

振動とは，位置や速度などの状態量が平衡状態のまわりで時間とともに変動する現象である．なぜ振動が発生するのかについて，機械構造物に関して考えてみると．保存系において，振動とは，慣性力（質量）と復元力（バネ）が動的に釣り合っている状態といえる．ここで，“動的”とは時間に依存しているという意味で使われている．上述の動的に釣り合っている状態とは，運動方程式により表すことができる．

１．２　振動の種類

振動の種類と言っても，現実にはそれぞれが単独で起こっている場合と複合している場合とがある．

Ⅰ．振動発生のメカニズムによる分類

自由振動；初期状態以外では，外部からの励振を受けない振動
強制振動；振動中に外部から励振を受ける振動
自励振動；振動的ではないエネルギーを外部より受けて生じる振動

Ⅱ．現象による分類

周期振動；同じ運動を繰り返す振動
不規則振動；同じ運動をしない振動

Ⅲ．運動方程式による分類

線形振動；慣性力，復元力，減衰力が定数係数で一次関数になっている式
非線形振動；一次関数ではない式，係数が変動する式・・・

１．３　振動の単位

特に振動に単位があるわけではないが，国際単位系（ＳＩ）として以下のような単位がよく使われる．

変位　m，速度　m/s，加速度　m/s²，力　Ｎ
角変位　rad，角速度　rad/s，角加速度　rad/s²，モーメント　Ｎ・m

振動を勉強している時に，知っておくとよい単位は，

地震では　gal（ガル）　980gal　＝　１ｇ（9.8m/s²）
レベルでは　dB　（デシベル）　A (m)　－＞　$20\log_{10} A$ (dB)

１．４　調和振動

最も簡単な周期運動　正弦波（SIN，COS）　周期Ｔ(sec)

全ての基礎である．線形振動である場合，どのように複雑そうに見えても結局は調和振動の組み合わせになる．－＞　調和分析，フーリエ分析

１．５　調和振動のベクトル表示

調和振動は，単純な円運動で表せる．円運動の軌跡をｘ軸（実数軸）またはｙ軸（虚数軸）に投影することにより調和振動となる．オイラーの公式（ド・モアブルの公式）を知っていれば簡単．

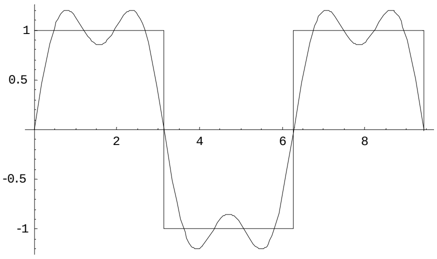
１．６　調和分析

振動に含まれている調和振動成分を抽出することにより，どの振動成分が支配的であるかを分析し，振動を生じている原因を求めることができる．そのために，フーリエ級数を利用して振動データを調和振動の振幅と振動数を求める．

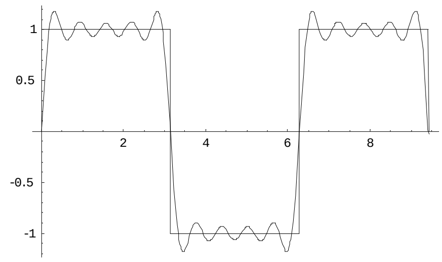
と言うことで，フーリエ級数を復習する．厳密意味では少し違いがあるが，利用法としては同じようなものなので，フーリエ変換についても思い出すこと．機械振動の勉強は，計算を主体とする場合は運動方程式の導出とその解析，実験的な場合はフーリエ変換の利用による振動成分の分析が基になっている．

