

用 MATLAB 确定参数方程曲线的交点

徐婷佳

(安徽建筑工业学院 机械与电气工程学院, 安徽 合肥 230022)

摘要: 讨论了利用 MATLAB 解决确定参数方程对应曲线的交点问题的一般方法和思路, 并通过一个例题的求解, 给出了完整的指令序列, 使问题迎刃而解。所给出的方法对解决此类问题是通用的。

关键词: 曲线; 参数方程; 交点; MATLAB; m-文件

中图分类号: TP312 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-380X (2010) 08-0067-02

Finding the Intersections of Curves in Parametric Equations with MATLAB

XU Ting-jia

(School of mechanical and electrical Engineering, Anhui University of Architecture, Hefei 230022, China)

Abstract: It's difficult to find the intersections of curves in parametric equations. The general mentality and program code to solve this problem by MATLAB was discussed. And the method made the solution easily.

Key words: curve; parametric equation; intersection; MATLAB; m-file

在科学研究和工程计算中, 经常会用到参数形式的方程。求解多变量参数方程是一件麻烦事, 好在现在可以用功能强大的工具软件 MATLAB。对于两条用参数方程表示的曲线, 如何确定它们的交点, 可以归于一类问题。结合一个具体问题给出 MATLAB 解答, 讨论利用 MATLAB 确定参数方程曲线的交点的一般方法问题。

1 问题表述

问题表述为: 求

$$\text{曲线 } C_1: \begin{cases} x = x_1(\alpha) \\ y = y_1(\alpha) \end{cases} \quad (a < \alpha < b)$$

$$\text{与曲线 } C_2: \begin{cases} x = x_2(\alpha) \\ y = y_2(\alpha) \end{cases} \quad (a < \alpha < b) \text{ 的交点。}$$

这里应该说明: ① 两条曲线的参数方程中的参数 α 是相互无关的, 在交点 (如果存在) 处它们的值通常是不同的;

② 两条曲线定义中参数的取值范围可以不同, 但交点 (如果存在) 一定在其公共区间 (参数方程定义域的交集) 内。

$$\begin{cases} x = (10.96015 - 0.75/\cos\alpha) \sqrt{3 + \cos^2\alpha} \\ y = 2.25 \tan\alpha + 10.96015 \sin\alpha \end{cases} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$$

以某论坛上一篇帖子^[1]提出的问题为例, 来讨论这类问题的 MATLAB 解法。问题是确定两个参数方程 (已经用 MATLAB 将其简化, 虽然这不是必要的步骤) 曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点。用 MATLAB 绘出这两条曲线 (图 1)^[1], 显示它们确有交点, 问题是要确定交点坐标。确实, 这类问题可能不大引人注目, 也未见于数值方法方面的资料^[2]。

2 参数方程曲线交点的确定

设两曲线上分别有两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 各自

随着参数 α, β 的变化而在曲线 C_1, C_2 上移动, 它们之间的距离 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 不断变化。如果两曲线有交点, 就有特定的参数值 α, β 使得 $d = 0$, 这时两点重合, 就是交点 $P(x, y)$, 据此可得出交点 P 的求法。下面给出几种算法的程序

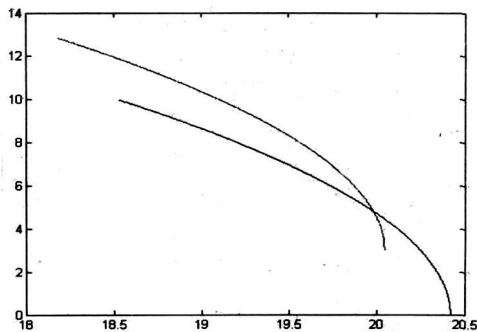


图 1 参数方程的曲线

2.1 机械搜索法:

$$\begin{cases} x = (10.77265 - 0.75/\cos\beta) \sqrt{3 + \cos^2\beta} \\ y = 2.25 \tan\beta + 10.77265 \sin\beta + 3 \end{cases} \quad (0 < \beta < \frac{\pi}{4})$$

最直接的办法就是对参数 α, β 展开遍历式搜索, 可用以下指令序列实现:

```
da=1.0e-4 %第一个参数的搜索步长
db=1.0e-4 %第二个参数的搜索步长
err=1.0e-4 %控制精度, 收敛判据
a=0 %第一个参数的初始值
while a<=Pi/4 %对第一个参数的搜索
    x1=(10.96015-0.75/cos(a))*sqrt(3+cos(a)^2);
```

① 收稿日期: 2010-09-14

作者简介: 徐婷佳, 女, 安徽庐江人, 研究方向: 电气工程及其自动化。

```

y1=2.25* tan ( a ) +10.96015* sin ( a);
b=0 % 第二个参数的初始值
while b<= Pi/4 %对第二个参数的搜索
x2=(10.77265-0.75/cos( b )) * sqrt(3+cos( b ))^2);
y2=2.25* tan ( b ) +10.77265* sin ( b ) +3;
if( (x1-x2)^2+(y1-y2)^2<err break %找到啦
end
b= b+ d b %变动第二个参数
end
if b<= Pi/4 break %找到啦
end
a= a+ d a %变动第一个参数
end
[ a b x1 x2 y1 y2]

```

如果输出的参数值越界则表明交点不存在取初值 $(a, b) = (0, 0)$ 搜索步长 0.0001, 控制精度 10^{-4} , 计算得交点 $P(19.994, 4.7135)$ 。

这种机械搜索, 效率特低, 仅在参数变动范围不大, 精度要求不高时, 尚可临时一试。也可改用较为有效的搜索方法如二分法、优选法。

2.2 极值点法

曲线交点 P 的坐标就是复合函数:

$f(\alpha, \beta) = (x_1(\alpha) - x_2(\beta))^2 + (y_1(\alpha) - y_2(\beta))^2$ 的零点。由于 $f(\alpha, \beta) \geq 0$, 因此, 问题转化为求 $f(\alpha, \beta)$ 的极小值点。

记 $x = [\alpha, \beta]^T$, 将函数 $f(\alpha, \beta)$ 转化成函数 $f(x)$ 。则可用以下指令序列求解:

```

x1='(10.96015-0.75/cos(x(1))) * sqrt(3+cos(x(1))^2);'
y1=2.25* tan(x(1)) +10.96015* sin(x(1));'
x2='(10.77265-0.75/cos(x(2))) * sqrt(3+cos(x(2))^2);'
y2=2.25* tan(x(2)) +10.77265* sin(x(2)) +3;
x0=[ Pi/8 Pi/8];
f= strcat('( (x1 - (x2))^2 + (y1 - (y2))^2 );'
x= fminsearch(f, x0); % 求解参数
x1= inline(x1);
y1= inline(y1);
x2= inline(x2);
y2= inline(y2);
P1=[ x1(x); y1(x)];
P2=[ x2(x); y2(x)];
P=(P1+P2)/2
[ x P1 P2]

```

如果输出的参数值越界则表明交点不存在。

参考两条曲线参数方程的定义域, 取初始点 $x_0 = [\pi/8, \pi/8]^T$ 进行计算, 得到两曲线交点为 $P(19.9830, 4.8011)$, 对应的参数近似值分别是 $\alpha = 0.3673, \beta = 0.1385$ 。

这里的参数方程是以字符串形式出现的。将字符串功能与 `inline` 函数相结合, 是 MATLAB 中常用的技巧。

关于 MATLAB 应用的指导书几可汗牛充栋, 然而实际工作中最好用的却是软件的在线帮助系统^[3]。

2.3 利用 m 文件

以上方法的特点是: 求解工作完全在 MATLAB 的 Command Window 里进行, 过程中需要用到 `inline` 内联函数。

用 MATLAB 确定参数方程曲线的交点, 最简便有效的途径应该还是利用 m 文件。

如前所述, 交点 $P(x, y)$ 满足 $d = 0$, 因此, 可以定义一个函数, 以 $x = [\alpha, \beta]^T$ 作为自变量, 计算两条曲线上的点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 以及它们的距离 d 。将这个函数存放于 m 文件中。本问题的 m 文件内容如下:

```

function [ d P1 P2 ] = f00505 ( x )
x1=(10.96015-0.75/cos(x(1))) * sqrt(3+cos(x(1))^2);
y1=2.25* tan(x(1)) +10.96015* sin(x(1));
x2=(10.77265-0.75/cos(x(2))) * sqrt(3+cos(x(2))^2);
y2=2.25* tan(x(2)) +10.77265* sin(x(2)) +3;
P1=[ x1 y1];
P2=[ x2 y2];
d= distance(P1, P2);

```

将此文件保存为: `f00505.m`

在 MATLAB Command Window 中用以下指令序列求解:

```

x= fminsearch (@ f00505 [ 0 0 ] );
[ d P1 P2 ] = f00505 ( x );
P=( P1+ P2 ) * 0.5;
[ x P]

```

得到两曲线交点为 $P(19.9829, 4.8020)$, 对应的参数近似值分别是 $\alpha = 0.3673, \beta = 0.1386$ 。

在以上介绍的几种解法中, 针对不同的问题, 只有与问题定义相关的代码需要修改。显然, 将求交点问题转化成求函数极点问题, 利用 m 文件的方法非常简单易用, 计算效率很高, 是解决此类问题的首选之法。

3 结束语

讨论了利用 MATLAB 确定参数方程曲线交点的一般方法。对于这类应用问题, 给出算法或者框图是有参考意义的, 但列出程序代码无疑是一个更好的方法^[4-6]。为此, 从有利于实用的角度出发, 结合一个具体实例, 给出了完整的程序代码, 对于求解本类问题有直接的参考作用。

参考文献:

- [1] <http://www.bytnet.com/read.htm?tid=297094> `hmtEB/OL`; 2010-5-1 引自博研联盟
- [2] MATHEWS J H, FNK K D. Numerical Methods Using MATLAB M. Third Edition. BEIJING: Publishing House of Electronics Industry, 2002. 9
- [3] The MathWorks Inc. MATLAB Help CH
- [4] 苏少卿. BOS 字符集的再生利用 [J]. 计算机应用研究, 1994, 11(6): 66-67
- [5] 苏少卿, 陈力进. 汉字字模读取程序 ZM 的原理与实现 [J]. 计算机应用与软件, 1994, 11(1): 46-49. 63
- [6] 邱爱保. 重积分数值解的 MATLAB 实现 [J]. 宜春学院学报, 2008, 30(4): 15-16