フーリエ級数　矩形波

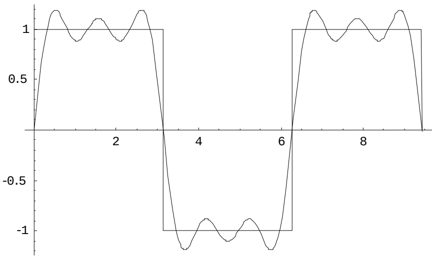
n=3



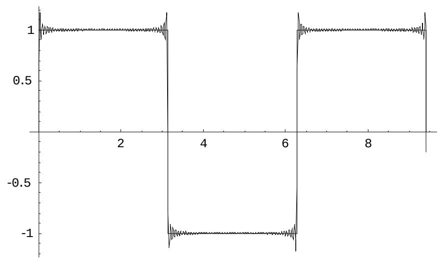
n=10

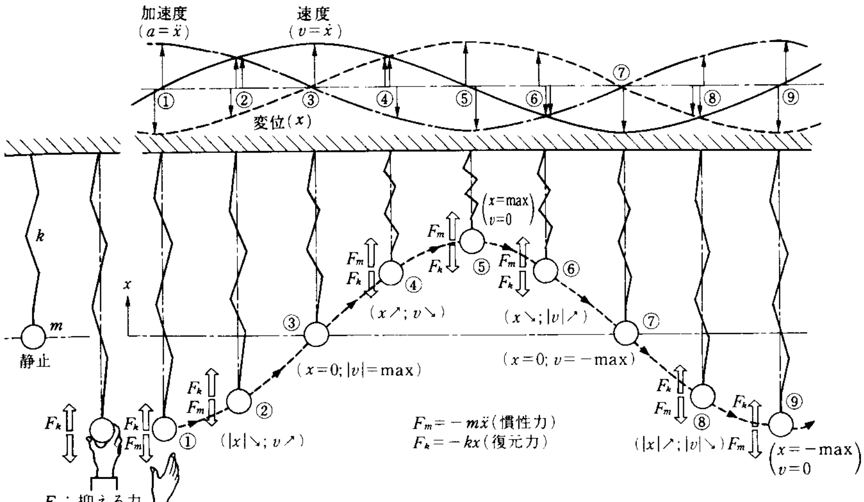


n=5



n=100





第２章　１自由度系の振動

キーワード；１自由度系，自由振動，固有振動数，強制振動，減衰

２．１　減衰のない自由振動

バネｋ・質量ｍからなる系の運動方程式を作成する．ニュートンの運動の第２法則より

$$m\ddot{x} = -kx + f \tag{1}$$

左辺は，質量ｍが加速度$\ddot{x}$で運動すること，右辺は系に働く力（バネの復元力，外力）を表す．減衰が無い系の振動を表す運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = f \tag{2}$$

で表される．ここで，自由振動を考えると外力が働かないので，式(2)においてｆ＝０として，両辺をｍで割ると

$$\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0 \tag{3}$$

ここで，$\omega_n{}^2 = k/m$である．ω_nは**固有円振動数**と呼ばれる．式(3)を解く手順は教科書 p.14 に記載されている．式(3)の解は２個の任意定数を含む式となる．自由振動の解を決定するには，初期条件（２個）が必要となる．たとえば，初期変位と初期速度などである．初期値が決定されると後の状態が決定されるような問題を初期値問題と言う．

自由振動は，角速度が固有円振動数である調和振動になることが分かる．以下に固有円振動数についてまとめる．（単位も注意）

固有円振動数　$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 2\pi f_n \quad (rad/s)$

固有振動数　$f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{\omega_n}{2\pi} = \dfrac{1}{T} \quad (Hz)$

周期　$T = \dfrac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \quad (s)$

２．２　エネルギ法

エネルギ法は，運動方程式をたてることなく，名前のとおり運動エネルギとポテンシャルエネルギを使って，固有振動数を求める方法である．利点は，運動方程式をたてないために，力や変位の方向に気をつかわずにすむ所である．エネルギの計算は式の上では長くなるが，大きさのみの量（スカラ）なので，方向を気にする必要がない．[例 2.5]を見れば，利点がわかる．この問題の運動方程式をたてるのは結構ややこしいことがわかると思う．

エネルギ法は，後の章で出てく Lagrange の方程式（解析力学ではすでに習得済み）を考えるときの基礎になる．教科書では，式(2.17)～(2.21)あたりのエネルギから運動方程式を求めるあたり．

２．３　減衰のある自由振動

基礎的な説明は教科書が詳しいので，ここでは少し違う観点から解を求める．どういうことかと言うと, 数値的に求めることを考える. すなわちパソコンで求める方法について考えます. 使う言語は，C 言語とします．外にも，MATLAB 等何でも良いのですが，皆さんも使ったことがあるし，フリーのコンパイラもあるので用います．

まず手始めに，以下のような変形をします．

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

を，$x=x_1$, $dx/dt=x_2$ とおいて，次のような１階微分の形にします．

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt}=-\frac{c}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1$$

これは，変数を置き直しただけです．２階微分の式が１階微分の式に変形できました．この表記法は状態方程式と呼ばれます．将来，制御を勉強するときにも役立ちます．

運動方程式を計算機をつかって解くときは，微分を差分式に近似して解きます．たたみ込み積分を利用する場合など例外もありますが，基本的には近似して解いて行きます．最近は，数式処理のできる言語もあり，微分方程式を解いてくれるようなソフトもありますが，今のところ将来を考えると，最初からあまり楽をするのはおすすめしません．

$$\frac{dx_1}{dt}=f(x_1,x_2,t)$$
$$\frac{dx_2}{dt}=g(x_1,x_2,t)$$

と書きかえることができる．

$$\frac{x_1(t+\Delta t)-x_1(t)}{\Delta t}=f(x_1,x_2,t)$$
$$\frac{x_2(t+\Delta t)-x_2(t)}{\Delta t}=g(x_1,x_2,t)$$

すなわち，

$$x_1(t+\Delta t)=x_1(t)+\Delta t\cdot f(x_1,x_2,t)$$
$$x_2(t+\Delta t)=x_2(t)+\Delta t\cdot g(x_1,x_2,t)$$

の差分式から，右辺の現在の値から，左辺の未来の値が計算できる．これは，オイラー法と呼ばれる数値積分法（または，直接積分法，差分スキーム等と呼ぶ）である．ただし，実際の場

面で，このままの形のオイラー法が使用されることは無い．通常は，ルンゲクッタ法などの方法が使用される．（教科書７章を見て下さい）

```
// Sample Program(MicroSoft VC++ 6.0)
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <string.h>
#include <iostream.h>
#define M_PI 3.141592
void main()
{
	double m=1,c=0.1,k=1;
	double x=1,v=0,t=0,h;
	double kx1,kx2,kx3,kx4;
	double kv1,kv2,kv3,kv4;
	int i,nsteps;
	cerr << "Enter nsteps:";
	cin >> nsteps;
	h = 10*M_PI/nsteps;
	cout.precision(16);
	cout << " x= " <<x <<" v= "<<v <<" h= "<<h <<"¥n";
	cout <<t <<"    " << x <<"    " << v <<"¥n";
	for (i=0; i<nsteps; i++){
		t=h*(i+1);
		kx1 = v*h;
		kv1 = (-c/m*v -k/m*x)*h;
		kx2 = (v+kv1/2)*h;
		kv2 = (-c/m*(v+kv1/2) -k/m*(x+kx1/2))*h;
		kx3 = (v+kv2/2)*h;
		kv3 = (-c/m*(v+kv2/2) -k/m*(x+kx2/2))*h;
		kx4 = (v+kv3)*h;
		kv4 = (-c/m*(v+kv3) -k/m*(x+kx3))*h;
		x += (kx1+2*kx2+2*kx3+kx4)/6;
		v += (kv1+2*kv2+2*kv3+kv4)/6;
		cout.precision(16);
		cout <<t <<"    " << x <<"    " << v <<"¥n";
	}
}
```